

1eje. 5

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

LOS ORIGENES DEL CALCULO

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

M A T E M A T I C O

6692

P R E S E N T A :

JOSE CHACON CASTRO



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

# TESIS CON FALLA DE ORIGEN

## A. LA CONCEPCION DE LA NATURALEZA

### A.1. Platón

El Timeo o de la Naturaleza, es la obra más representativa y complicada del pensamiento de Platón y de su escuela. El Timeo, es el relato de la creación del mundo, en él, Platón cuenta como el Demiurgo, o Dios supremo tras de haber formado una mezcla de lo Mismo y de lo Otro -lo inteligible y eterno por un lado y, por otro lo sensible y fluyente-, forma el Alma del Mundo eterna y activa simultáneamente. Con esta mezcla de lo Mismo y de lo Otro, dividido según las leyes matemáticas y de la armonía, el Demiurgo formó dos círculos (los del Zodíaco y la Eclíptica) que, por sus revoluciones circulares, determinan los movimientos del mundo sublunar. Los dioses inferiores, los dioses astrales, las almas, se forman con el resto. A continuación, cortando el espacio en pequeños triángulos, el Demiurgo forma los cuerpos elementales, y de éstos, los cuerpos reales, las plantas, los animales y el hombre, siendo ayudado en su trabajo por los dioses inferiores, en esta obra se encuentran cuatro temas fundamentales: El mundo, las ideas Astronómicas (mezcla de cosmogonía mística y Mecánica Celeste), el Lugar y la Materia, y la Formación del hombre (de su Alma y su cuerpo). La discusión del Timeo comienza por establecer la necesidad

de producir movimiento; el Demiurgo produce formas nuevas, pero estas formas son una combinación armoniosa de elementos preexistentes a la forma producida. En efecto, la - esencias que participan en la formación del Alma del Mundo, aquella que es y no deviene, y la que deviene, y la - que deviene y no es, se convierten en partes integrantes del Alma del Mundo, es, y no son, ya, simples modelos; - gracias a esta Alma del Mundo se transita de la especula - ción teórica a la descripción de la realidad sensible. - Es decir el Alma del Mundo se configura, para la acción - eficiente del Demiurgo, a partir del Modelo eterno o Vi - viente-en-sí, es decir, el conjunto de Ideas o Formas - (*ἀρχαί*) que abarca las esencias eternas, de todo lo vi - viente y que constituye un sistema perfectamente trabado y coherente de esencias, eternas sometido a la ley del - Bien, y del Mundo visible que es un sistema incoherente e imperfecto al que se aplicará la acción ordenadora del Demiurgo. (Timeo 18a-46b) Es evidente que todo el Ti - meo se erige sobre las hipótesis que emanan de la teoría de las Ideas (*ἀρχαί*), Ideas que son, así, causa necesaria de la existencia del cosmos sensible. Las Ideas, en efec - to, son siempre inteligibles, pero nunca inteligencias; son entidades objetivas, inmóviles y trascienden absolu - tamente a lo sensible, pero no son nunca entidades perso

de una explicación del mundo a partir de la dualidad: es absolutamente necesario que el mundo material esté construido sobre un modelo, (es decir para explicar este origen pone en relación teleológica el mundo de la aparición con las ideas<sup>1</sup>) y, sin embargo, es posible concebir dos modelos opuestos, uno que siempre es, que jamás deviene y otro que nunca es, que siempre nace y perece.

Platón afirma que el primero es aprendido por la inteligencia y el raciocinio, pues es constantemente indéntico a sí mismo. El segundo, al contrario, es objeto de la opinión unida a la sensación irracional, y no existe jamás realmente.

Ahora bien, como todo lo que nace, nace necesariamente - por la acción de una causa, pues es imposible que algo - pueda nacer sin causa y como esta serie de causas no puede ser infinita, debe tener un punto inicial incausado, por ello Platón asegura la existencia de un creador increado de este cosmos de un Dios supremo o Demiurgo cuyo descubrimiento es una gran revelación imposible de divulgar. Platón se propone caracterizar a este Demiurgo únicamente en base a los modelos que representan al cosmos: la característica principal de tal Demiurgo es que se trata de una causa activa y eficiente, con el poder activo-

<sup>1</sup> cfr: La República, X, 596d, passim.

nales y activas, agentes directos de la formación del mundo natural. Esto conduce a la problemática de una ciencia absoluta y perfecta; ciencia de las ideas absolutas y eternas. Sobre lo sensible, en efecto, no pueden existir más que opiniones más o menos convincentes, ya que los razonamientos guardan una afinidad o parentescos con los objetos mismos que explican. Se puede afirmar:

### Tesis 1:

Según Platón, una explicación del mundo material sólo puede ser "verosimilmente proporcional" y no se ha de esperar que llegue nunca a ser exacta, es decir la física jamás podrá ser una ciencia exacta.

### A.2. Aristóteles

Según la tradición, Aristóteles daba en su escuela dos tipos de lecciones: las esotéricas o acroamáticas y las exotéricas, las primeras, en el Liceo por las mañanas y las exotéricas por las tardes; éstas versaban, al parecer sobre la práctica de la retórica y el arte de disputar así como el conocimiento de los asuntos civiles; aquellas, en cambio, recaían sobre problemas profundos e internos de filosofía, sobre el estudio de la naturaleza y la dialéctica en sentido estricto.

La Teoría Física o de los principios, es una obra acroamativa. Para Aristóteles la Física es el estudio de la naturaleza, cuyo objeto es la determinación del principio de las cosas naturales; y es por medio del método analítico, que se alcanzan tales principios.

El término naturaleza se extiende a todos los seres que poseen en sí mismos un principio intrínseco de movimiento (Física, I. 2. 185a/185b), la existencia de estos seres es evidente y no es necesario demostrarla, se alude simplemente a la evidencia inmediata de nuestra experiencia. Aristóteles asegura -tras un análisis crítico sobre las corrientes filosóficas anteriores- que el número de tales principios es finito y que son solamente tres (Física, I, 6, 189a/189b), haciendo resaltar que las cosas que son contrarias son principios. Dice Aristóteles:

"Así pues hay tres causas y tres principios, dos que constituyen la misma: de una parte la noción sustancial y la forma, y de otra parte la privación, y, en tercer lugar, la materia" (Metafísica XII, 2, 1069b/).

En base a ello el Estagirita conduce la problemática de la naturaleza a la del estudio de la esencia de estos seres. Para Aristóteles ser significa por una parte la esencia y la forma determinada de cada cosa; por la otra, -

significa cualidad, cantidad y cada uno de los atributos de especie semejantes; es evidente que la esencia es el ser primero de entre todos estos. Supuesto, pues, el fin de la ciencia: el estudio de las causas de las cosas, hay que encuadrar los elementos constitutivos de los seres naturales en la tabla general de las causas, "a saber: la causa material, la causa formal, la causa eficiente y la causa final. Dice Aristóteles:

"Al ser evidente es necesario adquirir la ciencia de las causas primeras, pues creemos conocer una cosa cuando conocemos su causa primera, distingamos las clases de causas que hay. Podemos señalar cuatro causas: la primera es la esencia, la forma propia de cada cosa<sup>1</sup>, porque lo que hace que una cosa sea ella está todo entero en la noción de lo que ella es; la razón de ser primera es, pues, una causa y un principio. La segunda es la materia y el sujeto<sup>2</sup>. La tercera es aquello por lo que tiene comienzo el movimiento<sup>3</sup>. La cuarta opuesta a la precedente, es -

<sup>1</sup> Este término aristotélico corresponde a los términos escolásticos de - esencia, quiddidad, causa formal o forma sustancial.

<sup>2</sup> El término escolástico correspondiente es la causa material, o sea lo - que queda sujeto o subordinado a la acción definidora de la causa formal.

<sup>3</sup> Este principio es la causa eficiente, que hace pasar de la posibilidad -su naturaleza- a la realidad de la materia. Movimiento es para Aristóteles, toda clase de cambio, del ser al no-ser o viceversa, de un estado a otro estado, de una forma a otra forma, de una localización espacial a otra, de una relación temporal a otra relación temporal. (Notas de F. de P. Samaranch).

la causa final de las cosas y el bien, pues, el bien es el fin de toda generación y todo cambio". (Metafísica 1, 3, 983a/983b).

De las cuatro causas, dos, la formal y la final, son de claradas indistinguibles y, reductibles a una. Pero, - desde cierto punto de vista, también la causa eficiente es, en la generación indistinguible con la formal. Por eso las causas fundamentales son estas dos: causa material y causa formal, la unidad de las cuales constituye la sustancia real o individuo y así la pregunta por el ser se reduce a la pregunta por la sustancia, sustancia que contiene tres aspectos constitutivos, a saber:

- i) materia
- ii) forma
- iii) unidad

Sobre esto nos dice Aristóteles:

"Hemos visto que lo universal ni el género eran sustancias. (discusión que se efectúa en Metafísica VII). De las ideas y de los seres matemáticos nos ocuparemos más adelante, ya que algunos colocan estas sustancias fuera de las sustancias sensibles (discusión que se efectúa en Metafísica, XIII, ).

Ahora nos ocupamos de las sustancias unánimemente admitidas. Estas son las sustancias sensibles. Ahora bien: todas las sustancias sensibles tienen materia. El mismo sujeto es una sustancia: tanto si se le considera como materia -y por materia entiendo lo que, sin ser en acto tal ser determinado, lo es en potencia-, como si se le considera noción y forma, es decir esta esencia separable del ser, aunque sólo por medio del entendimiento. Finalmente, también lo es lo que consta de estas otras sustancias, de quien tan sólo es propia la generación y la destrucción, y lo único que es completamente independiente. Porque de las sustancias que incluimos en la noción misma, unas son separables, otras no." (Metafísica VIII, 1, 1042a/1042b).

"Ahora bien al estudiar la esencia de estos seres, sabemos que en ellos, lo que es naturaleza es materia, pues es capacidad, y al mismo tiempo, y con mayor razón es forma, pues gracias a la forma una cosa es lo que es; gracias a ella se mantiene en un modo de ser en la generación y también gracias a ella viene a ser lo que es". (Física II, 1. 192b/193a).

De tal manera que la física no debe ocuparse de formas abstractas, puesto que las cosas físicas son insepara-

bles de sus materias determinadas y por consiguiente el objeto del físico debe ser la materia unida a la forma, aunque con la atención inclinada ligeramente hacia ésta última, que es lo que da verdaderamente la explicación de las cosas. (Física II, 2. 194a/194b). En otras palabras, por lo que toca al concepto general de la naturaleza hay que decir que Aristóteles expone ésta del modo más alto y más verdadero. En efecto, en la idea de la naturaleza, tal como Aristóteles lo concibe, son esenciales dos determinaciones: el concepto del fin y el concepto de necesidad. Aristóteles afronta inmediatamente el problema en lo que tiene de fundamental, que es la antigua antinomía, heredada a la ciencia posterior, entre la necesidad (causa eficiente) y la finalidad (causa final). El primer punto de vista gira en torno a la necesidad exterior, que es lo mismo que la casualidad: en este punto de vista, lo natural se concibe en general, como, determinado desde fuera por causas naturales. El otro punto de vista es el teleológico: la finalidad puede ser interior o exterior, y en la cultura moderna ha prevalecido como determinante, durante largo tiempo la segunda. Se puede afirmar entonces:

Tesis 2:

Aristóteles plantea la posibilidad misma y la especificidad de la física, es decir de una ciencia de los seres en movimiento en tanto que "en-movimiento". De otro modo, el estudio de estos seres caería en la esfera de - otras disciplinas.

## B. LOS CONCEPTOS DE FORMA Y DE MATERIA

### B.1. Platón.

Para Platón los conceptos de materia y forma se encuentran estrechamente relacionados con los de tiempo y lugar; iniciaré la discusión haciendo varias citas que analizaré posteriormente, dice Platón:

"Distinguimos entonces dos clases de ser. Nos es preciso ahora descubrir una tercera clase. Las dos primeras clases eran suficientes para nuestra anterior exposición. Habíamos supuesto que una de ellas era la especie de Modelo, especie inteligible e inmutable; la segunda, copia - del Modelo, estaba sujeta al nacimiento y era visible. - No distinguimos entonces una tercera especie de ser, por que estimamos que eran suficientes esas dos. Pero ahora la secuencia de nuestro razonar parece forzarnos a intentar hacernos concebir, por nuestras palabras, una tercera especie, que resulta oscura y difícil.

"¿Qué propiedades hay que suponer que posee ella naturalmente?. Ante todo hay que asignarle una propiedad de este tipo: ella es el soporte y como la nodriza de todo nacimiento o generación". (Timeo, 49a). "Ahora bien: es forcémonos por decir sobre ello algo más claro. Supongamos que alguien modela en oro todas las figuras posibles

y no para ni un solo momento de transformar cada una de ellas en todas las demás. Supongamos que a ese artista se le muestra una de las figuras y se le pregunta «¿Qué es eso?». La respuesta con mucho la más ciertamente verdadera sería «Eso es oro.» En cuanto a la figura triangular y a todas las demás figuras que hayan podido producirse en ese oro, no se las puede designar nunca como seres, puesto que ellas se transforman en el mismo instante en que uno los establece. No obstante, si se quiere aceptar constantemente la expresión «lo que tiene esta cualidad», contentémonos con ello.

"Ese mismo razonamiento cabe hacerlo en la cuestión de la naturaleza que recibe todos los cuerpos. También a ella hay que darle siempre un mismo nombre. Pues tampoco ella podrá nunca perder de una manera absoluta sus propiedades. Ella, en efecto, recibe siempre todas las cosas pero jamás, en ninguna circunstancia, toma en nada una figura semejante a ninguna de aquellas que entran en ella. Pues ella es, por naturaleza, como un portasellos para todas las cosas. Es puesta en movimiento y recortada en figuras por los objetos que penetran en ella, y gracias a la acción de estos aparece unas veces bajo un aspecto, otras veces bajo otro". (Timeo, 50b) "Al ser esto así, hay que admitir que existe una primera realidad: lo que tie-

ne una forma inmutable, lo que de ninguna manera nace - ni perece, lo que jamás admite en sí ningún elemento venido de otra parte, lo que jamás se transforma en otra cosa, lo que no es perceptible ni por la vista ni por - otro sentido alguno, lo que solo el entendimiento puede contemplar.

"Hay una segunda realidad que lleva el mismo nombre: es semejante a la primera, pero cae bajo la experiencia de los sentidos, es engendrada, siempre está en movimiento, nace en un lugar determinado para enseguida desaparecer, es accesible a la opinión unida a la sensación. Finalmente existe siempre un tercer género, el del lugar: no puede morir y brinda un sitio a todos los objetos que - nace. El mismo no es perceptible más que gracias a una especie de razonamiento híbrido, que no va de ninguna - manera acompañado de la sensación; apenas se puede creer en ello". (Timeo, 51c).

"Ahora bien la «nodriza» de eso que nace, humedecida, - abrasada, y recibiendo asimismo las formas de la tierra y el aire, y experimentando todas las demás modificaciones que son consecuencia de aquellas, se nos manifiesta a la vista como infinitamente diversificada. No obstante, colmada de fuerzas que no eran ni uniformes ni equi

libradas, no se halla bajo ningún aspecto en equilibrio, antes es sacudida irregularmente en todos los sentidos y sufre trastornos de estas fuerzas y, al mismo tiempo, el movimiento que recibe de ellas se lo restituye a su vez en forma de nuevas sacudidas. Entonces los objetos llevados de esta manera, unas veces hacia un lado, otras hacia otro, se separan los unos de los otros. De igual manera, gracias a la acción de las cribas y otros ingenios que sirven para tamizar el grano, una vez sacudidas y agitadas las semillas, las que son densas y pesadas se van hacia un lado, y las que son raras y ligeras se van hacia el lugar opuesto y se fijan en él. Análogamente aquí, los cuatro elementos han sido sacudidos por la realidad que los había recibido y cuyo movimiento propio les comunicaba esas sacudidas, como si fuera una criba. De esta manera y en el mayor grado posible, ella ha separado unos de otros los más desemejantes de entre ellos y ha acercado lo más posible en una sola masa los más emparentados entre sí, de manera que los unos han ocupado un lugar y los otros un lugar distinto, y esto antes incluso de que el Todo formado por ellos se hubiera ordenado. Ciertamente, antes de la formación del mundo todos esos elementos se comportaban sin razón ni medida. Y asimismo, cuando el Todo comenzó a ordenarse, al comien-

zo mismo aún, el fuego, el agua, la tierra y el aire tenían ya ciertamente algún rasgo de su forma propia, pero en su conjunto permanecían evidentemente en aquel estado en que es natural se encuentre todo cuando el Dios está ausente de ello. Entonces fue cuando todos los géneros constituidos de esta manera recibieron de él su figura, por la acción de las ideas y los números. Pues, en la medida en que era posible, de estos géneros que en manera alguna estaban dispuestos así, el Dios ha hecho un conjunto, el más bello y el mejor. Tomemos, pues, en todo y siempre esta proposición como base." (Timeo 53a).

"Y ahora habré de esforzarme por manifestaros, por medio de un razonamiento bastante insólito, la manera en que fue dispuesto y en que fue generado cada uno de los elementos. Pero supuesto que todos participáis de los métodos de la ciencia, de la que necesariamente me he de servir para demostrar lo que digo, me seguiréis.

"En primer lugar, resulta evidente para todo el mundo que el fuego, la tierra, el agua y el aire son cuerpos. Ahora bien: la esencia del cuerpo posee también siempre el espesor. Pero todo espesor envuelve necesariamente la naturaleza de la superficie. Y toda superficie de formación rectilínea está compuesta por triángulos. Ahora

bien: todos los triángulos derivan su principio de dos tipos de triángulos, de los cuales cada uno no tiene un ángulo recto y los otros agudos. De esos triángulos - uno tiene por una parte y por otra, una parte del ángulo recto dividido por dos lados iguales; el otro tiene partes desiguales del ángulo recto divididas por lados desiguales. Este es el principio que suponemos para el fuego y para los demás cuerpos elementales. Y de esa manera vamos a avanzar, de conformidad con un razonamiento cuya verosimilitud va unida a la necesidad. En cuanto a los principios superiores aún a estos, solamente un Dios los conoce, y entre los mortales, aquellos a quienes ese Dios concede su amistad. Pero ahora hace falta explicar qué propiedades deberían tener los cuerpos más bellos y en número de cuatro, para ser una por una parte distintos los unos de los otros y por otra parte capaces de nacer uno de los otros al deshacerse. Si conseguimos esto, tendremos la verdad sobre el origen de la tierra, del fuego y de los cuerpos intermedios entre esos dos, según relaciones regulares. Y no concederemos a nadie que sea posible ver en alguna parte cuerpos más bellos, cada uno de los cuales constituya un género distinto. En consecuencia esforcémonos por formar una progresión con la ayuda de estos cuatro géneros de

cuerpos distintos en belleza y demostrar de esta manera que hemos comprendido suficientemente la naturaleza de ellos.

De los dos triángulos, el que es isósceles no tiene más que una especie; el que es escaleno tiene un número indefinido de ellas.

No es, pues, necesario dar la preferencia, entre los que tienen un número indefinido de especies, al que sea más bello, si empero queremos comenzar según el orden pretendido -no obstante, si alguien pudiera descubrir y designar otro de esta misma clase que fuera aún más bello, que se lleve ese tal premio; por nuestra parte, veremos en él no un adversario, sino un aliado-. Brevemente admitimos que de entre todos los triángulos escalenos, muy numerosos, hay uno que es el más bello, y dejaremos de lado los demás. Este triángulo será aquel que, utilizado dos veces, nos permita formar el tercer triángulo que es el equilátero. Por qué razón ello es así -sería muy largo de demostrar. Pero no voy a discutir la recompensa a quien pueda descubrirlo y demostrarlo así. Escojamos, pues, dos triángulos de los que están constituidos los cuerpos del fuego y de todos los demás elementos: uno el isósceles, el otro tiene siempre el cuadrado de su lado mayor igual a tres veces el cuadrado del me-

nor. Y ahora precisemos más lo que más arriba se ha dicho en una forma aún un tanto burda. Nos pareció que los cuatro elementos nacían siempre recíprocamente los unos de los otros, pero aquello era una falsa apariencia. En efecto, los cuatro géneros nacen de los triángulos de que acabamos de hablar. Pero tres de ellos proceden de un mismo tipo de triángulo, el que tiene sus lados desiguales, y sólo el cuarto recibe su armonía del triángulo isósceles. En consecuencia, no es posible que todos se resuelvan los unos de los otros, de tal manera que un número reducido de cuerpos voluminosos proceda de un gran número de cuerpos pequeños, y lo contrario. Sólo pueden hacerlo los tres primeros. En efecto, si todos los cuerpos provinieran de un triángulo único, y tan solo en este caso, se podría formar, al momento de la disgregación de los mayores y a espensas de ellos, una multitud de corpúsculos pequeños, de los que cada uno recibiría la figura que le fuera adecuada. E inversamente, cuando un gran número de cuerpos pequeños se dissociara en triángulos, podría nacer de ellos un sólo número correspondiente a un volumen único, el cual daría, por síntesis, una forma única de grandes dimensiones". (Timeo. 53a/54b ss.).

Hasta el momento no ha sido necesaria la noción de lugar:

Las de lo Mismo y lo Otro han sido suficientes para -  
construir la astronomía. Las teorías del lugar y los -  
elementos se harán intervenir sólo de manera inci-  
dental, y sólo en la medida en que nos permiten compren-  
der ciertos hechos relativos a la percepción sensible.  
El problema de la naturaleza del lugar surgirá a propó-  
sito de la naturaleza de los elementos y, más general-  
mente, a propósito de los efectos o consecuencias de la  
necesidad. La existencia de los elementos va a dar cuen-  
ta de las particularidades de la percepción. La existen-  
cia de la necesidad va a explicar la presencia, lógica-  
mente incomprensible, del lugar.

Así, vemos que, en este algo eterno se contiene también  
en la determinabilidad de la otra esencia, en la idea -  
del principio que varía y yerra y cuyo algo general es -  
la materia. El mundo eterno tiene su imagen en el mun-  
do que pertenece al tiempo; pero frente a éste, existe  
un segundo universo al que es inherente, como algo esen-  
cial, la mutabilidad. Lo idéntico a sí mismo y lo Otro  
eran las contraposiciones más abstractas que teníamos.  
El mundo eterno, como situado en el tiempo, tiene por -  
tanto dos formas: la forma de lo igual a sí mismo y la  
forma de lo otro con respecto a sí, de lo que yerra. -  
Los tres momentos, tal y como aparecen en la última es-  
fera, son:

- 1º la esencia simple, que es engendrada, lo nacido o la materia determinada.
- 2º el lugar en que ella nace.
- 3º aquello que sirve de modelo o prototipo a los engendrado.

Se trata de lo que Platón denomina esencia lugar y creación.

- a) Llegamos, pues, a la conclusión de que el espacio - ocupa el centro entre la procreación individual y - lo general. Ahora bien, si contraponemos este principicio al del tiempo, por su negatividad, tenemos - que el centro es este principio de lo otro, como - principio general -"Un centro recepticio como una - nodriza"- una esencia que lo mantiene todo, que todo lo deja actuar y conservarse por sí mismo. De manera que la forma solo puede existir según Platón, por medio de esta «nodriza». Cabe aquí hacer una - aclaración: Platón avanza siempre por razonamientos abstractos, que traspone, en seguida, al orden de lo sensible: la consecuencia a que finalmente - llega es a la de que no podemos representarnos el lugar sin recurrir a la metáfora. Son muchas las expresiones que ha empleado Platón para designar lo -

mismo. Y muchas de ellas bien ambiguas por cierto - "Aquello en que las cosas aparecen", "aquello sobre lo que se manifiestan", el "receptáculo", la "matriz", la "madre", la "nodriza"; estas frases nos hacen pensar en el espacio que recibe y contiene las cosas. - Pero más adelante se trata del "portasellos", del "excipiente", de la sustancia totalmente inodora en que los perfumistas diluyen sus perfumes, del oro en el que el joyero puede hacer diversas figuras. Y, según atendamos más a unas u otras de estas metáforas, pensamos en el espacio vacío en que se muestran los objetos, o en la materia o sustancia permanente de la que estos objetos parecen estar formados.

- b) La cuestión del origen de los elementos aparece dos veces en el Timeo. La primera vez al tratar la cuestión del lugar en términos generales, la segunda vez, en una forma más específica, una vez que ya ha expuesto sus teorías sobre el lugar. También en torno a la cuestión de los elementos, Platón se pregunta acerca de las Ideas lo cual reafirmaría su existencia, Ideas que ahora están colocadas en una determinación racional y matemática, siendo las figuras elementales de orden ideal y no de orden sensible. Así, los triángulos elementales no sólo son invisibles,

sino que además son los más bellos y los más perfectos. Platón está convencido que ciertas simetrías - prevalecían en la estructura de la materia y de que, por tanto, el punto de vista adecuado para explicar la materia era el geométrico; para Platón era un enfoque completamente legítimo elegir los cuatro cuerpos "platónicos" perfectos con ese fin e identificarlos con los cuatro elementos<sup>1</sup>. Sabía que hay cinco - cuerpos perfectos, pero omitió al que no necesitaba en su construcción de los elementos de la materia, - los primeros elementos son el fuego y la tierra. Es tos dos constituyen como dos extremos, y el Domingo va a proceder primero a enlazarlos entre sí. Ahora bien: el lazo más fuerte para unirlos es el que resulta de la media geométrica, es decir de una proporción continua, de manera que la relación que une el primer término medio sea la misma que una el término medio con el otro extremo, i.e., siendo F el fuego y T la tierra, que:

$$\frac{\text{Fuego}}{x} = \frac{x}{\text{Tierra}} \quad \text{de donde} \quad FT = x^2.$$

<sup>1</sup> Para una discusión, más a fondo sobre la matemática como mediación entre lo eterno y lo sensible véase: Ramírez S., Pour une épistémologie des Mathématiques, págs. 77-79 y Platón, La República, VI, xx, 510a/511b, xxi, 511d., VII, passim.

es decir, en términos geométricos:  $x$  es el lado de un cuadrado y  $F$  y  $T$  son los lados de un rectángulo equivalente.

Sin embargo, dice Platón, si bien para unir dos planos es suficiente un solo término medio, para unir dos sólidos se necesitan dos términos medios. Dejando de lado las dificultades que entraña esta afirmación, el hecho es que estos dos términos medios que hay que obtener, como consecuencia de este artificio matemático, son el aire y el agua, de tal forma que la proyección continua sea:

$$\frac{\text{Fuego}}{\text{Aire}} = \frac{\text{Aire}}{\text{Agua}} = \frac{\text{Agua}}{\text{Tierra}}$$

Por otra parte, puesto que los elementos son sólidos y poseen por ello una tercera dimensión, esos cuerpos elementales han de estar limitados por planos. Ahora bien todo plano está constituido por triángulos, -encontramos aquí la intervención del principio de la medición práctica de superficies-. Todos los triángulos, a su vez, tienen su origen en dos tipos de triángulos, que poseen, ambos, un ángulo recto y dos agudos; uno tiene sus catetos iguales, mientras que el otro los tiene desiguales. El primero isós-

celes, no admite ninguna variedad y es idéntico a sí mismo. En el segundo son posibles muchas variedades: es el triángulo escaleno, Platón lo escoge así: un triángulo rectángulo escaleno, cuyo cateto menor sea igual a la mitad de la hipotenusa. De esta forma, uniéndolos por su cateto mayor a otro triángulo igual, obtendremos una tercera especie de triángulo, el triángulo equilatero.

En base a estos triángulos, el Demiurgo construye otros triángulos equiláteros, compuestos de un número exacto de triángulos originarios, y con ellos a su vez construirá los sólidos elementales.

Platón hace la siguiente clasificación y asociación:

- |        |   |            |   |
|--------|---|------------|---|
| Fuego  | ↔ | tetraedro: | tiene 4 caras, 4 ángulos sólidos (ángulo poliedro) y 24 triángulos elementales. |
| Aire   | ↔ | octaedro:  | tiene 8 caras, 6 ángulos y 48 triángulos elementales.                           |
| Agua   | ↔ | icosaedro: | Tiene 20 caras, 12 ángulos y 120 triángulos elementales.                        |
| Tierra | ↔ | cubo:      | tiene 6 caras, 8 ángulos y 24 triángulos elementales (isósceles).               |

La primera gran dificultad que esto nos ofrece, es que con ninguno de estos números es posible obtener la proporción continua prevista al comienzo, a saber, que:

$$\frac{\text{Fuego}}{\text{Aire}} = \frac{\text{Aire}}{\text{Agua}} = \frac{\text{Agua}}{\text{Tierra}}$$

Otra dificultad se presenta luego, cuando Platón explica que un icosaedro de agua da lugar, al descomponerse, a un tetraedro de fuego y dos octaedros de aire y que un octaedro de aire se descompone en dos tetraedros de fuego. No obstante, un octaedro, por ejemplo, no puede dividirse en dos tetraedros, sino en dos piramides cuadrangulares, y dos tetraedros no pueden dar lugar a un octaedro, sino a un hexaedro, es evidente que Platón no conocía demasiado bien la estereometría. Finalmente hay que señalar que el enfoque matemático del problema de la materia realizado por Platón consiguió, aunque en forma rudimentaria y primitiva, lo que no había logrado la teoría mecanicista: vincular rasgos de propiedades materiales y de cambio material a determinadas relaciones geométricas y numéricas. En cierto modo, aquello era el comienzo de la física-matemática en su forma más elemental.

Se puede afirmar:

#### Tesis 4.

Para Platón la materia es la mediación entre lo eterno y lo sensible, en tanto que lo eterno deviene sensible en cuanto es en la materia. Por ello, la materia se identifica a la geometría.

#### B.2. Aristóteles

a) Ser en acto y Ser en potencia.

Para resolver el problema del movimiento en Aristóteles es necesario abordar la cuestión del ser en acto y del ser en potencia. Así, dice el Estagirita:

"Existen algunos seres que son tan solo acto; existe otro orden de seres que son potencia y acto a la vez: - estos seres son, en parte, un algo determinado; en parte una cantidad; en parte, una cualidad; de manera análoga vale esto para todas las demás categorías del ser.

"Por otra parte, entre los seres relativos, unos se llaman así por un exceso o por una deficiencia; otros, por que poseen la capacidad de producir y hacer algo o bien de recibirlo o padecerlo, y, en general, por poseer la capacidad de mover y ser movidos. En efecto, lo que po

see la capacidad de mover, posee la capacidad de mover algún ser móvil; y el ser móvil es movable, por aquel ser que está dotado de la capacidad de mover.

"Ahora bien: el movimiento no existe fuera de las cosas, pues todo lo que cambia, o bien cambia en el orden de la sustancia o en el de la cantidad, o en el de la cualidad o en el de lugar. Y no es posible tomar algo que sea común a estas categorías, como decimos, algo que sea un ser determinado, una cantidad, una cualidad o cualquier otro predicable. De manera que no habrá cambio ni movimiento fuera de los casos que hemos dicho.

"Cada una de estas categorías se da en todos los seres de dos maneras; por ejemplo, en el ser determinado: una de sus maneras es la forma, la otra la privación; en la cualidad: pues una cosa es que sea blanca y otra que sea negra; en la cantidad: una cosa está completa, y otra está incompleta. Y lo mismo en el aspecto de la traslación: una cosa está arriba, otra abajo; o bien, una cosa es pesada y otra es ligera. Así, pues, las especies del cambio y el movimiento son tantas, cuantas son las especies del ser". (Física, II, 2, 200b).

"Se llama potencia al principio del movimiento o del cambio, situado en otro ser o en el mismo, pero considerado como si fuera otro. Así, la potencia de edificar-

una casa no está en la casa edificada, pero el poder de curar puede estar en el que es curado, aunque no en cuanto curado.

"Así, pues, ciertas cosas reciben el nombre de potencia por ser un principio de movimiento o de cambio, situado en otro o en el mismo en cuanto otro. Otras, por el contrario, reciben este nombre por poseer la facultad de ser puestas en movimiento o de ser cambiadas por otro ser, o por sí mismas en cuanto que son otro ser. Pues por esta potencia lo que recibe una modificación es realmente modificado. Así, a veces decimos que una cosa posee la potencia de ser modificada cuando puede experimentar no una modificación cualquiera, sino solo una modificación que la haga mejor.

"Se llama potencia la capacidad de hacer bien alguna cosa o de hacerla por propia voluntad, pues a veces de los que andan o hablan mal y no de la manera que ellos quisieran o propusieron, decimos que no tienen potencia o capacidad de andar o hablar. También se entiende así en el aspecto de recibir alguna modificación.

"Además, también se llaman potencia todos los estados habituales, en los que no se puede sufrir ninguna modificación o ningún cambio, o bien en los que difícilmente son modificables en mal, porque los seres se rompen,

se desgastan, se doblan y, en general, se destruyen, no en virtud de una potencia, sino por carencia de ella y ser deficientes en algún aspecto. Los seres que se ven libres de estas modificaciones son los que apenas son modificados o muy poco, por poseer una potencia propia, un poder, y por tener un estado particular suyo.

"En otro sentido posee un ser potencia en cuanto el poder de ser destruído no se halla ni en otro ser ni en sí mismo en cuanto otro.

"Por último, todas estas cosas significan que cualquier ser hay que considerarlo en potencia, o bien porque puede hacerse, o porque no puede hacerse, o porque puede ser mejor. Esta potencia, en efecto se da también en los seres inanimados, como, por ejemplo, en los instrumentos. Pues se dice que una lira puede sonar y de otra se dice que no puede sonar si no suena bien.

"En definitiva, pues, la definición de potencia es el principio del cambio, situado en otro ser o en el mismo en cuanto otro". (Metafísica, V, 12, 1019b/1020a).

"Puesto que hemos hablado ya de la potencia motriz, definamos ahora el acto y digamos qué es y cuáles son modos o cualidades, pues al mismo tiempo veremos con claridad, estableciendo distinciones en lo que es en potencia

cia, que no solo llamamos potente a lo que tiene capacidad para mover a otro o para ser movido por otro, simplemente o de alguna manera, sino también usamos esta palabra en otro sentido. Por esto, en nuestra inquisición - trataremos también de estos seres.

Acto es la existencia misma de un ser en un sentido contrario a como decimos que existe en potencia.

Decimos que en la madera existe en potencia Mercurio, - que en la línea entera está en potencia la media línea, porque podría sacarse esta de aquella, e incluso se llama sabio al que no estudia, con tal que sea capaz de hacerlo.

"Lo que queremos decir se hará evidente por medio de la inducción en los casos particulares, sin que sea necesario para ello buscar la definición de todas las cosas, - antes nos bastará examinar tan solo lo que guarda ciertas analogías. Así el acto vendrá a ser como el que - construye respecto de la facultad de construir, el estar despierto relativamente al que duerme, el que ve respecto del que tiene los ojos cerrados, teniendo con todo la facultad de ver; el objeto que sale de la materia respecto de la materia, lo realizado respecto de lo que no está hecho. A la primera parte de estas distinciones, -

démosles el nombre de acto; a la otra parte, el de potencia". (Metafísica, IX, 7, 1048b).

b) Sustancia.

Por otra parte, es también necesario escuchar lo que dice Aristóteles sobre la sustancia:

"El nombre de sustancia se aplica a los cuerpos simples, como, por ejemplo, la tierra, el fuego, el agua y otras cosas análogas, y en general a los cuerpos que se componen de estas y a los seres que tienen cuerpo, los animales y los dáimones y sus partes. Todas estas cosas se llaman sustancias, porque no son los atributos de un sujeto, antes las demás cosas son los atributos de ellas.

"En otro sentido, se llama sustancia a todo lo que constituye la causa intrínseca de la existencia de los seres, que no son atributos de ningún sujeto, como, por ejemplo, el alma en los seres animados.

"También se llaman sustancias las partes integrantes de los seres que los definen y que significan su esencia, y cuya destrucción es la destrucción del todo; así según algunos filósofos, la existencia del cuerpo de tres dimensiones depende de la de la superficie, y la de la superficie, de la de la línea. Y más en general, para algunos el número es también una sustancia, pues, eliminan

do el número, no existe nada, mientras que él es el que determina todas las cosas.

"De la misma manera, el carácter propio de cada ser, su esencia, cuya noción es la definición del ser, también se llama la sustancia de cada ser.

Es pues, posible aplicar la palabra sustancia en dos sentidos: o bien designa el último sujeto, el que no es atributo de ningún otro ser, o bien el ser que puede tener carácter propio y es separable de otro sujeto; es decir, la forma y la especie de cada ser". (Metafísica V, 8. - 1017b).

"La palabra sustancia, si no muchos sentidos, tiene ciertamente, al menos, cuatro denominaciones determinadas.

En primer lugar, la esencia; lo universal, lo genérico o el género, y en cuarto lugar, el sujeto. Sujeto es aquello de que todo lo más es atributo, mientras que él mismo no lo es de nada. Por esta razón hay que comenzar por determinar el sujeto. Porque la sustancia debe ser, ante todo, el primer sujeto. En un primer sentido, se llama sujeto a la materia o causa material; en otro sentido, a la forma; y en un tercer sentido, al compuesto de ambos. Por materia entiendo, por ejemplo, el bronce; por forma, la figura ideal a representar; por compuesto,

la estatua ya realizada. De donde si la forma es anterior a la materia, si es más plenamente ser, por la misma razón será anterior al compuesto de la materia y de la forma.

"Ahora bien: llamo materia a lo que por sí mismo no es ni forma, ni cantidad, ni cualquier otro de los caracteres que determinan el ser. Hay en efecto, algo de quien se predicen cada uno de los atributos; algo cuyo ser es distinto del de cada uno de estos predicados o atributos. Todo lo demás se refiere a la sustancia; esta a su vez, se refiere a la materia". (Metafísica VII 3. 1029a)

"El objeto de nuestro estudio es la esencia, ya que buscamos los principios y las causas de las esencias. Pues tanto si consideramos el Universo como un todo compuesto de partes como si lo consideramos una sucesión o serie de categorías, la esencia ocupa el primer lugar; y, en el caso de la serie de categorías, luego de ella viene la cualidad, y luego la cantidad.

"Ahora bien: hay tres clases de esencia: una sensible, de la cual una parte es eterna y otra perecedera, esencia que todos admiten, como, por ejemplo, las plantas y los animales; en cuanto a esta esencia eterna, es necesario conocer sus elementos, tanto si es uno solo como

si son muchos; existe, además, otra esencia inmóvil, que muchos creen que hay que considerar independiente, unos la dividen en otras dos; otros en cambio, hacen una sola naturaleza de las ideas y los seres matemáticos, mientras aún hay quienes consideran esta esencia tan solo los seres matemáticos. Aquellas esencias sensibles son el objeto de la física, porque poseen movimiento; esta última en cambio, es propia de una ciencia aparte, supuesto que no tiene con aquellas ningún principio común". (Metafísica, XII, 1. 1069a).

"La esencia o sustancia sensible es susceptible de cambio. Si, pues, todo cambio se verifica entre los opuestos o los intermedios, aunque no entre todos los opuestos -ya que así el sonido es opuesto a lo blanco-, sino entre los que lo son por contrariedad, es necesario que subsista un sujeto, que se cambie de un contrario al otro contrario. No son, en efecto, los mismos contrarios los que cambian entre sí. Además este sujeto persiste luego del cambio, mientras que el contrario no persiste. Existe, por consiguiente, algo además de los contrarios: la materia". (Metafísica XII, 2, 1069b).

"Después hay que demostrar que ni la materia ni la forma devienen; hablo de la materia y la forma primitivas o -

terminales<sup>1</sup>. En efecto todo lo que cambia es algo, y - cambia por la acción de algo, y para llegar a ser algo. Por la acción de algo, es decir, por el primer motor; es algo, a saber la materia; y viene a ser algo: la forma". (Metafísica, XII, 3. 1069b).

Aristóteles distingue, más de cerca, dos formas fundamentales para designar el proceso de transformación de los seres: la de la potencia (*δύναμις*) y la del acto (*ἐνέργεια*), siendo esta última la que se determina más como entelequia (*ἐντελέχεια*) o actividad libre, que lleva en sí el fin y es la realización de este fin, la forma *δύναμις*, en el Estagirita es la facultad, el en sí, - lo objetivo; luego viene lo general abstracto, la idea: la materia, que puede adoptar todas las formas posibles, sin ser ella misma el principio formador, es decir, sólo en potencia (*dynamei*, *potentia*) se da la forma en la materia; sólo por obra de la forma se convierte aquélla en realidad (*energía*, *actu*). La energía o, más concretamente, la subjetividad, es la forma realizadora, la negatividad referente a sí misma. Por el contrario, cuando - decimos: la esencia, no establecemos todavía con ello - la actividad, pues la esencia es solamente el en sí la

<sup>1</sup> Cfr. la Metafísica, en el libro VII, 3 y, sobre todo, en la misma Metafísica, el libro VII, 8. Además, en la Física, Libro II, 2.

potencia, sin forma infinita.

En otras palabras, el Estagirita ha presentado primeramente a la materia, como lo absolutamente indeterminado y amorfo, a partir de lo cual, ello mismo increado, se podría crear todo. Pero si la materia está unida ya formas eficientes activas, como ocurre en todas sus acomodaciones en el mundo, se suma todavía al perdurable «dynamei on», «ser en potencia», una especie de cooperación. Esta cooperación individualiza y determina la entrada y la acuñación de las formas eficientes, que a menudo implican también una perturbación. Esta materia segunda, la materia hecha mundo, hace que las formas eficientes o entelequias, que operan teleológicamente, se puedan realizar sólo «kata to dynaton», de acuerdo con el «ser en la medida de la posibilidad». Pero en lo esencial, la materia en Aristóteles es siempre «dynamei on», un pasivo «ser en potencia», potencialidad. Solo la forma eficiente que se realiza es en el Estagirita potencia, es el acto en el acaecer; hasta culminar en el acto totalmente desprovisto de materia: el inmóvil motor universal.

Este punto es de capital importancia ya que Aristóteles por esta vía resuelve el problema principal de la filosofía teórica de los griegos (del griego; θεωρητικός: cono

cimiento especulativo con independencia de toda aplicación): concebir en tal forma el ser que sea posible explicar por éste al devenir. El concepto fundamental de la sustancia es, según esto, para Aristóteles, que no es solamente materia, a pesar de que ésta, en la vida cotidiana, es considerada como lo sustancial.

Es cierto que todo lo que es encierra materia, que todo cambio requiere un sustrato sobre el que se opere; pero como la materia misma solo es potencia, no el acto que corresponde o la forma, es necesario que a la forma se añada la actividad para que la materia sea verdadera.

En otras palabras; la función de la sustancia en el devenir confiere a la sustancia misma un nuevo significado.

La sustancia adquiere un valor dinámico, se identifica con el fin (*τελος*), con la acción creadora que forma la materia, con la realidad concreta de cada ser en que el devenir se cumple. En tal sentido la sustancia es acto: actividad, acción, logro.

Aristóteles indentifica la materia con la potencia, la forma con el acto. La potencia (*δυναμις*) es en general la posibilidad de producir un cambio o de sufrirlo. Hay la potencia activa, que consiste en la capacidad de predecir un cambio en sí o en otro (como, por ejemplo, en el fuego la potencia de calentar y en el constructro la

de contruir); y la potencia pasiva, que consiste en la capacidad de sufrir un cambio (como, por ejemplo, en la madera la capacidad de arder, en lo que es frágil, la capacidad de destrozarse). La potencia pasiva es porque de la materia; la potencia activa es propia del principio de acción o causa eficiente. Y el acto (*ενεργεια*) es, en cambio, la existencia misma del objeto.

Se puede afirmar:

**Tesis 5:**

En Aristóteles acto es la existencia misma de un ser en un sentido contrario a como decimos que existe en potencia.

**Tesis 6:**

Para Aristóteles el ser en potencia es un principio del movimiento y del cambio situado en otro ser o en el mismo, pero considerado como si fuera otro.

**Tesis 7:**

En Aristóteles, la forma es una configuración material, siendo ésta identificada con el ser en acto.

**Tesis 8:**

La materia en Aristóteles, lejos de ser un concepto mecanicista y vulgar, es rica en movimiento y formas, condiciona todo, tiene todas las disposiciones, es, posibilidad objetiva, la materia de la existencia en su tota-

lidad, inconclusa, es la potencialidad de toda objetividad real, en ella se da todo proceso dialéctico y ello se logra mediante las diversas configuraciones de la materia a saber, las formas de la materia.

Tesis 9:

La filosofía aristotélica, como toda la filosofía griega, ataca el problema principal del devenir y lo explica a partir de su teoría del ser. A diferencia de la filosofía "metafórica" o "matemática" previa, Aristóteles resuelve el problema en el mundo.

## C. MOVIMIENTO

### C.1. Platón

A continuación analizo unos de los conceptos fundamentales en el estudio de la Naturaleza: el concepto de movimiento. Dice Platón:

"Por lo que el movimiento y el estado de reposo se refiere, si no se explicara nada acerca de cuál es la manera y cuáles son las condiciones en que se verifican esos dos fenómenos, una gran cantidad de dificultades se nos atravesarían en el razonamiento que a continuación va a seguir. Hemos dicho ya alguna cosa de ello. Pero conviene añadir aún esto: el movimiento no se encuentra de ningún modo en lo que es uniforme. Pues que haya un móvil sin un motor o un motor sin un móvil es una cosa difícil, más bien imposible; no hay ninguna posibilidad de movimiento en la ausencia de esos dos términos. Ahora bien: es absolutamente imposible que ambos sean uniformes. Así, pues, daremos por sentado que el reposo reside siempre en la uniformidad, y el movimiento, en la ausencia de uniformidad". (Timeo 57b/58c).

### C.2. Aristóteles

Aristóteles, por su parte ha definido la naturaleza como un principio intrínseco de movimiento, dice Aristóte

les:

"El movimiento no existe fuera de las cosas, pues todo - lo que cambia o bien cambia en el orden de la sustancia, o en el de la cantidad o en el de la cualidad o en el del lugar"... las especies del cambio y el movimiento son - tantas, cuantas son las especies del ser.

"Ahora bien: puesto que dentro de cada uno de los géne- ros son cosas distintas lo que existe en acto y lo que existe en potencia, el acto de aquello que existe en po- tencia, es el movimiento ....., Ahora bien puesto que - muchos seres reúnen en sí la condición de existir ellos mismos en potencia y en acto, aunque no simultáneamente ni bajo el mismo aspecto, sino que, por ejemplo, el ser que es potencialmente caliente, es frío en acto, muchos seres realizarán y recibirán modificaciones recíprocas, pues cualquiera de ellos tendrá a un tiempo un principio de actividad y otro de pasividad. De manera que, aún lo que naturalmente causa el movimiento, es ello mismo mó- vil, pues todo lo que posee esta condición o cualidad es principio activo de movimiento, siendo así que ello mis- mo es a su vez movido.

Por consiguiente, según el parecer de algunos, todo lo - que mueve es movido a la vez; qué es lo que en realidad ocurre aquí se puede ver por lo dicho en otros tratados; existe en efecto, algún ser que mueve y es inmóvil.

"Con todo, el acto de lo que existe en potencia, cuando existiendo en acto se actualiza a sí mismo o actualiza a otro ser, es movimiento en cuanto es él mismo móvil. Y entiendo la expresión «en cuanto es» en este sentido: el bronce, en efecto, es potencialmente la estatua; pero el acto del bronce, en cuanto es bronce, no es movimiento, pues no es lo mismo la esencia del bronce y cualquier potencia o capacidad de movilidad que él pueda poseer; pero, si fuesen lo mismo absoluta y lógicamente, ciertamente el acto del bronce, en tanto que es bronce, sería un movimiento; pero, como se ha dicho, no es lo mismo.

"resulta evidente que el acto de lo posible, en cuanto es posible, es el movimiento" (Física, III, 1, 200b/201a).

"Aun aquello sobre lo cual suele cernerse más agudamente la duda resulta evidente, a saber, que el movimiento se halla en el ser móvil; es, en efecto, el acto, el acto de este ser y es producido por aquel otro ser que posee la potencia activa de causar el movimiento. El acto del ser que tiene la potencia de producir el movimiento no es distinto; es, en efecto, necesario que en ambos a dos seres exista un acto, pues el ser que mueve es motor, porque puede producir el movimiento; y es motor movien-

te, porque obra y lo produce; pero es actualizador del mismo ser móvil; de manera que, análogamente, hay un sólo acto para el uno y para el otro, de la misma manera que es uno mismo el intervalo si se mira del uno al dos que si se mira del dos al uno, lo mismo que si se considera una distancia subiendo que si se considera bajando. Todas estas cosas son una sola, aunque su definición no sea única; análogamente ocurre también en el caso del motor y del ser que es movido por él". (Física III.3.201b). "Además, hemos definido y determinado que lo que es movido es lo que es móvil. Ahora bien: el móvil es un ser potencialmente movido, no movido en acto; pero el «en potencia» - va camino de la entelequia. Por otra parte el movimiento es la entelequia imperfecta del ser móvil". (Física, VIII, 5, 257b).

Aquí, Aristóteles ha pasado al estudio del movimiento - (κινῆσις) es necesario que la filosofía de la naturaleza hable de él, aunque sea difícil de captar; Aristóteles - aborda el problema concibiendo el movimiento de un modo general, no solo como movimiento en el espacio y en el tiempo, sino también como movimiento real; lo ha definido como la actividad de una cosa que existe en potencia, en cuanto es así. En particular, el movimiento es también la actividad de lo movable (κινητόν).

si son muchos; existe, además, otra esencia inmóvil, que muchos creen que hay que considerar independiente, unos la dividen en otras dos; otros en cambio, hacen una sola naturaleza de las ideas y los seres matemáticos, mientras aún hay quienes consideran esta esencia tan solo los seres matemáticos. Aquellas esencias sensibles son el objeto de la física, porque poseen movimiento; esta última en cambio, es propia de una ciencia aparte, supuesto que no tiene con aquellas ningún principio común". (Metafísica, XII, 1. 1069a).

"La esencia o sustancia sensible es susceptible de cambio. Si, pues, todo cambio se verifica entre los opuestos o los intermedios, aunque no entre todos los opuestos -ya que así el sonido es opuesto a lo blanco-, sino entre los que lo son por contrariedad, es necesario que subsista un sujeto, que se cambie de un contrario al otro contrario. No son, en efecto, los mismos contrarios los que cambian entre sí. Además este sujeto persiste luego del cambio, mientras que el contrario no persiste. Existe, por consiguiente, algo además de los contrarios: la materia". (Metafísica XII, 2, 1069b).

"Después hay que demostrar que ni la materia ni la forma devienen; hablo de la materia y la forma primitivas o -

terminales<sup>1</sup>. En efecto todo lo que cambia es algo, y - cambia por la acción de algo, y para llegar a ser algo. Por la acción de algo, es decir, por el primer motor; es algo, a saber la materia; y viene a ser algo: la forma". (Metafísica, XII, 3. 1069b).

Aristóteles distingue, más de cerca, dos formas fundamentales para designar el proceso de transformación de los seres: la de la potencia (*δύναμις*) y la del acto (*ἐνέργεια*), siendo esta última la que se determina más como entelequia (*εντελεχεια*) o actividad libre, que lleva en sí el fin y es la realización de este fin, la forma *δύναμις*, en el Estagirita es la facultad, el en sí, - lo objetivo; luego viene lo general abstracto, la idea: la materia, que puede adoptar todas las formas posibles, sin ser ella misma el principio formador, es decir, sólo en potencia (*dynamei*, *potentia*) se da la forma en la materia; sólo por obra de la forma se convierte aquélla en realidad (*energía*, *actu*). La energía o, más concretamente, la subjetividad, es la forma realizadora, la negatividad referente a sí misma. Por el contrario, cuando - decimos: la esencia, no establecemos todavía con ello - la actividad, pues la esencia es solamente el en sí la

<sup>1</sup> Cfr. la Metafísica, en el libro VII, 3 y, sobre todo, en la misma Metafísica, el libro VII, 8. Además, en la Física, Libro II, 2.

potencia, sin forma infinita.

En otras palabras, el Estagirita ha presentado primeramente a la materia, como lo absolutamente indeterminado y amorfo, a partir de lo cual, ello mismo increado, se podría crear todo. Pero si la materia está unida ya formas eficientes activas, como ocurre en todas sus acomodaciones en el mundo, se suma todavía al perdurable «dynamei on», «ser en potencia», una especie de cooperación. Esta cooperación individualiza y determina la entrada y la acuñación de las formas eficientes, que a menudo implican también una perturbación. Esta materia segunda, la materia hecha mundo, hace que las formas eficientes o entelequias, que operan teleológicamente, se puedan realizar sólo «kata to dynaton», de acuerdo con el «ser en la medida de la posibilidad». Pero en lo esencial, la materia en Aristóteles es siempre «dynamei on», un pasivo «ser en potencia», potencialidad. Solo la forma eficiente que se realiza es en el Estagirita potencia, es el acto en el acaecer; hasta culminar en el acto totalmente desprovisto de materia: el inmóvil motor universal.

Este punto es de capital importancia ya que Aristóteles por esta vía resuelve el problema principal de la filosofía teórica de los griegos (del griego; θεωρητικός: cono

cimiento especulativo con independencia de toda aplicación): concebir en tal forma el ser que sea posible explicar por éste al devenir. El concepto fundamental de la sustancia es, según esto, para Aristóteles, que no es solamente materia, a pesar de que ésta, en la vida cotidiana, es considerada como lo sustancial.

Es cierto que todo lo que es encierra materia, que todo cambio requiere un sustrato sobre el que se opere; pero como la materia misma solo es potencia, no el acto que corresponde o la forma, es necesario que a la forma se añada la actividad para que la materia sea verdadera.

En otras palabras; la función de la sustancia en el devenir confiere a la sustancia misma un nuevo significado.

La sustancia adquiere un valor dinámico, se identifica con el fin (*τελος*), con la acción creadora que forma la materia, con la realidad concreta de cada ser en que el devenir se cumple. En tal sentido la sustancia es acto: actividad, acción, logro.

Aristóteles indentifica la materia con la potencia, la forma con el acto. La potencia (*δυναμις*) es en general la posibilidad de producir un cambio o de sufrirlo. Hay la potencia activa, que consiste en la capacidad de producir un cambio en sí o en otro (como, por ejemplo, en el fuego la potencia de calentar y en el constructro la

de contruir); y la potencia pasiva, que consiste en la capacidad de sufrir un cambio (como, por ejemplo, en la madera la capacidad de arder, en lo que es frágil, la capacidad de destrozarse). La potencia pasiva es porque de la materia; la potencia activa es propia del principio de acción o causa eficiente. Y el acto (*ενεργεια*) es, en cambio, la existencia misma del objeto.

Se puede afirmar:

Tesis 5:

En Aristóteles acto es la existencia misma de un ser en un sentido contrario a como decimos que existe en potencia.

Tesis 6:

Para Aristóteles el ser en potencia es un principio del movimiento y del cambio situado en otro ser o en el mismo, pero considerado como si fuera otro.

Tesis 7:

En Aristóteles, la forma es una configuración material, siendo ésta identificada con el ser en acto.

Tesis 8:

La materia en Aristóteles, lejos de ser un concepto mecanicista y vulgar, es rica en movimiento y formas, condiciona todo, tiene todas las disposiciones, es, posibilidad objetiva, la materia de la existencia en su tota-

lidad, inconclusa, es la potencialidad de toda objetividad real, en ella se da todo proceso dialéctico y ello se logra mediante las diversas configuraciones de la materia a saber, las formas de la materia.

Tesis 9:

La filosofía aristotélica, como toda la filosofía griega, ataca el problema principal del devenir y lo explica a partir de su teoría del ser. A diferencia de la filosofía "metafórica" o "matemática" previa, Aristóteles resuelve el problema en el mundo.

## C. MOVIMIENTO

### C.1. Platón

A continuación analizo unos de los conceptos fundamentales en el estudio de la Naturaleza: el concepto de movimiento. Dice Platón:

"Por lo que el movimiento y el estado de reposo se refiere, si no se explicara nada acerca de cuál es la manera y cuáles son las condiciones en que se verifican esos dos fenómenos, una gran cantidad de dificultades se nos atravesarían en el razonamiento que a continuación va a seguir. Hemos dicho ya alguna cosa de ello. Pero conviene añadir aún esto: el movimiento no se encuentra de ningún modo en lo que es uniforme. Pues que haya un móvil sin un motor o un motor sin un móvil es una cosa difícil, más bien imposible; no hay ninguna posibilidad de movimiento en la ausencia de esos dos términos. Ahora bien: es absolutamente imposible que ambos sean uniformes. Así, pues, daremos por sentado que el reposo reside siempre en la uniformidad, y el movimiento, en la ausencia de uniformidad". (Timeo 57b/58c).

### C.2. Aristóteles

Aristóteles, por su parte ha definido la naturaleza como un principio intrínseco de movimiento, dice Aristóte

les:

"El movimiento no existe fuera de las cosas, pues todo - lo que cambia o bien cambia en el orden de la sustancia, o en el de la cantidad o en el de la cualidad o en el del lugar"... las especies del cambio y el movimiento son - tantas, cuantas son las especies del ser.

"Ahora bien: puesto que dentro de cada uno de los géneros son cosas distintas lo que existe en acto y lo que existe en potencia, el acto de aquello que existe en potencia, es el movimiento ....., Ahora bien puesto que - muchos seres reúnen en sí la condición de existir ellos mismos en potencia y en acto, aunque no simultáneamente ni bajo el mismo aspecto, sino que, por ejemplo, el ser que es potencialmente caliente, es frío en acto, muchos seres realizarán y recibirán modificaciones recíprocas, pues cualquiera de ellos tendrá a un tiempo un principio de actividad y otro de pasividad. De manera que, aún lo que naturalmente causa el movimiento, es ello mismo móvil, pues todo lo que posee esta condición o cualidad es principio activo de movimiento, siendo así que ello mismo es a su vez movido.

Por consiguiente, según el parecer de algunos, todo lo - que mueve es movido a la vez; qué es lo que en realidad ocurre aquí se puede ver por lo dicho en otros tratados; existe en efecto, algún ser que mueve y es inmóvil.

"Con todo, el acto de lo que existe en potencia, cuando existiendo en acto se actualiza a sí mismo o actualiza a otro ser, es movimiento en cuanto es él mismo móvil. Y entiendo la expresión «en cuanto es» en este sentido: el bronce, en efecto, es potencialmente la estatua; pero el acto del bronce, en cuanto es bronce, no es movimiento, pues no es lo mismo la esencia del bronce y cualquier potencia o capacidad de movilidad que él pueda poseer; pero, si fuesen lo mismo absoluta y lógicamente, - ciertamente el acto del bronce, en tanto que es bronce, sería un movimiento; pero, como se ha dicho, no es lo mismo.

"resulta evidente que el acto de lo posible, en cuanto - es posible, es el movimiento" (Física, III, 1, 200b/201a).

"Aun aquello sobre lo cual suele cernerse más agudamente la duda resulta evidente, a saber, que el movimiento se halla en el ser móvil; es, en efecto, el acto, el acto de este ser y es producido por aquel otro ser que posee la potencia activa de causar el movimiento. El acto del ser que tiene la potencia de producir el movimiento no - es distinto; es, en efecto, necesario que en ambos a dos seres exista un acto, pues el ser que mueve es motor, - porque puede producir el movimiento; y es motor movien-

te, porque obra y lo produce; pero es actualizador del mismo ser móvil; de manera que, análogamente, hay un sólo acto para el uno y para el otro, de la misma manera que es uno mismo el intervalo si se mira del uno al dos que si se mira del dos al uno, lo mismo que si se considera una distancia subiendo que si se considera bajando. Todas estas cosas son una sola, aunque su definición no sea única; análogamente ocurre también en el caso del motor y del ser que es movido por él". (Física III.3.201b). "Además, hemos definido y determinado que lo que es movido es lo que es móvil. Ahora bien: el móvil es un ser potencialmente movido, no movido en acto; pero el «en potencia» - va camino de la entelequia. Por otra parte el movimiento es la entelequia imperfecta del ser móvil". (Física, VIII, 5, 257b).

Aquí, Aristóteles ha pasado al estudio del movimiento - ( $\kappa\iota\nu\mu\sigma\iota\varsigma$ ) es necesario que la filosofía de la naturaleza hable de él, aunque sea difícil de captar; Aristóteles - aborda el problema concibiendo el movimiento de un modo general, no solo como movimiento en el espacio y en el tiempo, sino también como movimiento real; lo ha definido como la actividad de una cosa que existe en potencia, en cuanto es así. En particular, el movimiento es también la actividad de lo movable ( $\kappa\iota\nu\mu\tau\omicron\upsilon$ ).

Pero lo que mueve, el motor, introduce siempre una especie de fin, bien un qué, bien una cualidad o una cantidad, que es el principio y la causa del movimiento; del mismo modo que el hombre que existe por su actividad hace un hombre de aquél que sólo existe en potencia. Tal es, - pues, el movimiento en lo movable: una actividad despertada en ello por lo móvil; y la actividad de lo móvil no es otra que la actividad de ambos. Es móvil en potencia y motor en cuanto a la actividad: pero es el factor activo de lo movable, lo que quiere decir que es una actividad de ambos, del mismo modo que es la misma la relación de uno a dos que la de dos a uno el camino de subida y el de bajada o la distancia de Teba a Atenas y la de Atenas a Tebas.

De este modo, la actividad y la pasividad si bien originariamente no son lo mismo, ambas coinciden en el movimiento. Son idénticas en cuanto al ser; pero la actividad, en cuanto es actividad de esto en esto (lo movido) y la actividad de esto por esto (por el motor) difiere en cuanto al concepto. Sin embargo, hemos visto como a la materia, no le es propio el movimiento, pese a que éste representa el tránsito del estado de posibilidad al de realización. El movimiento se lo atribuye, por el contrario, a la entelequia, dándole el nombre de -

«entelequia imperfecta» . Como bien se puede ver, el - concepto aristotélico de materia connota ciertamente el muy importante rasgo esencial de la posibilidad objetiva aunque no, o todavía no, el de la autoproducción. Se afirma entonces:

Tesis 10.

Platón asegura que el reposo reside siempre en la uniformidad, y el movimiento no se encuentra en lo que es uniforme.

Tesis 11.

Para Aristóteles el movimiento es, el acto del ser que se mueve en el ser móvil. Más aún, -en base a las tesis anteriores: forma y materia- las formas son, configuraciones materiales y el movimiento hacia estas, como ocurre siempre cuando es a través de ellas, hace que no sólo el movimiento sea -según la profunda frase de Aristóteles- una «entelequia imperfecta», sino también que la entelequia acuñada en cada caso se conciba a su vez como incompleta todavía, como forma sujeta a un proceso sin terminar y, al mismo tiempo, por ello como sucesión de formas experimentales, extractadas, de la materia.

## D. EL INFINITO

### D.1. Platón

A continuación se efectuarán, primeras observaciones y opiniones sobre el concepto de infinito, a lo largo de este trabajo, este concepto es analizado.

En cuanto a infinito nos dice Platón:

"-Estoy lejos de creer, ¡por Zeus!- respondió Sócrates-, que conozco la causa de ninguna de estas cosas, pues me resisto a admitir siquiera que cuando se agrega una unidad a una unidad, sea la unidad a la que se ha añadido la otra la que se ha convertido en dos, o que sea la unidad añadida, o bien que sean la agregada y aquella a la que se le agregó la otra las que se conviertan en dos - por la adición de la una a la otra. Porque si cuando - cada una de ellas estaba separada de la otra constituía una unidad y no eran entonces dos, me extraña que, una vez que se juntan entre sí, sea precisamente la causa - de que se conviertan en dos, a saber: el encuentro derivado de su mutua yuxtaposición. Y tampoco puedo convencerme de que cuando se divide una unidad sea, a la inversa, la división la causa de que se produzcan dos, pues - esta es contraria a la causa anterior de que se produje-  
ran dos; porque entonces fue el hecho de juntar y de añadir lo uno a lo otro, y ahora lo es el de separar y retirar lo uno de lo otro." (Fedón, 96d).

"-Y qué, ¿no te guardarías de decir que cuando se agrega una unidad a una unidad es la adición la causa de que produzcan dos, o cuando se divide algo, lo es la división?. Es más: dirías a veces que desconoces otro modo de producirse cada cosa que no sea la participación en la esencia propia de todo aquello en lo que participe; y que en estos casos particulares no puedes señalar otra causa de la producción de dos que la participación en la dualidad, y que es necesario que en ella participen las cosas que hayan de ser dos, así como lo es también que participe en la unidad lo que haya de ser una sola cosa. En cuanto a esas divisiones, adiciones y restantes sutilezas de este tipo las mandarías a paseo, abandonando esas respuestas a los que son más sabios que tú". (Fedón, 101c).

"Lo que verdaderamente causaría mi asombro es que la esencia de lo uno fuese presentada como múltiple y la de lo múltiple como uno". (Parménides, 128d).

"Sócrates. -Por lo que yo creo, nosotros podemos decir que esta identidad de lo uno y lo múltiple que manifiesta el discurso se renueva en todas las ocasiones, a propósito de toda aserción que jamás se haya podido emitir, tanto en otros tiempos como en nuestros días. Ella no puede llegar a tener fin, como tampoco ha tenido comien

es, por el contrario, según mi forma de pensar, una cosa eterna, que jamás podrá envejecer, inherente a la misma esencia del discurso humano. (Filebo, 15a).

"Socrates. -Este presente o don ha venido de los dioses a los hombres, al menos por lo que yo juzgo sobre el particular, una vez que fue lanzado de lo alto de las regiones divinas por un cierto Prometeo, al mismo tiempo que el más brillante de los fuegos; y los antiguos que valían más que nosotros y vivían más cerca de los dioses, nos transmitieron esta tradición, que todo aquello de lo que se puede decir que existe está hecho de lo uno y de lo múltiple, y contiene en sí mismo, originariamente asociados, el límite, y la infinitud. Nos es, pues, preciso, puesto que las cosas han sido ordenadas así, afirmar - siempre, en cualquier conjunto que sea, y buscar en cada caso su forma única -y en efecto se hallará allí presente. Si, pues, conseguimos aprehenderla, a partir de esta forma única hemos de examinar si hay dos de ellas, y, si no hay solamente dos, tres o cualquier otro número que sea; luego repetir este examen en cada una de estas nuevas unidades, hasta que, partiendo de este uno primitivo, se vea no solamente que es uno y múltiple e infinito, sino también qué cantidad exacta alcanza; en cuanto a la forma del infinito, no aplicarlo a la

muchedumbre antes de haber comprendido cuál es el número total que esta realiza en el intervalo que hay entre el infinito y el uno; y solamente entonces dejar que cada una de las unidades de este conjunto se disperse en el infinito". (Filebo 15e/17b)

"-Así, pues, no solamente a lo uno que es pertenece la multiplicidad, sino que también hay que atribuirla a lo Uno en sí, que distribuido por el ser, es necesariamente múltiple". (Parménides 144d/145c).

Platón, no cree, pues, como los pitagóricos, que la serie de los números se constituya por medio de operaciones matemáticas. Los números existen sólo por participación en los arquetipos ideales cualitativamente diversos y por ello, no adicionables entre ellos, y no derivables los unos de los otros por medio de sumas, sustracciones, multiplicaciones y divisiones. Así, para él, - hay:

- 1) Los números ideales.
- 2) Los matemáticos
- 3) Las cosas sensibles numerables.

La superioridad de la dialéctica sobre la matemática, en la jerarquía de las ciencias, permanece también con la teoría de los números ideales; y no hay que maravillarse

de encontrarla mantenida en los diálogos, hasta las Le-  
yes. Pero la exigencia del arquetipo ideal para el nú-  
mero matemático, afirmada aquí en el Fedón, podría ha-  
cer pensar en una serie infinita de números ideales in-  
finita como la de los matemáticos.

Sabemos en cambio por Aristóteles (Física, III, 6. 206b  
y Metafísica, XIII, 8. 1084a), que Platón la limita a -  
la década, haciendo derivar de ésta la serie de cosas.  
¿cómo?. La explicación se halla en el Fedón 101c, en  
donde Platón rechaza la adición y la sustracción como  
causa de las distinciones de lo mayor y de lo menor en  
las magnitudes y en los números matemáticos, y da, en  
cambio, como causa de estas distinciones su participa-  
ción en las ideas de lo grande y de lo pequeño, del -  
más y del menos es decir, de la dualidad infinita, que  
también Aristóteles (Metafísica, I, 6, 987b/988a) nos  
dice que ha sido escogida por Platón para extraer de  
ella, como de una materia plasmable, todos los núme-  
ros, a excepción de los primeros, que son, precisamen-  
te, los números ideales de la década.

Además de esto, se puede recordar también que para Pla-  
tón, toda idea es una y múltiple al mismo tiempo, por-  
que es unidad de notas y de especies y es pluralidad  
de ellas: de aquí que cada idea da lugar a una multi-

plicidad infinita de participaciones, y viene a tener, -  
como a elementos suyos, lo uno y los múltiples, el lími-  
te y el infinito. Así frente a la unidad que se identi-  
fica con el límite, la naturaleza de lo infinito está -  
determinada como dualidad o diada de lo más de lo menos.  
De estas dos elementos que se reconocen en toda idea, -  
se constituyen luego todos los números. Cabe aquí colo-  
car una opinión de Aristóteles sobre Platón, la escuela  
pitagórica, y el infinito:

"Que esta investigación (la de infinito) entra en el -  
campo propio de esta ciencia (la de la naturaleza), lo  
hace creer el hecho de que lados cuántos dignamente se  
han dedicado al estudio de esta filosofía hablaron y -  
trataron del infinito. Incluso todos ellos lo conside-  
ran como uno de los principios de los seres, algunos, -  
ciertamente, como los pitagóricos y Platón, lo conside-  
principio por sí o esencial, no como si el infinito en  
sí fuera un accidente adventicio de algunos seres, si-  
no como si fuera una sustancia. Con todo, los pitagó-  
ricos ponen el infinito en los seres sensibles, por-  
que no conciben el número separado o independiente de -  
lo sensible; y afirman que lo que cae fuera del cielo -  
infinito. Platón por el contrario, dice que fuera del  
cielo no existe cuerpo alguno, ni tan siquiera las -

ideas, puesto que las ideas no existen en parte alguna; antes sostiene que el infinito se halla en los seres sensorialmente perceptibles y en las ideas. Los pitagóricos, además, dicen que el infinito es un número par: pues el número par, comprendido y limitado por el impar, confiere a los seres la infinitud; prueba de que ello es así lo es lo que ocurre en los números, pues una vez reunidos los gnomones, todos en torno a la unidad y a lo que está fuera de la unidad, es decir, los números pares y los impares, según cómo resulta siempre una forma nueva y distinta, y según cómo permanece siempre una sola y misma forma; Platón, en cambio, concibe dos infinitos, lo grande y lo pequeño". (Física III.4. 203a).

Vemos pues en la doctrina platónica del infinito, inspiraciones pitagóricas junto a inspiraciones socráticas, se renueva en ella la misma dualidad de elementos (ilimitado y límite) mediante los cuales los pitagóricos habían constituido los números y toda la realidad: matemática y física, metafísica y moral. Así, en Platón, esta dualidad de elementos se encuentra afirmada tanto para los fenómenos como para las Ideas, (Cfr. Física III, 4. 203a) para los movimientos de los cuerpos como para los sonidos y las armonías musicales, para los placeres -

como para la inteligencia, para los números matemáticos como para los ideales. A todos estos diversos dominios se aplica en el Filebo la sentencia de los antiguos, según la cual todo tiene en sí connaturales el límite y la infinidad; y el aperiún se explica en el Filebo 25a/26b como el ilimitado progresar del más y del menos, opuesto a la cantidad determinada, que está firme e impide la progresión.

Se puede afirmar entonces:

#### Tesis 12.

Platón concibe el infinito en los seres sensorialmente perceptibles y en las Ideas, únicamente, en lo grande y lo pequeño.

## D.2. Aristóteles

El Estagirita en La Física, deriva su estudio del movimiento a una serie de circunstancias y condiciones del mismo. Esas otras implicaciones del movimiento son el infinito, el lugar, el vacío y el tiempo. Se analizará a continuación cada una de estas implicaciones. Dice Aristóteles:

"La ciencia física o ciencia de la Naturaleza se ocupa del estudio de las cantidades de los movimientos y los tiempo, cada uno de los cuales debe ser necesariamente finito o infinito,..... Por consiguiente, es conveniente que el físico o naturalista preste atención a si el infinito existe o no existe y que en caso de existir, - estudie que es". (Física, III. 4. 203a).

A continuación Aristóteles efectúa un análisis en torno a las corrientes filosóficas anteriores y sus ideas sobre el infinito lo cual concluye:

"En primer lugar hay que determinar en cuántos sentidos se entiende el concepto de infinito. En un sentido, - pues, se llama infinito lo que no puede ser trascendido ni excedido, porque no es naturalmente apto para ser - abarcado o medido, de la misma manera que la voz y el - sonido son invisibles. En otro sentido es aquello cuya

evolución no tiene término, o bien apenas lo tiene, o bien lo puede tener por su naturaleza, pero no lo tiene de hecho. Por lo demás, todo infinito lo es o bien por adición, o bien por división, o bien de una y otra manera". (Física, III. 4, 204a).

"Quizá, con todo, esta cuestión es más universal, y habrá también que preguntarse si podrá existir el infinito en las matemáticas y en aquellos seres que no posean ninguna magnitud. Nosotros por nuestra parte, vamos a estudiar si en los seres sensibles y en aquellos a que nos circunscribe nuestro tratado puede o no existir un cuerpo, infinito por crecimiento o adición.

"En general, si es simultáneamente imposible que el lugar sea infinito y que todo cuerpo, por su parte, esté en un lugar, es también imposible que exista un cuerpo infinito. Ahora bien: lo que está en alguna parte está en un lugar, y lo que está en un lugar, está por el contrario, en alguna parte. Luego si ni tan siquiera la cantidad puede estar en un lugar determinado, tampoco podrá estarlo el infinito, porque el infinito será una cierta y determinada cantidad; por ejemplo, dos o tres cosas estas, en efecto, que significan una cierta y determinada cantidad-, y existirá así en un lugar, porque existe en alguna parte, y esta parte estará si-

tuada arriba o abajo o en otra cualquiera de las seis -  
dimensiones dichas cada una de las cuales es un límite.

"Es, por tanto, evidente, según lo dicho, que no existe  
un acto ningún cuerpo infinito". (Física III.5.204a/206a).

"Pero es también evidente que de no existir el infinito,  
se derivan muchos absurdos. El tiempo, en efecto, ten-  
drá un principio y un fin; las magnitudes no serán divi-  
sibles en magnitudes, y el número no podrá ser infinito.  
Pero cuando, definidas estas cosas, resulta que la solu-  
ción de la cuestión no parece admisible en ninguno de -  
sus dos sentidos o maneras, se hace necesaria una solu-  
ción arbitral intermedia y se viene a parar a la eviden-  
cia de que el infinito existe, sí, en según qué sentido,  
y en según qué sentido no existe.

"Se dice que un ser existe en potencia que otro existe  
en acto. Además, el infinito puede existir por adición  
y también por sustracción. Ahora bien: hemos dicho ya  
que no existe una magnitud infinita en acto; pero diji-  
mos que esta magnitud sí podría ser infinita en su divi-  
sibilidad; no es, en efecto, imposible eliminar las lí-  
neas indivisibles.

"Permanece, pues, la hipótesis de que exista el infini-  
to en potencia. No es necesario que lo que existe en -  
potencia sea admitido también como existente en acto; -

por ejemplo, si esto es potencialmente una estatua, podrá, sí, ser una estatua; así también cualquier infinito será potencial si puede existir en acto (Física, III, 6, 206a).

"Ahora bien: supuesto que las causas se dividen en cuatro clases, es evidente que el infinito es causa con modalidad de causa material y que su esencia es la privación, y que, en cambio, el continuo y lo sensible es lo que por sí subsiste o está sujeto. También todos los demás físicos emplean, al parecer, el infinito como materia. Y por esto mismo es absurdo concebirlo como lo que comprende o contiene y no como lo que es contenido". (Física, III, 7, 208a)

La batalla de Aristóteles contra las doctrinas de la infinitud del universo y de la extensión especial, tiene - como motivo, fundamentar la necesidad de salvar las teorías esenciales de su física (del movimiento, de los elementos y de los lugares naturales, ligados todos ellos entre sí inseparablemente) en sus conexiones con la doctrina del motor inmóvil. En la discusión del concepto de infinito Aristóteles muestra las dificultades intrínsecas de tal concepto, establece que ante todo conviene dar de él la definición. Y distingue tres significados de la palabra infinito siendo estas:

- 1º Infinito es, aquello que por su naturaleza no puede ser medido ni recorrido.
- 2º Aquello que tiene un recorrido interminable en sí mismo, o al menos para nosotros.
- 3º Aquello que respecto de la adición o de la división o de ambas, no presenta nunca un fin que detenga el proceso.

Hay siempre un concepto negativo del infinito, sobre cuya base Aristóteles se siente autorizado a formular una conclusión contraria a la que consigna como opinión más corriente, (En la frase de Aristóteles Física III, 6, - 206b: "pero ocurre que el infinito es lo contrario de - lo que dicen", se podría suponer que aquel "como dicen" se refiriese a los pitagóricos y a Platón, nombrados inmediatamente antes). La cual atribuye al infinito un valor positivo, considerándolo como aquello fuera de lo - cual no existe ya nada: que vendría a ser, por consiguente, perfecto y total. Ahora bien nos dice Aristóteles lo perfecto y el todo es aquella fuera de lo cual no - existe nada más; mientras que aquello más allá del cual queda siempre una carencia, sea cual fuere, no es entero. No es perfecto aquello que no tiene acabamiento; y el acabamiento es límite: el infinito entonces es, por

su esencia, privación. Donde resulta evidente que el carácter negativo (inacabamiento) pertenece al infinito siempre en dos sentidos: primero en cuanto es proceso - (la infinitud no tiene estabilidad, sino devenir) cuyo desarrollo es, en sí mismo, sin término; segundo, en cuanto es objeto de un esfuerzo de comprensión total por parte de un sujeto que fracasa siempre en la tentativa de aprehenderlo en un acto de pensamiento. Para dar solución a esta cuestión hay que recurrir a admitir en el infinito un tipo de existencia inferior, es decir, la existencia potencial. Pero una especie particular de potencia, una potencia que siempre permanece potencia, sin ser actualizable. La negación que implica su definición lógica es también particular, porque entonces el infinito no es aquello fuera de lo cual no hay nada, sino aquello inabarcable, fuera de lo cual siempre hay y habrá algo aún. Con eso el infinito no es más que una privación de límites.

### Tesis 13.

La proposición de Aristóteles según la cual la infinitud no permanece sino que deviene encuentra así su corrección e integración en otra -que Aristóteles no expresa, pero supone implícitamente-: que la infinitud de

viene tiene que tener sus raíces en una infinitud permanente. No se trata solamente del concepto expresado en la Física III, 7, 207b, según el cual lo que pueda darse en potencia, puede darse también en acto; sino - que se trata de una exigencia más profunda, a saber, - que la infinitud en potencia del devenir no puede darse sin una infinitud en acto de la causa productora.

## E. LUGAR

### E.1. Platón

Como ya se había mencionado, -Sección B.1- los conceptos de materia, forma y lugar están estrechamente relacionados, en base a toda la discusión efectuada, se afirma, - así,

#### Tesis 14.

Para Platón, los conceptos de materia y lugar son una - misma cosa, pues lo que posee una potencia receptiva y - un receptaculo son una sola y misma cosa.

### E.2. Aristóteles

Se ha analizado una de las primeras implicaciones del mo vimiento, el infinito; a continuación se analizará el -- concepto de lugar. respecto del lugar hemos de estudiar su existencia y su esencia. Este punto es analizado pro fundamente por Aristóteles:

"De manera análoga a todo lo que venimos diciendo, es ne cesario que todo físico sepa dar razón del lugar, igual que fue preciso lo supiera hacer sobre el problema del - infinito, que conozca si existe o no, de qué manera exis te y qué es.

"Así pues, que el lugar existe parece constatarlo por - el cambio recíproco que vemos en constante realización,

pues donde ahora hay agua, aquí mismo, al salir ella -  
-por ejemplo, de una vasija cualquiera,- aquí mismo, di  
go, habrá inmediatamente aire, y luego, a su vez, ocupar  
rá este mismo lugar algún otro cuerpo distinto; de maner  
ra que el lugar parece ser algo diverso de todos los ser  
res que entran en él y cambian, pues en el lugar en que  
ahora está el aire, en el mismo estaba antes el agua. -  
De donde, con evidencia, el lugar y el receptáculo son  
algo distinto de uno y otro, hacia lo cual y desde lo -  
cual aquellos seres se han movido.

Además, los movimientos de translación de los cuerpos -  
naturales y simples, como, por ejemplo, los movimientos  
de translación del fuego y de la tierra y otros seres -  
análogos, no solo dan a entender con claridad que el lu  
gar es algo, sino también que el lugar posee cierta po-  
tencia o fuerza. Cada uno de los seres, en efecto, de  
no haber algo que lo impida, es llevado a su propio lu-  
gar; unos hacia arriba, otros, al contrario, hacia aba-  
jo.

"Estas son las partes y especies del lugar; es decir, el  
arriba y el abajo, y las restantes dimensiones, hasta -  
las seis conocidas. Estas dimensiones se definen no so  
lamente en relación a nosotros, es decir, el arriba y el  
abajo, la derecha y la izquierda, porque para nosotros -

no siempre es lo mismo, sino que se determinan según la posición a medida que nosotros nos volvemos. De donde un mismo lugar es, con frecuencia, la derecha y la izquierda, el arriba y el abajo, el delante y el detrás. - Por el contrario, en la Naturaleza, cada uno de ellos - está determinado independientemente, en efecto, el arriba no es un lugar cualquiera, sino el lugar a que naturalmente es llevado el fuego y cualquier cuerpo ligero, y de la misma manera, el abajo tampoco es un lugar arbitrario, sino aquel a que son naturalmente llevados los seres pesados y los cuerpos terrestres; de manera que - ambos lugares difieren no solo por su posición, sino también por su potencialidad. También los seres matemáticos pueden contribuir a aclararnos esto, pues pese a no existir en un lugar, con todo, según cierta posición que dice relación a nosotros, poseen una derecha y una izquierda, de tal manera que su posición es solo inteligible, - sin que por naturaleza posean estas dimensiones concretas.

"También los que admiten la existencia del vacío, admiten con ello la existencia del lugar; comoquiera que el vacío no es más que un lugar que carece de la presencia de un cuerpo.

De todo ello, pues, se podría venir a creer que el lugar es algo que existe al margen de los cuerpos, y que -

todo cuerpo sensible está en un lugar.

"El lugar posee ciertamente las tres dimensiones, longitud, latitud y altura, dimensiones por las cuales viene determinado todo cuerpo: con todo, es imposible que el lugar sea un cuerpo, pues habría dos cuerpos en un mismo sitio" (Física IV, 1, 208a/208b/209a).

"Por consiguiente, si el lugar es, lo que primera e inmediatamente contiene cada uno de los seres corporales, - sin duda alguna el lugar será una especie de límite o - termino del ser; de manera que, según esto, el lugar - puede parecer la forma y la esencia de cada uno de los seres, forma por la cual se define la magnitud y la materia de la magnitud, pues el lugar es, en esta hipótesis, el límite de cada cosa en particular. Pero en cuanto el lugar parece ser un intervalo de la magnitud, es preferentemente materia, ya que la materia es distinta de la magnitud; y es la materia lo que queda abarcada y definida por la forma, como por una superficie plana y por un límite; ese ser es lo que llamamos materia, lo que es inacabado e ilimitado, ya que, una vez destruidos los límites terminales del cuerpo y han desaparecido las pasiones o cualidades de una esfera, por ejemplo, no queda ya nada de la materia. Por esta razón, Platón, en el Timeo, dice que la materia y el receptáculo de los

cuerpos son una misma cosa, pues lo que posee una potencia receptiva y un receptáculo son una sola y misma cosa. Ahora bien: aunque dé un nombre a la potencia receptiva allí y le dé otro nombre distinto en los llamados axiomas o principios no escritos, con todo, declaró abiertamente que el lugar y el receptáculo de los seres eran una misma cosa. Todos en efecto, hasta él, habían dicho que el lugar era algo; pero tan solo él se atrevió a decir de alguna manera qué es el lugar.

"Pero lógicamente, si se considera la cuestión teniendo en cuenta lo que hemos dicho, parecerá difícil llegar a saber qué cosa es el lugar porque debe ser una de estas dos cosas: o bien materia o bien forma, ya que de otra manera esta cuestión supone un estudio muy profundo, teniendo en cuenta que no es fácil conocer estas dos cosas separadas la una de la otra.

Ahora bien: no es difícil ver que es imposible que el lugar sea una cualquiera de estas dos cosas. Pues la materia y la forma no se separan del ser que constituyen, mientras que el lugar puede separarse del ser; en el sitio, en efecto, en que ahora mismo estaba el aire viene a estar enseguida el agua -como explicábamos antes-, supuesto un recíproco movimiento de translación del aire y del agua, y análogamente en los demás cuerpos. Por tanto, el lugar no es ni una parte ni un há-

bito de los seres, antes es separable e independiente - de cada ser.

"El lugar, en resumidas cuentas, parece ser de una cualidad totalmente afín al ser de una vasija; la vasija en efecto es un lugar transportable, mientras que al mismo tiempo, no forma parte del ser contenido en ella.

Por consiguiente, en cuanto es separable e independiente del ser que contiene, no es forma; por otra parte, - en cuanto contiene algo, difiere de la materia. Por lo demás, siempre nos parece que el ser que está en alguna parte es él mismo algo determinado, y que fuera de él - existe algo distinto de él mismo.

"Si se nos permite una digresión, apuntaremos que quizá fuera conveniente preguntar a Platón por qué motivos las ideas y los números no se hallan en algún lugar, su Puesto que el lugar es un ser que posee la potencia de ser participado, es decir, que es participable; y esto, tanto si lo que es participable es lo grande como si es lo pequeño, o aunque sea la materia, como escribió en - el Timeo.

"Por otra parte, ¿como sería cada cosa lleva a su lugar propio si el lugar fuese materia o forma? Pues es imposible que el lugar sea un ser, cuyo no-movimiento no es tá arriba ni abajo. Hay que buscar, pues, el movimiento

entre cosas de esta clase.

"Y si el lugar está en el mismo ser -cosa necesaria, en efecto, si el lugar es una forma o la materia-, habrá un lugar en un lugar. Pues al mismo tiempo que el ser, se mueven juntamente con él la forma y lo que carece de todo límite y determinación, la materia; y no están siempre en el mismo lugar, sino allí donde está el mismo ser, razón por la cual deberá existir un lugar del lugar". -

(Física, IV, 2, 209b/210a)

"Que cosa es una definitiva el lugar podrá quedar de manifiesto en la exposición que va a seguir.

"Consideremos, por lo que al lugar se refiere, todo aquello que parezca ser en él una cualidad intrínseca y esencial.

"Concebimos, pues, el lugar como aquello que inmediatamente envuelve y contiene aquel ser de quien él se dice lugar; entendemos que el lugar no es nada que forme parte del ser contenido; además que el lugar primero e inmediato no es ni menor ni mayor que la cosa localizada. Y, en fin, que puede ser abandonado por cualquier ser y que es separable de él.

"Hay que añadir a esto que todo lugar posee una parte superior y una parte inferior; y que cada uno de los cuerpos naturales es movido por su propia naturaleza, y que,

gracias a ella, tiende a permanecer en un lugar propio, y que este lugar propio puede estar arriba o puede estar abajo". (Física IV, 4, 210b)

"Un cuerpo que tenga fuera de sí a otro cuerpo envolvente decimos que está en un lugar. Si no tiene fuera de sí otro cuerpo envolvente, decimos que no está en un lugar. Por esta razón, aunque, una cosa que no tuviera nada fuera de sí misma se tornará fluida, se podría decir de ella que no tiene lugar; en verdad, las partes del todo se moverían -ya que ellas se contienen y se envuelven recíprocamente<sup>1</sup>-; pero el todo se movería tan solo en cierto sentido, mientras que en otro sentido no se movería. Pues en cuanto todo no cambia de lugar, pero si se moverá orbitalmente, ya que este es el lugar que hay que atribuir a las partes; algunas de ellas no se mueven ni hacia arriba ni hacia abajo, sino tan solo circularmente; otras, en cambio se mueven arriba o hacia abajo: los que están sujetos a procesos de condensación y de rarefacción.

Como ya se ha dicho, las cosas están en un lugar, unas en potencia, otras en acto; en consecuencia, cuando un cuerpo homogéneo es continuo, las partes están en un lugar en potencia; cuando las partes son independientes, ellas están en contacto entre sí, existen en acto en el

<sup>1</sup> Se trata de las partes que componen el mundo, en la parte inferior de la esfera extrema, y no solo de las esferas homocéntricas, sino también de la región sublunar.

lugar. Por otra parte, las cosas están por sí mismas en un lugar; por ejemplo, todo cuerpo movable por translación o crecimiento está por sí mismo en algún lugar; pero el cielo, tal como se ha dicho ya, tomado en su conjunto, no está en ninguna parte ni en un lugar determinado, a no ser que haya alrededor de él algún cuerpo envolvente; más en cuanto se mueve en esa misma medida es el lugar de las partes, pues entonces una parte está en contacto con otra. Otros seres, por su parte están accidentalmente en un lugar; por ejemplo el alma y el cielo; todas las partes en efecto, están en algún lugar, ya que dentro del espacio orbital, unas partes envuelven y contienen a las otras; por esta razón el cuerpo superior tan solo se mueve circularmente. Pero el todo no está en parte alguna. Lo que está en algún lugar, efectivamente, es por sí mismo alguna cosa; y además, supone a su lado otra cosa distinta en la cual está la primera, y por la cual esta misma queda contenida y envuelta. Pero no hay nada absolutamente que exista, fuera del todo y del universo. Por esta razón se dice que todas las cosas están en el cielo, pues el cielo es el todo. Sin embargo, el lugar no es el cielo sino tan solo el límite extremo del cielo, que está en contacto con el cuerpo móvil, a manera de un límite inmóvil envolvente. En

consecuencia, la tierra está en el agua, el agua en el aire, este en el éter y el éter en el cielo; pero el cielo no está ya en otra cosa distinta". (Física, IV, 5, 212b).

Aristóteles inicia su planteamiento partiendo de las razones a favor de la existencia del lugar, y las enfrenta posteriormente a razones derivadas de su esencia que parecen negar o hacer imposible su existencia, el Estagirita efectúa un análisis crítico a los conceptos platónicos de lugar, materia y forma. Posteriormente Aristóteles define el lugar diciendo que es el primer límite inmóvil de aquello que se intenta circunscribir (Física IV, 4. 211b/212a/212b): circunscribe el cuerpo cuyo lugar es y no tiene nada de la casa en sí; sin embargo, existe al mismo tiempo que la cosa, ya que los límites y lo limitado existen conjuntamente. Los límites extremos de lo que circunscribe y de lo circunscrito son idénticos; son por tanto, unos y otros, límites: pero no de lo mismo, sino que la forma es el límite de la cosa y el lugar el límite del cuerpo que se trata de circunscribir. El lugar, como aquello que circunscribe, permanece inmutablemente quieto mientras que la vasija movida se desplaza y es, por tanto, separable del lugar. Aristóteles habla también, con respecto al espacio, de

arriba y abajo, refiriéndose al cielo como aquello en que se contiene todo y a la tierra como lo inferior. Aquí hay que hacer notar lo siguiente: Esta exclusión de un espacio fuera del cosmos limitado, contrasta con otras afirmaciones de Aristóteles:

- 1) La exigencia de lugar, afirmada para cualquier cuerpo, sea parte, sea todo, en contra de la hipótesis del infinito, observando que este vendría a ser contenido, es decir, limitado por su lugar (Física, III, t, 205a/206a).
- 2) La definición de toda superficie (y por ello, también, del "límite inmóvil en contacto con el cuerpo en movimiento" en el cielo) nada más que como sección y división de los cuerpos, como las líneas de las superficies y los puntos de las líneas. (Metafísica, III, 5, 1012a; XI, 2, 1060a).
- 3) La declaración de que toda curva circular es siempre, al mismo tiempo, fin y principio porque en ella la convexidad no puede separarse de la concavidad. (Física, IV, 13, 222b).

Se puede afirmar entonces:

#### Tesis 15.

Para Aristóteles, el lugar es el límite inmóvil primero e inmediato del continente, teniendo este una prioridad prioritaria sobre todos los seres.

## F. VACIO

### F.1. Platón

"La rotación periódica del Todo o universo, que ha en-  
vuelto en sí misma a los elementos, al ser circular, -  
siempre tiende a volver naturalmente sobre sí misma. -  
Presiona así unos contra otros todos los elementos y no  
permite que quede ningún lugar vacío" (Timeo 58c).

### F.2. Aristóteles

La teoría frecuente de que el lugar es un intervalo  
vacío destinado a recibir los cuerpos, le obliga a con-  
tinuación a estudiar la naturaleza y existencia del va-  
cío. Dice Aristóteles:

"De igual manera hay que creer, sin duda, que es al fí-  
sico a quien corresponde el estudio del vacío, de su -  
existencia, o no existencia, del modo de su existir y -  
de su esencia. Igual que hicimos al tratar del lugar.  
Su refutación, en efecto, y los argumentos de credibili-  
dad a su favor, apoyados en las opiniones opuestas so-  
bre él, son semejantes, pues los que admiten la existen-  
cia del vacío lo conciben como un lugar o como un reci-  
piente o envoltura. Parece existir lo lleno cuando -  
existe el volumen que el lugar es capaz de contener; -

Pero ninguna necesidad hay que obligue a admitir la existencia del vacío, por mas que exista el movimiento local". (Física IV, 7, 214a).

"Es preciso explicar una vez más que el vacío, ese vacío independiente que promulgan ciertas teorías, no existe de ninguna manera. En efecto, si existe un movimiento de translación propio de cada uno de los seres simples y este movimiento de translación es natural, por ejemplo un movimiento que hace que el fuego tienda hacia lo alto, que la tierra tienda hacia lo bajo y el centro, etc., es evidente que la causa del movimiento de translación no puede ser el vacío. ¿De qué movimiento, entonces, será causa el vacío, si se le cree causa del movimiento local cuando no lo es?.

Por lo demás, si con el vacío tiene uno un como lugar carente de cuerpo, ¿a dónde se trasladará el cuerpo que se introduce en él?. El cuerpo, en efecto, no puede moverse en todas direcciones. El mismo argumento tiene valor contra los que afirman la realidad separada del lugar como término final del movimiento de translación. Pues ¿Cómo seran posibles el movimiento de translación y el reposo del cuerpo que está dentro del lugar?. Este mismo razonamiento se aplica tanto a la cuestión del arriba y el abajo como a la cuestión del vacío, y con

pero cuando el lugar se ve privado de la presencia de este volumen, entonces existe el vacío, como si realmente una misma cosa fuera lo lleno, el vacío y el lugar, aunque no sea idéntica su esencia o, mejor, sus nociones o conceptos". (Física, IV, 7, 213a)

"Ahora bien: supuesta nuestra teoría del lugar, y supuesto que si el vacío existe, debe ser un lugar carente de cuerpo, y supuesto, por otra parte, lo que hemos dicho acerca de en qué sentido hay que entender la existencia del lugar, y en qué sentido no es posible admitir tal existencia, se ve claramente que no existe el vacío, ni como un ser dependiente y no separable, pues el vacío pretende ser no un cuerpo, sino un intervalo corporal. Esto explica las apariencias de realidad que circundan el vacío, realidad que se atiende a la del lugar y a las mismas razones que han definido la de este. En efecto, los partidarios de la realidad independiente del lugar en relación con los cuerpos que vienen a ocuparlo, igual que los partidarios del vacío, recurren como primer recurso al movimiento local. Según los últimos, la causa del movimiento es el vacío, causa que tiene la modalidad de aquello en que se produce el movimiento.

Ahora bien: por un motivo semejante a este es por lo que algunos afirman la existencia del lugar.

razón, puesto que los partidarios del vacío hacen de él un lugar. En fin, ¿de qué manera estará una cosa en el lugar o en el vacío?. La teoría ya no sirve cuando un todo está situado en un lugar separado que sea sustancia corporal, pues la parte, a no ser que posea su lugar distinto, no estará en un lugar, sino en el todo. Por otra parte, si no existe el lugar considerado como un intervalo sustancial, tampoco existirá el vacío". (Física, IV, 8, 214b).

"Además, igual que la circunferencia del círculo cuando se reduce no recibe del exterior su curvatura o convexidad, sino tan solo reduce la que ya poseía, e igual que no sería posible hallar una parte del fuego que no fuera caliente, de la misma materia, pues estas dos cualidades, lo pesado y lo ligero, corresponden a las otras dos, es decir, a lo denso y lo raro pues lo que es pesado y duro nos parece ser denso y sus contrarios, lo ligero y lo blando, nos parecen cosas raras o rarificados; sin embargo, lo pesado y lo duro no existen juntos en el pleno y en el hierro. De lo que precede se deduce que no existe el vacío ni independientemente -sea absolutamente, sea en lo raro-, ni en potencia, a no ser que alguien quiera a toda costa llamar vacío a la causa del transporte o translación del ser". (Física, IV,9,217b).

Se puede notar en esta discusión varios puntos interesantes; el primero es la refutación de Aristóteles a las ideas de que el vacío es un espacio en que no existe ningún cuerpo, el segundo el Estagirita se manifiesta en términos más profundos, en contra de la tesis de que el vacío sea la causa del movimiento. En efecto, demuestra de una parte que el vacío anula, más bien, el movimiento y que equivaldría, por consiguiente, a una quietud general: es la total indiferencia con respecto al sentido en que se mueve más o menos algo; en el vacío quedan suprimidas todas las diferencias. Es la pura negación: ni objetos ni diferencias; por tanto, no hay razón alguna para permanecer quietos ni para seguir adelante. Ahora bien, los cuerpos se hallan en movimiento y, además, como cuerpos distintos los unos de los otros: tienen pues una relación positiva y no simplemente una relación con la nada. El tercer punto, Aristóteles rechaza la tesis de que el movimiento haya de desarrollarse en el vacío porque decrezca. Esto no sucede solamente en el vacío. Con ello no se establecería, por tanto, un solo movimiento sino un movimiento en todas direcciones, una dispersión general, un decrecimiento absoluto, en que el cuerpo se quedaría sin nada que lo mantuviese en cohesión. Algunas de sus conclusiones pueden sintetizarse en la -

forma siguiente:

- 1) Las velocidades de los cuerpos que caen (en un medio dado) son proporcionales a sus pesos.
- 2) La velocidad de un cuerpo dado en distintos medios, es inversamente proporcional a las densidades de esos medios.
- 3) Si pudiera existir un vacío, sería como un medio de densidad cero, y entonces la velocidad de un cuerpo que cayera en el vacío sería infinita.
- 4) Si se tuviera que suponer la existencia de una velocidad finita en un vacío, podría contruir un caso absurdo en que un cuerpo caería a través de un determinado medio y del vacío con igual velocidad.

Se puede concluir pues, que

Tesis 16.

Platón y Aristóteles, niegan la existencia del vacío.

## G. TIEMPO

### G.1. Platón.

Al abordar Platón, el problema de la creación, en el Timeo por el Demiurgo, se presenta el concepto del tiempo Dice Platón:

"Cuando el Padre que había engendrado el mundo comprendió que se movía y vivía, hecho imagen nacida de los dioses eternos, se alegró con ello y, en su alegría, pensó en los medios de hacerlo más semejante aún a su modelo. Y de la misma manera que ese modelo es un viviente eterno, se esforzó, en la medida de su poder, por hacer igualmente eterno ese mismo Todo. Ahora bien: lo que en realidad era eterno, como hemos visto, era la sustancia del viviente modelo, y era imposible adaptar enteramente esta eternidad a un mundo generado.

Por esta razón, su autor se preocupó de hacer una especie de imitación móvil de la eternidad y, mientras organizaba el cielo, hizo, a semejanza de la eternidad inmóvil y una, esta imagen eterna que progresa según las leyes de los números, esto que nosotros llamamos el tiempo. En efecto, los días y las noches, los meses y las estaciones no existían de manera alguna antes del nacimiento del cielo, sino que su nacimiento se ordenó al -

tiempo mismo en que se construía el cielo. Todo eso son, en efecto, divisiones del tiempo: el pasado y el futuro son especies producidas del tiempo y, cuando las aplicamos sin sentido a la sustancia eterna, es porque ignoramos la naturaleza de todo ello. Nosotros decimos que es esta sustancia que existía, que existe y que existirá. - Ahora bien: en realidad, la expresión «existe» no se aplica más que a la sustancia eterna.

"Por el contrario, las palabras «existía», «existirá» - son términos que hay que reservar a lo que nace y avanza en el tiempo. Pues eso no son sino cambios. Pero - lo que siempre es inmutable y nunca experimenta el cambio, esto no se hace ni más viejo, ni más joven, con el tiempo, y nunca fue engendrado, ni actualmente deviene, ni será en lo futuro. Antes todo lo contrario, una realidad de esta clase no connota ninguno de los accidentes que el devenir implica en los términos que se mueven al nivel de lo sensible, sino que esos accidentes son variedades del tiempo, el cual imita la eternidad y se desarrolla en círculo siguiendo el número. Fuera de esto, todas las fórmulas de este tipo: lo que deviene «ha» devenido, lo que deviene «está» en trance de devenir, o también: el futuro «es» futuro, y también: el no-ser «es» el no-ser, todas estas expresiones, digo, no son jamás exactas

tas. Pero no ha llegado aún la ocasión oportuna de discutir todas esas cuestiones con una precisión definitiva.

"Brevemente, pues; el tiempo ha nacido con el cielo, a fin de que, nacidos a una, se disuelvan también al mismo tiempo, si alguna vez se han de deshacer, y ha sido hecho sobre el modelo de la sustancia eterna, de forma que se le pareciera lo más posible, según su capacidad. Pues el Modelo es ser por toda la eternidad, y el cielo, por el contrario, desde el comienzo y a lo largo de la duración, ha sido, es y será". (Timeo 38a/39b).

Observamos que Platón continua sus investigaciones, llamando también al universo divino, el Modelo que reside únicamente en el pensamiento y siempre en la identidad consigo mismo, pero este se contrapone de tal forma, que existe un segundo elemento, copia de aquel primero y que tiene un origen y es visible. Este segundo elemento es el sistema del movimiento celeste; el primero lo vivo - lo eterno. No es posible, dice Platón, equiparar plenamente lo dotado de nacimiento y devenir a aquello primero, a la idea eterna. Pero existe una imagen de lo eterno dotada de movimiento y que permanece en unidad: esta representación eterna, que se mueve con arreglo al número, es a lo que llamaré tiempo. En otras palabras

el punto delicado de esta cuestión reside en determinar con claridad el significado de los conceptos de eternidad y de infinita sucesión temporal. Al hacer el mundo a imitación del Modelo eterno, el Demiurgo busca una imagen móvil de la eternidad, que permanece siempre en lo uno, una imagen eterna que procede según el número. Esta imagen eterna es el tiempo. El orden del Mundo comienza con la formación del Alma y con ella nace el tiempo.

Este nuevo elemento, el tiempo, es la medida con que el alma advierte los movimientos ordenados de la sucesión. Y precisamente por su distenderse entre el «era» y el «será», el tiempo se distingue de la eternidad que no se distiende, sino que «es». Platón afirma que solemos llamar el «era» y el «será» partes del tiempo y trasladamos a la esencia absoluta del tiempo las diferencias de los cambios que se mueven en él. Pero el verdadero tiempo es eterno o es presente. Pues la sustancia no es anterior, ni posterior; y el tiempo, como imagen directa de lo eterno, no tiene como partes el futuro ni el pasado. Tenemos pues:

#### Tesis 17.

Para Platón el tiempo está vinculado al cambio y no existe, por tanto, para los seres reales eternos; todo lo que dura tiene un tiempo propio, que parece corresponder al ritmo de sus mutaciones.

## G.2. Aristóteles

Finalmente se analizará el concepto del tiempo. Dejemos una vez más, la palabra a Aristóteles:

"Luego de todo lo dicho nos es preciso arremeter con el estudio del tiempo. Conviene en primer lugar plantear las dificultades que encierra la cuestión y examinar, en una argumentación exotérica, si es necesario situarlo entre los seres o bien entre los no-seres. En segundo lugar nos tocará estudiar su naturaleza.

"Primeramente se puede suponer, por los motivos que vamos a exponer a continuación, que el tiempo no existe absolutamente, o al menos que posee tan solo una existencia imperfecta y oscura. Por una parte, en efecto, el tiempo ha sido y ya no es; por otra parte va a ser y todavía no es; esto es de lo que se compone el tiempo infinito y el tiempo indefinidamente periódico.

Ahora bien: lo que está constituido por no-seres parece no poder participar de la sustancia.

"Por lo demás, la existencia de todo ser divisible supone necesariamente la existencia de todas o al menos de algunas de sus partes; sin embargo, las partes del tiempo son unas pretéritas, otras futuras; no existe ninguna de ellas, y, con todo, el tiempo es una cosa divisible.

"Por una parte, el instante no es una parte del tiempo, pues la parte es una medida del todo y el todo debe estar compuesto de partes; ahora bien: el tiempo, al parecer, no se compone de instantes. Por lo demás, el instante que delimita el pretérito y el futuro, ¿subsiste - él solo, único e idéntico a sí, o es siempre nuevo? Esto no es fácil de comprender. En efecto, si es siempre distinto, supuesto que ninguna parte de una sucesión - temporal coexiste con ninguna otra -excepto en los casos en que las partes son la una envolvente y la otra envuelta o contenida, como ocurre con un tiempo breve respecto de un tiempo largo-, y supuesto que lo que actualmente no existe, sino que ha existido antes, debe forzosamente haber sido destruído en un momento dado, de igual manera tampoco los instantes podrán coexistir los unos con los otros, y el que precede será siempre necesariamente destruído. Ahora bien: ¿será destruído en sí mismo?. Imposible, porque entonces él existe todavía.

Y ser destruído en otro instante, en el instante que le precede, tampoco es posible.

Admitamos esto, en efecto: la continuidad de los instantes, como la de los puntos, es imposible, pues si el instante no queda destruído en el instante inmediatamente consecutivo, sino en otro, deberá coexistir con to-

dos los instantes intermediarios, que son de hecho infinitos en número; ahora bien: esto es imposible". (Física, IV, 10, 218a).

"Ahora bien: dado que lo que es movido se mueve desde un punto de partida a un punto de arribada, y dado que toda magnitud es continua, el movimiento acompaña a la magnitud, pues gracias a la continuidad de la magnitud es continuo el movimiento, y gracias al movimiento lo es el tiempo, pues en realidad el tiempo parece haberse escudrido en proporción al movimiento. Por otra parte, lo anterior y lo posterior están originariamente en el lugar. Y ello, bien entendido, en el orden de la posición; pero si la relación de lo anterior a lo posterior se da en la magnitud, necesariamente se dará también esta relación en el movimiento por su analogía con la magnitud. Pero ella, esta relación digo, se dará también en el tiempo, puesto que el tiempo y el movimiento se siguen mutuamente el uno del otro. Por otra parte, la relación anterior-posterior -tanto para uno como para otro- es en el movimiento y por lo que respecta al sujeto al mismo movimiento; pero en cuanto a la esencia es distinto y no es el movimiento. Ahora bien -y es esta la cuestión que nos ocupa-: llegamos al conocimiento del tiempo, una vez que -

hemos determinado el movimiento, utilizando, para esta -  
determinación, lo anterior-posterior, y decimos que ha -  
transcurrido un tiempo cuando captamos en el movimiento  
una relación de anterior-posterior". (Física, IV, 11,  
218b).

"El tiempo no es, pues, un movimiento, pero no existe -  
más que en cuanto al movimiento conlleva un número. Prueba  
de ello es que el número nos permite distinguir el -  
más y el menos y el tiempo nos permite determinar el más  
y el menos del movimiento; el tiempo es, por tanto, una  
especie de número.

Ahora bien: el concepto «número» tiene dos sentidos: exis  
te, en efecto, el número como numerado y numerable y el  
número como medio de numerar o contar. Ahora bien: el -  
tiempo es lo numerado, no el medio de contar. Luego el  
medio de contar y la cosa contada son distintos.

Y de la misma manera que el movimiento es siempre distin  
to, igual le ocurre al tiempo. El tiempo, tomado todo -  
él en su conjunto, como de una pieza, es el mismo, pues  
el instante es el mismo en su sujeto, aunque en su esen  
cia es distinto. Y el instante mide el tiempo en cuanto  
es anterior o posterior.

"El tiempo es también continuo por medio del instante y  
se divide según el instante, pues también aquí hay una

correspondencia con lo que ocurre entre el ser transportado y la translación. En efecto, el movimiento y la translación son una misma cosa por la unidad del ser transportado, y si hay alguna variación no es en relación al sujeto -lo cual supondría una ruptura de la unidad del movimiento-, sino en cuanto a la esencia. De allí procede, efectivamente, la determinación del movimiento como anterior y posterior. Y esta propiedad corresponde también, en cierto sentido, a la del punto, pues el punto hace continua la magnitud y la determina, ya que él es el comienzo de una parte y el final de la otra.

No obstante, al tomar así como doble el elemento único, es inevitable una detención, siendo el mismo el punto que señala el fin y el que señala el comienzo. Pero el instante, a causa del movimiento continuo del ser transportado, es siempre diferente, de manera que el tiempo es número, no en la hipótesis de que uno se sirviera del mismo punto como comienzo y como fin, sino en la de considerar los extremos de una línea, sin que esta línea deje de ser la misma, y sin que forme partes en acto; y esto, en primer lugar, por la razón que hemos ya explicado, se tomaría el punto como doble, de manera que se produciría una detención, y además porque se ve clara-

mente que el instante no es una parte del tiempo con más razón que el elemento del movimiento respecto del movimiento, como tampoco lo es el punto respecto de la línea, sino que son dos líneas las que son partes de una línea. Así, pues, en tanto que es un límite, el instante no es el tiempo, sino un accidente; en tanto que mide, es número, pues los límites no pertenecen más que a las cosas a quienes limitan; por el contrario, el número de estos caballos o la decena se hallan también en otras partes.

"Queda, pues, en claro que el tiempo es número del movimiento en la relación anterior-posterior, y que es continuo por corresponder a un continuo". (Física IV, 11, - 219b/220a).

En su investigación sobre el tiempo Aristóteles recuerda que, enfocándolo desde el punto de vista externo, necesariamente llega a la conjetura de que el tiempo no tiene ser o de que apenas es y solamente un poco, algo así como si sólo fuese posible. El Estagirita habla de los instantes que son infinitos en todo intervalo entre dos momentos dados -admitiendo así la realidad, y no la simple posibilidad de éstos; una realidad objetiva y no sólo una realidad en el pensamiento-, pero declara, al tratar el problema del infinito, que la infinitud de la división siempre es potencial y nunca actual. Y como infi

nitudo potencial y no actual, él habría podido, evidentemente, definir la infinita extensión del tiempo en la dirección del futuro, cuya cuestión se resuelve sin más - por la declaración aristotélica según la cual la infinitud no es permanencia, sino proceso del devenir.

El Estagirita, apunta también que el tiempo no es movimiento ya que el movimiento existe en un móvil y en un lugar, y el tiempo está en todo. La relación, de lo anterior a lo posterior con que delimitamos el movimiento nos dará la clave de la definición abstracta; el tiempo es el número del movimiento.

Ahora bien, el tiempo, como número que es, entra en la categoría de cantidad y he aquí, por consiguiente, que aparece en él un cantidad infinita en acto; mientras que Aristóteles, tratando de la cantidad en general niega - que se de infinitud en acto para cualquier grandeza, no sólo corpórea y espacial, sino también numérica.

Se afirma entonces:

#### Tesis 17.

Para Aristóteles el tiempo es número del movimiento en la relación anterior-posterior, siendo este un continuo y en este continuo no hay partes actuales sino potenciales que reciben existencia actual cuando algún evento - rompe el continuo.

## CAPITULO II

### A. CONSIDERACIONES GENERALES

El método aristotélico y, en general la filosofía de Aristóteles, surgen como resultado del desarrollo del pensamiento griego. Se puede encontrar, fundamentalmente, dos elementos de esta tradición que aparecen con mayor claridad:

- 1) El método atomista (Leucipo y Demócrito) cuyas explicaciones científicas se reducían al descubrimiento de de las partes materiales de los objetos a explicar. Y
- 2) El método lógico, iniciado por Sócrates y desarrollado por Platón, que investigaba acerca de la naturaleza de la definición y cuyo defecto más importante era su inaplicabilidad a los objetos cambiantes de la experiencia.

En Aristóteles, encontramos un método que es capaz de remontar las dificultades a las que, tanto en Demócrito como en Platón nos enfrentamos, a saber: en la concepción atomista, un tratamiento inadecuado de los "primeros principios",

"Además, viendo toda la naturaleza sujeta al cambio y que no podían comprobar nada de lo que estaba sujeto a movi-

miento o mutación, concluyeron que, acerca de lo que - siempre cambia, era imposible comprobar verdad alguna" (Metafísica, IV, 5, 1010a) y en Platón, una aplicación inexacta de estos "primeros principios" a cuestiones relacionadas con el movimiento y la materia. En otras palabras el método aristotélico suple, por un lado, las faltas inherentes a un exceso de confianza en las causas materiales y, por otra, desecha la tendencia a la preocupación exclusiva por las cosas formales.

De este modo, parte del método aristotélico la constituye la preocupación y el estudio de las "causas" que quedan, finalmente, clasificadas como causa formal, causa material, causa eficiente y causa final. Hay que notar, - empero, que este estudio de las causas no se limita exclusivamente a problemas metodológicos.

Desde un punto de vista distinto, encontramos en el Estagira el reconocimiento de dos formas posibles de adquirir conocimiento:

- 1) El método deductivo que consiste en explicar lo particular a partir de lo general, o, en dar cuenta de lo condicionado a partir de las causas, en palabras del propio Aristóteles:

"Suponemos que tenemos un conocimiento científico incalificado de una cosa, como algo opuesto al conocerla a ella de una manera accidental, como la conoce el sofista, cuando creemos que conocemos la causa de que depende el hecho, en cuanto causa de este hecho, y no de otro, y cuando sabemos, además, que el hecho no podría ser de otra forma de como es". (Analítica Posterior, I, 2, 71a)

- 2) El método inductivo que posibilita, a partir de la enumeración de todos los casos, llegar a las premisas de las que parte la deducción:

"Hemos dicho ya<sup>1</sup> que el conocimiento científico en virtud de la demostración es imposible, a no ser que el hombre conozca las premisas inmediatas primarias. Ahora bien, se nos pueden plantear algunas dificultades por lo que respecta a la aprehensión de estas premisas inmediatas: se puede preguntar no solo si es de la misma especie que la aprehensión de las conclusiones, sino también si hay o no conocimiento científico de ambas, o bien conocimiento científico de la última, y una distinta especie de conocimiento respecto de la primera; y además, si los estados desarrollados de conocimiento no son innatos, antes se producen en nosotros, o bien son innatos, pero al principio pasan inadvertidos.... Así pues es evidente -

<sup>1</sup> Cfr. Analítica Posterior, I, 2.

que hemos de llegar a conocer las presmisas primarias por inducción, pues el método por el que aún la percepción - sensible siembra en nosotros el universal es inductivo". (Analítica Posterior, II, 19, 99b/100b).

Así pues, el examen del método deductivo ha conducido, a la afirmación de que sólo conocemos por demostración y, por tanto, la preocupación aristotélica -en este nivel- se reduce al estudio de las formas de demostración -silogismos- que produzcan un conocimiento científico de la realidad<sup>2</sup>.

Naturalmente, es posible construir silogismos perfectos que no produzcan conocimiento científico. Ello sucede cuando las premisas del silogismo son falsas. Por ello, la validez del método deductivo no solamente se finca en el respeto a las reglas y normas silogísticas (desarrolladas cuidadosamente por Aristóteles) sino también a la verdad de las premisas. Estas premisas, por cierto, son demostrables, en la mayoría de los casos utilizando la deducción y premisas anteriores. Empero, no toda premisa es demostrable pues,

<sup>2</sup> El hecho de que este conocimiento científico sea, en efecto, un conocimiento de la realidad permite observar que en el caso de Aristóteles - nos encontramos ante una epistemología realista. Esto junto con el estudio aristotélico de los primeros principios o premisas inmediatas primarias, nos da el hilo conductor para encontrar, en Aristóteles, la síntesis del atomismo y el platonismo.

"Es evidente que existe un primer principio y que no existe un número infinito de causas de los seres, ni concebidas en una cadena ilimitada, ni concebidas como una colección de especies de causas diversas". (Metafísica, II, 2, 994a).

Estas premisas indemostrables -o cuya demostración nos conduciría a un proceso de "ascenso infinito"- son los llamados primeros principios. El más notorio y notable es llamado principio de contradicción que se formula, lógicamente, en los siguientes términos:

"Es evidente, por tanto que este principio es por excelencia el más cierto. Digamos ahora a continuación qué es este principio. Es este: es imposible que, al mismo tiempo y bajo una misma relación, se dé y no se dé en un mismo sujeto un mismo atributo". (Metafísica, IV, 3, 1005a).

Y, ontológicamente, como sigue:

"Hay un principio en los seres respecto del cual no se debe incurrir en error, antes es necesario estar siempre en lo cierto respecto de él, estar en lo contrario al error<sup>3</sup>. El principio es este: que una misma cosa, bajo la relación de un único y mismo tiempo, no puede ser y no ser". (Metafísica XI, 5, 1062a)

Al estudio tanto de estos "primeros principios" como de

<sup>3</sup> Cfr. Física, I, 7.

las "primeras causas" es a lo que Aristóteles llama Filosophía. (Metafísica, I, 1, 981b).

## B. ELEMENTOS METODOLOGICOS

Mencionando el principio de contradicción, es interesante destacar algunos elementos metodológicos en Aristóteles - que tienen interés para el presente trabajo:

### 1) El elemento histórico crítico.

Como ya se mencionó, Aristóteles es el resultado de la - historia del pensamiento griego, de hecho, Aristóteles - es la culminación de la historia de un pensamiento peculiar<sup>4</sup>.

Esta observación sería trivial si Aristóteles mismo no - fuera conciente de ella y buscara asimilar dicha historia de un modo crítico.

Así encontramos que, tanto la temática como el hilo conductor de la obra del Estagirita vienen dados desde su - propio pasado y, es a partir de la crítica de este pasado que Aristóteles formula sus propias concepciones.

En este sentido Aristóteles observa:

"No hay que dar, por tanto, las gracias tan solo a aquellos cuyos puntos de vista compartimos, sino también a - quienes han tratado los problemas con cierta superficialidad

<sup>4</sup> Hegel escribe que "Aristóteles se limita a exponer y precisar el pensamiento en su aplicación finita: su lógica es, por tanto, una historia - natural del pensamiento finito". Lecciones sobre la historia de la filosofía, Tomo II, p. 212, Fondo de Cultura Económica, México 1972.

lidad. También estos han contribuido con algo al saber: ejercitaron de antemano nuestro espíritu crítico e inquisitivo. De no haber existido Timoteo, careceríamos de muchas hermosas melodías. Pero no habría existido un Timoteo si antes no hubiera existido un Phynis. Lo mismo ocurre con los que teorizamos sobre la verdad. Hemos adoptado las opiniones de algunos de ellos; pero otros fueron la causa de que estas opiniones existieran. Con razón se llama a la Filosofía la ciencia de la verdad. Pues el fin de la ciencia especulativa es la verdad, y el fin de la ciencia práctica, la misma obra". - (Metafísica, II, 1, 993b)

Y, más adelante aplica este método directamente. Así, en el libro IV de la Metafísica, cuando establece el principio de contradicción, se detiene durante los capítulos 4 y 5 a refutar -y tomar de ellos lo que considera válido- dice el Estagirita:

"Hay filósofos, como ya hemos dicho, que pretenden y piensan que una misma cosa puede ser y no ser al mismo tiempo.

Mantienen este punto de vista la mayoría de los físicos o naturalistas. Nosotros acabamos de reconocer que es imposible que en un mismo ser se dé a un tiempo el ser y no-ser. Y con esto hemos demostrado que este principio es el más cierto de todos". (Metafísica IV, 4, 1006a).

En la misma Metafísica, con el objeto de construir su concepto de lo uno y lo múltiple, Aristóteles parte del pitagorismo y dice:

"Por lo que se refiere a esta sustancia, baste ya lo dicho..." (Metafísica XIV, 1, 1087a).

Y en otro texto aún, Ética Nicomaquea, Aristóteles establece su concepto de bien:

"...Volvamos a tomar nuestra cuestión inicial: puesto que todo conocimiento y toda decisión libre miran a cierto bien, ¿Cuál es la meta que asignamos a la Política y cuál es el bien supremo de nuestras actividades?..." (Ética Nicomaquea, I, 4, 1095a).

De hecho, la utilización por parte de Aristóteles de la historia de la filosofía para construir un sistema propio, ha sido, en primer lugar, una novedad metodológica pues no se trata, como en el caso de Platón, de hacer prevalecer simplemente conceptos propios sino, de elaborar dichos conceptos. En segundo lugar, este método ha servido, al menos, para conservar fragmentos y teorías que de otro modo no serían conocidos.

## 2) La axiomatización.

Así como la Analítica Primera estructuraba toda la teoría general acerca del silogismo, la Analítica Posterior está primeramente dedicada al estudio del silogismo de-

mostrativo y a justificar los primeros datos sobre la teoría de la ciencia.

Aristóteles dice en Analítica Posterior que:

"Todo saber dado o recibido por medio de un argumento proviene de un conocimiento preexistente. Esto resulta evidente con un examen de todas las ciencias del saber. Las ciencias matemáticas y todas las demás disciplinas especulativas se adquieren de esta manera". (Analítica Posterior I, 1, 71a)

Como hemos dicho, la primera tarea del pensamiento es la de remontarse de conocimiento en conocimiento para detenerse en un principio que no requiere demostración:

"Nuestra propia doctrina sostiene que no todo conocimiento es demostrativo o demostrable; por el contrario, el conocimiento de las premisas inmediatas es independiente de la demostración". (Analítica Posterior, I, 3, 72b).

Antes, hemos visto cuál es este principio en el caso de la filosofía, ahora, Aristóteles propone tal movimiento en cada ciencia y enuncia como principio metodológico - que:

"...En efecto, los axiomas comprenden todos los seres, y no tan solo a uno que otro género de seres, separados de los demás. Y en todas las ciencias se sirven ciertamente de ello... Pues es necesario llegar a la demostra-

ción, conociendo los axiomas y de ninguna manera esperar encontrarlos mientras se oye la demostración". (Metafísica, IV, 3, 1005a/1006a).

La filosofía, ciencia del ser en tanto que ser, es la que posee los principios más ciertos, principios respecto de los cuales todo error es imposible. De entre estos, el principio de contradicción es un principio privilegiado y Aristóteles hace notar que es un principio que no siempre ha sido aceptado. Heráclito y Protagoras, no lo aceptan. Así, Aristóteles procede a refutar a Heráclito -puesto- que no se trata de demostrar el principio; ello, ya se ha dicho, es imposible- y a Protagoras en los siguientes términos:

A Protágoras, que sostenía que el hombre es la medida de todas las cosas de tal modo que todo lo que parece es verdadero y que afirmaciones contradictorias son simultáneamente verdaderas, objetaba:

- 1) Que quienes admiten esta opinión no pueden exigir que nadie admita la afirmación o la negación.
- 2) Que el objeto de este discurso filosófico es lo indeterminado pues creen hablar del ser, hablan del no-ser.

A Heráclito y Cratilo que afirman que lo mudable no existe<sup>5</sup> responde:

<sup>5</sup> En estos términos, al menos, enuncia el Estagirita la filosofía heraclítica.

- 1) Que la cosa que han dejado de ser participan en lo de venido,
- 2) Que existe una confusión entre mudar cuantitativamente y mudar cualitativamente.
- 3) Que la observación del movimiento en los objetos sensibles no implica el movimiento del mundo entero, al contrario, existe una naturaleza inmóvil.

Finalmente Aristóteles objeta que, en general, entre contrarias no puede haber mediación alguna pues esta mediación tendría, a su vez, una negación y, así, al infinito<sup>6</sup>.

### C. OTROS ELEMENTOS.

Me interesa ahora analizar de un modo un poco más cuidadoso, algunos de los conceptos metodológicos que maneja Aristóteles, sobre todo aquellos que tengan relevancia para nuestro estudio posterior. Detengámonos pues en un mínimo de detalle, a reproducir las ideas aristotélicas en torno a los conceptos de unidad, contradicción y nuevamente infinito.

#### i) UNIDAD

De la unidad nos dice Aristóteles que es una misma cosa con el ser sin estar comprendidos bajo la misma noción pues,

<sup>6</sup> "...Es, pues, evidente que el ser no se separa de las cosas"  
Metafísica, IV, Capítulos 4-7.

"...Es, pues, evidente que el ser no se separa de las cosas, ni en la generación ni en la destrucción. Lo mismo ocurre con la unidad. De donde se deduce con claridad - que, en estos dos conceptos, la adición de uno y otro no cambia nada, y que, en consecuencia, la unidad no es otra cosa que el ser". (Metafísica, IV, 2, 1004a).

Mas adelante, opone unidad a pluralidad y examina los modos de la unidad, a saber: identidad, semejanza e igualdad, y los modos, opuestos a estos, de la pluralidad: heterogeneidad, desemejanza y desigualdad<sup>7</sup>.

### ii) OPOSICION

Sobre esto nos dice Aristóteles que la contradicción, - así como los contrarios, y la privación, son dichos de lo opuesto.

Llama contrarias a las cosas que no pueden coexistir en el mismo sujeto, contrariedad es la diferencia extrema. A partir de ello, es posible demostrar que una cosa única no puede tener mas que un solo contrario.

La contradicción, por otra parte, es la oposición primera, y no puede haber intermedios entre la afirmación y la negación.

En cambio, los contrarios admiten intermedios.

Otra forma de oposición que se analiza es la privación, de ésta hay diversas clases, a veces, es falta, otras se

<sup>7</sup> Metafísica, X, 3 y V, 10.

refieren al tiempo, otras más a una parte especial, etc. Por ello, es posible que haya intermedios (el ejemplo que da Aristóteles es el de un hombre que no es bueno ni malo (Metafísica, X, 4, 1055b)).

El Estagirita entiende, por cierto, por intermedio, aquello en lo que debe mudarse necesariamente lo que muda, y demuestra que es preciso que los intermedios sean del mismo género así como que la existencia de los intermedios - está subordinada a la de los opuestos.

Acerca del estatuto ontológico de los contrarios, dice - Aristóteles:

"Todo proviene, sí, de los contrarios, pero de los contrarios considerados como inherentes a un sujeto. Por consiguiente, siempre todos los contrarios son atributos de un sujeto, y ninguno de ellos es susceptible de separación o independencia. Por lo demás, según aparece y tal como lo confirma la noción misma, no hay nada contrario a la sustancia. Luego, ninguno de los contrarios es propiamente un principio, sino que es preciso otro principio" (Metafísica, XIV, 1, 1087a).

### iii) INFINITO

El papel que juega el infinito como elemento metodológico en las argumentaciones aristotélicas es de gran importancia. De hecho, las refutaciones a principios que se

opongan al de contradicción se apoyan, básicamente, en - consideraciones acerca del infinito.

De hecho encontramos que Aristóteles utiliza el principio de la imposibilidad de los procesos infinitos, casi con - la misma frecuencia con que utiliza el principio de con - tradicción.

Incluso, no sería aventurado afirmar que -al menos lógica - mente- el principio de la imposibilidad de los procesos - infinitos pueda tener prioridad sobre el principio de con - tradicción.

Este principio se podría formular intentando darle priori - dad sobre el que Aristóteles llama "primer principio", co - mo aquél supuesto que asegura la existencia misma del - "primer principio".

También podría formularse como el principio que elimina - todo proceso mental infinito. En otras palabras, sería - el principio que establece el carácter finito de los pro - cesos del pensamiento.

Aristóteles formula la cuestión como sigue:

"Es evidente que existe un primer principio y que no exis - te un número infinito de causas de los seres,..." (Meta - física, II, 2, 994a).

y esta formulación le permite llevar a cabo diversas ar - gumentaciones.

Así, la existencia de la causa final queda resuelta pues "...De igual manera, tampoco se puede avanzar hasta el infinito en el orden de la causa final..." (Metafísica, II, 2, 994a).

En la Etica Nicomaquea, Aristóteles establece como meta - de las acciones humanas mediante un argumento similar: "Si es verdad que existe algún fin de nuestros actos que nosotros queremos por sí mismo, mientras que los demás fines no los buscamos más que en orden a este mismo fin, si también es verdad que no en todas las circunstancias nos determinamos a obrar subiendo de un fin particular a otro -pues procederíamos hasta el infinito..." (Etica Nicomaquea, I, 1, 1094a/1094b).

En un plano mucho más detallado, Aristóteles se pregunta en Analítica Posterior:

- a) Si es posible que las series silogísticas sean infinitas en dos sentidos:
  1. ¿Es posible empezar de aquello que no es atributo de una cosa alguna pero es sujeto de atributos y ascender (ascenso a lo universal) al infinito?
  2. ¿Es posible empezar por aquello que es predicado pero no sujeto y descender (descenso a lo particular) al infinito? o, en un tercer sentido:

3. ¿Es posible que la cadena de medios sea infinita?

Según Aristóteles, esta cuestión se relaciona con la posibilidad de demostrar todo, en otras palabras, con la posibilidad de que exista o no un principio indemostrable, un primer principio.

La respuesta invade el terreno de la ontología y dice - Aristóteles:

1. En el primer caso (los otros dos se demuestran con argumentos similares), en que se van agregando predicados, debe haber un momento en que el predicado signifique la sustancia y, por tanto, si la naturaleza esencial es cognoscible, o si la definición es posible, la serie ascendente termina. Y toda sustancia es definible puesto que todo predicado muestra al sujeto bajo una de las categorías<sup>8</sup>, el número de predicados es finito y, por tanto, no es posible una cadena infinita de predicados. Para eliminar la condicionalidad en la argumentación anterior, Aristóteles escribe:

".. Porque todas estas sustancias son susceptibles de definición, y una serie infinita no puede ser recorrida con el pensamiento..." (Analítica Posterior, I, 22, 83b).

<sup>8</sup>

Las categorías son: sustancia, cualidad, cantidad, relación, lugar, tiempo, posición, estado, acción y pasión; en ocasiones, solo se mencionan ocho eliminando posición y estado, Cfr.: Ross, Aristóteles, p. 39.

### CAPITULO III

#### EL PENSAMIENTO ARISTOTELICO EN EL CALCULO

La primera noción sobre el infinito -antes de surgir la -  
especulación filosófica- la encontramos, en la poesía -  
griega, comenzando por los poemas homéricos<sup>1</sup>.

Posteriormente esta noción se desarrolla en el pensamien-  
to de los filósofos, quienes extienden sistemáticamente -  
sus consideraciones a la totalidad del devenir universal,  
vinculando la inagotabilidad de éste con la de la fuente  
de la cual mana siempre todo el devenir: la φύσις: "natu-  
raleza".

Como ya se ha visto, en el concepto de la infinitud tempo-  
ral, Aristóteles admite en el número lo infinito sólo -  
en potencia y no en acto, esto, por la imposibilidad de  
numerar o recorrer lo infinito. Y aun cuando, ello con-  
traste con sus dos conceptos -el de tiempo, como número  
numerado de un movimiento celeste que se cumple ab aeter-  
no; y el de los instantes, que son infinitos en cualquier  
intervalo entre dos instantes dados-, era consecuencia -  
sin embargo de la imposibilidad de considerar infinito -  
cualquier número pensado, ya que siempre es posible pen-  
sar otro mayor que el.

La infinitud, para Aristóteles, no está por consiguiente

<sup>1</sup> Iliada, I, 350. XXIV, 776. Traducción al inglés por A.T.Murray, Loeb Classical Library, William Heinemann Ltd. London 1964.

en ningún número concreto, sino en la serie de números mis mos, o mejor dicho, en la posibilidad que queda siempre - fuera de esta serie, de superar siempre por vía de adición todo número dado: es, por consiguiente, una infinitud potencial (de la materia, de donde se forma la serie de los números). Aristóteles puede reconocerla en el pensamiento, sin sentirse obligado a reconocer, por ello, consecuencia alguna en lo que concierne a la realidad. La exclusión de lo infinito de la realidad, sin embargo, repercute en limitaciones y dificultades en lo que concierne a la infinitud numérica misma.

Aquello que Aristóteles decía del límite temporal -instante- (Física, IV,13,221b/222b. VI,3, 234a/234b. VIII,2,250b/251a/252a) que posee una naturaleza mediadora entre el antes y el después, implica, en sí misma, la infinitud del tiempo. Sin embargo no se aplica (como otros lo habían hecho ya con anterioridad y lo hacen posteriormente) al límite en general, es decir, al dominio de toda grandeza mensurable y especialmente de las continuas; a las grandezas extensas (especiales) atribuye, generalmente, una totalidad limitada. Por ello admite, sin embargo un proceso infinito de división -define lo continuo como lo que es divisible en partes siempre divisibles, (Física, VI, 1, 231a. VI. 2, 23a. Del Cielo, I, 268a), o sea hasta el infinito (Física, III, 7, 207a) de manera

que en él aparece primeramente lo infinito (Física, III, 1, 200a)-; pero no puede reconocer en las grandezas un infinito por adición, sino como proceso inverso a un proceso de división (Física, III, 6, 206b).

En efecto, si las magnitudes, -y aquí hay que recordar - Estagirita cuando dice: "El infinito en efecto, es la materia de la perfección de la magnitud" (Física, III, 6, 207a)- extensas son todas ellas finitas, falla para ellas la condición que sería necesaria para proceder un resultado infinito por adición; es decir, que sea posible tomar otras cantidades que han quedado fuera de toda grandeza ya supuesta. Por consiguiente, nunca infinito - en potencia, o sea como proceso y nunca como resultado; y sólo como proceso inverso al de la división sin que su infinitud pueda sobrepasar nunca la grandeza finita de su totalidad (Física, III, 8, 208a).

Estas limitaciones repercuten sobre el proceso de numeración a que la suma, así concebida, puede dar lugar. Para tener idea de esto, es preciso partir del proceso de la división, que Aristóteles concibe como recorrido infinito hacia lo infinitesimal; o sea la división progresiva del tipo dicotómico (Física, III, 6, 206b):

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots, \frac{1}{2^n}, \dots, \quad ; \quad n \in \mathbb{N}$$

Con la que no se llega nunca a agotar lo infinito. habiéndo siempre un más allá de toda grandeza mínima pensable, una cantidad menor (Física, III, 6, 206b), ya que lo continuo no puede ser nunca indivisible (Cfr.: Física, VI, 2.), ni constar de elementos indivisibles (Física, VI, 1, 231a). Establecido esto, el Estagirita no puede, naturalmente, concebir una adición que proceda a partir del Término del proceso divisorio en dirección inversa, o - sea, que porta de fracciones infinitesimales últimas, - que puedan representar los resultados extremos de un proceso divisorio que nunca tiene término; sino sólo aquella adición que parta del comienzo del proceso divisorio, procediendo paralelamente a él, sumando sucesiva y progresivamente las fracciones que de él resulten y formando, en esta adherencia constante al proceso divisorio, - una progresión geométrica convergente. A ello dirá, modernamente, Leibniz: "Je veux ajouter, en passant, que non seulement Cavalieri et Torricelli, dont parle (rassendi dans le passage cité par M. Bayle, mais encore may - même et beaucoup d'autres, ont trouvé des figures d'une longueur infini, égales á des espaces finis. Il n'y - l'on fait voir qu'  $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32}$  etc. est égal á

l'unité." <sup>2</sup>

<sup>2</sup>Reponse aux reflexions contenues dans la seconde Edition du Dictionnaire (Ritigue de M. Bayle, article Rorarius, sur le systeme de l'Harmonie preétablie. C.J. GERHARDT, DIE PHILOSOPHISCHEN SCHRIFTEN VON GOTTFRED LEIBNIZ, Tomo IV, p. 570, GEORG OLMS HILDESHEIM.

Y además, mientras el desarrollo coherente de los dos conceptos (de lo continuo y de lo infinito entendido como proceso y no como resultado) que Aristóteles afirma muy bien pueden ser una introducción al cálculo. La pregunta que - sin embargo, cabe hacer aquí -sin dar mas rodeos- es ¿por qué no se cristaliza en Aristóteles el concepto de límite? la respuesta se encuentra tal vez en que los desarrollos científicos quedan esterilizados, en el aristotélismo, por conceptos de orden filosófico que impiden alcanzar el concepto de continuo desde el dominio de la magnitud extensa (espacial y temporal) hasta el dominio de magnitud numérica. (Física, III, 7, 207a).

El Estagirita se detiene, precisamente, en el momento de alcanzar un concepto general de magnitud matemática que - sea a un tiempo continua (es decir, divisible hasta el - infinito) e infinita. (es decir, aumentable hasta el in- finito).

León Brunschvicg<sup>3</sup> parece atribuir semejante detención al genio clasificador de Aristóteles, que lo habría llevado a asignar a la ciencia el dominio de lo discreto y lo finito, reservando a las especulaciones metafísicas las virtualidades de lo continuo y lo infinito.

Pero, en realidad, lo que se oponía a la unificación de los conceptos de magnitud extensa (reconocida como conti

<sup>3</sup> Leon Brunschvicg: Les Etapes de la Philosophie Mathématique. Presses - Universitaires de France, 3e. Edition, 1947. En el párrafo, el subrayado es del autor.

nua) y de magnitud numérica, (reconocida como infinita) era en Aristóteles, sobre todo la necesidad de mantenerlas separadas y opuestas para evitar, en la magnitud extensa el reconocimiento de aquella infinitud del proceso de agregación que no podía, sin embargo, ser desconocida en la serie numérica). Por eso él, renovando con Platón la distinción entre los dos infinitos -por adición o multiplicación y por sustracción o división- quiere poner, respecto de dicha distinción, una antítesis entre las condiciones de las magnitudes y las condiciones de los números. En las magnitudes hay infinitos por división; mas no por adición, sino como proceso inverso al divisorio y que obtiene un resultado siempre inferior a la unidad. En los números hay infinitud de acrecentamiento, pudiéndose suponer siempre un número mayor a cualquier otro dado, pero la división, en cambio, tiene por límite último la unidad indivisible (Física, III, 6, 206b).

Esta antítesis separa lo que los pitagóricos, seguidos por Platón, tendrían a unir: el número y la extensión en la aritmogeometría; el número racional e irracional en el concepto más pleno de número real; lo discreto y lo continuo en el concepto de cantidad o magnitud, desarrollado después por Eudoxio de Cnido con las magnitudes homogéneas<sup>4</sup>. Pero en la antítesis establecida por el Es-

<sup>4</sup> Cfr: Kline Morris, Mathematical thought from Ancient to Modern Times, New York, OXFORD UNIVERSITY PRESS 1972, pág. 68. passim.

tagirita no entran en juego razones matemáticas, sino solamente razones de filosofía natural: no sin razón de - discusión - como observa Brunschvicg<sup>5</sup> - pertenece a un tratado de física, absolutamente impregnado por los caracteres de una metafísica; y, agregamos, de una física que pretende ser de la cualidad más que de la cantidad. Los números tienen por límite mínimo la unidad, porque numeran objetos reales (individuos), que no pueden ser descompuestos sin perder su realidad, la cual es unión de materia y forma: el hombre dividido en partes, no llega a ser una pluralidad de hombres, sino que pierde su propia realidad; y en este sentido podemos decir con Rufini<sup>6</sup> que para Aristóteles las subdivisiones de la unidad no son números, porque no representan ya multitud de objetos. (Metafísica, XIII, 2,3,4,5,6,7,8; 9, 1086a y Física III, 7, 207a). Por otra parte - y esta razón no tiene menor peso para el Estagirita - mientras en el dominio de los números tiene que reconocer la infinitud del proceso aditivo y la posibilidad de suponer siempre un número mayor que cualquier otro dado, en el dominio de las magnitudes extensas su filosofía natural niega, en cambio, la infinitud por adición, que llevaría a sobrepasar los límites de su universo finito (Física, III,7,207a/208a).

Estos dos motivos de orden filosófico, por consiguiente,

<sup>5</sup>

Op. cit., págs. 155-156.

<sup>6</sup>

F. Rufini, Il metodo di Archimede e le origine de ll'analisi infinitesimale nell'antichita', Roma 1926, p. 69.

detienen a Aristóteles en la vía de unificación y continuidad entre la adición infinita (limitada por él al terreno de la aritmética) y la infinitud por división (limitada al terreno de la geometría), a las cuales parece sin embargo inclinarse cuando observa que la infinita divisibilidad de las magnitudes continuas funda la posibilidad de suponer siempre, en el proceso inverso de adición, un número mayor al ya dado; toda vez que son infinitas las divisiones de la magnitud, pues el continuo es, sin duda, infinitamente divisible. (Física, III, 7, 207a).

Tal parece ser que aquí, está a punto de separar la escisión establecida entre la extensión (geometría) y el número (aritmética), y de alcanzar el concepto general de magnitud matemática. Si hubiese procedido en esta dirección, se habría visto conducido a entroncar la observación hecha a este respecto -que la infinita adición progresiva de la cual estaba hablando:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \dots + .$$

da un número siempre mayor que el dado - con la otra, - que hace poco más adelante, según la cual tal adición - no puede nunca, sin embargo, superar la totalidad de la magnitud finita. Es decir que habría visto claramente

que la adición que constituye el proceso inverso de la división de una magnitud, tiende al límite 1 (o, como dirá después Leibniz, "est égal á l'unité"); y así había visto caer la barrera entre el infinito como proceso divisorio (reservado por él a las magnitudes) y el infinito como proceso multiplicatorio (reservado a los números). En el dominio de las magnitudes la unidad marca el punto de partida del proceso infinito de fraccionamiento, y a la vez el término al cual siempre tiende, sin alcanzarlo nunca, el proceso inverso de adición. En el dominio de los números la unidad marca el punto de partida de la serie progresiva de los aumentos, y al mismo tiempo el punto de detención de todo proceso divisorio.

La división se cumple así para los números en un proceso continuado desde el número infinitamente grande hasta la unidad; y aquí se detiene, para volver a cumplirse por debajo de la unidad en el campo de las magnitudes y ya no de los números. La adición en cambio se cumple en un proceso continuado debajo de la unidad en el campo de las magnitudes, pero encuentra aquí, en la unidad, un límite insuperable (o mejor, inalcanzable), y sólo vuelve a cumplirse más allá de ella en otro dominio, el de los números.

Pero la unidad marca así la frontera entre los dos terri

torios, ¿no podrá tener acaso simultáneamente con la función de separar, la de unir?. Esta doble función atribuye el Estagirita, en el dominio del tiempo, al instante, mediador entre el tiempo antecedente y el sucesivo, por el hecho de que pertenece a los dos campos que deslinda (Física, VI, 3, 234a). Atribuir al instante esta doble función significa establecer la continuidad en vez de la discontinuidad entre los dos procesos: continuidad entre la suma o multiplicación de las unidades (de la cual se compone la serie de los números enteros) y la división de la unidad (de la cual se constituye la serie de los números fraccionarios). Pero significaría, al mismo tiempo superación de la antítesis entre extensión y número, en la concepción más general de la magnitud matemática y de su doble infinitud. Ahora bien a esa unificación se oponían precisamente los dos motivos de orden filosófico que antes hemos recordado: el concepto de individuo (unidad) como símbolos de materia y forma, y la limitación de toda magnitud extensa.

Como el tratamiento aristotélico se desarrolla más sobre terreno filosófico que matemático, no hay posibilidad de reconocer en los números este doble infinito (por multiplicación y por división), que Aristóteles reconoce en el movimiento y en el tiempo; es decir, en los dos conti

nuos para los cuales no admite, límites relativos ni a la suma ni a la divisibilidad de los intervalos transcurridos. No se crea, por otra parte, que Aristóteles admita en este campo una noción positiva de lo infinitesimal por medio del concepto de instante. Los instantes, que él dice infinitos en todo intervalo temporal, no son fracciones del tiempo, (Física, IV, 11 219b) o duraciones infinitesimales, sino secciones o límites entre magnitudes temporales, privados ellos mismos de magnitud. (Cfr. Física, VI. 8).

Si hubiese seguido la sugerencia que podía emanar de dicho reconocimiento y hubiese admitido la doble infinitud numérica, entonces habrían derivado de ellas dos consecuencias: por una parte habría superado la oposición -que Estratón<sup>7</sup> acentuará después- entre la continuidad del tiempo (número del movimiento) y la discontinuidad del número; la habría superado a través de la visión de la infinita -fraccionabilidad de la unidad, o sea, a través de la integración del concepto de número entero (infinito por adición) con el concepto de número fraccionario (infinito -por división) y mediante la integración del número racional con el irracional. Por otra parte, también el infinito por adición o multiplicación habría aparecido iluminado más vivamente en su infinitud, cuando a las unidades -

<sup>7</sup> Véase: S. Sambursky, El mundo físico a fines de la antigüedad, EUDEBA 1970, págs. 25 y 55.

mismas, que constituyen la serie de los números y de las progresiones, se les hubiese considerado como suma infinita de fracciones infinitesimales.

Deteniéndose, en cambio, en la posición antes anotada, - Aristóteles no deja de comprender que podía acusársele de colocarse en una actitud contraria a las especulaciones de los matemáticos referentes al infinito; y quiso evitarla o prevenirla. Por ello afirma:

"Además, esta discusión de ninguna manera pretende privar a los matemáticos de sus consideraciones al eliminar la posibilidad de que el infinito exista de esta manera; es decir, que existe en acto por adición o crecimiento, como si no pudiera ser excedido y trascendido, pues los matemáticos actualmente no precisan del infinito en sus estudios ni lo emplean en él, sino conciben la existencia de una magnitud finita tan grande como quieran, y - de la misma manera es posible en una magnitud todo lo grande que se quiera seccionar cualquier otra magnitud de una cantidad menor cualquiera. Así, pues, esto no tiene nada que ver con el que esto se demuestre del modo dicho; que el infinito existe se hallara en aquellas magnitudes que lo son". (Física, III, 7, 208a).

Lo cual no significa, como interpretan Rufini<sup>8</sup> y Heath<sup>9</sup>, que realmente los matemáticos de la época de Aristóteles

<sup>8</sup> Cp. cit pág. 71.

<sup>9</sup> Heath, Thomas L.: A History of Greek Mathematics, tomo I, pág. 272, - Oxford University Press, 1921.

no se sirviesen, en las demostraciones matemáticas, ni de lo infinitamente grande, ni de lo infinitamente pequeño (que Aristóteles quiere mostrar asequible a ellos - aun con las limitaciones puestas por él). Sino que significa únicamente que él quiere convencerlos de la posibilidad de aplicar el proceso infinito a la división y al concepto de lo infinitesimal aún en el caso de que se parta de magnitudes finitas; para él, las únicas existentes. Que los matemáticos de la época asumiesen, en cambio, tanto para el número como para las magnitudes, el concepto de lo infinitamente grande además del concepto de lo infinitamente pequeño, aparece no sólo en Del Cielo, II, 13, 293a, donde se hace referencia a la afirmación pitagórica de la distancia infinita entre la órbita de la tierra y la esfera estelar; sino que parece también testimonio en Física, III, 4, 203a, donde -después de haber dicho a propósito de la división de las magnitudes - que los matemáticos se sirven también de lo infinito por ejemplo, el procedimiento de descenso infinito: Euclides, Elementos, prop<sup>n</sup> 31, libro VII, agrega el Estagirita, poco después, que el argumento capital en favor del reconocimiento de la infinitud de éste: "puesto que el pensamiento no tiene término, parece que tanto el número como las magnitudes matemáticas," (Física, III, 4, 203b) y a

La conexión entre infinito e infinitesimal, en los procedimientos usados por los matemáticos de la época, parece aludir también en Física, VIII, 10, 266b, donde dice:

"Sumando siempre a la fuerza finita una fuerza finita mayor, constantemente, llegaré a un momento en que su movimiento se habrá cumplido en un tiempo A, pues, sumándole siempre algo al finito, sobrepasaremos todo finito; igualmente, restándole algo, vendremos a caer por debajo de todo finito".

Aquí, el concepto de infinitamente grande y el de infinitamente pequeño, aparecen asociados como los dos límites a los cuales tienen los procesos inversos (pero análogos) de agregación y de división continuos lo cual viene a ser testimonio de un hábito mental, del cual es más tarde, seguro documento, la obra matemática de Arquímedes, pero que debía, ya en la época de Aristóteles, haberse hecho familiar a los matemáticos griegos por la elaboración precedente, ya relativa al concepto de lo infinitamente grande, cumplida en la matemática y astronomía pitagóricas, ya relativa al concepto de lo infinitesimal, a todo lo cual vuelve a vincularse Arquímedes.

## CAPITULO IV

### ARQUIMEDES Y EL CALCULO

Tras de la sistematización euclídeana<sup>1</sup> de la matemática, sigue, una vez de un impulso progresivo en los análisis de las infinitesimales, un período relativamente corto ( $\approx 70$  años) de estancamiento hasta llegar a Arquímedes, - con quien el método infinitesimal alcanza, en cambio, tal conciencia de su propia importancia y fecundidad, que el gran matemático de Siracusa merece realmente ser señalado, por el desarrollo dado tanto al Cálculo de las cantidades infinitamente grandes, cuanto a los procedimientos del análisis infinitesimal, como aquel en quien el concepto matemático de la infinitud lograra en la antigüedad el más alto grado de desarrollo<sup>2</sup>. Es, necesario que se haga un breve paréntesis en la discusión para tratar de dar una idea, sobre la personalidad del más grande matemático de la antigüedad: Dice Plutarco de Queronea<sup>3</sup>;

"Había formado (Marcelo) un gran puente sobre ocho barcas ligadas unas con otras, y llevando sobre él una máquina -

<sup>1</sup> Kine M. Op.cit. págs. 56 y ss.

<sup>2</sup> Op. cit. págs. 105 y ss. Para tener una idea, más general de como influyeron los trabajos de Arquímedes en la posteridad, véase D. J. Shuik, A SOURCE BOOK IN MATHEMATICS, 1200-1800. Harvard University Press, Cambridge, -- Massachusetts 1969, passim.

<sup>3</sup> Plutarco, Vidas Paralelas, Pelopidas y Marcelo XIV, XV, XVI, XVII, XVIII, XIX. Biógrafos Griegos, Aguilar, S. A. de Ediciones 1964. Juan Bravo 38 Madrid.

se dirigía contra los muros, muy confiado en la muchedumbre y excelencia de tales preparativos y en la gloria - que tenía adquirida; de todo de lo cual hacían muy poca cuenta Arquímedes y sus inventos. No se habían dedicado a ellos Arquímedes ex profeso, sino que le entretenían, y eran como juegos de la geometría a que era dado. En el principio fue el tirano Hierón quien estimuló hacia ellos su ambición, persuadiéndole que convirtiese alguna parte de aquella ciencia de las cosas intelectuales a las sensibles, y que, aplicando sus conocimientos a los usos de la vida, hiciése que le entrasen por los ojos a la muchedumbre. Fueron, es cierto Eudoxo y Arquitas<sup>4</sup> los que empezaron a poner en movimiento el arte tan apreciado y tan aplaudido de la maquinaria, exornando con cierta elegancia la geometría, y confirmando, por medio de ejemplos - sensibles y mecánicos, ciertos problemas que no admitían la demostración lógica y conveniente como, por ejemplo: el problema no sujeto a demostración de las dos medias - proporcionales, principio y elemento necesario para gran número de figuras, que llevaron uno y otro a una material inspección por medio de las líneas intermedias colocadas entre líneas curvas y segmentos. Más después que Platón se indispuso e indignó contra ellos, porque degradaban y

<sup>4</sup> Eudoxio de Cnido, véase nota 4 Cáp. III.

Arquitas de Tarento, maestro de Eudoxio de Cnido. Véase Kline Morris, - Cp. cit. pág. 46 y SS, y Vera Francisco, Breve Historia de la Matemática p. 38, Losada, Buenos Aires, 1961.

echaban a perder lo más excelente de la geometría con trasladarla de lo incorpóreo e intelectual a lo sensible y emplearla en los cuerpos que son objeto de oficios toscos y manuales<sup>5</sup>, decayó la mecánica separada de la geometría y desdeñada de los filósofos viniendo a ser, por tanto, una de las artes militares. Arquímedes, pues, pariente y amigo de Hierón, escribió que, con una potencia dada, se puede mover un peso igualmente dado; y jugando, como suele decirse, con la fuerza de la demostración, le aseguró que si le dieran otra tierra, movería esta después de pasar aquella<sup>6</sup>. Maravillado Hierón, y pidiéndole que verificara con obras este problema e hiciese ostensible como se movía alguna gran mole con una potencia pequeña, compró para ello un gran transporte de tres velas del arsenal del rey, que fue sacado a tierra con gran trabajo y a fuerza de gran número de brazos; cargóle de gente y del peso que solía echársele, y sentados lejos de él, sin esfuerzo alguno y con solo mover con la mano el cabo de una máquina de gran fuerza atractiva, lo llevó así derecho y sin detención, como si corriese por el mar<sup>7</sup>.

<sup>5</sup> 2500 años, de esto y todavía es la opinión reinante en algunas instituciones de matemáticas. Donde se aprecia, que aún no hay idea.

<sup>6</sup> De aquí procede la anécdota que atribuye a Arquímedes la tan conocida como incongruente frase: «Dádme una palanca y un punto de apoyo y moveré el mundo»

<sup>7</sup> En este párrafo está contenida la ley del equilibrio de la palanca, cuyo uso práctico era ya conocido en Oriente: T.K.Derry. Historia de la tecnología, Tomo I, pág. 232, Siglo XXI, México, 1978.

Pasmóse el rey, y convencido del poder del arte, encargó a Arquímedes que le construyese toda especie de máquinas de sitio, bien fuese para defender o bien para atacar; de las cuales él no hizo uso, habiendo pasado la mayor parte de su vida exento de guerra y en la mayor comodidad: pero entonces tuvieron los siracusanos prontos para aquel menester las máquinas y el artífice".

Arquímedes se vió conducido, inicialmente a las aplicaciones del método infinitesimal, por el tratamiento de los problemas de la mecánica; pero la fecundidad de tal método, hallado en el campo de las soluciones de cuestiones mecánicas, lo movió a extender su aplicación a la solución de los problemas geométricos de cálculo de superficies y de volúmenes que permanecían inaccesibles a los métodos de la geometría común. A raíz de tal precedencia lo denominó método mecánico; a todo lo cual se une el hecho de que Arquímedes hizo intervenir un concepto mecánico en los desarrollos del mismo, habiendo experimentado<sup>8</sup> la utilidad de tratar cosas matemáticas por medio de consideraciones mecánicas, ya que muchas veces le había ocurrido con varios teoremas. Dice Arquímedes:

"Lo he descubierto primeramente por consideraciones mecánicas y después por razonamientos geométricos".<sup>9</sup>

<sup>8</sup> Arquímedes: De la cuadratura de la Parábola, pág. 221, Científicos Griegos, Tomo II, Aguilar, S. A. de Ediciones, Madrid 1970.

<sup>9</sup> Op. cit.: El Método, pág. 263.

En el Método nos explica cómo descubrió ciertos teoremas de áreas y volúmenes por medio de pesadas ideales, determinando lo que hoy llamamos momento estático, y estableciendo la ecuación de equilibrio, de la que deduce el área o el volumen que busca, o el centro de gravedad de una figura.

Para ello corta las superficies por rectas paralelas y los cuerpos por planos paralelos y compara una de las secciones producidas con otra producida, por la misma recta o el mismo plano, en una figura conocida y coloca ambas figuras de modo que sus centros de gravedad estén en una recta: brazo de palanca en el que determina dos segmentos contiguos proporcionales a las dos secciones, cuya relación establece la ecuación de equilibrio, con respecto a un punto, de las dos áreas o de los dos volúmenes elementales suspendidos de los extremos, de la recta. Si el brazo de palanca correspondiente al área o al volumen que busca es constante, la ecuación de equilibrio le da el valor que persigue; y, recíprocamente, si éste es conocido, deduce entonces la posición del centro de gravedad de la superficie o del cuerpo. Aunque no lo dice Arquímedes considera anchura para las rectas que descomponen las superficies así como espesor para los planos que descomponen los sólidos, anchura y espesor  $\Delta x$  que,

al disminuir indefinidamente, se convierten en la  $dx$  de nuestro cálculo diferencial, esta idea la encontramos nuevamente en Simón Stevin y los centros de gravedad<sup>9bis</sup>. - Aún más, desarrollando, entonces, con mayor rigor el principio de las secciones infinitas, en el cual reconoce como predecesores a Demócrito y Eudoxio, Arquímedes anticipa plenamente el fundamento que dará al análisis infinitesimal - Bonaventura Cavalieri<sup>10</sup>, mediante el principio según el cual toda figura es suma de todos sus indivisibles, inspiración, que encontramos también en François Viéte<sup>11</sup> y Johannes Kepler<sup>12</sup>. Por otra parte, combinando el concepto mencionado con el concepto mecánico de equilibrio entre magnitudes suspendidas de una palanca, Arquímedes anticipa los rumbos que a las investigaciones infinitesimales imprimirán en el siglo XVII, Paul Guldin<sup>13</sup>, Evangelista Torricelli<sup>14</sup> y Blaise Pascal<sup>15</sup>. -

Así, el método infinitesimal da a Arquímedes la solución de múltiples problemas de determinación de áreas, volúmenes y centros de gravedad; y en los problemas relati-

<sup>9bis</sup>

Cfr. D.J. Struik, Op. cit. págs. 189 y SS.

<sup>10</sup>

Cfr. D.J. Struik, Op. cit. págs. 209 y SS.

<sup>11</sup>

Eves Howard, An Introduction to the History of Mathematics, pág. 325. Holt, Rinehart and Wiston, 1953. Third edition.

<sup>12</sup>

Cfr. D.J. Struik, Op. cit. págs. 192 y SS.

<sup>13</sup>

Op. cit. págs. 193 y 195.

<sup>14</sup>

Op. cit. págs. 227 y SS.

<sup>15</sup>

Op. cit. págs. 238 y SS.

a figuras curvas (planas o solidas) su método exhaustivo se caracteriza por el riguroso desarrollo del procedimiento iniciado por Bryson<sup>16</sup>, es decir, del uso de las dobles series convergentes infinitas (figuras inscritas y circunscritas), entre las cuales la diferencia llega a ser progresivamente menor que cualquier magnitud asignada, por pequeña que se le suponga. Todo lo cual es por cierto - como primariamente fue concebido por Eudoxio - la forma antigua según la cual se presenta el moderno concepto infinitesimal de tránsito al límite; pero no lo alcanza todavía: de manera que también el Siracusano se ve en la necesidad de asociar la demostración por absurdo de dos tesis contrarias (suposición de magnitud mayor y de magnitud menor a aquella que se debe demostrar).

El paso ulterior, que Arquímedes no cumplió y que habría dado al Cálculo infinitesimal la plenitud y autonomía de su función, hubiera podido efectuarlo alguno de los matemáticos de la antigüedad posteriores a él, si se hubiese escuchado la exhortación de Arquímedes a los matemáticos. Dice el Siracusano:

"Como el teorema que voy a publicar ahora lo descubrí de de la misma manera que los anteriores<sup>17</sup>, he creído necesario exponer el método del que ya he hablado porque no

<sup>16</sup> Kline Morris, Op. cit. pág. 42.

<sup>17</sup> Véase la nota 8.

se crea que he dicho palabras vanas y porque estoy igualmente persuadido de que haré un no pequeño servicio a los matemáticos, pues comprendo que algunos de mis contemporáneos o sucesores podrá por medio del método -una vez que lo explique- descubrir otros teoremas que yo no he encontrado todavía".<sup>18</sup>

Después de enviar un primer conjunto de descubrimientos, obtenidos gracias su método, a Conón de Samos para que solicitase en torno a ellos el parecer de los matemáticos alejandrinos. Dice Arquímedes:

"Arquímedes a Dositeo: ¡Salud!

Me pides insistentemente las demostraciones de los teoremas que había enviado a Conón, muchas de las cuales tienes en los libros que te entrego Heraclides<sup>19</sup>. Te incluyo otros en este y no te extrañe que me haya retrasado tanto en publicarlas, pues quería que las examinasen personas versadas en Matemática, porque ¿cuántas cuestiones geométricas hay que, a primera vista, parecen difíciles y luego se ven que son evidentes? Conón murió sin haber tenido tiempo de encontrar las demostraciones, dejando estos teoremas en la oscuridad que, si hubiera vivido, los habría explicado y hecho progresar la Geometría, pues que sabemos su gran capacidad y admirable ingenio matemático. Ya han transcurrido varios años desde su muerte -

<sup>18</sup> El Método, Op. cit. pág. 264.

<sup>19</sup> Geómetra del Siglo III a de J.C. cuyas obras, entre ellas una biografía de Arquímedes, se ha perdido.

y, sin embargo, no sé de que nadie haya resuelto algunos de estos problemas que voy a exponerte sucesivamente dos de las cuales son defectuosas, de modo que quienes se vanaglorian de haberlos resuelto, pero no los demuestran, quedan refutados por el hecho de confesar haber descubierto algo que es imposible".<sup>20</sup> Con ello, expone el nuevo método ante Eratóstenes, y ofrece, a los matemáticos, encerrados aún en los métodos tradicionales, la indicación de una vía abierta a nuevos desarrollos y nuevas conquistas. Pero tampoco aquella segunda tentativa de estimular toda una corriente de nuevas investigaciones parece haber tenido éxito; además de las citas parciales relativas al Método, que se han hallado en Métrica de Herón<sup>21</sup> y de la noticia ofrecida por Suidas<sup>22</sup> acerca de un comentario escrito por Teodosio<sup>23</sup>, nada sabemos de la suerte que esta obra de Arquímedes corrió en la antigüedad. También los matemáticos del Renacimiento y de la Edad moderna, que hallaron en Arquímedes impulso e inspiración para renovada creación del cálculo infinitesimal,

<sup>20</sup> mal, hubieron de intuir en otras obras sus ideas principi

<sup>21</sup> Sobre las Espirales, Op. cit. págs. 147-148.

<sup>22</sup> Cfr. Kline Morris, Op. cit. págs. 116, 117.

<sup>23</sup> Boyer Carl B. A History of Mathematics, pág. 183. John Wiley & Sons, Inc. New York 1968.

<sup>23</sup> Morris Kline, Op. cit. pág. 119.

pales, ya que no pudieron conocer el Método<sup>24</sup>.

24

El Método (Ἐφοδος) , cuyo descubrimiento es un suceso extremadamente importante para el estudio de la matemática griega, es, de todos los escritos perdidos de Arquímedes, el que más había excitado la curiosidad de los geómetras, pues que las alusiones de Suidas autorizan la sospecha de que contenía la clave del método que le condujo a algunos de sus descubrimientos. En las epístolas nuncupatorias de sus obras se advierte que Arquímedes solía enviar a los profesores alejandrinos los enunciados de los teoremas que tenía entre manos, rogándoles que buscasen la demostración, y, si ésta no llegaba, remitíala él; pero, como algunas veces reconocía la falsedad de sus enunciados, que había pasado inadvertida para sus corresponsales, les endilgó frases irónicas que se leen en la carta que precede al escrito Sobre las espirales. Como Gauss dos mil años después, el siracusano ocultaba muchas veces las etapas intermedias de sus demostraciones y los teoremas en que las apoyaba, por lo que podría decirse de él lo que Niels Abel afirmaba de Gauss: que, como la zorra con la cola, borraba la huella de sus pasos. El escrito del Método, tan felizmente rescatado, levanta la punta de un velo que impedía conocer el proceso mental de Arquímedes para llegar a algunas de sus conclusiones. Johan Ludwig Heiberg, sospechando que el palimpsesto de Jerusalén -encontrado en 1899 por el erudito Papadopulus Kera meus en el monasterio del Santo Sepulcro del patriarcado de Jerusalen- contendría otros trabajos de Arquímedes, se procuró una fotografía, y, en efecto, la lectura de algunas líneas confirmó su sospecha. En 1906 se trasladó a Constantinopla para examinar el manuscrito, que consiguió leer casi completamente; en 1907 dio cuenta del resultado de sus investigaciones y publicó el texto griego al que siguió su traducción alemana con un comentario de Zeuthen. El palimpsesto -cuya descripción completa dió Heiberg- consta de 185 folios: 177 pergamino y los 178-185 de papel del siglo XVI, y está escrito por un hábil amanuense del siglo X. Para aprovechar el papel, afortunadamente, no rasparon las líneas primitivas, sino que se limitaron a lavarlas, escribiendo sobre ellas, en los siglos XII-XIII ó XIII-XIV, un eucologio, de modo que el erudito danés, provisto de una potente lupa, pudo leer los 177 folios de pergamino, 29 de los cuales no conservan ninguna huella de la escritura original, 9 están completamente lavados, 14 son de otra letra, y en algunos solo son legibles palabras sueltas. Este documento contiene trozos de los libros Sobre las las espirales, Sobre la esfera y el cilindro, De la medida del círculo y Del equilibrio de los planos, que ya eran conocidos en su totalidad; la mayor parte del De los cuerpos flotantes y Del método relativo a los teoremas mecánicos, llamado abreviadamente El Método.

Quizá si esta obra hubiese hallado el eco que parece haberle faltado por un complejo de circunstancias -extrañas al estado de los conocimientos científicos de entonces y vinculados a la tendencia, dominante entonces a la especialización y separación de las ciencias, la suerte del Cálculo infinitesimal, en la antigüedad, habría podido ser otra; y las anticipaciones antiguas de los desarrollos modernos de dicho cálculo habría podido resultar más completas.

## CAPITULO V.

### EUDOXIO, ARQUIMEDES Y EL CALCULO.

A continuación se analizarán los conceptos matemáticos de Eudoxio para mostrar como Arquímedes en base a ellos, coloca los cimientos del Cálculo Integral.

La tesis central que se sostiene en este capítulo es que las verdades matemáticas van a encontrar demostración por medio de ejemplos que se extraen de la mecánica, haciendo que la geometría se coloque en el mundo sensible; se dejan de lado así, las ideas -fundamentalmente platónicas-, de que la matemática no podía ser reflejo de una realidad sensible.

El primer cambio fundamental en el pensamiento matemático griego lo efectúa Eudoxio -cambio que no es apreciado a excepción de Arquímedes-; este cambio que introduce Eudoxio comprende una definición, un principio y un método.

La definición de Eudoxio evita la dificultad que presentaba la razón entre dos cantidades inconmensurables, esta dificultad está presente en la medida en que los griegos carecen del concepto de número irracional. Así Eudoxio no define esa razón, sino la igualdad de razones; es decir, la proporción de una manera tal que esa carencia

se soslaya. Para ello, mediante desigualdades y números enteros, logra definir la proporcionalidad independiente<sub>mente</sub> de que las cantidades proporcionales sean conmensurables o no. Esta definición de proporcionalidad es la que servirá de base a la teoría de la semejanza que aparece en los Elementos de Euclides. Bástenos observar las definiciones siguientes del libro V:

#### DEFINICIONES

1. *Se dice que una magnitud es parte de otra mayor cuando la mide.*
2. *Se dice que una cantidad es múltiple de otra menor cuando es medida por ella.*

Obsérvese que Euclides no define magnitud, sin embargo, supone implícitamente que debe satisfacer las nociones comunes del libro I, y, por tanto, está de acuerdo con Aristóteles cuando dice:

"Se llama cantidad a lo que es divisible en elementos constitutivos de los cuales cada uno por lo menos uno es naturalmente apto para poseer una existencia propia. La pluralidad, por tanto, es una cantidad si se puede contar, y una, magnitud lo es si puede ser medida" (Metafísica, V, 13, 1020a).

3. Razón es una relación cualquiera entre dos magnitudes homogéneas respecto de la cantidad.
4. Se dice que dos magnitudes tienen razón cuando se puede multiplicar una de ellas de modo que supere otra.

La definición 4 complementa la anterior y es, en el fondo, el enunciado, aún impreciso del postulado de Arquímedes (que en realidad es de Eudoxio):

"Dada dos magnitudes desiguales, se puede alcanzar y superar la mayor repitiendo la menor un número suficiente de veces".

Ello supone la existencia de magnitudes tan grandes o tan pequeñas como se quiera con objeto de embridar al infinito.

5. Se dice que la razón de una primera magnitud con una segunda es la misma que la de una tercera con una cuarta cuando, tomando cualquier múltiplo de la primera y de la tercera y de la segunda y cuarta, el múltiplo de la primera es mayor, igual o menor que el de la segunda, según que el de la tercera sea mayor, igual o menor que el de la cuarta.

Es decir, Sea  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ , si multiplicamos  $a$  y  $c$  por cualquier número  $m$ , y  $b$  y  $d$  por cualquier número  $n$ , entonces:

$$ma < nb \Rightarrow mc < nd$$

$$ma = nb \Rightarrow mc = nd \quad y$$

$$ma > nb \Rightarrow mc > nd.$$

Entre esta definición y todas las anteriores hay una diferencia esencial: las que preceden a la definición 5 sólamente exigen la consideración de cierto número de operaciones, mientras que la definición 5 depende de infinitas operaciones es además la primera definición por abstracción, puesto que en ella no se enumeran las notas del ente definido sino que se establece su igualdad, y, al mismo tiempo constituye un anticipo, al concepto riguroso de número irracional según el método de cortaduras de Dedekind..

En otras palabras, la definición afirma que si para al menos una  $m$  y una  $n$ ,  $ma > nb$  pero  $mc \leq nd \Rightarrow \frac{a}{b} > \frac{c}{d}$ .

De manera que, dada una razón inconmensurable  $\frac{a}{b}$  es posible colocarla en medio de dichas razones, es decir de aquellas que sean menores y de aquellas que sean mayores.

Las definiciones de Eudoxio embridan el infinito desbo-

cado por la escuela Eleata y aclaran el concepto aristotélico de continuidad, envuelto hasta entonces en brumas metafísicas, como ya se mencionó, pues, Aristóteles admite el infinito en estado potencial, considerando toda magnitud como finita y susceptible de división indefinida, y negando el atomismo espacial.

El principio de Eudoxio establece la condición para que dos cantidades tengan razón. El principio que figura en la definición 4, Arquímedes -en su tratado Sobre la esfera y el cilindro-, incluye esta proposición entre los postulados, ya que, no obstante la evidencia que el principio revela, el siracusano advierte que no se trata de una definición sino de una proposición de la que debe partirse, es decir de un postulado. La existencia de "geometrías no-arquímedeanas" demostrada este siglo<sup>1</sup>, geometrías que no cumplen con este postulado, muestra, claramente, cuán acertada fue la ubicación que Arquímedes asignó a este "principio" en la construcción geométrica, actualmente este postulado se llama "postulado de continuidad"<sup>2</sup>, "postulado de Arquímedes", o "postulado de Eudoxio-Aquímedes".

<sup>1</sup> Cfr. Kline Morris, op. cit. pág. 1016.

<sup>2</sup> Kline Morris, op. cit. pág. 1012.

Tal postulado desempeña un papel fundamental en el "método de Exhaución" método ideado por Eudoxio y aplicado por él por primera vez, es el que, en la geometría griega, suple los actuales métodos infinitesimales. Se puede apreciar que no se trata, de un método de descubrimiento sino de demostración, en otras palabras, se supone que de alguna manera el resultado es conocido, y se ofrece un procedimiento riguroso para demostrarlo.

Es decir, conocido de antemano el resultado, la demostración por el método de Eudoxio de que, por ejemplo, una cierta figura A es equivalente a una figura conocida B, es una doble reducción al absurdo: se prueba que los supuestos simultáneos de que A es mayor o menor ( $\gtrless$ ) que B conducen a contradicciones, de manera que solo queda la alternativa de que A sea equivalente a B. En esta demostración juega un papel el postulado anterior, ya que la demostración exige la posibilidad de descomposición de la figura en partes tales que una de ellas sea menor a una figura dada; esto se logra en virtud del postulado. Esta descomposición de la figura en partes cada vez más pequeñas fue la causa por la cual el matemático renacentista Gregorio de San Vicente dió al método el nombre de "método de exhaución" de exhaurire, -agotar-, aunque en verdad tal descomposición no "agota" la figura, sino que

solo llega al punto en que cierta figura es menor que una figura dada.

Observemos esto detalladamente:

El único documento que se posee de las investigaciones griegas sobre las magnitudes irracionales desde el punto de vista aritmético se encuentra en X.1 de los Elementos, escribe Euclides:

1. Las magnitudes se dicen conmensurables cuando están medidas por la misma medida, e inconmensurables cuando no tienen ninguna medida común.
2. Las rectas son conmensurables en potencia cuando sus cuadrados están medidos por la misma área, e inconmensurables (en potencia) cuando sus cuadrados no pueden tener ningún área por medida común.
3. Con esta hipótesis se puede demostrar que existen infinitas rectas que son conmensurables e inconmensurables con una recta determinada. Algunas sólo lo son en longitud, y otras también en potencia, y la recta determinada se dice racional, así como todas las que son conmensurables con ella en longitud y en potencia o solamente en potencia, e irracional si es inconmensurable.
4. El cuadrado de una recta determinada se llama racional, así como las áreas que son conmensurables con él;

y se dirán irracionales las áreas inconmensurables - con él, así como las rectas cuyos cuadrados sean equivalentes al área, esto es, si las áreas son cuadrados, sus propios lados, y si son otras figuras rectilíneas, los lados de los cuadrados equivalentes a ellas.

Euclides distingue dos clases de magnitudes conmensurables con la unidad; en longitud y en potencia, según que, dada una longitud  $L$  y una unidad lineal  $U$  arbitraria, - pero fija  $L=Um$  o  $L = U\sqrt{m}$ ,  $m \in \mathbb{Q}$ , es decir, un número entero o fraccionario irreducible, pero no cuadrado, y, por tanto, todas las rectas conmensurables en longitud - también lo son en potencia; pero no todas las conmensurables en potencia lo son en longitud; todas las inconmensurables en potencia, también lo son necesariamente en longitud, pero no todas las inconmensurables en longitud lo son en potencia, y una recta no solo es conmensurable en longitud con una recta racional, sino que una recta es racional cuando es inconmensurable con una recta racional sólo en potencia, de modo que si  $r$  es una recta racional,  $\frac{m}{n \cdot r}$  siendo  $\frac{m}{n}$  una fracción irreducible, es también racional, así como  $\frac{r\sqrt{m}}{n}$  que, para nosotros, es irracional, de modo que si  $L^2$  es conmensurable con  $U^2$ ,  $L$  es conmensurable en potencia con  $U$ . Y

Proposición 1.

Dadas dos magnitudes desiguales, si de la mayor se resta una magnitud mayor que su mitad y de lo que queda otra magnitud mayor que su mitad y se repite continuamente este proceso, quedará una magnitud menor que la menor de las magnitudes dadas.

Estamos en el punto capital de la discusión: hemos llegado a la proposición que establece el importantísimo método de exhaución de Eudoxio, equivalente al postulado que Arquímedes enunció explícitamente entre los que preceden a su tratado Sobre la esfera y el cilindro.

Euclides lo aplica para demostrar que las áreas de dos círculos son proporcionales a los cuadrados de sus diámetros (Elementos, XII, 2) y los volúmenes de las pirámides triangulares de igual altura proporcionales a sus bases (Elementos, XII, 5).

El resultado XII, 2 merece especial examen, porque es la primera vez que euclides aplica el método de exhaución establecido en X,1, con lo que consigue hacer la operación que hoy llamamos paso al límite.

XII. Proposición 2.

Los círculos son entre sí como los cuadrados de sus diámetros.

Demostración

Sean  $C_1$  y  $C_2$  dos círculos de diámetros  $D_1$  y  $D_2$  y se quiere demostrar que

$$\frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}$$

para lo cual dice -y dice bien- que si así no fuera, habría un área  $S \leq C_2$  tal que sería  $\frac{C_1}{S} = \frac{D_1^2}{D_2^2}$  lo que es absurdo.

No puede ser  $S < C_2$  porque inscribiendo en  $C_1$  y  $C_2$  sendos polígonos semejantes  $P_1$  y  $P_2$  de un número suficiente de lados para que, en virtud de X, 1 sea

$$C_2 - P_2 < C_2 - S,$$

es decir,

$$P_1 > S$$

se debería tener

$$\frac{D_1^2}{D_2^2} = \frac{C_1}{S} = \frac{P_1}{P_2}$$

lo cual es imposible por ser

$$C_1 > P_1 \text{ y } S < P_2.$$

Tampoco puede ser  $S > C_2$  porque, por la misma razón,

$$\frac{D_2^2}{D_1^2} = \frac{S}{C_1} = \frac{C_2}{P_2}$$

y por tanto,  $P_2 < C_2$ .

Como los valores límites de las variables  $P_1$  y  $P_2$  son  $C_1$  y  $C_2$  y la razón  $\frac{P_1}{P_2}$  es constante, el mismo razonamiento puede servir siempre para demostrar que la razón  $\frac{C_1}{C_2}$  tiene igual valor, y, en particular, si

$$P_1 = P_2 \text{ también } C_1 = C_2 ;$$

pero los griegos repetían idéntica forma de demostración en cada caso particular y no de una vez por todas, como hacemos hoy.

El método de exhaustión, aplicado por Euclides en los *Elementos* en la demostración de unos pocos teoremas, se convierte en manos de Arquímedes en el método riguroso con que determina sus muchísimas cuadraturas y cubaturas, que hoy se logran más fácilmente mediante los métodos infinitesimales. Así como el "principio" de Eudoxio, convertido por Arquímedes en postulado, es nuestro actual postulado de continuidad, indispensable en el análisis infinitesimal, el método de exhaustión es la traducción geométrica de la operación del "paso al límite", característica de los métodos infinitesimales. Así como en el

método de exhaustión se trata de llegar a una figura menor que una figura prefijada, la definición de límite exige - precisar un valor menor que una cantidad prefijada.

No es de extrañar, que se advierta en los escritos de Arquímedes una estrecha analogía con los métodos infinitesimales de hoy, que permiten calcular las cuadraturas y cubaturas de Arquímedes mediante integrales definidas.

Estas integrales, cuya solución no ofrece hoy ninguna dificultad, implican, por su definición, el concepto de límite aplicado a ciertas sumas. Sin embargo, estas sumas aparecen en los escritos de Arquímedes como material previo a la determinación de las cuadraturas o cubaturas. - Por ejemplo:

Para el cálculo de la cuadratura de las espiras de la "espiral de Arquímedes", hoy utilizaríamos una integral definida, límite de una suma de cuadrados. Arquímedes en su escrito De las espirales, antepone a sus teoremas de cuadraturas proposiciones, que en forma geométrica, no son sino la traducción de las expresiones algebraicas que dan la suma de los cuadrados en los enteros sucesivos<sup>3</sup>. Igualmente, para el cálculo del área de la esfera, hoy utilizaríamos una integral definida, límite de una suma de senos cuando sus arcos están en progresión aritmética.

<sup>3</sup> Cfr. Heath L. Thomas; A history of greek mathematics, Vol. II, pág. 41, Oxford University Press, 1965.

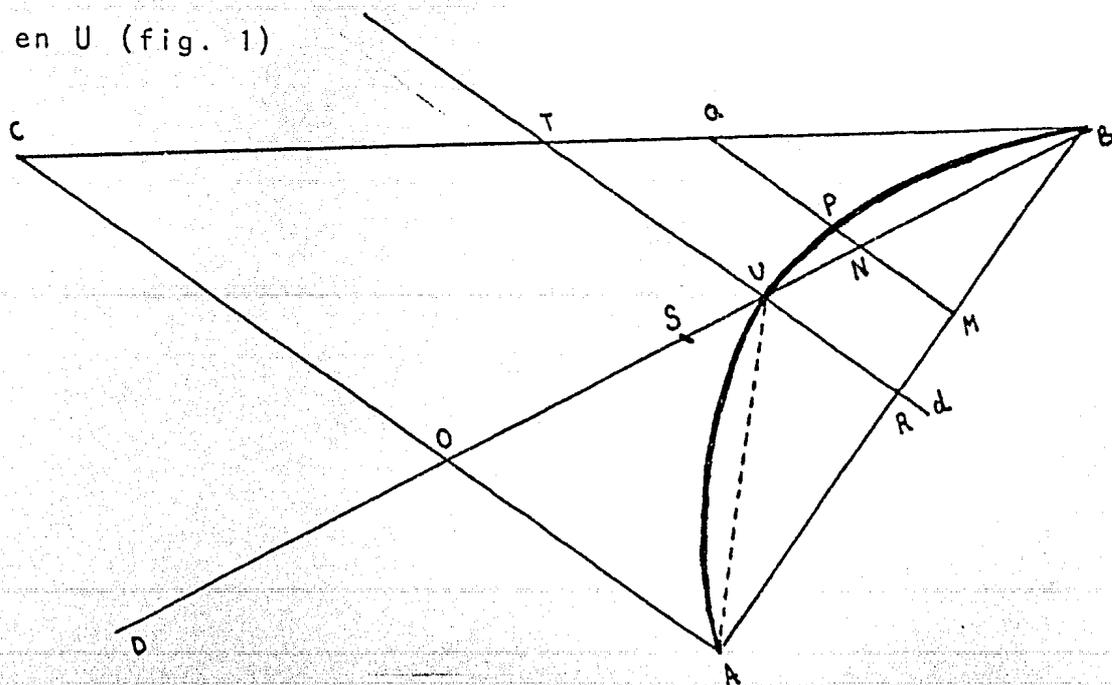
Arquímedes, en su escrito De la esfera y del cilindro, - antepone a su proposición del área de la esfera un teorema que le permite obtener la suma de la serie de cuerdas paralelas de una circunferencia que pasa por los puntos que la dividen en un número par de partes iguales. Como las cuerdas no son sino el doble de los senos de los arcos divididos en la mitad, la analogía entre las dos sumas es evidente<sup>4</sup>.

La pregunta que hay que hacer aquí es ¿cómo obtenía Arquímedes los resultados que luego demostraba rigurosamente? La respuesta es la siguiente: Se dijo que el método de exhaustión, no es sino un método de demostración, que exige el conocimiento previo del resultado por demostrar. Como ya se había mencionado en el Capítulo IV, es sin duda el Método de Arquímedes que comprueba que los caminos de la invención son imprevisibles; se diría más bien que el proceso expuesto en el Método es una etapa intermedia entre el momento realmente creador, que Arquímedes calla y la etapa final, rigurosamente deductiva, representada por las proposiciones de sus escritos geométricos aunque esta etapa intermedia, como confiesa el propio Arquímedes, resulte bastante próxima a la etapa final, pues es más - fácil, una vez adquirido por este método un cierto conocimiento de los problemas, dar luego la demostración que

<sup>4</sup> Cfr. Op. cit. pág. 74.

buscarla sin ningún conocimiento previo, sino que resultó útil también para demostrar los mismos teoremas<sup>5</sup>. La esencia de las demostraciones, llamémoslas así, de las proposiciones del Método se deducen de una cualquiera de ellas, por ejemplo: ¿cómo determina Arquímedes el área de un segmento de una parábola?, éste es primer ejemplo del Método.

Sea  $\widehat{AB}$  el segmento de una parábola dada, sea  $R$  el punto medio de la cuerda  $AB$  y prolonguemos el diámetro  $d$  (paralelo a los ejes) a través de  $R$ , intersectando el arco  $AB$  en  $U$  (fig. 1)



trazamos la tangente de la parábola en  $B$  y la paralela  $a$ ,  $d$  a través de  $A$ . De esta manera obtenemos el  $\Delta ABC$  y deseamos comparar el área del segmento  $\widehat{AB}$  con el área de este triángulo. Sea  $T$  la intersección de la tangente  $BC$

<sup>5</sup> Cfr. Arquímedes; el Metodo, pág. 268. op. cit.

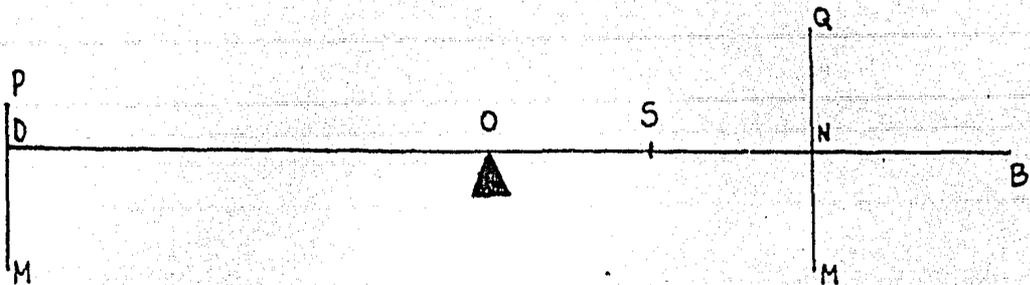
con el diámetro  $d$ . Por una propiedad de las paralelas -  
tenemos:  $UT = UR$ . Por tanto la línea  $BU$  intersecta  $AC$   
en su punto medio  $O$ . El centroide de  $S$  del  $\triangle ABC$  esta so-  
bre  $OB$  con  $OS = \frac{1}{3} OB$ . Hagamos  $OD = OB$ . Ahora tomemos  
cualquier punto  $P$  del arco  $AUB$  y tracemos una parale-  
la al diámetro,  $MNPQ$ . Arquímedes prueba como una propie-  
dad de la parábola que  $MP:MQ = AM:AB$ , por tanto

$$MP:MQ = ON:OB = ON:OD.$$

Por tanto

$$MP \times OD + MQ \times ON,$$

es decir, de acuerdo con el principio de la palanca: Si  
 $DOB$  es considerada como la barra de una balanza con el -  
punto de apoyo en  $O$ . (fig.2),



entonces el segmento de línea PM suspendido en D está en equilibrio con el segmento de línea MQ el cual se mantiene sin ningún cambio, suspendido en N. Puesto que esto se cumple para cualquier línea paralela a d, se sigue - que el segmento total AB de la parábola suspendida en D está en equilibrio con el  $\Delta ABC$  el cual permanece sin cambio, o lo que es lo mismo, el segmento AB suspendido en D está en equilibrio con el  $\Delta ABC$  suspendido en el centroide S. Por lo tanto, como  $OS = \frac{1}{3}OD$ , el segmento

$$AB = \frac{1}{3} \Delta ABC.$$

Más aún, como

$$RU = \frac{1}{2}RT = \frac{1}{4}AC,$$

tenemos

$$\Delta ABC = 4\Delta AUB,$$

y por tanto también el segmento:

$$AUB = \frac{4}{3} \Delta AUB.$$

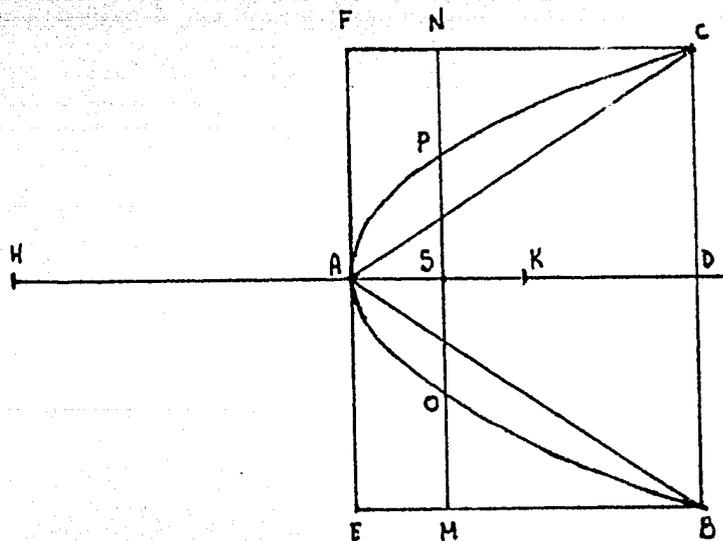
### Ejemplo 2:

Arquímedes demuestra que el volumen de un paraboloides de revolución es una vez y media, el volumen de un cilindro circunscrito mediante el corte de los dos sólidos (fig.1) representa una sección del plano a través de su eje común

AD), en ángulos rectos a AD. \*

Demostración

Sea HAD labarra de una palanca con HA = AD y con el punto de equilibrio en A, e imaginemos que el círculo PO ha sido trasladado del paraboloides y suspendido en H.



Como  $AD : AS + DB^2 : SO^2$

en la parábola BAC, tenemos

$$\frac{HA}{AS} = \frac{AD}{AS} = \frac{MS^2}{SO^2} = \frac{\text{círculo en el cilindro}}{\text{círculo en la parábola}},$$

de manera que, por la ley de la palanca, el círculo en el cilindro, permaneciendo donde está, se encuentra en

\* i.e., El segmento de paraboloides producido por un plano perpendicular al eje equivale a una vez y media el cono de la misma base y el mismo eje.

equilibrio con el círculo del paraboloides permaneciendo en su nueva posición. Si hacemos lo mismo con todos los círculos, construimos la parábola, encontramos que el cilindro permanece donde está con su centro de gravedad en el punto medio K de AD, y está en equilibrio alrededor de A con el paraboloides colocado con este centro de gravedad en H. Por tanto:

HA:AK = cilindro : segmento  
pero HA = 2AK  
por consiguiente cilindro = 2 segmento  
y cilindro = 3 (cono ABC)  
por tanto segmento =  $\frac{3}{2}$  (como ABC)

En resumen, la esencia de las demostraciones se deducen de cualquiera de ellas, por ejemplo: la proposición que trata de determinar la equivalencia de un sólido nuevo A con un sólido conocido.

El proceso transita en tres etapas:

Una primera etapa, puramente geométrica, consiste en comparar una sección s del sólido A, a la distancia x de un punto fijo O, con la sección o secciones S conocidas, de manera que se pueda establecer la proporción

$$\frac{s}{S} = \frac{x}{h}$$

siendo  $h$  una distancia fija (si en lugar de un sólido - se considera una figura plana, se toman ordenadas en lugar de secciones).

A continuación se entra en la etapa mecánica, considerando la proporción anterior como condición de equilibrio - entre las secciones  $s$  y  $S$  suspendidas en los extremos - de una palanca de punto de apoyo en  $O$  y a las distancias  $h$  y  $x$ , respectivamente; o lo que es lo mismo: la sección  $s$  trasladada a la distancia  $h$  equilibra la sección  $S$  mantenida en su lugar.

Hasta aquí el proceso que sigue el Siracusano es riguroso y el resultado se deduce lógicamente de los postulados admitidos o de los teoremas demostrados en otros escritos.

Es en la etapa final cuando el proceso no implica una verdadera demostración. Utilizando una perífrasis más bien vaga: las secciones llenan o componen el sólido, Arquímedes traslada todas las secciones de  $A$  a la distancia  $h$  suspendiéndolas con el centro de gravedad común, y supone o imagina que esta superposición de figuras planas reconstruye o recompone el sólido  $A$ . Y siguiendo con la imagen, deduce que el sólido  $A$  a la distancia  $h$  de  $O$ , equilibra al sólido conocido; y como -

conoce el centro de gravedad de éste, encuentra la relación buscada del sólido A con sólidos conocidos, con lo cual se adquiere "algún conocimiento previo de la cuestión"<sup>6</sup>.

Cuando se trata de determinar la posición del centro de gravedad de una figura o de un sólido, conduce la demostración geométrica de manera que la proporción anterior invierte una de las razones:

$$\frac{s}{S} = \frac{h}{x} ,$$

y es la figura cuyo centro de gravedad busca la que queda en su lugar, mientras la figura conocida, descompuesta en sus cuerdas o secciones, se traslada la distancia h. El equilibrio final permite conocer la distancia de O al centro de gravedad buscado.

Y la idea que subyace en esta etapa final que es la descomposición de las figuras, no es más que el método de exhaustión.

<sup>6</sup> Arquímedes; El Método, pág. 263, op. cit.

## BIBLIOGRAFIA GENERAL:

- 1.- Platón, Obras completas, Aguilar Ediciones, España.
- 2.- Aristoteles, Obras, Aguilar Ediciones, España.
- 3.- Jaeger Werner, Aristóteles, Fondo de Cultura Económica México.
- 4.- Jaeger Werner, Paideia, Fondo de Cultura Económica, México.
- 5.- Mondolfo Rodolfo, El infinito en el pensamiento antiguo, - -  
EUDEBA, Buenos Aires.
- 6.- Mondolfo Rodolfo, El pensamiento antiguo, Losada S. A., - -  
Buenos Aires.
- 7.- Bloch Ernst, Avicena y la izquierda aristotélica, Editorial  
Ciencia Nueva, España
- 8.- Moreau Joseph, Aristóteles y su escuela, EUDEBA, Buenos Aires.
- 9.- Grosseteste Roberto, Suma de las ocho libras de la física de  
Aristóteles, EUDEBA, Buenos Aires.
- 10.- Koyré Alexandre, Estudios en historia del pensamiento científ--  
fico. Ed. SIGLO XXI, México.

Las demás referencias estan especificadas en los pie de página.