

2g'



**Universidad Nacional Autónoma de México**  
**Facultad de Ciencias**

**SOLUCION DE LA ECUACION DE VORTICIDAD  
EN TERMINOS DE SERIES DE ARMONICOS  
ESFERICOS**

**T E S I S**

Para obtener el título de

**F I S I C O**

Presentada por

**AUREA ESPINOSA CERON**

**1986**



Universidad Nacional  
Autónoma de México



## **UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso**

### **DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## INDICE

	paginas
Introducción	2
Capítulo I: Ecuaciones Fundamentales	
Ecuaciones de movimiento	5
Ecuaciones de movimiento en coordenadas esféricas	7
El sistema coordenado $(\lambda, \phi, P, t)$	15
La vorticidad en términos del laplaciano de $r$	19
La vorticidad en términos del laplaciano de la función $\Psi$	21
Ecuación de vorticidad	23
Ecuación de la divergencia	29
Capítulo II: Solución de la ecuación de vorticidad en términos de series de armónicos esféricos	
Ecuación de vorticidad expresada en series de armónicos esféricos	35
Integración de la ecuación de vorticidad	50
Datos y Resultados	57
Conclusiones	66
Apéndice	68
Bibliografía	74

## INTRODUCCION

En este trabajo se trata de predecir a corto plazo como se mueve globalmente la superficie isobárica de  $Z=500\text{mb}$ ; al considerarse la segunda Ley de Newton se obtiene la ecuación que permite modelar el movimiento de la superficie de interés, bajo las siguientes suposiciones: el aire es un fluido incompresible, no viscoso, y la aceleración de la gravedad es constante.

Este trabajo esta dividido en dos partes:

En la primera se presentan las ecuaciones fundamentales del movimiento de la siguiente manera: A partir de la segunda Ley de Newton se obtiene una ecuación de movimiento para la atmósfera, la cual se expresa en coordenadas esféricas; y posteriormente, se transforman las ecuaciones de movimiento considerando a la presión como coordenada vertical, obteniendo así a la velocidad en términos del cambio de la altura a presión constante.

Tomando la velocidad anterior y la definición de vorticidad, se expresa a esta en coordenadas esféricas.

Por otra parte, considerando a la velocidad como la suma de una parte divergente y una rotacional (Teorema de Helmholtz), se encuentra una expresión para la vorticidad en términos de la función de corriente, a la que se denota como  $\Psi$ . Y a partir de esta expresión se obtiene la ecuación de vorticidad.

En esta parte también se obtiene a la ecuación de la divergencia, ya que a través de ella se encuentra la relación entre el laplaciano

de  $Z$  y el laplaciano de la corriente.

En la Segunda Parte se resuelve la ecuación de vorticidad numéricamente de la siguiente forma: Se expresa la función de corriente en términos de series de armónicos esféricos de superficie, y se le aplica el laplaciano horizontal en coordenadas esféricas, encontrándose así la expresión del laplaciano de  $\Psi$ .

A partir de lo anterior se escribe la ecuación de vorticidad en series de armónicos esféricos, obteniéndose las relaciones que dan el cambio de los coeficientes de  $\Psi$  respecto al tiempo.

Después, se expresan cada una de las derivadas parciales del jacobiano de la función de corriente en series de armónicos para obtener los valores iniciales del jacobiano, y con estos se calculan los coeficientes  $E_{\lambda}^m, F_{\lambda}^m$  de la serie del jacobiano.

Como los valores iniciales de  $Z$  son conocidos, solamente se calculan sus coeficientes armónicos mediante la regla de Simpson (II). Además se obtiene una relación de recurrencia entre los coeficientes de  $\Psi$  y los coeficientes de  $Z$ , la cual permite integrar la ecuación de vorticidad. Finalmente, se hicieron 3 pronósticos para 24 horas después con los siguientes datos: datos hemisféricos reales; datos locales reales para la República Mexicana, idealizando el resto de los datos en el hemisferio norte; y datos globales idealizados.

CAPITULO I  
ECUACIONES FUNDAMENTALES

## ECUACIONES DE MOVIMIENTO

La segunda ley de Newton es el fundamento sobre el que se desarrollan las ecuaciones de movimiento de este trabajo. El sistema de referencia en este caso es la tierra, la cual, debido a sus movimientos de rotación y de traslación alrededor del sol constituye un sistema de referencia no inercial. Aquí solamente se tomará en cuenta el movimiento de rotación de la tierra, mientras que su movimiento de traslación será despreciado. La segunda ley de Newton sólo es válida para sistemas inerciales; por lo tanto, definiendo un sistema inercial como aquel en el cual el centro de la tierra se encuentra en reposo, es posible relacionar las dos diferentes descripciones del movimiento de una partícula respecto de un sistema de referencia inercial, y uno no inercial.

Considerese el sistema de referencia inercial  $K$ , cuyo origen coincide con el del sistema no inercial,  $K'$ , de la tierra que gira alrededor de su propio eje con velocidad angular constante  $\Omega$ . Sea  $\bar{A}$  el vector de posición de la partícula en el sistema inercial.

Expresando a  $\bar{A}$  en términos del sistema no inercial

$$\bar{A} = A'_x \hat{i} + A'_y \hat{j} + A'_z \hat{k} \quad (1)$$

derivando éste respecto al tiempo se tiene:

$$\frac{d_f \bar{A}}{dt} = \frac{d\bar{A}}{dt} + \bar{\Omega} \times \bar{A} \quad (2)$$

donde:  $d_f/dt$  representa el cambio respecto al sistema fijo y  $d/dt$  representa el cambio en el sistema que gira.

llamando  $\bar{r}$  a  $\bar{A}$  se tiene:

$$\frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{d\bar{r}}{dt} + \bar{\Omega} \times \bar{r} \quad (3)$$

o lo que es lo mismo:

$$\bar{v}_f = \bar{v} + \bar{\Omega} \times \bar{r} \quad (4)$$

llamando ahora  $\bar{v}_f$  a  $\bar{A}$  en la relacion (2) se tiene:

$$\frac{d\bar{v}_f}{dt} = \frac{d\bar{v}_f}{dt} + \bar{\Omega} \times \bar{v}_f \quad (5)$$

sustituyendo (4) en el segundo miembro de (5) se tiene:

$$\frac{d\bar{v}_f}{dt} = \frac{d\bar{v}}{dt} + 2 \bar{\Omega} \times \bar{v} + \bar{\Omega} \times (\bar{\Omega} \times \bar{r}) \quad (6)$$

Si  $\bar{F}$  es la fuerza real por unidad de masa que actua sobre un elemento de atmósfera, entonces, por la segunda ley de Newton se tiene

$$\frac{d\bar{v}_f}{dt} = \bar{F} \quad (7)$$

con la cual, la expresi3n (6) toma la siguiente forma:

$$\frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{F} - 2 \bar{\Omega} \times \bar{v} - \bar{\Omega} \times (\bar{\Omega} \times \bar{r}) \quad (8)$$

Esta relaci3n dice que en el sistema de referencia  $K'$ , aparecen 2 fuerzas aparentes: la fuerza centrífuga -  $\bar{\Omega} \times (\bar{\Omega} \times \bar{r})$ , y la fuerza de Coriolis -  $2 \bar{\Omega} \times \bar{v}$ .

Suponiendo ahora que las únicas fuerzas reales que actuan sobre un elemento de atmósfera son: la fuerza debida al gradiente de presi3n, la de gravitaci3n, y la de fricci3n [VIII], la relaci3n (8) toma la forma:



$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \vec{g} + \vec{F}_r - 2 \vec{\Omega} \times \vec{v} - \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}) \quad (9)$$

y considerando que el aire es un fluido no viscoso se tiene:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \vec{g} - 2 \vec{\Omega} \times \vec{v} - \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}) \quad (10)$$

Debido a que un observador en el sistema de referencia no inercial solamente puede medir la combinación de los efectos de las fuerzas gravitacional y centrífuga, y no hay una forma directa de medirlas por separado, a esta suma de fuerzas se le llama gravedad efectiva, y se denota por:

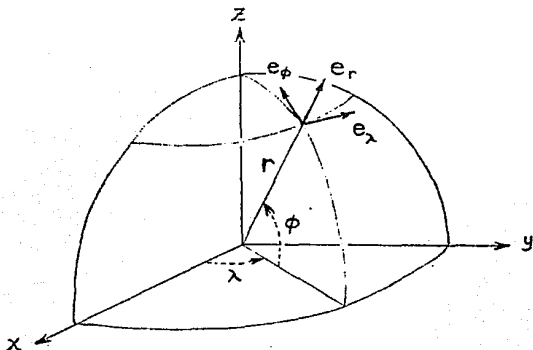
$$\vec{g} = \vec{g} + \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}) \quad (11)$$

Así que la ecuación de movimiento queda de la siguiente manera:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \vec{g} - 2 \vec{\Omega} \times \vec{v} \quad (12)$$

## ECUACIONES DE MOVIMIENTO EN COORDENADAS ESFERICAS

Se expresará ahora a la ecuación (12) en coordenadas esféricas, para esto, cualquier punto en el espacio se describirá en términos de las coordenadas  $(r, \phi, \lambda)$ , como se muestra en la siguiente figura:



el vector de posición es:

$$\vec{r} = r \cos\phi \cos\lambda \hat{i} + r \cos\phi \sin\lambda \hat{j} + r \sin\phi \hat{k} \quad (13)$$

Los vectores base unitarios en coordenadas esféricas, que se usan aquí, forman un sistema positivamente orientado y se definen como [VI]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{r} / \partial r}{|\partial \vec{r} / \partial r|} &= \hat{e}_r \\ \frac{\partial \vec{r} / \partial \phi}{|\partial \vec{r} / \partial \phi|} &= \hat{e}_\phi \\ \frac{\partial \vec{r} / \partial \lambda}{|\partial \vec{r} / \partial \lambda|} &= \hat{e}_\lambda \end{aligned} \quad (14)$$

De las relaciones (13) y (14), se obtienen las siguientes expresiones para los vectores base:

$$\hat{e}_r = \cos\phi \cos\lambda \hat{i} + \cos\phi \sin\lambda \hat{j} + \sin\phi \hat{k} \quad (15)$$

$$\hat{e}_\phi = -\sin\phi\cos\lambda\hat{i} - \sin\phi\sin\lambda\hat{j} + \cos\phi\hat{k} \quad (16)$$

$$\hat{e}_\lambda = -\sin\lambda\hat{i} + \cos\lambda\hat{j} \quad (17)$$

tomando las derivadas respecto al tiempo de los vectores base se tiene:

$$\dot{\hat{e}}_r = \dot{\lambda}\cos\phi\hat{e}_\lambda + \dot{\phi}\hat{e}_\phi \quad (18)$$

$$\dot{\hat{e}}_\phi = -\dot{\lambda}\sin\phi\hat{e}_\lambda - \dot{\phi}\hat{e}_r \quad (19)$$

$$\dot{\hat{e}}_\lambda = -\cos\phi\dot{\lambda}\hat{e}_r + \sin\phi\dot{\lambda}\hat{e}_\phi \quad (20)$$

Expresando ahora la velocidad en coordenadas esféricas se tiene:

$$\text{si } \vec{r} = r\hat{e}_r$$

entonces:

$$\vec{v} = \dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\hat{e}}_r \quad (21)$$

sustituyendo la relación (18) en la (21) se tiene:

$$\vec{v} = \dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\lambda}\cos\phi\hat{e}_\lambda + r\dot{\phi}\hat{e}_\phi \quad (22)$$

la ecuación (22) se puede expresar en la forma:

$$\vec{v} = v_r\hat{e}_r + v_\lambda\hat{e}_\lambda + v_\phi\hat{e}_\phi \quad (23)$$

donde:

$$v_r = \dot{r}$$

$$v_\lambda = r\dot{\lambda}\cos\phi \quad (24)$$

$$v_\phi = r\dot{\phi}$$

expresando ahora la aceleración en coordenadas esféricas:

$$\frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{dv_r}{dt} \hat{e}_r + v_r \frac{d\hat{e}_r}{dt} + \frac{dv_\lambda}{dt} \hat{e}_\lambda + v_\lambda \frac{d\hat{e}_\lambda}{dt} + \frac{dv_\phi}{dt} \hat{e}_\phi + v_\phi \frac{d\hat{e}_\phi}{dt} \quad (25)$$

y sustituyendo las ecuaciones (18), (19) y (20) en la (25)

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{v}}{dt} = & \left( \frac{dv_r}{dt} - v_\lambda \cos\phi \dot{\lambda} - v_\phi \dot{\phi} \right) \hat{e}_r + \left( \frac{dv_\lambda}{dt} + v_r \dot{\lambda} \cos\phi - v_\phi \dot{\lambda} \sin\phi \right) \hat{e}_\lambda \\ & + \left( \frac{dv_\phi}{dt} + v_r \dot{\phi} + v_\lambda \sin\phi \dot{\lambda} \right) \hat{e}_\phi \end{aligned} \quad (26)$$

y sustituyendo las relaciones (24) en la (26), la aceleración toma la forma:

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{v}}{dt} = & \left( \frac{dv_r}{dt} - \frac{v_\lambda^2}{r} - \frac{v_\phi^2}{r} \right) \hat{e}_r + \left( \frac{dv_\lambda}{dt} + \frac{v_r v_\lambda}{r} - \frac{v_\phi v_\lambda}{r} \operatorname{tg}\phi \right) \hat{e}_\lambda \\ & + \left( \frac{dv_\phi}{dt} + \frac{v_r v_\phi}{r} + \frac{v_\lambda^2}{r} \operatorname{tg}\phi \right) \hat{e}_\phi \end{aligned} \quad (27)$$

El gradiente de la presión del aire en coordenadas esféricas es:

$$-\frac{1}{\rho} \operatorname{grad}(P) = -\frac{1}{\rho} \left[ \hat{e}_r \frac{\partial P}{\partial r} + \hat{e}_\phi \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \phi} + \hat{e}_\lambda \frac{1}{r \cos\phi} \frac{\partial P}{\partial \lambda} \right] \quad (28)$$

La fuerza de Coriolis en coordenadas esféricas es:

$$\begin{aligned}
 -2\bar{\Omega} \times \bar{v} = -2\bar{\Omega} k \times \bar{v} = \hat{e}_\lambda (2\Omega \sin\phi v_\phi - 2\Omega v_r \cos\phi) \\
 - \hat{e}_\phi 2\Omega v_\lambda \sin\phi + \hat{e}_r 2\Omega v_\lambda \cos\phi
 \end{aligned} \tag{29}$$

sustituyendo las relaciones (27), (28) y (29) en la (13) se obtienen las componentes de la ecuación de movimiento:

$$\frac{dv_r}{dt} - \frac{v_\lambda^2}{r} - \frac{v_\phi^2}{r} = -g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} + 2\Omega v_\lambda \cos\phi \tag{30-1}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{dv_\lambda}{dt} + \frac{v_r v_\lambda}{r} - \frac{v_\phi v_\lambda}{r} \operatorname{tg}\phi = -\frac{1}{\rho} \frac{1}{r \cos\phi} \frac{\partial P}{\partial \lambda} + 2\Omega \sin\phi v_\phi \\
 - 2\Omega v_r \cos\phi
 \end{aligned} \tag{30-2}$$

$$\frac{dv_\phi}{dt} + \frac{v_r v_\phi}{r} + \frac{v_\lambda^2}{r} \operatorname{tg}\phi = -\frac{1}{\rho} \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \phi} - 2\Omega v_\lambda \sin\phi \tag{30-3}$$

Los valores de las variables observados en sistemas sinópticos son: [VIII]

$\Delta r$  ó  $\Delta z \sim 10^3$  m., fluctuación vertical.

$a \sim 6.37 \times 10^6$  m., radio medio de la tierra.

$U \sim 10$  m/s., velocidad horizontal

$W \sim 10^{-2}$  m/s., velocidad vertical.

$\Delta P \sim 10^3$  N/m<sup>2</sup>., fluctuación horizontal de la presión.

$H \sim 10^4$  m., espesor de la tropósfera;

$P_0 \sim 10^5$  N/m<sup>2</sup>., presión a nivel del mar;

$G \sim 10$  m/s<sup>2</sup>., aceleración de la gravedad;

$D \sim 1$  Kg/m<sup>3</sup>., densidad del aire;

$F \sim 10^{-4}$  s<sup>-1</sup>., parametro de Coriolis

$L \sim 10^6$  m., escala espacial de los fenomenos atmosfericos;

$L/U \sim 10^5$  s., escala temporal de los fenomenos atmosfericos;

Estimando ahora cada uno de los términos de las ecuaciones (30-1), (30-2) y (30-3) se obtiene la siguiente tabla:

TABLA No.1

término	escala	magnitud(m/s <sup>2</sup> )
$dv_r/dt$	$W/(L/U)$	$10^{-7}$
$v_\lambda^2/r$	$U^2/a$	$6 \times 10^{-4}$
$v_\phi^2/r$	$U^2/a$	"
$g$	$g$	$10$
$\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r}$	$\Delta P/D\Delta r$	$10$
$2\Omega v_\lambda \cos\phi$	$FU$	$10^{-3}$
$dv_\lambda/dt$	$U/(L/U)$	$10^{-4}$
$v_r v_\lambda / r$	$WU/a$	$6 \times 10^{-7}$
$v_\phi v_\lambda \operatorname{tg}\phi / r$	$U^2/a$	$6 \times 10^{-4}$
$\frac{1}{\rho} \frac{1}{r \cos\phi} \frac{\partial P}{\partial \lambda}$	$\Delta P/DL$	$10^{-3}$
$2\Omega \sin\phi v_\phi$	$FU$	$10^{-3}$
$2\Omega v_r \cos\phi$	$FW$	$10^{-6}$
$dv_\phi/dt$	$U^2/L$	$10^{-4}$
$v_r v_\phi / r$	$WU/a$	$6 \times 10^{-7}$

continua tabla No.1

$v_{\lambda}^2 \text{tg}\phi/r$	$U^2/a$	$6 \times 10^{-4}$
$\frac{1}{\rho} \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \phi}$	$\Delta P/DL$	$10^{-3}$
$2\Omega v_{\lambda} \sin\phi$	FU	$10^{-3}$

En la tabla No.1 se ve que se pueden despreciar los términos  $dv_r/dt$ ,  $v_{\lambda}^2/r$ ,  $v_{\phi}^2/r$ ,  $2\Omega v_{\lambda} \cos\phi$ ,  $v_r v_{\lambda}/r$ ,  $v_{\phi} v_{\lambda} \text{tg}\phi/r$ ,  $2\Omega v_r \cos\phi$ ,  $v_r v_{\phi}/r$ ,  $v_{\lambda}^2 \text{tg}\phi/r$ ; obteniéndose las siguientes expresiones para las ecuaciones de movimiento:

$$-g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} = 0 \quad (31-1)$$

$$\frac{dv_{\lambda}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{1}{r \cos\phi} \frac{\partial P}{\partial \lambda} + 2\Omega \sin\phi v_{\phi} \quad (31-2)$$

$$\frac{dv_{\phi}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \phi} - 2\Omega v_{\lambda} \sin\phi \quad (31-3)$$

observándose también en la tabla 1 que las componentes horizontales de la velocidad se pueden escribir de la siguiente forma:

$$-\frac{1}{\rho} \frac{1}{r \cos\phi} \frac{\partial P}{\partial \lambda} + f v_{\phi} = 0 \quad (32-1)$$



$$-\frac{1}{\rho} \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \phi} - f v_{\lambda} = 0 \quad (32-2)$$

las ecuaciones (32-1) y (32-2) se pueden expresar en forma vectorial como:

$$\bar{v}_h = \frac{1}{\rho f} \nabla_{hr} P \quad (33)$$

### EL SISTEMA COORDENADO $(\lambda, \phi, P, t)$

Ahora se transformarán las ecuaciones de movimiento mediante la introducción de la presión como coordenada vertical.

Considerando a  $r$  como función de  $P, \lambda, \phi, t$ , se tiene:

$$dr = \left( \frac{\partial r}{\partial P} \right)_{\lambda \phi t} dP + \left( \frac{\partial r}{\partial \lambda} \right)_{P \phi t} d\lambda + \left( \frac{\partial r}{\partial \phi} \right)_{P \lambda t} d\phi + \left( \frac{\partial r}{\partial t} \right)_{P \lambda \phi} dt \quad (34)$$

Si  $P$  se considera ahora como función de  $r, \lambda, \phi, t$ , se tiene:

$$dP = \left( \frac{\partial P}{\partial r} \right)_{\lambda \phi t} dr + \left( \frac{\partial P}{\partial \lambda} \right)_{r \phi t} d\lambda + \left( \frac{\partial P}{\partial \phi} \right)_{r \lambda t} d\phi + \left( \frac{\partial P}{\partial t} \right)_{r \lambda \phi} dt \quad (35)$$

sustituyendo la relación (34) en la (35) se tiene:

$$dP = \left( \frac{\partial P}{\partial r} \right)_{\lambda \phi t} \left[ \left( \frac{\partial r}{\partial P} \right)_{\lambda \phi t} dP + \left( \frac{\partial r}{\partial \lambda} \right)_{P \phi t} d\lambda + \left( \frac{\partial r}{\partial \phi} \right)_{P \lambda t} d\phi + \left( \frac{\partial r}{\partial t} \right)_{P \lambda \phi} dt \right] + \left( \frac{\partial P}{\partial \lambda} \right)_{r \phi t} d\lambda + \left( \frac{\partial P}{\partial \phi} \right)_{r \lambda t} d\phi + \left( \frac{\partial P}{\partial t} \right)_{r \lambda \phi} dt \quad (36)$$

agrupando términos se tiene:

$$dP = \left( \frac{\partial P}{\partial r} \right)_{\lambda \phi t} \left( \frac{\partial r}{\partial P} \right)_{\lambda \phi t} dP + \left[ \left( \frac{\partial P}{\partial r} \right)_{\lambda \phi t} \left( \frac{\partial r}{\partial \lambda} \right)_{p \phi t} + \left( \frac{\partial P}{\partial \lambda} \right)_{r \phi t} \right] d\lambda + \left[ \left( \frac{\partial P}{\partial r} \right)_{\lambda \phi t} \left( \frac{\partial r}{\partial \phi} \right)_{p \lambda t} + \left( \frac{\partial P}{\partial \phi} \right)_{r \lambda t} \right] d\phi + \left[ \left( \frac{\partial P}{\partial r} \right)_{\lambda \phi t} \left( \frac{\partial r}{\partial t} \right)_{p \lambda t} + \left( \frac{\partial P}{\partial t} \right)_{r \lambda \phi} \right] dt \quad (37)$$

considerando en la relación (37) solamente las variaciones de presión en la vertical, es decir,  $d\lambda = d\phi = dt = 0$ , se tiene:

$$\left( \frac{\partial P}{\partial r} \right)_{\lambda \phi t} \left( \frac{\partial r}{\partial P} \right)_{\lambda \phi t} = 1 \quad (38)$$

sustituyendo la relación (38) en la (31-1) se tiene:

$$\left( \frac{\partial r}{\partial P} \right)_{\lambda \phi t} = - \frac{1}{\rho g} \quad (39)$$

Considerando ahora un desplazamiento a lo largo de una superficie isobárica en la dirección de  $\lambda$ , se tiene  $dp = d\phi = dt = 0$ , y la relación (37) toma la forma

$$0 = \left( \frac{\partial P}{\partial r} \right)_{\lambda \phi t} \left( \frac{\partial r}{\partial \lambda} \right)_{p \phi t} + \left( \frac{\partial P}{\partial \lambda} \right)_{r \phi t} \quad (40)$$

y sustituyendo la relación (31-1) en la (40) se tiene:

$$-\rho g \left( \frac{\partial r}{\partial \lambda} \right)_{p \phi t} = - \left( \frac{\partial P}{\partial \lambda} \right)_{r \phi t} \quad (41)$$

Si ahora se considera el desplazamiento a lo largo de una superficie isobárica en la dirección de  $\phi$ , se tiene:  $dP=d\lambda=dt=0$ , y la relación (37) toma la forma:

$$\left(\frac{\partial P}{\partial r}\right)_{\lambda\phi t} \left(\frac{\partial r}{\partial \phi}\right)_{P\lambda t} + \left(\frac{\partial P}{\partial \phi}\right)_{r\lambda t} = 0 \quad (42)$$

sustituyendo la relación (31-1) en la (42) se tiene:

$$-\rho g \left(\frac{\partial r}{\partial \phi}\right)_{P\lambda t} = - \left(\frac{\partial P}{\partial \phi}\right)_{r\lambda\phi} \quad (43)$$

Finalmente, sustituyendo la relación (41) en la (31-2) y la (43) en la (31-3), las ecuaciones de movimiento con la presión,  $p$ , como coordenada vertical son:

$$\frac{dv_{\lambda}}{dt} = - \frac{g}{r \cos \phi} \left(\frac{\partial r}{\partial \lambda}\right)_{P\phi t} + 2\Omega \sin \phi v_{\phi} \quad (44-1)$$

$$\frac{dv_{\phi}}{dt} = \frac{g}{r} \left(\frac{\partial r}{\partial \phi}\right)_{P\lambda t} - 2\Omega v_{\lambda} \sin \phi \quad (44-2)$$

$$\left(\frac{\partial r}{\partial P}\right)_{\lambda\phi t} = - \frac{1}{\rho g} \quad (44-3)$$

las componentes horizontales de la velocidad se pueden escribir, haciendo las aproximaciones de la tabla No.1, de la siguiente manera:

$$v_{\phi} = \frac{g}{r \cos \phi 2 \Omega \sin \phi} \left( \frac{\partial r}{\partial \lambda} \right)_{p \phi t} \quad (45)$$

$$v_{\lambda} = - \frac{g}{r 2 \Omega \sin \phi} \left( \frac{\partial r}{\partial \phi} \right)_{p \lambda t} \quad (46)$$

y escribiendo las ecuaciones (45) y (46) en forma vectorial se tiene:

$$\bar{v}_h = \frac{g}{f} \nabla_{hp} r \quad (47)$$

igualando las ecuaciones (33) y (47) se tiene:

$$\frac{1}{\rho f} \nabla_{hr} P = \frac{g}{f} \nabla_{hp} r \quad (48)$$

Por otra parte, el geopotencial,  $\Phi$ , se define como:

$$\Phi = \int_0^z g dz \quad (49)$$

dónde:  $z=r-a$ ;  $a=\text{constante}$ ;

y suponiendo a  $g$  constante la relación (49) toma la forma:

$$\Phi = gZ \quad (50)$$

por lo tanto la relación (48) puede escribirse de siguiente forma:

$$\frac{1}{\rho} \bar{\nabla}_{hr} P = \bar{\nabla}_{hp} \Phi \quad (51)$$

dónde el subíndice  $h$  indica un operador horizontal.

De aquí en adelante se omiten los subíndices. Por lo tanto, se entenderá a  $\bar{\nabla}$  como un operador horizontal. El caso contrario se indicará explícitamente.

## LA VORTICIDAD EN TERMINOS DEL LAPLACIANO DE $r$

La vorticidad es un campo vectorial definida como el rotacional de la velocidad. Sin embargo, en la dinámica de la atmósfera solamente se trabaja con la componente vertical de la vorticidad,  $\zeta = \hat{e}_r \cdot \nabla \times \bar{v}$ , y se le llama también vorticidad.

Siempre que se use la relación anterior se tomará a  $\nabla$  como un operador completo.

La vorticidad en coordenadas esféricas es:

$$\zeta = \frac{1}{r \sin \theta} \left[ \frac{\partial}{\partial \theta} (v_\lambda \sin \theta) - \frac{\partial v_\theta}{\partial \lambda} \right] \quad (52)$$

donde:

$\theta$  = colatitud

$\lambda$  = longitud

haciendo  $\theta = 90^\circ - \phi$ , la vorticidad toma la forma:

$$\zeta = \frac{1}{r \cos \phi} \left[ -\frac{\partial}{\partial \phi} (v_\lambda \cos \phi) + \frac{\partial v_\phi}{\partial \lambda} \right] \quad (53)$$

donde:

$\phi$  = latitud

$\lambda$  = longitud

sustituyendo las relaciones (45) y (46) en la (53) se tiene:

$$\zeta = \frac{1}{r \cos \phi} \left\{ -\frac{\partial}{\partial \phi} \left[ -\frac{g}{r 2 \Omega \sin \phi} \left( \frac{\partial r}{\partial \phi} \right) / \rho \lambda t \right] \cos \phi + \frac{\partial}{\partial \lambda} \left[ \frac{g}{r \cos \phi 2 \Omega \sin \phi} \left( \frac{\partial r}{\partial \lambda} \right) / \rho \phi t \right] \right\} \quad (54)$$

desarrollando la relación (54)

$$\zeta = \frac{g}{f} \left\{ \frac{-\cos \phi}{r \sin \phi} \left( \frac{\partial r}{\partial \phi} \right) / \rho \lambda t + \frac{1}{r \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \left[ \left( \frac{\partial r}{\partial \phi} \right) / \rho \lambda t \right] \cos \phi + \frac{1}{r \cos \phi} \left( \frac{\partial^2 r}{\partial \lambda^2} \right) / \rho \phi t \right\} \quad (55)$$

Estimando ahora cada uno de los términos de la relación (55) [VIII]

TABLA No.2

término	escala	magnitud(s <sup>-1</sup> )
$\zeta$	U/L	10 <sup>-5</sup>
$\frac{g \cos \phi}{f} \frac{1}{r \sin \phi} \left( \frac{\partial r}{\partial \phi} \right) \rho \lambda t$	GZ/aLF	6.37x10 <sup>-14</sup>
$\frac{g}{f} \frac{1}{r \cos \phi} \left[ \frac{\partial}{\partial \phi} \left( \frac{\partial r}{\partial \phi} \right) \cos \phi \right] G(\Delta Z)^2 / L^2 a^2 F$		10 <sup>-10</sup>
$\frac{g}{f} \frac{1}{r \cos \phi} \left( \frac{\partial^2 r}{\partial \lambda^2} \right) \rho \phi t$	G(\Delta Z) <sup>2</sup> / L <sup>2</sup> a <sup>2</sup> F	10 <sup>-10</sup>

y observando los órdenes de magnitud de todos los términos de la vorticidad en la tabla No.2, se ve que se puede despreciar el primer término del lado derecho de la ecuación (55), tomando la forma:

$$\zeta = \frac{g}{f} \left\{ \frac{1}{r \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \left( \frac{\partial r}{\partial \phi} \right) \cos \phi + \frac{1}{r \cos \phi} \left( \frac{\partial^2 r}{\partial \lambda^2} \right) \rho \phi t \right\} \quad (56)$$

y la relación (56) se puede escribir de la forma:

$$\zeta = \frac{g}{f} \nabla^2 r \quad (57)$$

## LA VORTICIDAD EN TERMINOS DEL LAPLACIANO DE LA FUNCION DE CORRIENTE, $\Psi$

El teorema de Helmholtz, permite la partición de la velocidad del viento en una parte rotacional, una divergente, y en otra de deformación [IX]; suponiendo que la atmósfera es un fluido incompresible, solamente quedan las partes rotacional y divergente de la velocidad del viento, las cuales se expresan por:

$$\bar{v} = \bar{v}_{\Psi} + \bar{v}_{\chi} \quad (58)$$

donde:

$$\nabla \cdot \bar{v}_{\Psi} = 0 \quad (59)$$

y

$$\nabla \times \bar{v}_{\chi} = 0 \quad (60)$$

lo cual implica que  $\bar{v}_{\Psi}$  y  $\bar{v}_{\chi}$  se pueden escribir de la forma:

$$\bar{v}_{\Psi} = \hat{e}_r \times \nabla \Psi \quad (61)$$

$$\bar{v}_{\chi} = \nabla \chi \quad (62)$$

donde  $\Psi$ , es la función de corriente para la parte rotacional del viento, y  $\chi$ , es la velocidad potencial para la parte divergente del viento.

Sustituyendo la relación (58) en la vorticidad se tiene:

$$\zeta = \hat{e}_r \cdot \nabla \times (\bar{v}_{\Psi} + \bar{v}_{\chi}) \quad (63)$$

$$\zeta = \hat{e}_r \cdot \nabla \times \bar{v}_\Psi + \hat{e}_r \cdot \nabla \times \bar{v}_\chi \quad (64)$$

y sustituyendo ahora las relaciones (61) y (62) en la (64):

$$\zeta = \hat{e}_r \cdot \nabla \times (\hat{k} \times \nabla \Psi) + \hat{e}_r \cdot \nabla \times (\nabla \chi) \quad (65)$$

y usando la siguiente relación:

$$\nabla \times (\bar{A} \times \bar{B}) = (\bar{B} \cdot \nabla) \bar{A} - \bar{B} (\nabla \cdot \bar{A}) - (\bar{A} \cdot \nabla) \bar{B} + \bar{A} (\nabla \cdot \bar{B})$$

la ecuación (65) toma la forma:

$$\zeta = \hat{e}_r \cdot (\nabla \Psi \cdot \nabla) \hat{e}_r - \nabla \Psi (\nabla \cdot \hat{e}_r) - (\hat{e}_r \cdot \nabla) \nabla \Psi + \hat{e}_r (\nabla \cdot \nabla \Psi) \quad (66)$$

o lo que es lo mismo:

$$\zeta = -\hat{e}_r \cdot (\hat{e}_r \cdot \nabla) \nabla \Psi + \hat{e}_r \cdot \hat{e}_r (\nabla \cdot \nabla \Psi) \quad (67)$$

expresando la ecuación (67) en coordenadas esféricas se tiene:

$$\zeta = \frac{1}{r \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \left[ \cos \phi \frac{\partial \Psi}{\partial \phi} \right] + \frac{1}{r \cos^2 \phi} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \lambda^2} \quad (67-1)$$

lo cual se puede escribir de la forma:

$$\zeta = \nabla^2 \Psi \quad (68)$$

quedando de esta forma expresada la vorticidad en términos de la función de corriente.



## LA ECUACION DE LA VORTICIDAD

Para encontrar la ecuación que da el cambio de la vorticidad con el tiempo, solamente se tomará en cuenta el vector horizontal del viento y la componente vertical de su vorticidad, debido a que en la atmósfera el flujo del viento en escalas planetarias es cuasi-horizontal, [IV], por lo tanto, partiendo de las ecuaciones de movimiento (31-2) y (31-3), las cuales en forma vectorial se denotan por:

$$\frac{d\bar{v}_h}{dt} = - \frac{1}{\rho} \nabla P - f \hat{k} \times \bar{v}_h \quad (69)$$

sustituyendo la relación (51) en la (69) se tiene:

$$\frac{d\bar{v}_h}{dt} = - \nabla \Phi - f \hat{k} \times \bar{v}_h \quad (70)$$

la aceleración del viento horizontal se puede escribir como:

$$\frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{v} \cdot \nabla \bar{v} + v_r \frac{\partial \bar{v}}{\partial r} \quad (71)$$

y usando la siguiente relación [IV]:

$$(\bar{v} \cdot \nabla) \bar{v} = \nabla(\bar{v}^2/2) + \zeta \hat{k} \times \bar{v} \quad (72)$$

donde:

$$\zeta = \hat{k} \cdot \nabla \times \bar{v} \quad (73)$$

y sustituyendo la relación (72) en la (71) se tiene:

$$\frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{\partial\bar{v}}{\partial t} + \nabla(\bar{v}^2/2) + \zeta \hat{k} \times \bar{v} + v_r \frac{\partial\bar{v}}{\partial P} \quad (74)$$

de las relaciones (70) y (74) se tiene:

$$\frac{\partial\bar{v}}{\partial t} + \nabla(\bar{v}^2/2) + \zeta \hat{k} \times \bar{v} + v_r \frac{\partial\bar{v}}{\partial P} + \nabla\Phi + f \hat{k} \times \bar{v} = 0 \quad (75)$$

agrupando términos semejantes se tiene:

$$\frac{\partial\bar{v}}{\partial t} + \nabla(\bar{v}^2/2) + (\zeta+f)\hat{k} \times \bar{v} + v_r \frac{\partial\bar{v}}{\partial P} + \nabla\Phi = 0 \quad (76)$$

operando ahora sobre la ecuación (76) con  $\hat{k} \cdot \nabla \times$  se tiene:

$$\hat{k} \cdot \nabla \times \frac{\partial\bar{v}}{\partial t} + \hat{k} \cdot \nabla \times \nabla(\bar{v}^2/2) + \hat{k} \cdot \nabla \times [(\zeta+f)\hat{k} \times \bar{v}] + \hat{k} \cdot \nabla \times \left[ v_r \frac{\partial\bar{v}}{\partial P} \right] + \hat{k} \cdot \nabla \times \nabla\Phi = 0 \quad (77)$$

donde:

$$\hat{k} \cdot \nabla \times \left[ v_r \frac{\partial\bar{v}}{\partial P} \right] = \hat{k} \cdot \left[ v_r \nabla \times \frac{\partial\bar{v}}{\partial P} \right] - \hat{k} \cdot \frac{\partial\bar{v}}{\partial P} \times \nabla v_r \quad (78)$$

$$\hat{k} \cdot \nabla \times [(\zeta+f)\hat{k} \times \bar{v}] = (\zeta+f)\hat{k} \cdot \hat{k} \nabla \cdot \bar{v} - \hat{k} \cdot \bar{v} \nabla \cdot (\zeta+f)\hat{k} + \hat{k} \cdot (\bar{v} \cdot \nabla) (\zeta+f)\hat{k} - (\zeta+f)\hat{k} \cdot (\hat{k} \cdot \nabla) \bar{v} \quad (79)$$

donde:

$$\hat{k} \cdot \bar{v} = 0, \text{ pues, } \bar{v} \perp \hat{k}$$

Sustituyendo las relaciones (78) y (79) en la (77) se tiene:

$$\begin{aligned} \hat{k} \cdot \nabla \times \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + (\zeta + f) \hat{k} \cdot \hat{k} \nabla \cdot \bar{v} + \hat{k} \cdot (\bar{v} \cdot \nabla) (\zeta + f) \hat{k} + \hat{k} \cdot v_r \nabla \times \frac{\partial \bar{v}}{\partial P} \\ - \hat{k} \cdot \frac{\partial \bar{v}}{\partial P} \times \nabla v_r = 0 \end{aligned} \quad (80)$$

Como  $\hat{k}$ , no depende del tiempo, la ecuación (80) se puede escribir:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\hat{k} \cdot \nabla \times \bar{v}) + (\zeta + f) \nabla \cdot \bar{v} + (\bar{v} \cdot \nabla) (\zeta + f) + v_r \frac{\partial}{\partial P} (\hat{k} \cdot \nabla \times \bar{v}) \\ + \hat{k} \cdot \nabla v_r \times \frac{\partial \bar{v}}{\partial P} = 0 \end{aligned} \quad (81)$$

Como  $\zeta = \hat{k} \cdot \nabla \times \bar{v}$ , la ecuación (81) toma la forma:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + (\zeta + f) \nabla \cdot \bar{v} + \bar{v} \cdot \nabla (\zeta + f) + v_r \frac{\partial \zeta}{\partial P} + \hat{k} \cdot \nabla v_r \times \frac{\partial \bar{v}}{\partial P} = 0 \quad (82)$$

Cálculo ahora el orden de magnitud de cada uno de los términos de la ecuación (82) se tiene la siguiente tabla [VIII]:

TABLA No. 3

término	escala	magnitud(s <sup>-2</sup> )
$\partial\zeta/\partial t$	$U^2/L^2$	$10^{-10}$
$\zeta\nabla\cdot\bar{v}$	$U^2/L^2$	$10^{-10}$
$f\nabla\cdot\bar{v}$	$fU/L$	$10^{-9}$
$\bar{v}\cdot\nabla\zeta$	$U^2/L^2$	$10^{-10}$
$\bar{v}\cdot\nabla f$	$fU/L$	$10^{-9}$
$v_r\partial\zeta/\partial P$	$(U\Delta P/L)(U/\Delta PL)$	$10^{-11}$
$\hat{k}\cdot\nabla v_r \times (\partial\bar{v}/\partial P)$	$(U\Delta P/L)(U/L\Delta P)$	$10^{-11}$

En la tabla anterior se observa que los 2 últimos términos de la ecuación (82) se pueden despreciar, quedando de la siguiente forma:

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t} + (\zeta+f)\nabla\cdot\bar{v} + \bar{v}\cdot\nabla(\zeta+f) = 0 \quad (83)$$

la ecuación (83) se puede escribir de la forma siguiente:

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t} + \zeta\nabla\cdot\bar{v} + f\nabla\cdot\bar{v} + \bar{v}\cdot\nabla\zeta + \bar{v}\cdot\nabla f = 0 \quad (84)$$

Usando ahora el teorema de Helmholtz, para expresar la velocidad del viento  $\bar{v}$ , en términos de una función de corriente  $\bar{\psi}$ , y una velocidad potencial  $\bar{v}_\chi$ , la ecuación (84) toma la forma:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \zeta \nabla \cdot (\bar{v}_\Psi + \bar{v}_X) + F \nabla \cdot (\bar{v}_\Psi + \bar{v}_X) + (\bar{v}_\Psi + \bar{v}_X) \cdot \nabla \zeta + (\bar{v}_\Psi + \bar{v}_X) \cdot \nabla f = 0 \quad (85)$$

Desarrollando la ecuación (85)

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \zeta \nabla \cdot \bar{v}_\Psi + \zeta \nabla \cdot \bar{v}_X + F \nabla \cdot \bar{v}_\Psi + F \nabla \cdot \bar{v}_X + \bar{v}_\Psi \cdot \nabla \zeta + \bar{v}_X \cdot \nabla \zeta + \bar{v}_\Psi \cdot \nabla f + \bar{v}_X \cdot \nabla f = 0 \quad (86)$$

la ecuación (86) se puede escribir de la forma:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \bar{v}_\Psi \cdot \nabla \zeta + \bar{v}_X \cdot \nabla \zeta + F D + \zeta D + \bar{v}_\Psi \cdot \nabla f + \bar{v}_X \cdot \nabla f = 0 \quad (87)$$

donde:

$$D = \nabla \cdot v \quad (88)$$

Calculando ahora el orden de magnitud de cada uno de los términos de la ecuación (87) se tiene la siguiente tabla [V]:

TABLA No. 4

término	magnitud	orden(s <sup>-2</sup> )
$\partial \zeta / \partial t$	$U^2 / L^2$	$10^{-10}$
$\bar{v}_\Psi \cdot \nabla \zeta$	$U^2 / L^2$	$10^{-10}$
$\bar{v}_X \cdot \nabla \zeta$	$R_1 U^2 / L^2$	$10^{-16}$
$F D$	$R_1 U^2 / R_0 L^2$	$10^{-14}$

continua tabla 4

$\zeta D$	$R_1 U^2 / L^2$	$10^{-16}$
$\bar{v}_\Psi \cdot \nabla f$	$\beta L U^2 / R_0 f L^2$	$10^{-8}$
$\bar{v}_X \cdot \nabla f$	$\beta L R_1 U^2 / R_0 f L^2$	$10^{-14}$

donde  $\bar{v}_\Psi \sim U$ ,  $\bar{v}_X \sim R_1 U$ ,  $D \sim R_1 U / L$ ,  $\beta \sim F/a$ ,  $R_0 \sim R_1 \sim 1$ ,  $\nabla \sim 1/L$ .

En la tabla No. 5 se observa que se pueden desprestigiar los términos: 3o., 4o., 5o. y 7o., del lado izquierdo de la ecuación (87), y por lo tanto la ecuación de vorticidad toma la forma:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \bar{v}_\Psi \cdot \nabla (\zeta + f) = 0 \quad (89)$$

Escribiendo ahora la ecuación (89) en coordenadas esféricas, y agrupando términos semejantes se tiene:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = - \frac{v_\Psi \lambda}{r \cos \phi} \frac{\partial \zeta}{\partial \lambda} - 2\Omega \frac{v_\Psi \phi}{r} \cos \phi - \frac{v_\Psi \phi}{r} \frac{\partial \zeta}{\partial \phi} \quad (90)$$

y escribiendo la relación (61) en coordenadas esféricas:

$$\bar{v}_\Psi = (v_\Psi \lambda, v_\Psi \phi, 0) = \hat{e}_r \times \nabla \Psi \quad (91)$$

donde:

$$\hat{e}_r \times \nabla \Psi = \hat{e}_\lambda \left( -\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \phi} \right) - \hat{e}_\phi \left( -\frac{1}{r \cos \phi} \frac{\partial \Psi}{\partial \lambda} \right) + \hat{e}_r (0) \quad (92)$$

Se obtiene, de las ecuaciones (91) y (92), las siguientes relaciones:

$$v_{\Psi\lambda} = -\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \phi} \quad (93)$$

$$v_{\Psi\phi} = \frac{1}{r \cos \phi} \frac{\partial \Psi}{\partial \lambda} \quad (94)$$

Sabemos también, de la relación (68) que:

$$\zeta = \nabla^2 \Psi \quad (95)$$

Sustituyendo las ecuaciones (93), (94) y (95) en la (90), se tiene:

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \Psi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial \Psi}{\partial \phi} \frac{\partial \nabla^2 \Psi}{\partial \lambda} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \Psi}{\cos \phi} \frac{\partial \nabla^2 \Psi}{\partial \lambda} \frac{\partial \phi}{\partial \lambda} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \Psi}{\partial \lambda} 2\Omega \quad (96)$$

Finalmente, la ecuación de vorticidad en coordenadas esféricas en términos de la función de corriente  $\Psi$ , toma la forma:

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \Psi = \frac{1}{r^2 \cos \phi} \left[ \frac{\partial \Psi}{\partial \phi} \frac{\partial \nabla^2 \Psi}{\partial \lambda} - \frac{\partial \Psi}{\partial \lambda} \frac{\partial \nabla^2 \Psi}{\partial \phi} \right] - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \Psi}{\partial \lambda} 2\Omega \quad (97)$$

## ECUACION DE LA DIVERGENCIA

Para encontrar la ecuación de la divergencia se utilizará la divergencia horizontal, la cual se denotará por:

$$D = \nabla \cdot \bar{v}_h \quad (98)$$

y que en coordenadas esféricas es:

$$\nabla \cdot \bar{v}_h = \frac{1}{r \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} (\cos \phi v_{\phi'}) + \frac{1}{r \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \lambda} v_{\lambda} \quad (99)$$

Tomando ahora la divergencia horizontal a la ecuación (76):

$$\nabla \cdot \left[ \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \nabla(\bar{v}^2/2) + (\zeta + f) \hat{k} \times \bar{v} + v_r \frac{\partial \bar{v}}{\partial P} + \nabla \Phi \right] = 0 \quad (100)$$

desarrollando la ecuación anterior

$$\nabla \cdot \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \nabla \cdot [\nabla(\bar{v}^2/2)] + \nabla \cdot [(\zeta + f) \hat{k} \times \bar{v}] + \nabla \cdot \left( v_r \frac{\partial \bar{v}}{\partial P} \right) + \nabla \cdot (\nabla \Phi) = 0 \quad (101)$$

y usando la siguiente relación (IV)

$$(\bar{v} \cdot \nabla) \bar{v} = \nabla(\bar{v}^2/2) + \zeta \hat{k} \times \bar{v} \quad (102)$$

la ecuación (101) toma la forma:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \bar{v}) + \nabla \cdot (\bar{v} \cdot \nabla) \bar{v} + \nabla \cdot (f \hat{k} \times \bar{v}) + \nabla \cdot \left( v_r \frac{\partial \bar{v}}{\partial P} \right) + \nabla \cdot (\nabla \Phi) = 0 \quad (103)$$

donde:

$$\nabla \cdot (f \hat{k} \times \bar{v}) = f \nabla \cdot (\hat{k} \times \bar{v}) + \hat{k} \times \bar{v} \cdot \nabla f \quad (104)$$

$$\nabla \cdot \left( v_r \frac{\partial \bar{v}}{\partial P} \right) = v_r \nabla \cdot \frac{\partial \bar{v}}{\partial P} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial P} \nabla v_r \quad (105)$$

Sustituyendo las ecuaciones (104) y (105) en la (103) se tiene:



$$\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \bar{v}) + \nabla \cdot (\bar{v} \cdot \nabla) \bar{v} + f \nabla \cdot (\hat{k} \times \bar{v}) + \hat{k} \times \bar{v} \cdot \nabla f + v_r \frac{\partial}{\partial P} (\nabla \cdot \bar{v}) + \frac{\partial \bar{v}}{\partial P} \nabla v_r + \nabla^2 \Phi = 0 \quad (106)$$

donde:

$$f \nabla \cdot (\hat{k} \times \bar{v}) = f \bar{v} \cdot (\nabla \times \hat{k}) - f \hat{k} \cdot (\nabla \times \bar{v}) \quad (107)$$

Sustituyendo la relación (107) en la (106) se tiene:

$$\frac{\partial D}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{v} \cdot \nabla) \bar{v} - f \zeta + \hat{k} \times \bar{v} \cdot \nabla f + v_r \frac{\partial D}{\partial P} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial P} \nabla v_r + \nabla^2 \Phi = 0 \quad (108)$$

pues:

$$\zeta = \hat{k} \cdot \nabla \times \bar{v}$$

Aplicando el teorema de Helmholtz a la ecuación (108) se tiene:

$$\frac{\partial D}{\partial t} + \nabla \cdot [(\bar{v}_\psi + \bar{v}_\chi) \cdot \nabla] (\bar{v}_\psi + \bar{v}_\chi) + f \zeta + \hat{k} \times (\bar{v}_\psi + \bar{v}_\chi) \cdot \nabla f + v_r \frac{\partial D}{\partial P} + \frac{\partial}{\partial P} (\bar{v}_\psi + \bar{v}_\chi) \nabla v_r + \nabla^2 \Phi = 0 \quad (109)$$

Desarrollando la ecuación (109) :

$$\frac{\partial D}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{v}_\psi \cdot \nabla) \bar{v}_\psi + \nabla \cdot [(\bar{v}_\psi \cdot \nabla) \bar{v}_\chi + (\bar{v}_\chi \cdot \nabla) \bar{v}_\psi] + \nabla \cdot (\bar{v}_\chi \cdot \nabla) \bar{v}_\chi - f \zeta + \hat{k} \times \bar{v}_\psi \cdot \nabla f + \hat{k} \times \bar{v}_\chi \cdot \nabla f + v_r \frac{\partial D}{\partial P} + \frac{\partial \bar{v}_\psi}{\partial P} \nabla v_r + \frac{\partial \bar{v}_\chi}{\partial P} \nabla v_r + \nabla^2 \Phi = 0 \quad (110)$$

Calculando ahora, el orden de magnitud de cada uno de los términos de la ecuación (110) se tiene la siguiente tabla [IV]:

TABLA No. 5

término	escala	magnitud(s <sup>-2</sup> )
$\partial D/\partial t$	$R_1 U^2/L^2$	$10^{-11}$
$\nabla \cdot (\bar{v}_\Psi \cdot \nabla) \bar{v}_\Psi$	$U^2/L^2$	$10^{-10}$
$\nabla \cdot [(\bar{v}_\Psi \cdot \nabla) \bar{v}_X + (\bar{v}_X \cdot \nabla) \bar{v}_\Psi]$	$R_1 U^2/L^2$	$10^{-11}$
$\nabla \cdot (\bar{v}_X \cdot \nabla) \bar{v}_X$	$R_1 U^2/L^2$	$10^{-12}$
$f\xi$	$FU/L$	$10^{-9}$
$\hat{k} \times \bar{v}_\Psi \cdot \nabla f$	$FU/a$	$1.57 \times 10^{-10}$
$\hat{k} \times \bar{v}_X \cdot \nabla f$	$R_1 UF/a$	$1.57 \times 10^{-11}$
$v_r \partial D/\partial P$	$R_1 U^2/L^2$	$10^{-12}$
$\frac{\partial \bar{v}_\Psi}{\partial P} \nabla v_r$	$R_1 U^2/L^2$	$10^{-11}$
$\frac{\partial \bar{v}_X}{\partial P} \nabla v_r$	$R_1 U^2/L^2$	$10^{-12}$
$\nabla^2 \Phi$	$U^2/R_0 L^2$	$10^{-9}$

En la tabla No. 5 se observa que los términos del orden  $10^{-9}$  son los más grandes, despreciando los de orden menor, la ecuación de

la divergencia toma la siguiente forma:

$$\nabla^2 \Phi - f\zeta = 0 \quad (111)$$

Pero sustituyendo la ecuación (68), la cual nos da a la vorticidad en términos de la función de corriente, en la ecuación (111), se obtiene:

$$\nabla^2 \Phi = f \nabla^2 \Psi \quad (112)$$

y la ecuación (112) da la relación entre el geopotencial y la función de corriente, que es lo que se necesitaba obtener, pues mas adelante se verá su utilidad.

CAPITULO II  
SOLUCION DE LA ECUACION DE VORTICIDAD

## ECUACION DE VORTICIDAD EXPRESADA EN SERIES DE ARMONICOS ESFERICOS

Partiendo de la ecuación (97), se quiere llegar a predecir como se mueve la superficie isobárica,  $P = 500$  mb., de la atmósfera.

Para esto, cada uno de los términos de dicha ecuación se expresará en términos de series de armónicos esféricos.

Comenzando por expandir la función de corriente en series de armónicos esféricos de la siguiente manera:

$$\Psi(\lambda, \phi) = a^2 \Omega \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=m}^{\infty} (U_n^m \cos m\lambda + V_n^m \sin m\lambda) P_n^m(\sin\phi) \quad (113)$$

Por otra parte, se tiene que la parte horizontal del laplaciano en coordenadas esféricas es:

$$\nabla^2 = \frac{1}{r \cos\phi} \left[ \frac{\partial}{\partial\phi} \left( \cos\phi \frac{\partial}{\partial\phi} \right) + \frac{1}{\cos\phi} \frac{\partial^2}{\partial\lambda^2} \right] \quad (114)$$

Operando con el laplaciano sobre  $U_n^m \cos m\lambda P_n^m(\sin\phi)$  de la ecuación (113):

$$\begin{aligned} \nabla^2 (U_n^m \cos m\lambda P_n^m(\sin\phi)) &= \\ &= \frac{1}{r \cos\phi} \left[ \frac{\partial}{\partial\phi} \left( \cos\phi \frac{\partial}{\partial\phi} \right) + \frac{1}{\cos\phi} \frac{\partial^2}{\partial\lambda^2} \right] (U_n^m \cos m\lambda P_n^m(\sin\phi)) \quad (115) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{r \cos\phi} \left[ \frac{\partial}{\partial\phi} \cos\phi U_n^m \cos m\lambda \frac{\partial}{\partial\phi} P_n^m(\sin\phi) + \frac{1}{\cos\phi} U_n^m P_n^m(\sin\phi) \frac{\partial^2 \cos m\lambda}{\partial\lambda^2} \right] \quad (116)$$

y aplicando ahora la relación (204) del apéndice a la ecuación (116), el primer término del lado izquierdo de (116) toma la forma:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \phi} \cos \phi U_n^m \cos m \lambda \frac{\partial}{\partial \phi} P_n^m(\sin \phi) &= U_n^m \cos m \lambda \left[ -\sin \phi P_n^{m+1}(\sin \phi) \right. \\ &+ \cos \phi \frac{\partial}{\partial \phi} P_n^{m+1}(\sin \phi) - m \cos \phi P_n^m(\sin \phi) - m \sin \phi P_n^{m-1}(\sin \phi) \\ &\left. + m^2 \frac{\sin^2 \phi}{\cos \phi} P_n^m(\sin \phi) \right] \end{aligned} \quad (117)$$

Usando ahora la relación (205) del apéndice, la relación (117) toma la forma :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \phi} \cos \phi U_n^m \cos m \lambda \frac{\partial}{\partial \phi} P_n^m(\sin \phi) &= U_n^m \cos m \lambda \left[ -\sin \phi P_n^{m+1}(\sin \phi) \right. \\ &+ (m+1) \sin \phi P_n^{m+1}(\sin \phi) - \cos \phi (n+m+1)(n-m) P_n^m(\sin \phi) - m \cos \phi P_n^m(\sin \phi) \\ &\left. - m \sin \phi P_n^{m-1}(\sin \phi) + m^2 \frac{\sin^2 \phi}{\cos \phi} P_n^m(\sin \phi) \right] \end{aligned} \quad (118)$$

Sustituyendo ahora la relación (118) en la (116) se tiene:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \left[ U_n^m \cos m \lambda P_n^m(\sin \phi) \right] &= \frac{1}{r^2 \cos \phi} \left[ U_n^m \cos m \lambda \left( -\cos \phi (n+m+1)(n-m) P_n^m(\sin \phi) \right. \right. \\ &\left. \left. - m \cos \phi P_n^m(\sin \phi) + m^2 \frac{\sin^2 \phi}{\cos \phi} P_n^m(\sin \phi) \right) - \frac{1}{\cos \phi} U_n^m P_n^m(\sin \phi) m^2 \cos m \lambda \right] \end{aligned} \quad (119)$$

y agrupando términos semejantes se obtiene la siguiente relación:

$$\nabla^2 \left[ U_n^{(m)} \cos m \lambda P_n^{(m)}(\sin \phi) \right] = - \frac{U_n^{(m)} \cos m \lambda P_n^{(m)}(\sin \phi)}{r^2} [n(n+1)] \quad (120)$$

Aplicando ahora el laplaciano horizontal a  $V_n^{(m)} \sin m \lambda P_n^{(m)}(\sin \phi)$  de la ecuación (113) se tiene:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \left[ V_n^{(m)} \sin m \lambda P_n^{(m)}(\sin \phi) \right] &= \\ &= \frac{1}{r \cos \phi} \left[ \frac{\partial}{\partial \phi} \left( \cos \phi \frac{\partial}{\partial \phi} \right) + \frac{1}{\cos \phi} \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} \right] \left( V_n^{(m)} \sin m \lambda P_n^{(m)}(\sin \phi) \right) \end{aligned} \quad (121)$$

$$= \frac{1}{r \cos \phi} \left[ \frac{\partial}{\partial \phi} \cos \phi V_n^{(m)} \sin m \lambda - \frac{\partial}{\partial \phi} P_n^{(m)}(\sin \phi) - \frac{1}{\cos \phi} V_n^{(m)} P_n^{(m)2} \sin m \lambda \right] \quad (122)$$

Sustituyendo la relación (204) del apéndice en la ecuación (122) se tiene:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \left[ V_n^{(m)} \sin m \lambda P_n^{(m)}(\sin \phi) \right] &= \frac{1}{r \cos \phi} \left[ \frac{\partial}{\partial \phi} \cos \phi V_n^{(m)} \sin m \lambda \left( P_n^{(m)} - m \frac{\sin \phi}{\cos \phi} P_n^{(m)} \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\cos \phi} V_n^{(m)} P_n^{(m)}(\sin \phi) m^2 \sin m \lambda \right] \end{aligned} \quad (123)$$

Desarrollando la ecuación (123) se tiene:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \left[ V_n^{(m)} \sin m \lambda P_n^{(m)}(\sin \phi) \right] &= \frac{1}{r \cos \phi} \left[ -V_n^{(m)} \sin m \lambda \sin \phi P_n^{(m+1)} + \cos \phi V_n^{(m)} \sin m \lambda \frac{\partial}{\partial \phi} P_n^{(m+1)} \right. \\ &\quad \left. - V_n^{(m)} \sin m \lambda m \cos \phi P_n^{(m)} - V_n^{(m)} \sin m \lambda m \sin \phi \frac{\partial}{\partial \phi} P_n^{(m)} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\cos \phi} V_n^{(m)} P_n^{(m)} m^2 \sin m \lambda \right] \end{aligned} \quad (124)$$

Sustituyendo las relaciones (204) y (205) del apéndice en la ecuación (124) se tiene:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \left[ V_n^{(m)} \sin m \lambda P_n^{(m)}(\sin \phi) \right] &= \frac{1}{r \cos \phi} \left[ -V_n^{(m)} \sin m \lambda \sin \phi P_n^{(m+1)} + \right. \\ &\quad \left. \cos \phi V_n^{(m)} \sin m \lambda \left( (m+1) \frac{\sin \phi}{\cos \phi} P_n^{(m+1)} - (n+m+1)(n-m) P_n^{(m)} \right) - V_n^{(m)} \sin m \lambda m \cos \phi P_n^{(m)} \right. \\ &\quad \left. - V_n^{(m)} \sin m \lambda m \sin \phi \left( P_n^{(m+1)} - m \frac{\sin \phi}{\cos \phi} P_n^{(m)} \right) - \frac{1}{\cos \phi} V_n^{(m)} P_n^{(m)} m^2 \sin m \lambda \right] \end{aligned} \quad (125)$$

Desarrollando la relación (125) y simplificandola después se tiene:

$$\nabla^2 \left[ V_n^{(m)} \sin m \lambda P_n^{(m)}(\sin \phi) \right] = \frac{V_n^{(m)} \sin m \lambda P_n^{(m)}}{r} [-n(n+1)] \quad (126)$$

por lo tanto, de las ecuaciones (113), (120) y (126) se tiene:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \Psi &= a^2 \Omega \left[ \nabla^2 (U_n^{(m)} \cos m \lambda P_n^{(m)}) + \nabla^2 (V_n^{(m)} \sin m \lambda P_n^{(m)}) \right] \\ &= -a^2 \Omega \left[ \sum_{m=0}^n \sum_{n=m+1}^{m+n} (U_n^{(m)} \cos m \lambda P_n^{(m)} + V_n^{(m)} \sin m \lambda P_n^{(m)}) \frac{n(n+1)}{r} \right] \end{aligned} \quad (128)$$

Escribiendo ahora la ecuación (97) de la forma siguiente:



$$\frac{\partial \nabla^2 \Psi}{\partial t} = C - \frac{2\Omega}{a^2} \frac{\partial \Psi}{\partial \lambda} \quad (129)$$

donde:

$$C = \frac{1}{a \cos \phi} \left[ \frac{\partial \Psi}{\partial \phi} \frac{\partial \nabla^2 \Psi}{\partial \lambda} - \frac{\partial \Psi}{\partial \lambda} \frac{\partial \nabla^2 \Psi}{\partial \phi} \right] \quad (130)$$

y expresando a C en términos de series de armónicos esféricos:

$$C = a^2 \Omega^2 \sum_{m=0}^M \sum_{n=m}^{M+N} (E_n^m \cos m\lambda + F_n^m \sin m\lambda) P_n^m(\sin \phi) \quad (131)$$

de la relación (128) se tiene:

$$\frac{\partial \nabla^2 \Psi}{\partial t} = -a^2 \Omega \sum_{m=0}^M \sum_{n=m}^{M+N} \frac{n(n+1)}{r} \left[ \cos m\lambda P_n^m \frac{\partial U_n^m}{\partial t} + \sin m\lambda P_n^m \frac{\partial V_n^m}{\partial t} \right] \quad (132)$$

y de la relación (113) se tiene:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \lambda} = a^2 \Omega \sum_{m=0}^M \sum_{n=m}^{M+N} (-mU_n^m \sin m\lambda + mV_n^m \cos m\lambda) P_n^m(\sin \phi) \quad (133)$$

Sustituyendo ahora las relaciones (131), (132) y (133) en la (129), la ecuación de vorticidad toma la forma:

$$\begin{aligned} & -a^2 \Omega \sum_{m=0}^M \sum_{n=m}^{M+N} \frac{n(n+1)}{r} \left[ \cos m\lambda P_n^m \frac{\partial U_n^m}{\partial t} + \sin m\lambda P_n^m \frac{\partial V_n^m}{\partial t} \right] \\ & = a^2 \Omega^2 \sum_{m=0}^M \sum_{n=m}^{M+N} (E_n^m \cos m\lambda + F_n^m \sin m\lambda) P_n^m(\sin \phi) \\ & \quad - 2\Omega^2 \sum_{m=0}^M \sum_{n=m}^{M+N} (-mU_n^m \sin m\lambda + mV_n^m \cos m\lambda) P_n^m(\sin \phi) \end{aligned} \quad (134)$$

Suponiendo que se está trabajando con  $P_n^m$  ortonormalizados, y multiplicando la ecuación (134) por  $\cos\mu\lambda P_\nu^m \cos\phi$ , e integrando:

$$\begin{aligned}
 & -a^2 \Omega \sum_{m=0}^M \sum_{n=m+1}^N \frac{n(n+1)}{r^2} \left[ \frac{\partial U_n^m}{\partial t} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \cos m\lambda P_n^m \cos\mu\lambda P_\nu^m \cos\phi d\phi d\lambda \right. \\
 & \left. + \frac{\partial V_n^m}{\partial t} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin m\lambda P_n^m \cos\mu\lambda P_\nu^m \cos\phi d\phi d\lambda \right] = \\
 & a^2 \Omega \sum_{m=0}^M \sum_{n=m+1}^N E_n^m \left[ \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \cos m\lambda P_n^m \cos\mu\lambda P_\nu^m \cos\phi d\phi d\lambda \right. \\
 & \left. + F_n^m \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin m\lambda P_n^m \cos\mu\lambda P_\nu^m \cos\phi d\phi d\lambda \right] \\
 & - 2\Omega \sum_{m=0}^M \sum_{n=m+1}^N \left[ -mU_n^m \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin m\lambda P_n^m \cos\mu\lambda P_\nu^m \cos\phi d\phi d\lambda \right. \\
 & \left. + mV_n^m \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \cos m\lambda P_n^m \cos\mu\lambda P_\nu^m \cos\phi d\phi d\lambda \right] \quad (135)
 \end{aligned}$$

Usando ahora las relaciones (215) del apéndice, la ecuación (135) toma la forma:

$$\begin{aligned}
& - a^2 \Omega \sum_{m \neq 0} \sum_{n \neq m} \frac{n(n+1)}{r^2} \left[ \frac{\partial U_n^m}{\partial t} \int_0^{2\pi} d\lambda \int_0^\pi \cos\phi d\phi Y_n^{m(t)}(\phi, \lambda) Y_{\nu}^{(\nu)}(\phi, \lambda) \right. \\
& + \left. \frac{\partial V_n^m}{\partial t} \int_0^{2\pi} d\lambda \int_0^\pi \cos\phi d\phi Y_n^{m(t)}(\phi, \lambda) Y_{\nu}^{(\nu)}(\phi, \lambda) \right] = \\
& - a^2 \Omega^2 \sum_{m \neq 0} \sum_{n \neq m} \left[ E_n^m \int_0^{2\pi} d\lambda \int_0^\pi \cos\phi d\phi Y_n^{m(t)}(\phi, \lambda) Y_{\nu}^{(\nu)}(\phi, \lambda) \right. \\
& + \left. F_n^m \int_0^{2\pi} d\lambda \int_0^\pi \cos\phi d\phi Y_n^{m(t)}(\phi, \lambda) Y_{\nu}^{(\nu)}(\phi, \lambda) \right] \\
& - 2\Omega^2 \sum_{m \neq 0} \sum_{n \neq m} \left[ -m U_n^m \int_0^{2\pi} d\lambda \int_0^\pi \cos\phi d\phi Y_n^{m(t)}(\phi, \lambda) Y_{\nu}^{(\nu)}(\phi, \lambda) \right. \\
& + \left. m V_n^m \int_0^{2\pi} d\lambda \int_0^\pi \cos\phi d\phi Y_n^{m(t)}(\phi, \lambda) Y_{\nu}^{(\nu)}(\phi, \lambda) \right] \tag{136}
\end{aligned}$$

Usando las propiedades de orthonormalización (208), (209) y (210) del apéndice, se obtiene la siguiente expresión para el cambio del coeficiente  $U_{\nu}^{\mu}$  respecto al tiempo:

$$\frac{\partial U_{\nu}^{\mu}}{\partial t} = \frac{1}{\nu(\nu+1)} \left[ -r^2 E_{\nu}^{\mu} \Omega + 2\Omega \mu V_{\nu}^{\mu} \right] \tag{137}$$

Multiplicando ahora la ecuación (134) por  $\sin \mu \lambda P'_y \cos \phi$ , e integrando, se tiene:

$$\begin{aligned}
 & - \Omega \sum_{m=0}^M \sum_{n=1}^{m+N} n(n+1) \left[ \frac{\partial U_n^m}{\partial t} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \cos m \lambda P_n^m \sin \mu \lambda P'_y \cos \phi d\phi d\lambda \right. \\
 & \left. + \frac{\partial V_n^m}{\partial t} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \sin m \lambda P_n^m \sin \mu \lambda P'_y \cos \phi d\phi d\lambda \right] = \\
 & a^2 \Omega^2 \sum_{m=0}^M \sum_{n=1}^{m+N} \left[ E_n^m \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \cos m \lambda P_n^m \sin \mu \lambda P'_y \cos \phi d\phi d\lambda \right. \\
 & \left. + F_n^m \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \sin m \lambda P_n^m \sin \mu \lambda P'_y \cos \phi d\phi d\lambda \right] \\
 & - 2\Omega^2 \sum_{m=0}^M \sum_{n=1}^{m+N} \left[ -m U_n^m \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \sin m \lambda P_n^m \sin \mu \lambda P'_y \cos \phi d\phi d\lambda \right. \\
 & \left. + m V_n^m \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \cos m \lambda P_n^m \sin \mu \lambda P'_y \cos \phi d\phi d\lambda \right] \tag{138}
 \end{aligned}$$

lo cual se puede escribir de la siguiente forma, usando las relaciones (215) del apéndice :

$$\begin{aligned}
& - \Omega \sum_{m=0}^M \sum_{n=1}^{m+N} n(n+1) \left[ \frac{\partial U_n^m}{\partial t} \int_0^{2\pi} d\lambda \int_0^\pi \cos\phi d\phi Y_n^{m(c)}(\phi, \lambda) Y_n^{m(c)}(\phi, \lambda) \right. \\
& + \frac{\partial V_n^m}{\partial t} \int_0^{2\pi} d\lambda \int_0^\pi \cos\phi d\phi Y_n^{m(c)}(\phi, \lambda) Y_n^{m(c)}(\phi, \lambda) \left. \right] = \\
& - a^2 \Omega^2 \sum_{m=0}^M \sum_{n=1}^{m+N} \left[ E_n^m \int_0^{2\pi} d\lambda \int_0^\pi \cos\phi d\phi Y_n^{m(c)}(\phi, \lambda) Y_n^{m(c)}(\phi, \lambda) \right. \\
& + F_n^m \int_0^{2\pi} d\lambda \int_0^\pi \cos\phi d\phi Y_n^{m(c)}(\phi, \lambda) Y_n^{m(c)}(\phi, \lambda) \left. \right] \\
& - 2\Omega^2 \sum_{m=0}^M \sum_{n=1}^{m+N} \left[ -m U_n^m \int_0^{2\pi} d\lambda \int_0^\pi \cos\phi d\phi Y_n^{m(c)}(\phi, \lambda) Y_n^{m(c)}(\phi, \lambda) \right. \\
& + m V_n^m \int_0^{2\pi} d\lambda \int_0^\pi \cos\phi d\phi Y_n^{m(c)}(\phi, \lambda) Y_n^{m(c)}(\phi, \lambda) \left. \right] \tag{139}
\end{aligned}$$

Finalmente, usando las relaciones (208), (209) y (210), se tiene que el cambio de  $V_n^m$  respecto al tiempo está dado por la expresión:

$$\frac{\partial V_n^m}{\partial t} = - (a^2 \Omega F_n^m + 2\Omega \mu U_n^m) \frac{1}{\nu(\nu+1)} \tag{140}$$

Usando ahora las expresiones (113) y (128), se calcularán cada una de las derivadas parciales de :

$$C = \frac{1}{a \cos \phi} \left[ \frac{\partial \Psi}{\partial \phi} \frac{\partial \nabla^2 \Psi}{\partial \lambda} - \frac{\partial \Psi}{\partial \lambda} \frac{\partial \nabla^2 \Psi}{\partial \phi} \right] \quad (130)$$

para obtenerlos valores iniciales de C.

Por lo tanto, calculando éstas, y usando la relación (206) del apéndice, se tienen las siguientes expresiones:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \phi} = a^2 \Omega \sum_{m=0}^M \sum_{n=m}^{M+m} (U_n^m \cos m\lambda + V_n^m \sin m\lambda) (\operatorname{tg} \phi (n+1) P_n^m - \frac{1}{\cos \phi} (n-m+1) P_{n+1}^m) \quad (142)$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \lambda} = a^2 \Omega \sum_{m=0}^M \sum_{n=m}^{M+m} (-U_n^m m \sin m\lambda + V_n^m m \cos m\lambda) P_n^m \quad (143)$$

$$\frac{\partial \nabla^2 \Psi}{\partial \phi} = a^2 \Omega \sum_{m=0}^M \sum_{n=m}^{M+m} -\frac{n(n+1)}{r^2} (U_n^m \cos m\lambda + V_n^m \sin m\lambda) ((n+1) \operatorname{tg} \phi P_n^m - \frac{1}{\cos \phi} (n-m+1) P_{n+1}^m) \quad (144)$$

$$\frac{\partial \nabla^2 \Psi}{\partial \lambda} = a^2 \Omega \sum_{m=0}^M \sum_{n=m}^{M+m} \frac{n(n+1)}{r^2} (U_n^m m \sin m\lambda - V_n^m m \cos m\lambda) P_n^m \quad (145)$$

Sustituyendo las ecuaciones (142), (143), (144) y (145) en la (130) se tiene:

$$C = \frac{a^4 \Omega^2}{2 a \cos \phi} \left[ \sum_{m=0}^M \sum_{n=m+1}^N (U_n^m \cos m\lambda + V_n^m \sin m\lambda) (\operatorname{tg} \phi (n+1) P_n^m - \frac{1}{\cos \phi} (n-m+1) P_n^m) \right. \\ \times \sum_{m=0}^M \sum_{n=m+1}^N \frac{n(n+1)}{r} (U_n^m \sin m\lambda - V_n^m \cos m\lambda) P_n^m \\ \left. - \sum_{m=0}^M \sum_{n=m+1}^N (-U_n^m \sin m\lambda + V_n^m \cos m\lambda) P_n^m \right. \\ \left. \times \sum_{m=0}^M \sum_{n=m+1}^N -\frac{n(n+1)}{r} (U_n^m \cos m\lambda + V_n^m \sin m\lambda) ((n+1) \operatorname{tg} \phi P_n^m - \frac{1}{\cos \phi} (n-m+1) P_n^m) \right] \quad (146)$$

Si se define:

$$D1 = \sum_{m=0}^M \sum_{n=m+1}^N (U_n^m \cos m\lambda + V_n^m \sin m\lambda) (\operatorname{tg} \phi (n+1) P_n^m - \frac{1}{\cos \phi} (n-m+1) P_n^m) \quad (147)$$

$$D2 = \sum_{m=0}^M \sum_{n=m+1}^N \frac{n(n+1)}{r} (U_n^m \sin m\lambda - V_n^m \cos m\lambda) P_n^m \quad (148)$$

$$D3 = \sum_{m=0}^M \sum_{n=m+1}^N (-U_n^m \sin m\lambda + V_n^m \cos m\lambda) P_n^m \quad (149)$$

$$D4 = \sum_{m=0}^M \sum_{n=m+1}^N -\frac{n(n+1)}{r} (U_n^m \cos m\lambda + V_n^m \sin m\lambda) ((n+1) \operatorname{tg} \phi P_n^m \\ - \frac{1}{\cos \phi} (n-m+1) P_n^m) \quad (150)$$

la expresión (146) toma la forma:

$$C = \frac{a^2 \Omega^2}{\cos \phi} \left[ D1D2 - D3D4 \right] \quad (151)$$

obteniendo de esta forma los valores iniciales de C.

### CALCULO DE LOS COEFICIENTES DE C

Ahora se esta en posibilidad de calcular los coeficientes de C, por lo tanto, tomando la expresi3n (131) de C en series de arm3nicos esf3ricos, se tiene:

$$CC = \sum_{m=0}^N \sum_{l=m}^N \left( E_l^m \cos m \lambda + F_l^m \sin m \lambda \right) P_l^m(\sin \phi) \quad (152)$$

donde:

$$CC = \frac{C}{a^2 \Omega^2}$$

$$E_l^m = \frac{\delta}{2\pi} \frac{m}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} CC \cos m \lambda P_l^m(\sin \phi) \cos \phi d\phi d\lambda \quad (154)$$

$$F_l^m = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} CC \sin m \lambda P_l^m(\sin \phi) \cos \phi d\phi d\lambda \quad (155)$$

donde:  $\delta = \begin{cases} 1 & \text{si } m=0 \\ 2 & \text{si } m \neq 0 \end{cases}$

y CC es una funci3n impar de la latitud, de donde  $E_l^m = F_l^m = 0$  si  $l+m$  es par, por lo tanto se tiene:

$$E_l^m = \frac{\delta}{\pi} \frac{m}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} CC \cos m \lambda P_l^m(\sin \phi) \cos \phi d\phi d\lambda \quad (156)$$



$$E_z^m = \frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} CC \sin m \lambda P_\ell^m(\sin \phi) \cos \phi d\phi d\lambda \quad (157)$$

Las relaciones (156) y (157) se pueden escribir de la forma siguiente

$$E_x^m = \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} g_1(l, m, \phi, \lambda) d\lambda d\phi \quad (158)$$

$$E_z^m = \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} g_2(l, m, \phi, \lambda) d\lambda d\phi \quad (159)$$

donde:

$$g_1(l, m, \phi, \lambda) = \frac{\delta}{\pi} CC[R, S] \cos[R\Delta\phi] \cos[mS\Delta\lambda] P[L, M, R] \quad (160)$$

$$g_2(l, m, \phi, \lambda) = \frac{2}{\pi} CC[R, S] \cos[R\Delta\phi] \sin[mS\Delta\lambda] P[L, M, R] \quad (161)$$

Aquí se usará la regla de Simpson para integrar los coeficientes  $E_x$  y  $E_z$ , la cual permite calcular una integral de manera aproximada, de la siguiente forma [II]:

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x) dx \approx \frac{h}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)] \quad (162)$$

donde:  $h$  es la anchura del intervalo.

Formando ahora una red hemisférica, cuya longitud y latitud están dadas por:

$$\begin{aligned} \text{latitud} &= HI, \quad I \in [0, \pi/2]; \\ \text{longitud} &= HJ, \quad J \in [0, 2\pi]; \end{aligned} \quad (163)$$

donde:  $H = 5\pi/180$ ;

Usando entonces la regla de Simpson para integrar las relaciones (158) y (159) se tiene:

$$E[L,M] = \int_0^{\phi_r} \int_0^{\lambda_r} g_1(\phi, \lambda) d\lambda d\phi \quad (164)$$

donde:

$$g_1(\phi, \lambda) = g_1(l, m, \phi, \lambda)$$

$$\begin{aligned} E[L,M] &= \sum_{i=0}^8 \sum_{j=0}^{35} \int_{\phi_{2i}}^{\phi_{2i+2}} \int_{\lambda_{2j}}^{\lambda_{2j+2}} g_1(\phi, \lambda) d\phi d\lambda \\ &= \sum_{i=0}^8 \sum_{j=0}^{35} \left\{ \left[ \frac{h^2}{3} \left[ g_1(\phi_{2i}, \lambda_{2j}) + 4g_1(\phi_{2i+1}, \lambda_{2j}) + g_1(\phi_{2i+2}, \lambda_{2j}) \right] \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 4 \left[ \frac{h^2}{3} \left[ g_1(\phi_{2i}, \lambda_{2j+1}) + 4g_1(\phi_{2i+1}, \lambda_{2j+1}) + g_1(\phi_{2i+2}, \lambda_{2j+1}) \right] \right] \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \left[ \frac{h^2}{3} \left[ g_1(\phi_{2i}, \lambda_{2j+2}) + 4g_1(\phi_{2i+1}, \lambda_{2j+2}) + g_1(\phi_{2i+2}, \lambda_{2j+2}) \right] \right] \right\} \quad (165) \end{aligned}$$

$$F[L, M] = \int_0^{v_r} \int_0^{\lambda_r} g_2(\phi, \lambda) d\lambda d\phi \quad (166)$$

donde:

$$g_2(\phi, \lambda) = g_2(l, m, \phi, \lambda)$$

$$\begin{aligned}
 F[L, M] &= \sum_{l=0}^n \sum_{j=0}^{25} \int_{\lambda_{2j}}^{\lambda_{2j+2}} g_2(\phi, \lambda) d\phi d\lambda \\
 &= \sum_{l=0}^n \sum_{j=0}^{25} \left\{ \left[ \frac{h}{3} \right]^2 \left[ g_2(\phi_{2j}, \lambda_{2j}) + 4g_2(\phi_{2j+1}, \lambda_{2j}) + g_2(\phi_{2j+2}, \lambda_{2j}) \right] \right. \\
 &\quad \left. + 4 \left[ \frac{h}{3} \right]^2 \left[ g_2(\phi_{2j}, \lambda_{2j+1}) + 4g_2(\phi_{2j+1}, \lambda_{2j+1}) + g_2(\phi_{2j+2}, \lambda_{2j+1}) \right] \right. \\
 &\quad \left. + \left[ \frac{h}{3} \right]^2 \left[ g_2(\phi_{2j}, \lambda_{2j+2}) + 4g_2(\phi_{2j+1}, \lambda_{2j+2}) + g_2(\phi_{2j+2}, \lambda_{2j+2}) \right] \right\} \quad (167)
 \end{aligned}$$

obteniendo de esta forma los coeficientes de CC.

## INTEGRACION DE LA ECUACION DE VORTICIDAD

Para poder integrar la ecuación de vorticidad es necesario determinar la relación que existe entre los coeficientes de la función de corriente y los coeficientes de la superficie Z. Para ésto, se expresa a Z en términos de series de armónicos esféricos de la siguiente forma:

$$Z = \frac{a^2 \Omega^2}{g} \sum_{m=0}^{10} \sum_{\ell=m}^{m+10} (A_{\ell}^m \cos m\lambda + B_{\ell}^m \sin m\lambda) P_{\ell}^m(\sin\phi) \quad (168)$$

donde:

$$A_{\ell}^m = \frac{\delta}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} Z \cos m\lambda P_{\ell}^m(\sin\phi) \cos\phi d\phi d\lambda \quad (169)$$

$$B_{\ell}^m = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} Z \sin m\lambda P_{\ell}^m(\sin\phi) \cos\phi d\phi d\lambda \quad (170)$$

donde:  $\delta = \begin{cases} 1 & \text{si } m=0 \\ 2 & \text{si } m \neq 0 \end{cases}$

Para  $l+m$  par,  $P_{\ell}^m(\sin\phi)$  es una función par de  $\phi$  (latitud), y suponiendo que  $Z(\lambda, \phi)$  es una función par de  $\phi$ , se tiene:

$$A_{\ell}^m = \frac{\delta}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} Z \cos m\lambda P_{\ell}^m(\sin\phi) \cos\phi d\phi d\lambda \quad (171)$$

$$B_x''' = \frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} Z \sin m \lambda P_x'''(\sin \phi) \cos \phi d\phi d\lambda \quad (172)$$

expresando a las relaciones (171) y (172) de la forma:

$$\begin{aligned} A_x''' = A[L, M] &= \frac{\delta}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} Z(\lambda, \phi) \cos \phi \cos m \lambda P_x'''(\sin \phi) d\lambda d\phi \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} f_1(l, m, \phi, \lambda) d\lambda d\phi \end{aligned} \quad (173)$$

$$\begin{aligned} B_x''' = B[L, M] &= \frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} Z(\lambda, \phi) \cos \phi \sin m \lambda P_x'''(\sin \phi) d\lambda d\phi \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} f_2(l, m, \phi, \lambda) d\lambda d\phi \end{aligned} \quad (174)$$

Usando ahora la regla de Simpson para integrar los coeficientes  $A_x'''$  y  $B_x'''$  y haciendo lo siguiente:

$$f_1(l, m, \phi, \lambda) = \frac{\delta}{\pi} Z[R, S] \cos[R\Delta\phi] \cos[mS\Delta\lambda] P[L, M, R] \quad (175)$$

$$f_2(l, m, \phi, \lambda) = \frac{2}{\pi} Z[R, S] \cos[R\Delta\phi] \sin[mS\Delta\lambda] P[L, M, R] \quad (176)$$

Se tiene que las integrales (173) y (174) toman la forma:

$$\begin{aligned}
A[L,M] &= \sum_{i=0}^8 \sum_{j=0}^{35} \int_{\phi_{2i}}^{\phi_{2i+2}} \int_{\lambda_{2j}}^{\lambda_{2j+2}} F_1(\phi, \lambda) d\phi d\lambda \\
&= \sum_{i=0}^8 \sum_{j=0}^{35} \left\{ \left[ \frac{h}{3} \right]^2 \left[ F_1(\phi_{2i}, \lambda_{2j}) + 4F_1(\phi_{2i+1}, \lambda_{2j}) + F_1(\phi_{2i+2}, \lambda_{2j}) \right] \right. \\
&\quad \left. + 4 \left[ \frac{h}{3} \right]^2 \left[ F_1(\phi_{2i}, \lambda_{2j+1}) + 4F_1(\phi_{2i+1}, \lambda_{2j+1}) + F_1(\phi_{2i+2}, \lambda_{2j+1}) \right] \right. \\
&\quad \left. + \left[ \frac{h}{3} \right]^2 \left[ F_1(\phi_{2i}, \lambda_{2j+2}) + 4F_1(\phi_{2i+1}, \lambda_{2j+2}) + F_1(\phi_{2i+2}, \lambda_{2j+2}) \right] \right\} \quad (177)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B[L,M] &= \sum_{i=0}^8 \sum_{j=0}^{35} \int_{\phi_{2i}}^{\phi_{2i+2}} \int_{\lambda_{2j}}^{\lambda_{2j+2}} F_2(\phi, \lambda) d\phi d\lambda \\
&= \sum_{i=0}^8 \sum_{j=0}^{35} \left\{ \left[ \frac{h}{3} \right]^2 \left[ F_2(\phi_{2i}, \lambda_{2j}) + 4F_2(\phi_{2i+1}, \lambda_{2j}) + F_2(\phi_{2i+2}, \lambda_{2j}) \right] \right. \\
&\quad \left. + 4 \left[ \frac{h}{3} \right]^2 \left[ F_2(\phi_{2i}, \lambda_{2j+1}) + 4F_2(\phi_{2i+1}, \lambda_{2j+1}) + F_2(\phi_{2i+2}, \lambda_{2j+1}) \right] \right. \\
&\quad \left. + \left[ \frac{h}{3} \right]^2 \left[ F_2(\phi_{2i}, \lambda_{2j+2}) + 4F_2(\phi_{2i+1}, \lambda_{2j+2}) + F_2(\phi_{2i+2}, \lambda_{2j+2}) \right] \right\} \quad (178)
\end{aligned}$$

obteniendo de esta manera los coeficientes de Z .

De la relación (168) se obtiene la siguiente expresión para el laplaciano de Z:

$$\nabla^2 Z = -\frac{a^2 \Omega^2}{g} \sum_{m=0}^{10} \sum_{\lambda=m+1}^{10} \frac{l(l+1)}{a} (A_\lambda^m \cos m\lambda + B_\lambda^m \sin m\lambda) P_\lambda^m(\sin\phi) \quad (180)$$

Usando ahora la relación entre el geopotencial y la función de corriente:

$$\nabla^2 \Phi = f \nabla^2 \Psi \quad (112)$$

donde:

$$f = 2\Omega \sin\phi$$

$$\Phi = gZ$$

y considerando g constante, la relación (112) toma la forma:

$$g \nabla^2 Z = f \nabla^2 \Psi \quad (181)$$

Sustituyendo las relaciones (128) y (180) en (181) se tiene:

$$\Omega^2 \sum_{m=0}^{10} \sum_{\lambda=m+1}^{10} (A_\lambda^m \cos m\lambda + B_\lambda^m \sin m\lambda) P_\lambda^m(\sin\phi) l(l+1) = 2\Omega^2 \sin\phi \sum_{m=0}^{10} \sum_{\lambda=m+1}^{10} l(l+1) (U_\lambda^m \cos m\lambda + V_\lambda^m \sin m\lambda) P_\lambda^m(\sin\phi) \quad (182)$$

y usando la relación (207) del apéndice y sustituyéndola en el segundo miembro de la ecuación (182) se tiene:

$$2\Omega^2 \sum_{m=0}^{10} \sum_{\lambda=m+1}^{10} l(l+1) (U_\lambda^m \cos m\lambda + V_\lambda^m \sin m\lambda) \frac{(l-m+1)}{2l+1} \left[ \frac{2l+1}{2(l+1)+1} \frac{(l+1+m)}{(l+1-m)} \right]^{1/2} P_{l+1}^m(\sin\phi) \\ 2\Omega^2 \sum_{m=0}^{10} \sum_{\lambda=m+1}^{10} l(l+1) (U_\lambda^m \cos m\lambda + V_\lambda^m \sin m\lambda) \frac{l+m}{2l+1} \left[ \frac{2l+1}{2(l-1)+1} \frac{(l-m)}{(l+m)} \right]^{1/2} P_l^m(\sin\phi) \quad (183)$$

y simplificando (183), se llega a la siguiente expresión.

$$2\Omega \sum_{m=0}^{2-10} \sum_{l=m+1}^{m+12} l(l-1) (U_{l-1}^{m1} \cos m\lambda + V_{l-1}^{m1} \sin m\lambda) \left[ \frac{l^2 - m^2}{4l-1} \right]^{1/2} P_l^m(\sin\phi)$$

$$2\Omega \sum_{m=0}^{2-10} \sum_{l=m+1}^{m+10} (l+1)(l+2) (U_{l+1}^{m1} \cos m\lambda + V_{l+1}^{m1} \sin m\lambda) \left[ \frac{(l+1)^2 - m^2}{4(l+1)-1} \right]^{1/2} \quad (184)$$

Se observa en (184), que ambas sumatorias pueden empezar en  $l=m$ , entonces, empezando en  $l=m$  y separando los términos  $\sum_{m=0}^{10} \sum_{l=m+1}^{m+12}$  de la primera suma, se tiene:

$$2\Omega \sum_{m=0}^{2-10} \sum_{l=m}^{m+12} \left\{ l(l-1) U_{l-1}^{m1} \left[ \frac{l^2 - m^2}{4l-1} \right]^{1/2} + (l+1)(l+2) U_{l+1}^{m1} \left[ \frac{(l+1)^2 - m^2}{4(l+1)-1} \right]^{1/2} \right\} \cos m\lambda$$

$$+ \left\{ l(l-1) V_{l-1}^{m1} \left[ \frac{l^2 - m^2}{4l-1} \right]^{1/2} + (l+1)(l+2) V_{l+1}^{m1} \left[ \frac{(l+1)^2 - m^2}{4(l+1)-1} \right]^{1/2} \right\} \sin m\lambda \cdot P_l^m(\sin\phi)$$

$$+ 2\Omega \sum_{m=0}^{2-10} \sum_{l=m+1}^{m+10} l(l+1) (U_{l-1}^{m1} \cos m\lambda + V_{l-1}^{m1} \sin m\lambda) \left[ \frac{l^2 - m^2}{4l-1} \right]^{1/2} P_l^m(\sin\phi) \quad (185)$$

Sustituyendo (185) en el segundo miembro de la relación (182) e igualando, respectivamente, los coeficientes de  $\cos m\lambda P_l^m(\sin\phi)$  y  $\sin m\lambda P_l^m(\sin\phi)$ , se obtiene, para  $m = 0, 1, \dots, 10$  y  $l = m, \dots, m+10$ , las siguientes relaciones entre los coeficientes de  $Z$  y  $\Psi$ :

$$l(l+1) A_l^m = 2 \left\{ l(l-1) U_{l-1}^{m1} \left[ \frac{l^2 - m^2}{4l-1} \right]^{1/2} + (l+1)(l+2) U_{l+1}^{m1} \left[ \frac{(l+1)^2 - m^2}{4(l+1)-1} \right]^{1/2} \right\} \quad (186)$$



$$l(l+1)B_x^{(l)} = 2 \left\{ (l-1)lV_{l-1}^{(l)} \left[ \frac{l^2 - m^2}{4l^2 - 1} \right]^{1/2} + (l+1)(l+2)V_{l+1}^{(l)} \left[ \frac{(l+1)^2 - m^2}{4(l+1)^2 - 1} \right]^{1/2} \right\} \quad (187)$$

Igualando ahora los coeficientes de  $\cos m\lambda P_l^m(\sin\phi)$ , y  $\sin m\lambda P_l^m(\sin\phi)$ , se tiene, para  $m = 0, \dots, l$  y  $l = m+1, m+2$ :

$$0 = 2(l+1)lU_{l+1}^{(m)} \left[ \frac{l^2 - m^2}{4l^2 - 1} \right]^{1/2} \quad (188)$$

$$0 = 2(l+1)lV_{l+1}^{(m)} \left[ \frac{l^2 - m^2}{4l^2 - 1} \right]^{1/2} \quad (189)$$

Por lo tanto, de las relaciones (188) y (189) se tiene:

$$U_{l+1}^{(m)} = U_{l-1}^{(m)} = 0 \quad (188-1)$$

$$V_{l+1}^{(m)} = V_{l-1}^{(m)} = 0 \quad (189-1)$$

y la relaciones (186) y (187) se pueden escribir de la forma:

$$\begin{pmatrix} U_{l+1}^{(m)} \\ V_{l+1}^{(m)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_l^{(m)} \\ B_l^{(m)} \end{pmatrix} - \frac{l+2}{l} \frac{(l+1)^2 - m^2}{4(l+1)^2 - 1} \begin{pmatrix} U_{l-1}^{(m)} \\ V_{l-1}^{(m)} \end{pmatrix} \left[ \frac{l+1}{l-1} \left[ \frac{4l^2 - 1}{l^2 - m^2} \right] \right]^{1/2} \quad (190)$$

$$\begin{pmatrix} U_{l+1}^{(m)} \\ V_{l+1}^{(m)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_l^{(m)} \\ B_l^{(m)} \end{pmatrix} - \frac{l-1}{l+1} \left[ \frac{l^2 - m^2}{4l^2 - 1} \right]^{1/2} \begin{pmatrix} U_{l-1}^{(m)} \\ V_{l-1}^{(m)} \end{pmatrix} \left[ \frac{l}{l-2} \left[ \frac{4(l+1)^2 - 1}{(l+1)^2 - m^2} \right] \right]^{1/2} \quad (191)$$

Las relaciones (188-1) y (189-1) se pueden escribir de la forma:

$$\begin{pmatrix} U_{m+1}^{(m)} \\ V_{m+1}^{(m)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (192)$$

$$\begin{pmatrix} U_{m+10}^{III} \\ V_{m+10}^{III} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (192-1)$$

y de las relaciones (190) y (192), se encuentran los coeficientes siguientes: (tomando inicialmente  $l = m+10$ , y continuando de 2 en 2 hasta  $l = m+2$ )

$$\begin{pmatrix} U_{m+9}^{III} \\ V_{m+9}^{III} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} U_{m+7}^{III} \\ V_{m+7}^{III} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} U_{m+1}^{III} \\ V_{m+1}^{III} \end{pmatrix} \quad (193)$$

y de las relaciones (190) y (192-1) se obtienen los siguientes coeficientes: (tomando inicialmente  $l=m+9$ , y continuando de 2 en 2 hasta  $l=m+1$ )

$$\begin{pmatrix} U_{m+8}^{III} \\ V_{m+8}^{III} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} U_{m+6}^{III} \\ V_{m+6}^{III} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} U_m^{III} \\ V_m^{III} \end{pmatrix} \quad (194)$$

Obteniéndose de esta forma los coeficientes de  $\Psi$  a partir de los coeficientes de  $Z$ .

## DATOS Y RESULTADOS

El método de solución de la ecuación de vorticidad en términos de series de armónicos esféricos, para la superficie  $Z=500\text{mb.}$ , se probó con los siguientes datos:

- 1.- Datos de una superficie hemisférica idealizada, la cual se muestra en la figura No.1;
- 2.- Datos reales de una superficie en el hemisferio norte, del 4 de diciembre de 1950, los cuales se muestran en la figura No.3;
- 3.- Datos reales locales de una superficie de la República Mexicana del 17 de julio de 1984, y datos ideales para complementar el hemisferio norte, los cuales se muestran en la figura No.6.

Con estos datos se hizo un pronóstico para 24 horas, y se obtuvieron los siguientes resultados:

- 1.- Para la superficie hemisférica idealizada se obtuvo la superficie que se muestra en la figura No.2; y comparándose esta con la figura No.1, se puede observar que la superficie se mueve hacia el este;
- 2.- Para la superficie real del 4 de diciembre de 1950, el pronóstico obtenido se muestra en la figura No.4; y comparando ésta con la de la figura No.5, que es la superficie observada el 5 de diciembre de 1950, se puede ver que el movimiento general de la superficie pronosticada de los  $20^\circ$  a los  $90^\circ$  de latitud norte es muy parecido al movimiento de la superficie observada el 5 de diciembre de 1950, en ese mismo intervalo de latitudes.

3.- Para los datos locales de la República Mexicana, el pronostico obtenido despues de 24 horas, se muestra en la figura No.7, comparando estos datos con los de la figura No. 8, los cuales pertenecen a la superficie observada el 18 de julio de 1984, se ve que el movimiento global de la superficie pronosticada se aproxima bastante a la observada.

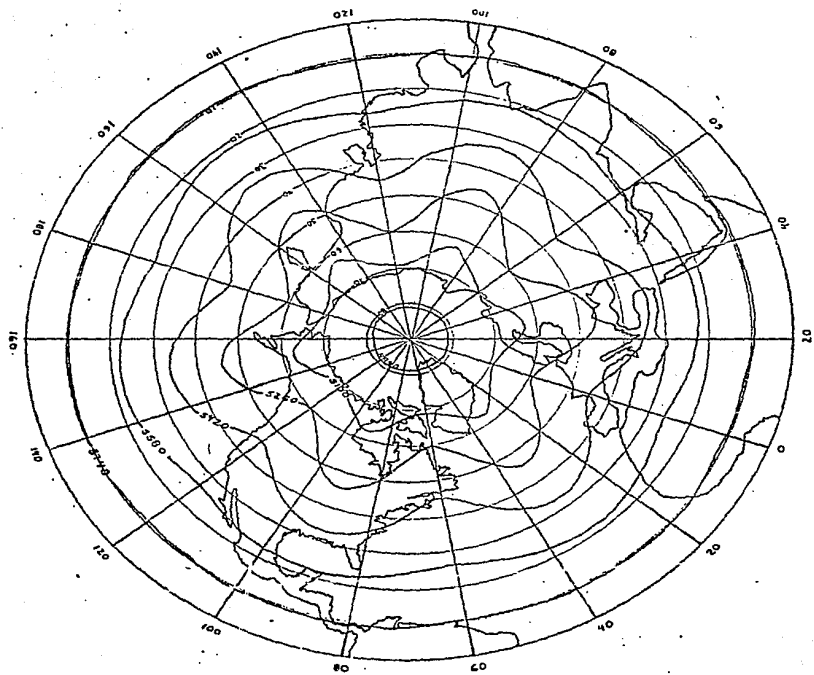


Figura No. 1. Condición inicial idealizada.

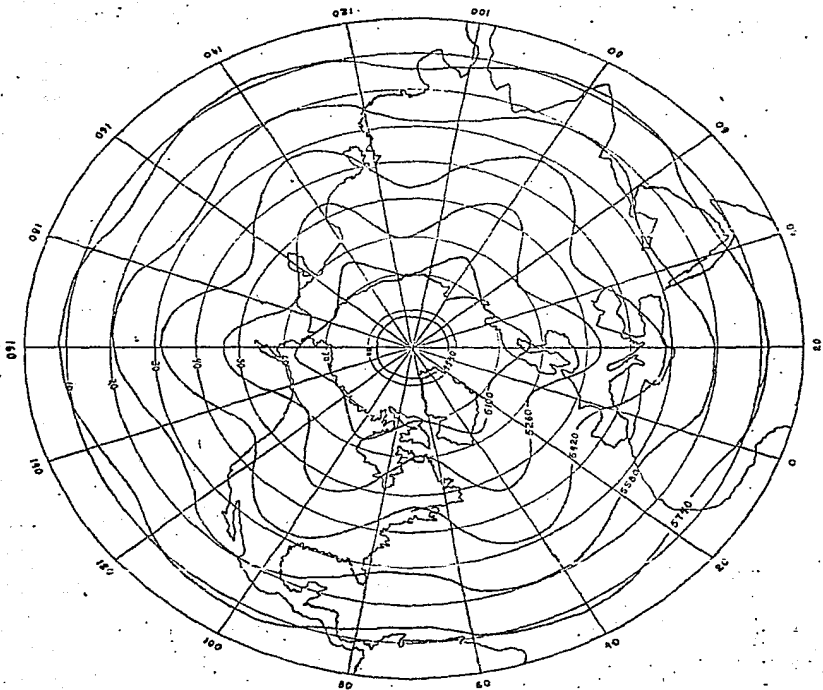


Figura No. 2. Pronóstico después de 24 horas de la superficie idealizada.

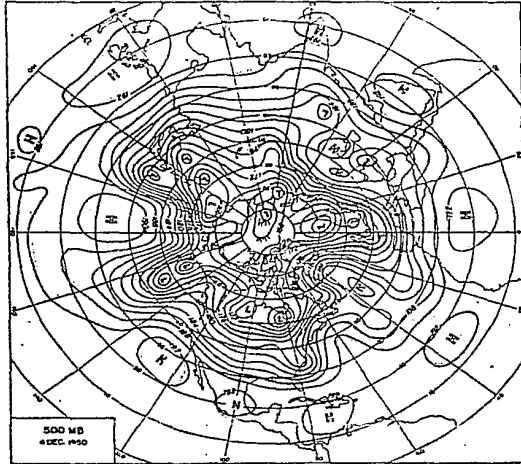


Figura No.3. Datos observados el 4 de diciembre de 1950

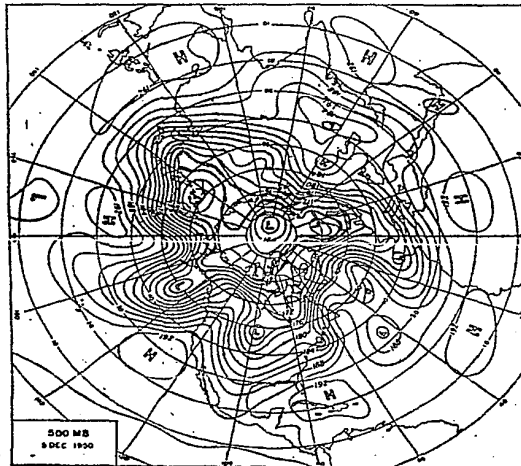


Figura No.5. Datos observados el 5 de diciembre de 1950

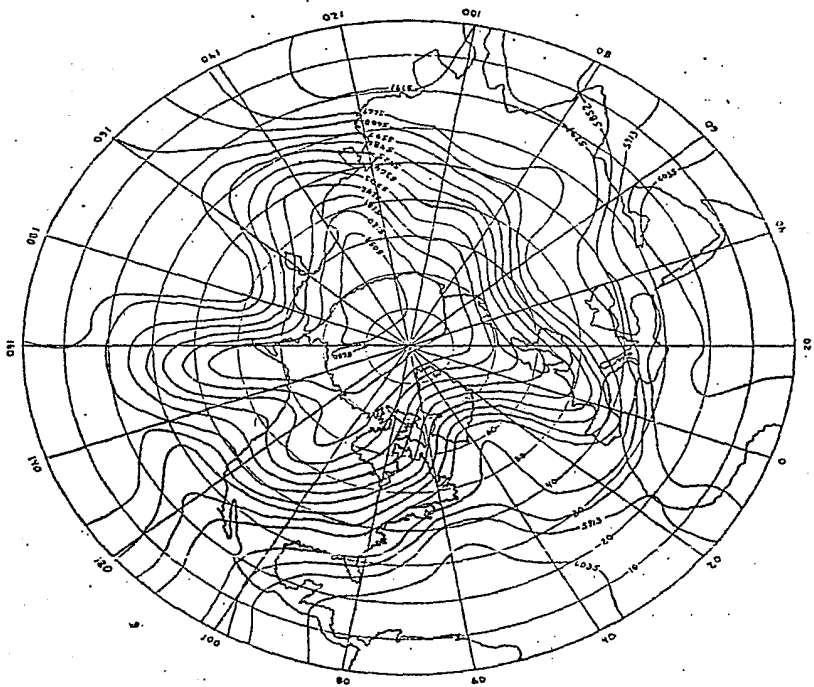


Figura No. 4. Pronóstico para el 5 de diciembre de 1950



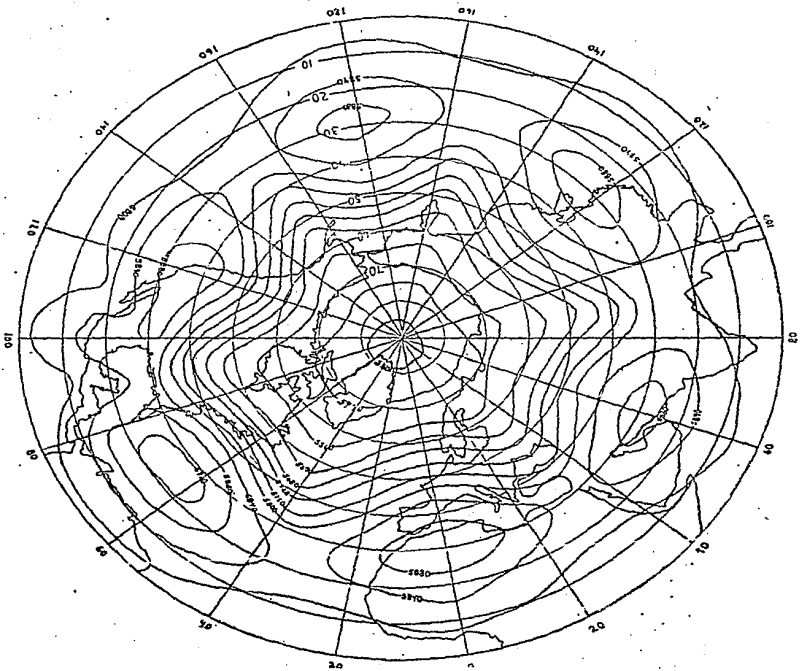


Figura No. 6. Condición inicial con datos reales para la República Mexicana, del 17 de julio de 1984.

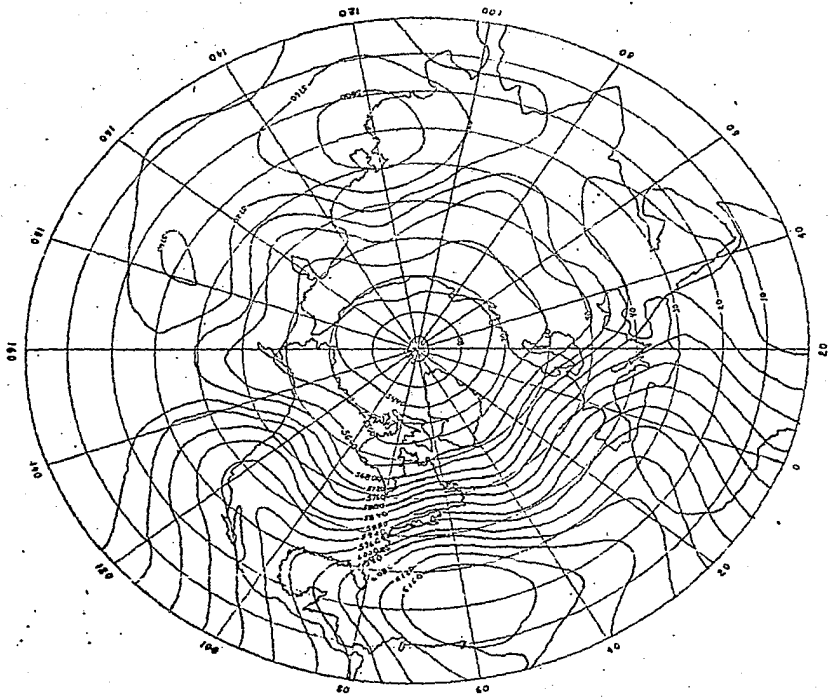


Figura No. 7. Pronóstico para el 18 de julio de 1984, para la República Mexicana.

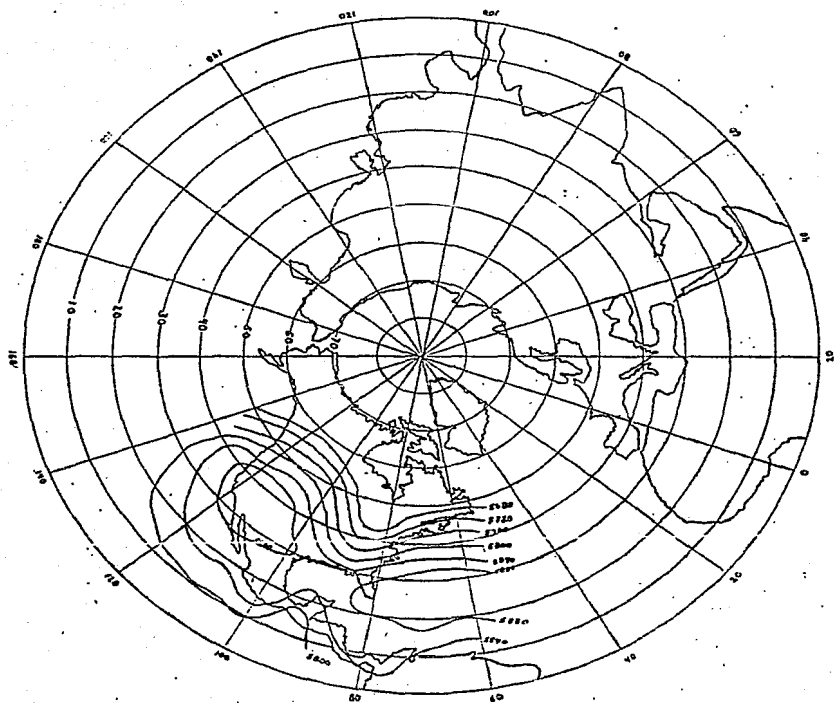


Figura No. 8. Datos observados para 1a República Mexicana el 18 de julio de 1984.

## CONCLUSIONES

Al resolver la ecuación de vorticidad en términos de series de armónicos esféricos de superficie se obtienen las siguientes conclusiones:

- La superficie hemisférica real pronosticada es muy parecida a la superficie observada en el intervalo de latitudes de  $20^{\circ}$  a  $80^{\circ}$ .
- Se observa que la superficie idealizada después de 24 horas, se desplaza hacia el oeste en latitudes bajas.
- El método se probó con incrementos de tiempo de 3 horas a partir de datos ideales y reales, observándose gran estabilidad del proceso, pues se obtuvieron resultados análogos después de 24 horas.
- El pronóstico al utilizar datos reales seguramente fué alterado por la carencia de datos en el hemisferio sur, ya que al usar el método de armónicos esféricos se debe contar con todos los datos del globo terrestre para poder pronosticar una región limitada de la tierra.

## APENDICE

## FUNDAMENTACION MATEMATICA

En esta sección se mencionarán las principales herramientas matemáticas sobre las que se ha basado este trabajo:

### Condiciones para expandir una función en series de armónicos esféricos de superficie:

Se tiene que, sujeta a las siguientes restricciones, una función  $F(\phi, \lambda)$  definida sobre la superficie de una esfera es representable en términos de series de armónicos esféricos de superficie, es decir:

la serie:

$$F(\phi, \lambda) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l P_l(\sin\phi) + \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=1}^l (A_l^{(m)} \cos m\lambda + B_l^{(m)} \sin m\lambda) P_l^{(m)}(\sin\phi) \quad (200)$$

donde:

$$A_l = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} F(\phi, \lambda) P_l(\sin\phi) \cos\phi d\phi d\lambda \quad (201)$$

$$A = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} F(\phi, \lambda) \cos m\lambda P_l^{(m)}(\sin\phi) \cos\phi d\phi d\lambda \quad (202)$$

$$B = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} F(\phi, \lambda) \sin m\lambda P_l^{(m)}(\sin\phi) \cos\phi d\phi d\lambda \quad (203)$$

en la cual  $F(\phi, \lambda)$  tiene una integral absolutamente convergente

sobre la superficie esférica, convergerá en  $(\phi, \lambda)$  al valor  $F(\phi, \lambda)$ , si  $(\phi, \lambda)$  es un punto de continuidad de la función con respecto a  $(\phi, \lambda)$ , ó, al valor  $1/2\{f_1(\phi, \lambda) + f_2(\phi, \lambda)\}$ , si el punto es tal que ahí pase a través de él una línea de discontinuidad tal que  $f_1(\phi, \lambda)$ ,  $f_2(\phi, \lambda)$  son los límites de la función en el punto tomándolo de los 2 lados de la línea, y si la función  $\phi(\gamma)$ , la cual es el valor medio de la función  $f(\phi, \lambda)$ , para cada valor fijo de  $\gamma$  sobre el círculo para el cual  $\gamma$  tiene ese valor, tiene variación acotada en todo el intervalo  $[0, \pi]$  de  $\gamma$ . Por lo tanto, se puede mostrar que cualquier función de cuadrado integrable de  $\lambda$  y  $\phi$  puede ser expandida en series de armónicos esféricos de superficie [VII]:

#### Relaciones de Recurrencia

Las Funciones Asociadas de Legendre satisfacen las siguientes relaciones de recurrencia [III]:

$$\frac{\partial P_{\ell}^m(\sin\phi)}{\partial\phi} = P_{\ell}^{m+1}(\sin\phi) - m \frac{\sin\phi}{\cos\phi} P_{\ell}^m(\sin\phi) \quad (204)$$

$$\frac{\partial P_{\ell}^m(\sin\phi)}{\partial\phi} = (m+1) \frac{\sin\phi}{\cos\phi} P_{\ell}^{m+1}(\sin\phi) - (1+m+1)(1-m)P_{\ell}^m(\sin\phi) \quad (205)$$

$$\frac{\partial P_{\ell}^m(\sin\phi)}{\partial\phi} = \operatorname{tg}\phi(1+1)P_{\ell}^m(\sin\phi) - \frac{1}{\cos\phi} (1-m+1)P_{\ell+1}^m(\sin\phi) \quad (206)$$

$$\sin\phi P_{\ell}^m = \frac{1}{2l+1} \left\{ (1+m)P_{\ell-1}^m + (1-m+1)P_{\ell+1}^m \right\} \quad (207)$$

### Ortonormalización y Relación de Cerradura

Por su construcción los armónicos esféricos constituyen un conjunto de funciones normalizadas, los cuales también son ortogonales; las relaciones de ortonormalización de los armónicos esféricos de superficie son [VII]:

$$\int_0^{2\pi} d\lambda \int_{-\pi/2}^{\pi/2} Y_{\ell}^{m(\mu)}(\phi, \lambda) Y_{\ell'}^{m'(\mu)}(\phi, \lambda) \cos\phi d\phi = \delta_{\ell\ell'} \delta_{m\mu} \quad (208)$$

$$\int_0^{2\pi} d\lambda \int_{-\pi/2}^{\pi/2} Y_{\ell}^{m(\mu)}(\phi, \lambda) Y_{\ell'}^{m'(\mu')}(\phi, \lambda) \cos\phi d\phi = \delta_{\ell\ell'} \delta_{m\mu} \quad (209)$$

$$\int_0^{2\pi} d\lambda \int_{-\pi/2}^{\pi/2} Y_{\ell}^{m(\mu)}(\phi, \lambda) Y_{\ell'}^{m'(\mu')}(\phi, \lambda) \cos\phi d\phi = 0 \quad (210)$$

donde:

$$\delta_{m\mu} = \begin{cases} 0 & m \neq \mu \\ 1 & m = \mu \end{cases}$$

el conjunto de armónicos esféricos de superficie, por lo tanto, constituye una base ortonormal del espacio de funciones de cuadrado integrables de  $\phi$  y  $\lambda$ , lo cual se expresa por la relación de cerradura [VII]:

$$\sum_{\ell} \sum_{m} Y_{\ell}^m(\phi, \lambda) Y_{\ell}^{m*}(\phi, \lambda) = \delta(\sin\phi - \sin\phi) \delta(\lambda - \lambda) \quad (211)$$



### Paridad

Los armónicos esféricos son funciones cuya paridad está bien definida e independiente de  $m$ . Son pares para  $l$  par e impares para  $l$  impar [VII].

La relación de paridad que satisfacen las funciones asociadas de Legendre es [I]:

$$P_l^m(-\sin\phi) = (-1)^{l+m} P_l^m(\sin\phi) \quad (212)$$

### Relación entre los Armónicos Esféricos y las Funciones Asociadas de Legendre

La dependencia de los armónicos esféricos reside en funciones conocidas como funciones de Legendre y funciones asociadas de Legendre, así que, los armónicos esféricos de superficie son proporcionales a las funciones asociadas de Legendre, es decir [III]:

$$Y_l^{m(t)}(\phi, \lambda) = \sqrt{\frac{2l+1}{2\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\sin\phi) \begin{pmatrix} \cos m\lambda \\ \sin m\lambda \end{pmatrix}; \text{ si } m \geq 0 \quad (213)$$

donde  $P_l^m$  son las funciones asociadas de Legendre definidas por:

$$P_l^m(\sin\phi) = \sqrt{(1-\sin^2\phi)^m} \frac{d^m}{d(\sin\phi)^m} P_l(\sin\phi) \quad (214)$$

y el conjunto de  $P_l^m$  para  $m$  fija constituye un sistema ortogonal de funciones:

$$\int_0^\pi \cos\phi d\phi P_l^m(\sin\phi) P_l^m(\sin\phi) = \frac{2}{2l+1} \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \delta_{ll'} \quad (215)$$

con las cuales se pueden expandir funciones de  $\phi$  solamente.  
 y para  $m$  negativa se tiene:

$$Y_{\ell}^{m(\pm)}(\phi, \lambda) = \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi} \frac{(\ell+m)!}{(\ell-m)!}} P_{\ell}^{-m}(\sin\phi) \begin{pmatrix} \cos m\lambda \\ \sin m\lambda \end{pmatrix}; \text{ si } m < 0 \quad (214)$$

## BIBLIOGRAFIA

## BIBLIOGRAFIA

- I G.Arffen, Mathematical methods for physicists.  
(Academic-Press, 1970).
- II R.L.Burden & J.D.Fairs, Analisis Numerico.  
(Grupo Editorial Iberoamerica, 1985).
- III E.Butkov, Mathematical physics.  
(Addison-Wesley P. Co., 1968).
- IV W.Haltiner, Numerical prediction and dynamic meteorology.  
(John Wiley & sons, 1980).
- V W.Haltiner, Numerical weather prediction.  
(John Wiley & sons, 1971).
- VI W.Hauser, Introduction to the principles of mechanics.  
(Addison-Wesley P. Co., 1966).
- VII E.W.Hobson, The theory of spherical and ellipsoidal harmonics.  
(Chelsea Publishing Co. N.Y., 1965).
- VIII J.R.Holton, An introduction to dynamic meteorology.  
(Academic Press, 1972).
- IX A. Sommerfeld, Mechanics of deformable bodies.  
(Academic Press, 1950).
- X P Thompson, Numerical weather analysis and prediction.  
(Mac Millan Co. N.Y., 1961).
- XI W.Burke & B.McAvoney & K.Puri & R.Thurling, Methods in computational physics.  
(Academic Press.17,267, (1977) ).

- XII S.A.Orzag, Transform method for the calculation of vector-coupled sums. Application to the spectral form of the vorticity equation.  
(J. atmospheric sciences. 27, 890, (1970) ).
- XIII S.Kubota & M.Hirose & Y.Kikuchi & Y.Kurihara, Barotropic Forecasting with the use of surface spherical harmonics representations.  
( Meteorological Research Institute,Tokio. Nos.3-4, XII, 199, (1961) ).
- XIV I.Silberman, Planetary waves in the atmosphere.  
(J. Meteorology. 11, 27, (1954) ).