Universidad Nacional Autónoma de México

FACULTAD DE CIENCIAS

COMPLECIONES INICIALES

T E S I S

Que para obtener el título de:

M A T E M A T I C O

P r e s e n t a :

AGUSTIN CONTRERAS CARRETO

Octubre de 1979

CONTENIDO

IV

E^2, E^3, E^4

I. Fundamentos. Introducción

§1 PARADOJAS

> "En Sumatra, alguien quiere doctorarse de adivino; el brujo examinador le pregunta si será reprobado o si pasará. El candidato responde que será reprobado..."
>
> (Jorge Luis Borges)

En Matemáticas se presentan teoremas que parecen extraños e increíbles, pero que son lógicamente inatacables. Un ejemplo es el teorema de Banach-Tarski que en forma casi inconcebible asegura que si se toma una esfera compacta, es posible cortarla o dividirla en pedazos de una manera tal que al volver a pegarlos resulten, no una, sino dos esferas también compactas e idénticas en tamaño a la original[1]. Verdaderamente este teorema trasciende la intuición y la imaginación, pero de ningún modo debemos imponerle el epíteto de paradoja, como han hecho algunos libros de divulgación de matemáticas. "Paradoja – dice el diccionario – es lo que está fuera de la opinión generalmente admitida y más propiamente, es un hecho o una opinión que parecen absurdos o contradictorios". Según esta definición, es claro que para el hombre de la calle el teorema de Banach-Tarski no puede ser otra cosa que una paradoja. En matemáticas, sin embargo, es importante destacar que los axiomas de una teoría son proposiciones y no paradojas, entendiendo éstas como "expresiones de nuestro lenguaje que son verdaderas y falsas simultáneamente". En esta sección hableremos de paradojas, porque, después de la creación de las geometrías no euclidianas, nada ha influído tan poderosamente en el desarrollo de los fundamentos de la matemática como la aparición de las paradojas.

Se atribuye a la pluma de San Pablo una de las más antiguas paradojas. El apóstol advierte en la Epístola a Tito que todos los cretenses son mentirosos y, como testimonio de tal advertencia, cita al cretense Epiménides. Entendemos así la observación de Epiménides: "todas las declaraciones que hacen los cretenses son falsas". En ese caso, todas las declaraciones que hizo Epiménides fueron falsas y, en particular, la afirmación de que "todas las declaraciones que hacen los cretenses son falsas.", es falsa, de modo que no todas las declaraciones que hicieron los cretenses fueron falsas, lo que contradice la advertencia de Epiménides.

Con distintos enunciados, este tipo de paradoja se encuentra muy difundido. Como ejemplo léase una de las cuestiones sometidas al juicio de Sancho Panza como gobernador de la ínsula de Barataria en el Quijote, parte II, capítulo LI[2]. ¿Se acuerdan del barbero del pueblo? (el que afeita a todo el mundo que no se afeita a sí mismo. ¿Quién afeita al barbero?.) La paradoja de Berry consiste en que "el menor entero no nombrable con menos de veinte sílabas" ha sido expresado con 19 sílabas, y la de Grelling surge al considerar el adjetivo "heterológico". Un adjetivo se llama heterológico si la propiedad que expresa no se aplica a sí mismo. Por ejemplo, "polisilábico" no es heterológico, pero heterológico, ¿es heterológico?

Nótese que de un modo u otro, estas paradojas se refieren a afirmaciones acerca de "todos" los miembros de una cierta clase de cosas, y que obien las afirmaciones o las cosas a las que esas afirmaciones se refieren, pertenecen a esas clases. Como vieron Poincaré y Russell, en todas las paradojas hay una definición que contiene lo definido.

En todas estas paradojas[3], los conceptos lógicos o matemáticos están encubiertos por palabras. No ocurre lo mismo con las que dieron origen a la "crisis de los fundamentos" (de las matemáticas): las paradojas lógicas. Veamos algunos ejemplos:

Burali-Forti observó en 1897 que el conjunto bien ordenado formado por todos los números ordinales es contradictorio. También entre las primeras paradojas lógicas figura la de J. Cantor, el creador de la teoría de conjuntos. Cantor observó que no se puede hablar del conjunto de todos los conjuntos, pues hacerlo llevaría a contradecir el llamado Teorema de Cantor: Dado un conjunto A de α elementos (con α finito o infinito), el conjunto de todos los subconjuntos de A tiene un número de elementos "mayor" que α[4]

Probablemente la más famosa de todas las paradojas es la de Bertrand Russell, publicada en 1902. Las dificultades que encierra esta paradoja son semejantes a las que encontramos en la paradoja de Grelling. Téngase en cuenta que hay clases o conjuntos que pueden pertenecerse a sí mismas como el conjunto de todos los conjuntos, que es un elemento de sí mismo. De una manera análoga, si se coloca en un armario un catálogo con tapas azules de todos los libros del armario que tengan tapas azules; el catálogo se catalogará a sí mismo. La paradoja de Russell es:

Sea A el conjunto de aquellos conjuntos que no son elementos de ellos mismos, esto es:

$$A = \{B \mid B \text{ es un conjunto y } B \notin B\}$$

¿$A \in A$? Si $A \in A$ entonces $A \notin A$, lo que es una contradicción. Por lo tanto, $A \notin A$; pero entonces $A \in A$, por definición de A, y nuevamente es esto una contradicción.

Algunas diferencias entre las paradojas semánticas (como las primeras que mencionamos) y las paradojas lógicas, son:

Las paradojas lógicas pueden ser formalizadas en sistemas formales lógicos (inconsistentes), sin que en ellos tengan que figurar términos primitivos ajenos a la teoría de conjuntos. Las paradojas semánticas, en cambio, para poder ser formalizadas (nunca en el lenguaje de la lógica simbólica), requieren de la introducción de algún término como "definir" (en sentido descriptivo), "nombrar", "adjetivo", "significar", etc.... que son ajenos a la teoría de conjuntos[5].

Para la fundamentación de las matemáticas las paradojas semánticas no son peligrosas. De hecho quedaron explicadas cuando Bertrand Russell distinguió entre lenguaje y metalenguaje[6]. Hemos querido dedicarles algunos renglones porque prepararon el camino de las otras paradojas. Para estas últimas, las lógicas, las soluciones no han sido nada triviales. Produjeron una oleada de discusiones entre los matemáticos, "como pocas veces se ha visto en la historia de la ciencia", que culminó hacia 1930, y en la que se perfilaron tres tendencias: logicista, formalista e intuicionista.

El logicismo debió su nombre al hecho de pretender que los conceptos básicos de la matemática podían definirse mediante recursos puramente lógicos, con lo cual la matemática se convertía en una parte de la lógica. El caudillo del grupo logístico fue Bertrand Russell quien, para eliminar las paradojas, formuló y admitió el siguiente principio de exclusión de círculo vicioso: "Un elemento cuya definición implica la totalidad de los elementos de un conjunto, no puede pertenecer a este conjunto".

Puede verse el punto de partida del formalismo en los "Fundamentos de Geometría" de Hilbert, que ofrecieron el modelo de una disciplina matemática construida según el método axiomático", método que no sólo era perfectamente adecuado al carácter formal de la matemática, sino que eliminaba de los fundamentos matemáticos la intuición, con sus hábitos mentales y sus moldes tradicionales." 7

El grupo intuicionista, cuyo adalid fue el holandés L.E.J. Brouwer, mantiene que ningún concepto matemático es admisible a menos que se pueda construir. Para los intuicionistas, se ha depositado demasiada confianza en la demostración por contradicción. Si no-no p y p son diferentes, la demostración por contradicción se va abajo. Si se abandona la demostración por contradicción se renuncia a una cantidad tremenda de matemáticas, pero los intuicionistas se tomaron la gran molestia de reconstruir la mayor parte de las matemáticas sin utilizar la demostración por contradicción. Hay cosas que cambian; por ejemplo, todas las funciones son continuas. Si frente a un conjunto finito de elementos se enuncia una proposición que afirma que estos elementos tienen tal propiedad o no la tienen, esa proposición es verdadera para los intuicionistas, pues una experiencia constructiva permite examinar uno por uno todos los elementos del conjunto con respecto a dicha propiedad y confirmar el enunciado. Pero frente a un enunciado de la forma "un conjunto x existe o es calculable", pero que no dice de un modo explícito como encontrarlo, la cosa cambia; para ellos una afirmación así puede no ser cierta ni falsa. Por ejemplo, el grupo intuicionista no acepta el axioma de elección de Zermelo, cuya suposición nos permite llegar a sorpresas como el teorema de Banach-Tarski con el que empezamos la sección.

¿Cuál de estos tres grupos tiene una actitud acertada? La respuesta es cuestión de gustos. Los tres grupos trabajan hacia el mismo fin: establecer las matemáticas sobre una base lógica inatacable.

Podemos añadir que, al acentuar el carácter formal de la matemática, que constituye una nota esencial de esta ciencia, el formalismo fue por ello la tendencia más tradicional y conservadora y también la más afín a los matemáticos de profesión. Hablaremos más del método axiomático que introdujo el formalismo como método de trabajo de la matemática moderna, pues las principales soluciones para la teoría de conjuntos fueron dadas en forma de teorías axiomáticas.

§2. AXIOMATIZACIÓN DE LA TEORÍA DE CONJUNTOS.

No haremos un estudio minucioso de las distintas teorías axiomáticas de conjuntos. Esto requeriría de muchísimas páginas de profundos escritos, y el que presenta este trabajo no está capacitado para redactarlas. Un pequeño resumen histórico y bibliográfico de la axiomatización de la teoría de conjuntos puede leerse en las páginas 56, 57 y 58 del libro de Kuratowski y Mostowski [13]. Puede consultarse para detalles históricos, Bourbaki [2].

Nos parece oportuno recordar que todas las teorías axiomáticas de conjuntos pretenden abarcar en todo lo posible los resultados de la teoría "intuitiva" de Cantor, teniendo cuidado de hacer imposible la aparición de las paradojas[8]. El método de hacerlo, común en todas las axiomatizaciones, se puede resumir así:

Se introducen una serie de axiomas que nos aclaren qué entenderemos por conjunto y qué "reglas del juego" nos estarán permitidas con esos conjuntos (en general, a la hora de elaborar una teoría axiomática, lo único que necesitamos son los axiomas, en lo que se refiere a la deducción lógica); luego nos pondremos a deducir teoremas de acuerdo con las reglas del juego, y ésta será nuestra teoría de conjuntos... Los axiomas se pensarán de manera que las antinomias (paradojas) no puedan aparecer. Esta es la ventaja de una teoría formalizada frente a una teoría intuitiva como la de Cantor[9]. A partir de ahora entenderemos por conjunto "aquello que satisface los axiomas de la teoría".

La axiomática es un método seguro y fructífero de trabajo, pero no está exento de dificultades. Queremos comentar su "insuficiencia", al desarrollarse nuevas teorías matemáticas, con el ejemplo que atañe a esta tesis: el de la teoría de categorías.

"Mucho de la belleza de la matemática – señalan Herrlich y Strecker en [11] – se deriva del hecho de que brinda abstracción. No sólo nos permite observar el bosque, más bien que cada uno de sus árboles, sino que nos ofrece la posibilidad de estudiar la estructura del bosque entero, preparándonos para el siguiente paso de la abstracción: comparar bosques". Este último es el nivel de abstracción que impera en la teoría de categorías. En efecto, uno de los principales objetivos de esta teoría es discutir propiedades de totalidades de objetos matemáticos tales como el "conjunto" de todos los conjuntos, el "conjunto" de todos los grupos, o el "conjunto" de todos los espacios topológicos y lograr que estos "todos" sean tomados seriamente. Por otro lado, las axiomatizaciones usuales de la teoría de conjuntos <u>no per-</u>

<u>miten</u> la creación de tales colecciones, pues está prohibida su formación precisamente para evitar las paradojas típicas. Este es el precio que ha tenido que pagar la teoría de categorías por su nivel de abstracción y belleza. Concretemos un poco:

El más conocido sistema axiomático de conjuntos es el que lleva los nombres de Zermelo y Fraenkel (ZF). Las nociones primitivas de este sistema son "conjunto" y $\in$ (pertenencia). Las constantes lógicas de la teoría son[10]:

(a) Los conectivos proposicionales (negación $\neg$, implicación $\Rightarrow$, disyunción $\vee$, conjunción $\wedge$)

(b) Los cuantificadores (universal $\forall$ y existencial $\exists$)

(c) los predicados binarios especiales (identidad $=$, diversidad $\neq$).

Con estas nociones primarias y constantes lógicas se construyen las proposiciones. Los axiomas son: extensión, la existencia del conjunto ϕ y del conjunto $\{x, y\}$ para conjuntos dados x, y; la existencia de uniones y de conjuntos potencia; el axioma de infinidad, el axioma de regularidad, el axioma esquema de reemplazamiento y el axioma de elección. No explicamos estos axiomas debido a que existen excelentes libros que lo hacen y que nos evitan hacer interminable esta introducción. En particular se recomienda el artículo de Azriel Lévy: The role of Classes in Set Theory (Lévy [14]), y el libro de Kuratowski y Mostowski: ([13]).

Cuando se considera una teoría matemática A dada dentro de una teoría de conjuntos, el hecho más básico de esta teoría que debe tomarse en cuenta, es algún axioma o resultado que nos permita desarroller A. En el caso en que A es la teoría de categorías, se está verdaderamente tentado a aceptar, como hecho más básico en su desarrollo, el siguiente esquema de comprensión (ver Mac Lane [15]):

(*) "Dada una función proposicional (o propiedad de conjuntos) $\Phi(x)$, existe un conjunto B cuyos elementos son exactamente aquellos conjuntos que satisfacen esta función". En símbolos, existe el conjunto

$$B = \{ x \mid x \text{ es conjunto y } \Phi(x) \}$$

Sabemos que no es válido este principio en ZF, pues si $\Phi(x)$ es la función proposicional $x \notin x$, entonces B sería el conjunto $\{x \mid x \text{ es conjunto y } x \notin x\}$ que no puede ser un conjunto de ZF, ya que ello daría lugar a la antes expuesta paradoja de Russell. Sin embargo, a partir del axioma de reemplazamiento se puede demostrar el siguiente "principio de comprensión limitada".

(☆) "Dado un conjunto u y una función proposicional $\Phi(x)$ para elementos de u, existe el conjunto

$$B = \{ x \mid x \in u \text{ y } \Phi(x) \}"$$

Este principio es útil para formar categorías, como veremos más adelante. Por ahora pergeñaremos algunas líneas acerca de los sistemas axiomáticos llamados de <u>Gödel - Bernays - Von Neumann.</u> Comencemos como en

ZF, con las nociones primitivas de conjunto y pertenencia, sujetos a los axiomas de ZF; pero, con el objeto de eliminar la contradicción a la que lleva el principio (*), asumamos que no todos los conjuntos garantizados por dicho principio son conjuntos de ZF. Para distinguir entre los conjuntos de la teoría de conjuntos, es decir, los que están sujetos a los axiomas ZF y los "conjuntos" garantizados por el principio (*), nos referiremos a estos últimos como <u>clases</u>. Tenemos así dos tipos de "conjuntos": los del primer tipo han sido ya citados como <u>conjuntos</u> (también llamados conjuntos pequeños) y su comportamiento está determinado por ZF, y los del segundo tipo serán llamados <u>clases</u> y su teoría dependerá de una larga extensión sobre el axioma de comprensión (*), el cual puede escribirse así ahora:

(* *) "Dada una propiedad $\Phi(x)$ de conjuntos (pequeños), existe una clase B cuyos elementos son exactamente aquellos conjuntos que satisfacen esta propiedad".

Así pues, una clase es una extensión de alguna propiedad $\Phi(x)$ de conjuntos (pequeños), es decir, la "colección" de todos los conjuntos que satisfacen $\Phi(x)$. Con esta definición se observa fácilmente que todo conjunto resulta ser una clase, pero no toda clase es un conjunto. Hay varias maneras de desarrollar un sistema de axiomas con clases; por ejemplo, Bernays sugirió considerar la noción de clase como la noción primitiva principal de la teoría" y dar axiomas para clases, llamando conjuntos a los elementos de las clases. Sin embargo todas las axiomatizaciones de teoría de conjuntos con clases, llamadas axiomatizaciones o sistemas de Gödel-Bernays-Von Newmann (GBVN) añaden a ZF ese paso extra de flexibilidad: las clases. Los axiomas son establecidos en términos de las nociones "conjunto", "clase", "pertenencia de un elemento a una clase" y "pertenencia de un elemento a un conjunto", quedando claro que una clase es un conjunto si es un elemento de alguna clase; a los conjuntos les llamaremos también clases pequeñas y a las clases que no son conjuntos, clases propias.

A quienes atraiga el conocer los axiomas de GBVN y el profundizar en el estudio de estos axiomas, recomendamos ampliamente el volumen 84 de la colección "Studies in Logic and the Foundations of Mathematics" (North-Holland Publishing Company): Sets and Classes (on the work by Paul Bernays), editado por Gert H. Müller.[12]

§3. FUNDAMENTACIÓN DE LA TEORÍA DE CATEGORÍAS.

En los sistemas GBVN podemos formar, por medio de (**), la clase de todos los conjuntos, la clase de todos los espacios topológicos, la clase de todos los grupos, etc. y entonces las categorías Set, Top, Grp, etc. pueden ser construídas legítimamente. Sin embargo, dentro de estos sistemas no está prevista la formación de objetos que tengan clases propias como elementos.

Por ejemplo, no se puede hablar de la clase de todas las clases y ni siquiera se asegura la posibilidad de construir "clases potencia": Si Ω es una clase propia, no existe en GBVN su "clase" potencia $\mathcal{P}(\Omega)$, pues tendría a Ω como elemento y Ω sería entonces un conjunto. Por otro lado, el desarrollo de la teoría de categorías requiere de la formación de entes que tengan clases propias como elementos. Basta mencionar, a modo de ilustración, que el lema de Yoneda (ver 30.6 de [11] o página 61 de [15]) necesita de estas entidades para ser establecido con propiedad. Los sistemas GBVN no son suficientes para el avance de la Teoría de Categorías. Es ahora esta teoría y ya no la de conjuntos, la que busca un sistema fundamental[13] que sea suficientemente amplio y flexible dentro del cual desarrollarse. Se han sugerido varias maneras de solucionar este problema e incluso han aparecido propuestas radicales para fundamentar no sólo la teoría de categorías, sino toda la matemática. Los problemas fundamentales "podrían ser resueltos si se abandonara la idea tradicional de que todas las matemáticas pueden ser desarrolladas dentro de un sistema axiomatizado de teoría de conjuntos" (Mac Lane [16]); F. Lawvere ha observado, teniendo en cuenta lo anterior, que una fundamentación (de las Matemáticas) podría hacerse basándola en una axiomatización, no de conjuntos, sino de la categoría de todas las categorías. "Categoría" y "funtor" son considerados como nociones primitivas. Esta solución es verdaderamente atractiva pero tiene la desventaja de poseer menos estímulo intuitivo que la teoría de conjuntos, ya que presenta muchas variantes, tales como axiomas para la categoría 2-dimensional de todas las categorías e incluso para la categoría (3-dimensional) de todas las 2-categorías.

Herrlich y Strecker mencionan en [11] otras axiomatizaciones, como la propuesta por la escuela de Grothendiek o como las desarrolladas por Isbell, Feferman, MacLane (ver [6]) y Osius[14]. Las soluciones de Isbell, Feferman y MacLane presentan, como rasgo común, la anexión de un paso más a GBVN o a ZF: la existencia de un universo (que abajo definiremos). H. Herrlich y G. Strecker adoptan en su libro de categorías, [11], este tipo de fundamentación y en especial el de MacLane, salvo por detalles nada esenciales. Parece ser que para el estudio de la teoría de categorías en su estado actual y para la mayoría de las investigaciones que hasta ahora se han realizado en dicha teoría, la solución mediante "un universo" ha demostrado tener suficientes cualidades de amplitud y flexibilidad. Herrlich y Strecker dan, también en [11], un modelo de este sistema y nosotros los seguiremos aproximadamente en la explicación de dicho modelo.

Comencemos con los axiomas usuales para la teoría de conjuntos de Zermelo-Fraenkel o de Gödel-Bernays-Von Neumann, pero ahora llamaremos <u>conglomerados</u> a lo que en estos sistemas llamábamos usualmente conjuntos (es decir, las nociones primarias que satisfacen los correspondientes axiomas y están definidas por ellos: en ZF los conjuntos, y en GBVN, las clases)[15]. Cualquiera que sea la forma de comenzar, el paso siguiente es añadir al sistema elegido el axioma adicional de que "existe un universo"[16]. Un <u>universo</u> es un conglomerado $\mathcal{U}$ con las siguientes propiedades:

(i) $\mathbb{N} \in \mathcal{U}$

(ii) $A \in \mathcal{U} \Rightarrow \bigcup A \in \mathcal{U}$

(iii) $A \in \mathcal{U} \Rightarrow \mathcal{P}(A) \in \mathcal{U}$

(iv) $\mathcal{U}$ es transitivo, es decir, $a \in A \in \mathcal{U} \Rightarrow a \in \mathcal{U}$.

(v) Si $I \in \mathcal{U}$ y $f: I \to \mathcal{U}$ es una función, entonces $f[I] \in \mathcal{U}$.

Llamemos conjuntos (para Mac Lane conjuntos pequeños) a los elementos de $\mathcal{U}$ y clases a los subconglomerados de $\mathcal{U}$. Con esta terminología, todos los hechos más elementales que requiere un sistema fundamental para la teoría de categorías, mencionados en el capítulo II de [11], pueden ser fácilmente verificados. $\mathcal{U}$ resulta ser un modelo para la teoría de GBVN o ZF y más aún, los conjuntos y las clases forman juntos un modelo para GBVN, así que esencialmente este sistema forma parte de la axiomatización mediante "un universo". La intención de Mac Lane en [16] es que los conjuntos pequeños puedan servir como los objetos de la matemática, mientras que los otros conjuntos, no necesariamente pequeños (clases, conglomerados), puedan ser usados para describir las distintas categorías y categorías de funtores de estos objetos matemáticos. El éxito de dicha intención es explicado por el mismo Mac Lane en [15], más o menos del modo siguiente:

Como estamos suponiendo ZF o GBVN, es válido el principio (☆) mencionado en la página 10 y que con nuestros nuevos nombres queda así:

"Dado un conglomerado $\mathcal{V}$ y una función proposicional $\Phi(x)$ para elementos de $\mathcal{V}$, existe el conglomerado $\mathcal{B}=\{x \mid x\in\mathcal{V}$ y $\Phi(x)\}$".

Aplicando a $\mathcal{U}$ este principio, podemos construir subconglomerados de $\mathcal{U}$ (es decir, clases), tales como la clase de todos los conjuntos, la clase de todos los espacios topológicos, etc., pudiéndose formar las clases de objetos y morfismos de las categorías usuales (es decir, las categorías cuyos conglomerados de objetos y morfismos son clases y cada hom(A,B) es un conjunto). Al tener 3 tipos básicos de objetos: conjuntos, clases y conglomerados, las clases propias aparecen como elementos de conglomerados y no hay dificultad para formar casi-categorías de funtores y la casi-categoría de todas las categorías, o para establecer el lema de Yoneda en su más apropiada generalidad. Una desventaja visible es que hay dos tipos de categorías, las usuales y las casi-categorías, pero esto no es en realidad una dificultad, si no hay aún necesidad de usar casicategorías más que como una herramienta para estudiar categorías. Herrlich y Strecher (en [11]) han escogido el tratamiento mediante un universo, pues les permite llevar a cabo todas las construcciones de la teoría de categorías que <u>parecen</u> <u>deseables</u> hasta el momento, pero aclaran que si tiempo después necesitaran construcciones diferentes que no puedan efectuarse dentro de este sistema, entonces la fundamentación deberá ser extendida para acomodarlas[17], o quizá tendrá que reemplazarse totalmente.

Dentro de esta posición actual que consiste en estudiar y desarrollar principalmente la teoría de categorías que son clases y adoptando como en [11] el sistema con universo que acabamos de describir, fue escrito el artículo "Initial Completions" por Horst Herrlich ([7]); en él, dada una categoría $\mathcal{X}$, se introduce el concepto de categoría sobre $\mathcal{X}$ (categoría concreta sobre $\mathcal{X}$, como después, en [8], le llama Herrlich), y se estudia la existencia de compleciones iniciales (que en [7] coinciden con las finales) de este tipo de categorías. Uno de los principales objetivos del artículo de Herrlich, es demostrar que toda categoría (concreta) pequeña sobre $\mathcal{X}$ tiene compleciones iniciales y finales. Más aún, con la definición dada ahí de compleción inicial, Herrlich construye 7 compleciones iniciales para una tal categoría y da ejemplos de categorías sobre $\mathcal{X}$ no pequeñas (es decir, grandes) para las que no existen algunas o todas estas compleciones especiales (ver §15 de este trabajo). Aquí es importante explicar que esta dificultad no es ciertamente de tipo técnico o artesanal, sino que atañe a los fundamentos. Analicemos nuestra afirmación:

Dijimos hace unos renglones que Herrlich adoptó en sus "initial completions" la solución de Mac Neille, entendiéndose con esto, entre otras cosas, que cuando habla de una categoría, los conglomerados de objetos y morfismos de ella deberán ser clases (y cada hom (A,B) un conjunto).

Las compleciones iniciales de categorías pequeñas sobre X serán categorías, pero no necesariamente lo son las compleciones de categorías grandes. Hagamos énfasis en este punto: Para una categoría grande sobre X podemos realizar las 7 construcciones básicas que hace Herrlich, exactamente de la misma manera que para categorías pequeñas sobre X, pero con la diferencia de que todas o algunas de estas construcciones no son "legítimas" dentro de la teoría de conjuntos adoptada, porque sencillamente no dan lugar a categorías que son clases, es decir, a "verdaderas" categorías en dicha teoría. Este es el sentido que debe darse a la no existencia de compleciones iniciales de categorías grandes, para ver que la dificultad es cuestión de fundamentos, como ya indicamos.

Ha sido imperioso escribir esto, dada la necesidad de comprender la pregunta fundamental: ¿Cuándo tiene y cuándo no tiene compleciones iniciales una categoría sobre X?. Esperamos que se haya desvanecido la niebla que ocultaba al significado de esta pregunta básica y que ella pueda ahora ser reconocida en su nueva versión: ¿Qué características debe poseer una categoría sobre X para que sus compleciones iniciales sean categorías "decentes"?

La importancia de [7] radica no sólo en ser la primera publicación que presenta resultados obtenidos en investigaciones sistemáticas acerca de compleciones iniciales, sino también, y esto es quizá lo más importante, en que infundió nuevos bríos al estudio de su teoría. En efecto, la teoría de compleciones iniciales tiene su origen principalmente en:

(1) Las compleciones de conjuntos parcialmente ordenados.

(2) Las extensiones topológicas cartesianamente cerradas de Top y categorías concretas similares sobre Set.

Algunos autores, trabajando sobre generalizaciones de estos conceptos, descuidaron lo referente a los fundamentos, mientras que otros atribuyeron a ciertas compleciones propiedades que no poseen (ver 15.2). Cuando Herrlich hizo ver que en muchos ejemplos la compleción de Mac Neille de una categoría sobre X no coincide con su compleción universal y que algunas compleciones no resultaban ser "categorías usuales", renació el interés de muchos matemáticos hacia este campo de investigación El desarrollo que ha tenido la teoría de las compleciones iniciales ha sido estimulante. Tristemente no fue posible que mencionáramos todos los resultados más recientes, por falta de tiempo. No obstante, [8] es una revisión resumida del estado actual de la teoría y en dicho artículo se ofrecen gran cantidad de referencias a los más nuevos trabajos.

Advertimos al lector que es muy joven la teoría de compleciones iniciales y que por ello no podemos asegurar que es una gran teoría, panacea para las dificultades matemáticas y con un futuro espectacular, pero tenemos la esperanza, fundada en su propio auge, de que la topología categórica y en particular la teoría que nos ocupa, contribuyan a mirar las matemáticas como unidad, estableciendo relaciones entre sus distintas ramas; parece ser que en nuestros días este es el móvil principal de la investigación matemática. Nuestro ánimo recibirá un impulso vital si las personas con esta misma esperanza aumentaran día a día, y con este deseo ha nacido el trabajo que se encuentra ante sus ojos, amable lector.

Para introducirnos en el estudio de las compleciones iniciales, creímos conveniente desarrollar el artículo "decano" de esta teoría, el Initial Completions" de Herrlich. Sin embargo, en [8] se observan cambios en el tratamiento del tema. En [7], Herrlich hace las construcciones básicas solamente para categorías pequeñas sobre X, observando el hecho que ya comentamos, de que estas construcciones siempre se pueden realizar. En [8] en cambio, las realiza. En primer lugar hay una modificación a la definición de compleción inicial, como explicaremos en la introducción al capítulo II, pero los resultados esenciales siguen inalterados. En segundo lugar, al trabajar con las construcciones de las compleciones iniciales, tiene que hacer uso de casi categorías pero hacemos notar que no porque se quiera investigar en ellas, sino como un recurso para estudiar mejor las compleciones iniciales de categorías concretas sobre X. Remitimos al lector a la nota 9.20, para tener explicaciones más claras de todo esto. Nosotros seguimos el enfoque más nuevo de [8].

En resumen:

1.- En este trabajo asumiremos una teoría de conjuntos (ZF o GBVN) cuyos miembros son llamados conglomerados, con un universo fijo cuyos elementos son llamados conjuntos y cuyos subconglomerados son llamados clases.

2.- Adoptaremos la definición de categoría dada en 3.1 de [11], y la de casicategoría dada en 11.3 también de [11]; es decir, supondremos que las categorías son clases y que los conglomerados que no necesariamente son clases pero que se comportan como categorías, serán llamados casicategorías[18].

3.- Diremos que un conglomerado $\mathfrak{X}$ es <u>pequeño</u> (resp. <u>legítimo</u>) si existe una inyección $\mathfrak{X} \longrightarrow Y$, donde Y es un conjunto (resp. una clase). Las casicategorías legítimas, pueden y serán tratadas aquí como categorías.

4.- Con objeto de motivar el estudio de las compleciones iniciales y finales, hemos tratado de hacer ver porqué las compleciones de conjuntos parcialmente ordenados son una raíz de la teoría de compleciones iniciales.

II Poclases y categorías concretas.

§4 POCLASES

Rescataremos del olvido algunos hechos acerca de clases parcialmente ordenadas. (poclases).

4.1. Dadas las clases X y Y, podemos formar la clase

$$X \times Y = \{(x,y) \mid x \in X \text{ y } y \in Y\},$$

llamada <u>producto cartesiano</u> de X y Y

Una <u>relación binaria</u> de X a Y es una subclase R de $X \times Y$; si $(x,y) \in R$, podemos escribir xRy y leer "x está en la relación R con y".

Si $R \subset X \times Y$ es una relación de X a Y, la inversa o dual de R es la relación $R' \subset Y \times X$ definida por

$$y R' x \iff x R y$$

4.2. Supongamos que R es una relación en la clase X, es decir, $R \subset X \times X$. Si para todo $x \in X$, xRx, diremos que R es <u>reflexiva</u>. Por otro lado, R es <u>transitiva</u> si dadas cualesquiera $x, y, z \in X$, se tiene xRz siempre que xRy y yRz (es decir, $xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$).

R es una <u>relación de orden parcial</u> si es reflexiva, transitiva y antisimétrica. La última condición significa que:

$$(xRy) \wedge (yRx) \Longrightarrow x = y$$

Una relación que es solamente reflexiva y transitiva se llama preorden (o quasi.orden)

Generalmente escribiremos $x \leq y$ en vez de $x R y$ si R es un orden parcial o un preorden.

4.3. Si $\leq$ es un orden parcial en $\mathfrak{X}$, se dice que la pareja $(\mathfrak{X}, \leq)$ es una clase parcialmente ordenada o simplemente una poclase[1].

Obsérvese que toda subclase Y de una poclase $(\mathfrak{X}, R)$ es también poclase con la misma relación R, pero relativa a Y, es decir, con la relación $R \cap (Y \times Y)$.

4.4. Es importante recordar el principio de dualidad ([1]):

La relación inversa de un orden parcial en $\mathfrak{X}$, es también un orden parcial en $\mathfrak{X}$.

Teniendo en cuenta este principio, podemos definir la poclase dual de la clase parcialmente ordenada $(\mathfrak{X}, \leq)$, como la poclase $(\mathfrak{X}, \leq')$, en la que $\leq'$ es la inversa de $\leq$. A la poclase dual de $(\mathfrak{X}, \leq)$ la denotaremos por $(\mathfrak{X}, \leq)^*$.

4.5. Supongamos que $(\mathfrak{X}, \leq)$ es una poclase y que $A \subset \mathfrak{X}$. Un elemento máximo (resp. elemento mínimo) de A es un elemento $a_0 \in A$ tal que para toda $a \in A$, $a \leq a_0$ (resp., $a_0 \leq a$), es decir, un elemento $a_0 \in A$ que es cota superior (resp. cota inferior) de A.

No debe confundirse un elemento máximo (resp. mínimo) de A con un elemento maximal (resp. minimal) de

A. Un elemento $a_0 \in A$ es un elemento maximal (resp. minimal) de A si no existe $a \in A$ tal que $a_0 < a$ (resp. $a < a_0$)[2]

(4.5.1) Un elemento $x_0 \in X$ es una máxima cota inferior de A, si se satisfacen las siguientes condiciones:

(i) $\forall a \in A$, $x_0 \leq a$ (x_0 es cota inferior de A).
(ii) Si $v \in X$ es tal que $v \leq a$ para toda $a \in A$, entonces $v \leq x_0$ (si v es cota inferior de A, $v \leq x_0$).

Reemplazando $\leq$ por $\geq$ se obtiene la definición de una mínima cota superior de A. Obsérvese que si existe $x_0 \in X$ con las propiedades (i) y (ii), es el único elemento de X que satisface dichas propiedades[3]. En este caso se acostumbra denotar a x_0 por $\inf A$ (ínfimo de A), o bien, si $A = \{a_i\}_{i \in I}$, podemos escribir $x_0 = \bigwedge_{i \in I} a_i$. Similarmente, la mínima cota superior de A, si existe, está unívocamente determinada y se denota por $\sup A$ (supremo de A) o por $\bigvee_{i \in I} a_i$.

4.6: Diremos que una poclase $(X, \leq)$ es completa si para toda familia $(x_i)_I$ de elementos de X, existen $\bigwedge_{i \in I} x_i$ y $\bigvee_{i \in I} x_i$ en X.

Si $(X, \leq)$ es poclase completa, en particular existen:

$$1 = \sup X \quad y \quad 0 = \inf X,$$

llamados, respectivamente, elemento uno y elemento cero de X.

No toda poclase es completa, pero toda poclase se puede completar o encajar isomórficamente en una poclase completa, del modo en que se indicará en la sección que en seguida comenzamos.

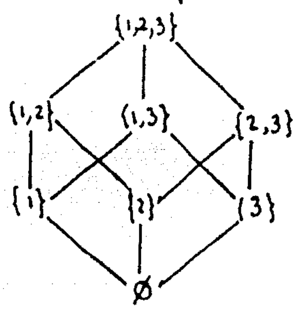
§5. COMPLECIONES DE POCLASES.

5.1 . Si $(\mathfrak{X}, \leq)$ y $(\mathfrak{X}', \leq')$ son poclases, un morfismo $f : (\mathfrak{X}, \leq) \longrightarrow (\mathfrak{X}', \leq')$ de poclases (o de orden parcial) es una función $f : \mathfrak{X} \longrightarrow \mathfrak{X}'$ tal que para cualesquiera $x, y \in \mathfrak{X}$, $x \leq y \Rightarrow f(x) \leq' f(y)$.

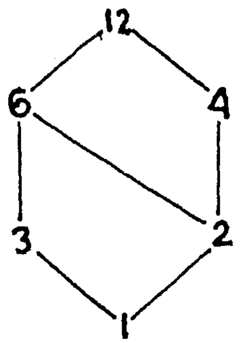
Diremos que $(\mathfrak{X}, \leq)$ y $(\mathfrak{X}', \leq')$ son isomorfos si existe un morfismo de poclases $f : \mathfrak{X} \longrightarrow \mathfrak{X}'$ biyectivo y tal que la inversa $f^{-1} : (\mathfrak{X}', \leq') \longrightarrow (\mathfrak{X}, \leq)$ es también un morfismo de poclases (en otras palabras, se requiere que f sea biyectiva y satisfaga que $x \leq y \Leftrightarrow f(x) \leq' f(y)$, para todos $x, y \in \mathfrak{X}$).

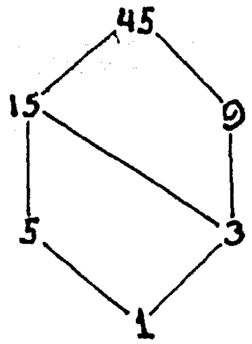
5.2 Una prueba fácil para isomorfismos entre clases parcialmente ordenadas que tienen pocos elementos, puede darse mediante diagramas de Hasse (diagramas de inclusión):

Supongamos que $(\mathfrak{X}, \leq)$ es una poclase y $a, b \in \mathfrak{X}$. Por "a cubre a b" entenderemos $b < a$, además de que no existe $x \in \mathfrak{X}$ tal que $b < x < a$. En términos de esta definición, es fácil construir una gráfica o diagrama de Hasse[4] de la poclase $\mathfrak{X}$, como una gráfica cuyos vértices son los diferentes elementos $x, y, z, \ldots$, de $\mathfrak{X}$, y en la que x y y son unidos por un segmento si x cubre a y o y cubre a x, de modo que si x cubre a y, el vértice x está más arriba que el vértice y. Por ejemplo, el diagrama:



representa el conjunto de todos los subconjuntos de un conjunto de 3 elementos*. Los diagramas:





son representaciones de los divisores de 12 y de los divisores de 45 ordenados por la relación $k \leq m \Leftrightarrow k$ divide a m. Estos diagramas sugieren de inmediato un isomorfismo entre ambas poclases (cfr. [17])

Se puede obtener el dual de una clase parcialmente ordenada volteando de arriba a abajo su gráfica, como reflejándola con respecto a un plano horizontal.

5.3 Una clase parcialmente ordenada $(A, \leq')$ es subpoclase de una poclase $(B, \leq)$ si $A \subset B$ y si $x \leq' y \Leftrightarrow x \leq y$, para todos $x, y \in A$.

(5.3.1) Una <u>extensión</u> de la poclase $(A, \leq')$ es un morfismo inyectivo de poclases (inyección de orden parcial), $f: (A, \leq') \longrightarrow (B, \leq)$ tal que $x \leq' y \Leftrightarrow f(x) \leq f(y)$ para todos $x, y \in A$, o, equivalentemente, tal que $(A, \leq')$ es isomorfo a $(f(A), \leq)$

NOTA. En este caso se dice también que f es una <u>inmersión</u> (plena) <u>de orden parcial</u> y que $(A, \leq')$ <u>está encajado en</u> $(B, \leq)$.

* ORDENADO POR INCLUSIÓN.

(5.3.2) Una <u>compleción</u> de $(A, \leq')$ es una extensión $f:(A,\leq')\longrightarrow(B,\leq)$ en la que $(B, \leq)$ es una poclase completa. Si existe una compleción $f:(A, \leq')\longrightarrow(B,\leq)$, se dice que $(A, \leq')$ <u>ha sido completada</u> a $(B,\leq)$ mediante f.

5.4. El conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales con el orden usual $\leq$ es un conjunto parcialmente ordenado y por lo tanto lo es también $\mathbb{Q}$, el conjunto de los números racionales, con el orden inducido por el de $\mathbb{R}$. Sin embargo, estos dos conjuntos parcialmente ordenados son ejemplos de poclases no completas. En cambio el conjunto de los reales extendidos, $\mathbb{R}' = \mathbb{R}\cup\{-\infty,\infty\}$, con el orden usual, es una poclase completa. Las inclusiones $i_1:(\mathbb{R},\leq)\longrightarrow(\mathbb{R}',\leq)$ y $i_2:(\mathbb{Q},\leq)\longrightarrow(\mathbb{R}',\leq)$ son compleciones de $(\mathbb{R},\leq)$ y de $(\mathbb{Q},\leq)$. Cabe preguntarse si así como estas dos poclases tienen al menos una compleción, cualquier poclase podrá encajarse en una poclase completa. La respuesta es <u>no</u>: como veremos después, hay muchos casos en los que poclases que son propias no pueden completarse (por no resultar clases sus compleciones [5]). Por el contrario, todo conjunto parcialmento ordenado tiene compleciones, y éste es un hecho que demostraremos a continuación.

5.5. Supongamos que $(A,\leq)$ es un conjunto parcialmente ordenado. Para cada $a\in A$, sean

$$a^- = \{b\in A \mid b\leq a\}$$

y

$$a^+ = \{b\in A \mid a\leq b\}$$

Es muy fácil demostrar que la función:

(5.3.2) Una <u>compleción</u> de $(A,\leq')$ es una extensión $f:(A,\leq')\longrightarrow(B,\leq)$ en la que $(B,\leq)$ es una poclase completa. Si existe una compleción $f:(A,\leq')\longrightarrow(B,\leq)$, se dice que $(A,\leq')$ <u>ha sido completada</u> a $(B,\leq)$ mediante f.

5.4. El conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales con el orden usual $\leq$ es un conjunto parcialmente ordenado y por lo tanto lo es también $\mathbb{Q}$, el conjunto de los números racionales, con el orden inducido por el de $\mathbb{R}$. Sin embargo, estos dos conjuntos parcialmente ordenados son ejemplos de poclases no completas. En cambio el conjunto de los reales extendidos, $\mathbb{R}'=\mathbb{R}\cup\{-\infty,\infty\}$, con el orden usual, es una poclase completa. Las inclusiones $i_1:(\mathbb{R},\leq)\longrightarrow(\mathbb{R}',\leq)$ y $i_2:(\mathbb{Q},\leq)\longrightarrow(\mathbb{R}',\leq)$ son compleciones de $(\mathbb{R},\leq)$ y de $(\mathbb{Q},\leq)$. Cabe preguntarse si así como estas dos poclases tienen al menos una compleción, cualquier poclase podrá encajarse en una poclase completa. La respuesta es <u>no</u>: como veremos después, hay muchos casos en los que poclases que son propias no pueden completarse (por no resultar clases sus compleciones[5]). Por el contrario, todo conjunto parcialmente ordenado tiene compleciones, y éste es un hecho que demostraremos a continuación.

5.5. Supongamos que $(A,\leq)$ es un conjunto parcialmente ordenado. Para cada $a\in A$, sean

$$a^-=\{b\in A\mid b\leq a\}$$

y

$$a^+=\{b\in A\mid a\leq b\}$$

Es muy fácil demostrar que la función:

$$(5.5.1)\qquad f:\begin{cases}(A,\leq)\longrightarrow(\mathcal{P}(A),\subseteq)\\ a\longmapsto a^-\end{cases}$$

es una extensión de $(A,\leq)$. Mas $(\mathcal{P}(A),\subseteq)$ es un conjunto parcialmente ordenado completo en el que para cada familia $\{A_i\}_I \in \mathcal{P}(A)$ se tiene que $\bigwedge_I A_i = \bigcap_I A_i$ y $\bigvee_I A_i = \bigcup_I A_i$[6]. f es pues, una compleción de $(A,\leq)$.

El orden inverso de la inclusión $\subseteq$ es la relación $\leq'$ en $\mathcal{P}(A)$ definida por: $A_1 \leq' A_2 \iff A_1 \supseteq A_2$. Por lo tanto, el dual de $(\mathcal{P}(A),\subseteq)$ es $(\mathcal{P}(A),\supseteq)$ que también es un conjunto parcialmente ordenado completo, en el cual, si $\{A_i\}_I \in \mathcal{P}(A)$, entonces $\bigwedge_I A_i = \bigcup A_i$ y $\bigvee_I A_i = \bigcap_I A_i$. Es también sencillo ver que la función

$$(5.5.2)\qquad g:\begin{cases}(A,\leq)\longrightarrow(\mathcal{P}(A),\supseteq)\\ a\longmapsto a^+\end{cases}$$

es una compleción de $(A,\leq)$ que en general es distinta de f, ya que $(\mathcal{P}(A),\subseteq)$ y $(\mathcal{P}(A),\supseteq)$ no son isomorfos[7] (salvo en el caso en que $A=\emptyset$.)

(5.6) La compleción f definida en (5.5.1) conserva ínfimos, es decir, si $\{a_i\}_I$ es una familia de elementos de A y existe $a=\bigwedge_I a_i$ entonces también existe $\bigwedge_I f(a_i)$ y $f(a)=\bigwedge_I f(a_i)$. La demostración de esta propiedad puede verse en Birkhoff [1], aunque nosotros la demostraremos en el capítulo III, junto con el hecho de que la compleción g de (5.5.2) conserva supremos. Podemos resumir lo que acabamos de exponer, en forma de teorema:

(5.6.1) TEOREMA.

Todo conjunto parcialmente ordenado A puede ser completado a $(P(A), \leq)$ conservando ínfimos, y a $(P(A), \supseteq)$ conservando supremos ∎

§6 COMPLECIÓN DE MAC NEILLE.

6.1 En el capítulo III daremos ejemplos en los que la compleción f de $(A, \leq)$ definida en 5.5.1 no conserva supremos y ejemplos en los que g de 5.5.2 no conserva ínfimos. A raíz de esto, una pregunta surge:
Dado un conjunto parcialmente ordenado $(A, \leq)$, ¿existe una compleción $h: (A, \leq) \longrightarrow (B, \leq')$ que conserve supremos e ínfimos? La respuesta es afirmativa y fue dada por H. Mac Neille en su tesis doctoral (no publicada) y en su "Partially ordered Sets" (Trans. Am. Math. Soc., 42 (1937), 416-60). Esbozaremos brevemente el método de Mac Neille.

6.2 A fines del siglo pasado, Richard Dedekind presentó un modelo de los números irracionales dentro de la teoría de los números racionales. El método de Dedekind para construir su modelo, es decir, para construir los números reales a partir de los racionales, recibe el nombre de "método de las cortaduras".

Adoptaremos, sin entrar en detalles, la siguiente definición:

(6.2.1) DEFINICIÓN.

Una cortadura en $\mathbb{Q}$ es una pareja (L, U), en donde L y U son subconjuntos ajenos no vacíos de $\mathbb{Q}$, tales que:

(i) $L \cup U = \mathbb{Q}$

(ii) L no tiene elemento máximo, es decir, si $p \in L$, existe $q \in L$ tal que $p < q$.

(iii) Si $p \in L$ y $q \in U$, entonces $p < q$.

Esta definición es la dada por Casper Goffman en [5]. Recomendamos el libro de Goffman al lector que se interese en saber cómo las cortaduras resultan ser un modelo de los números reales.

Es interesante recordar que Cantor dio también un método para obtener el sistema de números reales a partir de los racionales. Su algoritmo consiste en formar clases de equivalencia de sucesiones fundamentales (sucesiones de Cauchy) de números racionales y darles estructura de campo ordenado[8]. Por otro lado sabemos que un espacio métrico es llamado "completo" si toda sucesión fundamental $\{x_n\}$ converge a un punto del espacio. Fréchet demostró que el algoritmo de Cantor para formar los reales podía ser aplicado para completar cualquier espacio métrico[9]. Pues bién, Mac Neille mostró que el proceso de las cortaduras de Dedekind puede ser aplicado a cualquier conjunto parcialmente ordenado (para completarlo en el sentido de 4.6). Esta generalización de MacNeille la exponen Kuratowski y Mostowski en [13], de la siguiente manera:

6.3: Sea $(A, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado. Para cada $X \subset A$, definimos:

(6.3.1) $X^+ = \{a \in A \mid \forall_{x \in X}\ x \leq a\}$, $X^- = \{a \in A \mid \forall_{x \in X}\ a \leq x\}$

(X^+ es el conjunto de cotas superiores de X y X^- es el conjunto de cotas inferiores de X).

Las siguientes son algunas propiedades que se pueden demostrar sencillamente:

(6.3.2) $X \subset Y \Rightarrow (Y^+ \subset X^+)$ y $(Y^- \subset X^-)$

(6.3.3) Si $Z \subset A$, entonces $Z \subset Z^{+-}$ y $Z \subset Z^{-+}$

(6.3.4) $Z^{+-+} = Z^+$ y $Z^{-+-} = Z^-$.

DEFINICIÓN.

Una cortadura en $(A, \leq)$ es una pareja (X, Y) tal que $X^+ = Y$ y $Y^- = X$. El conjunto X se llama sección inferior y Y sección superior de la cortadura.

(6.3.5) Si (X, Y) es una cortadura en A, entonces
$$(x \in X) \text{ y } (y \in Y) \Rightarrow (x \leq y)$$

(6.3.6) Para todo $Z \subset A$, (Z^-, Z^{-+}) y (Z^{+-}, Z^+) son cortaduras.

(6.3.7) Si $a \in A$ entonces $(\{a\}^-, \{a\}^+)$ es una cortadura.

Sea P el conjunto de todas las cortaduras en A.
Definimos en P la relación
$$(X, Y) \leq' (U, V) \iff X \subset U \quad (\iff Y \supset V)$$

(6.3.8) PROPOSICIÓN.

$(P, \leq')$ es un conjunto parcialmente ordenado completo. ∎

Esta proposición la demuestran Birkhoff en [1] y Kuratowski y Mostowski en [13]. Desafortunadamente no es posible que nos extendamos demasiado explicando las demostraciones que se dan en estos trabajos, pero sugerimos al lector que las lea en la primera oportunidad de hacerlo, pues esperamos que eso lo haga interesarse más en dichos libros, a la vez que lo motive a estudiar esta tesis. Ofreceremos sin embargo otra demostración (ver §11) de la proposición (6.3.8) (como corolario de nuevas generalizaciones). Mostraremos también que la función

$$(6.3.9) \qquad e \left\{ \begin{array}{l} A \longrightarrow P \\ a \longmapsto (\{a\}^{\top}, \{a\}^{+}) \end{array} \right.$$

es una compleción de $(A, \leq)$ y que conserva ínfimos y supremos.

Nótese que en el caso en que $(A, \leq)$ es $\mathbb{Q}$ con el orden usual, $(P, \leq')$ resulta ser $\overline{\mathbb{R}}'$, los reales extendidos con el orden usual. El método aquí se reduce a las cortaduras de Dedekind.

(6.3.10) <u>TEOREMA</u>. ([1] pág 27 y [13] pág 160)

Todo conjunto parcialmente ordenado puede ser extendido a un conjunto parcialmente ordenado completo, conservando supremos e ínfimos.[10] ∎

Este teorema es el resumen de 6.3 y nos deja satisfechos por el momento en lo que se refiere a compleciones de conjuntos parcialmente ordenados.

§7 CATEGORÍAS PARCIALMENTE ORDENADAS Y CATEGORÍAS CONCRETAS.

7.1 Toda clase preordenada $(\mathcal{A}, \leq)$ se puede considerar como una categoría cuyos objetos son los elementos de $\mathcal{A}$ y tal que un conjunto $\hom_{\mathcal{A}}(A,B)$ contiene exactamente un elemento si $A \leq B$ y es vacío en cualquier otro caso.

En el caso de poclases se puede asegurar aún más:

Toda poclase $(\mathcal{A}, \cup)$ puede considerarse como una categoría cuyos objetos son los elementos de $\mathcal{A}$ y tal que $\hom_{\mathcal{A}}(A,B) \cup \hom_{\mathcal{A}}(B,A)$ tiene a lo más un elemento (un elemento exactamente si $A \leq B$ o $B \leq A$; vacío si A y B no son comparables). Esto se debe a que si $f \in \hom_{\mathcal{A}}(A,B)$ y $g \in \hom_{\mathcal{A}}(B,A)$ entonces $A \leq B$ y $B \leq A$. Por lo tanto $A = B$ y $f = 1_A = g$.

7.2 Inversamente, toda categoría $\mathcal{A}$ con la propiedad de que para dos $\mathcal{A}$-objetos A y B, $\hom_{\mathcal{A}}(A,B) \cup \hom_{\mathcal{A}}(B,A)$ tiene a lo más un elemento, es obtenida de la poclase $(\mathrm{Ob}\,\mathcal{A}, \leq)$, donde:

(7.2.1) $A \leq B \iff$ existe un $\mathcal{A}$-morfismo $A \longrightarrow B$"

A una categoría de este tipo le llamaremos <u>categoría parcialmente ordenada</u>.

Para todos los propósitos prácticos, las nociones de poclase y categoría parcialmente ordenada coinciden.

7.3 El orden definido en 7.2.1 surge de manera natural al hacer otras generalizaciones. Esto lo explicaremos en este y los siguientes párrafos.

Supongamos que $(\mathcal{A}, \leq)$ es una poclase (es decir, una categoría parcialmente ordenada con $A \leq B \Leftrightarrow hom_{\mathcal{A}}(A,B) \neq \emptyset$).

Sea $\{a_i\}_{i \in I}$ una familia de elementos (objetos) de $\mathcal{A}$.

Con la identificación que hemos hecho en 7.2, la definición 4.5.1 queda traducida así:

Sea $x_0 \in \mathcal{A}$. Entonces $x_0 = \bigwedge_I a_i$ si y sólo si

(i) Para todo $i \in I$ existe un $\mathcal{A}$-morfismo $x_0 \xrightarrow{f_i} a_i$

(ii) Si $v \in \mathcal{A}$ es tal que para cada $i \in I$ existe un $\mathcal{A}$-morfismo $v \xrightarrow{g_i} a_i$ entonces existe un $\mathcal{A}$-morfismo $v \xrightarrow{f} x_0$.

Nótese que en (ii) el morfismo f es tal que para cada $i \in I$ $f_i \circ f = g_i$ pues $hom_{\mathcal{A}}(v, a_i)$ tiene solamente un elemento.

Resumiendo,

(7.3.1) $x_0 = \bigwedge_I a_i \Leftrightarrow$ existe una $\mathcal{A}$-fuente $(x_0 \xrightarrow{f_i} a_i)_I$[12] tal que para toda $\mathcal{A}$-fuente $(v \xrightarrow{g_i} a_i)_{i \in I}$ existe un (único) morfismo $f: v \longrightarrow x_0$ tal que $f_i \circ f = g_i$, para todo $i \in I$.

Observando esta nueva versión de la definición 4.5.1, recordamos la conocida caracterización de la topología inicial de un conjunto X respecto a una familia de funciones $(f_i : X \longrightarrow (Y_i, \eta_i))_I$ donde las (Y_i, η_i) son espacios topológicos: τ es la topología inicial respecto a (f_i, η_i) si y sólo si dado $(Y, \sigma) \in Top$ y una función $g: Y \longrightarrow X$ tal que para todo $i \in I$, $f_i \circ g : (Y, \sigma) \longrightarrow (Y_i, \eta_i)$ es continua, entonces $g: (Y, \sigma) \longrightarrow (X, \tau)$ es continua.

Empero, ésta es sólo un caso particular (cuando $U: Top \to Set$ es el funtor que olvida) de la definición de fuente U-inicial dada por Horst Herrlich en [6]

7.4 DEFINICIÓN.

Sea $U:\mathcal{A}\longrightarrow\mathcal{X}$ un funtor. Una fuente $(A, A\xrightarrow{f_i}A_i)_{i\in I}$ en $\mathcal{A}$ es U-inicial si y sólo si dada cualquier $\mathcal{A}$-fuente $(B, g_i: B\longrightarrow A_i)_I$ y cualquier $\mathcal{X}$-morfismo $f: UB\longrightarrow UA$ tales que para todo $i\in I$ $Uf_i\cdot f = Ug_i$, existe un único morfismo $\hat{f}: B\longrightarrow A$ en $\mathcal{A}$ tal que $U\hat{f} = f$ y para todo $i\in I$ conmute el diagrama:

$$\begin{tikzcd} B \arrow[d, "\hat{f}"'] \arrow[dr, "g_i"] & \\ A \arrow[r, "f_i"'] & A_i \end{tikzcd}$$

7.5 Dualmente, un $\mathcal{A}$-pozo $(A_i\xrightarrow{f_i}A, A)_I$ es U-final si y sólo si la $\mathcal{A}^{op}$-fuente $(A, f_i: A\longrightarrow A_i)_I$ es U^{op}-inicial

7.6 OBSERVACIÓN. Si suponemos que $U:\mathcal{A}\longrightarrow\mathcal{X}$ es un funtor fiel, es fácil ver que una $\mathcal{A}$-fuente $(A\xrightarrow{f_i}A_i)_I$ es U-inicial si y sólo si para toda $\mathcal{A}$-fuente $(B\xrightarrow{g_i}A_i)_I$ y para todo $\mathcal{X}$-morfismo $UB\xrightarrow{f}UA$ tales que $Uf_i\cdot f = Ug_i$ para todo $i\in I$, existe un $\mathcal{A}$-morfismo $\hat{f}: B\longrightarrow A$ tal que $Uf = \hat{f}$.

Mostraremos ahora algunos tipos de categorías con funtores fieles definidos en ellas. En particular, en Manes [18] encontramos la:

7.7. DEFINICIÓN.

Sea $\mathcal{X}$ una categoría base (fija).

Una categoría $\mathcal{C}$ es una categoría literal de $\mathcal{X}$-objetos con estructura si se cumplen las condiciones:

(a) Los objetos de $\mathcal{C}$ son parejas $(\mathfrak{X}, \xi)$, donde $\mathfrak{X} \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{X}$ y ξ es un elemento de una clase $\mathcal{C}(\mathfrak{X})$ de objetos que se llaman las $\mathcal{C}$-estructuras en $\mathfrak{X}$.

(b) Para cada pareja ordenada $(\mathfrak{X}, \xi; Y, \eta)$ de $\mathcal{C}$-objetos, se tiene $\hom_{\mathcal{C}}(\mathfrak{X}, \xi; Y, \eta) \subset \hom_{\mathcal{X}}(\mathfrak{X}, Y) \times ((\xi, \eta))$. Los morfismos de $\mathcal{C}$ se llamarán $\mathcal{C}$-admisibles. Para denotar que $(f, (\xi, \eta)) \in \hom_{\mathcal{C}}(\mathfrak{X}, \xi; Y, \eta)$, escribiremos $f : (\mathfrak{X}, \xi) \longrightarrow (Y, \eta)$, o bien, $f : \xi \longrightarrow \eta$.

Se satisfacen además los siguientes dos axiomas:

(i) Axioma de composición.

Si $f : \xi \longrightarrow \eta$ y $g : \eta \longrightarrow \theta$, entonces $g \circ f : \xi \longrightarrow \theta$.

(ii) "La estructura es abstracta":

Si $f : \mathfrak{X} \longrightarrow Y$ es un isomorfismo en $\mathcal{X}$, entonces para toda $\eta \in \mathcal{C}(Y)$, existe un único $\xi \in \mathcal{C}(\mathfrak{X})$ tal que $f : \xi \longrightarrow \eta$ y $f^{-1} : \eta \longrightarrow \xi$.

(De estos axiomas se sigue que $\forall s \in \mathcal{C}(\mathfrak{X})$, $1_{\mathfrak{X}} : s \to s$).

Obviamente existe el funtor que olvida

$$(7.7.1) \qquad U : \begin{cases} \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{X} \\ (\mathfrak{X}, \xi) \longmapsto \mathfrak{X} \\ (f, (\xi, \eta)) \longmapsto f \end{cases}$$

U tiene la propiedad siguiente:

(7.7.2) Para todo $\mathcal{C}$-isomorfismo $(f, (\xi, \eta))$ tal que $U(f, (\xi, \eta))$ es $\mathcal{X}$-identidad, se tiene que $(f, (\xi, \eta))$ es $\mathcal{C}$-identidad[13].

Supongamos que $\mathcal{X}$ es una categoría fija no vacía. (por el resto de la sección).

Manes, también en [18] da las siguientes definiciones.

7.8 (1) Una <u>categoría</u> <u>concreta</u> <u>sobre $\mathcal{X}$</u> es una pareja $(\mathcal{A}, U)$, donde $\mathcal{A}$ es una categoría y $U : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{X}$ es un funtor fiel llamado el <u>funtor</u> <u>que</u> <u>olvida</u> de $(\mathcal{A}, U)$.

(2) Si $(\mathcal{A}, U)$ y $(\mathcal{B}, V)$ son categorías concretas sobre $\mathcal{X}$, un <u>funtor</u> <u>concreto</u> (<u>o</u> <u>funtor</u> <u>sobre</u> $\mathcal{X}$) entre $(\mathcal{A}, U)$ y $(\mathcal{B}, V)$ es un funtor $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ tal que $V \circ F = U$. Escribiremos $F : (\mathcal{A}, U) \longrightarrow (\mathcal{B}, V)$ para indicar que F es un funtor sobre $\mathcal{X}$ entre $(\mathcal{A}, U)$ y $(\mathcal{B}, V)$

7.9 Nótese que si $F : (\mathcal{A}, U) \longrightarrow (\mathcal{B}, V)$ es un funtor concreto entonces $(\mathcal{A}, F)$ es categoría concreta sobre $\mathcal{B}$.

7.10 El diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A} \arrow[r, "F"] \arrow[dr, "U"'] & \mathcal{A}' \arrow[r, "F'"] \arrow[d, "U'"] & \mathcal{A}'' \arrow[dl, "U''"] \\
& \mathcal{X} &
\end{tikzcd}$$

muestra que la composición de funtores concretos es también funtor concreto.

(7.10.1) Con esta composición y usando funtores identidad, obtenemos la casicategoría $\mathcal{CAT}_{\mathcal{X}}$ cuyos objetos son las categorías concretas sobre $\mathcal{X}$ y cuyos morfismos son los funtores concretos entre ellas

He aquí dos sencillas observaciones:

7.10.1. Si $\mathcal{C}$ es una categoría literal ~~de~~ de $\mathcal{X}$-objetos con estructura con funtor que olvida U, entonces $(\mathcal{C},U)$ es un objeto de $\mathcal{CAT}_{\mathcal{X}}$.

7.10.2. Si $F:(\mathcal{A},U)\longrightarrow(\mathcal{B},V)$ es concreto y si $F:\mathcal{A}\longrightarrow\mathcal{B}$ es un isomorfismo de categorías, entonces $F^{-1}:(\mathcal{B},V)\longrightarrow(\mathcal{A},U)$ es concreto; así que para funtores concretos no hay diferencia entre isomorfismos en $\mathcal{CAT}_{\mathcal{X}}$ e isomorfismos de categorías.

7.11. Decimos que una categoría concreta sobre $\mathcal{X}$ $(\mathcal{A},U)$ es una <u>categoría de $\mathcal{X}$-objetos con estructura</u> si existe una categoría literal $\mathcal{C}$ de $\mathcal{X}$-objetos con estructura tal que $(\mathcal{A},U)$ es isomorfo a $\mathcal{C}$ en $\mathcal{CAT}_{\mathcal{X}}$.

7.12. <u>NOTACIÓN</u>. La subcasicategoría plena de $\mathcal{CAT}_{\mathcal{X}}$ que consiste de todas las categorías de $\mathcal{X}$-objetos con estructura, será denotada por $Struct(\mathcal{X})$. Por definición, $Struct(\mathcal{X})$ es una subcasicategoría plena y repleta de de $\mathcal{CAT}_{\mathcal{X}}$. En la práctica se escribe libremente $\mathcal{C}\in Struct(\mathcal{X})$ y se asume que $\mathcal{C}$ es literal cuando las propiedades bajo discusión son invariantes bajo isomorfismo.

7.13. Sea $(\mathcal{A},U)$ una categoría de $\mathcal{X}$-objetos con estructura y sea $F:(\mathcal{A},U)\longrightarrow(\mathcal{C},V)$ un isomorfismo en $\mathcal{CAT}_{\mathcal{X}}$, donde $\mathcal{C}$ es una categoría literal con funtor que olvida V. Si $f:A\longrightarrow B$ es un $\mathcal{A}$-isomorfismo tal que Uf es $\mathcal{X}$-identidad, entonces $UA=UB$ y $Uf=1_{UA}$. Por lo tanto, $VFA=VFB$, $VFf=1_{VFA}$ y $Ff:FA\to FB$ es $\mathcal{C}$-isomorfismo. Por la observación (7.7.2), Ff es $\mathcal{C}$-identidad y por ser F isomorfismo, f es $\mathcal{A}$-identidad.

Así que para todo $(\mathcal{A},U) \in \mathrm{Struct}(\mathcal{X})$, U tiene la propiedad siguiente, análoga a (7.7.2):

(7.13.1) Todo $\mathcal{A}$-isomorfismo f tal que Uf es $\mathcal{X}$-identidad, es $\mathcal{A}$-identidad (es decir, para todo $\mathcal{A}$-isomorfismo f, f es $\mathcal{A}$-identidad $\Leftrightarrow$ Uf es $\mathcal{X}$-identidad).

7.14. <u>DEFINICIÓN</u>.

Un funtor $U : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{X}$ se llama <u>amnésico</u> si satisface la propiedad (7.13.1).

7.15 <u>DEFINICIONES</u> ([18]).

Sea $(\mathcal{A},U)$ una categoría concreta sobre $\mathcal{X}$. Entonces:

(1) Para cada objeto X de $\mathcal{X}$, sea $\mathcal{A}_X$ la clase de todos los $\mathcal{A}$-objetos A tales que $UA = X$. $\mathcal{A}_X$ se llama la <u>fibra sobre</u> X de U. Obsérvese que si $\mathcal{C} \in \mathrm{Struct}(X)$, $\mathcal{C}_X$ y $\mathcal{C}(X)$ son esencialmente la misma.

(2) Dado un $\mathcal{X}$-morfismo $f : X \longrightarrow Y$ y $A \in \mathcal{A}_X$, $B \in \mathcal{A}_Y$, decimos que f es <u>admisible</u> <u>de</u> A <u>a</u> B si existe un (único) $\mathcal{A}$-morfismo $\psi : A \longrightarrow B$ tal que $U\psi = f$

7.16. Sea $(\mathcal{A},U)$ una categoría concreta sobre $\mathcal{X}$. Para cada $\mathcal{X}$-objeto X hay un preorden canónico sobre $\mathcal{A}_X$ definido por:

(7.16.1) $\quad A \leq B \iff 1_X$ es admisible de A a B.

La siguiente proposición explica un poco porqué hemos hecho énfasis en el concepto de funtor amnésico:

7.17 PROPOSICIÓN.

Sea $(\mathcal{A}, U)$ una categoría concreta sobre $\mathcal{X}$. Entonces U es amnésico si y sólo si para cada $\mathcal{X}$-objeto X, $(\mathcal{A}_X, \leq)$ es poclase, donde $\leq$ es la definida en (7.16.1) ∎

7.18. Analicemos el caso en que $\mathcal{X}$ es la categoría con un sólo objeto X y un sólo morfismo 1_X. Sea $(\mathcal{A}, U)$ una categoría concreta sobre $\mathcal{X}$. $\mathcal{A}_X$ resulta ser toda la clase de objetos de $\mathcal{A}$, pues U es un funtor constante. Si además U es amnésico, el teorema que acabamos de enunciar asegura que $(Ob\,\mathcal{A}, \leq)$ es una poclase, con la relación (7.16.1) Sin embargo, como la imagen de todo $\mathcal{A}$-morfismo bajo U es 1_X, la relación se trivializa y se convierte en:

(7.18.1) $A \leq B \iff$ existe un $\mathcal{A}$-morfismo $A \longrightarrow B$.

(7.18.2) Por otro lado, dados los $\mathcal{A}$-objetos A y B y $f, g \in hom_{\mathcal{A}}(A,B) \cup hom_{\mathcal{A}}(B,A)$, puede suceder que $f, g \in hom_{\mathcal{A}}(A,B)$ o bien, que $f, g \in hom_{\mathcal{A}}(B,A)$. En ambos casos $Uf = Ug \Rightarrow f = g$, pues U es fiel. Pero puede suceder también que $f \in hom_{\mathcal{A}}(A,B)$ y $g \in hom_{\mathcal{A}}(B,A)$. En este caso $g \circ f \in hom_{\mathcal{A}}(A,A)$ y $f \circ g \in hom_{\mathcal{A}}(B,B)$. Como $U(g \circ f) = U1_A$, $g \circ f = 1_A$. Análogamente, $f \circ g = 1_B$. Por lo tanto f es isomorfismo y $Uf = 1_X$. Así que si U es amnésico, $f = 1_A = g$. Hemos demostrado que para cada dos $\mathcal{A}$-objetos A y B, el conjunto $hom_{\mathcal{A}}(A,B) \cup hom_{\mathcal{A}}(B,A)$ tiene a lo más un elemento y en vista de 7.12, $Ob\,\mathcal{A}$ puede ser ordenada parcialmente con la relación 7.2.1, la cual como se ve, coincide precisamente con (7.18.1) (en otras palabras $(\mathcal{A}_X, \leq)$ coincide con la poclase que es obtenida de $\mathcal{A}$ viéndola como en 7.2).

Esto justifica la afirmación que hicimos al comienzo de 7.3 relativa a que la relación (7.2.1) surge en forma natural nuevamente.

Tenemos demostrada ya la:

(7.18.3) PROPOSICIÓN.

Si $(\mathcal{A}, U)$ es una categoría concreta sobre $\mathcal{X}$ y U es amnésico entonces $\mathcal{A}$ es una categoría parcialmente ordenada con el orden parcial:

$$A \leq B \iff \hom_{\mathcal{A}}(A,B) \neq \emptyset. \blacksquare$$

Tomando en cuenta 7.1 y 7.2, también es claro que:

(7.18.4) PROPOSICIÓN.

Una clase preordenada $(\mathcal{A}, \leq)$ es una poclase si y sólo si, considerándola como categoría (7.1), el funtor constante $U: \mathcal{A} \to \mathcal{X}$ es amnésico. $\blacksquare$

7.19. La discusión sobre funtores amnésicos ((7.14) a (7.18.4)) nos permite concebir las categorías concretas sobre $\mathcal{X}$ en las que el funtor que olvida es amnésico, como generalizaciones de las poclases.

§8. CATEGORÍAS CONCRETAS INICIALMENTE COMPLETAS.

A partir de ahora y hasta el final de la tesis, supondremos que todos los funtores que olvidan de las categorías concretas sobre $\mathcal{X}$ son fieles y amnésicos. Para ello acogeremos (en definitiva) la siguiente nueva definición de categoría concreta sobre $\mathcal{X}$. :

8.1 <u>DEFINICIÓN</u> [18].

Sea $\mathcal{X}$ una categoría no vacía fija (categoría base). Una <u>categoría concreta sobre $\mathcal{X}$</u> es una pareja $(\mathcal{A}, U)$, donde $\mathcal{A}$ es una categoría y $U: \mathcal{A} \to \mathcal{X}$ es un funtor fiel y amnésico (llamado el funtor que olvida de $\mathcal{A}$).[14]

8.2. <u>EJEMPLOS</u>.

8.2.1 Hemos visto ya en 7.18.4 que si $\mathcal{X}$ es una categoría con un sólo objeto y un sólo morfismo y si $(A, \leq)$ es una poclase, entonces $(\mathcal{A}, U)$ es una categoría concreta sobre $\mathcal{X}$, donde $U: \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{X}$ es el funtor constante.

8.2.2. Para toda categoría $\mathcal{X}$, $(\mathcal{A}, U) \in \mathrm{Struct}(\mathcal{X}) \Rightarrow (\mathcal{A}, U)$ es categoría concreta sobre $\mathcal{X}$. (ver 7.13)

8.2.3. Sea $\mathcal{X} = \mathrm{Set}$. Sea $\mathcal{C}$ una categoría concreta en el sentido de [19] (es decir, una categoría literal de conjuntos con estructura, pero sin exigir el axioma (ii) de 7.7), y sea $U: \mathcal{C} \longrightarrow \mathrm{Set}$ el funtor que olvida. Se dice (ver [19]) que $\mathcal{C}$ es <u>topológica</u> si dada una familia $(Y_i, \eta_i)_{i \in I}$ de $\mathcal{C}$-objetos y una familia $(X \xrightarrow{f_i} Y_i)_I$ de funciones, existe una $\mathcal{C}$-estructura ξ de X tal que $((X, \xi) \xrightarrow{f_i} (Y_i, \eta_i))_I$ es una $\mathcal{C}$-fuente U-inicial.

Supongamos que $\mathcal{C}$ es una categoría concreta topológica tal que, además, para todo conjunto X y cualesquiera θ y η, $\mathcal{C}$-estructuras en X, se tiene que: $(X, \theta) \xrightarrow{1_X} (X, \xi) \in \mathrm{Mor}\,\mathcal{C}$ si y sólo si $\xi \subset \theta$. Es muy fácil convencerse de que en este caso $\mathcal{C}$ satisface el axioma (ii) de 7.7, es decir, $(\mathcal{C}, U)$ es

una categoría literal de conjuntos con estructura. Por lo tanto, por el ejemplo anterior, $(\mathcal{C}, U)$ es concreta sobre Set.
En particular, Top es concreta sobre Set.

8.3. Sea $U: \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{X}$ un funtor cualquiera. Se dice que una fuente $(A, f_i: A \longrightarrow A_i)_I$ en $\mathcal{A}$ <u>U-levanta a una fuente</u> $(X, g_i: X \longrightarrow UA_i)_I$ en $\mathcal{X}$ si existe si existe un $\mathcal{X}$-isomorfismo $h: X \longrightarrow UA$ tal que $Uf_i \circ h = g_i$, para cada $i \in I$ (ver Herrlich [6]). En este caso se dice que la fuente $(f_i)_I$ es un U-levantamiento (o simplemente un levantamiento) de $(g_i)_I$. Si además $(f_i)_I$ es U-inicial, entonces es un <u>levantamiento U-inicial</u> de $(g_i)_I$.

8.4. Es evidente que si $(\mathcal{C}, U)$ es una categoría concreta topológica entonces toda fuente $(f_i: X \longrightarrow (Y_i, \eta_i))_I$ en $\mathcal{X}$ tiene un U-levantamiento U-inicial

$$((f_i, (\xi_i, \eta_i)): (X, \xi) \longrightarrow (Y_i, \eta_i))_I,$$

pero este levantamiento es además óptimo, en el sentido de que $U(X, \xi) = X$ y $U(f_i, (\xi, \eta_i)) = f_i \ \forall i \in I$. Es este tipo de levantamientos los que nos van a interesar:

8.5 <u>DEFINICIONES</u>.

Sea $U: \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{X}$ un funtor

(1) Se dice que una fuente $(A \xrightarrow{f_i} A_i)_I$ en $\mathcal{A}$ es un <u>U-levantamiento óptimo</u> de una $\mathcal{X}$-fuente $(X \xrightarrow{g_i} UA_i)_I$ si $(f_i)_I$ es U-inicial y $UA = X$ y $Uf_i = g_i \ \forall i \in I$.

(2) Un $\mathcal{A}$-pozo $(A_i \xrightarrow{f_i} A)_I$ es una <u>U-levantamiento co-óptimo</u> de un $\mathcal{X}$-pozo $(UA_i \xrightarrow{g_i} X)_I$ si $(f_i)_I$ es

U-final y para toda $i \in I$, $Uf_i = g_i$.

El siguiente lema es útil y muy sencillo de demostrar. Afirma que en el caso en el que el funtor es fiel y amnésico, los levantamientos óptimos son únicos, cuando existen.

8.6 LEMA.

Si $U: \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{X}$ es fiel y amnésico y $(A \xrightarrow{f_i} A_i)_I$, $(B \xrightarrow{g_i} A_i)_I$ son $\mathcal{A}$-fuentes U-iniciales tales que $UA = UB$ y para toda $i \in I$, $Uf_i = Ug_i$, entonces $A = B$ y para toda $i \in I$, $f_i = g_i$ ∎

8.7. Volvamos a las poclases. Sea $\mathcal{X}$ la categoría con un sólo objeto $\underline{X}$ y un sólo morfismo $1_{\underline{X}}$. Supongamos que $(\mathcal{A}, \leq)$ es una poclase, que $\{A_i\}_{i \in I}$ es una familia de elementos de $\mathcal{A}$ y que $A^* \in \mathcal{A}$. Entonces $A^* = \bigwedge_I A_i$ si y sólo si existe una $\mathcal{A}$-fuente $(A^* \xrightarrow{f_i} A_i)_I$ tal que para toda fuente $(B \xrightarrow{g_i} A_i)_I$ en $\mathcal{A}$, existe un único morfismo $f: B \longrightarrow A$ tal que $f_i \circ f = g_i$ para todo $i \in I$ (esto es por 7.3.1). Esta condición sobre $(f_i)_I$ es claramente equivalente al hecho de que $(f_i)_I$ es una fuente U-inicial, donde $U: \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{X}$ es el funtor constante. Así que:

(8.7.1) $A^* = \bigwedge_I A_i \iff$ existe una $\mathcal{A}$-fuente U-inicial $(A^* \xrightarrow{f_i} A_i)_I$.

Nótese que toda fuente U-inicial $(A \xrightarrow{f_i} A_i)_I$ es un U-levantamiento óptimo de la $\mathcal{X}$-fuente $(\underline{X} \xrightarrow{1_{\underline{X}}} UA_i)_I$ (es decir, la fuente $(\underline{X} \xrightarrow{h_i} UA_i)_I$ donde todas las h_i son $1_{\underline{X}}$).

Podemos entonces asegurar que:

(8.7.2) $A^* = \bigwedge_I A_i \Leftrightarrow$ la $\mathcal{X}$-fuente $(X \xrightarrow{1_X} UA_i)_I$ tiene un U-levantamiento óptimo $(A^* \xrightarrow{f_i} A_i)_I$

Y por lo tanto,

(8.7.3) Toda subclase de $\mathcal{A}$ tiene ínfimo $\Leftrightarrow$ toda fuente en $\mathcal{X}$, $(X \xrightarrow{h_i} UA_i)_I$, tiene un U-levantamiento óptimo.

Sea $\mathcal{X}$ una categoría fija por el resto de la sección.

Inspirándonos en (8.7.3) introduciremos la noción de Categoría concreta inicialmente completa sobre $\mathcal{X}$. Antes daremos algunas definiciones que harán más manejables varios conceptos como ése.

8.8 DEFINICIONES.

Sea $U: \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{X}$ un funtor. Entonces:

(1) Un U-morfismo o morfismo estructurado con dominio X es una pareja (f, A), donde A es un $\mathcal{A}$-objeto y $f: X \longrightarrow UA$ es un $\mathcal{X}$-morfismo.

(2) Un U-comorfismo o morfismo coestructurado con codominio X es una pareja (A, f), donde A es un $\mathcal{A}$-objeto y $f: UA \longrightarrow X$ es un $\mathcal{X}$-morfismo.

(3) Una U-fuente con dominio X y codominio $(A_i)_I$ es una una pareja (X, ξ), donde X es un $\mathcal{X}$-objeto y ξ es una familia (indicada por una clase) $(f_i, A_i)_I$ de morfismos estructurados con dominio X.

(4) Un U-pozo con codominio X y dominio $(A_i)_I$ es una pareja (η, X), donde η es una familia (indicada

por una clase) $(A_i, f_i)_I$ de morfismos coestructurados con codominio X.

8.9. DEFINICIONES.

Sea $(\mathcal{A}, U)$ una categoría concreta sobre $\mathcal{X}$.

Entonces:

(1) $(\mathcal{A}, U)$ es inicialmente completa si toda U-fuente tiene un U-levantamiente óptimo

(2) $(\mathcal{A}, U)$ es finalmente completa si todo U-pozo tiene un U-levantamiento co-óptimo.

8.10: Obsérvese que una categoría $(\mathcal{A}, U)$ sobre $\mathcal{X}$ es finalmente completa si y sólo si $(\mathcal{A}^{op}, U^{op})$ es inicialmente completa (sobre $\mathcal{X}^{op}$).

8.11: Por (8.7.3), toda poclase tal que cada una de sus subclases tiene un ínfimo, es inicialmente completa, y toda poclase tal que cada una de sus subclases tiene supremo, es finalmente completa.

Por otro lado, dada la poclase $(A, \leq)$, es suficiente que toda subpoclase de ella tenga ínfimos para que $(A, \leq)$ sea poclase completa[15]. Este hecho nos hace conjeturar que toda categoría inicialmente completa es finalmente completa, lo cual resulta ser cierto, como mostraremos de inmediato:

8.12 TEOREMA ([18])

Una categoría $(\mathcal{A}, U)$ concreta sobre $\mathcal{X}$ es inicialmente completa si y sólo si es finalmente completa.

<u>Demostración:</u>[16]

Por la observación 8.10 es suficiente demostrar que $(\mathcal{A},U)$ inicialmente completa $\Rightarrow$ $(\mathcal{A},U)$ finalmente completa. Sea $(UA_i \xrightarrow{f_i} X)_{i\in I}$ un U-pozo. Consideremos la familia de todas las parejas $(g_j, (g_{ij})_{i\in I})_{j\in J}$, donde para toda $i\in I$ y todo $j\in J$, $g_{ij} : A_i \longrightarrow B_j$, $g_j : X \longrightarrow UB_j$, y conmuta el diagrama

$$\begin{tikzcd} UA_i \arrow[d, "f_i"'] \arrow[dr, "Ug_{ij}"] & \\ X \arrow[r, "g_j"'] & UB_j \end{tikzcd}$$

Por ser $(\mathcal{A},U)$ inicialmente completa y $(X \xrightarrow{g_j} UB_j)_J$ una U-fuente, existe un U-levantamiento óptimo $(A \xrightarrow{\bar{g}_j} B_j)_J$ de $(g_j)_J$. Por lo tanto, para $i\in I$ y $j\in J$, conmuta:

$$\begin{tikzcd} UA_i \arrow[d, "f_i"'] \arrow[dr, "Ug_{ij}"] & \\ UA \arrow[r, "U\bar{g}_j"'] & UB_j \end{tikzcd}$$

Como $(\bar{g}_j)_{j\in J}$ es U-inicial, para toda $i\in I$ existe $\bar{f}_i : A_i \longrightarrow A$ tal que $U\bar{f}_i = f_i$. Para terminar, demostremos que el pozo $(A_i \xrightarrow{f_i} A_i)_I$ es U-final. Sea $(A_i \xrightarrow{h_i} C)$ un $\mathcal{A}$-pozo y sea $h : UA \longrightarrow UC$ un $\mathcal{X}$-morfismo tal que el siguiente diagrama conmuta para toda $i\in I$

$$\begin{tikzcd} UA_i \arrow[r, "U\bar{f}_i = f_i"] \arrow[dr, "Uh_i"'] & UA \arrow[d, "h"] \\ & UC \end{tikzcd}$$

Por lo tanto existen $k \in I$ y $j \in J$ tales que $h = g_j$ y $h_i = h_{kj}$, así que $\bar{g}_j : A \longrightarrow C$ es tal que $U\bar{g}_j = h$ ∎

8.13: Si $(\mathcal{A}, U)$ es una categoría concreta sobre $\mathcal{X}$, por 7.17 sabemos que para cada $\mathcal{X}$-objeto X, la fibra $(\mathcal{A}_X, \leq)$ es poclase, donde $\leq$ está definida por:

$A \leq B \iff$ existe un $\mathcal{A}$-morfismo $\psi : A \longrightarrow B$ tal que $U\psi = 1_X$.

Sea $\{A_i\}_{i \in I}$ una subclase de $\mathcal{A}$. Entonces la fuente $(X \xrightarrow{1_X} UA_i)_{i \in I}$ tiene un U-levantamiento óptimo $(A \xrightarrow{f_i} A_i)_I$. Es fácil ver que $A = \bigwedge_I A_i$. Dualmente, si el U-levantamiento co-óptimo del pozo $(UA_i \xrightarrow{1_X} X)_I$ es $(A_i \xrightarrow{f_i} B)_I$, entonces $B = \bigvee_I A_i$. Por lo tanto, $(\mathcal{A}_X, \leq)$ es una poclase completa. (Por eso a las categorías concretas inicialmente completas sobre $\mathcal{X}$, Manes las llama "categorías concretas de fibras completas".).

8.14. Toda categoría concreta topológica $\mathcal{C}$ (en el sentido de [19]) que es concreta sobre Set (en el sentido de 8.1) es inicialmente completa. En particular las del tipo mencionado en 8.2.3, como Top.

Para tener otros ejemplos de categorías concretas inicialmente completas sobre $\mathcal{X}$, haremos las siguientes definiciones:

8.15. <u>DEFINICIÓN</u>.

Sean $(\mathcal{A}, U)$ y $(\mathcal{B}, V)$ categorías concretas sobre $\mathcal{X}$. Decimos que $(\mathcal{A}, U)$ es subcategoría (resp. subcategoría plena) de $(\mathcal{B}, V)$, si:

(i) $\mathcal{A}$ es subcategoría (resp. subcategoría plena) de $\mathcal{B}$;
(ii) $V|_{\mathcal{A}} = U$, es decir, $(\mathcal{A},U) \hookrightarrow (\mathcal{B},V)$ es concreto.

8.16. <u>DEFINICIONES</u>.

Sea $(\mathcal{A},U)$ una subcategoría plena de $(\mathcal{B},V)$. Entonces:

(1) $(\mathcal{A},U)$ es <u>inicialmente</u> <u>cerrada</u> en $(\mathcal{B},V)$ si para toda $\mathcal{B}$-fuente V-inicial $(A_i \xrightarrow{f_i} B)_I$, se tiene que $B \in \mathcal{A}$ siempre que para toda $i \in I$, $A_i \in \mathcal{A}$.

(2) $(\mathcal{A},U)$ es <u>finalmente</u> <u>cerrada</u> en $(\mathcal{B},V)$ si para todo $\mathcal{B}$-pozo V-final $(B \xrightarrow{f_i} A_i)_I$, se tiene que $B \in \mathcal{A}$ siempre que para todo $i \in I$, $A_i \in \mathcal{A}$.

Con la siguiente proposición se pueden obtener más ejemplos de categorías concretas inicialmente completas sobre $\mathcal{X}$.

8.17. <u>PROPOSICIÓN</u>.

Sea $(\mathcal{A},U)$ una subcategoría plena de una categoría concreta $(\mathcal{B},V)$ inicialmente completa sobre $\mathcal{X}$. Si $(\mathcal{A},U)$ es inicialmente cerrada o si es finalmente cerrada en $(\mathcal{B},V)$, entonces es inicialmente completa. ∎

Una subcategoría plena de $(\mathcal{A},U)$, $(\mathcal{B},V)$, puede no ser inicialmente cerrada en $(\mathcal{A},U)$, pero podemos definir su cerradura inicial como lo haremos en los siguientes números.

8.18 PROPOSICIÓN.

Sea $(\mathcal{A},U)$ una subcategoría plena de la categoría concreta $(\mathcal{B},V)$ sobre $\mathcal{X}$. Entonces:

(1) La subcategoría plena $(\bar{\mathcal{A}},\bar{U})$ de $(\mathcal{B},V)$ cuya clase de objetos es

$$\mathcal{O}_{\bar{\mathcal{A}}} = \{B \in \operatorname{Ob}\mathcal{B} \mid \text{existe una } \mathcal{B}\text{-fuente } V\text{-inicial } (B \xrightarrow{g_i} A_i)_I \text{ con } A_i \in \operatorname{Ob}\mathcal{A} \text{ para toda } i \in I\},$$

es inicialmente cerrada en $(\mathcal{B},V)$

(2) Dualmente, la subcategoría plena $(\underline{\mathcal{A}},\underline{U})$ de $(\mathcal{B},V)$ cuya clase de objetos es

$$\mathcal{O}_{\underline{\mathcal{A}}} = \{B \in \mathcal{B} \mid \text{existe } (A_i \xrightarrow{g_i} B)_I \ \mathcal{B}\text{-pozo } V\text{-final tal que para todo } i \in I,\ A_i \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}\},$$

es finalmente cerrada en $(\mathcal{B},V)$ ∎ (ver 8.19 (ii)).

8.19. PROPOSICIÓN.

Sea $(\mathcal{A},U)$ una subcategoría plena de $(\mathcal{B},V)$. Entonces $(\bar{\mathcal{A}},\bar{U})$ es la mínima subcategoría plena de $(\mathcal{B},V)$ inicialmente cerrada que contiene a $(\mathcal{A},U)$, es decir:

(i) $(\mathcal{A},U)$ es subcategoría plena de $(\bar{\mathcal{A}},\bar{U})$

(ii) $(\bar{\mathcal{A}},\bar{U})$ es inicialmente cerrada en $(\mathcal{B},V)$

(iii) Si $(\mathcal{C},W)$ es subcategoría plena de $(\mathcal{B},V)$ inicialmente cerrada y $(\mathcal{A},U)$ es subcategoría plena de $(\mathcal{C},W)$ entonces $(\bar{\mathcal{A}},\bar{U})$ es subcategoría plena de $(\mathcal{C},W)$.

(iv) $(\bar{\mathcal{A}},\bar{U})$ es la única subcategoría plena de $(\mathcal{B},V)$ con las propiedades (i), (ii), (iii)

Demostración:

(i) Sea $A \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}$. $(A \xrightarrow{1_A} A)$ es $\mathcal{B}$-fuente V-inicial[17].
Por lo tanto $A \in \operatorname{Ob}\bar{\mathcal{A}}$.

(ii) Supongamos que $(B \xrightarrow{f_i} A_i)_I$ es una $\mathcal{B}$-fuente V-inicial tal que para todo $i \in I$, $A_i \in \mathrm{Ob}\,\bar{\mathcal{A}}$. Por lo tanto, para cada $i \in I$ existe $(A_i \xrightarrow{g_j^i} C_j^i)_{j \in J_i}$ $\mathcal{B}$-fuente V-inicial tal que para cada $j \in J_i$, $C_j^i \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}$.
La fuente $((B \xrightarrow{f_i} A_i \xrightarrow{g_j^i} C_j^i)_{j \in J_i})_{i \in I}$ es V-inicial y por tanto $B \in \mathrm{Ob}\,\bar{\mathcal{A}}$.

(iii) Supongamos que $A \in \mathrm{Ob}\,\bar{\mathcal{A}}$. Sea $(A \xrightarrow{f_i} A_i)_I$ una $\mathcal{B}$-fuente V-inicial tal que para toda $i \in I$, $A_i \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}$. Por lo tanto, para toda $i \in I$, $A_i \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$. Como $(\mathcal{C}, W)$ es inicialmente cerrada, $A \in \mathcal{C}$.

(iv) Supongamos que $(\mathcal{C}, W)$ es una subcategoría plena de $(\mathcal{B}, V)$ con las propiedades (i), (ii) y (iii). Por lo tanto, por (iii), $(\mathcal{C}, W)$ es subcategoriá plena de $(\bar{\mathcal{A}}, \bar{U})$ y viceversa. Entonces $(\bar{\mathcal{A}}, \bar{U}) = (\mathcal{C}, W)$ ∎

8.20. <u>DEFINICIÓN</u>.

Si $(\mathcal{A}, U)$ es subcategoría plena de $(\mathcal{B}, V)$, entonces:

(1) $(\bar{\mathcal{A}}, \bar{U})$ se llama la <u>cerradura</u> (o <u>envolvente</u>) <u>inicial</u> de $(\mathcal{A}, U)$ en $(\mathcal{B}, V)$

(2) $(\underline{\mathcal{A}}, \underline{U})$ se llama la <u>cerradura</u> (o <u>envolvente</u>) <u>final de</u> $(\mathcal{A}, U)$ en $(\mathcal{B}, V)$

8.21. Claramente una subcategoría plena $(\mathcal{A}, U)$ de $(\mathcal{B}, V)$ es inicialmente cerrada (resp. finalmente cerrada) en $(\mathcal{B}, V)$ si y sólo si $(\mathcal{A}, U) = (\bar{\mathcal{A}}, \bar{U})$ (resp. $(\mathcal{A}, U) = (\underline{\mathcal{A}}, \underline{U})$).

9.22. TEOREMA.

Sean $(\mathcal{B}, V)$ una categoría concreta inicialmente completa sobre $\mathcal{X}$ y $(\mathcal{A}, U)$ una subcategoría plena de $(\mathcal{B}, V)$. Entonces $(\bar{\mathcal{A}}, \bar{U})$ es la envolvente $\mathcal{E}$-reflexiva de $\mathcal{A}$ en $\mathcal{B}$, donde $\mathcal{E}$ son todos los $\mathcal{B}$-morfismos f tales que Vf es identidad.

Demostración:

Sabemos que $\mathcal{A} \subset \bar{\mathcal{A}}$. Sean $B \in Ob\,\mathcal{B}$ y $(B \xrightarrow{f_i} A_i)_I$ la fuente de todos los $\mathcal{B}$-morfismos con dominio $\underline{X}$ y codominio en $Ob\,\mathcal{A}$. Como $(\mathcal{B}, V)$ es inicialmente completa, la V-fuente $(VB \xrightarrow{Vf_i} VA_i)_I$ tiene un V-levantamiento óptimo $(A_B \xrightarrow{\bar{f}_i} A_i)_I$.

Por definición de $\bar{\mathcal{A}}$, $A_B \in \bar{\mathcal{A}}$ y además, por conmutar el triángulo

$$\begin{tikzcd} VB \arrow[d, "1_{VB}"'] \arrow[dr, "Vf_i"] & \\ VA_B \arrow[r, "V\bar{f}_i"'] & VA_i \end{tikzcd},$$

existe un único $\mathcal{B}$-morfismo $e_B : B \longrightarrow A_B$ tal que $Ve_B = 1_{VB}$ y para toda $i \in I$, $\bar{f}_i \cdot e_B = f_i$.

Probaremos que (e_B, A_B) es universal:

Sea $f : B \longrightarrow C$ un $\mathcal{B}$-morfismo, con $C \in Ob\,\bar{\mathcal{A}}$. Por lo tanto existe $(C \xrightarrow{g_j} A_j)_J$ $\mathcal{B}$-fuente V-inicial tal que para toda $j \in J$, $A_j \in \mathcal{A}$. Pero entonces, por definición de $(f_i)_I$, para cada $j \in J$ existe $i_j \in I$ tal que $g_j \circ f = f_{i_j}$. Dicho de otro modo, conmuta en $\mathcal{B}$ el cuadrado:

$$
\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "e_B"] \arrow[d, "f"'] & A_B \arrow[d, "\bar{f}_{ij}"] \\
C \arrow[r, "g_j"'] & A_j
\end{tikzcd}
$$

y en $\mathcal{X}$ el triángulo

$$
\begin{tikzcd}
VA_B \arrow[d, "Vf"'] \arrow[dr, "V\bar{f}_{ij}"] & \\
VC \arrow[r, "Vg_j"'] & VA_i
\end{tikzcd}
$$

Por lo tanto, existe un morfismo $\hat{f} : A_B \longrightarrow C$ tal que $V\hat{f} = Vf$. Pero $V(\hat{f} \circ e_B) = V\hat{f} = Vf$ y como V es fiel, $\hat{f} \circ e_B = f$ $\therefore$ (e_B, A_B) es universal para B. y $e_B \in \mathcal{E}$
$\therefore$ $\bar{\mathcal{A}}$ es $\mathcal{E}$-reflexiva en $\mathcal{B}$.

Sea $\mathcal{D}$ una subcategoría $\mathcal{E}$-reflexiva de $\mathcal{B}$ tal que $\mathcal{A} \subset \mathcal{D}$. En particular $\mathcal{D}$ es subcategoría plena de $\mathcal{B}$. Sea $L \in \mathrm{Ob}\,\bar{\mathcal{A}}$ y sea $(L \xrightarrow{h_k} B_k)_K$ una $\mathcal{B}$-fuente V-inicial tal que para toda $k \in K$, $B_k \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}$. Sea $\gamma : L \longrightarrow D$ una $\mathcal{D}$-reflexión de L tal que $\gamma \in \mathcal{E}$. Para toda $k \in K$, como $B_k \in \mathcal{D}$, existe un $\mathcal{B}$-morfismo $g_k : D \longrightarrow B_k$ tal que conmuta el diagrama

$$
\begin{tikzcd}
L \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "h_k"'] & D \arrow[dl, "g_k"] \\
B_k &
\end{tikzcd}
$$

Pero también conmuta el triángulo

$$
\begin{tikzcd}
VD \arrow[d, "1_{VD}"'] \arrow[dr, "V1_D"] & \\
VL \arrow[r, "V\gamma"'] & VD
\end{tikzcd}
$$

y por lo tanto, para todo $k \in K$, el siguiente cuadrado es conmutativo (con todo y diagonal):

$$\begin{tikzcd}
VD \arrow[r, "V1_D"] \arrow[d, "1_{VD}"'] & VD \arrow[d, "Vg_k"] \\
VL \arrow[ur, "V\gamma"] \arrow[r, "Vh_k"'] & VB_k
\end{tikzcd}$$

Como $(h_k)_{k \in K}$ es V-inicial, existe $\ell : D \longrightarrow L$ tal que $V\ell = 1_{VB}$. Es fácil ver que, por ser V fiel, ℓ es el inverso derecho e izquierdo de γ, lo que implica que γ es isomorfismo. Como V es amnésico, γ es identidad. Por lo tanto $L=D$ y con ello $L \in \mathcal{D}$. Esto demuestra que $\bar{\mathcal{A}} \subset \mathcal{D}$ y nuestro teorema queda probado.[18] ∎

8.23. <u>NOTA.</u> Es muy conocido el hecho de que si $\mathcal{A}$ es subcategoría de $\mathcal{B}$ con inclusión $E : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$, entonces $\mathcal{A}$ es reflexiva en $\mathcal{B}$ $\iff$ E tiene un adjunto izquierdo $R : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{A}$ tal que si (r_B, A_B) es la $\mathcal{A}$-reflexión de B, $R(B) = A_B$. En el caso del teorema 8.22, $\bar{\mathcal{A}}$ es reflexiva en $\mathcal{B}$ y por lo tanto existe un funtor $R : \mathcal{B} \longrightarrow \bar{\mathcal{A}}$ que es fácil ver cómo actúa:

Para cada $B \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{B}$, sea A_B el $\bar{\mathcal{A}}$-objeto construido como en la demostración, de modo que (e_B, A_B) es la reflexión de B. Supongamos que $B \xrightarrow{f} B'$ es un $\mathcal{B}$-morfismo. Por lo tanto, también la composición

$$B \xrightarrow{f} B' \xrightarrow{e_{B'}} A_{B'}$$

es un $\mathcal{B}$-morfismo. Como e_B es universal, existe un único $\bar{\mathcal{A}}$-morfismo $\hat{f} : A \longrightarrow A'$ tal que conmuta:

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "e_B"] \arrow[d, "e_{B'} \circ f"'] & A_B \arrow[dl, "\hat{f}"] \\ A'_B & \end{tikzcd}$$

$R: \mathcal{B} \longrightarrow \bar{\mathcal{A}}$ es tal que $R(B) = A_B$ y $R(B \xrightarrow{f} B') = \hat{f}$ (ver 26.11 y 36.1(2) de [11]). Es fácil observar ahora que $\bar{U} \circ R = V$, es decir, $R: (\mathcal{B}, V) \longrightarrow (\bar{\mathcal{A}}, \bar{U})$ es un funtor sobre $\mathcal{X}$.

Con 8.21 y éstas observaciones, se concluye que:

8.24 <u>TEOREMA</u>.

(1) Si $(\mathcal{A}, U)$ es una subcategoría plena inicialmente cerrada de la categoría concreta inicialmente completa $(\mathcal{B}, V)$ sobre $\mathcal{X}$, entonces $(\mathcal{A}, U)$ es <u>reflexiva sobre</u> $\mathcal{X}$ en $(\mathcal{B}, V)$

(2) Dualmente, si $(\mathcal{A}, U)$ es subcategoría plena finalmente cerrada de la categoría concreta inicialmente (= finalmente) completa $(\mathcal{B}, V)$ sobre $\mathcal{X}$, entonces $(\mathcal{A}, U)$ es <u>correflexiva</u> <u>sobre $\mathcal{X}$</u> en $(\mathcal{B}, V)$ ∎

Hay más propiedades interesantes de las categorías concretas inicialmente completas sobre $\mathcal{X}$. Por ejemplo, las categorías concretas de este tipo son precisamente los objetos inyectivos con respecto a inmersiones plenas concretas en la categoría (mejor dicho, casicategoría) de todas las categorías concretas sobre $\mathcal{X}$ y funtores concretos sobre $\mathcal{X}$. Esta propiedad y otras más las analizaremos en el capítulo siguiente.

III. Completiones iniciales Y finales.

Toca su turno a la aguardada generalización del concepto de compleción de una poclase. Esta podríamos llevarla a cabo de una manera natural trasladando, "mutatis mutandis", la definición (5.3.2) al nuevo lenguaje de las categorías concretas. Obtendríamos la siguiente definición:

> Sean $\mathcal{X}$ una categoría y $(\mathcal{A}, U)$ una categoría concreta sobre $\mathcal{X}$. Una <u>compleción</u> <u>inicial</u> de $(\mathcal{A}, U)$ es una inmersión plena concreta $E : (\mathcal{A}, U) \longrightarrow (\mathcal{B}, V)$, donde $(\mathcal{B}, V)$ es inicialmente completa.
> (En virtud de 8.12, toda compleción inicial es también una compleción final (que se definiría análogamente) y viceversa).

Esta es precisamente la definición dada por Herrlich en [7]. Pero la generalización de un concepto matemático debe llevarnos a otro que agrupe, en todo lo posible, solamente a ejemplos de interés para la teoría dentro de la que se está investigando. Hay veces en que se deben inmolar ejemplos estériles en beneficio de la fuerza inyectada a un concepto que los incluía. Este ha sido el caso de "compleción inicial". Las compleciones significativas tienen la propiedad de ser inicialmente densas, o bien finalmente densas. La llamada extensión E' no posee ninguna de estas dos propiedades, como veremos en §10 y en §11. Además rara vez existe esta extensión (rara vez es legítima). Por ejemplo, mostraremos en §11 que la extensión $E' : (\mathcal{A}, U) \longrightarrow (\mathcal{A}', U')$ de un conjunto parcialmente ordenado $(\mathcal{A}, U)$ es precisamente la compleción definida en (5.5.2). Esta construcción no da lugar a una poclase (es decir $(\mathcal{A}', U')$ no es legítima) si $(\mathcal{A}, U)$ es una clase propia (pues $\mathcal{A}' = \mathcal{P}(\mathcal{A})$).

Por estas razones simpatizamos con la definición modificada de compleción inicial dada por Herrlich en [8] (para nosotros es 10.1 (2)). La extensión E' es desterrada de los ejemplos de la nueva noción, la cual se separa de la también nueva de compleción final; pero las propiedades importantes mencionadas en [7] siguen valiéndose.

NOTA: Durante este capítulo $\mathcal{X}$ denotará a una categoría fija no vacía (categoría base).

§ 9. FUNTORES CONCRETOS.

Recuérdese que para nosotros una categoría concreta sobre $\mathcal{X}$ será tomada como en 8.1; un funtor concreto, como se definió en 7.8 (2), pero su dominio y su codominio serán ahora categorías concretas sobre $\mathcal{X}$ en el sentido de 8.1. A pesar de ello, la observación 7.9 sigue vigente:

9.1 PROPOSICIÓN.

Si $F : (\mathcal{A}, U) \longrightarrow (\mathcal{B}, V)$ es un funtor concreto, entonces $(\mathcal{A}, F)$ es categoría concreta sobre $\mathcal{B}$.

Demostración:

F es amnésico: Sea $f : A \longrightarrow A'$ un $\mathcal{A}$-isomorfismo tal que $Ff : FA \longrightarrow FA'$ es $\mathcal{B}$-identidad. Por lo tanto, $FA = FA'$, $Ff = 1_{FA}$, y como U es amnésico y $Uf = VFf = V1_{FA} = 1_{UA}$, f es identidad ∎

Son tipos importantes de funtores concretos, los siguientes:

9.2 DEFINICIÓN.

Sea $F:(\mathcal{A},U) \longrightarrow (\mathcal{B},V)$ un funtor concreto. Entonces:

(1) F conserva estructuras iniciales si para toda $\mathcal{A}$-fuente U-inicial $(A \xrightarrow{m_i} A_i)_I$, $(FA \xrightarrow{Fm_i} FA_i)_I$ es $\mathcal{B}$-fuente V-inicial

(2) F conserva estructuras finales si para todo $\mathcal{A}$-pozo U-final $(A_i \xrightarrow{m_i} A)_I$, $(FA_i \xrightarrow{Fm_i} FA)_I$ es $\mathcal{B}$-pozo V-final.

(3) F es inicialmente denso si para cada $\mathcal{B}$-objeto B, existe una F-fuente V-inicial con dominio B, $(B \xrightarrow{f_i} FA_i)_I$.

(4) F es finalmente denso si para cada $\mathcal{B}$-objeto B, existe un F-pozo V-final con codominio B, $(FA_i \xrightarrow{f_i} B)_I$.

9.3 .PROPOSICIÓN.

Sea $F:(\mathcal{A},U) \longrightarrow (\mathcal{B},V)$ un funtor sobre X. Entonces:

(1) F es inicialmente denso si y sólo si para cada $B \in Ob\,\mathcal{B}$, la fuente $(f_i : B \longrightarrow FA_i)_I$ de todos los F-morfismos con dominio B, es V-inicial.

(2) F es finalmente denso si y sólo si para cada $B \in Ob\mathcal{B}$, el pozo $(f_i : FA_i \longrightarrow B)_I$ de todos los F-comorfismos con dominio B es V-final ∎

9.4 LEMA.

Sean $(\mathcal{A},U)$ subcategoría plena de $(\mathcal{B},V)$, $(A \xrightarrow{f_i} A_i)_I$ una $\mathcal{A}$-fuente y $(B_j \xrightarrow{g_j} B)_J$ un $\mathcal{A}$-pozo. Entonces:

(1) $(f_i)_I$ V-inicial $\Rightarrow$ $(f_i)_I$ es U-inicial

(2) $(g_j)_J$ V-final $\Rightarrow$ $(g_j)_J$ es U-final ∎

9.5. PROPOSICIÓN.

Sea P cualquiera de las siguientes propiedades:

(P1) Conservar estructuras iniciales
(P2) Conservar estructuras finales
(P3) Ser inicialmente denso
(P4) Ser finalmente denso.

Supongamos que $E : (\mathcal{A}, U) \longrightarrow (\mathcal{B}, V)$ es concreto y que $(\mathcal{B}, V)$ es subcategoría plena de $(\mathcal{C}, W)$. Sea $F = i \circ E$, donde $i : (\mathcal{B}, V) \hookrightarrow (\mathcal{C}, W)$ es la inclusión. Entonces, si F tiene la propiedad P, E también la tiene.

Demostración:

Supongamos que F tiene P1. Sea $(A \xrightarrow{f_i} A_i)_I$ una $\mathcal{A}$-fuente U-inicial. Por lo tanto $(FA \xrightarrow{Ff_i} FA_i)$ es $\mathcal{C}$-fuente W-inicial. Como $F = i \cdot E$, $(EA \xrightarrow{Ef_i} EA_i)_I = (FA \xrightarrow{Ff_i} FA_i)_I$ esto implica que $(Ef_i)_I$ es $\mathcal{B}$-fuente W-inicial y, por 9.4, esta fuente es V-inicial. Por lo tanto, E tiene P1.

Supongamos que F tiene P3. Sea $B \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{B}$. Por lo tanto, $B \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ y existe $(B \xrightarrow{f_i} FA_i)_I$ F-fuente W-inicial con dominio B. Pero para todo $i \in I$, $FA_i = EA_i$. Entonces $(f_i)_I$ es E-fuente V-inicial.

Lo demás es análogo a esto ∎

9.6 NOTA: Vuélvase por unos minutos al capítulo anterior. Tome una categoría concreta $(\mathcal{A}, U)$ sobre $\mathcal{X}$. Piense los dominios de fuentes U-iniciales en $\mathcal{A}$ como puntos de cerradura de $\mathcal{A}$ (como si $\mathcal{A}$ fuera un espacio métrico)

Vea la definición de cerradura inicial y de cerradura final y compárela con la de cerradura de un subespacio métrico (de un espacio). Piense unos instantes y descubrirá curiosas analogías. El análogo a 8.19 (o a su dual) es "la cerradura de un espacio (subespacio) en un espacio métrico es el mínimo cerrado que contiene al subespacio", mientras que el de 8.17 es: "todo cerrado en un completo es completo". El lema 8.6 vendría a representar la unicidad del límite de una "sucesión" (sería más correcto red). La noción de continuidad por la derecha y la noción de continuidad por la izquierda, corresponderían, respectivamente, a las de conservación de estructuras iniciales y funtor que conserva estructuras finales. Estas analogías con el análisis no parecen ser muy interesantes y mucho menos importantes, pero pensando en ellas se deducen fácilmente observaciones como las de los siguientes números:

9.7- DEFINICIONES.

Sea $(\mathcal{A},U)$ una subcategoría plena de $(\mathcal{B},V)$. Entonces:

(1) $(\mathcal{A},U)$ es una subcategoría inicialmente densa de $(\mathcal{B},V)$ si $(\bar{\mathcal{A}},\bar{U}) = (\mathcal{B},V)$ (i.e., si $(\mathcal{A},U) \hookrightarrow (\mathcal{B},V)$ es inicialmente denso).

(2) $(\mathcal{A},U)$ es una subcategoría finalmente densa de $(\mathcal{B},V)$ si $(\underline{\mathcal{A}},\underline{U}) = (\mathcal{B},V)$.

9.8 OBSERVACIONES

(1) $(\mathcal{A},U)$ es subcategoría inicialmente densa de $(\bar{\mathcal{A}},\bar{U})$ (y finalmente densa de $(\underline{\mathcal{A}},\underline{U})$)

(2) Si $F:(\mathcal{A},U) \longrightarrow (\mathcal{B},V)$ es un funtor pleno concreto entonces F es inicialmente denso si y sólo si $(F\mathcal{B}, V|_{F(\mathcal{B})})$ es subcategoría inicialmente densa de $(\mathcal{B},V)$

9.9. PROPOSICIÓN.[1]

Sea $F:(\mathcal{A},U)\longrightarrow(\mathcal{B},V)$ un funtor concreto inicialmente denso (resp. finalmente denso). Si $G,G':(\mathcal{B},V)\longrightarrow(\mathcal{C},W)$ conservan estructuras iniciales (resp. finales) y si $GF=G'F$ entonces $G=G'$

Demostración:

Sea $B\in Ob\,\mathcal{B}$. como F es inicialmente denso, existe una F-fuente $(B\xrightarrow{f_i}FA_i)_I$ V-inicial con dominio B. Entonces las fuentes $(GB\xrightarrow{Gf_i}GFA_i)_I$ y $(G'B\xrightarrow{G'f_i}G'FA_i)_I$ son W-iniciales. Pero para toda $i\in I$, $GFA_i=G'FA_i$, $WGf_i=Vf_i=$ $=WG'f_i$ y $WGB=VB=WG'B$. Por lo tanto, por el lema 8.6, $GB=GB'$ y para cada $i\in I$, $Gf_i=G'f_i$.
Si $f:B\longrightarrow B'\in Mor\,\mathcal{B}$, entonces $GB=G'B$ y $GB'=G'B'$ y $WGf=WG'f$. Como W es fiel, $Gf=G'f$ ∎

9.10. COROLARIO.

Si $(\mathcal{A},U)$ es subcategoría inicialmente densa de $(\mathcal{B},V)$, $G,G':(\mathcal{B},V)\longrightarrow(\mathcal{C},W)$ conservan estructuras iniciales y $G|_{\mathcal{A}}=G'|_{\mathcal{A}}$, entonces $G=G'$.

Son también importantes funtores concretos los llamados extensiones:

9.11. DEFINICIÓN.

Una *extensión* (de la categoría concreta $(\mathcal{A},U)$ sobre X) es una inmersión plena concreta

$$E:(\mathcal{A},U)\longrightarrow(\mathcal{B},V)$$

9.12. <u>TEOREMA</u>. (una caracterización de las extensiones)

Si $E : (\mathcal{A}, U) \longrightarrow (\mathcal{B}, V)$ es un funtor concreto sobre $\mathcal{X}$, son equivalentes las siguientes condiciones:

(a) E es pleno

(b) E es extensión

<u>Demostración</u>:

(a)⇒(b): Por 9.1, E es fiel. Por lo tanto, para demostrar que E es inmersión, basta ver que la función inducida $E: Ob\mathcal{A} \longrightarrow Ob\,\mathcal{B}$ es inyectiva. Sean $A, A' \in Ob\mathcal{A}$ tales que $EA = EA'$. Como $1_{EA} \in hom_{\mathcal{B}}(EA, EA') = hom_{\mathcal{B}}(EA', EA)$ y E es pleno, existen $\mathcal{A}$-morfismos $f: A \longrightarrow A'$ y $g: A' \longrightarrow A$ tales que $Ef = 1_{EA}$ y $Eg = 1_{EA}$. Por consiguiente, $E(g \circ f) = 1_{EA} = E(1_A)$ y como E es fiel, $g \circ f = 1_A$. De igual manera $f \circ g = 1_B$; por lo tanto f es $\mathcal{A}$-isomorfismo y con ello, $\mathcal{A}$-identidad. Por eso, $A = A'$ ∎

9.13. <u>TEOREMA</u>. (una caracterización de las inmersiones concretas).

Si $E : (\mathcal{A}, U) \longrightarrow (\mathcal{B}, V)$ es un funtor concreto, son equivalentes:

(a) E es inmersión

(b) Si $F_1, F_2 : (\mathcal{C}, W) \longrightarrow (\mathcal{A}, U)$ son funtores concretos tales que $EF_1 = EF_2$ entonces $F_1 = F_2$

<u>Demostración</u>:

(a)⇒(b): Sea $C \in Ob\,\mathcal{C}$. Por hipótesis $EF_1(C) = EF_2(C)$. Como E es inyectivo en los objetos, $F_1(C) = F_2(C)$. Si $f \in Mor\,\mathcal{C}$ entonces $F_1 f = F_2 f$ pues $EF_1 f = EF_2 f$ y E es inmersión.

(b) $\Rightarrow$ (a): Basta demostrar que E es inyectivo en los objetos. Sean $A, B \in Ob\,\mathcal{A}$ tales que $EA = EB$. Por lo tanto, $UA = VEA = VEB = UB$. Sea T la categoría terminal con un sólo objeto Ω y un sólo morfismo 1_Ω. Si $W: T \longrightarrow \mathcal{X}$ es el funtor tal que $W(\Omega) = UA = UB$ y $W(1_\Omega) = 1_{UA}$, W es fiel y amnésico. Por lo tanto, (T, W) es categoría sobre $\mathcal{X}$. Sean $F_1, F_2: (T,W) \longrightarrow (\mathcal{A}, U)$ tales que $F_1(\Omega) = A$, $F_2(\Omega) = B$; $F_1(1_\Omega) = 1_A$, $F_2(1_\Omega) = 1_B$. Por lo tanto F_1 y F_2 son funtores y claramente $UF_1 = W = UF_2$. Por lo tanto F_1 y F_2 son concretos. Además $EF_1(\Omega) = EA = EB = EF_2(\Omega)$ y $EF_1(1_\Omega) = EF_2(1_\Omega)$. Por consiguiente $EF_1 = EF_2$. Por (b), $F_1 = F_2$. Entonces $A = F_1(\Omega) = F_2(\Omega) = B$ ∎

9.14. Denotaremos por $\mathcal{CAT}_\mathcal{X}$ a la casicategoría cuyos objetos son las categorías concretas sobre $\mathcal{X}$ y cuyos morfismos son todos los funtores concretos. Esto lo habíamos definido ya en (7.10.1), pero repetimos una vez más que ahora los objetos son categorías concretas sobre $\mathcal{X}$ en el sentido de 8.1. También:

(1) El teorema 9.13 muestra sencillamente que las inmersiones concretas son precisamente los monomorfismos en $\mathcal{CAT}_\mathcal{X}$.

(2) 9.9 implica que todos los funtores concretos inicialmente densos y que conservan estructuras iniciales, son epimorfismos en la subcasicategoría de $\mathcal{CAT}_\mathcal{X}$ cuyos objetos son todas las categorías concretas sobre $\mathcal{X}$ y cuyos morfismos son todos los funtores concretos que conservan estructuras iniciales.

(3) Un resultado sorprendente, obtenido por Herrlich e independientemente y de manera diferente, por Brümmer y Hoffman (ver [7]) es el hecho de que las categorías concretas inicialmente completas sobre $\mathcal{X}$ son precisamente los objetos inyectivos en $\mathcal{CAT}_{\mathcal{X}}$ con respecto a extensiones. Una implicación se demostrará en 14.8 (cap. IV); la otra, aquí (9.16).

9.15. DEFINICIÓN.

Un $\mathcal{CAT}_{\mathcal{X}}$-objeto $(\mathcal{B}, V)$ es llamado inyectivo (con respecto a extensiones) si para toda extensión $E : (\mathcal{A}, U) \longrightarrow (\mathcal{C}, W)$ y todo funtor concreto $F : (\mathcal{A}, U) \longrightarrow (\mathcal{B}, V)$, existe un funtor $\bar{F} : (\mathcal{C}, W) \longrightarrow (\mathcal{A}, U)$ tal que en $\mathcal{CAT}_{\mathcal{X}}$ conmuta:

$$(*) \qquad \begin{tikzcd} (\mathcal{A}, U) \arrow[r, "E"] \arrow[d, "F"'] & (\mathcal{C}, W) \arrow[dl, "\bar{F}"] \\ (\mathcal{B}, V) & \end{tikzcd}$$

9.16. TEOREMA.

Toda categoría concreta sobre $\mathcal{X}$, inicialmente completa, es un $\mathcal{CAT}_{\mathcal{X}}$-objeto inyectivo.

Demostración:

Dados $(\mathcal{B}, V)$, E y F como en 9.15, construiremos un funtor $\bar{F}^{F}_{E} : (\mathcal{C}, W) \longrightarrow (\mathcal{B}, V)$ tal que $\bar{F}^{F}_{E} . E = F$.
Obsérvese con cuidado la técnica de construcción.

Supongamos que $(\mathcal{B},V)$, $E:(\mathcal{A},U)\longrightarrow(\mathcal{C},W)$ y $F:(\mathcal{A},U)\longrightarrow(\mathcal{B},V)$ son como en la definición 9.15. El diagrama siguiente es entonces conmutativo:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[r, "E"] \arrow[d, "F"'] \arrow[dr, "U"] & \mathcal{C} \arrow[d, "W"] \\ \mathcal{B} \arrow[r, "V"'] & \mathcal{X} \end{tikzcd}$$

Para toda $C\in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$, sea $\alpha_C=(C\xrightarrow{c_i}EB_i)_{i\in I_C}$ la fuente de todos los E-morfismos con dominio C. Por lo tanto, $(WC\xrightarrow{Wc_i}WEB_i)_I=(WC\xrightarrow{Wc_i}VFB_i)_I$ es una V-fuente y, dado que $(\mathcal{B},V)$ es inicialmente completa, existe una $\mathcal{B}$-fuente V-inicial $(B_C,(B_C\xrightarrow{\overline{c}_i}FB_i)_I)$ tal que $VB_C=WC$ y para cada $i\in I$, $V\overline{c}_i=Wc_i$. Sabemos que este es el único V-levantamiento óptimo de $(Wc_i)_I$. Se tiene entonces una función

$$\bar{F}:\begin{cases} \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}\longrightarrow \mathrm{Ob}\,\mathcal{B} \\ C\longmapsto B_C \end{cases}$$

Supongamos que $C\xrightarrow{f}C'$ es un $\mathcal{C}$-morfismo. Sean $(B_C\xrightarrow{\overline{c}_i}FB_i)_{I_C}$ y $(B_{C'}\xrightarrow{\overline{c}'_j}FB'_j)_{I_{C'}}$ los V-levantamientos óptimos de $W\alpha_C=(WC\xrightarrow{Wc_i}WEB_i)_{I_C}$ y de $W\alpha_{C'}=(WC'\xrightarrow{Wc'_j}WEB'_j)_{I_{C'}}$, respectivamente. Por lo tanto, $Wf: WC\longrightarrow WC'$ es tal que para todo $j\in I_{C'}$, $V\overline{c}'_j\cdot Wf=Wc'_j\cdot Wf=W(c'_j\cdot f)$. Pero $c'_j\cdot f\in\alpha_C$, así que existe $i_j\in I_C$ tal que $c'_j\cdot f=c_{i_j}$.

Por lo tanto, para cada $j\in I_{C'}$, conmuta el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
VB_c = Wc \arrow[d, "Wf"'] \arrow[dr, "V\bar{e}_{c_j} = We_{c_j}"] & \\
VB_{c'} = Wc' \arrow[r, "V\bar{e}_j'"'] & VFB_i
\end{tikzcd}$$

Esto implica que existe un único $\mathcal{B}$-morfismo $B_c \xrightarrow{\hat{f}} B_{c'}$ tal que $V\hat{f} = Wf$. Así, para cada pareja (c, c') de $\mathcal{C}$-objetos está definida una función

$$\bar{F}_{c,c'} : \begin{cases} \hom_{\mathcal{C}}(c, c') \longrightarrow \hom_{\mathcal{B}}(B_c, B_{c'}) \\ \quad f \longmapsto \hat{f} \end{cases}$$

Con ayuda de la fidelidad de V, es fácil convencerse de que con $\bar{F}$ y $\bar{F}_{c,c'}$ se obtiene un funtor

$$\bar{F}_E^{F} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{B},$$

que por comodidad denotaremos por $\bar{F}$.
$\bar{F} : (\mathcal{C}, W) \longrightarrow (\mathcal{B}, V)$ es claramente un funtor concreto.

Falta demostrar la conmutatividad del diagrama (*):
Sea $A \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}$, $EA \in \mathcal{C}$. Sea $\alpha_{EA} = (EA \xrightarrow{e_i} EB_i)_I$ la fuente de todos los E-morfismos con dominio EA.
Como E es pleno, para cada $i \in I$ existe $a_i : A \longrightarrow B_i$ tal que $Ea_i = e_i$. Sea $(B_{EA} \xrightarrow{\bar{e}_i} FB_i)$ el V-levantamiento óptimo de
$(WEA = UA \xrightarrow{We_i = Ua_i} WEB_i = UB_i)_I$. Por lo tanto, para toda $i \in I$ conmuta el triángulo:

$$\begin{tikzcd}
VFA = WEA \arrow[d, "1_{UA}"'] \arrow[dr, "VFa_i = We_i"] & \\
VB_{EA} = WEA \arrow[r, "V\bar{e}_i"] & VFB_i
\end{tikzcd}$$

Por ser $(\bar{c}_i)_I$ V-final, existe $h: FA \longrightarrow B_{EA}$ $\mathcal{B}$-morfismo tal que $Vh = 1_{UA}$ y para cada $i \in I$, $\bar{c}_i \cdot h = Fa_i$.
Ahora bien, $1_{EA} \in \alpha_{EA}$. Por lo tanto existe $i_0 \in I$ tal que $c_{i_0} = 1_{EA} = Ea_{i_0}$. Pero $E1_A = 1_{EA}$ y E es fiel, así que $a_{i_0} = 1_A$. Por consiguiente,

$$\bar{c}_{i_0} \circ h = Fa_{i_0} = F1_A = 1_{FA}.$$

Por otro lado, $V(h \circ \bar{c}_{i_0}) = Vh . V\bar{c}_{i_0} = 1_{UA} \cdot We_{i_0} = 1_{UA} = V(1_{B_{EA}})$
Como V es fiel, $h \circ \bar{c}_{i_0} = 1_{B_{EA}}$.
Por lo tanto, h es isomorfismo con inverso $\bar{c}_{i_0}$ y, dado que V es amnésico, h es identidad. Concluimos así que $FA = B_{EA} = \bar{F}A$.

Para morfismos la cosa es más sencilla:
Si $A \xrightarrow{f} A' \in \operatorname{Mor} \mathcal{A}$ entonces $\bar{F}Ef$ y Ff son elementos de $\hom_{\mathcal{B}}(FA, FA')$ y $V\bar{F}Ef = WEf = Uf = VFf$. Como V es fiel, $\bar{F}Ef = Ff$ ∎

9.17. <u>DEFINICIÓN</u>.

Sea $E : (\mathcal{A}, U) \longrightarrow (\mathcal{B}, V)$ una extensión.

Se dice que E es una extensión <u>esencial</u> si satisface la siguiente propiedad:
Si G es un funtor concreto tal que $G \cdot E$ es extensión entonces G es también una extensión.

Esta es la definición tradicional de extensión esencial (en Algebra y en Categorías, principalmente). Por ejemplo, en Faith [4] se encuentran las siguientes definiciones:
Sea $\mathcal{C}$ una categoría (Faith lo hace para abelianas) y A un objeto de $\mathcal{C}$.

Entonces:

(1) Una extensión de A es un monomorfismo $A \longrightarrow E$.

(2) La extensión $A \longrightarrow E$ es esencial si cada morfismo $E \longrightarrow B$ es monomorfismo siempre que $A \longrightarrow E \longrightarrow B$ es monomorfismo.

Una extensión esencial $E:(\mathcal{A},U) \longrightarrow (\mathcal{B},V)$ es entonces una extensión esencial plena en $\mathcal{CAT}_X$. Demostraremos en el capítulo IV que una extensión es esencial si y sólo si es inicial y finalmente densa.

9.18. DEFINICIÓN

Una extensión $E:(\mathcal{A},U) \longrightarrow (\mathcal{B},V)$ es propia si no es isomorfismo (es decir, si no es suprayectiva en los objetos).

9.19. TEOREMA

Para toda categoría concreta $(\mathcal{A},U)$ sobre X, se tiene:

(a) $(\mathcal{A},U)$ es inicialmente completa

$$\Downarrow$$

(b) $(\mathcal{A},U)$ es $\mathcal{CAT}_X$-inyectivo

$$\Downarrow$$

(c) Toda extensión $E:(\mathcal{A},U) \longrightarrow (\mathcal{B},V)$ es una sección en $\mathcal{CAT}_X$.

$$\Downarrow$$

(d) $(\mathcal{A},U)$ no tiene extensiones esenciales propias.

Demostración:

(a) $\Rightarrow$ (b) es 9.16. ; (b) $\Rightarrow$ (c) es obvio.

(c) $\Rightarrow$ (d) : Supongamos que $E:(\mathcal{A},U) \longrightarrow (\mathcal{B},V)$ es una extensión esencial de $(\mathcal{A},U)$. Por (c), existe $F:(\mathcal{B},V) \longrightarrow (\mathcal{A},U)$ concreto tal que $FE = 1_{(\mathcal{A},U)}$. Como E es esencial, F es extensión. Por lo tanto, F también tiene inverso izquierdo en $\mathcal{CAT}_X$ (por (c)). Por consiguiente F es Cat_X-isomorfismo. Por lo tanto, E es $\mathcal{CAT}_X$-isomorfismo ∎

En 14.8 mostraremos la equivalencia de estas condiciones.

9.20. <u>NOTA IMPORTANTE</u>.

Observe que las definiciones principales dadas en los tres últimos parágrafos (§7, §8 y §9), es decir 7.4, 7.14, 8.1, 8.5, 8.8, 8.9, 8.16, 8.20, 9.2, 9.11, 9.15, 9.17 y las y las propiedades de los objetos en ellas definidos y que demostramos en, por ejemplo, 7.6, 8.6, 8.12, 8.17, 8.19, 8.22, 8.24, 9.1, 9.3, 9.4, 9.5, 9.9, 9.10, 9.12, 9.13, 9.16, 9.19 (son los que nos interesan más en este trabajo), <u>pueden ser expresadas y demostradas para casi-categorías</u>, exactamente de la misma forma que como lo hicimos con categorías. Esto se debe a que en su formación sólo intervienen nociones asociadas con categorías y que pueden definirse perfectamente para casicategorías (monomorfismos, epimorfismos, isomorfismos, fuentes, pozos, funtores, reflexiones, etc.. Ver la introducción). Hay que cuidar estos dos pequeños detalles:

(a) La definición 9.15, para que se pueda extender no debe hacer referencia a $\mathcal{CAT}_{\mathfrak{X}}$. Piénsese simplemente como la definición de una categoría (o de una casicategoría) concreta inyectiva (y no de un $\mathcal{CAT}_{\mathfrak{X}}$-objeto inyectivo).

El segundo detalle es igual:

(b) En el teorema 9.19, en vez de expresar la propiedad (c) por medio del término "$\mathcal{CAT}_{\mathfrak{X}}$-sección", úsese "funtor concreto con inverso izquierdo concreto".

Tenemos en cuenta estos detalles, pues no podemos extender $\mathcal{CAT}_{\mathfrak{X}}$. Hablar de una casicategoría de todas las casicategorías concretas sobre una casicategoría $\mathfrak{X}$, sería tanto como hablar de la casicategoría de todas las casicategorías, lo que nos conduciría a paradojas tipo Russell, como ya mencionamos en la introducción.

Con las anteriores observaciones en mente, cada vez que sea necesario, usaremos una definición o una proposición de las mencionadas, en su versión para casicategorías. Este "truco" no es necesario pero sí muy cómodo, principalmente en la siguiente sección (tendrán especial valor las versiones para casicategorías de 8.17 y 9.5). Por ejemplo, en 10.18 demostramos que si $\mathcal{A}^2$ es legítima entonces $(\mathcal{A}^2, U^2)$ es inicialmente completa: Si $\mathcal{A}^1$ es legítima, será un corolario directo de 8.17 (una vez demostrado que $\mathcal{A}^2$ es inicialmente cerrada en $\mathcal{A}^1$). Si $\mathcal{A}^1$ no es legítima, no podrá considerarse como una categoría o como una extensión completa de $(\mathcal{A}, U)$ (véanse las definiciones en §10), pero todas sus características primordiales (como la de tener la propiedad de levantamientos óptimos que caracteriza a las inicialmente completas se siguen cumpliendo, de modo que si se acepta 8.17 para casicategorías, su aplicación produce una demostración casi instantánea de 10.18; si no se acepta 8.17 para casicategorías, 10.18 puede demostrarse de todos modos y sin usar propiedades explícitas de $\mathcal{A}$ que no estén definidas para casicategorías (del mismo modo en que fue posible modificar 9.19 y 9.15). Esta es una situación típica entre los resultados de §10, que probablemente tenga sus raíces en los siguientes hechos:

Dada una categoría concreta sobre X, $(\mathcal{A}, U)$, construiremos en §10 extensiones inicialmente densas de $(\mathcal{A}, U)$, $E : (\mathcal{A}, U) \longrightarrow (\mathcal{B}, V)$, donde $(\mathcal{B}, V)$, legítima o no, es "inicialmente completa" (es decir, satisface la condición de levantamientos óptimos). Cuando sí son legítimas, estas extensiones son las llamadas compleciones iniciales (ver (10.1(2)). Si $\mathcal{A}$ es categoría, construcciones de este tipo siempre se pueden realizar (como lo haremos), aunque en muchos casos no den lugar a categorías legítimas. Supóngase ahora que se tiene el concepto de compleción inicial para casicategorías y que hacemos las construcciones fundamentales para una casicategoría $(\mathcal{A}, U)$. Nada nos asegura que en la construcción de una de estas "compleciones" $E : (\mathcal{A}, U) \longrightarrow (\mathcal{B}, V)$, $\mathcal{B}$ no es ¡el "conglomerado" de todos los conglomerados (o algo similar)!, así como nada nos asegura que las construcciones hechas para categorías concretas no conduzcan al conglomerado de todas las clases. La diferencia es que no existe el conglomerado de todos los conglomerados en el sistema fundamental que adoptamos, el cual, apesar de todo, no necesita ser extendido por el momento pues, como indicamos en la introducción, es de interés primordial desarrollar la teoría de las categorías usuales (legítimas, si se prefiere). Por eso, para nosotros es más importante investigar las condiciones que deben satisfacer las categorías concretas para tener compleciones legítimas y hallar propiedades de éstas, que remover los cimientos para "acomodarlos a nuestros intereses". Recuérdese además que la extensión de los fundamentos no resuelve el problema que acabamos de exponer, pues surgen otros similares o más complicados. Para nuestro trabajo, la adición del concepto de cartel es inconducente.

El parágrafo siguiente está impregnado con el espíritu de las ideas expuestas, y su lectura debe aclarar nuestros razonamientos

§10. CONSTRUCCIONES BÁSICAS.

$\mathcal{X}$ seguirá siendo una categoría fija. Supondremos también, a lo largo de esta sección, que $(\mathcal{A}, U)$ es una categoría concreta sobre $\mathcal{X}$. Construiremos extensiones y compleciónes iniciales y finales para $(\mathcal{A}, U)$.

10.1 DEFINICIONES.

(1) Una extensión inicialmente completa (resp. finalmente completa) de $(\mathcal{A}, U)$ es una extensión

$$E : (\mathcal{A}, U) \longrightarrow (\mathcal{B}, V),$$

donde $(\mathcal{B}, V)$ es inicialmente (resp. finalmente) completa.

(2) Una compleción inicial (resp. compleción final) de $(\mathcal{A}, U)$ es una extensión inicialmente (resp. finalmente) completa $E : (\mathcal{A}, U) \longrightarrow (\mathcal{B}, V)$ que es también inicialmente densa (resp. finalmente densa)

10.2. Una extensión es inicialmente completa si y sólo si es finalmente completa (cfr. 8.12)

10.3 NOTACIÓN.

Sea $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{X}$. Entonces:

(1) Ξ_X denotará la clase de todos los morfismos estructurados (U-morfismos. Cfr. 8.8) con dominio X.

(2) Σ_X denotará la clase de todos los morfismos coestructurados (U-comorfismos) con codominio X.

10.4. NOTAS:

(1) Si $\mathcal{A}$ es una categoría pequeña, Ξ_X y Σ_X son conjuntos. En efecto, $\Xi_X \subset \bigcup_{A \in \mathrm{Ob}\mathcal{A}} (\hom_{\mathcal{X}}(X, UA) \times A)$.

(2) Si $\xi = \{(a_i, A_i)\}_I$ es una clase de morfismos estructurados, es decir, si $\xi \subset \Xi_X$, entonces la pareja (X, ξ) puede verse como una U-fuente

$(\mathbb{X}, (\mathbb{X} \xrightarrow{a_i} UA_i)_I)$ indicada por la clase I. Formalmente, sin embargo, no para toda U-fuente $(\mathbb{X}, \xi)$ con dominio $\mathbb{X}$ se puede pensar ξ como una subclase de $\Xi_{\mathbb{X}}$. Por ejemplo una fuente del estilo

$$\begin{tikzcd} & UA \\ \mathbb{X} \arrow[ur, "f"] \arrow[dr, "f"'] & \\ & UA \end{tikzcd} \qquad (\text{con } A \in \operatorname{Ob} \mathcal{A})$$

es una U-fuente pero no es "sub clase de $\Xi_{\mathbb{X}}$" (no es la misma fuente que $(\mathbb{X}, \xi = \{(f, A)\})$).
Esto por fortuna no representa dificultad alguna. En lo que sigue trabajaremos casi solamente con los subconjuntos de $\Xi_{\mathbb{X}}$ y bastaría con identificar los dos conceptos: U-fuente con dominio $\mathbb{X}$ y "subclase de $\Xi_{\mathbb{X}}$". Con más precisión: en una U-fuente cualquiera $(\mathbb{X}, \xi = (\mathbb{X} \xrightarrow{f_i} UA_i)_I)$, bastaría con identificar la familia ξ con su imagen. Herrlich lo hace en [8] y nosotros lo haremos también algunas veces en la notación, pero como aparecerán tanto U-fuentes como clases de morfismos estructurados en ciertas demostraciones, optaremos por diferenciarlas y dar la siguiente definición:

10.5. <u>DEFINICIÓN</u>.

Sea $\mathbb{X} \in \operatorname{Ob} \mathcal{X}$.

(1) Una <u>fuente</u> <u>estructurada</u> <u>con</u> <u>dominio</u> $\mathbb{X}$ es una pareja $(\mathbb{X}, \xi)$, donde $\xi \subset \Xi_{\mathbb{X}}$

(2) Un <u>pozo</u> <u>estructurado</u> <u>con</u> <u>codominio</u> $\underline{\mathbb{X}}$ es una pareja $(\eta, \mathbb{X})$, donde $\eta \subset \Sigma_{\mathbb{X}}$.

10.6 <u>DEFINICIÓN</u>.

Un <u>mapeo</u> <u>entre</u> <u>fuentes</u> (estructuradas) es una terna (ξ, f, ξ'), donde $f: \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{X}'$ es un $\mathcal{X}$-morfismo y se cumplen además las siguientes condiciones:

(i) $(\mathbb{X}, \xi)$ y $(\mathbb{X}', \xi')$ son fuentes estructuradas.

(ii) Para todo $(a, A) \in \xi'$, $(a \cdot f, A) \in \xi$.

Dualmente, un mapeo entre pozos es una terna (ξ, f, ξ'), donde $f: \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{X}' \in \operatorname{Mor} \mathcal{X}$ y además:

(i)' $(\xi, \mathbb{X})$ y $(\xi', \mathbb{X}')$ son pozos estructurados

(ii)' para todo $(A, a) \in \xi$, $(A, f \cdot a) \in \xi'$.

10.7 NOTACIÓN. OBSERVACIONES.

(1) $\mathcal{O}_1$ denotará al conglomerado de todas las fuentes estructuradas.

(2) $\mathcal{M}_1$ denotará al conglomerado de todos los mapeos entre fuentes.

(3) Escribimos $(\xi, f, \xi') : (\mathbb{X}, \xi) \longrightarrow (\mathbb{X}', \xi')$ o simplemente $f: (\mathbb{X}, \xi) \longrightarrow (\mathbb{X}', \xi')$ para indicar que $(\xi, f, \xi') \in \mathcal{M}_1$

(4) Dada $f: (\mathbb{X}, \xi) \longrightarrow (\mathbb{X}', \xi')$, $(\mathbb{X}, \xi)$ es su dominio y $(\mathbb{X}', \xi')$ su codominio. Si también $g: (\mathbb{X}', \xi') \longrightarrow (\mathbb{X}'', \xi'')$, definiremos la composición como:

$$(\xi', g, \xi'') \circ (\xi, f, \xi') = (\xi, g \cdot f, \xi'')$$

Es fácil ver que $(\xi, g \cdot f, \xi'') \in \mathcal{M}_1$. Además, para cada $(\mathbb{X}, \xi) \in \mathcal{O}_1$, $(\xi, 1_{\mathbb{X}}, \xi) \in \mathcal{M}_1$.

En fin, $(\mathcal{O}, \mathcal{M}_1, \operatorname{dom}, \operatorname{cod}, \circ)$ forman una casicategoría.

$E': (\mathcal{A}, U) \longrightarrow (\mathcal{A}', U')$

10.8 DEFINICIÓN.

(1) $\mathcal{A}'$ es la casicategoría cuyos objetos son todas las fuentes estructuradas y cuyos morfismos son todos los mapeos entre fuentes, es decir,

$$\mathcal{A}_1 = (\mathcal{O}_1, \mathcal{M}_1, dom, cod, \circ)$$

(2) El funtor que olvida de $\mathcal{A}'$ es el funtor (entre casi categorías) $U': \mathcal{A}' \longrightarrow \mathcal{X}$ tal que para cada $(X, \xi) \in \mathcal{O}_1$, $U'(X,\xi) = X$ y para cada $(\xi, f, \xi') \in \mathcal{M}_1$, $U'(\xi, f, \xi') = f$.

10.9 TEOREMA.

Si $\mathcal{A}'$ es categoría (es decir, si $\mathcal{A}'$ es legítima), entonces $(\mathcal{A}', U')$ es una categoría concreta inicialmente completa sobre $\mathcal{X}$.

La demostración la dejaremos al lector. Es muy simple si se tiene en cuenta el siguiente lema:

10.10 LEMA.

Supongamos que $\mathcal{A}'$ es legítima. Entonces

(1) $\left((X,\xi) \xrightarrow{(\xi, f_i, \xi_i)} (X_i, \xi_i)\right)_I$ es $\mathcal{A}'$-fuente U'-inicial

$$\Longleftrightarrow \xi = \{(a \circ f_i, A) \mid (a, A) \in \xi_i,\ i \in I\} =$$
$$= \{(a, A) \in \Xi_X \mid \text{existen } i \in I \text{ y } (b, A) \in \xi_i \text{ tales que } (a,A) = (b \circ f_i, A)\}$$ [2]

(2) El sumidero* $\left((X_i, \xi_i) \xrightarrow{(\xi_i, f_i, \xi)} (X, \xi)\right)_I$ es U'-final

$$\Longleftrightarrow \xi = \{(a, A) \in \Xi_X \mid \text{para toda } i \in I,\ (a \circ f_i, A) \in \xi_i\}$$ [3]

* pozo

Para resultados posteriores, será de gran utilidad el:

10.11 LEMA.

Si $(\mathcal{B}, V)$ es una subcategoría plena inicialmente cerrada en $(\mathcal{A}', U')$ (y $\mathcal{A}'$ es legítima), entonces:

(1) $((X,\xi) \xrightarrow{(\xi, f_i, \xi_i)} (X_i, \xi_i))$ es $\mathcal{B}$-fuente V-inicial $\Longleftrightarrow$ es U'-inicial.

(2) $(((X_i,\xi_i) \xrightarrow{(\xi_i, f_i, \xi)} (X,\xi))_I$ es $\mathcal{B}$-pozo V-final $\Longleftrightarrow$ es U'-final.

(recuérdese 9.4).

10.12 DEFINICIÓN. PROPOSICIÓN:

Para cada $A \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}$, sea

$$(10.12.1) \qquad \xi_A = \{(Ua, B) \in \Xi_{UA} \mid A \xrightarrow{a} B \in \mathrm{Mor}\,\mathcal{A}\}.$$

Para todo $f \in \hom_{\mathcal{A}}(A,B)$,

$$(\xi_A, Uf, \xi_B) \in \hom_{\mathcal{A}'}((UA, \xi_A), (UB, \xi_B))$$

Esto define un funtor

$$(10.12.2) \qquad E' : \begin{cases} \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}' \\ A \longmapsto (UA, \xi_A) \\ A \xrightarrow{f} B \longmapsto (\xi_A, Uf, \xi_B) \end{cases}$$

tal que $U' \cdot E' = U$.

10.13. TEOREMA

Si $\mathcal{A}'$ es legítima[4] entonces $E' : (\mathcal{A}, U) \longrightarrow (\mathcal{A}', U')$ es una extensión inicialmente completa de $(\mathcal{A}, U)$ que conserva estructuras finales pero no necesariamente conserva estructuras iniciales y en general no es inicial o finalmente denso.

<u>Demostración</u>:

9.12 implica que E' es extensión. Por lo tanto, por 10.9, $E' : (\mathcal{A}, U) \longrightarrow (\mathcal{A}', U')$ es extensión inicialmente completa.

Para demostrar que E' conserva estructuras finales, consideremos una $\mathcal{A}$-pozo U-final $(A_i \xrightarrow{f_i} A)_I$. Sea $\xi = \{(a, B) \in \Xi_{\mathcal{X}} \mid$ para toda $i \in I$, $(a \cdot Uf_i, A) \in \xi_{A_i}\}$. Demostraremos que $\xi = \xi_A$, de lo cual, en vista de 10.11 (2), se concluirá que el $\mathcal{A}'$-pozo

$$((\xi_{A_i}, Uf_i, \xi_A) : E'(A_i) \longrightarrow E'(A))_I$$

es U'-final.

Sea $(a, b) \in \xi$. Para cada $i \in I$, $(a \cdot Uf_i, B) \in \xi_{A_i}$ y por lo tanto existe un $\mathcal{A}$-morfismo $A_i \xrightarrow{a_i} B$ tal que $a \cdot Uf_i = Ua_i$. Como en $\mathcal{X}$ conmuta el diagrama

$$\begin{tikzcd}
UA_i \arrow[r, "Uf_i"] \arrow[dr, "Ua_i"'] & UA \arrow[d, "a"] \\
 & UB
\end{tikzcd}$$

y $(f_i)_I$ es U-final, existe un $\mathcal{A}$-morfismo $\bar{a} : A \longrightarrow B$ tal que $U\bar{a} = a$. Por lo tanto $(a, B) = (U\bar{a}, B) \in \xi_A$.

Claramente $\xi_A \subset \xi$ $\quad \therefore \xi = \xi_A$.

En la próxima sección se dará un ejemplo en el que E' no conserva estructuras iniciales ni es inicial ni finalmente denso. ∎

$E^2 : (\mathcal{A}, U) \longrightarrow (\mathcal{A}^2, U^2)$

10.14 DEFINICIÓN.

Sea $X \in \operatorname{Ob} \mathcal{X}$. Entonces:

(1) Una fuente débilmente cerrada con dominio X es un $\mathcal{A}'$-objeto (X, ξ) (es decir, una fuente estructurada con dominio X) que satisface la siguiente condición:
Si $(a, A) \in \xi$ y $A \xrightarrow{b} B$ es un $\mathcal{A}$-morfismo, entonces $(Ub \cdot a, B) \in \xi$.

(2) Un pozo débilmente cerrado con codominio X, es un pozo estructurado (η, X) con codominio X tal que:
Si $(A, a) \in \eta$ y $B \xrightarrow{b} A$ es un $\mathcal{A}$-morfismo, entonces $(B, a \cdot Ub) \in \eta$.

10.15. DEFINICIONES. OBSERVACIÓN.

(1) $\mathcal{A}^2$ es la subcasicategoría plena de $\mathcal{A}'$ cuyos objetos son todas las fuentes débilmente cerradas.

(2) $U^2 = U'\big|_{\mathcal{A}^2} : \mathcal{A}^2 \longrightarrow \mathcal{X}$

(3) Si $\mathcal{A}^2$ es legítima[5], $(\mathcal{A}^2, U^2)$ es una categoría concreta sobre $\mathcal{X}$.

10.16 PROPOSICIÓN.

Si $\mathcal{A}'$ es legítima, entonces $(\mathcal{A}^2, U^2)$ es subcategoría plena inicial y finalmente cerrada de $(\mathcal{A}', U')$.

Demostración.

Sea $((X, \xi) \xrightarrow{f_i} (X_i, \xi_i))_I$ una $\mathcal{A}'$-fuente U' inicial y supongamos que para toda $i \in I$, $(X_i, \xi_i) \in \operatorname{Ob} \mathcal{A}^2$.

Por lo tanto (10.10) $\xi = \{(a \cdot f_i, A) \mid (a, A) \in \xi_i, i \in I\}$
Sea $(a, A) \in \xi$ y sea $A \xrightarrow{f} B \in \mathrm{Mor}\,\mathcal{A}$. Entonces existen $i \in I$ y $(b, A) \in \xi_i$ tales que $(a, A) = (b \cdot f_i, A)$. Sea $i \in I$. Como $(b, A) \in \xi_i$ y $(X_i, \xi_i) \in \mathcal{A}^2$, $(Uf \cdot b, B) \in \xi_i$.
Por lo tanto, por definición de ξ, $(Uf \cdot a, B) = (Uf \cdot b \cdot f_i, B) \in \xi$.
Esto demuestra que $(X, \xi) \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}^2$ y que $(\mathcal{A}^2, U^2)$ es inicialmente cerrada en $(\mathcal{A}^1, U^1)$. La otra afirmación es análoga. ∎

10.17 COROLARIO 1.

Si $\mathcal{A}^1$ es legítima, $(\mathcal{A}^2, U^2)$ es simultáneamente reflexiva y correflexiva sobre $\mathcal{X}$ en $(\mathcal{A}^1, U^1)$

Demostración.

Se sigue de 8.24

10.18. COROLARIO 2.

Si $\mathcal{A}^2$ es legítima, entonces $(\mathcal{A}^2, U^2)$ es inicialmente completa.

Demostración:

Aplíquese 10.9 y 8.17 (tomando en cuenta la nota 9.20)

10.19 OBSERVACIÓN.

Para cada $A \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}$, $(UA, \xi_A) \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}^2$.

10.20. DEFINICIÓN:

Sea $E^2 : (\mathcal{A}, U) \longrightarrow (\mathcal{A}^2, U^2)$ el funtor inducido por E^1; es decir, $E^2 = E^1 \Big|_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}^2}$

10.21 TEOREMA.

Si $\mathcal{A}^2$ es legítima entonces
$E^2 : (\mathcal{A}, U) \longrightarrow (\mathcal{A}^2, U^2)$ es una compleción inicial que conserva estructuras finales. No necesariamente es compleción final ni conserva estructuras iniciales.

Demostración:

Por ser $E^2 = E^1|_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}^2}$, E^2 es extensión. Por 10.18, es extensión inicialmente completa, mientras que por 10.13 y 9.5, conserva estructuras finales. Daremos ejemplos en §11 que demostrarán que no necesariamente es compleción final ni conserva estructuras iniciales. Falta demostrar que es inicialmente denso.

E^2 es inicialmente denso:

Sea $(\mathbb{X}, \xi) \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}^2$. Para todo $A \in \mathcal{A}$, $E^2(A) = (UA, \xi_A)$ y para todo $(a, A) \in \xi$, $a : \mathbb{X} \longrightarrow UA \in \mathrm{Mor}\,X$. Es fácil ver que $((\mathbb{X}, \xi) \xrightarrow{\ a\ } (UA, \xi_A))_{(a,A)\in\xi}$ es una $\mathcal{A}^2$-fuente. y que $\xi = \{(b, B) \mid$ existe $(a, A) \in \xi$ y existe $(c, B) \in \xi_A$ tal que $(b, B) = (c \cdot a, B)\}$.

Entonces, por 10.11 y 9.4, $((\mathbb{X}, \xi) \xrightarrow{\ a\ } (UA, \xi_A) = E^2(A))_{(a,A)\in\xi}$ es E^2-fuente U^2-inicial ∎

$E^3 : (\mathcal{A}, U) \longrightarrow (\mathcal{A}^3, U^3)$

10.22. DEFINICIÓN.

Sea $\mathbb{X} \in \mathrm{Ob}\,X$. Una fuente semicerrada con dominio $\mathbb{X}$ es una fuente estructurada $(\mathbb{X}, \xi)$ con dominio $\mathbb{X}$ que satisface la siguiente condición:

Si $(a, A) \in \Xi_{\mathbb{X}}$ y $(A \xrightarrow{f_i} A_i)_I$ es una fuente

U-inicial en $\mathcal{A}$ tal que para cada $i \in I$, $(Uf_i \cdot a, A_i) \in \xi$, entonces $(a, A) \in \xi$.

Dualmente se define un <u>pozo</u> <u>semicerrado</u> con codominio $\mathbb{X}$.

10.23. <u>DEFINICIÓN. OBSERVACIÓN</u>.

(1) $\mathcal{A}^3$ es la subcasicategoría plena de $\mathcal{A}^2$ cuyos objetos son todos los objetos son todos los objetos de $\mathcal{A}^2$ que son alavez fuentes semicerradas.

(2) $U^3 = U^2|_{\mathcal{A}^3}$

(3) Si $\mathcal{A}^3$ es legítima, $(\mathcal{A}^3, U^3)$ es una categoría concreta sobre X.

10.24. <u>PROPOSICIÓN</u>.

Si $\mathcal{A}^2$ es legítima, entonces $(\mathcal{A}^3, U^3)$ es subcategoría plena finalmente cerrada en $(\mathcal{A}^2, U^2)$.

<u>Demostración.</u>

Sea $((\mathbb{X}_i, \xi_i) \xrightarrow{(\xi_i, f_i, \xi)} (\mathbb{X}, \xi))_I$ un $\mathcal{A}^2$-sumidero U^2-final tal que para toda $i \in I$, $(\mathbb{X}_i, \xi_i) \in \mathrm{Ob}\, \mathcal{A}^3$. Como $(\mathcal{A}^2, U^2)$ es finalmente cerrada en $(\mathcal{A}^1, U^1)$, por 10.11 y 10.10,

$$\xi = \{(a, A) \mid \text{para cada } i \in I,\ (a \cdot f_i, A) \in \xi_i\}$$

Supongamos que $(a, A) \in \Xi_{\mathbb{X}}$ y que $(A \xrightarrow{h_j} A_j)_J$ es una fuente U-inicial tal que para toda $i \in I$, $(Uh_j \cdot a, A_j) \in \xi$. Sea $i \in I$. Como $(\xi_i, f_i, \xi) \in \mathcal{M}_1$, $(Uh_i \cdot a \cdot f_i, A_i) \in \xi_i$. Por lo tanto, para toda $j \in J$, $(Uh_j \cdot (a \cdot f_i), A_j) \in \xi_i$, lo que implica que $(a \cdot f_i, A) \in \xi_i$ (pues $(\mathbb{X}_i, \xi_i) \in \mathrm{Ob}\, \mathcal{A}^3$). Como esto es para cada $i \in I$, $(a, A) \in \xi$.

Por lo tanto $(\mathbb{X}, \xi) \in \mathrm{Ob}\, \mathcal{A}^3$ ∎

10.25 COROLARIO 1.

Si $\mathcal{A}^2$ es legítima, $(\mathcal{A}^3, U^3)$ es subcategoría correflexiva de $(\mathcal{A}^2, U^2)$

Demostración.

8.24

10.26. COROLARIO 2.

Si $\mathcal{A}^3$ es legítima, entonces $(\mathcal{A}^3, U^3)$ es inicialmente completa.

10.27. OBSERVACIÓN.

Para cada $A \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}$, $(UA, \xi_A) \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}^3$

10.28. DEFINICIÓN.

Sea $E^3 : (\mathcal{A}, U) \longrightarrow (\mathcal{A}^3, U^3)$ el funtor concreto inducido por E^2 : $E^3 = E^2\Big|_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}^3}$

10.29 TEOREMA.

Si $\mathcal{A}^3$ es legítima entonces $E^3 : (\mathcal{A}, U) \longrightarrow (\mathcal{A}^3, U^3)$ es una compleción inicial que conserva estructuras iniciales y finales pero no necesariamente es compleción final.

Demostración.

Por 10.26, 10.21 y 9.5, E^3 es una compleción inicial que conserva estructuras finales. Demostremos que también conserva iniciales:

Sea $(A \xrightarrow{f_i} A_i)_I$ una $\mathcal{A}$-fuente U-inicial.

Supongamos que $((X, \delta) \xrightarrow{g_i} (UA_i, \xi_{A_i}))_I$ es $\mathcal{A}^3$-fuente y que $f : U^3(X, \delta) = X \longrightarrow U^3(UA, \xi_A) = UA$ es un

$\mathcal{X}$-morfismo tal que para toda $i \in I$, conmuta:

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{X} \arrow[d, "f"'] \arrow[rr, "g_i = U^3(\delta, g_i, \xi_{A_i})"] & & UA_i = U^3(UA_i, \xi_{A_i}) \\
UA \arrow[urr, "Uf_i = U^3(\xi_A, Uf_i, \xi_{A_i})"'] & &
\end{tikzcd}$$

Probaremos que $(\delta, f, \xi_A) \in \operatorname{Ob} \mathcal{A}^3$ (es decir, es un mapeo entre fuentes): Sea $(Ua, B) \in \xi_A$, con $A \xrightarrow{a} B \in \operatorname{Mor}\mathcal{A}$. Para cada $i \in I$, $(Uf_i \cdot f, A_i) = (g_i, A_i) = (1_{UA_i} \cdot g_i, A_i) \in \delta$, pues $(1_{UA_i}, A_i) = (U 1_{A_i}, A_i) \in \xi_{A_i}$.
Por lo tanto, como $(A \xrightarrow{f_i} A_i)_I$ es U-inicial y $(\mathfrak{X}, \delta) \in \operatorname{Ob} \mathcal{A}^3$, resulta $(f, A) \in \delta$. Como además $(\mathfrak{X}, \delta) \in \operatorname{Ob} \mathcal{A}^2$ y $A \xrightarrow{a} B \in \operatorname{Mor}\mathcal{A}$, $(Ua \cdot f, B) \in \delta$. Por lo tanto, $(\delta, f, \xi_A) \in \operatorname{Mor} \mathcal{A}'$.

En la siguiente sección se dará un ejemplo en el que E^3 no es finalmente denso ∎

Si $\mathcal{A}^3$ es legítima, por 10.24, 10.16, 10.11 y 10.10 se sabe que un $\mathcal{A}^3$-pozo $((\mathfrak{X}_i, \xi_i) \xrightarrow{f_i} (\mathfrak{X}, \xi))_I$ es U'-final si y sólo si $\xi = \{(a, A) \in \Xi_{\mathfrak{X}} \mid$ para todo $i \in I, (a \cdot f_i, A) \in \xi_i\}$. Para fuentes no es tan sencillo. (En la sección 11, se verá en un ejemplo que $\mathcal{A}^3$ no necesariamente es inicialmente cerrada en $\mathcal{A}^2$). Sin embargo, la siguiente caracterización de las fuentes U^3-iniciales es útil y muy fácil de probar.

10.30. <u>PROPOSICIÓN</u>.

Supongamos que $\mathcal{A}^3$ es legítima. Entonces la $((\mathfrak{X}, \xi) \xrightarrow{(\xi, f_i, \xi_i)} (\mathfrak{X}_i, \xi_i))$ ~~es~~ $\mathcal{A}^3$-fuente, es U^3-inicial si y sólo si ξ es la subclase más pequeña de $\Xi_{\mathfrak{X}}$ que satisface las siguientes condiciones :

(i) para todo $i \in I$, (ξ, f_i, ξ_i) es un mapeo entre fuentes

(ii) $(\mathbb{X}, \xi)$ es fuente débilmente cerrada

(iii) $(\mathbb{X}, \xi)$ es fuente semicerrada.

$$\underline{E^4 : (\mathcal{A}, U) \longrightarrow (\mathcal{A}^4, U^4)}.$$

10.31. DEFINICIONES.

(1) Para toda fuente estructurada $(\mathbb{X}, \xi)$, su pozo opuesto $(\mathbb{X}, \xi)^{op}$ es un pozo estructurado $(\eta, \mathbb{X})$ que consta precisamente de todos los morfismo coestructurados $UB \xrightarrow{b} \mathbb{X}$ con la propiedad de que para todo $\mathbb{X} \xrightarrow{a} UA$ en ξ, existe un $\mathcal{A}$-morfismo $B \xrightarrow{f} A$ tal que $Uf = a \cdot b$

(2) En forma análoga, para pozos estructurados $(\eta, \mathbb{X})$ podemos definir la fuente opuesta $(\eta, \mathbb{X})^{op}$.

(3) Una fuente cerrada con dominio $\mathbb{X}$ es una fuente estructurada $(\mathbb{X}, \xi)$ con dominio $\mathbb{X}$, tal que $(\mathbb{X}, \xi)^{op\,op} = (\mathbb{X}, \xi)$

(4) Un pozo cerrado con codominio $\mathbb{X}$ es un pozo estructurado $(\eta, \mathbb{X})$ con codominio $\mathbb{X}$, tal que
$$(\eta, \mathbb{X})^{op\,op} = (\eta, \mathbb{X}).$$

10.32. DEFINICIÓN. OBSERVACIÓN.

(1) $\mathcal{A}^4$ es la subcategoría plena de $\mathcal{A}'$ cuyos objetos son todas las fuentes cerradas

(2) $U^4 = U'|_{\mathcal{A}^4}$

(3) Si $\mathcal{A}^4$ es legítima, $(\mathcal{A}^4, U^4)$ es una categoría concreta sobre $\mathcal{X}$.

10.33. OBSERVACIÓN.

Toda fuente cerrada es débilmente cerrada y semicerrada. Este hecho, que no demostraremos aquí, implica que $(\mathfrak{A}^4, U^4)$ es subcategoría plena de $(\mathfrak{A}^3, U^3)$ (o subcasi-categoría).

10.34. PROPOSICIÓN.

Si $\mathfrak{A}^3$ es legítima, entonces $(\mathfrak{A}^4, U^4)$ es subcategoría plena finalmente cerrada en $(\mathfrak{A}^3, U^3)$.

Demostración.

Sea $((\mathfrak{X}_i, \xi_i) \xrightarrow{f_i} (\mathfrak{X}, \xi))_I$ un $\mathfrak{A}^3$-pozo, U^3-final tal que para todo $i \in I$, $(\mathfrak{X}_i, \xi_i) \in \mathrm{Ob}\,\mathfrak{A}^4$. Por la observación hecha después de 10.29, $\xi = \{(a, A) \mid \text{para todo } i \in I,\ (a \cdot f_i, A) \in \xi_i\}$.

Por definición,

$(\mathfrak{X}, \xi)^{op} = \{(B, b) \in \Sigma_{\mathfrak{X}} \mid \text{para todo } (a, A) \in \xi, \text{ existe } B \xrightarrow{f} A \text{ tal que } Uf = a \cdot b\}$

$(\mathfrak{X}, \xi)^{op\,op} = \{(a, A) \in \Xi_{\mathfrak{X}} \mid \text{para todo } (B, b) \in (\mathfrak{X}, \xi)^{op*}, \text{ existe } B \xrightarrow{f} A \text{ tal que } Uf = a \cdot b\}$

Queremos demostrar que $\xi = (\mathfrak{X}, \xi)^{op\,op}$. Sean $\eta = (\mathfrak{X}, \xi)^{op}$ y $\xi' = (\mathfrak{X}, \xi)^{op\,op}$. Claramente $\xi \subset \xi'$. Supongamos que $(a, A) \in \xi'$. Sea $i \in I$. Queremos ver que $(a \cdot f_i, A) \in \xi_i$. Pero $(\mathfrak{X}_i, \xi_i) \in \mathrm{Ob}\,\mathfrak{A}^4$ y por lo tanto, $\xi_i = (\mathfrak{X}_i, \xi_i)^{op\,op}$. Si $\eta_i = (\mathfrak{X}_i, \xi_i)^{op}$, ξ_i es, explícitamente,

$\{(c, C) \in \Xi_{\mathfrak{X}_i} \mid \text{para todo } (B, b) \in \eta_i, \text{ existe } B \xrightarrow{f} C \text{ tal que } Uf = c \cdot b\}$.

Sea $(B, b) \in \eta_i$. Si $(c, C) \in \xi$, $(c \cdot f_i, C) \in \xi_i$ y como $(B, b) \in \eta_i$, existe $B \xrightarrow{f} C$ tal que $Uf = (c \cdot f_i) \cdot b = c \cdot (f_i \cdot b)$. Por lo tanto, $(B, f_i \cdot b) \in \eta$. Como $(a, A) \in \xi'$, existe $g : B \longrightarrow A$ tal que $Ug = a \cdot (f_i \cdot b) = (a \cdot f_i) \cdot b$. Por lo tanto, $(a \cdot f_i, A) \in \xi_i$ ∎

* por comodidad se hace este abuso de notación. Formalmente es $(B, b) \in \eta$, donde $(\eta, \mathfrak{X}) = (\mathfrak{X}, \xi)^{op}$

10.35 <u>COROLARIO 1</u>

Si $\mathcal{A}^3$ es legítima, $(\mathcal{A}^4, U^4)$ es correflexiva en $(\mathcal{A}^3, U^3)$

10.36. <u>COROLARIO 2</u>.

Si $\mathcal{A}^4$ es legítima, $(\mathcal{A}^4, U^4)$ es inicialmente completa

10.37. <u>OBSERVACIÓN</u>.

Para cada $A \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}$, $(UA, \check{\xi}_A) \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}^4$

10.38. <u>DEFINICIÓN</u>.

$$E^4 = E^3\Big|_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}^4} : (\mathcal{A}, U) \longrightarrow (\mathcal{A}^4, U^4)$$

10.39. <u>TEOREMA</u>.

Si $\mathcal{A}^4$ es legítima, entonces $E^4 : (\mathcal{A}, U) \longrightarrow (\mathcal{A}^4, U^4)$ es simultáneamente una compleción inicial y una compleción final de $(\mathcal{A}, U)$.

<u>Demostración</u>.

Por 10.36, 10.29 y 9.5, E^4 es una compleción inicial de $(\mathcal{A}, U)$ que conserva estructuras iniciales y finales. Ahora bien, si $(X, \xi) \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}^4$ y $\eta = (X, \xi)^{op}$, es fácil ver que el pozo

$$\left(E^4(B) \xrightarrow{(\xi_B, b, \xi)} (X, \xi)\right)_{(B,b) \in \eta}$$ es $\mathcal{A}^4$-pozo y

que $\xi = \{(a, A) \mid \text{para todo } (B, b) \in \eta,\ (a \cdot b, A) \in \xi_B\}$.

Por lo tanto, por 10.34 y 10.10, $((\xi_B, b, \xi))_{(B,b) \in \eta}$ es un $\mathcal{A}^4$ pozo U^4-final con codominio (X, ξ). ∎

Si reemplazamos en las definiciones de $(\mathcal{A}^n, U^n)$ $(n = 1, 2, 3, 4)$ fuentes estructuradas por pozos estructurados, obtenemos las construcciones duales de las E^n con las propiedades duales. En forma resumida presentamos estas construcciones:

10.40. DEFINICIONES. PROPOSICIONES.

(1) $(\mathcal{A}^{-1}, U^{-1})$ es la casicategoría cuyos objetos son todos los pozos estructurados y cuyos morfismos son los mapeos entre pozos estructurados. U^{-1} es el funtor que olvida las estructuras.

(2) Para toda $A \in Ob\,\mathcal{A}$, $\eta_A = \{(B, Ua) \in \Sigma_{UA} \mid B \xrightarrow{a} A \in Mor\,\mathcal{A}\}$
Si $\mathcal{A}^{-1}$ es legítima, entonces el funtor

$$E^{-1}: \begin{cases} \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}^{-1} \\ A \longmapsto (\eta_A, UA) \\ A \xrightarrow{f} B \longmapsto (\eta_A, Uf, \eta_B) \end{cases}$$

es una extensión finalmente completa que conserva estructuras iniciales pero no necesariamente conserva estructuras finales y en general no es inicial o finalmente denso.

(3) $(\mathcal{A}^{-2}, U^{-2})$ es la subcasicategoría plena de $(\mathcal{A}^{-1}, U^{-1})$ cuyos objetos son los pozos débilmente cerrados.

(4) Si $\mathcal{A}^{-2}$ es legítima, el funtor $E^{-2}: (\mathcal{A}, U) \longrightarrow (\mathcal{A}^{-2}, U^{-2})$ inducido por E^{-1} es una compleción final, no necesariamente compleción inicial, que conserva estructuras iniciales pero no necesariamente finales. Además $(\mathcal{A}^{-2}, U^{-2})$ es una subcategoría reflexiva y correflexiva de $(\mathcal{A}^{-1}, U^{-1})$.

(5) $(\mathcal{A}^{-3}, U^{-3})$ es la subcasicategoría plena de $(\mathcal{A}^{-2}, U^{-2})$ cuyos objetos son todos los pozos simultáneamente débilmente cerrados y semicerrados.

(6) Si $\mathcal{A}^{-3}$ es legítima entonces $E^{-3}: (\mathcal{A}, U) \longrightarrow (\mathcal{A}^{-3}, U^{-3})$, el funtor concreto inducido por E^{-2} es una compleción final que conserva estructuras iniciales y finales pero no necesariamente es compleción inicial. Además $(\mathcal{A}^{-3}, U^{-3})$ es subcategoría reflexiva de $(\mathcal{A}^{-2}, U^{-2})$.

(7) $(\mathcal{A}^{-4}, U^{-4})$ es la subcasicategoría plena de $(\mathcal{A}^{-1}, U^{-1})$ cuyos objetos son todos los pozos cerrados.

(8) Si $(\mathcal{A}^{-4}, U^{-4})$ es legítima, entonces $E^{-4}: (\mathcal{A}, U) \longrightarrow (\mathcal{A}^{-4}, U^{-4})$ es una compleción inicial y final que conserva estructuras iniciales y finales. Además $(\mathcal{A}^{-4}, U^{-4})$ es subcategoría plena inicialmente cerrada de $(\mathcal{A}^{-3}, U^{-3})$ y por lo tanto una modificación reflexiva de $(\mathcal{A}^{-3}, U^{-3})$

10.41. NOTA.

Obsérvese la simetría que existe entre $(\mathcal{A}^{4}, U^{4})$ y $(\mathcal{A}^{-4}, U^{-4})$, y entre E^{4} y E^{-4}. No es difícil darse cuenta que estas compleciones son isomorfas: Si $f: (X, \xi) \longrightarrow (X', \xi')$ es un morfismo de $\mathcal{A}^{4}$ entonces, para cada $(a, A) \in \xi'$, $(a \circ f, A) \in \xi$. Supongamos que $(B, b) \in (X, \xi)^{op}$ y que $(a, A) \in \xi'$. Como $(a \circ f, A) \in \xi$, existe $h: B \longrightarrow A \in \mathrm{Mor}\, \mathcal{A}$ tal que $Uh = (a \circ f) \circ b = a \circ (f \circ b)$. Por lo tanto, para cada $(B, b) \in (X, \xi)^{op}$, $(B, f \circ b) \in (X', \xi')^{op}$. Si η y η' son tales que $(X, \xi)^{op} = (\eta, X)$ y $(X', \xi')^{op} = (\eta', X')$, entonces hemos demostrado que $f: (\eta, X) \longrightarrow (\eta', X')$ es un $\mathcal{A}^{-4}$-morfismo. Se puede demostrar que el funtor

$$F: \begin{cases} (\mathcal{A}^{4}, U^{4}) \longmapsto (\mathcal{A}^{-4}, U^{-4}) \\ (X, \xi) \longmapsto (X, \xi)^{op} = (\eta, X) \\ (\xi, f, \xi') \longmapsto (\eta, f, \eta') \end{cases}$$

es un isomorfismo sobre X tal que $F \circ E^{4} = E^{-4}$

es decir, tal que para cada $A \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}$, $(\eta_A, UA) = (UA, \xi_A)^{op}$. Sin embargo, no entraremos en detalles, ya que todo esto será un corolario del teorema 14.1, demostrado en el capítulo IV. Lo que queremos ahora es mencionar que mezclando las construcciones E^{Ψ} y $E^{-\Psi}$, se obtiene una compleción isomorfa a ellas y quizá más natural:

(10.41.1) Sea $\mathcal{A}^*$ la casicategoría de todas las ternas $(\eta, \mathbb{X}, \xi)$, donde:

(1) $\mathbb{X}$ es un $\mathcal{X}$-objeto

(2) $\eta \subset \Sigma_{\mathbb{X}}$

(3) $\xi \subset \Xi_{\mathbb{X}}$

(4) $(\eta, \mathbb{X}) = (\mathbb{X}, \xi)^{op}$

(5) $(\mathbb{X}, \xi) = (\eta, \mathbb{X})^{op}$

Los morfismos de $\mathcal{A}^*$ son morfismos $g : (\eta, \mathbb{X}, \xi) \longrightarrow (\eta', \mathbb{X}', \xi')$ tales que $g : \mathbb{X} \to \mathbb{X}'$ es un $\mathcal{X}$-morfismo y para cada $(A, a) \in \eta$ y cada $(b, B) \in \xi'$, existe un $\mathcal{A}$-morfismo $f : A \to B$ con $Uf = b \cdot g \cdot a$

Cuando $(\mathcal{A}^*, U^*)$ es legítima, el funtor

$$(10.41.2)\quad E^* : \begin{cases} (\mathcal{A}, U) \longrightarrow (\mathcal{A}^*, U^*) \\ A \longmapsto (\eta_A, UA, \xi_A) \\ A \xrightarrow{f} B \longmapsto ((\eta_A, \xi_A), Uf, (\eta_B, \xi_B)) \end{cases}$$

es una compleción inicial y final de $(\mathcal{A}, U)$, isomorfa a E^{Ψ} y $E^{-\Psi}$.

Terminaremos esta sección demostrando que existen categorías concretas sobre $\mathcal{X}$ que admiten las compleciones que hemos construido.

(10.42) TEOREMA.

Toda categoría concreta pequeña sobre $\mathcal{X}$ tiene compleciones iniciales y finales. Con más precisión, sus compleciones E^2, E^{-2}, E^3, E^{-3} y E^4 ($\cong E^{-4} \cong E^*$) son legítimas.

Demostración:

Sea $\mathcal{A}$ una categoría pequeña y $U: \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{X}$ un funtor fiel y amnésico (es decir, $(\mathcal{A}, U)$ una categoría concreta pequeña sobre $\mathcal{X}$). Como mencionamos en 10.4(1), Ξ_X y Σ_X resultan ser conjuntos.

Sea $(X, \xi) \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}'$. Como $\mathrm{Ob}\,\mathcal{X}$ es una clase, X es un conjunto. Como $\xi \subset \Xi_X$, ξ es un conjunto. Por lo tanto, (X, ξ) es un conjunto. De este modo, todos los elementos de $\mathrm{Ob}\,\mathcal{A}'$ son conjuntos, lo que implica que $\mathrm{Ob}\,\mathcal{A}'$ es una clase.

Ahora bien, si (X, ξ) y (X', ξ') son $\mathcal{A}'$-objetos, entonces un morfismo de $\mathcal{A}'$ entre (X, ξ) y (X', ξ'), es una terna (ξ, f, ξ') en donde $f: X \longrightarrow X'$ (y (ξ, f, ξ') es un mapeo entre fuentes). Por lo tanto,

$$\hom_{\mathcal{A}'}((X,\xi),(X',\xi')) \subset \{\xi\} \times \hom_{\mathcal{X}}(X, X') \times \{\xi'\}$$

Esto implica que $\hom_{\mathcal{A}'}((X,\xi),(X',\xi'))$ es un conjunto. Por lo tanto, $\mathcal{A}'$ es legítima ∎

10.43.- OBSERVACIÓN. Si en la hipótesis de 10.42 se supone además que $\mathcal{X}$ es pequeña, entonces todas las extensiones de $(\mathcal{A}, U)$ $(\mathcal{A}^n, U^n)$ (para $n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, 4$) son categorías concretas pequeñas sobre $\mathcal{X}$, ya que $\mathrm{Ob}\,\mathcal{A}' \subset \bigcup_{X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{X}} (\mathrm{Ob}\,\mathcal{X} \times \mathcal{P}(\Xi_X))$.

§11. UN EJEMPLO

Durante esta sección X será la categoría terminal con un sólo objeto $\mathbb{X}$ y un sólo morfismo $1_{\mathbb{X}}$.

11.1 Supongamos que $(\mathcal{A}, U)$ es una categoría concreta pequeña sobre X. Por lo tanto, $\mathcal{A}$ es un conjunto parcialmente ordenado con la relación definida en (7.18.3). Además:

(1) 10.43 asegura que $(\mathcal{A}, U)$ tiene todas las extensiones E^n ($n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, 4$) y que $(\mathcal{A}^n, U^n)$ es una categoría concreta pequeña (para $n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, 4$), es decir, un conjunto parcialmente ordenado. El orden en este caso es:

$$\begin{aligned}(\mathbb{X}, \xi) \leq' (\mathbb{X}', \xi') &\iff \text{existe un } \mathcal{A}^n\text{morfismo } f: (\mathbb{X}, \xi) \longrightarrow (\mathbb{X}', \xi') \\ &\iff 1_{\mathbb{X}} : (\mathbb{X}, \xi) \longrightarrow (\mathbb{X}', \xi') \text{ es } \mathcal{A}^n\text{- morfismo} \\ &\iff \xi' \subset \xi .\end{aligned}$$

(2) Cada elemento de $\mathcal{A}'$ es de la forma $(\mathbb{X}, \xi)$, donde ξ es un conjunto $\{(1_{\mathbb{X}}, A_i)\}_{i \in I}$ de U-morfismos con dominio $\mathbb{X}$. Obsérvese que $1_{\mathbb{X}}$ aparece en todas las parejas de ξ, de modo que se vuelve insustancial. Podemos identificar cada $\xi = \{(1_{\mathbb{X}}, A_i)\}_{i \in I}$ con la familia $\{A_i\}_{i \in I} \in \mathcal{P}(\mathcal{A})$. Esta identificación es más interesante de lo que pudiera parecer en un principio. En efecto, existe una función biyectiva

$$\mathfrak{S}: \operatorname{Ob} \mathcal{A}' \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{A})$$

tal que si $(\mathbb{X}, \xi) \in \mathcal{A}'$ y ξ está dado por la familia $\{(1_{\mathbb{X}}, A_i)\}_{i \in I}$, entonces $\mathfrak{S}(\mathbb{X}, \xi) = \{A_i\}_{i \in I}$. Con abuso de notación, $\mathfrak{S}(\mathbb{X}, \xi) = \xi$.

En vista de (1) para cada dos objetos $(\mathbb{X}, \xi)$ y $(\mathbb{X}', \xi')$ de

$\mathcal{A}'$ se tiene

$$(\Sigma, \xi) \leq' (\Sigma', \xi') \Leftrightarrow \xi' \subset \xi \Leftrightarrow G(\Sigma, \xi') \subseteq G(\Sigma, \xi)$$

Por lo tanto, $G : (\mathrm{Ob}\,\mathcal{A}', \leq') \longrightarrow (\mathcal{P}(\mathcal{A}), \supseteq)$ es un isomorfismo de poclases.

Viendo a $(\mathcal{P}(\mathcal{A}), \supseteq)$ como una categoría (cfr. 7.1), es fácil deducir que G es un funtor de $\mathcal{A}'$ en $\mathcal{P}(\mathcal{A})$ tal que si $f : (\Sigma, \xi) \longrightarrow (\Sigma', \xi')$ es un $\mathcal{A}'$-morfismo, $G(f)$ es el único elemento de $\hom_{\mathcal{P}(\mathcal{A})}(\xi, \xi')$. Por supuesto, $G : (\mathcal{A}', U') \longrightarrow (\mathcal{P}(\mathcal{A}), V)$ (con $V : \mathcal{P}(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathcal{X}$ el constante) es concreto. (es isomorfismo concreto). En la práctica no vamos a distinguir entre $(\mathcal{A}', U')$ y $(\mathcal{P}(\mathcal{A}), \supseteq)$.

(3) Una discusión análoga puede hacerse entre $(\mathcal{A}^{-1}, U^{-1})$ y $(\mathcal{P}(\mathcal{A}), \subseteq)$: Existe un isomorfismo concreto (por tanto de poclases):

$$F : (\mathcal{A}^{-1}, U^{-1}) \longrightarrow (\mathcal{P}(\mathcal{A}), \subseteq)$$

tal que si $(\eta, \Sigma) \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}^{-1}$ y $\eta = \{(A_j^!, 1_\Sigma)\}_{j \in J}$ entonces $F(\eta, \Sigma) = \{A_j^!\}_{j \in J}$. También a veces identificaremos η con $F(\eta, \Sigma)$.

(4) Como se difinió en 5.5, para cada $A \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}$, sean

$$A^+ = \{B \in \mathcal{A} \mid A \leq B\}$$
$$A^- = \{B \in \mathcal{A} \mid B \leq A\}.$$

En otras palabras, $A^+ = \{B \in \mathcal{A} \mid$ existe un $\mathcal{A}$-morfismo $A \longrightarrow B\}$, es la fuente de todos los $\mathcal{A}$-morfismos con dominio A. y $A^- = \{B \in \mathcal{A} \mid$ existe un $\mathcal{A}$-morfismo $g : B \longrightarrow A\}$, es el pozo de todos los $\mathcal{A}$-morfismos con codominio A.

Supongamos, por comodidad, que $A^+ = \{A_i\}_{i \in L}$ y que

$A^- = \{A_j^!\}_{j\in J}$. En (10.12.1) se definió

$$\xi_A = \{(Ua, B) \in \Xi_{UA} \mid A \xrightarrow{a} B \in \mathrm{Mor}\,\mathcal{A}\},$$

y en (10.40 (2)) se definió:

$$\eta_A = \{(B, Ua) \in \Sigma_{UA} \mid B \xrightarrow{a} A \in \mathrm{Mor}\,\mathcal{A}\}.$$

Por lo tanto, en nuestro caso, $\xi_A = \{(1_\Sigma, A_i)\}_{i\in I}$ y $\eta_A = \{(A_j^!, 1_\Xi)\}_J$.
Esto implica que

$$G(UA, \xi_A) = \{A_i\}_I = A^+$$
$$\text{y } F(\eta_A, UA) = \{A_j^!\}_J = A^-$$

(Con la informalidad de la identificación : $\xi_A = A^+$ y $\eta_A = A^-$)

(5) En (5.5.1), definimos la función

$$f: \begin{cases} (\mathcal{A}, \leq) \longrightarrow (\mathcal{P}(\mathcal{A}), \subseteq) \\ \quad A \longmapsto A^- \end{cases};$$

y en (5.5.2), esta otra función:

$$g: \begin{cases} (\mathcal{A}, \leq) \longrightarrow (\mathcal{P}(\mathcal{A}), \supseteq) \\ \quad A \longmapsto A^+ \end{cases}$$

Estas funciones son compleciones de $(\mathcal{A}, \leq)$ en el sentido de (5.3.2). Considerando a $(\mathcal{A}, \leq)$, $(\mathcal{P}(\mathcal{A}), \subseteq)$ y $(\mathcal{P}(\mathcal{A}), \supseteq)$ como categorías $((\mathcal{A}, U), (\mathcal{P}(\mathcal{A}), W), (\mathcal{P}(\mathcal{A}), V)$, donde W y V son funtores constantes (aquí los distinguimos para hacer la diferencia entre $(\mathcal{P}(\mathcal{A}), \subseteq)$ y $(\mathcal{P}(\mathcal{A}), \supseteq)$), $f: (\mathcal{A}, U) \longrightarrow (\mathcal{P}(\mathcal{A}), W)$ y $g: (\mathcal{A}, U) \longrightarrow (\mathcal{P}(\mathcal{A}), V)$ resultan ser extensiones; f finalmente completa, g inicialmente completa. La razón más simple es que f es precisamente $E^{\dashv}$ y g es la extensión $E^{\vdash}$, porque con la identificación, $f(A) = A^- = (\eta_A, UA)$ y $g(A) = A^+ = \xi_A = (UA, \xi_A)$. La manera formal de decir esto, es la siguiente:

F y G son isomorfismos que hacen conmutar los diagramas:

$$\begin{tikzcd} & (\mathcal{A}^7,U^7) \arrow[d, "F"] \\ (\mathcal{A},U) \arrow[ur, "E^{-1}"] \arrow[r, "f"'] & (P(\mathcal{A}),W) \end{tikzcd} \quad y \quad \begin{tikzcd} & (\mathcal{A}',U') \arrow[d, "G"] \\ (\mathcal{A},U) \arrow[ur, "E'"] \arrow[r, "g"'] & (P(\mathcal{A}),V) \end{tikzcd}$$

De paso, esto demuestra completamente el teorema (5.6.1)

(6) Trabajaremos ahora con $(\mathcal{A}^4,U^4)$, o mejor dicho, con su isomorfo $(\mathcal{A}^*,U^*)$ (véase 10.41). Los objetos de $(\mathcal{A}^*,U^*)$ son ternas $(\eta,\mathbb{X},\xi)$ sujetas a las condiciones (1)-(5) de 10.41. Como $\mathbb{X}$ es el único objeto de $\mathcal{X}$ y aparece en todas las ternas $(\eta,\mathbb{X},\xi)$ de $\mathcal{A}^*$, podemos quitarlo de dichas ternas, de modo que los objetos de $\mathcal{A}^*$ son ahora parejas (η,ξ) tales que $\eta\subset\Sigma_{\mathbb{X}}$, $\xi\subset\Xi_{\mathbb{X}}$ y se satisfacen además las siguientes condiciones (ver (10.41.1)):

(4)' Si $A\in \mathrm{Ob}\mathcal{A}$, entonces $(A,1_{\mathbb{X}})\in\eta$ si y sólo si para cada $(1_{\mathbb{X}},B)\in\xi$ existe un $\mathcal{A}$-morfismo $f:A\longrightarrow B$ tal que $Uf=1_{\mathbb{X}}$

(5)' Si $B\in\mathrm{Ob}\mathcal{A}$, entonces $(1_{\mathbb{X}},B)\in\xi$ si y sólo si para cada $(A,1_{\mathbb{X}})\in\eta$, existe un $\mathcal{A}$-morfismo $f:A\longrightarrow B$ tal que $Uf=1_{\mathbb{X}}$

$(\mathcal{A}^*,U^*)$ es un conjunto parcialmente ordenado con el orden:

$(\eta,\xi)\le'(\eta',\xi') \Longleftrightarrow$ existe un $\mathcal{A}^*$-morfismo $f:(\eta,\xi)\longrightarrow(\eta',\xi')$

$\Longleftrightarrow 1_{\mathbb{X}}:(\eta,\xi)\longrightarrow(\eta',\xi')\in \mathrm{Mor}\mathcal{A}^*$

$\Longleftrightarrow$ para cada $(A,1_{\mathbb{X}})\in\eta$ y cada $(1_{\mathbb{X}},B)\in\xi'$, existe un $\mathcal{A}$-morfismo $f:A\longrightarrow B$ tal que $Uf=1_{\mathbb{X}}$

$\Longleftrightarrow \eta\subset\eta'$ $(\Longleftrightarrow \xi\subset\xi')$

Como en el párrafo anterior, (5), pensemos cada fuente estructurada $(X, \xi = \{(1_X, A_i)\}_I)$ como el elemento $\{A_i\}_I$ de $P(\mathcal{A})$, es identifiquemos también cada pozo estructurado $(\eta = \{(A_j', 1_X)\}, X)$ con $\{A_j'\}_J \in P(\mathcal{A})$. Traduciremos con este "diccionario" lo dicho sobre $\mathcal{A}^*$, pero antes de comenzar, recordemos que la relación en $\mathcal{A}$: $A \leq B$ si y sólo si existe un $\mathcal{A}$-morfiimo $A \to B$ es equivalente a $A \leq B$ si y sólo si 1_X es admisible de A a B (cfr. 7.16 y 7.18):

$\mathcal{A}^*$ es el conjunto parcialmente ordenado cuyos elementos son parejas (η, ξ), donde $\eta = \{A_j'\}_J$, $\xi = \{A_i\}_I \in P(\mathcal{A})$, y satisfacen:

(4)'' Si $A \in \mathcal{A}$, entonces $A \in \eta$ si y sólo si para cada $B \in \xi$ existe un $\mathcal{A}$-morfiimo $f: A \to B$ tal que $Uf = 1_X$. Pero esto pasa si y sólo si $1_X: A \to B$ es admisible, es decir, si y sólo si $A \leq B$ para cada $B \in \xi$

(5)'' Si $B \in \mathcal{A}$, entonces $B \in \xi \Leftrightarrow$ para cada $A \in \eta$, $1_X: A \to B$ es admisible $\Leftrightarrow$ $A \leq B$ para cada $A \in \eta$.

El orden parcial $\leq'$ de $\mathcal{A}^*$ es:

$(\eta, \xi) \leq' (\eta', \xi') \Leftrightarrow$ para cada $A \in \eta$ y cada $B \in \xi'$, $A \leq B$

$\Leftrightarrow \eta \subset \eta'$ $(\Leftrightarrow \xi \supset \xi')$

(4)'' dice que η es el conjunto de cotas inferiores de ξ, o sea, $\eta = \xi^-$ (cfr. (6.3.1)).

(5)'' dice que ξ es el conjunto de cotas superiores de η, es decir, $\xi = \eta^+$ (ver (6.3.1)).

En otras palabras, los elementos de $\mathcal{A}^*$ son parejas $(\eta, \xi) \in P(\mathcal{A}) \times P(\mathcal{A})$ tales que $\eta^+ = \xi$ y $\xi^- = \eta$. Los elementos de $\mathcal{A}^*$ son, pues, todas las cortaduras en $(\mathcal{A}, \leq)$ (cfr. 6.3)

El orden parcial de $\mathcal{A}^*$: $(\eta,\xi) \leq' (\eta',\xi') \Leftrightarrow \eta \subset \eta'$, coincide con el dado en 6.3 .ii $(\mathcal{A}^*, \cup^*)$ es entonces el conjunto parcialmente ordenado completo $(P, \leq')$ del que se habla en (6.3.8)!!

Como para todo $A \in \mathcal{A}$, $\xi_A = A^+$ y $\eta_A = A^-$ (véase párrafo (4) arriba), el funtor (10.41.2):

$$E^* \begin{cases} (\mathcal{A},\cup) \longrightarrow (\mathcal{A}^*, \cup^*) \\ A \longmapsto (\eta_A, \xi_A) \\ A \xrightarrow{f} B \longmapsto ((\eta_A,\xi_A), 1_E, (\eta_B,\xi_B)) \end{cases}$$

coincide precisamente con la función (funtor)

$$e \begin{cases} (\mathcal{A}, \leq) \longrightarrow (P, \leq') \\ A \longmapsto (A^-, A^+), \end{cases}$$

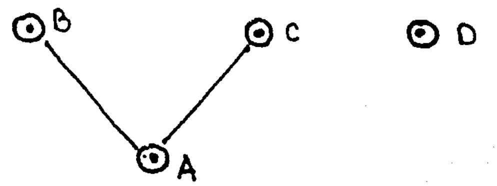
definida en (6.3.9).

Nuestra compleción $E^* (\cong E^4 \cong E^{-4})$ es pues la generalización de la compleción de Mac Neille para conjuntos parcialmente ordenados. Estas compleción E^* y todas sus isomorfas (ver capítulo IV) serán llamadas compleciones de Mac Neille para $(\mathcal{A},\cup)$. Hemos demostrado en particular (6.3.10).

11.2. Conviene ver ahora un ejemplo más concreto, para aclarar muchas ideas del § 10 y de 11.1. En particular el ejemplo que desarrollaremos completará las demostraciones de los teoremas 10.13, 10.21, 10.29, y se observará con claridad que E^4 es la compleción inicial o final más pequeña (esto lo demostraremos en el capítulo IV).

Sea $\mathcal{A}$ la categoría
$$\begin{tikzcd} \bullet & & \bullet & \bullet \\ & \bullet \arrow[ul] \arrow[ur] & & \end{tikzcd}$$
(categoría parcialmente ordenada).

Para hacer con más soltura nuestra exposición, pensaremos en términos de conjuntos parcialmente ordenados. Así, sea $\mathcal{A}$ el conjunto parcialmente ordenado representado por el siguiente diagrama de Hasse:



(II. 2.1) $(\mathcal{A}^1, \cup^1)$, $(\mathcal{A}^{-1}, \cup^{-1})$:

$\mathcal{P}(\mathcal{A})$ está formado por:

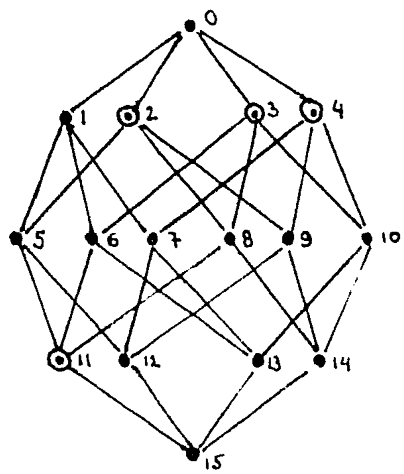
$\xi_0 = \phi$; $\xi_1 = \{A\}$, $\xi_2 = \{B\}$, $\xi_3 = \{C\}$, $\xi_4 = \{D\}$;

$\xi_5 = \{A,B\}$, $\xi_6 = \{A,C\}$, $\xi_7 = \{A,D\}$, $\xi_8 = \{B,C\}$, $\xi_9 = \{B,D\}$, $\xi_{10} = \{C,D\}$;

$\xi_{11} = \{A,B,C\}$, $\xi_{12} = \{A,B,D\}$, $\xi_{13} = \{A,C,D\}$, $\xi_{14} = \{B,C,D\}$;

$\xi_{15} = \{A,B,C,D\}$.

Por lo tanto, la categoría $(\mathcal{A}^1, \cup^1)$, es decir, $(\mathcal{P}(\mathcal{A}), \supseteq)$, queda representada por el siguiente diagrama de Hasse de $(\mathcal{P}(\mathcal{A}), \supseteq)$:



NOTA:
En el diagrama, cada número representa la correspondiente ξ.

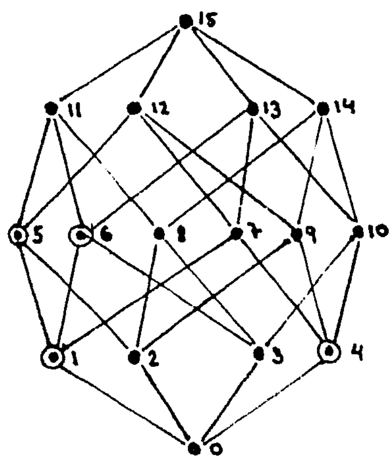
Obsérvese que $E^1(A) = \xi_A = \{(U_a, L) \mid A \xrightarrow{a} L$ es un $\mathcal{A}$-morfismo$\} = \{(1_E, D), (1_E, C), (1_E, A)\} = \xi_{11}$

Análogamente, $E^1(B)=\xi_2$, $E^1(C)=\xi_3$, $E^1(D)=\xi_4$
En este diagrama se observa con claridad que E^1 no conserva estructuras iniciales (es decir, ínfimos), ya que $A=B\wedge C$, pero $E^1(A)=\xi_{11}\neq\xi_8=E^1(B)\wedge E^1(C)$.

Supongamos que $(\xi_1\xrightarrow{f_i}\xi_i)_I$ es una fuentea en $\mathcal{A}^1$. Entonces, para cada $i\in I$, $\xi_i=\xi_1$ o $\xi_i=\xi_0$. Pero $\xi_1,\xi_0\notin E^1(\mathcal{A})$. Por lo tanto no existe E^1-fuente con dominio ξ_1. Por lo tanto, E^1 no es inicialmente denso.

Supongamos que $(\xi_i\xrightarrow{f_i}\xi_{14})_I$ es un $\mathcal{A}^1$-pozo. Entonces, para cada $i\in I$, $\xi_i=\xi_{14}$ o' $\xi_i=\xi_{15}$. Pero $\xi_{15},\xi_{14}\notin E^1(\mathcal{A})$. Por lo tanto no existe E^1-pozo U^1-final con codominio ξ_{14}. Por eso E^1 no es finalmente denso.

Veamos como se ve $\mathcal{A}^{-1}$ (diagrama de Hasse de $(P(\mathcal{A}),\leq)$):

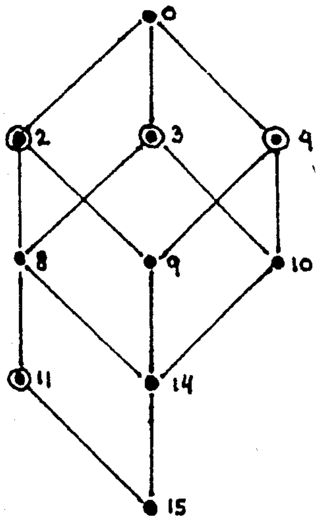


Aquí $E^{-1}(A)=\eta_A=\{(L,Ua)\mid L\xrightarrow{a}a$ es un $\mathcal{A}$-morfismo$\}=\{(A,1_\Sigma)\}=\xi_1$
Análogamente $E^{-1}(B)=\xi_5$, $E^{-1}(C)=\xi_6$ y $E^{-1}(D)=\xi_4$.

Proponemos al lector que estudie este diagrama. Mientras, nosotros describiremos $(\mathcal{A}^2,U^2)$ y $(\mathcal{A}^{-2},U^{-2})$

(11.2.2) $(\mathcal{A}^2, U^2)$ y $(\mathcal{A}^{-2}, U^{-2})$

$(\mathcal{A}^2, U^2)$ es subcategoría plena de $(\mathcal{A}^1, U^1)$. Por lo tanto, el diagrama que represente a $\mathcal{A}^2$ será obtenido del de $\mathcal{A}^1$, eliminando los elemtos que no estén en $\mathcal{A}^2$.

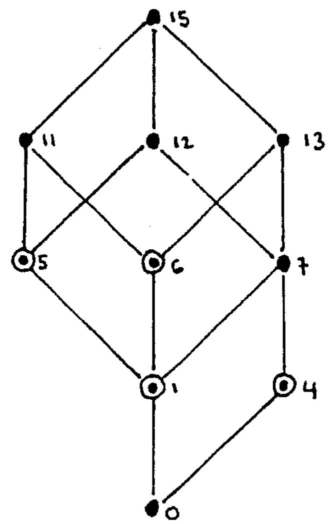


$\mathcal{A}^2$

Ante todo, no debe perderse de vista que todas las $(\mathcal{A}^n, U^n)$ $(n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, 4)$ son conjuntos parcialmente ordenados completos y que por esto mismo, ξ_0 y ξ_{15} aparecerán en todos los diagramas de ellas (cfr. 4.6)

$\xi_{11}, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ estarán presentes en $(\mathcal{A}^n, U^n)$ para toda $n = 1,2,3,4$, por ser las imágenes de A, B, C, D bajo E^n, así como $\xi_1, \xi_5, \xi_6, \xi_4$ no podrán eliminarse de los diagramas de Hasse de $(\mathcal{A}^{-n}, U^{-n})$, para $n = 1,2,3,4$, por ser las imágenes de A, B, C, D bajo E^{-n}.

$\mathcal{A}^{-2}$



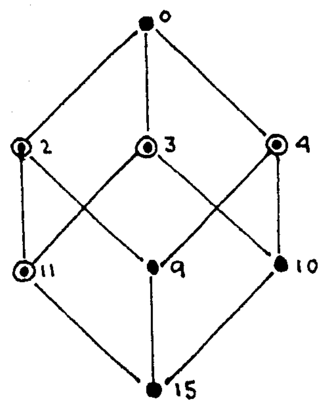
Sea $i \in \{1,5,6,7,12,13\}$. Por lo tanto, $A \in \xi_i$. Pero $B \notin \xi_i$ o $C \notin \xi_i$ y existen $\mathcal{A}$-morfismos $A \longrightarrow B$, $A \longrightarrow C$. Esto implica, tras una leve reflexión, que $\xi_i \notin \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}^2$. También es fácil verificar que si $i \notin \{1,5,6,7,12,13\}$, $\xi_i \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}^2$

Como en el caso de E^1, $A = B \wedge C$ pero $E^2(A) = \xi_{11} \neq \xi_8 = \xi_2 \wedge \xi_3 = E^2(B) \wedge E^2(C)$. Por lo tanto E^2 no conserva estructuras iniciales. Para demostrar que E^2 no es finalmente denso, tómese ξ_{14}, también como en el caso de Ξ^1.

En la página anterior mostramos la representación de $\mathcal{A}^{-2}$.

(11.2.3) $(\mathcal{A}^3, U^3)$ y $(\mathcal{A}^{-3}, U^{-3})$.

$\mathcal{A}^3$:



La fuente $\begin{array}{l} A \xrightarrow{f_1} B \\ A \xrightarrow{f_2} C \end{array}$ es U-inicial, $(1_X, A) \in \Xi_X$ y los U-morfismos $(1_X, B)$ y $(1_X, C)$ están en ξ_8 y ξ_{14}. Estos U-morfismos son las composiciones $X \xrightarrow{1_X} UA \xrightarrow{Uf_1} UB$ y $(X \xrightarrow{1_X} UA \xrightarrow{Uf_1} UC)$. Sin embargo, $(1_X, A)$ no es elemento de ξ_8 ni de ξ_{14}. Por lo tanto ξ_8 y ξ_{14} no son fuentes semicerradas (cfr. 10.22), así que ξ_8 y ξ_{14} no están en $\mathcal{A}^3$.

Supongamos que $L \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}$ y $(L \xrightarrow{f_i} A_i)_I$ es $\mathcal{A}$-fuente U-inicial tal que para cada $i \in I$, $(1_X, A_i) \in \xi_9$. Entonces, para toda $i \in I$, $A_i = B$ ó $A_i = D$. Si $A_i = D$ para alguna $i \in I$, entonces $L = D$ y $(1, L) = (1, D) \in \xi_9$. Si por el contrario, para toda $i \in I$ $A_i = B$, entonces $L \neq A$ pues $(A \xrightarrow{f_i} B)_I$ no es U-inicial; tampoco puede suceder que $L = C$ o que $L = D$. Por lo tanto $L = B$, caso en el cual $(1, L) \in \xi_9$. Por lo tanto, $\xi_9 \in \mathcal{A}^3$. Análogamente, $\xi_{10} \in \mathcal{A}^3$

E^3 no es finalmente densa en este caso. Por ejemplo, ξ_9 no es el codominio de ningún E^3-pozo U^3-final. Nótese además que la U^2-fuente $\xi_8 \begin{smallmatrix} \nearrow \xi_2 \\ \searrow \xi_1 \end{smallmatrix}$ es U^2-inicial y $\xi_1, \xi_2 \in \mathcal{A}^3$. Sin embargo $\xi_8 \notin \mathcal{A}^3$. Por lo tanto, $\mathcal{A}^3$ no es inicialmente cerrada en $\mathcal{A}^2$.

A manera de pasatiempo ofrecemos al lector desocupado, un ejercicio fácil: comprobar que $\mathcal{A}^{-3}$ es isomorfa a $\mathcal{A}^{-2}$.

(1.2.4.) $(\mathcal{A}^4, U^4)$ $(\simeq (\mathcal{A}^{-4}, U^{-4}))$.

Supongamos que $(\eta_\xi, X) = (X, \xi_9)^{op}$. Como $\xi_9 = \{B, D\}$,

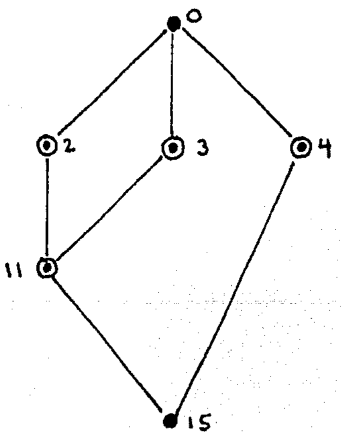
$\eta_\xi = \{ L \in \mathcal{A} \mid$ existen $\mathcal{A}$-morfismos $L \xrightarrow{h} B$, $L \xrightarrow{k} D$ tales que $Uh = Uk = 1_X \} = \phi$,

pues no hay ningún $\mathcal{A}$-objeto L tal que $L \le B$, $L \le D$

Si $(X, \xi') = (\eta_\xi, X)^{op}$, entonces

$\xi' = \{ M \in \mathcal{A} \mid$ para todo $L \in \eta_\xi = \phi$, existe $L \xrightarrow{f} M$ $\mathcal{A}$-morfismo tal que $Uf = 1_X \} = \xi_{15} \neq \xi_9$

$\therefore \xi_9 \notin \mathcal{A}^4$. Análogamente, $\xi_{10} \notin \mathcal{A}^4$.



$\mathcal{A}^4$

$\mathcal{A}^4$ queda como la mínima compleción posible de $(\mathcal{A}, U)$.

NOTAS AL CAPÍTULO II.

1. El término "poclase" está inspirado en el término "poset" usado por MacLane y Birkhoff en [17] para decir de un modo más sencillo conjunto parcialmente ordenado.

2 $a_0 < a$ significa $a_0 \leq a$ y $a_0 \neq a$. La condición "no existe $a \in A$ tal que $a_0 < a$" se puede escribir así:

$$\forall a \in A \; [a_0 \leq a \Rightarrow a_0 = a]$$

3 Ver demostración en [13]

4 Ver Birkhoff [1] página 9

5 Recuérdese lo dicho sobre fundamentos en el capítulo anterior.

6 Por esta razón, al ínfimo de una familia de elementos de una poclase suele llamársele intersección y al supremo unión (de los elementos de dicha familia).

7 No son isomorfos en el sentido de 5.1. Sin embargo, $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$ y $(\mathcal{P}(A), \supseteq)$ son anti-isomorfos. Un <u>antihomomorfismo</u> entre las poclases $(A, \leq)$ y $(B, \leq')$ es una función $f: A \longrightarrow B$ que invierte el orden, es decir, $x \leq y \Rightarrow f(y) \leq' f(x)$ para todos $x, y \in A$.

Un <u>anti-isomorfismo</u> entre $(A, \leq)$ y $(B', \leq')$ es una función biyectiva $f: A \longrightarrow B$ tal que

$$x \leq y \Leftrightarrow f(y) \leq' f(x), \qquad x, y \in A.$$

Toda poclase es anti-isomorfa a su dual.

8 También en Goffman [5] puede estudiarse el método de Cantor.

9 El mismo Fréchet fue el primero en establecer la noción de espacio métrico tal como lo conocemos ahora. (en su tesis: Sur quelques points du calcul fonctionnel. Ver Birkhoff [1]).

[10] La demostración dada por Birkhoff es ligeramente distinta a la de Kuratowski y Mostowski. Birkhoff trabaja con subconjuntos normales de A (aquéllos subconjuntos X de A que coinciden con su cerradura normal X^{+-}) y con operadores de cerradura ($\bar{X} = X^{+-}$ es una cerradura en el sentido de [1], p. 17). Si $\mathcal{P}$ es el conjunto de todos los subconjuntos normales de A ordenados por inclusión, Birkhoff demuestra que la función

$$e \begin{cases} A \longrightarrow \mathcal{P} \\ a \longmapsto a^{+-} \end{cases}$$

es una compleción de $(A, \leq)$ que conserva ínfimos y supremos.

[11] En este caso $\hom_{\mathcal{A}}(A, \leq)$ tiene un sólo elemento, así que la relación es: $A \leq B \iff \hom_{\mathcal{A}}(A,B)$ tiene exactamente un elemento.

[12] Sean $\mathcal{C}$ una categoría, $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$, I una clase (que puede ser propia, impropia o vacía). Una <u>fuente en $\mathcal{C}$ con dominio</u> X es una pareja $(X, (f_i)_{i\in I})$, donde $(f_i)_{i\in I}$ es una familia de $\mathcal{C}$-morfismos con dominio X. Un <u>pozo en $\mathcal{C}$ con codominio</u> X es una pareja $((f_i)_{i\in I}, X)$, donde $(f_i)_{i\in I}$ es una familia de $\mathcal{C}$-morfismos con codominio X. Por comodidad, para decir que $(X, (f_i)_{i\in I})$ es una fuente en $\mathcal{C}$ con dominio X, escribiremos a menudo $(X \xrightarrow{f_i} Y_i)_{i\in I}$. Análogamente para los $\mathcal{C}$-pozos.

[13] Poniendo $\mathcal{X} = \mathrm{Set}$, la definición de una categoría literal de conjuntos con estructura es casi la misma que da Graciela Salicrup en [19]. La diferencia es que Manes ha supuesto un axioma adicional en 7.7.: el axioma (ii) (ello se puede deber a que Manes quiere que las categorías literales de $\mathcal{X}$-conjuntos con estructura sean "antisimétricas", es decir, que todas sus fibras bajo el funtor que olvida sean poclases (Cfr. 7.15)).
He aquí un ejemplo de una categoría concreta en el sentido de Salicrup [19] que no es literal de conjuntos con estructura.

Sea $\mathcal{A}$ la subcategoría plena de Top cuyos objetos son todos los espacios métricos. Sea $U: \mathcal{A} \longrightarrow \mathrm{Set}$ el funtor que olvida. Entonces $\mathcal{A}$ es concreta según [19].

Tomemos en $\mathbb{R}^n$ las métricas

$$d_1(x,y) = \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2 \right)^{1/2}, \text{ y}$$
$$d_2(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$$

Entonces en $\mathcal{A}$, $(\mathbb{R}^n, d_1) \neq (\mathbb{R}^n, d_2)$. Pero d_1 y d_2 generan la misma topología,

$$1_{\mathbb{R}^n} : (\mathbb{R}^n, d_1) \longrightarrow (\mathbb{R}^n, d_2)$$

es $\mathcal{A}$-isomorfismo. Pues bien, $U(1_{\mathbb{R}^n})$ es identidad en Set pero $(1_{\mathbb{R}^n}, (d_1, d_2))$ no es $\mathcal{A}$-identidad. Por lo tanto, no se satisface la condición (ii) de 7.7.

[14] Para nuestro estudio no es realmente esencial suponer la amnesticidad de U. Diremos que una categoría concreta $(\mathcal{A}, U)$ sobre X es <u>antisimétrica</u> si todas sus fibras son poclases (es decir, si U es amnésico. Cfr. 7.17). Por ejemplo, toda categoría concreta en Struct (X) es antisimétrica (7.13).

Manes demuestra (II.3.4 de [18]) que la subcategoría* plena de $\mathcal{CAT}_X$ que consiste de todas las categorías concretas antisimétricas es repleta y reflexiva en $\mathcal{CAT}_X$. El funtor reflexión antisimétrico de cada categoría concreta es siempre pleno, fiel y suprayectivo en los objetos (¡más que una equivalencia!). Para ello establece una relación de equivalencia $\sim$ en la clase de objetos de $\mathcal{A}$, definida por:

$$A \sim B \Longleftrightarrow UA = X = UB \text{ y } 1_X : A \longrightarrow B,\ 1_X : B \longrightarrow A \text{ son admisibles}.$$

En la clase de morfismos de $\mathcal{A}$, está definida por:

$$\psi : A \longrightarrow B \sim \psi' : A' \longrightarrow B' \Longleftrightarrow [A] = [A'] \text{ (i.e. } A \sim A'),\ [B] = [B'],$$
$$\text{y } U\psi = U\psi'$$

Sea $[\mathcal{A}]$ la categoría cuyos objetos son todas las $[A]$ y para cada $[A], [B]$, $\hom_{[\mathcal{A}]}([A], [B]) = \{[\psi] \mid \psi : A \longrightarrow B\}$, $[\psi_1] \cdot [\psi_2] = [\psi_1 \cdot \psi_2]$, $[id_A] = id_{[A]}$. El funtor $[\ ] : \begin{array}{l} \mathcal{A} \longrightarrow [\mathcal{A}] \\ A \longmapsto [A] \end{array}$ es pleno, fiel y suprayectivo en los objetos.

Además el único funtor funtor $[U] : [\mathcal{A}] \longrightarrow X$ tal que $[U][\ ] = U$, es amnésico. En el ejemplo de la nota anterior, $([\mathcal{A}], [U])$ es isomor-

* Para nosotros es la <u>subcasicategoría</u> de la casi-categoría $\mathcal{CAT}_X$. Por comodidad estamos siguiendo el "abuso de lenguaje" de Manes en el cap. 2.§3 de [18]

fo en $\mathcal{CAT}_{Set}$ a la categoría de los espacios topológicos metrizables y funciones continuas.

En II.3.5 de [18] se demuestra el "teorema de reflexión estructural":
Sea $(\mathcal{A},U)$ una categoría concreta sobre $\mathcal{X}$ (como en 7.8). Entonces:
(1) $(\mathcal{A},U)$ tiene una reflexión en Struct $(\mathcal{X})$.
(2) Si $\Phi : (\mathcal{A},U) \longrightarrow (\mathcal{B},V) \in \mathcal{CAT}_{\mathcal{X}}$, con $(\mathcal{B},V) \in$ Struct $(\mathcal{X})$, entonces Φ es una reflexión de $(\mathcal{A},U)$ en Struct $(\mathcal{X})$ si y sólo si Φ es pleno y denso.
(3) Si $(\mathcal{A},U)$ es antisimétrica entonces su imagen bajo su funtor reflexión en Struct $(\mathcal{X})$ es subcategoría plena y densa de Struct $(\mathcal{X})$.

Este teorema muestra que en una categoría concreta arbitraria $(\mathcal{A},U)$ sobre $\mathcal{X}$, está definido un funtor concreto pleno, fiel y denso (es decir una equivalencia concreta) cuya imagen es una categoría $\mathcal{B}$ de $\mathcal{X}$-objetos con estructura. (Además dicho funtor es un $\mathcal{CAT}_{\mathcal{X}}$-morfismo universal para $(\mathcal{A},U)$ según la inclusión Struct $(\mathcal{X}) \hookrightarrow \mathcal{CAT}_{\mathcal{X}}$.) Entonces $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ tienen estructura muy similar (en particular tienen esqueletos isomorfos. Ver §14 de [11]).

15 Ver el ejercicio 11(a) del parágrafo 1 del capítulo III de [3] (página 216), o bien el teorema 2.2 de [1] (página 17). En [1], Birkhoff hace énfasis en que hay que exigir además que $\mathcal{A}$ tenga un elemento máximo 1. Pero al decir nosotros que todo subconjunto de $\mathcal{A}$ tiene ínfimo, estamos incluyendo al subconjunto vacío de $\mathcal{A}$, y el ínfimo de $\emptyset$ es el elemento máximo requerido.

16 La demostración que aquí damos es de Jelina Díaz Leñero.

17 En general, si $(A \xrightarrow{f_i} A_i)_I$ es una $\mathcal{A}$-fuente y existe $i_0 \in I$ tal que $f_{i_0} = 1_A$, entonces $(f_i)_I$ es U-inicial. (Esto en poclases significa que si $\{A_i\}_{i\in I}$ es una familia de elementos de la poclase $(\mathcal{A}, \leq)$ y existe $i_0 \in I$ tal que para toda $i \in I$, $A_{i_0} \leq A_i$ entonces $A_{i_0} = \bigwedge_I A_i$).

18: Observe esta demostración con cuidado. Casi cada paso demuestra algo más general. Por ejemplo, si $\mathbb{M}$ es la clase de todas las $\mathcal{B}$-fuentes V-iniciales, entonces:

(1) $\mathcal{B}$ es $(\mathcal{E}, \mathbb{M})$-factorizable en el sentido de [6], [10] y [19], es decir, toda $\mathcal{B}$-fuente $(B \xrightarrow{f_i} B_i)_I$ tiene una factorización
$$\begin{tikzcd} B \arrow[rr, "(f_i)_I"] \arrow[dr, "e"'] & & B_i \\ & C \arrow[ur, "(m_i)_I"'] & \end{tikzcd}$$
tal que $e \in \mathcal{E}$ y $(m_i)_I \in \mathbb{M}$.

(2) $\mathcal{B}$ tiene la propiedad de $(\mathcal{E}, \mathbb{M})$-diagonalización. En otras palabras, dados dos $\mathcal{B}$-morfismos f y e, donde $e \in \mathcal{E}$, y dos $\mathcal{B}$-fuentes $(f_i)_I$, $(m_i)_I$ con $(m_i)_I \in \mathbb{M}$ tales que para todo $i \in I$, $f_i \cdot e = m_i \cdot f$, existe un único $\mathcal{B}$-morfismo g tal que para toda $i \in I$ conmuta:
$$\begin{tikzcd} \cdot \arrow[r, "e"] \arrow[d, "f"'] & \cdot \arrow[d, "f_i"] \arrow[dl, dashed, "g"'] \\ \cdot \arrow[r, "m_i"'] & \cdot \end{tikzcd}$$

(3) $\mathbb{M}$ es cerrada bajo isomorfismos. Por lo tanto $\mathcal{B}$ es casi una $(\mathcal{E}, \mathbb{M})$-categoría como se define en [6], [10] y [19]. Falla, para que lo sea, que $\mathcal{E}$ sea cerrada bajo composición con isomorfismos. Sin embargo, $1_{\mathcal{B}} : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{B}$ es un $(\mathcal{E}, \mathbb{M})$-funtor y por lo tanto es $(\mathcal{E}, \mathbb{M})$-categoría en el sentido de [9]. Además $\mathcal{B}$, $\mathcal{E}$ y $\mathbb{M}$ siguen cumpliendo casi todas las propiedades mencionadas en 1.2 de [10]. Entre ellas están las siguientes:

(i) $\mathcal{E}$ es una clase de epimorfismos (como V es fiel, refleja epimorfismos).

(ii) Toda fuente extremada está en $\mathbb{M}$.

(Sea $(X \xrightarrow{g_i} Y_i)_I$ una $\mathcal{B}$-fuente extremada y sea
$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "(g_i)_I"] \arrow[dr, "e"'] & & Y \\ & Z \arrow[ur, "(m_i)_I"'] & \end{tikzcd}$$
una $(\mathcal{E}, \mathbb{M})$-factorización de $(g_i)_I$. Como e es epimorfismo, e es isomorfismo y, dado que $\mathbb{M}$ es cerrada bajo isomorfismos, $((g_i))_I \in \mathbb{M}$.
Como corolario de esto, todos los límites están en $\mathbb{M}$:
Si $(L, (l_i)_I)$ es límite de un funtor $D : I \longrightarrow \mathcal{B}$ entonces $(L, (l_i)_I)$ es fuente V-inicial

(iii) Si $\mathcal{A}$ es una subcategoría plena de $\mathcal{B}$ entonces la subcategoría $\mathcal{C}$ de $\mathcal{B}$ tal que
$A \in \operatorname{Ob} \mathcal{C} \iff$ existe $(A \xrightarrow{f_i} A_i)_I \in \mathbb{M}$ tal que para toda $i \in I$, $A_i \in \operatorname{Ob} \mathcal{A}$,
es la envolvente $\mathcal{E}$-reflexiva de $\mathcal{A}$ en $\mathcal{B}$ (esto es lo que probamos en el teorema).

Aparte, si $\mathcal{I}$ es la clase de $\mathcal{B}$-isomorfismos, entonces $\mathcal{I} \subset \mathbb{M}$ y $\mathcal{E} \cap \mathbb{M} \subset \mathcal{I}$.

Aprovechando esta nota, mencionaremos estos otros interesantes hechos:

(a) Si $(\mathcal{A}, U)$ es una categoría concreta inicialmente completa sobre $\mathcal{X}$, entonces U es un funtor absolutamente topológico y por lo tanto es también absolutamente cotopológico (consultar [6])

(b) Si $(\mathcal{A}, U)$ es inicialmente completa, entonces
$\mathcal{X}$ completa $\Rightarrow$ $\mathcal{A}$ es completa
$\mathcal{X}$ cocompleta $\Rightarrow$ $\mathcal{A}$ es cocompleta.
(esto es corolario de (a)).

NOTAS AL CAPÍTULO III.

[1] El análogo de esta proposición (según 9.6) es el conocido resultado siguiente:
Si X, Y, Z son espacios métricos (o topológicos con Z de Hausdorff), si $h: X \longrightarrow Y$ es una función tal que $\overline{h(X)} = Y$ y si f y $g: Y \longrightarrow Z$ son funciones continuas tales que $f \cdot h = g \cdot h$, entonces $h = g$.
En particular una función continua está determinada por sus valores en un subconjunto denso de su dominio. Este es el resultado correspondiente a 9.10.

[2] Esto es, la mínima $\xi \in \Xi_X$ que hace a las f_i mapeos entre fuentes.

[3] Es decir, la máxima $\xi \in \Xi_X$ que hace a las f_i mapeos entre fuentes.

[4] $\mathcal{A}^1$ pocas veces es legítima

[5] $\mathcal{A}^2$ es rara vez legítima

[6] ξ es una clase por ser $\mathcal{A}^2$ legítima

IV. E^2, E^3, E^4.

Ian Stewart nos habla de un hombre curioso que desarrolló una teoría matemática de la brocha de pintar. "Para plantear las ecuaciones de manera que pudiera resolverlas, tuvo que suponer que las cerdas eran planos semiinfinitos. La teoría no añadió nada nuevo a la pintura de la brocha gorda y fue de escaso interés para los matemáticos, porque deliberadamente se escogieron ecuaciones que pudieran resolverse por métodos conocidos"[1]. Recordamos también a ese otro hombre tenaz que según Chang Tzu, "al cabo de tres ímprobos años dominó el arte de matar dragones y que en el resto de sus días no dio con una sóla oportunidad de ejercitarlo" (Borges)

Los matemáticos no adoptan posiciones como las del dragonicida y del pintador en las historias que hemos referido. Compartimos con Stewart la creencia de que la labor del matemático (sea puro o aplicado) es la de "suministrar poderosas herramientas para resolver problemas matemáticos"[1]; éstos pueden venir sugeridos por posibles aplicaciones, pueden ser importantes problemas no resueltos, o bién, pueden formar parte de una investigación más abstracta de técnica matemática. Pensamos que principalmente del tercer tipo son los problemas que plantea y trata de resolver la topología categórica. La jóven teoría de compleciones iniciales y finales se ha desarrollado también dentro de este punto de vista; su avance está siendo veloz y su estado actual no es de ninguna manera el que hemos presentado hasta el capítulo anterior. En las innumerables páginas que anteceden a la presente, hemos introducido la teoría de compleciones iniciales, presentándola como generalización de les poclases. Si la situación actual fuera ésta en realidad, la teoría carecería de interés y estaría casi al nivel del arte de matar dragones o de la teoría de la brocha. Afortunadamente no es éste el caso.

El capítulo que estamos comenzando es el último de este "vademécum" de compleciones iniciales y en él pretendemos mostrar algunos ejemplos de la mencionada evolución de la teoría. Desdichadamente no hemos tenido tiempo ni espacio para explicar el estado actual de las compleciones iniciales y finales, mediante los resultados mencionados en Herrlich [8]. Remitimos al lector a este recomendable artículo, del cual, ayudándonos de Herrlich [7], desarrollamos las partes $\overline{IV}$, $\overline{V}$, $\overline{VI}$ y $\overline{VII}$. En el final de esta obra, sección 15, señalamos algunos ejemplos que son importantes porque muestran claramente el hecho, descuidado muchas veces (ver introducción, §15, o [7]) de que E^3 y E^4 suelen ser diferentes. También se dan ejemplos de categorías concretas que no tienen compleciones iniciales y/o finales. Nos apena no haber explicado con cuidado estos ejemplos; algunos son muy sencillos, pero para todos ellos su clara exposición es necesariamente larga. Sin embargo dichos ejemplos pueden considerarse como estimulantes ejercicios para que el lector desarrolle.

Es notable el cambio de estilo que ha venido experimentando nuestra redacción. En efecto, el capítulo I es divulgativo: Para aclarar cuáles son los fundamentos de nuestra teoría, hemos tenido que divulgar o dar a conocer algunos problemas antiguos y presentes sobre fundamentos de la Matemática. En el segundo capítulo y a veces en el tercero, se ha tratado de motivar cada nueva definición o propiedad. El capítulo II es introductorio, mientras que el III cierra prácticamente nuestra "íntima" relación con las poclases. Dicho capítulo (el III) es sumamente importante, ya que la demostración de que existen categorías que tienen compleciones iniciales as finales, y construcciones especiales de éstas, son expuestas allí.

Las propiedades más importantes, mencionadas en esta tesis, de las compleciones construídas en III están demostradas en este capítulo IV. Los teoremas que aquí se presentan son realmente difíciles, lo cual, aunado a la necesidad de exponerlas pronto, rápido y en forma clara, nos obliga a deslizarnos completamente dentro de la tradición deductivista. El estilo deductivista, que de hecho comenzamos a usar fuertemente en el capítulo III, "no dice de dónde vienen las ideas de prueba y que el teorema no surge de la cabeza del matemático del modo en que Palas Atenea salió totalmente armada de la cabeza de Zeus".[2] Sin embargo, como dijo Balmes, "la razón es fría, pero ve claro; dadle calor y no ofusquéis su claridad".

El valiente que logre llegar al impresionante teorema 14.12, tendrá como nosotros la certeza de no haber perdido el tiempo y de que la Teoría de Compleciones Iniciales no consiste en saber cómo matar dragones.

NOTA: Durante este capítulo, sean $\mathcal{X}$ una categoría fija y $(\mathcal{A},U)$ una categoría concreta sobre $\mathcal{X}$.

§12. COMPLECIONES INICIALES MÁS GRANDES.

12.1 DEFINICIÓN.

Si $E:(\mathcal{A},U)\longrightarrow(\mathcal{B},V)$ es un funtor concreto, para cada $B\in \mathrm{Ob}\,\mathcal{B}$ definimos:

(12.1.1) $\xi_B^E=\{(Va,A)\in \Xi_{VB} \mid B\xrightarrow{a} EA\in \mathrm{Mor}\,\mathcal{B}\}$,

y

(12.1.2) $\eta_B^E=\{(A,Va)\in \Sigma_{VB} \mid EA\xrightarrow{a} B\in \mathrm{Mor}\,\mathcal{B}\}$.

Obsérvese que si $E=1_{(\mathcal{A},U)}$ entonces $\xi_B^E=\xi_B$ (cfr. 10.12.1) y $\eta_B^E=\eta_B$ (cfr. 10.40 (2)). Recuérdese que para toda $A\in\mathrm{Ob}\,\mathcal{A}$, (UA,ξ_A) es objeto de $\mathcal{A}^2$, $\mathcal{A}^3$ y $\mathcal{A}^4$. No se puede asegurar lo mismo para (VB,ξ_B^E), a menos que E tenga determinadas propiedades. Veamos:

12.2. PROPOSICIÓN.

Si $E:(\mathcal{A},U)\longrightarrow(\mathcal{B},V)$ es un funtor concreto, entonces:

(1) Si E es extensión, para cada $A \in Ob\,\mathcal{A}$, $\xi^{E}_{EA} = \xi_A$ y $\eta^{E}_{EA} = \eta_A$

(2) Para todo $B \in Ob\,\mathcal{B}$, $(VB, \xi^{E}_{B}) \in Ob\,\mathcal{A}^2$.

(3) Si E conserva estructuras iniciales (resp. estructuras finales) entonces $(VB, \xi^{E}_{B}) \in Ob\,\mathcal{A}^3$ (resp. $(\eta^{E}_{B}, VB) \in Ob\,\mathcal{A}^{-3}$) para todo $B \in Ob\,\mathcal{B}$.

(4) Si E es extensión inicial y finalmente densa, entonces $(VB, \xi^{E}_{B}) \in Ob\,\mathcal{A}^4$ y $(\eta^{E}_{B}, VB) \in Ob\,\mathcal{A}^{-4}$. Más aún: $(\eta^{E}_{B}, VB, \xi^{E}_{B}) \in Ob\,\mathcal{A}^*$

Demostración:

(1) $\xi^{E}_{EA} = \{(Va, B) \in \Xi_{UA} \mid EA \xrightarrow{a} EB \in Mor\,\mathcal{B}\}$.

Si $a : EA \longrightarrow EB \in Mor\,\mathcal{B}$, como E es pleno, existe $\bar{a} : A \longrightarrow B \in \mathcal{A}$ tal que $E\bar{a} = a$. Por lo tanto, $(Va, B) = (VE\bar{a}, B) = (U\bar{a}, B) \in \xi_A$.
Si $(Ua, B) \in \xi_A$, entonces $Ea : EA \longrightarrow EB$ y $(Ua, B) = (VEa, B) \in \xi^{E}_{EA}$.

(2) Sea $B \in Ob\,\mathcal{B}$. Supongamos que $(Va, A) \in \xi^{E}_{B}$ y que $A \xrightarrow{f} C \in Mor\,\mathcal{A}$. Entonces $Uf \cdot Va = VEf \cdot Va = V(Ef \cdot a)$, con $Ef \cdot a : B \longrightarrow EC \in Mor\,\mathcal{B}$. Por lo tanto, $(Uf \cdot Va, C) \in \xi^{E}_{B}$.

(3) Supongamos que $VB \xrightarrow{b} VA \in \Xi_{VB}$ y que $(A \xrightarrow{f_i} A_i)_I$ es una fuente U-inicial tal que para todo $i \in I$, $(Uf_i \cdot b, A_i) \in \xi^{E}_{B}$. Entonces, para cada $i \in I$ existe $a_i : B \longrightarrow EA_i$ tal que $Va_i = Uf_i \cdot b$. Como E conserva estructuras iniciales, $(EA \xrightarrow{Ef_i} EA_i)_I$ es V-inicial, así que existe un $\mathcal{B}$-morfismo $a : B \longrightarrow EA$ tal que $Va = b$. Por lo tanto, $(b, A) = (Va, A) \in \xi^{E}_{B}$.

(4) Sea $(\eta, VB) = (VB, \xi^{E}_{B})^{op}$. Entonces
$\eta = \{(C, c) \in \Sigma_{VB} \mid$ para todo $a : B \rightarrow EA \in Mor\,\mathcal{B}$ existe un $\mathcal{A}$-mor-

fismo $f: C \longrightarrow A$ tal que $Uf = Va \cdot c \}$.

Supongamos que $b: EC \longrightarrow B$ y $a: B \longrightarrow EA$ son $\mathcal{B}$-morfismos. Por lo tanto, $a \cdot b \in \hom_{\mathcal{B}}(EC, EA)$ y como E es pleno, existe $f: C \longrightarrow A$ tal que $Ef = a \cdot c$. Con esto, $Uf = VEf = Va \cdot Vb$. Por lo tanto, para todo $(C, Vb) \in \eta_B^E$, $(C, Vb) \in \eta$.

Supongamos que $(C, c) \in \eta$ y que $(B \xrightarrow{a_i} EA_i)_I$ es la fuente de todos los E-morfismos con dominio B. Por lo tanto, para todo $i \in I$ existe $f_i: C \longrightarrow A_i$ tal que conmuta

$$\begin{tikzcd}
VEC = VC \arrow[d, "c"'] \arrow[drr, "Uf = VEf"] & & \\
VB \arrow[rr, "Va_i"'] & & UA_i = VEA_i
\end{tikzcd}$$

Por ser E inicialmente denso, $(a_i)_I$ es V-inicial (9.3(1)), así que existe $\bar{c}: EC \longrightarrow B$ tal que $V\bar{c} = c$. Con esto, $(C, c) = (C, V\bar{c}) \in \eta_B^E$. Por lo tanto, $\eta = \eta_B^E$. Por lo tanto, $(\eta_B^E, VB) = (VB, \xi_B^E)^{op}$. Con argumentos duales se prueba que $(VB, \xi_B^E) = (\eta_B^E, VB)^{op}$, así que $(VB, \xi_B^E)^{opop} = (VB, \xi_B^E)$ ∎

12.3. DEFINICIONES. OBSERVACIONES.

Supongamos que $E: (\mathcal{A}, U) \longrightarrow (\mathcal{B}, V)$ es una extensión de $(\mathcal{A}, U)$. Sean $f: B \longrightarrow B' \in \mathrm{Mor}\,\mathcal{B}$ y $(Va, A) \in \xi_{B'}^E$, con $a: B' \longrightarrow EA \in \mathrm{Mor}\,\mathcal{B}$. $a \cdot f: B \longrightarrow EA$ es un $\mathcal{B}$-morfismo, así que $(Va \cdot Vf, A) = (V(a \cdot f), A) \in \xi_B^E$. Por lo tanto, $(\xi_B^E, Vf, \xi_{B'}^E): (VB, \xi_B^E) \longrightarrow (VB', \xi_{B'}^E)$ es un $\mathcal{A}^{?}$-morfismo. Además, por 12.2 (1), para toda $A \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}$,

$(VEA, \xi^E_{EA}) = (UA, \xi_A)$. Se obtiene entonces el funtor concreto:

$$(12.3.1) \qquad G_E^{E^2} : \begin{cases} (\mathcal{B}, V) \longrightarrow (\mathcal{A}^2, U^2) \\ \quad B \longmapsto (VB, \xi_B^E) \\ B \xrightarrow{f} B' \longmapsto (\xi_B^E, Vf, \xi_{B'}^E) \end{cases}$$

tal que $G_E^{E^2} \cdot E = E^2$.

(12.3.2). Si E conserva estructuras iniciales, sea

$$G_E^{E^3} = G_E^{E^2} \Big|_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}^3}$$

$G_E^{E^3}$ está bien definido, por 12. 2 (3). $G_E^{E^3} : (\mathcal{B}, V) \longrightarrow (\mathcal{A}^3, U^3)$ es un funtor concreto (de casi-categorías) y

$$G_E^{E^3} \cdot E = G_E^{E^2} \cdot E \Big|_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}^3} = E^2 \Big|_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}^3} = E^3.$$

(12.3.3) Si E es inicial y finalmente, sea

$$G_E^{E^4} = G_E^{E^2} \Big|_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}^4}.$$

Entonces $G_E^{E^4}$ está bien definido. $G_E^{E^3} : (\mathcal{B}, V) \longrightarrow (\mathcal{A}^4, U^4)$ es un funtor concreto (posiblemente de casi-categorías), y

$$G_E^{E^4} \cdot E = E^4.$$

(12.3.4) $G_E^{E^n}$ es inicialmente denso (para $n = 2, 3, 4$), ya que si $(\mathcal{X}, \xi) \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}^4$, como $E^n = G_B^{E^n} \cdot E$ es inicialmente denso, existe $\left((\mathcal{X}, \xi) \xrightarrow{(\xi, f_i, \xi_{A_i})} E^n(A_i) = G_E^{E^n} EA_i\right)_I$ $G_E^{E^n}$-fuente U^n-inicial.

12.4 TEOREMA.

Si $E:(\mathcal{A},U)\longrightarrow(\mathcal{B},V)$ es extensión de $(\mathcal{A},U)$, entonces:

(1) Son equivalentes:

(a) E es inicialmente denso

(b) $G_E^{E^2}$ es extensión de $(\mathcal{B},V)$

(c) existe una extensión $F:(\mathcal{B},V)\longrightarrow(\mathcal{A}^2,U^2)$ tal que $F\cdot E=E^2$

(2) Son equivalentes:

(a) E es inicialmente denso y conserva estructuras iniciales

(b) $G_E^{E^3}$ es extensión de $(\mathcal{B},V)$

(c) existe una extensión $F:(\mathcal{B},V)\longrightarrow(\mathcal{A}^3,U^3)$ tal que $F\cdot E=E^3$

(3) Son equivalentes:

(a) E es inicial y finalmente denso.

(b) $G_E^{E^4}$ es extensión de $(\mathcal{B},V)$

(c) existe una extensión $F:(\mathcal{B},V)\longrightarrow(\mathcal{A}^4,U^4)$ tal que $F\cdot E=E^4$

Demostración:

(1).

(a)⇒(b): Para demostrar que $G_E^{E^2}$ es extensión, por 9.12 basta demostrar que es pleno. Para ello, sean $B,B'\in\mathrm{Ob}\,\mathcal{B}$ y $G_E^{E^2}B=(VB,\xi_B^E)\xrightarrow{(\xi_B^E,f,\xi_{B'}^E)}(VB',\xi_{B'}^E)=G_E^{E^2}(B')$ un $\mathcal{A}^2$-morfismo, con $f:VB\longrightarrow VB'$ $\mathcal{X}$-morfismo.

Si $(a_i:B'\longrightarrow EA_i)_I$ es la $\mathcal{B}$-fuente de todos los E-morfismos con dominio B', por ser E inicialmente denso,

$(a_i)_I$ es V-inicial .

Sea $i \in I$. Como $(\xi_B^E, f, \xi_{B'}^E) \in \operatorname{Mor} \mathcal{A}^2$ y $(Va_i, A_i) \in \xi_{B'}^E$, existe $b_i : B \longrightarrow EA_i \in \operatorname{Mor} \mathcal{B}$ tal que $(Va_i \cdot f, A_i) = (Vb_i, A_i)$. Por lo tanto, para toda $i \in I$ conmuta el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
VB \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, "Vb_i"] & \\
VB' \arrow[r, "Va_i"'] & UA_i = VEA_i
\end{tikzcd}$$

Existe entonces un $\mathcal{B}$-morfismo $\bar{f} : B \longrightarrow B'$ tal que $V\bar{f} = f$, así que $G_E^{E^2}(\bar{f}) = (\xi_B^E, V\bar{f}, \xi_{B'}^E) = (\xi_B^E, f, \xi_{B'}^E)$.

(c)⇒(a) : Sea $F : (\mathcal{B}, V) \longrightarrow (\mathcal{A}^2, U^2)$ una extensión tal que $FE = E^2$. Para toda $B \in \operatorname{Ob} \mathcal{B}$, $F(B) = (X, \xi) \in \operatorname{Ob} \mathcal{A}^2$ y $U^2(X, \xi) = U^2F(B) = VB$. Por lo tanto, $F(B) = (VB, \xi)$.

Sean $B \in \operatorname{Ob} \mathcal{B}$, y $(VB, \xi) = F(B)$.

Como E^2 es inicialmente denso, existe una E^2-fuente U^2-inicial $\left(F(B) = (VB, \xi) \xrightarrow{(\xi, f_i, \xi_{A_i})} E^2(A_i) = FE(A_i) \right)_I$.

Como F es pleno, para toda $i \in I$ existe $h_i : B \longrightarrow EA_i$ tal que $Fh_i = (\xi, f_i, \xi_{A_i})$. Sean $(C \xrightarrow{g_i} EA_i)_I$ una $\mathcal{B}$-fuente y $f : VC \longrightarrow VB$ un $\mathcal{X}$-morfismo tales que el triángulo siguiente conmuta para toda $i \in I$

$$\begin{tikzcd}
VC = U^2F(C) \arrow[r, "U^2F(g_i) = Vg_i"] \arrow[d, "f"'] & UA_i = U^2(A_i, \xi_{A_i}) = VEA_i \\
VB = U^2F(B) \arrow[ur, "U^2F(h_i) = Vh_i"'] &
\end{tikzcd}$$

Como $(Fh_i)_I$ es U^2-inicial, existe $\bar{f} : FC \longrightarrow FB$ tal que $U^2(\bar{f}) = f$. Pero F es pleno y por lo tanto, existe

$\bar{\bar{f}} : C \longrightarrow B$ tal que $F(\bar{\bar{f}}) = \bar{f}$. Esto implica que $V\bar{\bar{f}} = U^2 F \bar{\bar{f}} = U^2 \bar{f} = f$ y con ello que $(h_i)_I$ es V-inicial.

(2)

<u>(a)⇒(b)</u>: Como $G_E^{E^3} = G_E^{E^2}\Big|^{\mathcal{A}^3}_{\mathcal{B}}$ y por (1), $G_E^{E^2}$ es extensión, también $G_E^{E^3}$ es extensión.

<u>(c)⇒(a)</u>: Sea $F : (\mathcal{B}, V) \longrightarrow (\mathcal{A}^3, U^3)$ una extensión tal que $F \cdot E = E^3$. Para todo $B \in Ob\,\mathcal{B}$, $F(B) = (VB, \xi) \in Ob\,\mathcal{A}^3$. Sea $i : (\mathcal{A}^3, U^3) \longrightarrow (\mathcal{A}^2, U^2)$ la inclusión. Entonces i es extensión. Por lo tanto, $F' = i \circ F : (\mathcal{B}, V) \longrightarrow (\mathcal{A}^2, U^2)$ es extensión de $(\mathcal{B}, V)$ tal que $F' \circ E = i \cdot F \cdot E = i \cdot E^3 = E^2$. Entonces, por (1), E es inicialmente denso.
Supongamos ahora que $(A \xrightarrow{f_i} A_i)_I$ es una $\mathcal{A}$-fuente U-inicial. Como E^3 conserva estructuras iniciales, $((UA, \xi_A) \xrightarrow{E^3(f_i)} (UA_i, \xi_{A_i}))_I$ es U^3-inicial. Sea $(B \xrightarrow{g_i} EA_i)_I$ una $\mathcal{B}$-fuente y sea $f : VB \longrightarrow VEA$ tal que el diagrama que sigue conmute para todo $i \in I$:

$$\begin{tikzcd}
U^3FB = VB \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, "Vg_i"] & \\
U^3FEA = VEA = UA \arrow[r, "VEf_i"'] & VEA_i
\end{tikzcd}$$

Por lo tanto, para todo $i \in I$, $U^3E^3f_i \cdot f = Uf_i \cdot f = VEf_i \cdot f = Vg_i = U^3Fg_i$ y como $(E^3 f_i)_I$ es U^3-inicial, existe un $\mathcal{A}^3$-morfismo $h : FB \longrightarrow FEA$ tal que $U^3 h = f$. Pero F es pleno y por lo tanto existe $\bar{f} : B \longrightarrow EA \in Mor\,\mathcal{B}$ tal que $F\bar{f} = h$. Por lo tanto, $V\bar{f} = U^3 F \bar{f} = U^3 h = f$.

(3).

<u>(a)⇒(b):</u> Como $G_E^{E^4} = G_E^{E^2}|^{\mathcal{A}^4}_{\mathcal{B}}$, por (1), $G_E^{E^4}$ es extensión.

<u>(c)⇒(a):</u> Sea $F : (\mathcal{B}, V) \longrightarrow (\mathcal{A}^4, U^4)$ una extensión tal que $F \cdot E = E^4$. Para todo $B \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{B}$, $FB = (VB, \xi) \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}^4$.
Sea $i : (\mathcal{A}^4, U^4) \hookrightarrow (\mathcal{A}^2, U^2)$ la inclusión. Entonces $F' = i \cdot F : (\mathcal{B}, V) \longrightarrow (\mathcal{A}^2, U^2)$ es extensión de $(\mathcal{B}, V)$ tal que $F' \cdot E = i \cdot F \cdot E = i \cdot E^4 = E^2$. Por (1), E es inicialmente denso. Probaremos que E es finalmente denso.
Sea $B \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{B}$. Como E^4 es finalmente denso, existe un E^4-pozo U^4-final $\left(E^4(A_i) = FE(A_i) \xrightarrow{(\xi_{A_i}, f_i, \xi)} F(B) = (\Xi, \xi)\right)_I$
Como F es pleno, para cada $i \in I$ existe $h_i : E(A_i) \longrightarrow B$ tal que $Fh_i = (\xi_{A_i}, f_i, \xi)$. Sea $(EA_i \xrightarrow{g_i} C)$ un $\mathcal{B}$-pozo y sea $(f : VB \longrightarrow VC)$ un $\mathcal{X}$-morfismo tal que para toda $i \in I$ conmuta el diagrama

$$\begin{tikzcd}
VEA_i \arrow[r, "Vh_i"] \arrow[dr, "Vg_i"'] & VB \arrow[d, "f"] \\
 & VC
\end{tikzcd}$$

Por lo tanto, para cada $i \in I$, $U^4 Fh_i \cdot f = Vh_i \cdot f = Vg_i = U^4 F g_i$, y, dado que $(Fh_i)_I$ es U^4-inicial, existe $\bar{f} : FB \longrightarrow FC$ tal que $U^4 \bar{f} = f$. Como F es pleno, existe $\bar{\bar{f}} : B \longrightarrow C$ tal que $F\bar{\bar{f}} = \bar{f}$. Por lo tanto, $V\bar{\bar{f}} = U^4 F \bar{\bar{f}} = U^4 \bar{f} = f$.
Entonces $(h_i)_I$ es V-final ∎

12.5. COROLARIO 1.

Toda extensión inicialmente densa de $(\mathcal{A},U)$ es isomorfa a una subcategoría plena de $(\mathcal{A}^2,U^2)$

Demostración:

Sea $E:(\mathcal{A},U)\longrightarrow(\mathcal{B},V)$ una extensión inicialmente densa de $(\mathcal{A},U)$. Por 12.4 (1), $G_E^{E^2}:(\mathcal{B},V)\longrightarrow(\mathcal{A}^2,U^2)$ es extensión. Si $\mathcal{C}=G_E^{E^2}(\mathcal{B})$, entonces $G_E^{E^2}\Big|_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}:(\mathcal{B},V)\longrightarrow(\mathcal{C},U^2|_{\mathcal{C}})$ es isomorfismo concreto tal que $G_E^{E^2}\Big|_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}\cdot E=E^2\Big|_{\mathcal{A}}^{\mathcal{C}}$. $\mathcal{C}$ es plena en $\mathcal{A}^2$ pues $G_E^{E^2}$ es pleno. ∎

12.6. COROLARIO DE 12.5

Toda extensión inicialmente densa de $(\mathcal{A},U)$ (en particular toda compleción inicial de $(\mathcal{A},U)$) conserva estructuras iniciales.

Demostración:

Se sigue de 12.5, 10.21 y 9.5 ∎

12.7. COROLARIO 2.

Toda extensión inicialmente densa de $(\mathcal{A},U)$ que conserve estructuras iniciales es isomorfa a una subcategoría plena de $(\mathcal{A}^3,U^3)$ ∎

12.8. COROLARIO 3.

Toda extensión inicial y finalmente densa de $(\mathcal{A},U)$ es isomorfa a una subcategoría plena de $(\mathcal{A}^4,U^4)$. ∎

12.9. DEFINICIÓN.

Si $E : (\mathcal{A}, U) \longrightarrow (\mathcal{B}, V)$ y $E' : (\mathcal{A}, U) \longrightarrow (\mathcal{B}', V')$ son extensiones (no necesariamente legítimas) de $(\mathcal{A}, U)$, diremos que E es más pequeña que E' y pondremos en este caso $E \leq E'$, si existe una extensión $F : (\mathcal{B}, V) \longrightarrow (\mathcal{B}', V')$ tal que $F \cdot E = E'$

Obsérvese que el conglomerado de todas las extensiones (legítimas) de $(\mathcal{A}, U)$ está preordenado por la relación $\leq$

12.10. DEFINICIÓN.

Una extensión $E : (\mathcal{A}, U) \longrightarrow (\mathcal{B}, V)$ con alguna propiedad P es llamada una extensión más grande con la propiedad P, si satisface las siguientes condiciones:

(1) Si una inmersión plena (extensión no necesariamente legítima) $E' : (\mathcal{A}, U) \longrightarrow (\mathcal{B}', V')$ tiene la propiedad P[4], entonces $E' \leq E$.

(2) Si una extensión $E' : (\mathcal{B}, V) \longrightarrow (\mathcal{B}', V')$ es tal que $E' \cdot E$ tiene la propiedad P, entonces E' es un isomorfismo.

12.11. PROPOSICIÓN.

Las extensiones más grandes con propiedad P, si existen, están determinadas de manera única, salvo por isomorfismo ∎

12.12. TEOREMA.

$(\mathcal{A}, U)$ tiene una compleción inicial más grande si y sólo si $\mathcal{A}^2$ es legítima. En este caso, $E^2: (\mathcal{A}, U) \longrightarrow (\mathcal{A}^2, U^2)$ es la compleción inicial más grande de $(\mathcal{A}, U)$.

Demostración:

Supongamos que $E: (\mathcal{A}, U) \longrightarrow (\mathcal{B}, V)$ es una compleción inicial más grande. Aquí la propiedad P es ser compleción inicial. $E^2: (\mathcal{A}, U) \longrightarrow (\mathcal{A}^2, U^2)$ es inmersión plena inicialmente densa y $(\mathcal{A}^2, U^2)$ es inicialmente completa. En otras palabras, E^2 tiene la propiedad P. Por lo tanto existe una inmersión plena $F: (\mathcal{A}^2, U^2) \longrightarrow (\mathcal{B}, V)$. Como $\mathcal{B}$ es legítima, $\mathcal{A}^2$ es legítima.

Supongamos que $\mathcal{A}^2$ es legítima. Probaremos a continuación que $E^2: (\mathcal{A}, U) \longrightarrow (\mathcal{A}^2, U^2)$ es la compleción inicial más grande de $(\mathcal{A}, U)$.

(1) Si $E: (\mathcal{A}, U) \longrightarrow (\mathcal{B}, V)$ es una compleción inicial, por 12.4(1), $G_E^{E^2}$ es extensión de $(\mathcal{B}, V)$ tal que $G_E^{E^2} \cdot E = E^2$. Por lo tanto $E \leq E^2$.

(2) Sea $E: (\mathcal{A}^2, U^2) \longrightarrow (\mathcal{B}, V)$ una extensión tal que EE^2 es compleción inicial. Tenemos que demostrar que E es isomorfismo. Para ello, como E es extensión, basta ver que $E: Ob\,\mathcal{A}^2 \longrightarrow Ob\,\mathcal{B}$ es suprayectiva.

$E \cdot E^2: (\mathcal{A}, U) \longrightarrow (\mathcal{B}, V)$ es extensión inicialmente densa de $(\mathcal{A}, U)$, lo cual implica que

$$G_{EE^2}^{E^2}: (\mathcal{B}, V) \longrightarrow (\mathcal{A}^2, U^2)$$

es extensión de $(\mathcal{B}, V)$ tal que $G_{EE^2}^{E^2} \cdot EE^2 = E^2$.

Por comodidad, sea $G = G_{EE^2}^{E^2}$. Se tiene entonces que conmuta el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A} \arrow[dr, "E^2"] \arrow[rrdd, "U"] \arrow[dddd, "E^2"'] & & \\
& \mathcal{A}^2 \arrow[dr, "U^2"] \arrow[dd, "E"] & \\
& & X \\
& \mathcal{B} \arrow[ur, "V"] \arrow[dl, "G"] & \\
\mathcal{A}^2 \arrow[uurr, "U^2"'] & &
\end{tikzcd}$$

Recordemos que para todo $B \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{B}$, $G(B) = (VB, \xi_B^{EE^2})$, donde $\xi_B^{EE^2} = \{(Va, A) \in \Xi_{VB} \mid B \xrightarrow{a} EE^2A \in \mathrm{Mor}\,\mathcal{B}\}$. Durante esta demostración, para cada $B \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{B}$, denotaremos por δ_B a $\xi_B^{EE^2}$.

Para ver que $E : \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}^2 \longrightarrow \mathrm{Ob}\,\mathcal{B}$ es suprayectiva, demostraremos que $E(VB, \delta_B) = B$ para toda $B \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{B}$.
Sea $B \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{B}$.
Supongamos que $(B \xrightarrow{f_i} EE^2A_i)_I$ es la fuente de todos los EE^2-morfismos con dominio B. Como EE^2 es inicialmente denso, por 9.3 $(f_i)_I$ es V-inicial. Por la misma razón, la fuente $(EGB \xrightarrow{g_j} EE^2A'_j)_{j \in J}$ de todos los EE^2-morfismos con dominio EGB es también V-inicial.

Por ser E pleno, para toda $j \in J$ existe un $\mathcal{A}^2$-morfismo $(\delta_B, \bar{g}_j, \xi_{A'_j}) : GB \longrightarrow E^2A'_j$ tal que $E(\delta_B, \bar{g}_j, \xi_{A'_j}) = g_j$.

Sea $j \in J$. Entonces $Vg_j = VE(\delta_B, \bar{g}_j, \xi_{A'_j}) = U^2(\delta_B, \bar{g}_j, \xi_{A'_j}) =$
$= \bar{g}_j$. Por lo tanto,

$$(\delta_B, Vg_j, \xi_{A'_j}) \in Mor\,\mathcal{A}^2.$$

Como $(1_{UA'_j}, A'_j) \in \xi_{A'_j}$, $Vg_j = 1_{UA'_j} \cdot Vg_j \in \delta_B$, así que existe $i_j \in I$ tal que $Vg_j = Vf_{i_j}$ (por ser $\delta_B = (VB \xrightarrow{Vf_i} VEE^2 A_i)_I$).

Por lo tanto, para toda $j \in J$, el triángulo

$$\begin{tikzcd}
VB \arrow[d, "1_{VB}"'] \arrow[dr, "Vf_{i_j}"] & \\
VEGB \arrow[r, "Vg_j"'] & VEE^2 A'_j
\end{tikzcd}$$

es conmutativo.

Como $(g_j)_{j \in J}$ es V-inicial, existe $h : B \longrightarrow EFB$ tal que $Vh = 1_{VB}$.

Sea $i \in I$. Entonces $Vf_i : VB \longrightarrow VEE^2 A_i = UA_i$.
Afirmamos que

$$GB = (VB, \delta_B) \xrightarrow{(\delta_B, Vf_i, \xi_{A_i})} (UA_i, \xi_{A_i}) \in Mor\,\mathcal{A}^2.$$

En efecto, si $(Ua, C) \in \xi_{A_i}$ con $A_i \xrightarrow{a} C \in Mor\,\mathcal{A}$, existe $k \in I$ tal que $EE^2 a \cdot f_i = f_k$. Por lo tanto, $(Ua \cdot Vf_i, C) = (V(EE^2 a \cdot f_i), C) = (Vf_k, C) \in \delta_B$.

Esto implica que $E(\delta_B, Vf_i, \xi_{A_i}) : EGB \longrightarrow EE^2 A_i$ es un $\mathcal{B}$-morfismo con dominio EGB. Por lo tanto, existe $j_i \in J$ tal que $E(\delta_B, Vf_i, \xi_{A_i}) = g_{j_i}$ y con ello, tal que $Vf_i = U^2(\delta_B, Vf_i, \xi_{A_i}) = VE(\delta_B, Vf_i, \xi_{A_i}) = Vg_{j_i}$.

Entonces, para cada $i \in I$,

$$\begin{tikzcd} VEGB \arrow[d, "1_{VB}"'] \arrow[drr, "Vg_{si}"] & & \\ VB \arrow[rr, "Vf_i"'] & & VEE^2A_i \end{tikzcd}$$

es conmutativo. Como $(f_i)_I$ es V-inicial, existe $h': EGB \longrightarrow B$ tal que $Vh' = 1_{VB}$. Por lo tanto $V(h'.h) = Vh' \cdot Vh = 1_{VB} = V1_B$ y, dado que V es fiel, $h'.h = 1_B$. Análogamente $h \cdot h' = 1_{EGB}$. Esto demuestra que h es isomorfismo y por tanto identidad, pues V es amnésico. Por consiguiente, $EGB = B$ ∎

Lea cuidadosamente la demostración de que si $\mathcal{A}^2$ es legítima entonces E^2 es la compleción inicial más grande de $(\mathcal{A}, U)$. Se convencerá fácilmente de que los mismos argumentos usados en ella (simplemente sustituyendo E^2 por E^3 o por E^4), sirven para demostrar el siguiente teorema:

12.13. TEOREMA.

(1) $(\mathcal{A}, U)$ tiene una compleción inicial más grande que conserva estructuras iniciales si y sólo si $\mathcal{A}^3$ es legítima. En este caso, $\mathcal{A}^3$ es la compleción inicial más grande de $(\mathcal{A}, U)$ que conserva estructuras iniciales

(2) $(\mathcal{A}, U)$ tiene una compleción simultáneamente inicial y final más grande, si y sólo si $\mathcal{A}^4$ es legí-

tima. En este caso $\mathcal{A}^4$ es la compleción inicial y final más grande de $(\mathcal{A}, U)$. ∎

En la mencionada demostración de 12.12, no se usó la propiedad de levantamientos óptimos que define a las categorías concretas inicialmente o finalmente completas. En otras palabras, la prueba de 12.12 es también la del teorema:

12.14. TEOREMA.

(1) $(\mathcal{A}, U)$ tiene una extensión más grande inicialmente densa si y sólo si $\mathcal{A}^2$ es legítima. $\mathcal{A}^2$ es en este caso la extensión más grande inicialmente densa.

(2) $(\mathcal{A}, U)$ tiene una extensión más grande que es inicialmente densa y que conserva estructuras si y sólo si $\mathcal{A}^3$ es legítima. En este caso, E^3 es la extensión más grande inicialmente densa y que conserva estructuras iniciales.

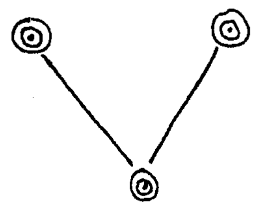
(3) $(\mathcal{A}, U)$ tiene una extensión más grande inicial y finalmente densa si y sólo si $\mathcal{A}^4$ es legítima. En este caso, E^4 es la extensión más grande inicial y finalmente densa.

Pondremos fin a esta sección con una observación interesante:

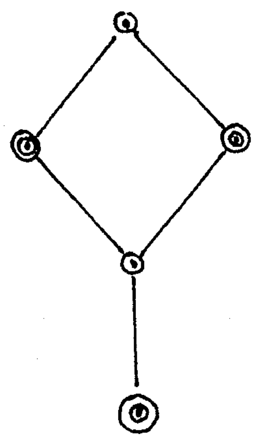
12.15. OBSERVACIÓN.

La compleción $\mathcal{A}^2$ rara vez es legítima. Esto se debe principalmente a que toda categoría concreta $(\mathcal{A}, U)$ sobre X tiene una extensión propia inicialmente densa. En particular, ninguna categoría concreta $(\mathcal{A}, U)$ es igual a su compleción inicial más grande $(\mathcal{A}^2, U^2)$, dado que fuentes vacías dan lugar a objetos de $\mathcal{A}^2$ que no están en $E^2(\mathcal{A})$.

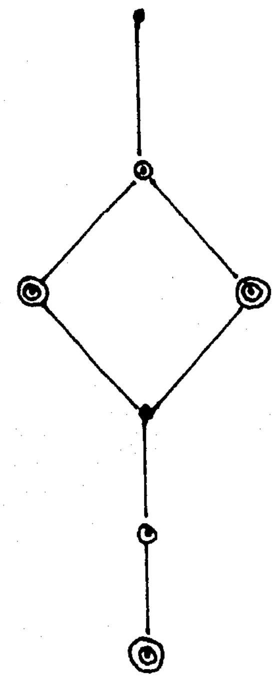
El proceso para formar compleciones iniciales más grandes (cuando se puede llevar a cabo de algún modo) no es idempotente. Veamos un ejemplo. Sea $\mathcal{A}$ el conjunto parcialmente ordenado siguiente:

$\mathcal{A} =$ 

Con la técnica usada en 11.2, se llega a que $\mathcal{A}^2$ está representada por:



Repitiendo el proceso, obtenemos $((\mathcal{A}^2)^2, (U^2)^2)$:



Obsérvese cómo se van extendiendo las sucesivas compleciones más grandes $(\mathcal{A}^2, U^2)$, $((\mathcal{A}^2)^2, (U^2)^2)$, $(((\mathcal{A}^2)^2)^2, ((U^2)^2)^2)$, etc.

Esta nada agradable situación tiene su origen en el hecho de que el conglomerado de las extensiones inicialmente densas no es cerrado bajo composición, lo cual se ve claramente en nuestro ejemplo:

$E_1^2 : (\mathcal{A}, U) \longrightarrow (\mathcal{A}^2, U^2)$ y $E_2^2 : (\mathcal{A}^2, U^2) \longrightarrow ((\mathcal{A}^2)^2, (U^2)^2)$

son inicialmente densas, pero la composición

$$E_2^2 \cdot E_1^2 : (\mathcal{A}, U) \longrightarrow ((\mathcal{A}^2)^2, (U^2)^2)$$

no lo es. (cualquiera de los $(\mathcal{A}^2)^2$-objetos de la forma $\odot$ no es dominio de $E_2^2 \cdot E_1^2$-fuentes.).

La situación es mucho más agradable si nos restringimos a extensiones que conservan estructuras iniciales. En efecto.

(12.15.1) PROPOSICIÓN.

Si $E_1 : (\mathcal{A},U) \longrightarrow (\mathcal{B},V)$ y $E_2 : (\mathcal{B},V) \longrightarrow (\mathcal{C},W)$ son extensiones inicialmente densas que conservan estructuras iniciales, entonces $E_2 \cdot E_1$ es también una extensión inicialmente densa que conserva estructuras iniciales ∎

§13. COMPLECIONES INICIALES UNIVERSALES.

13.1. DEFINICIÓN.

Una compleción inicial $E : (\mathcal{A},U) \longrightarrow (\mathcal{B},V)$ de $(\mathcal{A},U)$ es llamada universal si satisface las siguientes condiciones:

(i) E conserva estructuras iniciales

(ii) Para toda categoría concreta inicialmente completa $(\mathcal{C},W)$ y todo funtor concreto $F : (\mathcal{A},U) \longrightarrow (\mathcal{C},W)$ que conserve estructuras iniciales, existe un único funtor concreto $G : (\mathcal{B},V) \longrightarrow (\mathcal{C},W)$ que conserva estructuras iniciales y tal que $F = G \cdot E$.

13.2. PROPOSICIÓN.

Una compleción inicial universal, si existe, está determinado de manera única, salvo por isomorfimos.

Demostración:

Sean $E : (\mathcal{A},U) \longrightarrow (\mathcal{B},V)$ y $E' : (\mathcal{A},U) \longrightarrow (\mathcal{B}',U')$ compleciones iniciales universales de $(\mathcal{A},U)$. Por la condición (ii) de 13.1, existen funtores concretos $G: (\mathcal{B},V) \longrightarrow (\mathcal{B}',V')$ y $G': (\mathcal{B}',V') \longrightarrow (\mathcal{B},V)$ que conservan estructuras iniciales y tales que $GE = E'$, $G'E' = E$. Por lo tanto, $G'GE = E = 1_{\mathcal{A}} \cdot E$ y $GG' \cdot E' = 1_{\mathcal{A}'} \cdot E'$. Como $G'G$ y GG' conservan estructuras iniciales y E y E' son inicialmente densos, por 9.9, $GG' = 1_{\mathcal{A}'}$ y $G'G = 1_{\mathcal{A}}$. Por consiguiente, G es un isomorfismo concreto ∎

13.3. TEOREMA.

$(\mathcal{A},U)$ tiene una compleción inicial universal si y sólo si $\mathcal{A}^3$ es legítima. En este caso, E^3 es la compleción inicial universal de $(\mathcal{A},U)$.

Demostración:

Supongamos primero que $\mathcal{A}^3$ es legítima. Probaremos que $E^3: (\mathcal{A},U) \longrightarrow (\mathcal{A}^3, U^3)$ es la compleción universal de $(\mathcal{A},U)$. Por 10.29, E^3 conserva estructuras iniciales.

Sea $(\mathcal{B},V)$ una categoría concreta inicialmente completa y $F: (\mathcal{A},U) \longrightarrow (\mathcal{B},V)$ un funtor concreto que conserva estructuras iniciales.

Sea $(X, \xi = (X \xrightarrow{a_i} UA_i)_I) \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}^3$.

Entonces $\xi = (X \xrightarrow{a_i} VFA_i)_I$) es una V-fuente en X. Como $(\mathcal{B},V)$ es inicialmente completa, ξ tiene un V-levantamiento óptimo

$$(B_{(X,\xi)} \xrightarrow{\bar{a}_i} FA_i)_I$$

Este levantamiento es único, por 8.6. Definimos así una función :

$$(1)\quad G\begin{cases} \mathrm{ob}\,\mathcal{A}^3 \longrightarrow \mathrm{ob}\,\mathfrak{B} \\ (\mathfrak{X},\xi) \longmapsto B_{(\mathfrak{X},\xi)}. \end{cases}$$

Cuando no haya peligro de confusión, denotaremos por $B_{\mathfrak{X}}$ a $B_{(\mathfrak{X},\xi)}$.

Sean $(\mathfrak{X}, \xi=(\mathfrak{X} \xrightarrow{a_i} UA_i)_I)$ y $(\mathfrak{X}',\xi'=(\mathfrak{X}' \xrightarrow{a'_j} UA'_j)_J)$ dos $\mathcal{A}^3$-objetos y sea $(\xi, f, \xi'): (\mathfrak{X},\xi) \longrightarrow (\mathfrak{X}',\xi') \in \mathrm{Mor}\,\mathcal{A}^3$.
Supongamos que $(B_{\mathfrak{X}} \xrightarrow{\bar{a}_i} FA_i)_I$ y $(B_{\mathfrak{X}'} \xrightarrow{\bar{a}'_j} FA'_j)$ son los V-levantamientos óptimos de ξ y ξ', respectivamente.
Como $(\xi, f, \xi') \in \mathrm{Mor}\,\mathcal{A}'$, para cada $j\in J$ existe $i_j \in I$ tal que $a'_j \cdot f = a_{i_j}$. Por lo tanto, para toda $j\in J$ conmuta el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{X} = VB_{\mathfrak{X}} \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, "V\bar{a}_{i_j} = a_{i_j}"] & \\
\mathfrak{X}' = VB_{\mathfrak{X}'} \arrow[r, "a'_j = V\bar{a}'_j"'] & VFA'_j
\end{tikzcd}$$

Por ser $(\bar{a}'_j)_J$ V-inicial, existe un único $\mathfrak{B}$-morfismo $\hat{f}: B_{\mathfrak{X}} \longrightarrow B_{\mathfrak{X}'}$ tal que $V\hat{f} = f$ y para toda $j \in J$, $\bar{a}'_j \cdot \hat{f} = \bar{a}_{i_j}$. Así, para cada pareja de $\mathcal{A}^3$-objetos $(\mathfrak{X},\xi)$, $(\mathfrak{X}',\xi')$ está definida la función

$$(2)\quad G_{(\mathfrak{X},\xi;\mathfrak{X}',\xi')}\begin{cases} \hom_{\mathcal{A}^3}(\mathfrak{X},\xi;\mathfrak{X}',\xi') \longrightarrow \hom_{\mathfrak{B}}(B_{\mathfrak{X}},B_{\mathfrak{X}'}) \\ (\xi, f, \xi') \longmapsto \hat{f} \end{cases}$$

Es fácil ver que G y todos los $G_{(X,\xi;\,X',\xi')}$ forman un funtor

$$G^F_{E^3} : \mathcal{A}^3 \longrightarrow \mathcal{B},$$

que por comodidad denotaremos por G.
$G : (\mathcal{A}^3, U^3) \longrightarrow (\mathcal{B}, V)$ es claramente concreto.

A continuación demostraremos que G conserva estructuras iniciales:

Sea $\left((X,\xi) \xrightarrow{(\xi, f_i, \xi_i)} (X_i, \xi_i)\right)_I$ una $\mathcal{A}^3$-fuente U^3-inicial. Queremos ver que

(3) $\quad \left(B_X = G(X,\xi) \xrightarrow{\hat{f}_i = G(\xi, f_i, \xi_i)} B_{X_i} = G(X_i, \xi_i)\right)_I$

es V-inicial. Para ello, tomemos una $\mathcal{B}$-fuente $(C \xrightarrow{g_i} B_{X_i})$ y un $\mathcal{X}$-morfismo $f : VC \longrightarrow VB_X = X$ tales que para cada $i \in I$ conmute el diagrama:

(4)
$$\begin{tikzcd}
VC \arrow[d, "f"'] \arrow[drr, "Vg_i"] & & \\
X = VB_X \arrow[rr, "V\hat{f}_i = f_i"'] & & VB_{X_i} = X_i
\end{tikzcd}$$

Como F conserva estructuras iniciales, por 12.2 (3) para cada $B \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{B}$, $(VB, \xi_B^F) \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}^3$.
Sea

$$\xi_C^F = (VC \xrightarrow{Vc_i} UA_i = VFA_i)_I, \quad \text{donde}$$

$(c_i : C \longrightarrow FA_i)$ es la fuente de todos los F-morfismos con dominio C. Sea $(B_{VC} \xrightarrow{\overline{Vc_i}} FA_i)$ el V-levantamiento óptimo de ξ_C^F. Por lo tanto conmuta el diagrama:

(5)
$$\begin{tikzcd}
VC \arrow[d, "1_{VC}"'] \arrow[drr, "Ve_i"] & & \\
VB_{VC} \arrow[rr, "V\overline{ve_i} = Ve_i"'] & & VFA_i
\end{tikzcd}$$

(6) Como $(\overline{ve_i})_I$ es V-inicial, existe $\ell : C \longrightarrow B_{VC}$ $\mathcal{B}$-morfismo tal que $V\ell = 1_{VC}$ y $\overline{ve_i} \cdot \ell = c_i$, para toda $i \in I$.

Sea $i \in I$. $Vg_i : VC \longrightarrow X_i = VB_{X_i}$. Demostraremos que $(\xi_C^F, Vg_i, \xi_i) \in \mathrm{Mor}\,\mathcal{A}^3$.

Sea $(a, A) \in \xi_i$. $\xi_i = (X_i \xrightarrow{a_k^i} VFA_k^i)_{k \in K_i}$ tiene un V-levantamiento óptimo $(B_{X_i} \xrightarrow{\overline{a}_k^i} FA_k^i)_{k \in K_i}$.
Por lo tanto, $a \cdot Vg_i = V\bar{a} \cdot Vg_i = V(\bar{a} \cdot g_i)$ y $\bar{a} \cdot g_i : C \longrightarrow FA$ es un $\mathcal{B}$-morfismo. Por ello, $(a \cdot Vg_i, A) = (V(\bar{a} \cdot g_i), A) \in \xi_C^F$.

Por lo tanto, $(\xi_C^F, Vg_i, \xi_i) \in \mathrm{Mor}\,\mathcal{A}^3$, para toda $i \in I$.
Esto implica que para cada $i \in I$,

$$G(\xi_C^F, Vg_i, \xi_i) = \widehat{Vg_i} : B_{VC} \longrightarrow B_{X_i} \in \mathrm{Mor}\,\mathcal{B}.$$

Además, para toda $i \in I$ conmuta:

(7)
$$\begin{tikzcd}
VB_{VC} = VC \arrow[d, "f"'] \arrow[drr, "V\widehat{Vg_i} = Vg_i"] & & \\
X = VB_X \arrow[rr, "V\hat{f}_i = f_i"'] & & VB_{X_i} = X_i
\end{tikzcd}$$

(8) Afirmamos que

$$(Vc = VB_{Vc}\ ,\ \xi^F_{B_{Vc}}) \xrightarrow{(\xi^F_{B_{Vc}},\, f,\, \xi)} (\mathfrak{X}, \xi) \in \mathrm{Mor}\, \mathfrak{A}^3.$$

Para probar esta afirmación, téngase en cuenta que $(\xi, f_i, \xi_i)_I$ es $\mathcal{O}^3$-inicial, lo que, por 10.30, implica que ξ es la subclase más pequeña de $\Xi_{\mathfrak{X}}$ tal que:

(i) Para todo $i \in I$, (ξ, f_i, ξ_i) es un mapeo entre fuentes.

(ii) $(\mathfrak{X}, \xi)$ es débilmente cerrada.

(iii) $(\mathfrak{X}, \xi)$ es fuente semicerrada

Sea $\xi' = \{(a, A) \in \Xi_{\mathfrak{X}} \mid (a \cdot f, A) \in \xi^F_{B_{Vc}}\}$.

La afirmación quedará demostrada si probamos que ξ' satisface (i), (ii) y (iii).

(i). Sean $i \in I$ y $(a, A) \in \xi_i$

$$f_i \cdot f = V\widehat{Vg_i} \quad \text{y} \quad a = V\bar{a} \quad \text{con } \bar{a} : B_{\mathfrak{X}_i} \longrightarrow FA.$$

Por lo tanto, $a \cdot f_i \cdot f = V\bar{a} \cdot V\widehat{Vg_i} = V(\bar{a} \cdot \widehat{Vg_i})$, con $\bar{a} \cdot \widehat{Vg_i} : B_{Vc} \longrightarrow FA$. Entonces $(a \cdot f_i \cdot f, A) \in \xi^F_{B_{Vc}}$, lo que implica que $(a \cdot f_i, A) \in \xi'$.

Por lo tanto, para toda $i \in I$, (ξ', f_i, ξ_i) es un mapeo de fuentes.

(ii). Sea $(a, A) \in \xi'$ y sea $A \xrightarrow{b} B \in \mathrm{Mor}\, \mathfrak{A}$.

Como $(a, A) \in \xi'$, $(a \cdot f, A) \in \xi^F_{B_{Vc}}$ y por consiguiente existe $c : B_{Vc} \longrightarrow FA$ tal que $Vc = a \cdot f$, así que $(Ub \cdot a \cdot f, B) = (VFb \cdot Vc, B) = (V(Fb \cdot c), B) \in \xi^F_{B_{Vc}}$.

Por lo tanto $(Ub \cdot a, B) \in \xi'$.

$(\mathfrak{X}, \xi')$ es entonces fuente débilmente cerrada.

(iii) Sean $(a, A) \in \Xi_{\mathfrak{X}}$ y $(A \xrightarrow{m_i} A_i)_I$ una $\mathcal{A}$-fuente U-inicial tales que para todo $i \in I$, $(Um_i \cdot a, A_i) \in \xi'$.
Sea $i \in I$. $(Um_i \cdot a \cdot f, A_i) \in \xi^F_{B_{Vc}}$ y por lo tanto existe un $\mathcal{B}$-morfismo $b_i : B_{Vc} \longrightarrow FA_i$ tal que $Vb_i = Um_i \cdot af$.
Por lo tanto, el diágrama:

$$\begin{tikzcd}
VB_{Vc} = Vc \arrow[d, "f"'] \arrow[ddr, "Vb_i"] & \\
\mathfrak{X} = VB_{\mathfrak{X}} \arrow[d, "a"'] & \\
UA = VFA \arrow[r, "VFm_i"'] & VFA_i
\end{tikzcd}$$

es conmutativo, para toda $i \in I$.

Como $(FA \xrightarrow{Fm_i} FA_i)_I$ es V-inicial (pues F conserva estructuras iniciales), existe $a' : B_{Vc} \longrightarrow FA$ tal que $Va' = a \cdot f$. Por lo tanto $(a \cdot f, A) = (Va', A) \in \xi^F_{B_{Vc}}$ y esto demuestra que $(a, A) \in \xi'$.
Así, pues, $(\mathfrak{X}, \xi')$ es semicerrada.

Entonces $\xi \subset \xi'$ y $(\xi^F_{B_{Vc}}, f, \xi) \in \operatorname{Mor} \mathcal{A}^3$.

$G(\xi^F_{B_{Vc}}, f, \xi) = \hat{f} : B_{Vc} \longrightarrow B_{\mathfrak{X}}$ es tal que

$V\hat{f} = f$.
Sea $f^* = \hat{f} \circ \ell : c \longrightarrow B_{\mathfrak{X}}$, donde $\ell : c \longrightarrow B_{Vc}$ es la mencionada en (6)
Por lo tanto f^* es el único $\mathcal{B}$-morfismo de c a $B_{\mathfrak{X}}$ tal que $Vf^* = V(\hat{f} \cdot \ell) = V\hat{f} \cdot V\ell = f \cdot 1_{Vc} = f$.

Por lo tanto, $(G(\Sigma,\xi) \xrightarrow{\hat{f}_i} G(\Sigma_i,\xi_i))_I$ es V-inicial.

Entonces G conserva estructuras iniciales.

Lo que sigue es demostrar que $G \cdot E^3 = F$. La prueba que haremos es muy similar a la usada para ver que $\bar{F}^F_B \cdot E = F$ en 9.16.

Sea $A \in Ob\,\mathcal{A}$. y sea $(A \xrightarrow{a_i} A_i)_I$ la familia de todos los $\mathcal{A}$-morfismos con dominio A. Por lo tanto

$$\xi_A = (UA \xrightarrow{Ua_i} UA_i)_I .$$

Si $(B_{UA} \xrightarrow{\overline{Ua_i}} FA_i)_I$ es el V-levantamiento óptimo de ξ_A, entonces para todo $i \in I$ conmuta el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
VFA \arrow[d, "1_{UA}"'] \arrow[dr, "Ua_i = VFa_i"] & \\
VB_{UA} \arrow[r, "V\overline{Ua_i} = Ua_i"'] & VFA_i
\end{tikzcd}$$

Por lo tanto existe $h: FA \longrightarrow B_{UA}$ tal que $Vh = 1_{UA}$ y para toda $i \in I$, $\overline{Ua_i} \cdot h = Fa_i$. Como existe $i_0 \in I$ tal que $1_A = a_{i_0}$, si $g_0 = \overline{Ua_{i_0}}$, se tiene que

$$g_0 \cdot h = F1_A = 1_{FA} .$$

Por otro lado, $V1_{B_{UA}} = 1_{VB_{UA}} = 1_{UA}$ y por consiguiente,

$$V(h \cdot g_0) = Vh \cdot Vg_0 = 1_{UA} \cdot Ua_{i_0} = 1_{UA} = V1_{B_{UA}},$$

Así que

$$h \cdot g_0 = 1_{B_{UA}} .$$

Entonces h es isomorfismo y por lo tanto identidad.

Esto demuestra que $FA = B_{0A}$, es decir, que $GE^3(A) = FA$. De aquí es fácil concluir que $GE^3 = F$.

La unicidad de G se sigue de 9.9.

Por lo tanto, E^3 es la compleción inicial universal de $(\mathcal{A}, U)$ ¡UFF!

Dejamos al lector la otra parte del teorema (es decir, $(\mathcal{A}, U)$ tiene compleción inicial universal $\Rightarrow$ $\mathcal{A}^3$ es legítima). ∎

13.4. DEFINICIONES

Sea X una categoría pequeña. Entonces:

(1) Cat_X es la categoría cuyos objetos son todas las categorías concretas pequeñas sobre X y cuyos morfismos son todos los funtores concretos entre categorías pequeñas concretas.

(2) Cat_X^{inic} es la subcategoría de Cat_X cuyos objetos son todos los de Cat_X y cuyos morfismos son los funtores concretos entre categorías pequeñas concretas que conservan estructuras iniciales

(3) $\overline{Cat_X^{inic}}$ es la subcategoría plena de Cat_X^{inic} cuyos objetos son las categorías concretas pequeñas inicialmente completas.

13.5 TEOREMA (Corolario de 13.3 y de 9.9)

$\overline{Cat_X^{inic}}$ es epirreflexiva en Cat_X^{inic}. La compleción inicial $E^3 : (\mathcal{A}, U) \longrightarrow (\mathcal{A}^3, U^3)$ es la reflexión ∎

Juntemos 12.13(1), 12.14(2) y 13.3 en un teorema primordial:

13.6. TEOREMA.

Son equivalentes

(a) $(\mathcal{A},U)$ tiene una extensión más grande que es inicialmente densa y conserva estructuras iniciales.

(b) $(\mathcal{A},U)$ tiene una compleción inicial más grande que conserva estructuras iniciales.

(c) $(\mathcal{A},U)$ tiene una compleción inicial universal

(d) $\mathcal{A}^3$ es legítima.

En este caso, $E^3:(\mathcal{A},U)\longrightarrow(\mathcal{A}^3,U^3)$ tiene las propiedades deseadas ∎

§14. COMPLECIONES DE MAC NEILLE.

14.1. TEOREMA.

Si $E:(\mathcal{A},U)\longrightarrow(\mathcal{B},V)$ es una compleción inicial y final de $(\mathcal{A},U)$ entonces existe un isomorfismo concreto $G:(\mathcal{B},V)\longrightarrow(\mathcal{A}^4,U^4)$ tal que $G\cdot E=E^4$.

Demostración:

Sea $G=G_E^{E^4}:(\mathcal{B},V)\longrightarrow(\mathcal{A}^4,U^4)$ el definido en (12.3.3). Por 12.4 (3), G es extensión de $(\mathcal{A},U)$ tal que $G\cdot E=E^4$. Para demostrar que G es isomorfismo, basta demostrar que es suprayectivo en los objetos.

Sea $(\mathfrak{X}, \xi) \in \operatorname{Ob} \mathcal{A}^{\Psi}$, donde ξ es la fuente estructurada $\xi = (\mathfrak{X} \xrightarrow{a_k} UA_k = VEA_k)_{k \in K}$. Como $(\mathcal{B}, V)$ es inicialmente completa, ξ tiene un V-levantamiento óptimo $(B_{\mathfrak{X}} \xrightarrow{\bar{a}_k} EA_k)_{k \in K}$. Pero

$$G_E^{E\Psi}(B_{\mathfrak{X}}) = (VB_{\mathfrak{X}}, \xi^E_{B_{\mathfrak{X}}}) = (\mathfrak{X}, \xi^E_{B_{\mathfrak{X}}})$$

Demostraremos que $\xi = \xi^E_{B_{\mathfrak{X}}}$.

$$\xi^E_{B_{\mathfrak{X}}} = \{(Va, A) \in \overrightarrow{\Xi}_{\mathfrak{X}} \mid B_{\mathfrak{X}} \xrightarrow{a} EA \in \operatorname{Mor} \mathcal{B}\}.$$

Dado $k \in K$, $(a_k, A_k) = (V\bar{a}_k, A_k) \in \xi^E_{B_{\mathfrak{X}}}$. Por lo tanto $\xi \subset \xi^E_{B_{\mathfrak{X}}}$.

Supongamos que $(\eta, \mathfrak{X}) = (\mathfrak{X}, \xi)^{op}$. Entonces

$$\eta = \{(B,b) \in \sum_{\mathfrak{X}} \mid \text{para todo } (A,a) \in \xi \text{ existe } f: B \to A \text{ tal que } Uf = a \cdot b\}$$

Sea $(Va, A) \in \xi^E_{B_{\mathfrak{X}}}$, con $a: B_{\mathfrak{X}} \longrightarrow EA \in \operatorname{Mor} \mathcal{B}$.
Como $(\mathfrak{X}, \xi) \in \operatorname{Ob} \mathcal{A}^{\Psi}$, $(\eta, \mathfrak{X})^{op} = (\mathfrak{X}, \xi)$, es decir,

$$\xi = \{(c, C) \in \overrightarrow{\Xi}_{\mathfrak{X}} \mid \text{para todo } (B,b) \in \eta \text{ existe } f: B \longrightarrow C \text{ tal que } Uf = c \cdot b\}.$$

Sea $(B,b) \in \eta$. Por lo tanto, para cada $k \in K$ existe $f_k: B \longrightarrow A_k$ tal que $Uf_k = a_k \cdot b$, es decir, tal que conmuta el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
VEB = UB \arrow[rr, "Uf_k = VEf_k"] \arrow[d, "b"'] & & VEA_k = UA_k \\
VB_{\mathfrak{X}} = \mathfrak{X} \arrow[urr, "a_k = V\bar{a}_k"'] & &
\end{tikzcd}$$

Como $(\bar{a}_k)_{k\in K}$ es V-inicial, existe $\hat{b}: EB \longrightarrow B_{\mathfrak{X}}$ tal que $V\hat{b} = b$. Por lo tanto $a\cdot\hat{b} \in \hom_{\mathcal{B}}(EB, EA)$ y, dado que E es pleno, existe $\hat{f}: B \longrightarrow A$ tal que $E\hat{f} = a\cdot\hat{b}$. Por lo tanto, $U\hat{f} = VE\hat{f} = V(a\hat{b}) = Va\cdot V\hat{b} = Va\cdot b$, así que $(Va, A)\in\xi$. Entonces $\xi_{B_{\mathfrak{X}}}^{E} \subset \xi$.

Por lo tanto, $G_E^{E^4}(B_{\mathfrak{X}}) = (\mathfrak{X}, \xi)$. ∎

Como vimos en 11.1(6), la compleción de MacNeille de un conjunto parcialmente ordenado (ver §6) es un caso particular de la compleción E^4. Inspirándonos en este hecho, introducimos la siguiente terminología:

14.2. DEFINICIÓN.

Una extensión $E: (\mathcal{A}, U) \longrightarrow (\mathcal{B}, V)$ se llama compleción de MacNeille de $(\mathcal{A}, U)$ si es simultáneamente compleción inicial y compleción final de $(\mathcal{A}, U)$.

El Teorema 14.1 demuestra que una compleción de MacNeille, si existe, está unívocamente determinada, salvo por isomorfismos. Así, E^4, E^{-4} y E^* son compleciones isomorfas, como ya habíamos visto.

La observación 10.33 implica que $(\mathcal{A}^4, U^4)$ es subcategoría plena de $(\mathcal{A}^3, U^3)$, lo cual no es accidental, dado que la compleción de MacNeille de $(\mathcal{A}, U)$ es la compleción inicial o final más pequeña, en el siguiente sentido.

14.3. TEOREMA.

(1) Toda compleción inicial de $(\mathcal{A},U)$ contiene, como una subcategoría plena una compleción de MacNeille de $(\mathcal{A},U)$.

(2) Toda compleción final de $(\mathcal{A},U)$ contiene, como una subcategoría plena una compleción de MacNeille de $(\mathcal{A},U)$.

Demostración:

(1): Sea $E:(\mathcal{A},U)\longrightarrow(\mathcal{B},V)$ una compleción inicial de $(\mathcal{A},U)$. Sea $(\mathcal{B}_1,V_1)$ la cerradura final de $(E(\mathcal{A}),V|_{E(\mathcal{A})})$ en $(\mathcal{B},V)$ (cfr. 8.20). Por 8.17, $(\mathcal{B}_1,V_1)$ es inicialmente completa. Sea $E_1=E\Big|_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}_1}$. Como E es inicialmente denso, E_1 es inicialmente denso, y como $(E_1(\mathcal{A}),V|E_1(\mathcal{A}))$ es finalmente densa en $(\mathcal{B}_1,V_1)$, por 9.8 E_1 es finalmente denso. Por lo tanto, $(\mathcal{B}_1,V_1)$ es compleción de MacNeille de $(\mathcal{A},U)$

(2): Análogamente ∎

La prueba que acabamos de dar muestra que si $E:(\mathcal{A},U)\longrightarrow(\mathcal{B},V)$ es una compleción inicial, entonces, con la notación de la demostración, E_1 es compleción final Es claro ahora el siguiente teorema:

14.4. TEOREMA. (corolario de 14.3 y 14.1)

Son equivalentes:

(a) $(\mathcal{A},U)$ tiene una compleción inicial

(b) $(\mathcal{A},U)$ tiene una compleción final.

(c) $(\mathcal{A},\mathcal{U})$ tiene una compleción de Mac Neille.

(d) $(\mathcal{A},\mathcal{U})$ tiene una compleción inicial más pequeña (en el sentido de 14.3)

(e) $(\mathcal{A},\mathcal{U})$ tiene una compleción final más pequeña.

(f) $\mathcal{A}^{\mathcal{Y}}$ es legítima.

En este caso, $S^{\mathcal{Y}}:(\mathcal{A},\mathcal{U})\longrightarrow(\mathcal{A}^{\mathcal{Y}},\mathcal{U}^{\mathcal{Y}})$ tiene las propiedades deseadas. ∎

14.5. <u>NOTA</u>:

Obsérvese el sentido en que tomamos el heho de ser compleción inicial más pequeña, en el teorema 14.3 y en el 14.4.

En general, durante esta sección, entenderemos por una <u>extensión más pequeña con la propiedad</u> P, una extensión $E:(\mathcal{A},\mathcal{U})\longrightarrow(\mathcal{B},\mathcal{V})$ con la propiedad P tal que si $E':(\mathcal{A},\mathcal{U})\longrightarrow(\mathcal{B}',\mathcal{V}')$ es una extensión que tiene la propiedad P, entonces $E\leq E'$.

En la nota que sigue a 9.17, prometimos demostrar en este capítulo que una extensión es esencial si y sólo si es inicial y finalmente densa. Este es un momento oportuno para cumplir esa promesa:

14.6. <u>PROPOSICIÓN</u>.

Sea $E:(\mathcal{A},\mathcal{U})\longrightarrow(\mathcal{B},\mathcal{V})$ una extensión de $(\mathcal{A},\mathcal{U})$. Entonces las siguientes propiedades son equivalentes:

(a) E es esencial

(b) E es inicial y finalmente denso.

(c) $G_E^{E^4}$ es extensión de $(\mathcal{B}, V)$

(d) Existe una extensión $F: (\mathcal{B}, V) \longrightarrow (\mathcal{A}^4, U^4)$ tal que $F \cdot E = E^4$.

<u>Demostración</u>.

La equivalencia entre (b), (c) y (d) es 12.4 (3).

(a)⇒(b): Supongamos que E es esencial. Como E es extensión, está definido el funtor

$$G_E^{E^2}: \begin{cases} (\mathcal{B}, V) \longrightarrow (\mathcal{A}^2, U^2) \\ B \longmapsto (VB, \xi_B^E) \\ B \xrightarrow{f} B' \longmapsto (\xi_B^E, Vf, \xi_{B'}^E) \end{cases}$$

Por comodidad, sea $G = G_E^{E^2}$. Como E es esencial y $G \cdot E = E^2$ es extensión. Por lo tanto, por 12.4(1), E es inicialmente denso.

Es obvio que siguiendo los argumentos duales a los de 12.3 y 12.4, se concluye que existe un funtor

$$H_E^{E^{-2}}: \begin{cases} (\mathcal{B}, V) \longrightarrow (\mathcal{A}^{-2}, U^{-2}) \\ B \longmapsto (\eta_B^E, VB) \\ B \xrightarrow{f} B' \longmapsto (\eta_B^E, Vf, \eta_{B'}^E) \end{cases}$$

tal que $H_E^{E^{-2}} \cdot E = E^{-2}$ y que E es finalmente denso si y sólo si $H_E^{E^{-2}}$ es extensión.

Como E es esencial y E^{-2} es extensión, $H_E^{E^{-2}}$ es extensión y por lo tanto E es finalmente denso.

(c) ⇒ (a). Sea $F:(\mathcal{B},V)\longrightarrow(\mathcal{C},W)$ un funtor concreto tal que $F\cdot E$ es extensión. Para demostrar que F es extensión, es suficiente probar que es pleno. Sean $B,B'\in\mathrm{Ob}\,\mathcal{B}$ y $f: FB\longrightarrow FB'\in\mathrm{Mor}\,\mathcal{C}$. Por (c), $G=G_E^{E^Y}:(\mathcal{B},V)\longrightarrow(\mathcal{A}^Y,U^Y)$ es extensión. $G(B)=(VB,\xi_B^E)$, $G(B')=(VB',\xi_{B'}^E)$. $Wf: WFB=VB\longrightarrow WFB'=VB'$ es un morfismo en $\mathcal{X}$. Tomando en cuenta que $(\eta_B^E,VB)=(VB,\xi_B^E)^{op}$ (cfr. 12.2(4)), es cuestión de rutina ver que

$$(\xi_B^E, Wf, \xi_B^{E'}): GB\longrightarrow GB'\in\mathrm{Mor}\,\mathcal{A}^Y.$$

Como G es pleno, existe un $\mathcal{B}$-morfismo $\bar{f}: B\longrightarrow B'$ tal que $G\bar{f}=(\xi_B^E, Wf, \xi_B^{E'})$. Por lo tanto $Wf=U^YG\bar{f}=$ $=V\bar{f}=WF\bar{f}$. Como W es fiel, $F\bar{f}=f$, lo cual completa la demostración ∎

14.7. <u>COROLARIO 1</u>

$(\mathcal{A},U)$ tiene una extensión esencial más grande si y sólo si $\mathcal{A}^Y$ es legítima. En este caso $E^Y:(\mathcal{A},U)\longrightarrow(\mathcal{A}^Y,U^Y)$ es la extensión esencial más grande.

<u>Demostración</u>:

Por 12.14(3) y 14.6. ∎

14.8. <u>COROLARIO 2</u>.

Supongamos que $\mathcal{A}^Y$ es legítima. Entonces son equivalentes:

(a) $(\mathcal{A},U)$ es inicialmente completa

(b) $(\mathcal{A},U)$ es inyectiva (cfr. 9.15)

(c) Toda extensión $E:(\mathcal{A},U)\longrightarrow(\mathcal{B},V)$ es $\mathcal{B}\mathcal{A}\mathcal{T}_{\mathcal{X}}$-sección.

(d) $(\mathcal{A},U)$ no tiene extensiones esenciales propias

(e) $E^{\mathcal{Y}}: (\mathcal{A},U) \longrightarrow (\mathcal{A}^{\mathcal{Y}}, U^{\mathcal{Y}})$ es un isomorfismo.

Demostración:

(a) $\Rightarrow$ (b) $\Rightarrow$ (c) $\Rightarrow$ (d) se demostró en 9.19. (e)$\Rightarrow$(a) es obvio.

(d) $\Rightarrow$ (e) $E^{\mathcal{Y}}$ es inicial y finalmente denso. Por 14.6, $E^{\mathcal{Y}}$ es esencial. Por (d), $E^{\mathcal{Y}}$ es isomorfismo ∎

14.9. NOTA.

En vista de 14.8, a las extensiones inicialmente completas (cfr. 10.1) también les llamaremos extensiones inyectivas.

Diremos que una extensión $E: (\mathcal{A},U) \longrightarrow (\mathcal{B},V)$ es una envolvente inyectiva de $(\mathcal{A},U)$ si es una extensión esencial inyectiva, es decir, si E es esencial y $(\mathcal{B},V)$ es inyectivo.

14.10. COROLARIO (de 14.8)

Si $E: (\mathcal{A},U) \longrightarrow (\mathcal{B},V)$ es un funtor concreto y $\mathcal{A}^{\mathcal{Y}}$ es legítima, entonces son equivalentes:

(a) E es una compleción de Mac Neille de $(\mathcal{A},U)$

(b) E es envolvente inyectiva de $(\mathcal{A},U)$

(c) E es una más pequeña extensión inyectiva de $(\mathcal{A},U)$

(d) E es la más grande extensión esencial de $(\mathcal{A},U)$.

Demostración: La equivalencia entre (a) y (d) está dada en 14.7.

(a) $\Rightarrow$ (b) Se sigue de 14.8 y 14.6.

(b) $\Rightarrow$ (c). E es inyectiva por definición. Si $F:(\mathfrak{A},\cup)\to(\mathcal{C},W)$ es una extensión inyectiva de $(\mathfrak{A},\cup)$ entonces, por ser E extensión y $(\mathcal{C},W)$ inyectivo, existe $\bar{F}:(\mathcal{B},V)\to(\mathcal{C},W)$ tal que $\bar{F}E=F$. Como E es esencial, $\bar{F}$ es extensión. Por lo tanto $E\leq F$.

(c) $\Rightarrow$ (a). $E^4:(\mathfrak{A},\cup)\longrightarrow(\mathfrak{A}^4,\cup^4)$ es extensión inyectiva de $(\mathfrak{A},\cup)$. Por lo tanto, $E\leq E^4$, es decir, existe una extensión $F:(\mathcal{B},V)\longrightarrow(\mathfrak{A}^4,\cup^4)$ tal que $F\cdot E=E^4$. Por 14.6, E es esencial.

Como $E^4:(\mathfrak{A},\cup)\longrightarrow(\mathfrak{A}^4,\cup^4)$ es extensión y $(\mathcal{B},V)$ es inyectivo, existe $H:(\mathfrak{A}^4,\cup^4)\longrightarrow(\mathcal{B},V)$ tal que $H\cdot E^4=E$. Como E^4 es esencial, H es inmersión plena. Como E^4 es la extensión esencial más grande, H es isomorfismo. Por lo tanto E es una compleción de Mac Neille de $(\mathfrak{A},\cup)$. ∎

14.11. <u>COROLARIO</u>.

Son equivalentes:

(a) $(\mathfrak{A},\cup)$ tiene una envolvente inyectiva

(b) $(\mathfrak{A},\cup)$ tiene una extensión inyectiva más pequeña

(c) $(\mathfrak{A},\cup)$ tiene una extensión esencial más grande

(d) $\mathfrak{A}^4$ es legítima.

<u>Demostración</u>:

(a) $\Rightarrow$ (b). Véase la demostración de (b) $\Rightarrow$ (c) del teorema 14.10.

(c) $\Leftrightarrow$ (d) es 14.7

(b) ⇒ (c). Supongamos que $E:(A,U)\longrightarrow(\mathcal{B},V)$ es una extensión inyectiva más pequeña. Sea $(\mathcal{B}_1, V_1)$ la cerradura inicial de $(E(A), V|_{E(A)})$ en $(\mathcal{B},V)$ y sea $(\mathcal{B}_2, V_2)$ la cerradura final de $(E(A), V|_{E(A)})$ en $(\mathcal{B}_1, V_1)$. $(\mathcal{B}_1,V_1)$ y $(\mathcal{B}_2,V_2)$ son inicialmente completas por ser inicialmente cerradas en $(\mathcal{B},V)$, que es inicialmente completa. Si $E_1 = E|_{A}^{\mathcal{B}_1}$ y $E_2 = E_1|_{A}^{\mathcal{B}_2}$, es fácil ver que $E^2: (A,U)\longrightarrow(\mathcal{B}_2,V_2)$ es compleción de MacNeille de (A,U). En particular, A^{Y} es legítima (ver 14.4). Por lo tanto, por 14.10 ((c) ⇒ (d)), E es la más grande extensión esencial de (A,U).

(d) ⇒ (a): E^{Y} es compleción de Mac Neille de (A,U). Por lo tanto, (d) ⇒ (a) se sigue de (a) ⇒ (b) de 14.10. ∎

La mejor manera de terminar esta sección, es resumirla en el siguiente teorema:

14.12 <u>TEOREMA</u>:

Son equivalentes:

(a) (A,U) tiene una compleción inicial.
(b) (A,U) tiene una compleción final
(c) (A,U) tiene una compleción de Mac Neille
(d) (A,U) tiene una compleción inicial más pequeña
(e) (A,U) tiene una compleción final más pequeña.
(f) (A,U) tiene una extensión inyectiva más pequeña.
(g) (A,U) tiene una extensión esencial más grande.
(h) (A,U) tiene una envolvente inyectiva
(i) A^{Y} es legítima.

En este caso E^{Y} tiene las propiedades deseadas ∎

§15. COMPLECIONES Y NOTAS FINALES.

15.1. OBSERVACIONES

Para las compleciones finales $E^{-n} : (\mathcal{A}, U) \longrightarrow (\mathcal{A}^{-n}, U^{-n})$, existen resultados análogos, como es de suponerse. Enunciaremos los más importantes:

15.1.1. $(\mathcal{A}, U)$ tiene una compleción final más grande si y sólo si $\mathcal{A}^{-2}$ es legítima. En este caso, $E^{-2} : (\mathcal{A}, U) \to (\mathcal{A}^{-2}, U^{-2})$ es la compleción final más grande de $(\mathcal{A}, U)$.

15.1.2. Son equivalentes:

(a) $(\mathcal{A}, U)$ tiene una extensión más grande que es finalmente densa y conserva estructuras finales.

(b) $(\mathcal{A}, U)$ tiene una compleción final más grande que conserva estructuras finales.

(c) $(\mathcal{A}, U)$ tiene una compleción final universal

(d) $\mathcal{A}^{-3}$ es legítima.

En este caso $E^{-3} : (\mathcal{A}, U) \longrightarrow (\mathcal{A}^{-3}, U^{-3})$ tiene las propiedades deseadas.

15.1.3. Si Cat_x^{fin} es la subcategoría de Cat_x con los mismos objetos pero cuyos morfismos son los funtores que conservan estructuras finales, entonces la subcategoría plena $\overline{Cat_x^{fin}}$ de Cat_x^{fin} cuyos objetos son las categorías concretas pequeñas finalmente completas, es epirreflexiva en Cat_x^{fin}. $E^{3} : (\mathcal{A}, U) \to (\mathcal{A}^{-3}, U^{-3})$ es la reflexión.

15.1.4. $\mathcal{A}^{-4} \cong \mathcal{A}^{4}$.

15.2. NOTA.

Observe en el ejemplo dado en 11.2, que $(\mathcal{A}^3, U^3)$ no es isomorfo a $(\mathcal{A}^4, U^4)$. Esto implica que la compleción $E^4 : (\mathcal{A}, U) \longrightarrow (\mathcal{A}^4, U^4)$ no necesariamente tiene la propiedad universal de E^3 (ver 13.1 y 13.3), contrariamente a lo afirmado por Nicolás Bourbaki en el ejercicio 15(b) del §1 del capítulo III de [3].

En los ejemplos que mencionaremos enseguida, se observará nuevamente esta diferencia entre E^3 y E^4.

15.3 EJEMPLOS

15.3.1. Sea $\mathcal{X}$ la categoría Set de conjuntos y funciones. Sea $(\mathcal{A}, U)$ la categoría concreta cuyos objetos son las parejas (X, τ) que constan de un conjunto X y una familia τ de subconjuntos de X cerrada bajo uniones finitas e intersecciones finitas y cuyos morfismos $f : (X, \tau) \longrightarrow (Y, \sigma)$ son funciones $f : X \longrightarrow Y$ tales que $f^{-1}(s) \in \tau$ para cada $s \in \sigma$.

Si $((A_i, \tau_i))_I$ es una familia de $\mathcal{A}$-objetos y $((A_i, \tau_i) \longrightarrow A)_I$ es un Set-pozo, éste tiene un U-levantamiento óptimo $((A_i, \tau_i) \longrightarrow (A, \tau))_I$, donde $\tau = \{U \subset A \mid \text{para toda } i \in I \ f_i^{-1}(U) \in \tau_i\}$. Como $1_X : (X, \theta) \longrightarrow (X, \xi) \in \operatorname{Mor}\mathcal{A} \Leftrightarrow \xi \subset \theta$, por 8.2.3, $(\mathcal{A}, U)$ es inicialmente completa.

Un espacio topológico se dice que está finitamente generado si es un cociente topológico de una unión ajena (suma topológica) de espacios finitos.

Se puede demostrar que un espacio topológico X es finitamente generado si y sólo si la intersección de toda familia de abiertos es abierta.
Sea $(\mathcal{B},V)$ la subcategoría plena de $(\mathcal{A},U)$ cuyos objetos son los espacios topológicos finitamente generados. Si $((X_i,\tau_i) \xrightarrow{f_i} X)_I$ es un Set-pozo tal que para cada $i\in I$, $(X_i,\tau_i)\in Ob\,\mathcal{B}$, como en el caso anterior resulta que si $\tau = \{U\subset X \mid \forall i\in I,\ f_i^{-1}(U)\in\tau_i\}$, entonces $((X_i,\tau_i) \xrightarrow{(\tau_i,f_i,\tau)} (X,\tau))_I$ es un V-levantamiento óptimo de f_i. Por lo tanto $(\mathcal{B},V)$ es inicialmente completa

Sea $(\mathcal{C},W)$ la subcategoría plena de $(\mathcal{B},V)$ cuyos objetos son los espacios topológicos finitos.

Por la definición de espacio topológico finitamente generado, se puede demostrar fácilmente que la inclusión $(\mathcal{C},W) \hookrightarrow (\mathcal{B},V)$ es una compleción de Mac Neille de $(\mathcal{C},W)$. También es cierto que la inclusión $(\mathcal{C},W) \hookrightarrow (\mathcal{A},U)$ es equivalente a $E^3 : (\mathcal{C},W) \longrightarrow (\mathcal{C}^3,W^3)$. Con esto se prueba que la compleción de Mac Neille de $(\mathcal{C},W)$ no tiene la propiedad universal de E^3.

15.3.2 En varias ocasiones hemos dicho que si $(\Omega,\leq)$ es una poclase propia, entonces $(\Omega',\leq')$ no es legítima, pues $\Omega' \cong \mathcal{P}(\Omega)$. Lo que es más interesante es que a partir de una clase propia Ω, podamos encontrar una poclase propia $(\mathcal{A},\leq)$ tal que $\mathcal{A}^4$ no es legítima. Veamos esto:

Sean Ω una clase propia, $\mathfrak{X}$ la categoría terminal con un sólo objeto $\mathbb{X}$ y un sólo morfismo, y $(\mathcal{A}, \leq)$ la poclase siguiente:

$$\mathcal{A} = \Omega \times \{1,2\}, \ (\omega, i) \leq (\omega', i') \Longleftrightarrow \begin{cases} (\omega, i) = (\omega', i') & ó \\ \omega \neq \omega' \wedge i=1 \wedge i'=2. \end{cases}$$

Supongamos que $U: \mathcal{A} \longrightarrow \mathfrak{X}$ es el funtor constante y que $\{A_k\}_{k \in K}$ es una subclase no vacía de Ω. Sea $\{B_j\}_{j \in J} = \Omega \setminus \{A_k\}$.

1º Si $\{A_k\}_{k \in K}$ y $\{B_j\}_{j \in J}$ tienen al menos dos elementos y si

$$\xi = \{(1_{\mathbb{X}}, (A_k, 2))\}_{k \in K} \in \Xi_{\mathbb{X}}$$

entonces $(\mathbb{X}, \xi) \in \mathrm{Ob}\, \mathcal{A}^{\Downarrow}$. Si $(\eta, \mathbb{X}) = (\mathbb{X}, \xi)^{op}$, se tiene que

$$\eta = \{((B_j, 1), 1_{\mathbb{X}})\}_{j \in J}$$

2º Si $\{A_k\}_{k \in K}$ tiene un sólo elemento A_0, entonces

$$(\mathbb{X}, \xi = \{(1_{\mathbb{X}}, (A_0, 2))\}) \in \mathrm{Ob}\, \mathcal{A}^{\Downarrow}$$

y si $\eta = \{((B_j, 1), 1_{\mathbb{X}})\}_{j \in J} \cup \{((A_0, 2), 1_{\mathbb{X}})\}$ entonces $(\eta, \mathbb{X}) = (\mathbb{X}, \xi)^{op}$.

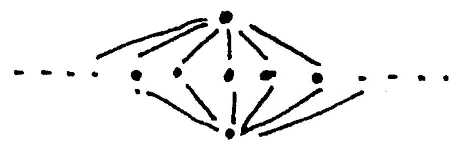
Con estas observaciones es fácil demostrar que existe una inyección $f: \mathcal{P}(\Omega) \longrightarrow \mathrm{Ob}\, \mathcal{A}^{\Downarrow}$. Pero $\mathcal{P}(\Omega)$ no es una clase. Por lo tanto, $\mathcal{A}^{\Downarrow}$ no es legítima, lo que implica que $(\mathcal{A}, U)$ no tiene compleciones iniciales.

He aquí unas modificaciones de este ejemplo:

(15.3.3) Sea Ω una clase propia y sea $(\mathcal{A}, \leq)$ la siguiente poclase:

$$\mathcal{A} = \Omega \,, \qquad \omega \leq \omega' \Longleftrightarrow \omega = \omega'$$

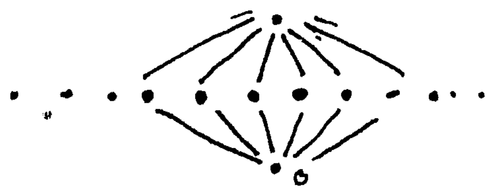
Entonces $\mathcal{A}^1 = \mathcal{A}^2 = \mathcal{A}^3$. Por lo tanto, E_3 no existe. Sin embargo E^4 existe, pues es la mínima compleción de $(\Omega, \leq)$, es decir,



(15.3.4) Sea Ω una clase propia,

$\mathcal{A} = \Omega \,\dot{\cup}\, \{0\}$, $\omega \leq \omega' \Longleftrightarrow \omega = \omega'$ o $\omega = 0$

En este caso E^3 y E^4 existen y están representados por



FIN

NOTAS AL CAPÍTULO I

[1] Se ha probado que basta dividir la esfera inicial en 5 pedazos. Es una lástima que la prueba del teorema no diga cómo realizar tan asombrosa operación, mediante la cual, según Kasner y Newman (en Matemáticas e Imaginación"), "podríamos redistribuir las partes de un guisante de modo que sin expansión ni distorsión, y sin que dos partes tengan ningún punto en común, llene rápidamente el universo entero y no quede ningún espacio vacante, ni en el interior del guisante, ni en el universo."

[2] Agradezco la referencia, a Netzahualcóyotl Castañeda

"

...pero con su hambre y su conserva se puso a juzgar aquel día, y lo primero que se le ofreció fue una pregunta que un forastero le hizo (estando presentes a todo el mayordomo y los demás acólitos), que fue:

"Señor, un caudaloso río dividía dos términos de un mismo señorío (y esté vuestra merced atento porque el caso es de importancia y algo dificultoso). Digo, pues, que sobre este río estaba un puente, y al cabo de él una horca y una como casa de audiencia, en la cual, de ordinario, había cuatro jueces que juzgaban la ley que puso el dueño del río, del puente y del señorío, que era en esta forma: Si alguno pasare por este puente de una parte a otra, ha de jurar primero adónde y a qué va; y si jurare verdad, déjenlo pasar, y si dijere mentira, muera por ello ahorcado en la horca que allí se muestra, sin remisión alguna ...

... Sucedió, pues, que tomando juramento a un hombre, juró y dijo que, para el juramento, que iba a morir en aquella horca que allí estaba, y no a otra cosa. Repararon los jueces en el juramento, y dijeron: "si a este hombre lo dejamos pasar libremente, mintió en su juramento, y conforme a la ley debe morir; y si le ahorcamos, él juró que iba a morir en aquella horca, y habiendo jurado verdad, por la misma ley debe ser libre" ...

[3] Llamadas paradojas semánticas.

[4] Si M es un conjunto, denotemos por $\bar{\bar{M}}$ su número cardinal (las dos rayas de $\bar{\bar{M}}$ significan, según Cantor, dos abstracciones: abstraemos de la naturaleza de los elementos que forman el conjunto y del orden de éstos). $\bar{\bar{M}} = \bar{\bar{N}}$ si existe una biyección entre M y N. $\bar{\bar{M}} \leq \bar{\bar{N}}$ si existe un subconjunto N_1 de N tal que $\bar{\bar{M}} = \bar{\bar{N}}_1$; si además $\bar{\bar{M}} \neq \bar{\bar{N}}$, pondremos $\bar{\bar{M}} < \bar{\bar{N}}$.
Sea U el conjunto de todos los conjuntos. Sea $\mathcal{P}(U)$ el conjunto de todos los subconjuntos de U. Por el teorema de Cantor, $\bar{\bar{U}} < \overline{\overline{\mathcal{P}(U)}}$. Pero $\mathcal{P}(U)$ es un subconjunto de U. Por lo tanto, $\overline{\overline{\mathcal{P}(U)}} \leq \bar{\bar{U}}$. Además, Bernstein demostró que si $\bar{\bar{M}} \leq \bar{\bar{N}}$ y $\bar{\bar{N}} \leq \bar{\bar{M}}$, entonces $\bar{\bar{M}} = \bar{\bar{N}}$. Entonces, $\bar{\bar{U}} = \overline{\overline{\mathcal{P}(U)}}$, lo que es una contradicción (por el T. de Cantor).

[5] Ver el libro: Fundamentos de la Matemática de Alberto Dou. Editorial Labor. 1970

[6] "Por ejemplo, analicemos la siguiente expresión: "Esta frase es falsa", ¿es o no falsa?. Esta forma de preguntar carece de sentido, puesto que nos lleva a contradicción. Pero, profundizando un poco, nos damos cuenta de que lo que realmente hubiéramos querido decir es: «"Esta frase es falsa" es una frase falsa», ¡lo cual es muy distinto! Los dos adjetivos falsa que aparecen en la expresión no se refieren ni significan lo mismo. Está claro que si la expresión «Esta frase es falsa» está escrita en un determinado lenguaje, la expresión «"Esta frase es falsa" es una frase falsa», lo está en un lenguaje distinto, en un lenguaje que hace referencia al anterior, es decir, en un metalenguaje"
(Joaquín Navarro: La nueva matemática, Salvat 1973).

[7] José Babini: Historia de las ideas modernas en matemática. The Pan American Union. 1967

[8] Hilbert dijo: "Nadie podrá expulsarnos del paraíso que Cantor ha

creado para nosotros"

9 Pues, como dijo el analista G. H. Hardy: "Si lográsemos probar dos teoremas contradictorios, toda la teoría se tornaría inútil, ya que entonces sería posible cualquier cosa". Cuentan que cierta vez, un escéptico le pidió demostrar que MacTaggart es el Papa, partiendo de que $2+2=5$. Hardy respondió, no sin reflexionar un momento: "se sabe también que $2+2=4$, luego $5=4$. Si restamos 3 a esta igualdad, llegamos a que $2=1$. Mac Taggart y el Papa son dos; luego, MacTaggart y el Papa son uno". (Ver Ian Setewart: Conceptos de matemática moderna. Alianza Universidad 1975)

10 En la nomenclatura de lógica hemos seguido a Tarski (Alfred Tarski: ¿Qué es la geometría elemental?, artículo publicado en el número de Octubre de 1958 del Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana).

11 En vez de definir clase haciendo referencia a funciones proposicionales, como lo hizo Von Neumann. Bourbaki en [2] nos informa que Cantor había ya propuesto en su correspondencia con Dedekind la distinción entre dos tipos de conjuntos, las multiplicidades y los conjuntos propiamente dichos. Esta idea fue precisada por Von Neumann al distinguir entre los conjuntos y las clases.

12 La idea de Andrzej Mostowski de reunir los principales escritos de Paul Bernays sobre teoría de conjuntos, tuvo una feliz consumación en este importante y bello libro que contiene, en particular, el artículo de Azriel Lévy al que nos hemos referido en [14]. Cuando el manuscrito fue terminado y comenzaba a imprimirse el libro, un doloroso acontecimiento convirtió la obra en elegíaca: la muerte de A. Mostowski.

13 Aquí "sistema fundamental" está usado en el sentido de sistema de fundamentos.

14 En Mac Lane [16] hay una pequeña bibliografía, de donde pueden obtenerse las especificaciones de publicaciones de Feferman, Isbell, Lawvere, Gabriel y Verdier (estos 2 últimos, seguidores de Grothendieck) acerca de sus respectivas soluciones.

15 Mac Lane prefiere suponer ZF y seguir llamando conjuntos a los conglomerados (ver Mac Lane [15]). Herrlich y Strecker suponen GBVN y utilizan el nombre conglomerados tal como se ha explicado arriba. La diferencia no trae consigo ningún problema, pues de ambas maneras obtenemos los principales objetos que necesitamos; uno tiene por ejemplo, el conglomerado (o conjunto) $\mathbb{N}$ de números naturales y sabe que si A y B son conglomerados (conjuntos), entonces $\{A,B\}$, (A,B), $A\cup B$, $\cup A$ y $P(A)$ son también conglomerados (conjuntos).

16 La adición de este nuevo axioma no da lugar a inconsistencias, pues la hipótesis de la existencia de un universo es esencialmente la misma que la hipótesis de la existencia de un cardinal inaccesible (ver [11], página 330)

17 Existe la tentación de formar el "cartel" de todos los conglomerados, así como formamos el conglomerado de todas las clases, pero, aparte de que nuestro interés principal es el estudio de las categorías usuales y de que no hay una "Teoría de Conjuntos" con clases y conglomerados (análoga a la de GBVN para conjuntos y clases), corremos el riesgo de ir perdiendo propiedades importantes. Por ejemplo, dado un conjunto A, con ZF o GBVN podemos formar siempre el conjunto potencia de A, $P(A)$; pero si A es una clase propia, $P(A)$ no es una clase. No siempre, pues, es posible formar clases potencia

18 Téngase en cuenta que la mayoría de las nociones asociadas con categorías, es decir, monomorfismos, secciones, objetos finales, funtores, etc., pueden ser definidos exactamente igual para casi-categorías. Esto será de utilidad en nuestro trabajo. Pero recuérdese

que las casi-categorías se usan actualmente como un recurso o una invención para "colocar" los objetos que son indispensables pero que no son clases. Que las casicategorías no sean el principal objeto de estudio es afortunado; en caso contrario, tendríamos que revisar los fundamentos. En efecto, no podemos formar la casicategoría de todas las casicategorías, pues si asumimos que sí, esto nos conduce a una paradoja tipo Russell (considere la subcasicategoría plena de todas las casicategorías que no son objetos de ellas mismas).

NOTAS AL CAPÍTULO IV.

1 Ian Stewart. Obra citada en la nota 9 del capítulo I.

2 Imre Lakatos: Pruebas y refutaciones. La lógica del descubrimiento matemático. Alianza Editorial. 1976.

3 Este es un funtor entre casicategorías, pues no podemos asegurar que $\mathcal{A}^2$ es legítima.

4 Es evidente que si $(\mathcal{B}', v')$ no es legítima, el que E' tenga la propiedad P se refiere a la extensión de la propiedad P a casicategorías (si se puede definir).

NOTA ACLARATORIA.

Parecía que iba a ser imposible, por falta de tiempo, la inclusión de estas notas (a los capítulos I y IV). Una cuestión burocrática permitió inesperadamente que sí las pusiéramos, pero ya las páginas estaban numeradas. Por ello las hemos colocado hasta el final. Suplicamos nos disculpen por las molestias ocasionadas.

REFERENCIAS

[1] Birkhoff, G: Lattice Theory. Colloquium Publications, Vol. 25. Amer. Math. Soc. 1940.

[2] Bourbaki, N: Elementos de historia de las matemáticas. Alianza editorial. 1972.

[3] ______ : Elements of Mathematics. Theory of Sets. Hermann Addisson - Wesley. 1974.

[4] Faith, C: Algebra: Rings, Modules and Categories. Tomo I Springer - Verlag. 1973

[5] Goffman, C: Real Functions. Complementary series in Mathematics. Prindle, Weber & Schmidt. 1970.

[6] Herrlich, H: Topological Functors. Gen. Topol. Appl. Vol. 4, 125 - 142. 1974.

[7] ______ : Initial completions. Math. Zeitschr, Vol 150, 101-110 1976

[8] ______ : Initial and final completions.

[9] Herrlich, H; R, Nakagawa; G.E. Strecker; T. Titcomb: Semi-topological and topologically-algebraic functors. Canad. J. Math.

[10] Herrlich, H; G.B. Salicrup; R. Vázquez: Dispersed factorization structures.

[11] Herrlich, H ; G.E. Strecker: Category Theory. Allyn and Bacon. 1973

[12] ——, —— : Semi-universal maps and universal initial completions. Pacific J. Math.

[13] Kuratowski, K ; A. Mostowski: Set Theory. Studies in Logic and The Foundations of Mathematics. North-Holland. 1968

[14] Lévy, A: The role of classes in Set Theory. Studies in Logic and the Foundations of Mathematics. Vol 84, Sets and classes pp. 173-225. North-Holland. 1976.

[15] Mac Lane, S: Categories for the working mathematician. G.T.M. Vol 5. Springer-Verlag 1971.

[16] —— : One universe as a foundation for category theory. Reports of the Midwest Category Seminar. Vol. III p.p. 192-201. Lecture Notes in Mathematics. Vol. 106 Springer-Verlag 1969.

[17] Mac Lane, S ; G. Birkhoff : Algebra. Mac Millan, 1967.

[18] Manes, E : Algebraic Theories. G.T.M. Vol 26. Springer-Verlag, 1976.

[19] Salicrup, G: Epirreflexividad y conexidad en categorías concretas topológicas. Tesis doctoral. Fac. de Ciencias U.N.A.M. 1978.