No. 1 ej. 2

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

PRODUCTO DIRECTO DE MODULOS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

M A T E M A T I C O

P R E S E N T A :

MARIA JOSE ARROYO PANIAGUA

MEXICO D.F. 1979

Indice.

Introducción.

Es conocido el hecho que para un anillo dado R, la suma directa de R-módulos planos es plano y la suma directa de R-módulos proyectivos es proyectivo.

En este trabajo damos condiciones necesarias y suficientes para que el producto directo de R-módulos planos sea plano y que el producto directo de R-módulos proyectivos sea proyectivo.

Además, presentamos varias aplicaciones de estos resultados. Primero obtenemos información concerniente a anillos semihereditarios, los cuales aplicados a dominios enteros dan inmediatamente una caracterización de los anillos de Prüfer. La segunda aplicación también concierne a dominios enteros sobre los anillos de De de Kind.

Esta tesis está basada en el trabajo de Chase S.U. Direct Products of Modules, publicado en Trans. Amer. Math. Soc. 97, (1960), 457-473.

Este trabajo fue realizado bajo la dirección del Dr. Francisco Raggi Cárdenas, a quien agradezco su esfuerzo y dedicación.

§1 Producto directo de módulos planos.

Para los propósitos de este trabajo R siempre denotará un anillo con elemento unitario.

1.1 Lema: Sea $0 \to K \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} A \to 0$ una sucesión exacta de R-módulos derechos con F plano, entonces A es plano si y solo si $\forall$ I ideal de R, $K \cap FI = KI$

Prueba: Tenemos el diagrama conmutativo con renglones exactos

$$\begin{array}{ccccccc}
K \otimes_R I & \longrightarrow & F \otimes_R I & \xrightarrow{g \otimes 1_I} & A \otimes_R I & \longrightarrow & 0 \\
\downarrow h & & \downarrow h_1 & & \downarrow h_2 & & \\
K \cap FI & \longrightarrow & FI & \longrightarrow & AI & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

h_1 es monomorfismo por ser F plano y $g \otimes 1_I$ es epimorfismo ya que el producto tensorial es exacto derecho, $\therefore$ h_2 es monomorfismo $\Longleftrightarrow$ h es epimorfismo, lo que equivale a:

$$A \text{ es plano} \Longleftrightarrow \operatorname{Im} h = KI = K \cap FI.$$

1.2 Proposición: Sea R un anillo y $0 \to K \to F \to A \to 0$ una sucesión exacta de R-módulos derechos, donde F es libre con base $\{x_\alpha\}$. Si $v = x_{\alpha_1} a_1 + \cdots + x_{\alpha_r} a_r$ y $v \in F$, definimos ${}_R I_v = Ra_1 + \cdots + Ra_r$. Son equivalentes:

a) A es plano.

b) Si $v \in K$, entonces $v \in KI_v$.

<u>Prueba:</u>

a) $\Rightarrow$ b) Por ser A plano, $K \cap FI_v = KI_v$. Como $v \in K$ y $v \in FI_v \Rightarrow v \in K \cap FI_v \therefore v \in KI_v$.

b) $\Rightarrow$ a) Sea $_RI \ni v \in K \cap FI \therefore v = \sum_{i=1}^{n} x_{\alpha_i} a_i \in K \cap FI$ y $v = \sum_{i=1}^{r} y_i b_i$, $y_i \in F$, $b_i \in I$. Como $\{x_\alpha\}$ es base de F, $y_i = \sum_{k=1}^{n} x_{\alpha_{i_k}} d_k$, $d_k \in R$, entonces

$$v = \sum_{i=1}^{r} \left(\sum_{k=1}^{n} x_{\alpha_{i_k}} d_k \right) b_i = \sum_{k=1}^{n} x_{\alpha_k} \left(\sum_{i=1}^{r} d_{ik} b_i \right),$$

como I es ideal izquierdo $d_{ik} b_i \in I$, $\therefore I_v \subseteq I$ y se tiene que $v \in KI_v \subseteq KI$. Esto es válido $\forall\, v \in K \cap FI$ y es obvio que $KI \subseteq K \cap FI$ siempre $\therefore K \cap FI = KI$, por 1.1 A es plano.

<u>1.3 Proposición</u>: Sea R un anillo y $0 \to K \to F \to A \to 0$ una sucesión exacta de R-módulos derechos donde F es libre. Son equivalentes:

a) A es plano

b) Dado $v \in K$ $\exists\, f: F \to K \ni f(v) = v$

c) Dados $v_1, v_2, \ldots, v_n \in K$ $\exists\, f: F \to K \ni f(v_i) = v_i$ para $i = 1, \ldots, n$.

Prueba:

a) $\Rightarrow$ b) Sea $\{X_\alpha\}$ una base de F $\therefore$ $u = \sum_{i=1}^{r} x_{\alpha_i} a_i$, $a_i \in R$. Sea $I_u = Ra_1 + \cdots + Ra_r$. Si $u \in K$, por ser A plano, $u \in KI_u$ $\quad u = \sum_{i=1}^{r} v_i a_i$, $v_i \in K$, $a_i \in R$.

Definimos $f: F \to K$ $\ni$ $f(x_{\alpha_i}) = v_i \quad i = 1, \ldots, r$

y $f(x_\alpha) = 0 \quad \forall \alpha \neq \alpha_1, \ldots, \alpha_r$. $\therefore$ $f(u) = u$.

b) $\Rightarrow$ a) Dado $u = x_{\alpha_1} a_1 + \cdots + x_{\alpha_r} a_r \in K$ y $f: F \to K$ $\ni$ $f(u) = u$, entonces $u = f(x_{\alpha_1}) a_1 + \cdots + f(x_{\alpha_r}) a_r$ $\therefore$ $u \in KI_u$, por 1.2 A es plano.

b) $\Rightarrow$ c) Procederemos por inducción sobre n.

Por b) para $n=1$ es válido c).

Supongamos que c) vale para $k < n$.

Sea $f_n : F \to K$ un morfismo $\ni$ $f_n(u_n) = u_n$.

Consideremos $v_i = u_i - f_n(u_i) \quad i = 1, \ldots, n-1$.

Por hipótesis de inducción $\exists$ $f': F \to K$ $\ni$ $f'(v_i) = v_i \quad i = 1, \ldots, n-1$. Definimos $f: F \to K$ como sigue:

Sea $i: K \hookrightarrow F$ la inclusión, entonces

$$f = 1_F - (1_F - if') \circ (1_F - f_n)$$

Para $i = 1, \ldots, n-1$.

$$\begin{aligned} f(u_i) &= u_i - (1_F - if') \circ (1_F - f_n)(u_i) \\ &= u_i - (1_F - if') \circ (u_i - f_n(u_i)) \end{aligned}$$

$$= u_i - (1_F - if')(v_i)$$
$$= u_i - (v_i - v_i) = u_i.$$
$$f(u_n) = u_n - (1_F - if')\cdot(1_F - f_n)(u_n)$$
$$= u_n - (1_F - if')(u_n - f_n(u_n))$$
$$= u_n - (1_F - if')(u_n - u_n) = u_n.$$

c) $\Rightarrow$ b) Obtenemos b) trivialmente por ser este un caso particular.

1.4 Definición: Sea A un R-módulo. Se dice que A es finitamente presentado si existe una sucesión exacta de la forma

$$R^m \longrightarrow R^n \longrightarrow A \longrightarrow 0 .$$

1.5 Proposición: Sea A un R-módulo finitamente prosentado, entonces cualquier sucesión exacta de la forma $0 \to K \to F \to A \to 0$ tendrá la propiedad de que K es de tipo finito siempre que F sea libre de tipo finito.

Prueba: Como A es finitamente presentado existe una sucesión exacta $R^m \to R^n \to A \to 0$

Obtenemos el diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
& R^m \arrow[r, "\eta"] \arrow[d, "\gamma"'] & R^n \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "\lambda"'] & A \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & K \arrow[r, "\alpha"'] \arrow[d] & F \arrow[r, "\beta"'] \arrow[d] & A \arrow[r] & 0 \\
& K/_{Im\gamma} \arrow[r, "\bar\alpha"'] & F/_{Im\lambda} & &
\end{tikzcd}$$

λ existe por ser R^n proyectivo.

$\gamma: R^m \to K$ se obtiene ya que $\beta\lambda\eta = \mu\eta = 0$

$\therefore Im\,\lambda\eta \subset Ker\,\beta = Im\,\alpha$.

$\alpha: K \to F$ induce el morfismo $\bar\alpha : K/_{Im\gamma} \to F/_{Im\lambda}$

ya que $\alpha(Im\,\gamma) = Im\,\alpha\gamma = Im\,\lambda\eta \subset Im\,\lambda$.

Afirmamos que $\bar\alpha$ es isomorfismo.

$\bar\alpha$ es monomorfismo:

Sea $x \in K$ $\ni$ $\bar\alpha(\bar x) = 0$ $\therefore \alpha(x) \in Im\,\lambda$

$\therefore$ $\alpha(x) = \lambda(y)$ para algún $y \in R^n$.

$\mu(y) = \beta\lambda(y) = \beta\alpha(x) = 0$ $\therefore$ $y \in Ker\,\mu = Im\,\eta$

es decir, $y = \eta(z)$ para algún $z \in R^m$.

$\therefore$ $\alpha\gamma(z) = \lambda\eta(z) = \lambda(y) = \alpha(x)$. Como α es monomorfismo $\gamma(z) = x$ $\therefore$ $\bar x = 0$

$\bar\alpha$ es epimorfismo:

P.D. que para cada $x \in F$, se tiene que $\bar x \in Im\,\bar\alpha$

Sea $x \in F$, entonces $\beta(x) = \mu(y)$ para algún $y \in R^n$ $\therefore$ $x - \lambda(y) \in Ker\,\beta$, ya que $\beta(x - \lambda(y)) =$

$= \beta(x) - \beta\lambda(y) = \mu(y) - \mu(y) = 0.$

$\therefore\ x - \lambda(y) \in Im\,\alpha$, es decir, $x - \lambda(y) = \alpha(z)$ para algún $z \in K$ $\therefore\ \bar{x} = \overline{\alpha(z)} = \bar{\alpha}(\bar{z})$.

lo que nos da que $\bar{\alpha}$ es isomorfismo.

Como $F/Im\lambda$ es de tipo finito $\Rightarrow K/Im\gamma$ es de tipo finito.

De la sucesión exacta $0 \to Im\,\gamma \to K \to K/Im\gamma \to 0$ obtenemos que K es de tipo finito, lo que se quería demostrar.

<u>1.6 Corolario:</u> Sea R un anillo. A un R-módulo finitamente presentado. Si A es plano se tiene que A es proyectivo.

<u>Prueba:</u> Sea $0 \to K \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} A \to 0$ sucesión exacta con F libre de tipo finito y K de tipo finito. Por 1.3 $\exists\ h: F \to K \ni hf = 1_K$ $\therefore$ la sucesión se escinde, i.e. $\exists\ j: A \to F \ni$ $\{f, j\}$ dan una descomposición en suma directa $\therefore$ A es sumando directo de un libre $\therefore$ A es proyectivo.

<u>1.7 Proposición:</u> Para A un R-módulo derecho

son equivalentes:

a) A es plano.

b) Si $a_1\lambda_1+\cdots+a_r\lambda_r=0$, $a_k\in A$ y $\lambda_k\in R$, entonces existen $b_1,\dots,b_n\in A$ y $\{\mu_{ik}\}\subseteq R$, $i=1,\dots,n$ $k=1,\dots,r$ ∍ $a_k=\sum_{i=1}^{n} b_i\mu_{ik}$ y $\sum_{k=1}^{r}\mu_{ik}\lambda_k=0$

c) Si $\sum_{k=1}^{r} a_k\lambda_{kj}=0$, $a_k\in A$ y $\lambda_{kj}\in R$ $(j=1,\dots,s)$ entonces existen $b_1,\dots,b_n\in A$ y $\{\mu_{ik}\}\subseteq R$ $(i=1,\dots,n)$ $(k=1,\dots,r)$ ∍

$$a_k=\sum_{i=1}^{n} b_i\mu_{ik} \quad y \quad \sum_{k=1}^{r}\mu_{ik}\lambda_{kj}=0$$

<u>Prueba</u>:

a)$\Rightarrow$c) Sea $f:F\longrightarrow A$ un epimorfismo, donde F_R es libre y $K=\ker f$.

Sean $x_1,\dots,x_r\in F$ tales que $f(x_k)=a_k\in A$ para $k=1,\dots,r$. $v_j\in F$ ∍ $v_j=\sum_{k=1}^{r}x_k\lambda_{kj}$ $j=1,\dots,s$.
$\therefore f(v_j)=\sum_{k=1}^{r}f(x_k)\lambda_{kj}=\sum_{k=1}^{r}a_k\lambda_{kj}=0$ por hipótesis, tenemos que $v_j\in K$.

Como A es plano, por 1.3 $\exists g:F\longrightarrow K$ tal que $g(v_j)=v_j$, $j=1,\dots,s$.

Sea $x_k-g(x_k)=\sum_{i=1}^{n}z_i\mu_{ik}\in F$ donde $\{z_1,\dots,z_n\}$ es parte de la base de F.

Sea $b_i=f(z_i)\in A$ $\therefore a_k=f(x_k)=$

$= f(x_k - g(x_k)) = f(\sum_{i=1}^{n} z_i \mu_{ik}) = \sum_{i=1}^{n} f(z_i)\mu_{ik}$
$= \sum_{i=1}^{n} b_i \mu_{ik}$. con lo que obtenemos la primera parte de c).

Debemos demostrar ahora que $\sum_{k=1}^{r} \mu_{ik}\lambda_{kj} = 0$
Se tiene

$$0 = v_j - g(v_j) = \sum_{k=1}^{r} x_k \lambda_{kj} - \sum_{k=1}^{r} g(x_k)\lambda_{kj} =$$

$$= \sum_{k=1}^{r} (x_k - g(x_k))\lambda_{kj} = \sum_{k=1}^{r} \left(\sum_{i=1}^{n} z_i \mu_{ik}\right)\lambda_{kj} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} z_i \left(\sum_{k=1}^{r} \mu_{ik}\lambda_{kj}\right).$$

Como z_i pertenece a la base de F para $i = 1, \dots, n$, tenemos que $\sum_{k=1}^{r} \mu_{ik}\lambda_{kj} = 0$ con lo que queda probado c).

c) => b) Trivial ya que es un caso particular.

b) => a) Sea $f: F \to A$ un epimorfismo con F un R-módulo derecho libre con base $\{x_\alpha\}$. Sea $K = \operatorname{Ker} f$. Sea $v \in F$ y $v = x_{\alpha_1}\lambda_1 + \dots + x_{\alpha_r}\lambda_r$, $\lambda_k \in R$ $k = 1, \dots, r$.

Sea $a_k \in A$ tal que $a_k = f(x_{\alpha_k})$, $v \in K$ ya que por b) $a_1\lambda_1 + \dots + a_r\lambda_r = f(v) = 0$ $\therefore$ $\exists_n$ $b_1, \dots, b_n \in A$ y $\{\mu_{ik}\} \subseteq R$ $(i = 1, \dots, n$; $k = 1, \dots, r)$

tal que $g(x_{\alpha_k}) = x_{\alpha_k} - \sum_{i=1}^{n} z_i \mu_{ik}$. para $k=1,\dots,r$.

y $g(x_\alpha) = 0 \quad \forall \alpha \neq \alpha_1, \dots, \alpha_r$.

$$f(g(x_{\alpha_k})) = f(x_{\alpha_k} - \sum_{i=1}^{n} z_i \mu_{ik}) = f(x_{\alpha_k}) - \sum_{i=1}^{n} f(z_i)\mu_{ik}$$

$$= a_k - \sum_{i=1}^{n} b_i \mu_{ik} = 0$$

$\therefore \; g(F) \subseteq K$.

Como $\quad v = \sum_{k=1}^{r} x_{\alpha_k} \lambda_k$

$$g(v) = g\left(\sum_{k=1}^{r} x_{\alpha_k} \lambda_k\right) = \sum_{k=1}^{r} g(x_{\alpha_k})\lambda_k =$$

$$= \sum_{k=1}^{r} \left(x_{\alpha_k} - \sum_{i=1}^{n} z_i \mu_{ik}\right)\lambda_k =$$

$$= \sum_{k=1}^{r} x_{\alpha_k}\lambda_k - \sum_{k=1}^{r}\left(\sum_{i=1}^{n} z_i \mu_{ik}\right)\lambda_k =$$

$$= v - \sum_{i=1}^{n} z_i \left(\sum_{k=1}^{r} \mu_{ik} \lambda_k\right) = v - 0 = v.$$

Por 1.3 obtenemos que A es plano.

Para cada R-módulo derecho M y cada familia $\{L_\alpha\}_{\mathbb{X}}$ de R-módulos izquierdos existe un morfismo de módulos $\varphi: M \otimes_R \prod_{\mathbb{X}} L_\alpha \to \prod_{\mathbb{X}} (M \otimes_R L_\alpha)$ $\ni$ $\varphi(x \otimes (z_i)) = (x \otimes z_i)$. En particular, $\exists$ $\varphi: M \otimes_R R^{\mathbb{X}} \longrightarrow M^{\mathbb{X}}$ $\ni$ $\varphi(x \otimes (a_i)) = (x a_i)$.

<u>1.8 Lema</u>: Para cada M un R-módulo derecho,

son equivalentes:

a) M_R es de tipo finito.

b) $\varphi: M\otimes_R \prod_{\mathfrak{X}} L_\alpha \longrightarrow \prod_{\mathfrak{X}}(M\otimes_R L_\alpha)$ es epimorfismo para toda familia $\{L_\alpha\}_{\mathfrak{X}}$ de R-módulos izquierdos

c) $\varphi: M\otimes_R R^{\mathfrak{X}} \longrightarrow M^{\mathfrak{X}}$ es epimorfismo para todo conjunto $\mathfrak{X}$.

Prueba:

a)$\Rightarrow$b) Sea $g\in\prod_{\mathfrak{X}}(M\otimes_R L_\alpha)$ $\therefore$ $g(\alpha)\in M\otimes_R L_\alpha$

Sean $\{x_1,\dots,x_n\}$ un conjunto de generadores de M, entonces $g(\alpha)=\sum_{i=1}^{n} x_i\otimes y_{\alpha i}$

Sea $f_i\in\prod_{\mathfrak{X}} L_\alpha$ $\ni$ $f_i(\alpha)=y_{\alpha i}$ $\forall\alpha\in\mathfrak{X}$, $i=1,\dots,n$

$\therefore$ $\varphi(\sum_{i=1}^{n} x_i\otimes f_i)(\alpha)=\sum_{i=1}^{n} x_i\otimes f_i(\alpha)=\sum_{i=1}^{n} x_i\otimes y_{\alpha i}=g(\alpha)$ $\forall\alpha$ $\therefore$ $\varphi(\sum_{i=1}^{n} x_i\otimes f_i)=g$ $\therefore$ φ es suprayectiva.

b)$\Rightarrow$c) Es un caso particular.

c)$\Rightarrow$a) Consideremos el caso en que $\mathfrak{X}=M$.

Por c) $\varphi: M\otimes_R R^M\longrightarrow M^M$ es suprayectiva, como $1_M\in M^M$ $\exists$ $\sum_{i=1}^{n} x_i\otimes f_i\in M\otimes_R R^M$ $\ni$ $\varphi(\sum_{i=1}^{n} x_i\otimes f_i)=1_M$.

Para $x\in M$, tenemos $\sum_{i=1}^{n} x_i\otimes f_i(x)=x$ y además $\sum_{i=1}^{n} x_i\otimes f_i(x)=\sum_{i=1}^{n} x_i f_i(x)$ $\therefore$ $x=\sum_{i=1}^{n} x_i f_i(x)$, con $f_i(x)\in R$ y $x_i\in M$ para $i=1,\dots,n$.

$\therefore$ $\{x_1,\dots,x_n\}$ es un conjunto de generadoras de M, de donde M es de tipo finito, con lo que queda demostrado el lema.

<u>1.9 Lema</u>: Si M es un R-módulo derecho, las siguientes propiedades son equivalentes:

a) M_R es finitamente presentado.

b) $\varphi: M \otimes_R \prod_{\mathfrak{X}} L_\alpha \longrightarrow \prod_{\mathfrak{X}} (M \otimes_R L_\alpha)$ es un isomorfismo para toda familia $\{L_\alpha\}_{\mathfrak{X}}$ de R-módulos izquierdos

c) $\varphi: M \otimes_R R^{\mathfrak{X}} \longrightarrow M^{\mathfrak{X}}$ es biyectiva para todo conjunto $\mathfrak{X}$.

<u>Prueba</u>:

a)$\Rightarrow$b) Por 1.8 se tiene que φ es suprayectiva, solo falta demostrar que φ es monomorfismo.

Como M es finitamente presentado $\exists$ una sucesión exacta $R^m \longrightarrow R^n \longrightarrow M \longrightarrow 0$, con lo que se obtiene el siguiente diagrama conmutativo con renglones exactos.

$$\begin{array}{ccccccc}
(\prod L_\alpha)^m & \longrightarrow & \prod (L_\alpha)^n & \longrightarrow & M \otimes_R \prod_{\mathfrak{X}} L_\alpha & \longrightarrow & 0 \\
\| & & \| & & \downarrow \varphi & & \\
(\prod L_\alpha)^m & \longrightarrow & (\prod L_\alpha)^n & \longrightarrow & \prod_{\mathfrak{X}} (M \otimes_R L_\alpha) & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

por el lema del 5º, φ es isomorfismo.

b)$\Rightarrow$c) Es un caso particular.

c) => a) Como $\varphi: M \otimes_R R^{\mathbb{I}} \to M^{\mathbb{I}}$ es biyectiva, por 1.8 M_R es de tipo finito.

Consideremos una sucesión exacta $0 \to K \to F \to M \to 0$ donde F_R es libre de tipo finito, tenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccc} & & K\otimes_R R^{\mathbb{I}} & \longrightarrow & F\otimes_R R^{\mathbb{I}} & \longrightarrow & M\otimes_R R^{\mathbb{I}} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \varphi_K & & \downarrow \varphi_F & & \downarrow \varphi_M \\ 0 \longrightarrow & & K^{\mathbb{I}} & \longrightarrow & F^{\mathbb{I}} & \longrightarrow & M^{\mathbb{I}} \longrightarrow 0 \end{array}$$

por c) φ_M y φ_F son biyectivas $\therefore$ φ_K es epimorfismo, por 1.8 K es de tipo finito, luego, M es finitamente presentado.

1.10 <u>Teorema</u>: Sea R un anillo, son equivalentes:

a) El producto directo de cualquier familia de R-módulos derechos planos es plano.

b) El producto directo de cualquier familia de copias de R es plano como R-módulo derecho.

c) Cualquier submódulo de tipo finito de un R-módulo izquierdo es finitamente presentado.

d) Cualquier ideal izquierdo de R de tipo finito es finitamente presentado.

<u>Demostración</u>:

a) => b) Es consecuencia inmediata ya que R es plano como R-módulo derecho.

b) => c) Sea ${}_RG$ un R-módulo izquierdo y $L \leq G$ un submódulo de tipo finito.

Sea $\{x_1, x_2, \ldots\}$ una base de G y $\{m_1, \ldots, m_l\}$ un conjunto de generadores de L, $\therefore$ cada $m_i = \sum_{j=1}^{n} r_j x_j$ con $r_j \in R$ $\forall j$, luego L está contenido en el submódulo de G generado por $x_1, \ldots, x_n$ de donde podemos suponer que G tiene base finita.

De la sucesión exacta $0 \to L \xrightarrow{f} G$ obtenemos el siguiente diagrama conmutativo.

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & R^{I} \otimes_R L & \xrightarrow{1 \otimes f} & R^{I} \otimes_R G \\ & & \downarrow \varphi_L & & \downarrow \varphi_G \\ 0 & \longrightarrow & L^{I} & \xrightarrow{g} & G^{I} \end{array}$$

Como R^{I} es plano por b), entonces el primer renglón es exacto; el segundo renglón también ya que el producto directo es un funtor exacto. Como G es libre de tipo finito, entonces G es finitamente presentado $\therefore$ por 1.9 φ_G es un isomorfismo. Por 1.8 φ_L es epimorfismo y se tiene $g \circ \varphi_L = \varphi_G \circ (1 \otimes f)$ como $\varphi_G \circ (1 \otimes f)$ es monomorfismo, φ_L es monomorfismo, de donde φ_L es isomorfismo, entonces L

es finitamente presentado.

c) $\Rightarrow$ d) Es un caso particular.

d) $\Rightarrow$ a) Sea $\{L_i\}_X$ una familia de R-módulos derechos planos. Sea ${}_R I \leq R$ ideal de tipo finito, por d) I es finitamente presentado.

Por ser $0 \to I \xrightarrow{f} R$ una sucesión exacta, tenemos el diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccc} & \prod_X L_i \otimes_R I & \xrightarrow{1\otimes f} & \prod_X L_i \otimes_R R \\ & \downarrow \varphi_I & & \downarrow \varphi_R \\ 0 \longrightarrow & \prod_X (L_i \otimes_R I) & \xrightarrow{g} & \prod_X L_i \end{array}$$

P.D. $1\otimes f$ es un monomorfismo.

g es monomorfismo por ser L_i plano $\forall i \in X$ y el producto directo funtor exacto.

φ_R es isomorfismo y como I es finitamente presentado φ_I también lo es $\therefore$ $g\circ\varphi_I$ es un monomorfismo y $g\circ\varphi_I = \varphi_R \circ (1\otimes f) \Rightarrow 1\otimes f$ es monomorfismo $\therefore$ $\prod_X L_i$ es plano.

Cada anillo noetheriano izquierdo satisface que cada ideal de tipo finito es finitamente presentado, pues, por ser I de tipo finito lo podemos cubrir con R^n que es noetheriano, tenemos la sucesión exacta $0 \to K \to R^n \to I \to 0$ donde K es un submódulo de un anillo noetheriano $\therefore$ K es de tipo finito, de donde I es finitamente presentado.

<u>Definición</u>: Sean R un anillo, I un ideal izquierdo de R y C un subconjunto de R. Sea $(I:C) = \{\lambda \in R / \lambda C \subseteq I\}$ $(I:C)$ es un ideal izquierdo de R. Si $C = \{a_1, \dots, a_r\}$, entonces $(I:C) = (I: a_1, \dots, a_r)$.

<u>1.11 Lema</u>: Sea $C = \bigcup_\alpha C_\alpha$, entonces $(I:C) = \bigcap_\alpha (I:C_\alpha)$

<u>Prueba</u>: $(I:C) = \{\lambda \in R / \lambda C \subseteq I\} = \{\lambda \in R / \lambda C_\alpha \subseteq I \ \forall \alpha\}$
$= \bigcap_\alpha \{\lambda \in R / \lambda C_\alpha \subseteq I\} = \bigcap_\alpha (I:C_\alpha)$.

<u>1.12 Lema</u>: Sea $I = Ra_1 + \dots + Ra_n$ y $a \in R \setminus I$. Sea $J = I + Ra$, F un R-módulo izquierdo con base $\{x_1, \dots, x_n, x_{n+1}\}$. Sea $f: F \to J$ $\ni$ $f(x_i) = a_i$, $i = 1, \dots, n$. y $f(x_{n+1}) = a$. Sean $K = \operatorname{Ker} f$, $F' = Rx_1 + \dots + Rx_n$ y $K' = K \cap F'$. Entonces $\exists\, g: K \to (I:a)$ $\ni$ $\operatorname{Ker} g = K'$.

<u>Prueba</u>: Sea $v \in F$ $\ni$ $v \in \operatorname{Ker} f$, entonces
$v = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n + \lambda_v x_{n+1}$.
$0 = f(v) = \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n + \lambda_v a$ $\quad \therefore$

$\lambda_v a = -(\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_n a_n) \subseteq I$, de donde $\lambda_v \in (I:a)$

Definimos $g: K \longrightarrow (I:a)$ como $g(v) = \lambda_v$.

P.D. $\operatorname{Ker} g = K'$

$\operatorname{Ker} g = \{v \in K / g(v) = 0\} = \{v \in K / \lambda_v = 0\} = \{v \in K / v \in F'\} =$
$= K \cap F' = K'$.

<u>1.13 Teorema:</u> Sea R un anillo, son equivalentes:

a) Cada ideal izquierdo de R de tipo finito es finitamente presentado.

b) Si ${}_R I$ es ideal de tipo finito, entonces $(I:a)$ es de tipo finito. $\forall a \in R$.

c) $(0:a)$ es de tipo finito $\forall a \in R$ y la intersección de dos ideales de tipo finito es de tipo finito.

<u>Prueba:</u>

a)$\Rightarrow$b) Por a) si ${}_R I$ es de tipo finito, entonces I es finitamente presentado $\therefore$ existe una sucesión exacta $0 \longrightarrow K \longrightarrow F \longrightarrow I \longrightarrow 0$, donde ${}_R F$ es un módulo libre de tipo finito y K es de tipo finito.
por 1.12 $\exists\ g: K \longrightarrow (I:a)$ + $\operatorname{Ker} g = K'$ para cada $a \in R$; $\therefore$ la siguiente sucesión es exacta
$0 \longrightarrow K' \longrightarrow K \longrightarrow (I:a) \longrightarrow 0$, por consiguiente, $(I:a)$

es cubierto por un módulo de tipo finito, de donde $(I:a)$ es de tipo finito para cada $a \in R$.

$b) \Rightarrow a)$ Procederemos por inducción sobre n.

Sea ${}_R I = Ra_1 + \cdots + Ra_n$.

Si $n=1$, Tenemos la sucesión exacta $0 \to (0:a_1) \to R \to Ra_1 \to 0$, por b) $(0:a_1)$ es de tipo finito, entonces Ra_1 es finitamente presentado.

Supongamos ahora que a) vale para $k < n$.

Sea ${}_R F$ un módulo libre con base $\{x_1, \dots, x_n\}$.

Sea $f: F \to I$ el epimorfismo tal que $f(x_i) = a_i$ $i = 1, \dots, n$. Sean $K = \ker f$, $I' = Ra_1 + \cdots + Ra_{n-1} \subseteq I$, $F' = Rx_1 + \cdots + Rx_{n-1} \subseteq F$ y $K' = K \cap F'$

Tenemos la sucesión exacta $0 \to K' \to F' \to I' \to 0$, por hipótesis de inducción I' es finitamente presentado $\therefore$ K' es de tipo finito; además, la sucesión $0 \to K' \to K \to (I:a_n) \to 0$ es exacta, por b) $(I:a_n)$ es de tipo finito, luego K es de tipo finito. y por lo tanto I es finitamente presentado.

$a) \Leftrightarrow c)$ Si $a \in R$, entonces la sucesión exacta $0 \to (0:a) \to R \to Ra \to 0$ nos muestra que $(0:a)$ es de tipo finito $\Leftrightarrow$ Ra es finitamente presentado.

Sean ${}_RI_1$, ${}_RI_2$ ideales de R de tipo finito. Consideremos la sucesión exacta $0 \to K_i \xrightarrow{e_i} F_i \xrightarrow{g_i} I_i \to 0$ donde F_i es un módulo libre de tipo finito para $i=1,2$.

Sean $F=F_1 \oplus F_2$, $I=I_1+I_2$ y $g: F \to I$ el epimorfismo $\ni$ $g(x_1,x_2) = g_1(x_1)+g_2(x_2)$. Sea $K = \operatorname{Ker} g$.

Tenemos el siguiente diagrama conmutativo con renglones exactos:

$$
\begin{tikzcd}
 & & & 0 \arrow[d] & \\
 & & & I_1 \cap I_2 \arrow[d, "h'"] & \\
0 \arrow[r] & K_1 \oplus K_2 \arrow[r, "i"] & F \arrow[r, "f"] \arrow[d, equal] & I_1 \oplus I_2 \arrow[r] \arrow[d, "h"] & 0 \\
0 \arrow[r] & K \arrow[r, "i"] & F \arrow[r, "g"] & I_1 + I_2 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & & {} &
\end{tikzcd}
$$

Ahora, por el teorema del morfismo existen morfismos $\alpha: K_1 \oplus K_2 \to K$ y $\beta: K \to I_1 \cap I_2$ que hacen el diagrama conmutativo.

$\beta: K \to I_1 \cap I_2$ es tal que $\beta = h'^{-1} f j$.

Tenemos la sucesión exacta $0 \to K_1 \oplus K_2 \xrightarrow{\alpha} K \xrightarrow{\beta} I_1 \cap I_2 \to 0$.

α es un monomorfismo:

Sean k_1 y $k_2 \in K_1 \oplus K_2 \ni \alpha(k_1) = \alpha(k_2)$
$\therefore i(k_1) = j\alpha(k_1) = j\alpha(k_2) = i(k_2)$, como i es monomorfismo, tenemos que $k_1 = k_2$.

Demostraremos ahora que β es epimorfismo:

Sea $m \in I_1 \cap I_2$, $\therefore hh'(m) = 0$, de donde $h'(m) \in \operatorname{Ker} h$, $\therefore$ existe $w \in F \ni f(w) = h'(m)$ y $0 = hf(w) = g(w)$ $\therefore h'(m) \in \operatorname{Ker} g = \operatorname{Im} j$, entonces existe $k \in K \ni \beta(k) = m$, de aquí se sigue que β es epimorfismo.

Si K_1 y K_2 son de tipo finito, entonces K es de tipo finito $\Leftrightarrow I_1 \cap I_2$ es de tipo finito. Esto es, si I_1, I_2 son finitamente presentados, entonces $I = I_1 + I_2$ es finitamente presentado $\Leftrightarrow I_1 \cap I_2$ es de tipo finito.

Supongamos que a) vale, como I_1, I_2 son de tipo finito y $I = I_1 + I_2$ es de tipo finito, entonces I, I_1, I_2 son finitamente presentados $\therefore I_1 \cap I_2$ es de tipo finito con lo cual hemos probado c).

Supongamos ahora que c) vale.

Sea ${}_R I = Ra_1 + \cdots + Ra_n$ de tipo finito. Procederemos por inducción sobre n.

Si $n=1$, $I = Ra_1$, como $(0:a_1)$ es de tipo finito, entonces I es finitamente presentado.

Supongamos que al vale para $k<n$ y sean $I_1 = Ra_1 + \cdots + Ra_{n-1}$, $I_2 = Ra_n$, $\therefore$ I_1 e I_2 son finitamente presentados, luego $I_1 \cap I_2$ es de tipo finito, de donde, I es finitamente presentado con lo que queda demostrado a).

Ya hemos visto que los anillos noetherianos satisfacen 1.10 y 1.13. Veremos ahora que los anillos semihereditarios izquierdos también satisfacen 1.10 y 1.13.

Sea R un anillo semihereditario e ${}_R I$ un ideal izquierdo de R de tipo finito. Sea ${}_R F$ un R-módulo libre de tipo finito y $0 \to K \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} I \to 0$ una sucesión exacta, como I es proyectivo, la sucesión se escinde, $\therefore$ $\exists\, h: F \to K \ni hf = 1_K$, de aquí que K es de tipo finito, luego I es finitamente presentado.

Si R es un anillo que satisface 1.10 y 1.13

e I es un ideal bilateral de R que como ideal izquierdo es de tipo finito, entonces R/I también satisface 1.10 y 1.13

<u>Prueba</u>: Como R cumple 1.10 y 1.13, si I es de tipo finito, entonces I es finitamente presentado. Sea J/I un ideal izquierdo de R/I de tipo finito $\therefore$ J es finitamente presentado.

Sea $0 \to K'' \to R^n \to J/I \to 0$ una sucesión exacta. Demostraremos que K'' es de tipo finito.

Tenemos el diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
 & & K \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d] & K'' \arrow[d] & \\
 & & R^m \arrow[r] \arrow[d] & R^n \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & I \arrow[r] & J \arrow[r] \arrow[d] & J/I \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

α existe por el teorema del morfismo, hace el cuadrado conmutativo y es epimorfismo por el lema del 5º.

Como K es de tipo finito, entonces K'' lo es, de donde J/I es finitamente presentado.

§2 Producto directo de módulos proyectivos.

2.1 Definición: Sea R un anillo, A un R-módulo izquierdo y A' un submódulo de A. Decimos que A' es puro en A si $A' \cap aA = aA'$ $\forall a \in R$.

Observación: Cada sumando directo de A es puro. En efecto, sea $A = \bigoplus_{I} A_i$, demostraremos que $A_i \cap aA = aA_i$ $\forall i \in I$ y $\forall a \in R$. Siempre tenemos que $A_i \cap aA \supset aA_i$, solo falta demostrar que $A_i \cap aA \subset aA_i$. Si $b \in A_i \cap aA$, entonces $b = a \sum_{j=1}^{n} x_j$; $x_j \in A_j$ para cada j $\therefore$
$b = \sum_{j=1}^{n} a x_j = a x_i + \sum_{j \neq i} a x_j$, de donde $b - a x_i = \sum_{j \neq i} a x_j$ $\in A_i \cap \bigoplus_{j \neq i} A_j$ y $A_i \cap \bigoplus_{j \neq i} A_j = 0$, luego $b - a x_i = 0$
$\therefore$ $b = a x_i$, por consiguiente $aA \cap A_i = aA_i$.

2.2 Lema: Sea $a_1, a_2, \ldots$ una sucesión en un anillo R. Sea ${}_RF$ el R-módulo libre con base $x_1, x_2, \ldots$ y sean $y_n = x_n - a_n x_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$. Sea G el submódulo de F generado por $y_1, y_2, \ldots$. Entonces:

1) G es libre con base $y_1, y_2, \ldots$.

2) $G = F$ si y solo si para cada $k \in \mathbb{N}$ $\exists n \geq k$ $\nrightarrow$ $a_k \cdots a_n = 0$.

Prueba:

1) Sea $n \geq k$ y sean $r_k, \ldots, r_n \in R$, entonces
$r_k y_k + \cdots + r_n y_n = r_k(x_k - a_k x_{k+1}) + \cdots + r_n(x_n - a_n x_{n+1}) =$

$= r_k x_k + (r_{k+1} - r_k a_k) x_{k+1} + \cdots + (r_n - r_{n-1} a_{n-1}) x_n - r_n a_n x_{n+1}.$

Si $r_k y_k + \cdots + r_n y_n = 0$, como $x_k, \ldots, x_{n+1}$ son linealmente independientes, entonces $r_k = r_{k+1} = \cdots = r_n = 0$, $\therefore y_k, \ldots, y_n$ son linealmente independientes, lo que prueba 1).

Para demostrar 2), supongamos que $x_k \in G$

$\therefore x_k = r_1 y_1 + \cdots + r_n y_n$, de donde

$$x_k = r_1(x_1 - a_1 x_2) + \cdots + r_{k-1}(x_{k-1} - a_{k+1} x_k) + r_k(x_k - a_k x_{k+1})$$
$$+ \cdots + r_{k+1}(x_{k+1} - a_{k+1} x_{k+2}) + \cdots + r_n(x_n - a_n x_{n+1}),$$

luego tenemos que $x_k = (r_k - r_{k-1} a_{k-1} x_k$.

Como $r_1 x_1 = 0 \Rightarrow r_1 = 0$ y $(r_2 - a_1 r_1) x_2 = 0 \Rightarrow r_2 = 0$

entonces $r_{k-1} = 0$ y $r_k = 1$, $\therefore r_1 = \cdots = r_{k-1} = 0$

Como $(r_{k+1} - r_k a_k) x_{k+1} = 0 \Rightarrow r_{k+1} - r_k a_k = 0 \therefore$

$r_{k+1} = r_k a_k$, $r_{k+2} = r_{k+1} a_{k+1} \ldots r_n = r_{n-1} a_{n-1}$ y $r_n a_n = 0$

En consecuencia,

$$0 = r_n a_n = r_{n-1} a_{n-1} a_n = r_{n-2} a_{n-2} a_{n-1} a_n = \cdots =$$
$$= r_k a_k a_{k+1} \cdots a_{n-1} a_n = a_k a_{k+1} \cdots a_n,$$ lo que prueba la condición necesaria de 2).

Para demostrar la suficiencia:

Sea $k \leq n$, $y_k = x_k - a_k x_{k+1}$, tenemos

$$y_{k+1} = x_{k+1} - a_{k+1} x_{k+2}.$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$
$$y_n = x_n - a_n x_{n+1}.$$

$\therefore\ x_k = y_k + a_k x_{k+1} = y_k + a_k y_{k+1} + a_k a_{k+1} x_{k+2} = \cdots$

$\cdots = y_k + a_k y_{k+1} + (a_k a_{k+1}) y_{k+2} + \cdots +$

$+ (a_k a_{k+1} \cdots a_{n-1} y_n) + (a_k \cdots a_n) x_{n+1}.$

Como $a_k \cdots a_n = 0 \Rightarrow x_k = y_k + a_k y_{k+1} + \cdots + (a_k \cdots a_{n-1}) y_n$.
de donde $x_k \in G \ \therefore\ G = F$.

<u>2.3 Lema</u>: Con las mismas hipótesis de 2.2.
Si G es un sumando directo de F, entonces la cadena de ideales principales derechos de R
$a_1 R \supseteq a_1 a_2 R \supseteq \ldots$ termina.

<u>Prueba</u>: Por 2.2 $\exists f: F \to G$ epimorfismo donde $f(x_n) = y_n$. Supongamos que la inclusión $i: G \to F$ se escinde, entonces $\exists\, s \in End_R(F)$ / $s(y_n) = x_n$, $n \in \mathbb{N}$, para cada $m \in \mathbb{N}$ escribimos $s(x_m)$ como combinación lineal de $x_1, x_2, \ldots$ de la siguiente forma: $s(x_m) = \sum_k c_{m,k} x_k$; $c_{m,k} \in R$.

$\therefore\ x_n = s(y_n) = s(x_n - a_n x_{n+1}) = \sum_k (c_{n,k} - a_n c_{n+1,k}) x_k$

de donde $c_{n,k} - a_n c_{n+1,k} = \delta_{n,k}$.

Como $x_1 = \sum_k (c_{1,k} - a_1 c_{2,k}) x_k$ es una suma finita, para algún k, $c_{1,n} = 0$ $\forall n \geq k$. Entonces, para cada $n \geq k$.

$c_{n,n} - a_n c_{n+1,n} = 1 \Rightarrow -a_n c_{n+1,n} = 1 - c_{n,n}$.

$$\therefore\ -a_1\cdots a_{n-1}a_n\,c_{n+1,n} = a_1\cdots a_{n-1}\,(1-c_{n,n})$$
$$= a_1\cdots a_{n-1} - a_1\cdots a_{n-1}c_{n,n}$$
$$= a_1\cdots a_{n-1} - a_1\cdots a_{n-2}c_{n-1,n}$$
$$\vdots$$
$$= a_1\cdots a_{n-1} - a_1 c_{1,n}$$
$$= a_1\cdots a_{n-1}.$$

Esto es, para cada $n\geq k$, $a_1\ldots a_{n-1}\in a_1\ldots a_n R$ $\therefore$ la cadena de ideales principales derechos de R termina.

Se dice que un subconjunto I de un anillo R es T-nilpotente izquierdo si para cualquier sucesión $a_1,a_2,\ldots$ en I $\exists\, n\in\mathbb{N} \ni a_1\cdots a_n=0$

Observamos que si I es T-nilpotente izquierdo, entonces I es nil; ya que $a,a,\ldots$ es una sucesión en I, siempre que $a\in I$.

2.4 Lema: Sea J un ideal izquierdo de un anillo R. Son equivalentes:

a) J es T-nilpotente izquierdo.

b) $JM\neq M$ para cada ${}_RM\neq 0$.

c) JM es pequeño en M para cada ${}_RM\neq 0$.

d) JF es pequeño en F para cada $F=R^{(\mathbb{N})}$ libre

$\therefore$ J es T-nilpotente izquierdo.

2.5 Definición: Una cubierta proyectiva de un R-módulo izquierdo $M \neq 0$ es un epimorfismo $P \xrightarrow{p} M \to 0$ con P proyectivo y ker p pequeño en P.

2.6 Proposición: Si e es un idempotente en un anillo R, entonces $\rho: eRe \to End_R(Re) \ni \rho(ere)(ae) = aere$ es un isomorfismo de anillos.

Prueba: Si $\rho(ere)(ae) = aere \;\forall a$, en particular para $a = e$, tenemos $\rho(ere)(ee) = \rho(ere)(e) = ere$. Ahora, sea $f \in End_R(Re)$, entonces $f(e) = re \therefore re = f(e) = f(ee) = ef(e) = ere$, luego ρ es un isomorfismo.

2.7 Proposición: Sea R un anillo, J el radical de Jacobson de R. Para P un R-módulo izquierdo proyectivo, son equivalentes:

a) P es cubierta proyectiva de un simple.

b) JP es submódulo pequeño máximo de P.

c) $End_R(P)$ es un anillo local.

Prueba:

a) $\Rightarrow$ b) Claramente P es cubierta proyectiva de un simple $\Leftrightarrow$ P contiene un submódulo pequeño máximo. Pero JP está contenido en cada máximo de P y JP contiene a cada pequeño de P, lo que prueba b).

b)$\Rightarrow$c) Si JP es pequeño máximo, entonces como $End_R(P)/J(End_R P) \cong End_R(P/JP)$ y P/JP es simple, tenemos por el lema de Schur que $End_R(P)$ es un anillo con división, lo que equivale a que $End_R(P)$ es un anillo local.

c)$\Rightarrow$a) Supongamos que $End_R(P)$ es un anillo local. Entonces $P \neq 0$. Sea K un submódulo máximo de P. Afirmamos que el epimorfismo natural $P \to P/K \to 0$ es una cubierta proyectiva, es decir, K es pequeño en P. Sea $L \subseteq P \ni K+L=P$ $\therefore P/K \cong (L+K)/K \cong L/L\cap K$ $\therefore \exists$ un morfismo $f \neq 0 \ni f: P \to L/L\cap K$, como P es proyectivo $\exists$ un endomorfismo $s: P \to L \subseteq P \ni$ el diagrama

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, "s"'] \arrow[dr, "f"] & & \\ L \arrow[rr, "n"] & & L/L\cap K \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

conmuta.

Como $0 \neq f = ns$, entonces $Im\, s \not\subseteq K$, de donde $Im\, s$ no es pequeño en P $\therefore s \notin J(End_R(P))$, esto es, s es un endomorfismo invertible, de donde $L=P$.

lo que prueba que K es pequeño en P.

Tenemos que cada R-módulo simple es una imagen homomorfa de R y cada cubierta proyectiva P de un módulo simple es isomorfa a un sumando directo de R, entonces, $P \cong Re$ para algún idempotente e de R.

2.8 Corolario. Para e un idempotente de un anillo R, son equivalentes:

a) Re/Je es simple

b) eRe es un anillo local.

2.9 Proposición: Sea R un anillo, e I un ideal de R con $I \subseteq J(R)$. Son equivalentes:

a) Los idempotentes se levantan modulo I.

b) Cada sumando directo de $_R(R/I)$ tiene una cubierta proyectiva.

c) Cada conjunto ortogonal finito (completo) de idempotentes en R/I se levanta a un conjunto ortogonal (completo) de idempotentes de R.

Prueba:

a) $\Rightarrow$ b) Un sumando directo de $_R(R/I)$ es también un un sumando directo de $_{R/I}(R/I)$, por lo que está generado por un idempotente de R/I. Si suponemos a), entonces podemos levantar tal idempotente, de donde, es suficiente probar que si e es un idempotente, entonces $(Re+I)/I$ tiene una cubierta proyectiva. Pero, $(Re+I)/I \cong Re/(I \cap Re) = Re/Ie$. Como $I \subseteq J(R)$, tenemos que $Ie \subseteq J(R)e$ y $J(R)e$ es pequeño en Re, luego $Re \to Re/Ie \to 0$ es una cubierta proyectiva.

b) $\Rightarrow$ c) Sean $e_1, \ldots, e_n$ un conjunto ortogonal completo de idempotentes módulo I. Como $I \subseteq J(R)$ entonces I es pequeño en R, luego la proyección natural p, $p: R \to R/I$ es una cubierta proyectiva. Por hipótesis, cada término de $R/I = (R/I)(e_1+I) \oplus \cdots \oplus (R/I)(e_n+I)$ tiene una cubierta proyectiva $\therefore$ existe un conjunto ortogonal completo de idempotentes $g_1, \ldots, g_n \in R$, $(R/I)(g_i+I) = p(Rg_i) = (R/I)(e_i+I)$ para $i=1,\ldots,n$. como los g_i son únicos, obtenemos que $e_i+I = g_i+I$ para $i=1,\ldots,n$.

c) $\Rightarrow$ a) Es claro ya que es un caso particular.

<u>2.10 Lema</u>. Sean $f: M \to N$ un epimorfismo de

módulos superfluo y $p: P \to M$ un R-homomorfismo. Entonces, $p: P \to M$ es una cubierta proyectiva $\Leftrightarrow$ $fp: P \to N$ es una cubierta proyectiva.

Prueba:

Es claro que es suficiente demostrar que p es pequeño $\Leftrightarrow$ fp lo es.

$\Rightarrow$) Supongamos que p y f son epimorfismos pequeños $\therefore$ fp es epimorfismo. Para ver que fp es pequeño usamos lo siguiente: Sea $g: N \to L$ un epimorfismo, entonces g es pequeño $\Leftrightarrow$ $\forall$ morfismo h, tal que gh es epimorfismo se tiene que h es epimorfismo. De lo anterior concluimos que fp es pequeño.

$\Leftarrow$) Si fp es un epimorfismo pequeño, entonces p es epimorfismo por el argumento arriba mencionado y p es pequeño ya que $\operatorname{Ker} p \subseteq \operatorname{Ker} fp$.

2.11 Definición se dice que un anillo R es semiperfecto si R/J es semisimple y los idempotentes se levantan módulo J.

2.12 Teorema: Para cualquier anillo R son equivalentes:

a) R es semiperfecto.
b) R tiene un conjunto ortogonal completo de idempotentes $e_1, \dots, e_n$ con cada e_iRe_i un anillo local.
c) Cada $_RM$ simple tiene una cubierta proyectiva.
d) Cada $_RM$ de tipo finito tiene una cubierta proyectiva.
Prueba:

a)$\Rightarrow$b) Como los idempotentes se levantan módulo J y como R/J es semisimple, por 2.9 podemos levantar los idempotentes para una descomposición de R/J y así obtener un conjunto ortogonal completo $e_1, \dots, e_n$ de idempotentes de R con cada $Re_i/Je_i \cong (R/J)(e_i+J)$ simple, por corolario 2.8 tenemos que cada e_iRe_i es un anillo local.

b)$\Rightarrow$c) Como e_iRe_i es anillo local, por 2.8 tenemos que Re_i/Je_i es simple. Si $_RM$ es simple, entonces como R/J-módulo también es simple. Tenemos que $R/J \cong \bigoplus_{i=1}^{n} Re_i/Je_i$, de donde $M \cong Re_i/Je_i$ para alguna i, en consecuencia M tiene una cubierta proyectiva.
c)$\Rightarrow$d) Sea $\mathcal{P} = \{P \mid P$ es cubierta proyectiva de algún $_RM$ simple$\}$. Tenemos que $\mathcal{P}$ genera a R-mod según veremos a continuación: sea $_RN \in R$-mod y supongamos que $\mathrm{Hom}_R(P,N) = 0 \; \forall P \in \mathcal{P}$, además, sea

$f: N \to S$ un epimorfismo con S simple $\therefore \exists P \in \mathcal{P} \ni$ P es cubierta proyectiva de S, como P es proyectivo $\exists g: P \to N \ni fg = p$ y $g \neq 0$ }, en consecuencia, $\mathcal{P}$ genera R-mod.

Sea $_RM$ de tipo finito, $\therefore$ existen $P_1, \dots, P_n \in \mathcal{P}$ y un epimorfismo $f: P = P_1 \oplus \cdots \oplus P_n \to M \to 0$. Como $f(JP) = JM$ f induce un epimorfismo $g: P_1/JP_1 \oplus \cdots \oplus P_n/JP_n \cong P/JP \xrightarrow{\rho} M/JM \to 0$. Además, tenemos que P_i/JP_i es simple $\forall i = 1, \dots, n$; ya que JP_i es pequeño máximo en P_i; de donde M/JM es semisimple, en consecuencia, M/JM tiene una cobierta proyectiva que denotaremos con $\bar{P}$. Como M es de tipo finito por lema de Nakayama JM es pequeño en M $\therefore M \xrightarrow{\pi} M/JM \to 0$ es un epimorfismo pequeño. Tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "\pi"] & M/JM \\
P \arrow[u, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & \bar{P} \arrow[u, "h"'] \arrow[l, shift right, "k"']
\end{tikzcd}$$

g existe por ser P proyectivo, además g es epimorfismo ya que: sea $\bar{x} \in \bar{P}$ $\therefore \exists z \in P \ni h(x) = \pi f(z)$, entonces $h(x - g(z)) = h(x) - hg(z) = h(x) - \pi f(x) = 0$ de donde $x - g(z) \in \operatorname{Ker} h$, como tenemos siempre que $x = x - g(z) + g(z)$ entonces $\bar{P} = \operatorname{Ker} h + \operatorname{Im} g$ y como $\operatorname{Ker} h$ es pequeño tenemos que $\operatorname{Im} g = \bar{P}$, luego $\exists k: \bar{P} \to P \ni gk = 1_{\bar{P}}$

y $\pi f k = h$ ya que $\pi f k = hgk = h$. Por 2.10, como π es pequeño y h es una cubierta proyectiva, entonces fk es cubierta proyectiva, de donde concluimos d1.

d1) ⇒ a) Por d1 cada sumando directo de R/J tiene una cubierta proyectiva, por 2.9 tenemos que los idempotentes se levantan modulo J. Demostraremos ahora que R/J es semisimple. Sea K un ideal máximo de R, $J \leq K \subset R$, luego R/K es cíclico, por d) R/K tiene una cubierta proyectiva, y entonces $R/K \cong Re/I_e$ para algún ideal $I \subseteq J$ y e un idempotente. Como $J(Re/I_e) \cong J(R/K) = 0$ concluimos que $Je = JRe = Ie$ $\therefore R/K \cong Re/Je \cong (R/J)(e+J)$. $\therefore$ R/K es sumando directo de R/J, entonces la sucesión exacta $0 \to K/J \to R/J \to R/K \to 0$ se escinde, de donde K/J es sumando directo de R/J. Esto último como veremos a continuación equivale a que todo submódulo de R/J es sumando directo.

Sea $\mathcal{S} = \{M_i \leq R/J \mid M_i$ no es sumando directo de $R/J\}$. y supongamos que nuestra conclusión no es válida, de donde $\mathcal{S}$ no es vacía. Sea $0 \neq M_1 \leq M_2 \leq \ldots$ una cadena de elementos de $\mathcal{S}$. Tenemos que $\bigcup_{\mathbb{N}} M_i \in \mathcal{S}$ pues si no estuviera, existiría $N \leq R/J$ + $\bigcup_{\mathbb{N}} M_i \oplus N = R/J$ $\therefore$ $T = x+y$, con $x \in \bigcup M_i$ y $y \in N$, luego $x \in M_n$ para

alguna $n \in \mathbb{N}$, de donde $R/J = M_n \oplus N$ ∴ $\bigcup_{\mathbb{N}} M_i \in \mathcal{S}$.
Por lema de Zorn, existe M_0 máximo en $\mathcal{S}$. Afirmamos que M_0 es esencial en R/J. Sea $\bar{x} \neq 0$ y $\bar{x} \in R/J - M_0$ con $\langle \bar{x} \rangle \cap M_0 = 0$, luego $\langle \bar{x} \rangle \oplus M_0$ es suma directa, como M_0 es máximo en $\mathcal{S}$ $\nexists N < R/J$ y $M_0 \oplus \langle \bar{x} \rangle \oplus N = R/J$
en consecuencia M_0 si es esencial. Luego $\exists$ M un submódulo máximo de R/J y $M_0 \subset M \subset R/J$ y M es sumando directo de R/J ∴ $\exists N \leq R/J$ y $M \oplus N = R/J \Rightarrow N \cap M_0 = 0$
Finalmente podemos concluir que R/J es semisimple.

<u>2.13 Definición</u>. Se dice que un anillo R es perfecto izquierdo si cada $_RM$ tiene una cubierta proyectiva.

Por 2.12 los anillos perfectos son semiperfectos

<u>2.14 Teorema</u>: Para cualquier anillo R, son equivalentes las siguientes afirmaciones:

a) R es perfecto izquierdo.

b) R/J es semisimple y J es T-nilpotente izquierdo.

c) R/J es semisimple y cada $_RM \neq 0$ contiene un submódulo máximo.

d) Cada $_RM$ plano es proyectivos.

e) R satisface la condición mínima para ideales principales derechos.

f) R contiene un conjunto no infinito de idempotentes ortogonales y cada M_R contiene un submódulo mínimo.

<u>Prueba</u>:

a) $\Rightarrow$ c) Como R es perfecto, por 2.12 R es semiperfecto, luego R/J es semisimple. Veremos ahora que cada $_RM \neq 0$ contiene un submódulo máximo. Sea $_RM \neq 0$ por a) existe P proyectivo y una sucesión exacta $0 \to K \to P \to M \to 0$ tal que K es pequeño en P. y $M \cong P/K$. Como P es proyectivo $\exists\, L < P$ máximo $\ni$ $K \subseteq L < P$ $\therefore$ L/K es submódulo máximo de P/K, luego hemos obtenido c).

c) $\Rightarrow$ b) Como J anula todo módulo simple, $JM \neq M$ si $_RM \neq 0$, entonces por lema 2.4 J es T-nilpotente izquierdo.

b) $\Rightarrow$ a). Como J es T-nilpotente entonces J es nil ideal, luego los idempotentes se levantan módulo J. y R/J es semisimple por b), de donde R es al menos semiperfecto. Sea $_RM \neq 0$, entonces M/JM es semisimple $\therefore$ $\exists\, \{e_\alpha\}_I$ un conjunto de idempotentes primitivos en R $\ni$ $\oplus\, Re_\alpha/Je_\alpha \cong M/JM$ pues $\{Re_\alpha/Je_\alpha\}_I$ es una clase completa de representantes de los módulos izquierdos simples. Sea $P = \oplus Re_\alpha$, como J es T-nilpotente, JP es pequeño en P y JM es pequeño en M por 2.4, luego M tiene una cubierta proyectiva por 2.10.

a)$\Rightarrow$d) Sea F plano, $P \xrightarrow{f} F \to 0$ una cubierta proyectiva y $K = \operatorname{Ker} f$. Como K es pequeño en P, $K \subset JP$. Como P y F son planos los morfismos $\mu_1 : J \otimes_R P \to JP$, $j \otimes p \mapsto jp$ y $\mu_2 : J \otimes_R F \to JF$, $j \otimes x = jx$ son isomorfismos, con lo que tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccc} K & \longrightarrow & JP & \xrightarrow{f/JP} & JF \\ \uparrow & & \uparrow \mu_1 & & \uparrow \mu_2 \\ J \otimes_R K & \longrightarrow & J \otimes_R P & \xrightarrow{J \otimes f} & J \otimes_R F \end{array}$$

$\therefore K = \operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f/JP = \mu_1(\operatorname{Ker}(J \otimes f)) = \mu_1(\operatorname{Im}(J \otimes K)) = JK$

Como J es T-nilpotente y ya que a) es sii b) entonces $K = 0$ $\therefore$ $F \cong P$.

d)$\Rightarrow$e) Toda sucesión descendente de cadena de ideales principales derechos es de la forma $a_1 R \supseteq a_1 a_2 R \supseteq \ldots$ para alguna sucesión $a_1, a_2, \ldots$ de elementos de R.

Sean G y F como en 2.2, es suficiente demostrar que F/G es plano ya que por d) F/G es proyectivo, lo que nos da que G es sumando directo de F; así, obtenemos e) si aplicamos 2.3.

Por 2.2 $y_1, y_2, \ldots, y_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots$ es una base de F y cada $G_n = \sum_{i=1}^{n} R y_i$ es un sumando directo de F, $\therefore$ G_n es puro en F, luego $\forall$ I ideal de R tenemos que $G_n \cap IF = IG_n$, lo que equivale a que F/G es plano. Sea $G = \bigcup G_n$, entonces $G \cap IF = \bigcup G_n \cap IF$ $= \bigcup (G_n \cap IF) = \bigcup (IG_n) = IG$, luego G es puro en F $\therefore$ F/G es plano.

e) $\Rightarrow$ f) Supongamos e), entonces R contiene un conjunto no infinito de idempotentes ortogonales. Pues si $e_1, e_2, \ldots$ fueran idempotentes ortogonales diferentes de cero en R, como $\prod_{i=1}^{n} (1-e_i) = 1 - e_1 - \cdots - e_n$ lo que se demuestra fácilmente por inducción; entonces la cadena de ideales principales $(1-e_1)R \supset (1-e_1-e_2)R \supset \cdots$ no terminaría $\#$ a e). Además, la contención es propia. Supongamos que $(1-\sum_{i=1}^{n} e_i) = (1-\sum_{i=1}^{n+1} e_i) r$, entonces multiplicando ambos miembros de la igualdad por e_{n+1} obtenemos que
$$e_{n+1} = e_{n+1}(1-\sum_{i=1}^{n} e_i) = e_{n+1}(1-\sum_{i=1}^{n+1} e_i) r = (e_{n+1} - e_{n+1}) r = 0$$
$\Rightarrow e_{n+1} = 0$ $\#$, luego la contención es propia.

Supongamos ahora que $0 \neq M_R$ no contiene un submódulo simple. Sea $0 \neq x \in M$ y xR no contie ne un submódulo simple, como xR no es simple $\exists a_1 \in R$ con $xR \supset xa_1R \neq 0$ y xa_1R no contiene ningún submódulo simple. Por inducción obtenemos $a_1, a_2, \ldots$ en R ∋ la cadena de submódulos $xa_1R \supset xa_1a_2R \supset \ldots$ no termina, lo que nos da que la cadena de ideales principales derechos $a_1R \supset a_1a_2R \supset \ldots$ no termina ⚡. De donde podemos concluir que xR contiene un submódulo simple.

f) ⇒ b) Sea $a_1; a_2, \ldots$ una sucesión en J y supongamos que $\forall n \in \mathbb{N}$ $a_1 \cdots a_n \neq 0$. Sea $\mathcal{F} = \{K_R \subseteq R \mid a_1 \cdots a_n \notin K \; \forall n\}$. Sea $K_1 \subseteq K_2 \subseteq \ldots$ una cadena en $\mathcal{F}$, consideremos $K = \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i$, si $a_1 \cdots a_n \in K \Rightarrow a_1 \cdots a_n \in K_i$ p.a. i ⚡, luego $a_1 \cdots a_n \notin K$ $\therefore K \in \mathcal{F}$, por lema de Zorn $\exists$ I máximo en $\mathcal{F}$ y $a_1 \cdots a_n \notin I$. Como $0 \neq R/I$, por hipótesis $\exists$ M_R ∋ $I \subset M \subseteq R$ y M/I es simple, como I es máximo en $\mathcal{F}$ $\Rightarrow a_1 \cdots a_n \in M$ $\therefore$ $a_1 \cdots a_n a_{n+1} \in M - I$ y $\therefore$ $\overline{a_1 \cdots a_n}$, $\overline{a_1 \cdots a_{n+1}} \in M/I$ de donde $\exists r \in R$ ∋ $\overline{a_1 \cdots a_n} = \overline{a_1 \cdots a_{n+1} r}$, en consecuencia, $a_1 \cdots a_n - a_1 \cdots a_{n+1} r \in I$ y $a_1 \cdots a_n - a_1 \cdots a_{n+1} r =$ $= a_1 \cdots a_n (1 - a_{n+1} r) \in I$, como $a_{n+1} \in J$, entonces $1 - a_{n+1} r$ es invertible $\therefore$ $a_1 \cdots a_n \in I$ ⚡, de donde, J es T-nilpotente $\Rightarrow$ J es nil ideal, luego los idempotentes se levantan módulo J. Como R contiene un conjunto no infinito de idempotentes $e_1, \ldots, e_n$; éstos deben ser idempotentes primitivos. Sea $M \subseteq (e_iR+J)/J$ mínimo, que existe por f), como $J(e_iR/e_iJ)=0$ entonces M es sumando directo de R/J $\therefore$ $\exists N_e \ni M \oplus N = e_iR/e_iJ$ de donde $\bar{e}_i = f+q$ con $f \in M$ un idempotente y $q \in N$ un idempotente. como e_i es primitivo, entonces $q=0$, luego $e_iR/e_iJ = M$ luego e_iR/e_iJ simple es sumando directo de R/J $\therefore$ R/J es semisimple.

<u>2.15 Teorema</u>: Son equivalentes para cualquier anillo R:

a) El producto directo de una familia de R-módulos izquierdos proyectivos es proyectivo.

b) R^X es proyectivo como R-módulo izquierdo para todo conjunto X.

c) R es perfecto izquierdo y cualquier ideal derecho de tipo finito de R es finitamente presentado.

<u>Demostración</u>:

a) $\Rightarrow$ b) Es un caso particular.

b) $\Rightarrow$ c) Todo módulo proyectivo es sumando directo de un libre, luego es submódulo puro de un libre, por 2.3 cualquier cadena de ideales principales derechos termina; en consecuencia, R es perfecto izquierdo. Como R^I es proyectivo entonces R^I es plano, por 1.10 todo ideal de R de tipo finito es finitamente presentado.

c)$\Rightarrow$a) Como todo proyectivo es plano y todo ideal de tipo finito de R es finitamente presentado, entonces por 1.10 el producto directo de cualquier familia de R-módulos izquierdos proyectivos es al menos plano, como R es perfecto el producto directo de R-módulos izquierdos proyectivos es proyectivo.

2.16 Teorema: Sea R un anillo conmutativo. Entonces, R posee las propiedades descritas en 2.15 $\Leftrightarrow$ R es artiniano.

Demostración:

$\Leftarrow$) Si R es artiniano, R es entonces noetheriano, $\therefore$ todo ideal de tipo finito de R es finitamente presentado, por 2.14 tenemos que R es perfecto izquierdo.

$\Rightarrow$) Sea J el radical de Jacobson de R, como R es perfecto izquierdo, R/J es semisimple, luego $R/J = \bigoplus_{i=1}^{n} Re_i/Je_i$ con cada Re_i/Je_i simple.

Sea $\bar{e}_i$ unidad de Re_i/Je_i, como J es T-nilpotente J es nil ideal, en consecuencia, los idempotentes se levantan módulo J, $\therefore\ \exists e_i \in R \ni e_i + J = \bar{e}_i$. Sea $R_i = e_i R e_i$ como Re_i/Je_i es simple, R_i es un anillo local $\forall i$ y claramente $R = \overset{n}{\underset{i=1}{\oplus}} R_i$. Como R satisface 2.15 entonces R_i también la satisface $\forall i$, entonces, R será artiniano $\Leftrightarrow R_i$ lo es $\forall i$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que R es anillo local, luego J es el único ideal máximo de R, como R es perfecto, R contiene un ideal simple, el cual es necesariamente isomorfo a R/J que como es de tipo finito. es finitamente presentado, luego J es de tipo finito, de donde J^n/J^{n+1} es de tipo finito $\forall n \geq 0$ y como es semisimple resulta ser de longitud finita.

Sean $\{a_1, \ldots, a_r\}$ un conjunto de generadores de J, como J es T-nilpotente $\exists s > 0 \ni a_i^s = 0\ \forall i \leq r$. Como R es un anillo conmutativo $J^{rs} = 0$, pues: Si $b \in J^{rs}$ $b = b_1 \ldots b_{rs}$ con $b_j = \sum_{i=1}^{r} c_{ij} a_i$; $c_{ij} \in R$ y $j = 1, \ldots, rs$. $\therefore\ b = \prod_{j=1}^{rs} \left(\sum_{i=1}^{r} c_{ij} a_i \right)$ $(*)$. Para demostrar que $b = 0$ basta fijarnos en los monomios de $(*)$, que son de la forma: $d\, a_1^{k_1} a_2^{k_2} \ldots a_r^{k_r}$;

de R y $\sum_{i=1}^{r} k_i = rs$. Supongamos que $k_i < s$ $\forall i$ $\Rightarrow \sum_{i=1}^{r} k_i < rs$ $\perp$ $\therefore$ $k_i \geq s$ $\forall i$, luego $d a_1^{k_1} a_2^{k_2} \dots a_r^{k_r} = 0$ de donde $J^{rs} = 0$.

Sea $n = rs$. J^{n-1} es de longitud finita ya que $J^{n-1} \cong J^{n-1}/J^n$. Supongamos que J^i es de longitud finita para $i < n-1$. De la sucesión exacta $0 \longrightarrow J^i \longrightarrow J^{i-1} \longrightarrow J^{i-1}/J^i \longrightarrow 0$ obtenemos que J^{i-1} es de longitud finita; por lo que J^i es de longitud finita $\forall i = 1, \dots, rs$. Así, J es de longitud finita, como la sucesión $0 \to J \to R \to R/J \to 0$ es exacta, y J, R/J son de longitud finita, obtenemos que R es artiniano.

§3. Aplicaciones.

3.1 Definición: Sean R un anillo y A un R-módulo izquierdo. Se dice que A es sin torsión si es submódulo de un producto directo de copias de R.

3.2 Observación: Un R-módulo izquierdo A es sin torsión $\Longleftrightarrow$ para cada $0 \neq x \in A$ $\exists$ $f \in Hom_R(A,R) \ni f(x) \neq 0$.

Prueba:

$\Rightarrow$)) Sea $0 \neq x \in A$, consideremos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} A & \overset{i}{\hookrightarrow} & R^{X} \\ & & \downarrow \pi_j \\ & & R \end{array}$$

Si $0 \neq x \in A$, $\exists$ $j \in X \ni \pi_j \circ i(x) \neq 0$.

$\Leftarrow$) Sea $0 \neq x \in A$ y consideremos $R^A \xrightarrow{p_x} R$, como $\exists f_x \in Hom_R(A,R) \ni f_x(x) \neq 0$, por la propiedad universal del producto directo $\exists$ $f: A \to R^A \ni p_x f = f_x$. Si $0 \neq x \in A$, entonces $0 \neq f_x(x) = p_x f(x)$, luego $f(x) \neq 0$, con lo que queda demostrada la observación.

3.3 Observación. Sea R un dominio entero. Si ${}_RA$ es sin torsión, entonces ${}_RA$ es libre de torsión.

Prueba:

Obtenemos el resultado fácilmente, ya que la clase de R-módulos libres de torsión es cerrada bajo productos directos y submódulos.

<u>3.4 Observación</u>: Sea R un dominio entero. Si ${}_RA$ es de tipo finito y libre de torsión, entonces ${}_RA$ es sin torsión.

<u>Prueba:</u> Sea $\{x_1,\dots,x_n\}$ un conjunto de generadores de A. Definimos $\bar{f}: A \to R^n \ni \bar{f}(x_i) = (\delta_{i,j})_{j=1,\dots,n}$ así, $\bar{f}$ se extiende por linealidad, sólo nos falta demostrar que $\bar{f}$ es monomorfismo. Sea $0 \neq x \in A$, $\therefore$ $x = \sum_{i=1}^{n} r_i x_i$, $r_i \in R$, entonces $\bar{f}(x) = \bar{f}(\sum_{i=1}^{n} r_i x_i) =$
$= \sum_{i=1}^{n} r_i \bar{f}(x_i) = (r_1,\dots,r_n) \neq 0$.

A continuación, utilizaremos $GWD(R)$ para denotar la dimensión global débil de un anillo R.

<u>3.5 Teorema</u>: Para cualquier anillo R, son equivalentes:

a) R es semihereditario izquierdo.

b) $GWD(R) \leq 1$ y R^I es plano como R-módulo derecho.

c) Cada M R-módulo derecho sin torsión es plano.

<u>Prueba:</u>

a) ⇒ b) Supongamos a), ∴ cada ${}_RI \leq R$ de tipo finito es proyectivo, luego es plano y finitamente presentado, por 1.10 R^{I} es plano como R-módulo derecho.

Tenemos que todo módulo es el límite directo de sus submódulos de tipo finito y sabemos que el límite directo de módulos planos es plano, luego, cada ideal izquierdo de R es plano, de donde. $GWD(R) \leq 1$, ya que: Si ${}_RI$ es plano, entonces $Tor_1(I,N)=0$ $\forall N$. Consideremos un R-módulo izquierdo M cíclico, tenemos la sucesión exacta $0 \to I \to R \to M \to 0$, de donde, la sucesión $\cdots \to Tor_1(R,N) \to Tor_1(M,N) \to N \otimes I \to \cdots$ es exacta. por lo que obtenemos que $Tor_1(M,N)=0$ $\forall N$. Vía el argumento de límite directo y como tor_1 preserva límites directos entonces para cualquier R-módulo izquierdo M tenemos que $Tor_1(M,N)=0$ $\forall N$ ∴ $GWD(R) \leq 1$.

b) ⇒ c) Supongamos que $GWD(R) \leq 1$, consideremos una sucesión exacta $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ con M plano. Si aplicamos $Tor_n(-,N)$ a ésta sucesión, obtenemos de la sucesión exacta $\cdots \to Tor_2(M'',N) \to Tor_1(M',N) \to Tor_1(M,N) \to \cdots$ que $Tor_1(M',N)=0$, ya que $Tor_1(M,N)=0$ pues M es plano y $Tor_2(M'',N)=0$ porque $GWD(R) \leq 1$. De donde, si $GWD(R) \leq 1$, cualquier submódulo de un R-módulo plano es plano. Obtenemos c) por definición de un R-módulo sintorsión y el argumento anterior.

c)$\Rightarrow$b) Cada I_R ideal de R es sin torsión, por c) es plano $\therefore$ $GWD(R) \leq 1$, además, R^I es sin torsión, luego R^I es plano.

b)$\Rightarrow$a) Como R^I es plano, por 1.10 todo ideal izquierdo de tipo finito de R es finitamente presentado; como $GWD(R) \leq 1$ todo ideal es plano, por 1.6 R es semihereditario izquierdo.

<u>Definición</u>: Se dice que un anillo R es un anillo de Prüfer si es un dominio entero semihereditario.

3.6 Definición: Sea R un dominio entero y sea Q su campo de cocientes. Se dice que un ideal I de R es invertible si $\exists$ $a_1, \ldots, a_n \in I$, $q_1, \ldots, q_n \in Q$ $\ni$ $q_i I \subset R$ $i = 1, \ldots, n$ y $1 = \sum_{i=1}^{n} q_i a_i$.

3.7 Proposición: Sea R un dominio entero. Entonces un ideal I de R es proyectivo si y solo si $\exists$ $\{a_k\}_{k \in I}$ y $\{\varphi_k : I \longrightarrow R\}_k$ $\ni$ $\forall a \in I$ $a = \sum (\varphi_k(a))\, a_k$, donde $\varphi_k(a)=0$ para casi toda $k\in K$.

Demostración:

$\Rightarrow$) Si I es proyectivo $\exists$ un epimorfismo $\psi: F\to I$ donde F es libre con base $\{e_k\}_K$ y $\varphi: I\to F \ni \psi\varphi = 1_I$

Si $a\in I$, entonces $\varphi(a)=\sum_K r_k e_k$, donde $r_k=0$ para casi toda $k\in K$, y esta expresión es única. Definimos $a_k=\psi(e_k)$ y $\varphi_k: I\longrightarrow R \ni a\longmapsto r_k$, dado $a\in I$, entonces $\varphi_k(a)=0$ para casi toda $k\in K$ y $a=\psi\varphi(a)=$
$=\psi(\sum_K r_k e_k)=\sum_K r_k\psi(e_k)=\sum_K(\varphi_k(a))a_k$.

$\Leftarrow$) Consideremos $\{a_k\}_K\subset I$ y $\{\varphi_k: I\to R\}_K \ni$ $\forall a\in I$, $a=\sum_K(\varphi_k(a))a_k \ni \varphi_k(a)=0$ para casi toda $k\in K$. Entonces I está generado por $\{a_k\}_K$, de lo cual, $\exists F$ R-módulo libre con base $\{e_k\}_K$ y un epimorfismo $\psi: F\to I \ni \psi(e_k)=a_k$. Definimos $\varphi: I\to F \ni$ $a\longmapsto\sum_K(\varphi_k(a))e_k$. φ está bien definido, ya que $\varphi_k(a)=0$ para casi toda $k\in K$. Finalmente, si $a\in I$ entonces $\psi\varphi(a)=\psi\sum_K(\varphi_k(a))e_k=\sum_K(\varphi_k a)a_k=a$, de donde $\psi\varphi=1_I$ $\therefore$ I es proyectivo

3.8 Proposición: Sea R un dominio entero y $0\neq I$ ideal de R. Entonces, I es proyectivo $\Leftrightarrow$ I es invertible

Demostración:

$\Rightarrow$) Supongamos que I es proyectivo, luego $\exists$n $\{a_k\}_k \subset I$ y $\{\varphi_k : I \to R\}_k$ como en 3.7. Si $0 \neq b \in I$, definimos $q_k \in Q$ ⁒ $q_k = \varphi_k(b)/b$. Veremos que q_k no depende de b, si $b' \in I$ y $b' \neq 0$, entonces $b'\varphi_k(b) = \varphi_k(b'b) = \varphi_k(bb') = b\varphi_k(b')$ $\therefore$ $\varphi_k(b)/b = \varphi_k(b')/b'$. ; $q_k I \subset R$ $\forall k \in K$ ya que $bq_k = b(\varphi_k(b)/b) = \varphi_k(b) \in R$. Ahora, $bq_k = \varphi_k(b)$ $\therefore$ $bq_k = 0$ para casi toda $k \in K$, entonces si $b \neq 0$ casi todas las $q_k = 0$. Finalmente, si $b \in I$ $b = \sum_k (\varphi_k(b))a_k = \sum_k (q_k b)a_k = b(\sum_k q_k a_k)$, si $b \neq 0$ podemos cancelar y obtener $1 = \sum_k q_k a_k$; en consecuencia, I es invertible.

$\Leftarrow$) Supongamos que I es invertible, entonces existen elementos $\{a_k\}_k$ y $\{q_k\}_k$ que satisfacen la definición. Definimos $\varphi_k : I \to R$ ⁒ $\varphi_k(a) = q_k a$, tenemos que $\mathrm{Im}\, \varphi_k \subset R$ ya que $q_k I \subset R$. Si $a \in I$, entonces $\sum_k (\varphi_k a)a_k = \sum_k q_k a a_k = a \sum_k q_k a_k = a$, por 3.7 I es proyectivo.

<u>3.9 Observación</u>: Tenemos que en un anillo de Prüfer todo ideal de tipo finito es invertible.

<u>3.10 Proposición</u>: Sea R un dominio entero, Q su campo de cocientes. La función $\varphi : A \to Q \otimes_R A$ ⁒ $a \mapsto 1 \otimes a$,

tiene como núcleo la parte de torsión de A.

Prueba: Tenemos que $Q = \varinjlim \frac{1}{r} R$, $r \in R$; como el producto tensorial conmuta con límites directos entonces $\operatorname{Ker} \varphi = \bigcup_{r \in R} \operatorname{Ker} \varphi_r$ donde $\varphi_r : A \longrightarrow \frac{1}{r} R \otimes A \cong rA$ ⫽ $a \mapsto ra$; ya que, si $a \in \operatorname{Ker} \varphi$ entonces $1 \otimes a = 0$ ∴ $\exists r \in R$ ⫽ $ra = 0$ de donde $\operatorname{Ker} \varphi \subset \bigcup_{r \in R} \operatorname{Ker} \varphi_r$. Análogamente se demuestra la otra contensión. Entonces $\operatorname{Ker} \varphi = \bigcup_{r \in R} \operatorname{Ker} \varphi_r =$
$= \bigcup_{r \in R} \{ a \in A \mid ra = 0 \} = t_A$.

<u>3.11 Proposición</u>: Cada R-módulo M de tipo finito libre de torsión es submódulo de un R-módulo libre.

<u>Prueba</u>: Como M es libre de torsión, la sucesión $0 \longrightarrow M \longrightarrow Q \otimes_R M$ es exacta, por lo tanto, M es submódulo de $Q \otimes_R M$; además, podemos ver q $Q \otimes_R M$ como espacio vectorial sobre Q de dimensión finita, ya que: Sea $\{x_1, \dots, x_n\}$ un conjunto de generadores de M. y sea $q \otimes \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \in Q \otimes M$ ⫽ $a_i \in R$, entonces $q \otimes \sum_{i=1}^{n} a_i x_i =$
$= \sum_{i=1}^{n} q a_i (1 \otimes x_i)$. Sea $\{e_1, \dots, e_m\}$ base de $Q \otimes_R M$ con $m \leq n$, ∴ si $x_i \in M$, $x_i = \sum_j q_{i,j} e_j$ ⫽ $q_{i,j} \in Q$.
Si $\lambda \in R$ ⫽ $\lambda \neq 0$ y $\lambda q_{i,j} \in R$, entonces $x_i = \sum_j \lambda q_{i,j} \lambda^{-1} e_j$, de donde, $M \hookrightarrow F$ y F es el R-módulo libre generado por $\lambda^{-1} e_j$, $j = 1, \dots, m$.

3.12 Proposición: Sea R un anillo de Prüfer y A un R-módulo. Entonces, A es libre de torsión $\Leftrightarrow Tor_1(M,A)=0\ \forall M$.

Prueba:

$\Rightarrow$) Si A es libre de torsión, por 3.11 cada submódulo A' de A de tipo finito es proyectivo $\therefore Tor_1(M,A')=0\ \forall M$ como el límite directo conmuta con Tor_1, entonces $Tor_1(M,A)=0$ $\forall M$.

$\Leftarrow$) Consideremos la sucesión exacta $0\to R\to Q\to K\to 0$, por hipótesis, $Tor_1(K,A)=0$, como la sucesión $\cdots\to Tor_1(K,A)\xrightarrow{\phi}$ $\to A\xrightarrow{\varphi} Q\otimes_R A\to\cdots$ es exacta, tenemos que $0=Im\,\phi=$ $=Ker\,\varphi=t_A$, lo que nos da que A es libre de torsión.

3.13 Proposición: Si R es un anillo semihereditario, entonces cada submódulo de tipo finito de un R-módulo libre es la suma directa de un número finito de módulos, los cuales son isomorfos a ideales de tipo finito de R.

Demostración: Sea $\{x_\alpha\}$ una base de un R-módulo libre F y A un submódulo de F de tipo finito. Entonces A está contenido en un submódulo de F generado por un número finito de los elementos x_α. De donde, podemos suponer que F tiene una base finita, sea $\{x_1,\dots,x_n\}$ dicha base. Procederemos por inducción sobre n. Sea B el submódulo de todos los elementos de A los cuales se pueden expresar en términos de $x_1, \dots, x_{n-1}$. Entonces, cada $a \in A$ se puede escribir de manera única como $a = \lambda x_n + b$, $\lambda \in R$ y $b \in B$, notemos que $B = 0$ si $n = 1$. La función f que manda a $a \mapsto \lambda$ mapea A sobre un ideal I de R y el núcleo de f es B; tenemos la sucesión exacta. $0 \to B \to A \to I \to 0$, se sigue entonces que I es de tipo finito, luego I es proyectivo $\therefore$ la sucesión se escinde $\therefore$ $A \cong B \oplus I$, lo que implica que B es de tipo finito, por hipótesis de inducción B satisface la conclusión, lo que demuestra que A también la satisface.

<u>3.14 Proposición</u>: Sea R un anillo; entonces, R es un anillo de Prüfer $\Longleftrightarrow$ cada R-módulo libre de torsión de tipo finito es proyectivo.

<u>Prueba:</u>

$\Leftarrow$) Si cada libre de torsión de tipo finito es proyectivo, entonces cada ideal de tipo finito de R es proyectivo, luego R es anillo de Prüfer.

$\Rightarrow$) Como R es un anillo de Prüfer, R es semihereditario, luego cada submódulo de tipo finito de un libre es sumando directo de un número finito de módulos, los cuales son isomorfos a ideales de tipo finito de R. Por 3.11 cada R-módulo libre de torsión de tipo finito es submódulo de tipo finito de un R-módulo libre, en consecuencia, es suma directa de R-módulos proyectivos y por lo tanto es proyectivo.

3.15 Corolario: Si R es un anillo de Prüfer y C es un R-módulo libre de torsión, entonces $A \otimes_R C$ es funtor exacto de A.

3.16 Teorema: Sea R un dominio entero, son equivalentes:

a) R es anillo de Prüfer.

b) Si A y B son libres de torsión, entonces $A \otimes_R B$ es libre de torsión.

c) Si I y J son ideales de R, entonces $I \otimes_R J$ es libre de torsión.

d) $GWD(R) \leq 1$.

e) Cada M Libre de torsión es plano.

Prueba:

a) $\Rightarrow$ b) Sea Q el campo de cocientes de R, por 3.10

la función $\varphi : A \longrightarrow Q\otimes_R A$ tiene como núcleo la parte de torsión de A, como A es libre de torsión, la sucesión $0 \longrightarrow A \xrightarrow{\varphi} Q\otimes_R A$ es exacta; como B es libre de torsión y R es un anillo de Prüfer, por 3.14 $M\otimes B$ es funtor exacto de M $\forall$ M R-módulo $\therefore$ obtenemos la sucesión exacta $0 \longrightarrow A\otimes B \xrightarrow{\psi} Q\otimes A\otimes B$, de donde ψ es monomorfismo $\therefore$ $0 = \operatorname{Ker}\psi = t_{A\otimes_R B}$, en consecuencia $A\otimes_R B$ es libre de torsión..

b) $\Rightarrow$ c) Es un caso particular.

c) $\Rightarrow$ d) Sean I, J ideales de R. Sea $j_* : I\otimes_R J \longrightarrow J$ el morfismo inducido por la inclusión $j : I \longrightarrow R$. Sea $u = a_1\otimes b_1 + \cdots + a_r\otimes b_r \in I\otimes J$, $a_i \in I$, $b_i \in J$ $\therefore$ $j_*u = a_1b_1 + \cdots + a_rb_r$. Si $\lambda \in I$, $\lambda u = \lambda\otimes(a_1b_1 + \cdots + a_rb_r) = \lambda\otimes j_*u$. Si $u \in \ker j_*$ entonces $j_*u = 0$, $\therefore$ $\lambda u = 0$, luego $u = 0$ puesto que $I\otimes_R J$ es libre de torsión, así j_* es monomorfismo, i.e, $\operatorname{Tor}_1(R/I, J) = 0$, lo que sucede para todos los ideales I y J de R, luego todos los ideales de R son planos lo que prueba que $\operatorname{GWD}(R) \leq 1$.

d) $\Rightarrow$ e) Por 3.11 cada R-módulo de tipo finito libre de torsión es submódulo de un R-módulo libre, $\therefore$ es plano ya que $\operatorname{GWD}(R) \leq 1$. Como el límite directo de planos es plano, se sigue que todo R-módulo libre de torsión es plano.

e) => a) Como R es un dominio entero, todo R-módulo sin torsión es libre de torsión por 3.3 y es plano por e), por 3.5 R es un anillo semihereditario, de donde R es un anillo de Prüfer.

Veremos ahora una caracterización de los anillos de Dedekind.

3.17 Definición: Sea R un dominio entero y A un R-módulo de torsión; A será llamado un UT-módulo si, siempre que $A \leq B$ y B/A sea libre de torsión, entonces A es sumando directo de B.

Kaplansky probó, que si R es un anillo de Dedekind, entonces cada R-módulo de orden acotado es un UT-módulo. En el siguiente teorema probaremos que el recíproco también es verdadero.

3.18 Teorema: Sea R un dominio entero y supongamos que cada R-módulo de orden acotado es un UT-módulo. Entonces R es un anillo de Dedekind.

Demostración:

Primero demostraremos que R es un anillo de Prüfer. Sea $\mathbb{Z}$ el anillo de los números enteros, $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ grupo abeliano. Entonces, para cualquier R-módulo A e I un ideal de R tenemos.

$$\mathrm{Ext}^1_R(A, \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R/I, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{Tor}_1^R(R/I, A), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \ldots (*)$$

Consideremos la situación general $A_R, {}_RB_S, C_S$; como $\mathrm{Hom}_R(A, \mathrm{Hom}_S(B,C)) \cong \mathrm{Hom}_S(A\otimes_R B, C)$. Sea X una resolución proyectiva de A, por lo tanto:

$\mathrm{Ext}^1_R(A, \mathrm{Hom}_S(B,C)) = H_1(\mathrm{Hom}_R(X_1, \mathrm{Hom}_S(B,C))) =$

$= H_1(\mathrm{Hom}_S(X_1\otimes_R B), C)$.

Damos $\varphi: H_1(\mathrm{Hom}_S(X_1\otimes_R B), C) \to \mathrm{Hom}_S(H_1(X\otimes B, C) =$

$= \mathrm{Hom}_S(\mathrm{Tor}_1^R(X_1\otimes_R B), C)$ como sigue:

Tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} X_2\otimes_R B \arrow[r, "\beta"] & X_1\otimes_R B \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "f"] & H_1(X_1\otimes_R B) = \mathrm{coker}\,\beta \\ & C & \end{tikzcd}$$

donde $f: X_1\otimes_R B \to C$ es tal que $f\circ\beta = 0$

Definimos $\varphi(f)$ como la función que hace el triángulo conmutativo, $\varphi(f) \in \mathrm{Hom}_S(H_1(X_1\otimes_R B), C)$.

Afirmamos que φ es un isomorfismo.

Sea $f \in \mathrm{Ker}\,\varphi$, ent $\varphi(f) = 0$ y $0 = \varphi(f)\circ\alpha = f$ de donde $f = 0$.

Sea $g \in Hom_S(H_1(X, \otimes_e B, C)$. PD $g = \varphi(f)$ para $f \in H_1 Hom_S(X, \otimes_e B, C)$ i.e. $g \circ \alpha = f$, pero $0 = g \circ \alpha \circ \beta \Rightarrow g = \varphi(f)$, luego φ es isomorfismo.

Sea A un R-módulo libre de torsión, como $Hom_{\mathbb{Z}}(R/I, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ es un R-módulo de orden acotado ya q: Sea $0 \neq a \in I$ entonces $(af)(r+I) = f(ar+I) = f(\bar{0}) = 0$. Por hipotesis $Hom_{\mathbb{Z}}(R/I, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ es sumando directo de cualquier R-módulo D $\ni$ $D/Hom_{\mathbb{Z}}(R/I, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ sea libre de torsión; como $Ext^1_R(A, Hom_{\mathbb{Z}}(R/I, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}))$ es el grupo de extensiones de $Hom_{\mathbb{Z}}(R/I, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ por A, tenemos:

Sea $0 \to Hom_{\mathbb{Z}}(R/I, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \to D \to A \to 0$ una extensión cualquiera. Por el argumento previo la sucesión se escinde $\therefore$ no existe otra extensión aparte de la trivial, luego $Ext^1_R(A, Hom_{\mathbb{Z}}(R/I, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})) = 0$. Por (*) $Hom_{\mathbb{Z}}(Tor_1(R/I, A), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = 0$ y $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ es un cogenerador inyectivo, lo que demuestra que $Tor_1^R(R/I, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = 0$ lo que es verdadero para todo ideal I de R, así obtenemos que cualquier R-módulo libre de torsión es plano y por 3.16 obtenemos que R es un anillo de Prüfer.

Para completar la prueba necesitamos mostrar solamente que R es un anillo noetheriano, ya que entonces todos sus ideales son de tipo finito.

Sea I un ideal de R y $0 \neq b \in I$. Sea $R^* = R/\langle b\rangle$ e I^* la imagen de I en R^*.

Consideremos R^{I} y $R^{*\mathrm{I}} = R^{\mathrm{I}}/bR^{\mathrm{I}}$. Sea $0 \to K \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} R^{\mathrm{I}} \to 0$ una sucesión exacta de R-módulos derechos donde F es libre, entonces la sucesión inducida $0 \to K/bK \xrightarrow{f^*} F/bF \xrightarrow{g^*} R^{\mathrm{I}}/bR^{\mathrm{I}} \to 0$ es exacta, ya que: tenemos que f^* y g^* son tales que $f^*(k+bK) = f(k)+bF$ y $g^*(x+bF) = g(x)+bR^{\mathrm{I}}$.

f^* y g^* están bien definidas, Sean $k+bK$ y $k'+bK \in K/bK \ni k+bK = k'+bK$, luego $k-k' \in bK$ $\therefore$ $k-k' = bk''$ entonces $f(k)-f(k') = f(k-k') = f(bk'') = bf(k'') \in bF$, de donde, $f^*(\bar{k}) - f^*(\bar{k}') = f(k)+bF - f(k')+bF = f(k)-f(k')+bF = bF = \bar{0}$ $\therefore$ $f^*(\bar{k}) = f^*(\bar{k}')$. Analogamente se demuestra que g^* esta bien definida.

Sea $\bar{k} \in K/bK \ni f^*(\bar{k}) = 0 \Rightarrow f(k)+bF = 0 \Rightarrow f(k) \in bF$ $\therefore$ $k \in K \cap bF = bK$ ya que como R^{I} es libre de torsión y R es anillo de Prüfer, entonces por 3.16 K es puro en F, de donde $\bar{k} = 0$, en consecuencia f^* es monomorfismo.

$g^* f^* = \bar{0}$ pues $g^* f^*(k+bK) = g^*(f(k)+bF) = gf(k)+bR^{\mathrm{I}} = 0+bR^{\mathrm{I}} = \bar{0}$.

Veremos ahora que $\ker g^* \subset \operatorname{Im} f^*$. Sea $x+bF \in F/bF \ni 0 = g^*(x+bF) \Rightarrow g(x)+bR^{\mathrm{I}} = 0 \Rightarrow g(x) \in bR^{\mathrm{I}}$

, luego $g(x) = br$ para $r \in R^{\mathbb{I}}$, como g es epimorfismo $\exists\, y \in F \;/\; g(y) = r$, de donde $g(x) = b\,g(y) = g(by)$ $\therefore\; x - by \in \operatorname{Ker} g = \operatorname{Im} f \Rightarrow \exists\, z \in K \;/\; f(z) = x - by$.
$\therefore\; f^*(\bar{z}) = f^*(z + bK) = f(z) + bF = x - by + bF = x + bF$.
$\therefore\; \operatorname{Ker} g^* \subset \operatorname{Im} f^*$.

Sea $\bar{r} \in R^{\mathbb{I}}/bR^{\mathbb{I}}$, como $r \in R^{\mathbb{I}}$ y g es epimorfismo $\exists\, x \in F \;/\; g(x) = r$, luego $g^*(\bar{x}) = g^*(x + bF) = g(x) + bR^{\mathbb{I}}$ $= r + bR^{\mathbb{I}} = \bar{r}$.

Tenemos también que F/bF es libre como R^*-módulo. Consideremos el R-módulo F/bK; como $(F/bK)/(K/bK) \cong F/K \cong R^{\mathbb{I}}$ es libre de torsión y como K/bK es de torsión, pues $b(K/bK) = 0$, entonces el submódulo de torsión de F/bK es precisamente K/bK, el que también es de orden acotado, por hipótesis K/bK es sumando directo de F/bK, $\therefore$ K/bK es sumando directo de F/bF, en consecuencia, la sucesión exacta $0 \to K/bK \to F/bF \to R^{\mathbb{I}}/bR^{\mathbb{I}} \to 0$ se escinde $\therefore$ $R^{\mathbb{I}}/bR^{\mathbb{I}}$ es R^*-proyectivo $\therefore$ cualquier producto directo de copias de R^* es un R^*-módulo proyectivo, por teorema 2.46 R^* es artiniano $\therefore$ R^* es noetheriano, así, I^* es un ideal de tipo finito; de la sucesión exacta $0 \to \langle b \rangle \to I \to I^* \to 0$, obtenemos que I es de tipo finito, lo que es ver dadero $\forall$ ideal I de R, $\therefore$ R es noetheriano, en consecuencia, R es un anillo de Dedekind.

3.19 Definición: Sea R un anillo, J el radical de Jacobson de R. Se dice que R es semiprimario si J es nilpotente y R/J es semisimple.

3.20 Observación: Se sigue de 2.14 que un anillo semiprimario es perfecto izquierdo o derecho, pues nilpotente implica T-nilpotente. Además, es bien conocido el hecho de que todo anillo artiniano es semiprimario.

3.21 Proposición: Son equivalentes para cualquier anillo R, las siguientes afirmaciones:

a) R es noetheriano izquierdo.

b) El límite directo de cualquier sistema directo de R-módulos izquierdos inyectivos es inyectivo.

c) La suma directa de cualquier familia de R-módulos inyectivos es inyectivo.

Demostración:

a) $\Rightarrow$ b) Sea $\{Q_k, \phi_{k,j}\}$ un sistema directo de R-módulos inyectivos, consideremos el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \to & I & \to & R \\ & & \downarrow & & \\ & & \varinjlim Q_k & & \end{array}$$

con I un ideal izquierdo de R.

Sea $I = F/D$, donde F es libre con base $a_1, \dots, a_s$. y $\bar{a}_i = a_i + D \in I$. Como R es noetheriano D es de tipo finito, sea $\{d_1, \dots, d_t\}$ un conjunto de generadores de D, entonces $d_p = \sum_{i=1}^{r} r_{pi} a_i$, con $r_{pi} \in R$ $\forall i$. Sea $\varinjlim Q_k = \sum Q_k / S$. Para cada i, sea $f(\bar{a}_i) = e_{ki} + S \ni e_{ki} \in Q_{k_i}$. Escojamos $k \geq k_i$ $\forall i$ y definamos $e_i \in Q_k$ por $e_i = \phi_{k_i,k}(e_{ki})$ $\therefore f(\bar{a}_i) = e_i + S$ $\forall i$. Como cada $d_p \in D$, tenemos que $\sum r_{pi} e_i + S = 0$ en el límite directo de los Q_k, en consecuencia, hay un índice $q \geq k$ con $\phi_{k,q}(\sum r_{pi} e_i) = 0$.

Escojamos $m \geq q$ y definamos $b_i \in Q_m$ por $b_i = \phi_{k,m} e_i$ $\therefore f(\bar{a}_i) = b_i + S$ y $\sum r_{pi} b_i = 0$.

Definimos $f' : I \to Q_m$ por $f'(\bar{a}_i) = b_i$, f' está bien definida ya que hemos tenido cuidado de que todas las relaciones sean mandadas a cero. Como Q_m es inyectivo $\exists g' : R \to Q_m$ que extiende a f'. Finalmente, definimos $g : R \to \varinjlim Q_m \ni g = \phi_m \circ g'$ y $g(\bar{a}_i) = \phi_m g'(\bar{a}_i) = \phi_m f'(\bar{a}_i) = b_i + S = f(a_i)$.

$\therefore \varinjlim Q_m$ es inyectivo.

b) $\Rightarrow$ c) Obtenemos c) ya que cualquier suma directa de R-módulos inyectivos es el límite directo de todas las sumas parciales finitas de R-módulos inyectivos que siempre son inyectivos.

c) $\Rightarrow$ a) Supongamos que c) vale, sea $I_1 \subseteq I_2 \subseteq \ldots$ una cadena ascendente de ideales izquierdos de R. Sea Q_n un módulo inyectivo que contiene a I/I_n donde $I = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ y $Q = \bigoplus_{n=1}^{\infty} Q_n$. Definimos $f: I \rightarrow Q$ por $f(a) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(a)$, donde $f_n: I \rightarrow Q_n$ es el morfismo inducido por la proyección canónica de I sobre I/I_n; f está bien definida, pues si $a \in I$ entonces $a \in I_n$ para alguna n, lo que implica que $f_k(a) = 0$ $\forall k \geq n$. Por hipótesis, Q es inyectivo $\therefore \exists\, g: R \rightarrow Q$ R-morfismo y $g|_I = f$. Entonces $f(I) \subseteq g(R) \subseteq Q_1 \oplus \cdots \oplus Q_n$ para alguna n, lo cual implica que $I = I_{n+1}$. Concluimos entonces que cualquier cadena ascendente de ideales izquierdos en R es finita, y así, R es un anillo noetheriano izquierdo.

<u>3.22 Proposición</u>: Sea R un anillo semiprimario. Supongamos que existe un número cardinal γ y si Q es un R-módulo izquierdo inyectivo, entonces

$Q = \bigoplus_{\beta} Q_\beta$, donde cada Q_β está generado por un subconjunto de cardinalidad menor que ξ. Entonces R es artiniano.

Demostración:

Sea S un R-módulo izquierdo simple, sea X un conjunto, sea $Q = E(S)^X$, donde $E(S)$ denota la cápsula inyectiva de S; como Q es inyectivo, entonces $Q = \bigoplus_{\beta} Q_\beta$ donde β corre sobre un conjunto de índices I y cada Q_β está generado por un subconjunto de cardinalidad menor que ξ. Escogiendo X suficientemente grande, podemos obtener que I posea una cardinalidad arbitrariamente grande.

Sea $p_\alpha : Q \longrightarrow E(S)$ la proyección canónica $\alpha \in X$. Si S' es un submódulo de Q que es simple elegimos $\alpha \in X \ni p_\alpha(S') \neq 0$, como S y S' son simples y $E(S)$ es una extensión esencial de S, tenemos que $S' \cong p_\alpha(S') \cong S$, de donde, cada submódulo simple de Q es isomorfo a S.

Ahora, sea T_β un submódulo simple de Q_β, T_β existe pues R es semiprimario y $\therefore$ perfecto, lo que nos da que $T_\beta \cong S$. Como Q_β es sumando directo de Q, es por lo tanto inyectivo, luego, podemos escribir $Q_\beta = E(T_\beta) \oplus C_\beta$. Entonces, $\bigoplus_{\mathcal{I}} E(T_\beta)$ es sumando directo de Q, de donde $\bigoplus_{\mathcal{I}} E(T_\beta)$ es inyectivo. Ya que $E(T_\beta) \cong E(S)$ para cada $\beta \in \mathcal{I}$, como $\mathcal{I}$ puede ser arbitrariamente grande para una elección adecuada de $\mathcal{I}$, se sigue que la suma directa de cualquier familia de copias de $E(S)$ es un R-módulo inyectivo.

Sea J el radical de Jacobson de R. Como R/J es semisimple, $R/J = \bigoplus_{i=1}^{n} S_i$ con S_i simple $\forall i=1,\dots,n$. Cada R-módulo izquierdo simple es isomorfo a algún S_i, entonces, si A es un R-módulo izquierdo semisimple, $A = \sum_{i=1}^{n} (\bigoplus_{\gamma_i} S_{\gamma_i})$, para i fijo y γ_i sobre algún conjunto de índices $\mathcal{I}_i$, $S_{\gamma_i} \cong S_i$, luego, $E(A) = \sum_{i=1}^{n} E(\bigoplus_{\gamma_i} S_i) = \sum_{i=1}^{n} \bigoplus_{\gamma_i} E(S_i)$.

Ahora, sea B un R-módulo izquierdo y denotamos por $s(B)$ al zoclo de B. Como R es semiprimario, entonces B es una extensión esencial de $s(B)$, y en consecuencia, $E(B) = E(s(B))$.

Finalmente, sea $\{Q_\alpha\}_\alpha$ familia de R-módulos izquierdos inyectivos y $Q = \bigoplus_\alpha Q_\alpha$, entonces $E(s(Q_\alpha)) = Q_\alpha$ ya que Q_α es inyectivo $\forall \alpha$, de donde, $Q = \bigoplus_\alpha E(s(Q_\alpha)) = E(\bigoplus_\alpha s(Q_\alpha))$, así,

Ω es inyectivo; si aplicamos 3.21, obtenemos que R es un anillo noetheriano izquierdo, como R es semiprimario, concluimos finalmente que R es artiniano, lo que se quería demostrar.

Bibliografiá.

1. ANDERSON, Frank & FULLER, Kent. Rings and Categories of Modules. Springer-Verlag. New York, 1973. Graduate Texts in Mathematics, Vol. 13.

2. CARDENAS, Humberto y LLUIS, Emilio. Módulos semisimples y Representación de Grupos Finitos. Ed F. Trillas, S.A. México, 1970 Serie Sociedad Matemática Mexicana 1.

3. CARTAN, H & EILENBERG, S. Homological Algebra. Princeton University Press, 1956.

4. CHASE. S.U. Direct Products of Modules. Trans. Amer. Math. Soc. 97, 457-473 (1960).

5. FAITH, C. Algebra II. Ring theory. Springer-Verlag Berlin Haidelberg New York, 1976. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften 191.

6. STENSTRÖM, BO. Rings of Quotiens. Springer Verlag Berlin Heildelberg New York, 1975. Grundlehren der

Mathematischen Wissenschaften. Band 217.

7. ROTMAN, Joseph J. <u>Notes on Homological Algebra</u> Van Nostrand Reinhold Company. New York, 1970