Dij-
21

# UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

## FACULTAD DE CIENCIAS

# ESPINORES EN ESPACIOS EUCLIDEANOS, SEUDO-EUCLIDEANOS Y SU RELACION CON LA TEORIA DE TWISTORES PARA $E_{4,2}$

# T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

F I S I C O

P R E S E N T A :


RUBEN DIAZ AVALOS


MEXICO, D. F. 1986

# R E S U M E N .

En el presente trabajo es llevada a cabo una generalización del formalismo espinorial a espacios de dimensión arbitraria pero finita,en la cual no importa el hecho de que los espacios sean Euclideanos o Seudo-euclideanos.Para esto,son tomadas las propiedades del álgebra de Clifford,y aprovechando las propiedades de ésta última,se lleva a cabo una complexificación de los espacio vectoriales en una forma igual a la hecha en la tétrada de Newman-Penrose,a fin de poder trabajar a los espinores como elementos de un álgebra exterior.Una vez hecho esto,se define un producto escalar de espinores,y se estudian las propiedades básicas de éste producto.Finalmente,se aplica el formalismo espinorial desarrollado a algunos casos particulares de espacios,como al espacio Euclideano de cuatro dimensiones,donde se muestra que el grupo de invariancia de estos espinores es el grupo Simpléctico de cuatro dimensiones.Para el espacio de seis dimensiones con signatura (++++--) se obtiene el concepto algebráico de los twistores,y finalmente,se realiza la obtención de la transformación correspondiente a un "empujón" con la velocidad en la dirección paralela al eje x de un espinor asociado al espacio de Minkowski,viéndose que ésta coincide con la conocida en la literatura.

Quisiera expresar mi mas profundo agradecimiento al Dr. Marcos Rosenbaum P. por la invaluable ayuda que me brindó,asi como por su infinita paciencia para las correcciones al presente trabajo. También deseo expresar mi agradecimiento a mis compañeros Guillermo Castilla y Alicia Sánchez por su inestimable ayuda.

C O N T E N I D O .

# I N T R O D U C C I O N .

Los espinores surgieron por primera vez en el año de 1913 en un trabajo puramente matemático debido a E. Cartan que trata sobre representaciones lineales de grupos simples,y no fué sino hasta 1928 cuando éstos surgieron en la Física al llevar a cabo una realización de la ecuación de onda relativista del elctrón, que no presentara las propiedades indeseadas de la ya existente ecuación de Klein-Gordon[1,2],haciendo mas natural la introducción del concepto de espín del electrón,el cual era hasta entonces - un pegoste de la teoría de Schrodinger,y el cual no salía a la luz en el tratamiento usual del Espacio-tiempo mediante los -- tensores usuales.A partir de entonces y con el fin de llevar a cabo una cuantización de las teorías de campo,se ha hecho necesario llevar a cabo representaciones espinoriales de los campos, haciendose mas natural la introducción de conceptos puramente cuánticos en éstos.Sin embargo,la desventaja que presentan las representaciones espinoriales de los campos frente a las tensoriales,es que resulta bastante mas complicado introducir los - conceptos de Geometría Diferencial en el contexto de la Teoría de Espinores[3].

La idea de espinores en n dimensiones fué desarrollada - extensivamente por el mismo Cartan[4],y posteriormente otros autores como Brauer y Weyl[5] también la trabajaron y obtuvieron - algunos resultados importantes,como lo es el hecho de que las matrices de Dirac puedan ser escritas en forma de productos -- tensoriales de las matrices de Pauli.Mostraremos en este tra-- bajo que es posible reformular la Teoría de Espinores en el - lenguaje de las Matemáticas modernas,que facilitan su mayor --

comprensión.

Este formalismo también nos ha hecho posible explicitar la relación entre espinores en ciertos espacios Seudo-euclideanos, asi como extender conceptos originalmente aparecidos en espacios Euclideanos y en el espacio de Minkowski. Veremos que para el espacio $\mathcal{E}_{4,2}$ se tiene de una manera natural el concepto de twistores, que constituyen una generalización de los espinores en el sentido de que forman el espacio de representación del grupo Conforme, en tanto que los espinores constituyen el espacio de representación del grupo de Lorentz[6]. Parte de este trabajo es la obtención Parte de este trabajo es la obtención de los generadores del grupo Conforme a partir de nuestro formalismo espinorial, obteniendo primero los generadores infinitesimales del grupo SU(2,2) y apelando luego al homomorfismo existente entre SU(2,2) y el grupo Conforme[7,8] C(3,1).

La teoría de twistores ha encontrado aplicaciones importantes en la Física Moderna, tales como programas para formulaciones alternas de la Mecánica Cuántica y Teorías de Campo que incluyen Gravitación[9,10].

La generalización de los espinores a n dimensiones se llevará a cabo tomando como base al álgebra de Clifford, que posee todas las propiedades que deseamos posean los espinores. Notando primero que para espacios vectoriales en los que el producto escalar de dos vectores es nulo, el álgebra exterior satisface ser un álgebra de Clifford, se procede a llevar a cabo una complexificación del espacio vectorial en cuestión a fin de lograr un nuevo espacio vectorial definido ahora sobre el campo de los números complejos, de modo que tomando la misma forma del producto escalar que se tenía en el espacio definido sobre el campo real, se tenga un producto escalar nulo para cualesquiera dos vectores.La complexificacion de los espacios vectoriales se describe ampliamente en las secciones 1.1 (Espacios Euclideanos) y 1.2 ( Espacios Seudo-euclideanos) del capítulo 1, destacándose el hecho de para los fines de la teoría de espinores no va a tener importancia fundamental la diferencia existente entre espacios Euclideanos y Seudo-euclideanos.Posteriormente, se hace una discusión acerca de grupos ortogonales,en virtud de que los espinores constituyen una representación de éstos[11] ,y - se destaca el resultado de que toda transformación ortogonal es a lo más,el producto de n+1 reflexiones.

En el segundo capítulo ,se introduce un operador $X(\underline{z})$ que actúa sobre los espinores,el cual es un mapeo de Clifford,y se ve que dicho operador es un operador de reflexión en el caso de que $\underline{z}$ sea un vector unitario.Después se comienza a trabajar sobre propiedades de los espinores,construyendo un producto escalar y definiendo para ello un operador de dualidad y la transposición de espinores.Seguidamente,se hace mención de los espinores puros,viéndos que éstos forman un grupo de invariancia - ante rotaciones y reflexiones,finalizando el capítulo con la - conjugación de espinores,la cual nos dará la pauta para la obtención del formalismo twistorial,que será obtenido en el capítulo 3.

Por último,en el capítulo 3 se comenzará por trabajar los espinores en el espacio Euclideano de cuatro dimensiones,viendo que en este espacio se puede descomponer un espinor en la suma - directa de dos semiespinores,y que los subespacios a que corresponden estos semiespinores son isomorfos.Esto nos permite concentrar nuestra atención en uno de los semiespinores únicamente.En - los subespacios generados por semiespinores aplicaremos la proyección estereográfica,viendo que esta mapea un semiespinor a -

un vector nulo.Luego de esto,mediante una serie de argumentaciones algebráicas,se muestra que el producto escalar de espinores asociados al espacio complexificado de cuatro dimensiones,tiene por grupo de isometrías al grupo simpléctico de cuatro dimensiones Sp(4).

También se muestra que es posible construír todos los elementos del álgebra de Clifford a partir de los generadores del grupo simpléctico.Después de esto,se define lo que se conoce en la literatura como el grupo Spin(4,C),viéndose que es posible expresar a los generadores infinitesimales de este grupo en términos de los generadores del grupo simpléctico,por lo que concluímos que el mapeo de Clifford $X(\underline{z})$ no abarca a todo el espacio de espinores,o bien,en otras palabras,que no es posible mediante la sola acción de las reflexiones generar a todo el grupo de isometrías para el producto escalar de espinores asociados con el espacio $\mathcal{E}_{4}$.

Finalmente,procederemos a obtener la relación existente entre los espinores asociados al espacio $\mathcal{E}_{4,2}$ y los twistores,para lo cual será necesario introducir un nuevo tipo de producto escalar de espinores,del cual investigaremos las propiedades,viéndo que este nuevo producto es invariante bajo transformaciones del grupo SU(2,2),y de esta manera tendremos el formalismo twistorial.

Para concluír el trabajo,se obtiene la expresión de la matriz correspondiente a un "empujón" en la dirección del eje x de un espinor,viendo que es la misma expresión obtenida mediante procedimientos mas complicados en la literatura[12].

# CAPITULO PRIMERO.

# PRELIMINARES

## §1.1 ESPACIOS EUCLIDEANOS.

Uno de los conceptos mas importantes en nuestro estudio de los temas comcernientes al álgebra lineal, es el de producto interno. Si -- nuestro espacio vectorial V está definido sobre el campo de los números reales, se acostumbra definir al producto interno como en la siguiente:

Definición I. Un producto interno en un espacio vectorial V definido* sobre el campo real es una función bilineal $\omega \in \mathbb{R}^{V\times V}$, que cumple con las siguientes propiedades:

a) Simetría: para $(x,y)\in V\times V, (y,x)\in V\times V$ se tiene $\omega(x,y)=\omega(y,x)$.

b) Positividad: para $(x,x)\in V\times V$ se cumple $\omega(x,x)>0$ si $x\neq 0$.

Un espacio vectorial V en el que se ha definido un producto interno, se denomina Euclideano si es de dimensión finita. Podemos citar varios ejemplos de producto interno, sin embargo, el más importante para nosotros va a ser el producto interno usual, definido como

$$\omega(x,y)=\sum_{i=1}^{n} p_i^V(x)\,p_i^V(y) \tag{1.1}$$

para cualesquiera $x,y\in V$, donde $p_i^V$ denota la función proyectiva i-ésima en el espacio V, es decir, considerando a $x\in V$ como una n-upla $(x^1,\ldots,x^n)$

$$p_i^V(x)=x^i \quad \text{con } i=1,\ldots,n.$$

La justificación de que usemos este producto interno en particular, obedece al hecho de que con él, disponemos de interpretaciones geométricas conocidas desde la geometría Euclídea, como lo son las nociones de perpendicularidad, longitud de un segmento, etc., que nos van a ser de gran utilidad en el desarrollo de nuestra teoría.

En lo que respecta a la longitud de un segmento, veremos que ésta

*) Aquí haremos uso de la notación $f\in B^A$ para designar una función que tiene como dominio al conjunto A y como contradominio al conjunto B, es decir $f=\{(a,b)\mid a\in A \text{ y } b\in B\}$, y a b se le designa por f(a), es decir, b es la imagen de a bajo la función f.

tiene una importancia crucial,ya que es el medio de definir varios tipos de transformaciones que actúen sobre elementos de un espacio vectorial dado,diciendo qué es lo que dichas transformaciones van a hacer con la longitud de un segmento.Asi,por ejemplo,los movimientos rígidos son los que dejan invariante el tamaño de un segmento.Este tipo de transformaciones forman un grupo que tiene una importancia fundamental en la Física,conocido como Grupo Ortogonal,el cual veremos brevemente en la sección 1.3.

Una forma de definir el tamaño de un segmento es tomando una nueva función llamada norma,que satisfaga los siguientes requerimientos:Para $a,b\varepsilon V$

1) $\|\ \|(a)>0$ si $a\neq 0$ (positividad)

2) $\|\ \|(\lambda a)=|\lambda|\,\|\ \|(a)$ para toda $\lambda\varepsilon\mathbf{R}$ (homogeneidad).

3) $\|\ \|(a+b)\leq \|\ \|(a)+\|\ \|(b)$ (desigualdad del triángulo).

Como podemos ver,esta función satisface los requerimientos que le pediríamos a la distancia entre el origen y el punto a.Es evidente que tomando la definición (1.1),somos capaces de definir una función norma como

$$\|\ \|(a)=\sqrt{\omega(a,a)} \tag{1.2}$$

Por otro lado,es posible demostrar que para efectos topológicos en un espacio de dimensión finita,todas las normas son equivalentes[10]. De ahí que no haya ningún problema en tomar como producto interno específicamente a (1.1).

En vista de que utilizaremos con mucha frecuencia al cuadrado de la norma (1.2),le otorgamos el nombre de Forma Fundamental,y evidentemente,su expresión será

$$\Phi\equiv\Phi(x)=(x^1)^2+\ldots+(x^n)^2 \tag{1.3}$$

para un punto $x=(x^1,\ldots,x^n)$.

La noción de perpendicularidad se introduce diciendo que dos vectores son perpendiculares si y solo si su producto interno es nulo, y siguiendo el método de ortogonalización de Gramm-Schmidt[13] ,es posible construír a partir de una base $\{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\}$ para el espacio V, una base $\{u_1,\ldots,u_n\}$ que cumple la condición de que los vectores $u_1,\ldots,u_n$ sean perpendiculares entre si,y unitarios.Una base con tales propiedades es llamada base ortonormal.

Definiremos como vector isotrópico a un vector cuya forma fundamental sea nula.Claramente,podemos interpretar esto diciendo que un vector isotrópico es perpendicular a si mismo.Tal y como hemos estado trabajando hasta ahora,únicamente disponemos de un vector isotrópico,que es el vector cero,debido a que la norma que definimos es positiva definida,sin embargo,podemos llevar a cabo la construcción de vectores isotrópicos mediante un procedimiento bastante sencillo, que consiste en realizar una complexificación del espacio vectorial V.Para ello,debemos dividir el problema en dos casos:1)cuando la dimensión del espacio V es impar y 2)cuando la dimensión es par.En el primer caso,vamos a poner que la dimensión del espacio V es $2\nu+1$ y en el segundo caso $2\nu$.En el caso de dimensión par,definimos

$$\begin{aligned} e &= (u_1+iu_2)\div 2,\\ &= (u_3+iu_4)\div 2,\\ &\vdots\\ &= (u_{n-1}+iu_n)\div 2, \end{aligned} \tag{1.4}$$

donde $i=\sqrt{-1}$.Usando entonces el producto interno de que disponemos, es claro que $\omega(e_k,e_j)=0$,ya que $e_k=(u_{2k-1}+iu_{2k})$, $e_j=(u_{2j-1}+iu_{2j})\div 2$, por tanto, $\omega(e_k,e_j)=(u_{2k-1}\cdot u_{2j-1}-u_{2k}\cdot u_{2j})\div 4+i(u_{2k}\cdot u_{2j-1}+u_{2k-1}\cdot u_{2j})\div 4$, pero como $\{u_k\}_{k=1}^{n}$ es una base ortonormal,

$$u_i\cdot u_j\equiv\omega(u_i,u_j)=\delta_{ij},$$

vemos que el término real de $\omega(e_k,e_j)$ es siempre nulo,y para el término imaginario,basta con darse cuenta de que 2k es siempre par,mientras que 2j-1 es siempre impar,por lo que el término imaginario es siempre nulo también.Asi,hemos construído a partir de los vectores base $\{\underline{u}_1,\ldots,\underline{u}_n\}$ a los vectores $\{\underline{e}_1,\ldots\underline{e}_{n/2}\}$ ,los cuales son isotrópicos y perpendiculares entre si.Una consecuencia interesante de la introducción de esta construcción es que vamos a tener ahora la existencia de subespacios isotrópicos de $\mathbb{C}V$,dados por combinaciones lineales de vectores isotrópicos,es decir,si $\{\underline{e}_k\}$ son vectores isotrópicos,el vector

$$\underline{m}=\sum_{k=1}^{i} t^k \underline{e}_k \tag{1.5}$$

también es isotrópico,ya que

$$\omega(m,m)=\sum_{i,k} t^i t^k \omega(\underline{e}_i,\underline{e}_k)=0$$

Además,como el vector cero es isotrópico,es trivial demostrar que los vectores isotrópicos forman un espacio vectorial.Hasta ahora,hemos visto como es posible construír un conjunto de n/2 vectores complejos isotrópicos en el espacio $\mathbb{C}V$ a partir de un espacio real de n dimensiones,y sabemos que ellos generan un espacio vectorial que en este contexto puede ser visto como subespacio de $\mathbb{C}V$.Cabe preguntarse cuál es la máxima dimensión que esperamos pueda tener un subespacio isotrópico. Designaremos el subespacio isotrópico como $\mathcal{N}_\nu$ .Supongamos que dim( $\mathcal{N}_\nu$ )=k,por lo cual deben existir necesariamente k vectores isotrópicos $\{\underline{e}_1,\ldots,\underline{e}_k\}$ tales que son linealmente independientes y generan a $\mathcal{N}_\nu$ .Estamos garantizando asi que $\{\underline{e}_1,\ldots,\underline{e}_k\}$ es una base para $\mathcal{N}_\nu$ ,es decir,un conjunto minimal de generadores[14],por lo tanto,el complemento ortogonal a $\mathcal{N}_\nu$ no puede tener dimensión mayor que n-k,es decir,

$$\dim(\mathcal{N}_\nu^\perp)\leq n-k$$

pero al mismo tiempo,por construcción,los vectores $\underline{e}_1,\ldots,\underline{e}_k$ son ortogonales a si mismos y forman parte de $\mathcal{N}_\nu^\perp$ ,lo cual nos conduce a que el número de vectores linealmente indepentes y distintos a $\underline{e}_i$ en $\mathcal{N}_\nu^\perp$ es a lo mas n-2k,pero la dimensión de todo espacio vectorial es siempre mayor o igual a cero, por lo que se tiene $n-2k\geq 0$. En vista de esto, $k=n/2$, pero como $n$ es par, $n=2\nu$ y podemos concluír que $k\leq\nu$. Asi tenemos que

$$\dim(\mathcal{N}_\nu)\leq\nu, \tag{1.6}$$

lo cual era de esperarse, ya que los generadores de $\mathcal{N}_\nu$ son los vectores $\{\underline{e}_1,\ldots,\underline{e}\}$ que ya construímos anteriormente.

Para el caso que tengamos que la dimensión de V es impar $(\dim(V)=2\nu+1)$, podemos disponer de una base ortonormal $\{u_0,u_1,\ldots,u_2\}$, y al ser una base ortonormal, podemos considerar a V como la suma directa de un espacio de dimensión uno con otro de dimensión $2\nu$, haciéndose asi posible aplicar nuevamente los razonamientos ya descritos para espacios de dimensión par, y claramente, la dimensión de un subespacio isotrópico sigue siendo menor o igual que $\nu$.

Por último, vamos a ver cómo se transforma la forma fundamental al considerar como base de $\mathbb{C}V$ a los vectores isotrópicos $\{\underline{e}_1,\ldots,\underline{e}_\nu\}$ y sus conjugados, que denotaremos como $\underline{e}_k'=(u_{2k}-iu_{2k+1})/2$. Tenemos que

$$\underline{e}_1=(u_1+iu_2)/2 \quad , \quad \underline{e}_1'=(u_1-iu_2)/2$$

implican $\underline{u}_1=\underline{e}_1+\underline{e}_1'$, $\underline{u}_2=i(\underline{e}_1'-\underline{e}_1)$, etc., por lo que

$$\begin{aligned}\underline{x}&=x^0\underline{u}_0+x^1\underline{u}_1+\ldots+x^{2\nu}u_{2\nu}\\ &=x^0\underline{e}_0+x^1(\underline{e}_1+\underline{e}_1')+x^2(i(\underline{e}_1'-\underline{e}_1))+\ldots+x^{2\nu}(i(\underline{e}_\nu'-\underline{e}_\nu))\end{aligned} \tag{1.7}$$

y haciendo el cambio de variable

$$\begin{aligned} y^1&=x^1-ix^2,\\ y^{1\prime}&=x^1+ix^2,\\ &\vdots\\ y^{2\nu\prime}&=x^{2\nu-1}+ix^{2\nu},\end{aligned} \tag{1.8}$$

se tiene

$$\underline{x}=x^0\underline{e}_0+y^1\underline{e}_1+y^{1\prime}\underline{e}_1'+\ldots+y^\nu\underline{e}_\nu+y^{\nu\prime}\underline{e}_\nu'. \tag{1.9}$$

De (1.8) es claro que $y^1y^{1'}=(x^1)^2+(x^2)^2$, por lo cual la forma fundamental queda como

$$(x^0)^2+y^1y^{1'}+\ldots+y^\nu y^{\nu'}. \qquad (1.10)$$

Es fácil ver que la expreión para un vector $\underline{x}$ de $\mathbb{C}V$ en términos de la base isotrópica es

$$\underline{x}=x^0\underline{e}_0+\sum_{k=1}^{\nu} y^k\underline{e}_k+\sum_{k=1}^{\nu} y^{k'}\underline{e}_{k}', \qquad (1.11)$$

es decir, podemos poner

$$\underline{x}=x^0\underline{e}_0+\underline{r}+\underline{r}', \qquad (1.12)$$

donde $\underline{r}$ es un vector en el subespacio isotrópico $\mathcal{N}_\nu$ y $\underline{r}'$ es otro vector en otro subespacio isotrópico que designaremos por $\mathcal{N}_\nu'$.

Vamos por último a definir la base recíproca de $\mathcal{N}_\nu$ como una base $\{\underline{\epsilon}^1,\ldots,\underline{\epsilon}^\nu\}$ tal que se satisfaga la condición

$$\underline{\epsilon}^i\ \underline{e}_j=\delta^i{}_j. \qquad (1.13)$$

Es claro entonces que un elemento típico de la base recíproca debe tener la forma

$$\underline{\epsilon}^i=(\underline{u}_{2i-1}-i\underline{u}_{2i}), \qquad (1.14)$$

y evidentemente, se puede visualizar a la base recíproca de $\mathcal{N}_\nu$ como una base para $\mathcal{N}_\nu'$.

Ahora, para expresar un vector de $\mathbb{C}V$ en términos de las bases recíprocas, debemos definir un tipo de coordenadas que compensen este cambio, lo cual logramos definiéndolas como

$$x_k=x^k/2,$$

y de esta manera, un vector de $\mathbb{C}V$ queda expresado como

$\underline{z}=x^0\underline{e}_0+x^k\underline{e}_k+x^{k'}\underline{e}_k{}'=x^0\underline{e}_0+x_{k}\underline{\phantom{\epsilon}}^k+x_k{}'\underline{\epsilon}^{k'}$.

## 1.2) ESPACIOS SEUDO-EUCLIDEANOS .

Existe otro tipo de espacios vectoriales que van a ser de una importancia fundamental en el desarrollo de la teoría de espinores,debido a que estos últimos nacieron de la necesidad de brindar una descripción relativista de la Mecánica Cuántica de partículas de espín semientero[15].Como es bien sabido,la relatividad especial se desarrolla en un tipo especial de espacio,conocido como Espacio de Minkowski[16], que es un caso particular de espacio Seudo-euclideano.La diferencia esencial entre losespacios Euclideanos y los Seudo-euclideanos consiste en que para estos últimos,tenemos un cierto número h de términos negativos en la forma fundamental correspondiente a un vector $\underline{x}\in V$,es decir,la forma fundamental ahora se lee

$$\Phi=(x^1)^2+(x^2)^2+\ldots+(x^{n-h})^2-(x^{n-h+1})^2-\ldots-(x^n)^2. \quad (1.15)$$

Estonos va a traer como consecuencia que existen tres tipos de vectores: los que hacen que la forma fundamental sea positiva,negativa o cero.Tales vectores se denominan espaciales,temporales o nulos cuando están en el espacio de Minkowski.Hay también vectores unitarios espaciales (con $\Phi=1$) y temporales (con $\Phi=-1$).

En el caso de los espacios Seudo-euclideanos,podemos poner al producto interno en la forma

$$\omega(\underline{x},\underline{y})=x^1y^1+\ldots+x^{n-h}y^{n-h}-x^{n-h+1}y^{n-h+1}-\ldots-x^ny^n. \quad (1.16)$$

Asi,es posible encontrar una base $\{\underline{u}_1,\ldots,\underline{u}_{n-h},\underline{v}_{n-h+1},\ldots,\underline{v}_n\}$ que sea ortonormal,esto es,

$$\begin{aligned}&\omega(\underline{u}_i,\underline{u}_j)=\delta_{ij} && i,j=1,\ldots,n-h,\\ &\omega(\underline{u}_k,\underline{u}_m)=-\delta_{km} && k,m=n-h+1,\ldots,n, \qquad (1.17)\\ &\omega(\underline{u}_i,\underline{v}_m)=0.\end{aligned}$$

Podemos entonces repetir el proceso de construcción de los subespacios isotrópicos como lo hicimos en el caso de espacios Euclideanos,aunque habrá un pequeño cambio que a continuación notaremos.

Análogamente a lo hecho en la sección anterior,se define

$$\begin{aligned} \underline{e}_1 &= (\underline{u}_1 + i\underline{u}_2)/2 \\ \underline{e}_2 &= (\underline{u}_3 + i\underline{u}_4)/2 \\ &\vdots \\ \underline{e}_{\nu-h} &= (\underline{u}_{n-2h-1} + i\underline{u}_{n-2h})/2 \end{aligned} \tag{1.18}$$

donde n es la dimensión del espacio,que en caso de ser par es igual a $2\nu$, y en caso de ser impar es $2\nu+1$.Cuando la dimensión del espacio es impar,se procede a trabajar la coordenada impar de la misma manera que se hizo en 1.1).

Nos faltan aun por considerar h vectores $\underline{u}$ y los h vectores $\underline{v}$,es decir,nos falta incluir 2h vectores que,a fin de tener h vectores isotrópicos,los combinamos de la manera siguiente:

$$\begin{aligned} \underline{g}_{\nu-h+1} &= (\underline{u}_{n-2h+1} + \underline{v}_{n-h+1})/2 \\ &\vdots \\ \underline{g}_{\nu} &= (\underline{u}_{n-h} + \underline{v}_{n})/2 \end{aligned} \tag{1.19}$$

De las condiciones de ortonormalidad (1.17) se sigue que

$$\begin{aligned} \omega(\underline{e}_i, \underline{e}_j) &= 0 \qquad i,j=1,\ldots,\ -h \\ \omega(\underline{g}_k, \underline{g}_l) &= 0 \qquad k,l=\ -h+1,\ldots,\ , \\ \omega(\underline{e}_i, \underline{g}_k) &= 0. \end{aligned} \tag{1.20}$$

es decir,los vectores $\{\underline{e}_1,\ldots,\underline{e}_{\nu-h},\underline{g}_{\nu-h+1},\ldots,\underline{g}_{\nu}\}$ son isotrópicos y perpendiculares entre si.Definiendo ahora un tipo especial de conjugación para los vectores $\{\underline{g}_i\}$ como

$$\underline{g}_{\nu-h+1}{}' = (\underline{u}_{n-2h+1} - \underline{v}_{n-h+1})/2 \tag{1.21}$$

se tiene, al igual que en (1.7)

$$\underline{x}=x^0\underline{e}_0+x^1(\underline{e}_1+\underline{e}_1')+\ldots+x^{n-1}(\underline{g}_\nu+\underline{g}_\nu')+x^n(\underline{g}_\nu-\underline{g}_\nu') \qquad (1.22)$$

Nuevamente, reordenando la expresión anterior se tiene

$$\underline{x}=x^0\underline{e}_0+(x^1-ix^2)\underline{e}_1+\ldots+(x^{n-h}+x^n)\underline{g}_\nu',$$

y poniendo

$$y^1=x^1-ix^2\ ,\quad y^{1'}=x^1+ix^2\ ,$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$
$$y\ =x^{2\nu-h}+x^{2\nu}\ ,\quad y\ '=x^{2\nu-h}-x^{2\nu}\ ,$$

la expresión de $\underline{x}\in \mathbb{C}V$ en la nueva base $\{\underline{e}_0,\underline{e}_1,\ldots,\underline{e}_{\nu-h},\underline{g}_{\nu-h+1},\ldots,\underline{g}_\nu\}$ toma la forma

$$\underline{x}=x^0\underline{e}_0+\sum_{k=1}^{\nu-h}(y^k\underline{e}_k+y^{k'}\underline{e}_k')+\sum_{k=\nu-h+1}^{\nu}(y^k\underline{g}_k+y^{k'}\underline{g}_k') \qquad (1.23)$$

donde $y^{k'}=x^{2k-h}-x^{2k}$ para $k=\nu-h,\ldots,\nu$. De esta manera, puesto que $\omega(\underline{e}_i,\underline{e}_j')=\delta_{ij}/2=-\omega(\underline{g}_i,\underline{g}_j')$, la forma fundamental queda dada como

$$\Phi=(x^0)^2+y^1y^{1'}+\ldots+y^\nu y^{\nu'} \qquad (1.24)$$

y unvector $\underline{x}\in\mathbb{C}V$ puede escribirse como

$$\underline{x}=x^0\underline{e}_0+\left[\sum_{k=1}^{\nu-h} y^k\underline{e}_k+\sum_{l=\nu-h+1}^{\nu} y^l\underline{g}_l\right]+\left[\sum_{k=1}^{\nu-h} y^{k'}\underline{e}_k'+\sum_{l=\nu-h+1}^{\nu} y^{l'}\underline{g}_l'\right].$$

Es decir,

$$\underline{x}=x^0\underline{e}_0+\underline{r}+\underline{r}' \qquad (1.25)$$

con $\underline{r}\in\mathcal{N}_\nu$ y $\underline{r}'\in\mathcal{N}_\nu'$, al igual que en los espacios Euclideanos. Hemos hecho asi una transformación muy conveniente de los espacios Euclideanos y Seudo-euclideanos, mediante la generalización de las ideas de la tétrada de Newman-Penrose[18], ya que como podemos ver, ambos tipos de espacios poseen una estructura muy semejante. Esto nos va a brindar la posibilidad de tratar nuestra teoría de espinores sin tener que preocuparnos demasiado por la naturaleza Euclideana o Seudo-euclideana de nuestros espacios, aunque si habrá necesidad de llevar a cabo algunos cambios pequeños en ciertos lugares, como en la conjugación de espinores.

De la misma manera que lo hicimos en la sección anterior, podemos definir a la base recíproca de $\mathcal{N}$ , satisfaciendo las mismas propiedades dadas en (1.13).

## 1.3) GRUPOS DE TRANSFORMACIONES ORTOGONALES .

El grupo de transformaciones ortogonales puede definirse como aquellos automorfismos de $\mathbb{C}V$ tales que preservan el valor de la forma fundamental, esto es, al aplicar una de estas transformaciones a un vector $\underline{x}\in\mathbb{C}V$, su norma no cambia.

Debido a que se trata de transformaciones lineales de $\mathbb{C}V$ en si mismo, se puede asociar a cada transformación ortogonal una matriz de nxn, donde n es la dimensión de $\mathbb{C}V$.

Consideremos una transformación del espacio vectorial mediante la cual cada vector $\underline{x}\in\mathbb{C}V$ es cambiado a un vector $\underline{x}^*$ con coordenadas

$$\underline{x}^{*r}=\sum_{s=1}^{n} R^{rs}x^{s} \qquad (1.26)$$

donde $R^{rs}$ son en general números complejos.

Como las longitudes de los vectores no cambian con la rotación, tampoco debe cambiar el producto interno de dos de ellos, entonces

$$\sum_{r=1}^{n} x^r y^r=\sum_{r=1}^{n} x^{*r} y^{*r}=\sum_{s,t=1}^{n} R^{rs}x^{s}R^{rt}x^{t} \;,$$

y para que esto se cumpla para todos los vectores $\underline{x}$ y $\underline{y}$, debemos tener

$$R^{rs}R^{rt}=\delta^{st} \;. \qquad (1.27)$$

Las $R^{rs}$ pueden ser vistas como los elementos de la matriz R, mientras que podemos definir a la matriz transpuesta $\tilde{R}$, con elementos $(R^{rs})^{\sim}=R^{sr}$. La condición (1.27) puede ponerse entonces como

$$\tilde{R}R=\mathbb{1} \qquad (1.28)$$

Una matriz con estas características se llama matriz ortogonal.

De (1.28) tenemos que

$$\det(\tilde{R}R)=\det(\tilde{R})\det(R)=1 \qquad (1.29)$$

ya que det $\mathbf{1}=1$. Como $\det(\tilde{R})=\det(R)$, resulta que

$$(\det(R))^2=1 \Rightarrow \det(R)=\pm 1.$$

Vemos asi que para cualquier transformación ortogonal $\det(R)\neq 0$, lo cual implica que toda transformación ortogonal es invertible. Además, es posible ver que si R y S son dos transformaciones ortogonales, RS también es una transformación ortogonal. Esto implica que las transformaciones ortogonales constituyen un grupo que se denota por $O(n)$ con $n=\dim(V)$. ES claro también por las propiedades de las matrices que el grupo $O(n)$ no tiene por que ser un grupo abeliano y tampoco es conectado puesto que $\det(R)=\pm 1$, lo que provoca que existan transformaciones ($\det(R)=-1$) que no pueden ser construídas a partir de la unidad mediante sucesiones infinitesimales.

De hecho, el grupo $O(n)$ puede ser separado en dos pedazos: las transformaciones con determinante +1 y las de determinante -1. Las primeras constituyen el subgrupo ortogonal propio, y las últimas no forman un grupo, porque dadas dos transformaciones R, S con determinante negativo se tiene

$$\det(RS)=(\det(R))(\det((S))=(-1)^2=1$$

Los elementos R tales que $\det(R)=-1$ constituyen las reflexiones, por ejemplo, si $n=3$, la transformación identidad es

$$I=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y podemos dar una transformación R como

$$R=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

que tiene det R=-1, y constituye una reflexión con respecto al plano y-z.

Vamos a demostrar también que toda transformación ortogonal puede escribirse como el producto de n+1 reflexiones a lo más. Para verlo, tomemos dos vectores $\underline{x}$ y $\underline{y}$ tales que $(\underline{x},\underline{x})=(\underline{y},\underline{y})\neq 0$ y mostraremos primero que existe una reflexión $\rho$ tal que $\rho(\underline{x})=\pm\underline{y}$.

De hecho, como

$$(\underline{x}+\underline{y},\underline{x}+\underline{y})+(\underline{x}-\underline{y},\underline{x}-\underline{y})=2(\underline{x},\underline{x})+2(\underline{y},\underline{y})=4(\underline{x},\underline{x})\neq 0$$

se tiene que $(\underline{x}+\underline{y},\underline{x}+\underline{y})\neq 0$ o bien, $(\underline{x}-\underline{y},\underline{x}-\underline{y})\neq 0$. Supongamos que $(\underline{x}-\underline{y},\underline{x}-\underline{y})\neq 0$. Pongamos ahora $\underline{h}=\underline{x}-\underline{y}$ y consideremos la reflexión

$$\rho(\underline{x})=\underline{x}-2(\underline{h},\underline{x})\underline{h}/(\underline{h},\underline{h})$$

entonces,

$$\rho(\underline{x})=\underline{x}-2(\underline{x}-\underline{y},\underline{x})(\underline{x}-\underline{y})/(\underline{x}-\underline{y},\underline{x}-\underline{y})=\underline{x}-(\underline{x}-\underline{y})=\underline{y}.$$

Asi tenemos que la reflexión de $\underline{x}$ respecto al plano perpendicular a $(\underline{x}-\underline{y})$ es $\underline{y}$.

Ahora probaremos la afirmación por inducción sobre n. Si n=1, tenemos que al aplicar una transformación ortogonal R a $\underline{x}$ lo más que le puede pasar a $\underline{x}$ es un cambio de signo, ya que su magnitu debe permanecer igual, esto es, $R\underline{x}=\pm\underline{x}$, y asi R es el producto de a lo más dos reflexiones. Supongamos ahora que la afirmación vale para un espacio con dimensión n-1, y sea R una transformación ortogonal de V (dimV=n). Seleccionemos un vector $\underline{x}\in V$ tal que $(\underline{x},\underline{x})\neq 0$ y pongamos $\underline{y}=R\underline{x}$. Entonces $(\underline{y},\underline{y})=(\underline{x},\underline{x})$ y por lo anterior, existe una reflexión $\rho$ tal que $\rho(\underline{x})=\pm\underline{y}$. Pongamos ahora $R_1=\rho^{-1}\circ R$, entonces $R_1(\underline{x})=\pm\underline{x}$, y asi $R_1$ opera únicamente cambiando la componente paralela a $\underline{x}$ de un vector y dejando invariante la perpendicular, que por estar en un espacio de n-1 dimensiones puede escribirse como el producto de n reflexiones. De esta manera encontramos que

$$R=\rho\circ R_1$$

es a lo más el producto de n+1 reflexiones,como queríamos mostrar.

Esta afirmación es válida aun en el caso de que el producto interno en V no sea positivo definido,como en el caso de espacios Seudo-euclideanos.

En un espacio Seudo-euclideano,en particular en el de Minkowski,se tiene que mediante una transformación ortogonal,se transforma un vector espacial en otro vector espacial,un temporal en otro temporal y un isotrópico en otro isotrópico.La forma fundamental en este caso es

$$\Phi=x^2+y^2+z^2-c^2t^2=(x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2+(x^0)^2, \qquad (1.29)$$

en donde

$$x^1=x \ , \ x^2=y \ , \ x^3=z \ \text{y} \ x^0=ict \ .$$

Si deseamos operar con el grupo ortogonal sobre el espacio de Minkowski,tenemos que restringir los coeficientes $R^{rs}$ de la siguiente manera:

$$\begin{array}{ll} R^{rs} & (r,s=1,2,3) \text{ real} \\ R^{r0} \text{ y } R^{0r} & (r=1,2,3) \text{ imaginario} \\ R^{00} & \text{real.} \end{array} \qquad (1.30)$$

El grupo de transformaciones ortogonales cuadri-dimensionales restringidas mediante la condición (1.30) es conocido como grupo de Lorentz y se denota por L.Un elemento de L es llamado transformación de Lorentz.

De los requerimientos pedidos y de la condición de ortogonalidad se tiene

$$R^{\ 0}R^{\ 0}=R^{r0}R^{r0}+R^{00}R^{00}=1,$$

pero como $R^{r0}$ es imaginario puro,$R^{r0}R^{r0}=-|R^{r0}|^2$ y entonces

$$(R^{00})^2=1+|R^{r0}|^2 \geq 1$$

por lo que tenemos

$$R^{00}=+1 \quad \text{o} \quad R^{00}=-1. \tag{1.31}$$

Asi, todas las transformaciones de Lorentz caen dentro de uno de los pedazos caracterizados por (1.31), y no existe forma contínua para pasar de uno a otro. El grupo de Lorentz se separa entonces en cuatro partes:

$$\text{I} : L_{+}^{\uparrow}, \text{donde } \det(R)=+1, R^{00}=+1,$$
$$\text{II} : L_{-}^{\uparrow}, \text{donde } \det(R)=-1, R^{00}=+1,$$
$$\text{III} : L_{-}^{\downarrow}, \text{donde } \det(R)=+1, R^{00}=-1,$$
$$\text{IV} : L_{+}^{\downarrow}, \text{donde } \det(R)=-1, R^{00}=-1.$$

Las transformaciones del primer pedazo son llamadas transformaciones de Lorentz propias ortócronas[17] (que preservan la dirección del tiempo). A ellas pertenecen las transformaciones que pueden obtenerse mediante exponenciación de transformaciones infinitesimales en la vecindad de la identidad y constituyen la componente conexa del grupo de Lorentz. Estas forman un subgrupo de L.

Un elemento típico de $L_{-}^{\uparrow}$ es una reflexión espacial. Todos los elementos de este conjunto pueden ser formados mediante la combinación de una reflexión con un elemento de $L_{+}^{\uparrow}$. Sin embargo, como la identidad no está en $L_{-}^{\uparrow}$, $L_{-}^{\uparrow}$ no forma un grupo. No obstante, juntando los elementos de $L_{-}^{\uparrow}$ y $L_{+}^{\uparrow}$, obtenemos otro subgrupo de L, que recibe el nombre de grupo de Lorentz extendido.

El conjunto III tiene como elemento típico a la reflexión temporal y por lo mismo, tampoco es un subgrupo.

Por último, el cuarto conjunto tiene como elemento típico la reflexión total del espacio de Minkowski. Evidentemente, éste tampoco es un subgrupo.

Asi tenemos que el único subgrupo propio de L es $L_{+}^{\uparrow}$.

## 1.4) ALGEBRA EXTERIOR .

Tomemos nuestro espacio vectorial V sobre el campo K,donde K pueden ser los números reales o los complejos.Se define un tensor contravariante de orden r y covariante de orden s como una función multilineal $\Phi\epsilon(K)^{\underbrace{\hat{V}x\ldots x\hat{V}}_{r}x\underbrace{V\ldots xV}_{s}}$,donde V es el espacio dual $\hat{V}$=Hom(V,K).Hacemos $\mathcal{T}^r_s(V)$ la colección de todos los tensores contravariantes de orden r y covariantes de orden s.Sabemos que como funciones multilineales en $\hat{V}x\ldots x\hat{V}x\ldots xV$,éstos pueden ser multiplicados por elementos del campo K y también pueden ser sumados.De esta manera, $\mathcal{T}^r_s(V)$ forma un espacio vectorial sobre K,cuya dimensión en $n^{r+s}$.Una base para $\mathcal{T}^r_s(V)$ puede obtenerse mediante el uso del producto tensorial que será construído mas adelante.

Vamos a restringirnos ahora a tomar tensores contravariantes de orden r y covariantes de orden cero para mayor simplicidad.Sea $\Phi\epsilon\mathcal{T}^r_0(V)$.Si para cualquier i,j se tiene que

$$\Phi(\underline{v}^1,\ldots,\underline{v}^i,\ldots,\underline{v}^j,\ldots,\underline{v}^r)=\Phi(\underline{v}^1,\ldots,\underline{v}^j,\ldots,\underline{v}^i,\ldots,\underline{v}^r),$$

diremos que $\Phi$ es completamente simétrica.Similarmente,si se tiene

$$\Phi(\underline{v}^1,\ldots,\underline{v}^i,\ldots,\underline{v}^j,\ldots,\underline{v}^r)=-\Phi(\underline{v}^1,\ldots,\underline{v}^j,\ldots,\underline{v}^i,\ldots,\underline{v}^r)$$

para cualquier i,j diremos que $\Phi$ es completamente antisimétrica o alternante.

Si tenemos $\Psi_1,\Psi_2$ dos funciones multilineales simétricas, entonces una combinación lineal $\Psi_1+\Psi_2$ es también simétrica.De esta manera,los tensores simétricos en $\mathcal{T}^r_0(V)$ forman un subespacio,el cual denotaremos por $\Sigma^r(V)$.

Análogamente,si $\Psi_1,\Psi_2\epsilon\mathcal{T}^r_0(V)$ son funciones multilineales alternantes,la combinación lineal de ambas es evidentemente alternante,por lo tanto,éstas forman también un subespacio de $\mathcal{T}_0^r(V)$ al cual denotaremos por $\Lambda^r(V)$.

Los subespacios $\Sigma^r(V)$ y $\Lambda^r(V)$ tienen solamente al tensor nulo en común, por lo tanto, constituyen los términos de una suma directa para $\mathcal{T}_0^r(V)$, es decir,

$$\mathcal{T}_0^r(V) = \Sigma^r(V) \oplus \Lambda^r(V) \quad . \tag{1.32}$$

Supongamos ahora un espacio vectorial V y $\varphi \in \mathcal{T}_0^r(V)$, $\psi \in \mathcal{T}_0^s(V)$ tensores. Su producto se puede ver fácilmente como una entidad lineal en sus r+s variables, por lo cual hacemos la siguiente definición: el producto de $\varphi$ y $\psi$, denotado por $\varphi \otimes \psi$ es un tensor de orden r+s definido mediante[18]

$$\varphi \otimes \psi(\underline{v}^1, \ldots, \underline{v}^{r+s}) = \varphi(\underline{v}^1, \ldots, \underline{v}^r)\psi(\underline{v}^{r+1}, \ldots, \underline{v}^{r+s}) \quad . \tag{1.33}$$

El lado derecho de la igualdad es el producto de los valores de $\varphi$ y $\psi$. El producto define entonces un mapeo

$$\otimes \in \left(\mathcal{T}_0^{rs}\right)^{\mathcal{T}_0^r \times \mathcal{T}_0^s} \qquad \text{donde} \qquad \otimes = \{((\varphi, \psi), \varphi \otimes \psi) \mid \varphi \in \mathcal{T}_0^r(V) \text{ y } \psi \in \mathcal{T}_0^s(V)\}$$

Se puede mostrar fácilmente que el producto asi definido es bilineal y asociativo. También, si $\{\underline{\omega}^1, \ldots, \underline{\omega}^n\}$ es una base de $\hat{V}$ entonces $\{\underline{\omega}^{i_1} \otimes \cdots \otimes \omega^{i_r}\}$ sobre todas las $1 \leq i_1, \ldots, i_r \leq n$ es una base de $\mathcal{T}_0^r(V)$. Para probar esto, notemos que si $\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_n$ es la base de V dual a $\underline{\omega}^1, \ldots, \underline{\omega}^n$, el tensor $\Omega^{i_1, \ldots, i_r}$ definido como

$$\Omega^{j_1, \ldots, j_r} \in \mathcal{T}_0^r(V) \quad , \quad \Omega^{j_1, \ldots, j_r}(\underline{e}_{k_1}, \ldots, \underline{e}_{k_r}) = \begin{cases} +1 \text{ si } j_i = k_i \text{ para } i = 1, \ldots, r \\ 0 \text{ si } j_i \neq k_i \text{ para alguno } i \end{cases}$$

es exactamente igual a $\underline{\omega}^{i_1} \otimes \cdots \otimes \underline{\omega}^{i_r}$. Esto se sigue de las definiciones de la base dual y de la de $\Omega^{j_1, \ldots, j_r}$, que muestra que ambos tienen los mismos valores en cualquier conjunto ordenado de r vectores base, y por lo tanto, son iguales.

Podemos, por consiguiente, escribir cualquier $f \in \mathcal{T}_0^r(V)$ de manera única como

$$f = \sum f_{i_1 \ldots i_r} \underline{\omega}^{i_1} \otimes \ldots \otimes \underline{\omega}^{i_r} \tag{1.34}$$

para componentes $f_{i_1 \ldots i_r} \in K$

Similarmente, cualquier $\Phi \in \mathcal{T}_r^0(V)$ puede escribirse como

$$\Phi = \sum \Phi^{i_1 \cdots i_r} \underline{e}_{i_1} \otimes \cdots \otimes \underline{e}_{i_r} , \qquad (1.35)$$

y en general, un tensor $\Psi \in \mathcal{T}^r_s(V)$ puede escribirse como

$$\Psi = \sum \Psi^{i_1 \cdots i_r}_{j_1 \cdots j_s} \underline{e}_{i_1} \otimes \cdots \otimes \underline{e}_{i_r} \otimes \underline{\omega}^{j_1} \otimes \cdots \otimes \underline{\omega}^{j_s} \qquad (1.36)$$

de manera única con $\Psi^{i_1 \cdots i_r}_{j_1 \cdots j_s} \in K$ .

Para cada $r \geq 0$ hemos definido al subespacio $\Lambda^r(V) \subset \mathcal{T}^r_0(V)$ consistente en los tensores covariantes alternantes de orden r. Definimos $\Lambda^0(V)$ como K. Entonces $\Lambda^0 = \mathcal{T}^0_0(V) = K$ y $\Lambda^1(V) = \mathcal{T}^0_1(V) = \hat{V}$, pero $\Lambda^r(V)$ está contenido propiamente en $\mathcal{T}^r_0(V)$ para $r > 1$. Vemos entonces que la suma directa $\Lambda(V)$ de todos los subespacios $\Lambda^r(V)$ está contenida en $\mathcal{T}(V)$ como un subespacio:

$$\begin{aligned} \Lambda(V) &= \Lambda^0(V) \oplus \cdots \oplus \Lambda^r(V) \oplus \cdots \\ &\subset \mathcal{T}^0_0(V) \oplus \cdots \oplus \mathcal{T}^r_0(V) \oplus \cdots \end{aligned} \qquad (1.37)$$

No obstante que $\Lambda(V)$ es u subespacio de $\mathcal{T}(V)$, no es una subálgebra bajo el producto tensorial. Aún si $\varphi \in \Lambda^r(V)$ y $\psi \in \Lambda^s(V)$, puede mostrarse por ejemplo que $\varphi \otimes \psi$ no necesariamente tiene por que ser un elemento de $\Lambda^{r+s}$. Asi, el producto tensorial de dos tensores alternantes en V no es en general un tensor alternante en V. Sabemos, sin embargo, que podemos llevar cada tensor a ser alternante mediante el uso de una función antisimetrizante $\mathcal{A} \in \left(\mathcal{T}^r_0(V)\right)^{\mathcal{T}^r_0(V)}$ definida por

$$(\mathcal{A}\Phi)(\underline{v}^1, \ldots, \underline{v}^p) = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma} sgn\, \sigma\, \Phi(\underline{v}^{\sigma(1)}, \ldots, \underline{v}^{\sigma(p)}) \qquad (1.38)$$

Este hecho nos permite definir otro tipo de multiplicación para tensores alternantes, que nos va a ser de gran utilidad. Pongamos

$$(\varphi \wedge \psi)(u^1, \ldots, u^{p+s}) = \frac{1}{p!\,s!} \sum_{\sigma} sgn\, \sigma\, \varphi(u^{\sigma(1)}, \ldots, u^{\sigma(p)})\, \psi(u^{\sigma(p+1)}, \ldots, u^{\sigma(p+s)}) \qquad (1.39)$$

que es conocido como producto exterior de tensores alternantes. Es evidente que el producto exterior de un tensor consigo mismo es nulo. Esto nos va a traer como consecuencia que la dimensión del espacio vectorial generado por un vector de la forma $\underline{e}_1 \wedge \cdots \wedge \underline{e}_p$ sea $C^n_p$, donde

$$C^n_p = \frac{n!}{(n-p)!\,p!}.$$

Un elemento de la forma $\underline{e}_1 \wedge \ldots \wedge \underline{e}_p$ recibe el nombre de p-vector[19].

Del hecho de que el producto exterior sea también bilineal y asociativo se desprende que es posible dar a $\Lambda(V)$ la estructura de un álgebra asociativa sobre K;definimos el producto $(\Lambda V)^{\Lambda V \times \Lambda V}$ simplemente mediante la extensión del producto exterior a que sea bilineal de forma que satisfaga la ley distributiva.Esto es posible solamente de una forma: supongamos que $\varphi, \psi \in \Lambda(V)$.Entonces

$$\varphi = \varphi_1 + \ldots + \varphi_k, \text{con } \varphi_i \in \Lambda^i(V)\ ,\ \psi = \psi_1 + \ldots + \psi_l \quad \text{con } \psi_i \in \Lambda^i(V)$$

y definimos

$$\varphi \wedge \psi = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} \varphi_i \wedge \psi_j \tag{1.40}$$

Asi podemos establecer el siguiente

COROLARIO. $\Lambda(V) = \Lambda^0(V) \oplus \ldots \oplus \Lambda^r(V) \oplus \ldots$ con el producto exterior definido como en (1.39) es un álgebra (asociativa) sobre $K = \Lambda^0(V)$.

El álgebra $\Lambda(V)$ es llamada álgebra exterior o álgebra de Grassmann sobre V.A diferencia del álgebra tensorial $\mathcal{T}^r_o(V)$,de la cual ésta es un subespacio (pero no una subálgebra),ésta es de dimensión finita.Para verificarlo,basta con notar que un n+l-vector tiene que ser cero necesariamente,ya que en él se está repitiendo algún término de la base,por lo tanto,como $\underline{x} \wedge \underline{x} = 0$,se tiene que los espacios $\Lambda^r(V)$ para $r > n$ son nulos.De esta manera,en $\Lambda(V)$ vamos a tener únicamente los espacios $\Lambda^r(V)$ con $1 \leq r \leq n$,que nos van a proporcionar un nuevo espacio vectorial de dimensión

$$C^n_0 + C^n_1 + \ldots + C^n_n = 2^n \quad . \tag{1.41}$$

Un espacio de la forma de $\Lambda(V)$ recibe el nombre de espacio graduado,y son de gran importancia para nosotros,ya que es en este tipo de espacios donde definiremos a los espinores,como se verá en el siguiente capítulo.

## 1.5) ALGEBRAS DE CLIFFORD .

Sea A un álgebra asociativa con elemento unidad $e_A$.Un mapeo de Clifford de V a A es un mapeo lineal que satisface

$$F(\underline{x})F(\underline{y})+F(\underline{y})F(\underline{x})=2(\underline{x},\underline{y})e_A \quad , \quad \underline{x},\underline{y}\in V \ . \qquad (1.42)$$

Un álgebra de Clifford sobre V es un álgebra asociativa $C_V$ con elemento unidad $e_A$ ,junto con un mapeo de Clifford $i_V\in(C_V)^{V}$ sujetos a las siguientes condiciones:

$C_1$ : El subespacio $Im(i_V)$genera al álgebra $C_V$.

$C_2$ : Para todo mapeo de Clifford F: $V\longrightarrow A$ existe un homomorfismo $f\in(A)^{C_V}$ ,el cual hace que el diagrama

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "i_V"'] & A \\ C_V \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

sea conmutativo.

Puede mostrarse que existe un álgebra de Clifford para cada espacio en el que se disponga de un producto interno, única hasta un isomorfismo[20].De esta manera vamos a disponer de una forma de manipular nuestros espinores,ya que de la propiedad (1.42) vemos que las matrices de Dirac pueden ser vistas como mapeos de Clifford que actúan sobre el espacio de los espinores.Por otro lado,se puede mostrar que el álgebra de Clifford correspondiente a un espacio producto interno es

$$C_V={}^{\otimes V}/J$$

donde J es un ideal constituído por los elementos de la forma

$$\underline{x}\otimes\underline{x}-(\underline{x},\underline{x})\cdot 1 \quad , \quad \underline{x}\in V \ .$$

De esta manera,se tiene que si por ejemplo $(\underline{X},\underline{X})=0$,J es generada por elementos de la forma $\underline{x}\otimes\underline{x}$ y por lo tanto,se tiene ${}^{\otimes V}/\underline{x}\otimes\underline{x}=C_V$.De esta manera,el álgebra de Clifford puede ser vista como una generalización del álgebra exterior.

Es fácil ver que si $\underline{x}$ y $\underline{y}$ son dos vectores pertenecientes a una base ortonormal, el mapeo de Clifford resulta en

$$F(\underline{x})F(\underline{y})+F(\underline{y})F(\underline{x})=0 \ , \quad \text{si} \quad x\neq y$$
$$F(\underline{x})F(\underline{x})=2 \ , \qquad (1.43)$$

que es justamente el álgebra de las matrices de Dirac[21] por lo que en nuestro contexto, las matrices de Dirac resultarán ser únicamente mapeos de Clifford asociados a vectores de una base ortonormal del espacio de Minkowski.

Lo que nos interesa ahora, es encontrar cuál es la dimensión de un álgebra de Clifford sobre un espacio vectorial V. Para encontrarla, consideremos primero el caso dim(V)=n=1. Fijemos un vector $\underline{a}$ no nulo en V y sea A el espacio vectorial generado por $\underline{e}_a$ y $\underline{a}$. Entonces $\underline{a}e_A=e_A\underline{a}$ implica $e_A\underline{a}=\underline{a}$. De esta manera, A es una subálgebra. Es posible verificar que el mapeo inclusión $V\longrightarrow A$ se extiende a un isomorfismo $C_V \longrightarrow A$, y como dim(A)=2, al ser isomorfos $C_V$ y A se tiene que $\dim(C_V)=2$.

En el caso general, seleccionemos una base ortonormal $\{\underline{e}_1,\ldots,\underline{e}_n\}$ de V y denotemos por $V^i$ el subespacio unidimensional de V generado por $\{\underline{e}_i\}$ (i=1,...,n). Entonces tenemos la descomposición ortogonal

$$V=V^1\oplus\ldots\oplus V^n \ , \qquad (1.44)$$

y como $C_{V\oplus W}=C_V\otimes C_W$, se tiene que

$$\dim(C_V)=2^n \ . \qquad (1.45)$$

Un corolario importante de este resultado es que si $\{\underline{x}_i\}$ para i=1,...,n es cualquier base de V, entonces los $2^n$ vectores

$$e_A,\underline{x}_i,\underline{x}_i\wedge\underline{x}_j\,(i<j),\ldots,\underline{x}_1\wedge\ldots\wedge\underline{x}_n$$

forman una base de $C_V$.

Para verificarlo, basta notar que por la relación

$$x_i x_j+x_j x_i=2(x_i,x_j)e_A \ ,$$

los vectores anteriores generan al espacio $C_V$.Debido a la afirmación anterior,$\dim(C_V)=2^n$,por lo que debemos tener una base de $C_V$.

La importancia de las álgebras de Clifford reside en que estas últimas pueden brindar una representación de los grupos ortogonales,como puede ser visto en la literatura[11].Por la estrecha vinculación que existe entre los espinores y las álgebras de Clifford,vamos a decir que entonces los espinores constituyen una representación de los grupos ortogonales.

# CAPITULO II

# TEORIA DE ESPINORES

## 2.1) D E F I N I C I O N E S.

Como se acaba de ver en el primer capítulo, es posible des-- componer los espacios Euclideanos o Seudoeuclideanos en términos-- de una suma directa de la forma

$$\mathbb{C}\mathcal{E}_n = \mathcal{N}_\nu \oplus \mathcal{N}_\nu' \qquad n = 2\nu$$

ó

$$\mathbb{C}\mathcal{E}_{n+1} = \mathbb{C}\mathcal{E}_0 \oplus \mathcal{N}_\nu \oplus \mathcal{N}_\nu'$$

donde $\nu$ es la máxima dimensión de los subespacios isotrópicos co-- rrespondientes y $\mathcal{E}_0$ es un espacio ortogonal unidimensional que tie- ne que ser incluído para espacios de dimensión impar. Los espacios $\mathcal{N}_\nu$ y $\mathcal{N}_\nu'$ pueden ser considerados como duales entre sí. Debido a que $\mathcal{N}_\nu$ y $\mathcal{N}_\nu'$ están bien caracterizados como espacios vectoriales, pode-- mos construir (como en la sección 1.4) el álgebra exterior de $\mathcal{N}_\nu'$,- y así obtenemos un espacio graduado

$$\Lambda \mathcal{N}_\nu' = \Lambda^{(0)} \mathcal{N}_\nu' \oplus \cdots \oplus \Lambda^{(\nu)} \mathcal{N}_\nu'.$$

Definimos un espinor como ün elemento de $\Lambda \mathcal{N}_\nu'$. Análogamente un espinor dual es un elemento de $\Lambda \mathcal{N}_\nu$ .

En virtud de que el espacio de los espinores es el álgebra-- exterior de un espacio de $\nu$ dimensiones, es claro que un espinor - tendrá justamente $2^\nu$ componentes. Es decir, un espinor tiene la -- forma

$$\xi = \xi_0 + \xi_i \underline{\epsilon}^i + \sum_{<} \xi_{i_1 i_2} \underline{\epsilon}^{i_1} \wedge \underline{\epsilon}^{i_2} + \ldots + \sum_{<} \xi_{i_1 \ldots i_\nu} \underline{\epsilon}^{i_1} \wedge \cdots \wedge \underline{\epsilon}^{i_\nu} \qquad (2.1)$$

en dónde el símbolo "<" de la sumatoria denota que los índices $(i_1, \ldots, i_p)$ están sujetos a la condición $i_1 < i_2 < \ldots < i_p$ y $\underline{\epsilon}^{i_p}$ es un elemen- to de la base recíproca de $\mathcal{N}_\nu$ definida en (1.13).

Si un espinor tiene todas sus componentes nulas excepto $\xi^{(i)} = \sum_{<} \xi_{j_1 \ldots j_i} \underline{\epsilon}^{j_1} \wedge \cdots \wedge \underline{\epsilon}^{j_i}$ se dice que $\xi$ es un espinor homogéneo de orden i.

A un vector $\underline{z} \in \mathbb{C}\mathcal{E}_n$ podemos asociar una transformación espi norial $X(\underline{z})$ definida de la siguiente manera: $X(\underline{z})\xi := 2\xi \wedge \underline{r}' + (S\xi)x^0 + \xi \cdot \underline{r}$ (2.2) donde hemos puesto $\underline{z}$ como en (1.12) y $S\xi = \sum_{\rho=0}^{\nu} S\xi^{(\rho)} = \sum_{\rho=0}^{\nu} (-1)^\rho \xi^{(\rho)}$.

Aplicando dos veces el operador $X(\underline{z})$ al espinor $\xi$ se tiene

$$X(\underline{z})X(\underline{z})\xi = X(\underline{z})[2\xi\wedge\underline{r}'+(S\xi)\chi^0+\xi\cdot\underline{r}] = 2[2\xi\wedge\underline{r}'+(S\xi)\chi^0+\xi\cdot\underline{r}]\wedge\underline{r}' + S[2\xi\wedge\underline{r}'+(S\xi)\chi^0+\xi\cdot\underline{r}]\chi^0 + [2\xi\wedge\underline{r}'+(S\xi)\chi^0+\xi\cdot\underline{r}]\cdot\underline{r}$$

Para reducir esta expresión, primero notemos que como $\underline{r}'=\chi^{k'}\underline{e}_k' = \chi_k'\underline{\epsilon}^k$, el término $\xi\wedge r'$ tiene un índice mas que $\xi$, luego

$$(S\xi)\wedge\underline{r}' = -S(\xi\wedge\underline{r}').$$

Así pues,

$$2(S\xi)\chi^0\wedge\underline{r}' = 2(S\xi)\wedge\chi^0\underline{r}' = -2S(\xi\wedge\underline{r}'\chi^0)$$

De la misma manera

$$(S\xi)\chi^0\cdot\underline{r} = -S(\xi\cdot\underline{r}\,\chi^0)$$

y tomando en cuenta el hecho de que $\underline{r}'\wedge\underline{r}'=\underline{r}\cdot\underline{r}=0$, nos resulta

$$X(\underline{z})X(\underline{z})\xi = 2(\xi\cdot\underline{r})\wedge\underline{r}' + \xi(\chi^0)^2 + 2(\xi\wedge\underline{r}')\cdot\underline{r} \tag{2.3}$$

Por otro lado, el producto $(\xi\wedge\underline{r}')\cdot\underline{r}$ se puede desarrollar como

$$(\xi\wedge\underline{r}')\cdot\underline{r} = (\xi\otimes\underline{r}')\cdot\underline{r} - (\xi\wedge r)\wedge r'$$

y sustituyendo en la expresión (2.3) se tiene

$$X(\underline{z})X(\underline{z})\xi = 2\xi(\underline{r}'\cdot\underline{r}) - 2(\xi\wedge\underline{r}')\cdot\underline{r} + \xi(\chi^0)^2 + 2(\xi\wedge\underline{r}')\cdot\underline{r}$$

$$= 2\xi(\underline{r}'\cdot\underline{r}) + \xi(\chi^0)^2 = [2\underline{r}'\cdot\underline{r} + (\chi^0)^2]\xi$$

Pero como vimos en el primer capítulo,

$$\underline{z}\cdot\underline{z} = (\chi^0)^2 + \chi^1\chi^{1'} + \ldots + \chi^\nu\chi^{\nu'} = (\chi^0)^2 + 2\underline{r}'\cdot\underline{r}$$

por lo cual encontramos que

$$X(\underline{z})X(\underline{z})\xi = (\underline{z}\cdot\underline{z})\xi. \tag{2.4}$$

Es posible visualizar al operador $X(\underline{z})$ para $\underline{z}$ unitario, como un operador de reflexión en el espacio de los espinores. La justificación de este hecho aparece en el apéndice A1. Esto va a tener algunas consecuencias fundamentales, como será visto mas adelante.

Hemos definido hasta aqui un operador $X(\underline{z})$ que actúa en el espacio de los espinores, y además es claro que existe una correspondencia uno a uno entre este operador y el espacio $\mathcal{C}\mathcal{E}_n$. Algunas de las propiedades mas importantes de $X(\underline{z})$ son:

1) X (z) es un operador lineal.

Para verificarlo, tomemos $\underline{a}, \underline{b} \in \mathcal{C}\mathcal{E}_n$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ , entonces

$$\underline{a} = \alpha^0 \underline{e}_0 + \alpha^k \underline{e}_k + \alpha^{k'} \underline{e}_{k}' \quad ; \qquad \underline{b} = b^0 \underline{e}_0 + \beta^k \underline{e}_k + \beta^{k'} \underline{e}_k'$$

por lo cual

$$\begin{aligned} X(a+\lambda b)\xi &= 2\xi\wedge(\alpha^{k'} e_k' + \lambda \beta^{k'} e_k') + (s\xi)(b^0\lambda + a^0) + \xi\cdot(\alpha^k e_k + \lambda b^k e_k) \\ &= 2\xi\wedge\alpha^{k'}\underline{e}_k' + 2\lambda\xi\wedge\beta^{k'}\underline{e}_k' + \lambda(s\xi)b^0 + a^0(s\xi) + \xi\cdot\alpha^k\underline{e}_k + \lambda\xi\cdot b^k\underline{e}_k \\ &= \{2\xi\wedge\alpha^{k'}\underline{e}_k' + (s\xi)a^0 + \xi\cdot\alpha^k\underline{e}_k\} + \lambda\{2\xi\wedge b^{k'}\underline{e}_k' + (s\xi)b^0 + \xi\cdot b^k\underline{e}_k\} \end{aligned}$$

es decir,

$$X(\underline{a}+\lambda\underline{b}) = X(\underline{a}) + \lambda X(\underline{b})$$

2) X(z) es un mapeo de Clifford.[20]

Para comprobar esta segunda propiedad, hacemos uso del hecho que $X(\underline{z})X(\underline{z}) = \underline{z}\cdot\underline{z}$ , de la cual se desprende

$$[X(\underline{z}+\underline{w})X(\underline{z}+\underline{w})]\xi = (z+w)\cdot(z+w)\xi = [z\cdot z + w\cdot w + 2z\cdot w] \tag{2.5}$$

pero por la propiedad 1),

$$[X(\underline{z}+\underline{w})X(\underline{z}+\underline{w})]\xi = [X(\underline{z}) + X(\underline{w})][X(\underline{z}) + X(\underline{w})] = z^2\xi + w^2\xi + [X(\underline{z})X(\underline{w}) + X(\underline{w})X(\underline{z})]\xi$$

e igualando ambas expresiones se obtiene

$$[X(\underline{z})X(\underline{w}) + X(\underline{w})X(\underline{z})] = 2\,\underline{z}\cdot\underline{w} \tag{2.6}$$

## 2.2) PRODUCTO ESCALAR .

Queremos ahora definir un producto escalar de espinores, al cual dotaremos de la propiedad natural que sea simétrico o antisimétrico ante el intercambio de operandos, según sea la paridad de $\nu$. Esto es, ponemos como condición de inicio

$$(\xi|\lambda)=f(\nu)(\lambda|\xi) \quad , \tag{2.7}$$

con $f(\nu)=\pm 1$. En analogía con lo que se hace en geometría para definir la orientabilidad[22] de una variedad, vamos a tomar aqui un escalar como un elemento de volumen, lo que nos conduce a definir el producto escalar como

$$\Lambda(\xi|\lambda):=\sum_{p=0}^{\nu}\beta_p\,\xi^{(p)}\wedge\lambda^{(\nu-p)} \quad , \tag{2.8}$$

donde $\Lambda=\epsilon^1\wedge\cdots\wedge\epsilon^\nu$ es el elemento de volumen en $\mathcal{W}'_\nu$ y $\beta_p$ son coeficientes a determinar. De (2.7) tenemos

$$(\xi|\lambda)\Lambda=\sum_{p=0}^{\nu}\beta_p\,\xi^{(p)}\wedge\lambda^{(\nu-p)}=f(\nu)\sum\beta_p\,\lambda^{(p)}\wedge\xi^{(\nu-p)}=f(\nu)(\lambda|\xi)\Lambda,$$

y nada debe cambiar si hacemos el cambio $p\longleftrightarrow\nu-p$, con lo que

$$(\xi|\lambda)\Lambda=\sum_{p=0}^{\nu}\beta_p\,\xi^{(p)}\wedge\lambda^{(\nu-p)}=f(\nu)\sum_{p=0}^{\nu}\beta_{\nu-p}\,\lambda^{(\nu-p)}\wedge\xi^{(p)} \ .$$

Como los términos en la suma son linealmente independientes para cada p, se debe cumplir que

$$\beta_p\,\xi^{(p)}\wedge\lambda^{(\nu-p)}=f(\nu)\beta_{(\nu-p)}\,\lambda^{(\nu-p)}\wedge\xi^{(p)} .$$

En virtud de que $\lambda^{(\nu-p)}\in\Lambda^{(\nu-p)}(\mathcal{W}'_\nu)$ y $\xi^{(p)}\in\Lambda^{p}(\mathcal{W}'_\nu)$, se tiene que $\beta_{(\nu-p)}(-1)^{p(\nu-p)}=f(\nu)\beta_p$ de lo que se obtiene $\lambda^{(\nu-p)}\wedge\xi^{(p)}=(-1)^{p(\nu-p)}\xi^{(p)}\wedge\lambda^{(\nu-p)}$.

Es decir, tenemos

$$f(\nu)=(-1)^{p(\nu-p)}\frac{\beta_{(\nu-p)}}{\beta_{(p)}}=\pm 1 \ .$$

Es claro que disponemos aun de mucha libertad para satisfacer (2.7). De hecho, podemos escoger arbitrariamente la mitad de las $\beta_p$, y una manera de forzar el cumplimiento de (2.7) es poniendo

$$\begin{aligned}\beta_\nu &= f(\nu)\beta_0\\ \beta_{\nu-1} &= f(\nu)(-1)^{\nu-1}\beta_1\\ &\vdots\end{aligned}$$

Sin embargo, por conveniencia con nuestros desarrollos posteriores y para que nuestro formalismo sea acorde con el de Cartan[4], hacemos la elección $\beta_p=(-1)^{p(p+1)/2}$, la cual conducea

$$f(\nu)=(-1)^{\nu(\nu+1)/2} \ . \tag{2.9}$$

Evidentemente se tiene $f(\nu)=\pm 1$.

A continuación damos una manera alterna de definir el producto escalar de espinores que justifica la selección que acabamos de realizar con los coeficientes $\beta_p$

Universidad Nacional
Autónoma de
México

anteriormente.Para ello,debemos primero definir un operador que va a resultar ser muy importante,por lo que merece ser visto en mayor detalle.

## 2.2a) EL OPERADOR C.

En forma análoga a la estrella de Hodge usada en la teoría de formas diferenciales[19],definiremos un operador que al actuar sobre un p-vector,nos de como resultado un $\nu$-p-vector.Sea

$$C := [X(e_1)-X(e_1')]\cdots[X(e_\nu)-X(e_\nu')], \qquad (2.10)$$

donde X(z) fue introducido en (2.2) Vamos a ver como funciona nuestro operador al aplicarlo primero a un $\nu$-vector $M=\epsilon^1\wedge\cdots\wedge\epsilon^\nu$ .Se tiene

$$M=\epsilon^1\wedge\cdots\wedge\epsilon^\nu=\epsilon_{i_1\cdots i_p j_1\cdots j_{\nu-p}}\,\epsilon^{i_1}\otimes\cdots\otimes\epsilon^{i_p}\otimes\epsilon^{j_1}\otimes\cdots\otimes\epsilon^{j_{\nu-p}},$$

entonces,como $X(e_i)\xi=\xi\cdot e_i$,

$$X(e_{j_1})\cdots X(e_{j_{\nu-p}})M=\epsilon_{i_1\cdots i_p j_1\cdots j_{\nu-p}}\,\epsilon^{i_1}\otimes\cdots\otimes\epsilon^{i_p}.$$

Ahora,la contracción del tensor de Levi-Civita nos da( )

$$\epsilon^{\alpha_1\cdots\alpha_n\mu_1\cdots\mu_m}\,\epsilon_{\beta_1\cdots\beta_n\mu_1\cdots\mu_m}=m!\,\delta^{\alpha_1\cdots\alpha_n}_{\beta_1\cdots\beta_m}, \qquad (2.11)$$

por lo tanto

$$\epsilon^{k_1\cdots k_p j_1\cdots j_{\nu-p}}X(e_{j_1})\cdots X(e_{j_{\nu-p}})M=(\nu-p)!\,\delta^{k_1\cdots k_p}_{i_1\cdots i_p}\,\epsilon^{i_1}\otimes\cdots\otimes\epsilon^{i_p}=(\nu-p)!\,\epsilon^{k_1}\wedge\cdots\wedge\epsilon^{k_p}.$$

Es decir,

$$\epsilon^{k_1}\wedge\cdots\wedge\epsilon^{k_p}=\frac{1}{(\nu-p)!}\,\epsilon^{k_1\cdots k_p j_1\cdots j_{\nu-p}}\,X(e_{j_1})\cdots X(e_{j_{\nu-p}})M.$$

Haciendo uso de este resultado,podemos escribir

$$C\lambda^{(p)}=\sum_i\lambda_{i_1\cdots i_p}C\,\epsilon^{i_1}\wedge\cdots\wedge\epsilon^{i_p}=\sum_i\lambda_{i_1\cdots i_p}[X(e_1)-X(e_1')]\cdots[X(e_\nu)-X(e_\nu')]\epsilon^{i_1}\wedge\cdots\wedge\epsilon^{i_p},$$

en donde

$$C\,\epsilon^{k_1}\wedge\cdots\wedge\epsilon^{k_p}=\frac{1}{(\nu-p)!}\,\epsilon^{k_1\cdots k_p j_1\cdots j_{\nu-p}}[X(e_1)-X(e_1')]\cdots[X(e_\nu)-X(e_\nu')]X(e_{j_1})\cdots X(e_{j_{\nu-p}})M.$$

Observando ahora que $[X(e_i)-X(e_i')]X(e_j)=-X(e_j)[X(e_i)-X(e_i')]$ para $i\neq j$,y también que $[X(e_j)-X(e_j')]X(e_j)=-X(e_j)[X(e_j)-X(e_j')]$, vemos que para conmutar cada $X(e_j)$ con C debemos multiplicar por $(-1)^\nu$ ,y en vista de que hay que llevar a cabo este proceso $(\nu-p)$ veces,se debe multiplicar finalmente por $(-1)^{\nu(\nu-p)}$ .Consecuentemente

$$C\,\epsilon^{k_1}\wedge\cdots\wedge\epsilon^{k_p}=\frac{(-1)^{\nu(\nu-p)}}{(\nu-p)!}\,\epsilon^{k_1\cdots k_p j_1\cdots j_{\nu-p}}X(e_{j_1})\cdots X(e_{j_{\nu-p}})CM \qquad (2.12)$$

Por otro lado, $CM=[X(e_1)-X(e_1')]\cdots[X(e_\nu)-X(e_\nu')]\epsilon^1\wedge\cdots\wedge\epsilon^\nu$ ,pero como $X(e_\nu')\epsilon^1\wedge\cdots\wedge\epsilon^\nu=0$ para $k=1,\ldots,\nu$,solamente se tendrá la contribución de $X(e_k)$ .Ahora bien,notando que $\epsilon^1\wedge\cdots\wedge\epsilon^\nu=\epsilon_{i_1\cdots i_\nu}\epsilon^{i_1}\otimes\cdots\otimes\epsilon^{i_\nu}$,se ve que solamente hay un término en $\epsilon^1\wedge\cdots\wedge\epsilon^\nu$ en donde $\epsilon^\nu$ aparece en el extremo derecho,por lo que

$$\begin{aligned}[X(e_\nu)]\,\epsilon^1\wedge\cdots\wedge\epsilon^\nu&=[(\epsilon^1\wedge\cdots\wedge\epsilon^{\nu-1})\otimes\epsilon^\nu+\ldots]\cdot e_\nu\\&=(\epsilon^1\wedge\cdots\wedge\epsilon^{\nu-1})(\epsilon^\nu\cdot e_\nu)=\epsilon^1\wedge\cdots\wedge\epsilon^{\nu-1}\end{aligned}$$

Llevando a cabo el proceso en forma iterada para el resto de los operadores $X(e_k)$ llegamos a que $CH=1$. De esta forma se tiene

$$C\epsilon^{k_1}\wedge\cdots\wedge\epsilon^{k_p} = \frac{(-1)^{\nu(\nu-p)}}{(\nu-p)!}\epsilon^{k_1\cdots k_p j_1\cdots j_{\nu-p}} X(e'_{j_1})\cdots X(e'_{j_{\nu-p}})\,1$$
$$= \frac{1}{(\nu-p)!}\epsilon^{k_1\cdots k_p j_1\cdots j_{\nu-p}}(-1)^{\nu(\nu-p)}\epsilon^{j_{\nu-p}}\wedge\cdots\wedge\epsilon^{j_1}$$

ya que $X(e'_j)\xi = 2\xi\wedge e'_j = \xi\wedge\epsilon^j$. Con esto obtenemos entonces

$$C\lambda^{(p)} = \sum_{<}\lambda_{i_1\cdots i_p}\frac{1}{(\nu-p)!}\epsilon^{i_1\cdots i_p j_1\cdots j_{\nu-p}}(-1)^{\nu(\nu-p)}\epsilon^{j_{\nu-p}}\wedge\cdots\wedge\epsilon^{j_1}$$
$$= \sum_{<}\lambda_{i_1\cdots i_p}\epsilon^{i_1\cdots i_p j_1\cdots j_{\nu-p}}(-1)^{\nu(\nu-p)}\epsilon^{j_{\nu-p}}\otimes\cdots\otimes\epsilon^{j_1}$$
$$= \sum_{<}\lambda_{i_1\cdots i_p}(-1)^{\nu(\nu-p)}\epsilon^{i_1\cdots i_p j_{\nu-p}\cdots j_1}\epsilon^{j_1}\otimes\cdots\otimes\epsilon^{j_{\nu-p}}$$
$$= \sum_{<}\lambda_{i_1\cdots i_p}(-1)^{\nu(\nu-p)}(-1)^{\sum_{k=1}^{\nu-p}(\nu-p-k)}\epsilon^{i_1\cdots i_p j_1\cdots j_{\nu-p}}\epsilon^{j_1}\otimes\cdots\otimes\epsilon^{j_{\nu-p}}.$$

Realizando la sumatoria en la exponencial y simplificando, obtenemos finalmente que la acción de C sobre un espinor homogéneo de rango p esta dada por

$$C\lambda^{(p)} = (-1)^{\frac{1}{2}\nu(\nu+1)}\sum_{<}\lambda_{i_1\cdots i_p}\frac{1}{(\nu-p)!}(-1)^{\frac{1}{2}p(p+1)}\epsilon^{i_1\cdots i_p j_1\cdots j_{\nu-p}}\epsilon^{j_1}\wedge\cdots\wedge\epsilon^{j_{\nu-p}} \qquad (2.13)$$

De este resultado vemos que en efecto, el operador C actúa como un operador de dualidad, enviando un p-vector hacia un $\nu$-p-vector complementario.

Evidentemente, el hecho de aplicar dos veces consecutivas el operador C nos debe dar un eigenvalor de $C^2$, ya que mandamos un p-vector a un $\nu$-p-vector, y ese $\nu$-p-vector de regreso a un p-vector. Para indagar el valor de dicho factor, ponemos

$$C^2 = [X(e_1)-X(e'_1)]\cdots[X(e_\nu)-X(e'_\nu)][X(e_1)-X(e'_1)]\cdots[X(e_\nu)-X(e'_\nu)].$$

Como $[X(e_i)-X(e'_i)][X(e_j)-X(e'_j)] = -[X(e_j)-X(e'_j)][X(e_i)-X(e'_i)]$ para $i\neq j$, se tiene que

$$C^2 = (-1)^{\nu-1}[X(e_1)-X(e'_1)][X(e_1)-X(e'_1)][X(e_2)-X(e'_2)]\cdots[X(e_\nu)-X(e'_\nu)][X(e_2)-X(e'_2)]\cdots[X(e_\nu)-X(e'_\nu)]$$
$$= (-1)^{\nu-1}[X(e_1)-X(e'_1)]^2(-1)^{\nu-2}[X(e_2)-X(e'_2)]^2\cdots\cdots[X(e_\nu)-X(e'_\nu)]^2(-1).$$

Pero como $e_i$ y $e_j$ son vectores isotrópicos, se tiene que

$$[X(e_i)-X(e'_i)]^2 = -\left(X(e_i)X(e'_i)+X(e'_i)X(e_i)\right)$$

y, como se vió en el primer capítulo, $e_i = \frac{1}{2}(a_{2i+1}+ia_{2i+2})$, $e'_i = \frac{1}{2}(a_{2i+1}-ia_{2i+2})$. Por lo tanto, se tiene

$$X(e_i)X(e'_i)+X(e'_i)X(e_i) = \frac{1}{4}\{(X(a_{2i+1})+iX(a_{2i+2}))(X(a_{2i+1})-iX(a_{2i+2}))+(X(a_{2i+1})-iX(a_{2i+2}))(X(a_{2i+1})+iX(a_{2i+2}))\}$$
$$= \frac{1}{4}\{2X(a_{2i+1})^2+2X(a_{2i+2})^2+i\{X(a_{2i+2})X(a_{2i+1})-X(a_{2i+1})X(a_{2i+1})+X(a_{2i+1})X(a_{2i+2})-X(a_{2i+2})X(a_{2i+1})\}$$
$$= \frac{1}{2}\left(X(a_{2i+1})X(a_{2i+1})+X(a_{2i+2})X(a_{2i+2})\right) = 1$$

Consecuentemente

$$[X(e_i)-X(e'_i)][X(e_i)-X(e'_i)] = -1$$

y

$$C^2 = (-1)^{\nu+\nu-1+\cdots+1} = (-1)^{\frac{1}{2}\nu(\nu+1)} \qquad (2.14)$$

## 2.2.b) EL ESPINOR TRANSPUESTO .

Aún nos falta dar un pequeño paso para poder definir un producto escalar formal de espinores,a semejanza del producto escalar utilizado para las funciones de onda en Mecánica Cuántica .Como sabemos,para llevar a cabo un producto de funciones de onda,se toma una de ellas en el espacio de los estados,y la otra en el espacio dual a este.De la misma manera,nosotros queremos tomar un espinor dual,al que llamaremos espinor transpuesto,el cual diferirá de su correspondiente espinor en el espacio $\Lambda\mathcal{W}_\nu'$ en el hecho de que le cambiaremos los vectores de la base $\{\underline{\epsilon}^1,\ldots,\underline{\epsilon}^\nu\}$ por los de la base $\{\underline{e}_1,\ldots,\underline{e}_\nu\}$ .La razón de introducir este cambio es que de esta manera nos evitaremos la necesidad de introducir una métrica.

Queremos definir un operador T que satisfaga

$$\xi^T := \xi\cdot T = \sum_{p=0}^{\nu}\sum_{i}\xi_{i_1,\ldots,i_p}\,\underline{e}_{i_1}\wedge\cdots\wedge\underline{e}_{i_p}\,. \qquad (2.15)$$

Es claro T tiene entonces que ser un operador que consta de productos tensoriales.Notemos primero que

$$(\underline{\epsilon}^{i_1}\otimes\cdots\otimes\underline{\epsilon}^{i_p},\underline{e}_{k_1}\otimes\cdots\otimes\underline{e}_{k_p}) = (\underline{\epsilon}^{i_1},\underline{e}_{k_1})\cdots(\underline{\epsilon}^{i_p},\underline{e}_{k_p}) = \delta^{i_1}{}_{k_1}\cdots\delta^{i_p}{}_{k_p}\,.$$

Escribiendo

$$\xi = \sum_p \xi_{i_1\ldots i_p}\epsilon^{i_1}\otimes\cdots\otimes\epsilon^{i_p}$$

(donde $\xi_{i_1\ldots i_p}$ es ahora totalmente antisimétrico),y escogiendo

$$T = \sum_{p=0}^{\nu}\sum_{i}(e_{i_1}\otimes\cdots\otimes e_{i_p})\otimes(e_{i_1}\otimes\cdots\otimes e_{i_p}) \qquad (2.16)$$

vemos de inmediato (tomando en cuenta que el producto interno (,) respeta la graduación del espacio[14]) que

$$\xi^T = \sum_p\sum_{i,k}\xi_{i_1\ldots i_p}(\epsilon^{i_1}\otimes\cdots\otimes\epsilon^{i_p},e_{k_1}\otimes\cdots\otimes e_{k_p})e_{k_1}\otimes\cdots\otimes e_{k_p}.$$

Es decir,se cumple (2.15).

### 2.2c) Producto escalar formal

Estamos ahora en posición de definir un producto escalar de espinores de una manera formal, simplemente utilizando los resultados de las subsecciones anteriores. Pongamos

$$(\xi|\lambda) := \sum_{p=0}^{\nu} \frac{1}{p!}\left(\xi^{(p)T}, C\lambda^{(\nu-p)}\right) = \sum_{p} \sum_{k,j}^{<} (-1)^{\frac{1}{2}\nu(\nu+1)}(-1)^{\frac{1}{2}(\nu-p)(\nu-p+1)} \epsilon^{j_1\cdots j_{\nu-p}k_1\cdots k_p} \xi_{k_1\cdots k_p} \lambda_{j_1\cdots j_{\nu-p}} \left(e_{i_1}\partial\cdots\partial e_{i_p}, \epsilon^{i_1}\partial\cdots\partial\epsilon^{i_p}\right). \quad (2.17)$$

Intercambiando ahora lugares de k con j tenemos

$$(\xi|\lambda) = (-1)^{\frac{1}{2}\nu(\nu+1)} \sum_{p} \sum_{k,j}^{<} (-1)^{\frac{1}{2}(\nu-p)(\nu-p+1)}(-1)^{p(\nu-p)} \epsilon^{k_1\cdots k_p j_1\cdots j_{\nu-p}} \xi_{k_1\cdots k_p} \lambda_{j_1\cdots j_{\nu-p}},$$

y necesitamos en seguida simplificar el término exponencial, que puede ponerse como

$$\frac{1}{2}\nu(\nu+1) + \frac{1}{2}(\nu-p)(\nu-p+1) + p(\nu-p) = \frac{1}{2}\nu(\nu+1) + \frac{1}{2}\nu(\nu+1) - \frac{1}{2}\nu p - \frac{1}{2}p(\nu-p) - \frac{1}{2}p + p(\nu-p)$$

$$= \nu(\nu+1) - \frac{1}{2}p^2 - \frac{1}{2}p = \nu(\nu+1) - \frac{1}{2}p(p+1) \quad (2.17a)$$

Tomando en consideración que $\nu(\nu+1)$ es par, es evidente que $(-1)^{\nu(\nu+1)-\frac{1}{2}p(p+1)} = (-1)^{\frac{1}{2}p(p+1)}$ por lo tanto

$$(\xi|\lambda) = \sum_{p=0}^{\nu} \sum_{k,j}^{<} (-1)^{\frac{1}{2}p(p+1)} \epsilon^{k_1\cdots k_p j_1\cdots j_{\nu-p}} \xi_{k_1\cdots k_p} \lambda_{j_1\cdots j_{\nu-p}} \quad (2.18)$$

que es el producto escalar buscado. Nótese que aquí obtuvimos de una manera natural la condición (2.17a), la cual nos va a dar lugar a una propiedad fundamental del producto escalar de los espainores, la cual veremos a continuación:

De la expresión (2.18) vemos que

$$(\lambda|\xi) = \sum_{p=0}^{\nu} \sum_{k,j}^{<} (-1)^{\frac{1}{2}p(p+1)} \epsilon^{k_1\cdots k_p j_1\cdots j_{\nu-p}} \xi_{j_1\cdots j_{\nu-p}} \lambda_{k_1\cdots k_p}$$

Para poder comparar $(\lambda|\xi)$ con $(\xi|\lambda)$, cambiamos p por $(\nu-p)$ resultando

$$(\lambda|\xi) = \sum_{p=0}^{\nu} \sum_{k,j}^{<} (-1)^{\frac{1}{2}(\nu-p)(\nu-p+1)} \lambda_{k_1\cdots k_{\nu-p}} \epsilon^{k_1\cdots k_{\nu-p} j_1\cdots j_p} \xi_{j_1\cdots j_p}$$

Pero $\epsilon^{k_1\cdots k_{\nu-p} j_1\cdots j_p} = (-1)^{p(\nu-p)}\epsilon^{j_1\cdots j_p k_1\cdots k_{\nu-p}}$, entonces

$$(\lambda|\xi) = \sum_{p=0}^{\nu} \sum_{k,j}^{<} (-1)^{\frac{1}{2}p(p+1)+\frac{1}{2}\nu(\nu+1)} \lambda_{k_1\cdots k_{\nu-p}} \epsilon^{k_1\cdots k_{\nu-p} j_1\cdots j_p} \xi_{j_1\cdots j_p}$$

ya que $\frac{1}{2}(\nu-p)(\nu-p+1) + p(\nu-p) = \frac{1}{2}\nu(\nu+1) - \frac{1}{2}p(p+1)$. Por lo tanto,

$$(\lambda|\xi) = \sum_{p=0}^{\nu} \sum_{k,j}^{<} (-1)^{\frac{1}{2}\nu(\nu+1)}(-1)^{\frac{1}{2}p(p+1)} \xi_{j_1\cdots j_p} \epsilon^{j_1\cdots j_p k_1\cdots k_{\nu-p}} \lambda_{k_1\cdots k_{\nu-p}}.$$

Es decir, tenemos

$$(\lambda|\xi) = (-1)^{\frac{1}{2}\nu(\nu+1)}(\xi|\lambda), \quad (2.19)$$

que es justamente la condición (2.7) obtenida anteriormente. Es importante notar que la condición (2. ) fué obtenida como una condición suficiente mas no necesaria para que el producto escalar de espinores fuera simétrico o antisimétrico segun la paridad de $\nu$ ,ya que podíamos escoger arbitrariamente la mitad de las $\beta$'s .En cambio aqui,(2.17a) apareció como una propiedad intrínseca del producto escalar.

De esta propiedad deduciremos a continuación una de gran importanca para la teoría de espinores.Vamos a demostrar que

$$(X(a)\xi \mid \varphi) = (-1)^{\nu}(\xi \mid X(a)\varphi) \tag{2.20}$$

donde $\underline{a}$ es un vector cualquiera definido en $CE_n$ , $\underline{a} = a^0 e_0 + \alpha^{\kappa} e_{\kappa} + \alpha^{\kappa'} e_{\kappa'}$.Sabemos que

$$X(a)\xi = 2\xi \wedge (\alpha^{\kappa'} e_{\kappa'}) + (S\xi)a^0 + \xi\cdot(a^{\kappa} e_{\kappa}) = 2\xi\wedge r' + (S\xi)a^0 + \xi\cdot r \tag{2.21}$$

y,haciendo uso de (2.5 ) (con $\beta_p = (-1)^{\frac{1}{2}p(p+1)}$ ),resulta que

$$\begin{aligned}(X(a)\xi \mid \varphi)\Lambda &= (2\xi\wedge r' + (S\xi)a^0 + \xi\cdot r \mid \varphi)\Lambda = \\ &\sum_{p=0}^{\nu}(-1)^{\frac{1}{2}p(p+1)}\left[2(\xi\wedge r')^{(p)}\wedge\varphi^{(\nu-p)} + (-1)^p \xi^{(p)}\wedge\varphi^{(\nu-p)}a^0 + (\xi\cdot r)^{(p)}\wedge\varphi^{(\nu-p)}\right]\end{aligned} \tag{2.22}$$

Por otro lado,también tenemos que

$$\begin{aligned}(\xi \mid X(a)\varphi) &= (\xi \mid 2\varphi\wedge r' + (S\varphi)a^0 + \varphi\cdot r)\Lambda \\ &= \sum_{p=0}^{\nu}(-1)^{\frac{1}{2}p(p+1)}\left[2\xi^{(p)}\wedge(\varphi\wedge r')^{(\nu-p)} + (-1)^{\nu-p}\xi^{(p)}\wedge\varphi^{(\nu-p)}a^0 + \xi^{(p)}\wedge(\varphi\cdot r)^{(\nu-p)}\right]\end{aligned} \tag{2.23}$$

Como $(\xi\wedge r')^0 = 0$,podemos escribir

$$\begin{aligned}\sum_{p=0}^{\nu}\beta_p(\xi\wedge r')^{(p)}\wedge\varphi^{(\nu-p)} &= \sum_{p=1}^{\nu}\beta_p(\xi\wedge r')^{(p)}\wedge\varphi^{(\nu-p)} = \sum_{p=0}^{\nu-1}\beta_{p+1}(\xi\wedge r')^{(p+1)}\wedge(\varphi)^{(\nu-p-1)} \\ &= \sum_{p=0}^{\nu-1}\beta_{p+1}\,\xi^{(p)}\wedge r'\wedge\varphi^{(\nu-p-1)} = \sum_{p=0}^{\nu-1}(-1)^{\frac{1}{2}(p+1)(p+2)}\xi^{(p)}\wedge r'\wedge\varphi^{(\nu-p-1)} = \sum_{p=0}^{\nu-1}\beta_p(-1)^{p+1}\xi^{(p)}\wedge r'\wedge\varphi^{(\nu-p)}\end{aligned} \tag{2.24}$$

De la misma manera,se tiene que (2.25)

$$\sum_{p=0}^{\nu}\beta_p\,\xi^{(p)}\wedge(\varphi\wedge r')^{(\nu-p)} = \sum_{p=0}^{\nu-1}\beta_p\,\xi^{(p)}\wedge(\varphi\wedge r')^{(\nu-p)} = \sum_{p=0}^{\nu-1}\beta_p\,\xi^{(p)}\wedge\varphi^{(\nu-p-1)}\wedge r' = \sum_{p=0}^{\nu-1}\beta_p(-1)^{(\nu-p-1)}\xi^{(p)}\wedge r'\wedge\varphi^{(\nu-p-1)}.$$

Comparando con la expresión anterior tenemos que

$$\sum_{p=0}^{\nu}\beta_p(\xi\wedge r')^{(p)}\wedge\varphi^{(\nu-p)} = (-1)^{\nu}\sum_{p=0}^{\nu}\beta_p\,\xi^{(p)}\wedge(\varphi\wedge r')^{(\nu-p)} \tag{2.26}$$

Por otra parte,vemos que como $\xi^{(p+1)}\wedge\varphi^{(\nu-p)} = 0$ ,

$$0 = \left[\xi^{(p+1)}\wedge\varphi^{(\nu-p)}\right]\cdot r = \xi^{(p+1)}\wedge\varphi^{(\nu-p)}\cdot r + (-1)^{(\nu-p)(p+1)}\varphi^{(\nu-p)}\wedge(\xi^{(p+1)}\cdot r) \tag{2.27}$$

entonces se cumple que

$$\begin{aligned}\sum_{p=0}^{\nu}\beta_p\,\xi^{(p)}\wedge(\varphi\cdot r)^{(\nu-p)} &= \sum_{p=0}^{\nu}\beta_p\,\xi^{(p)}\wedge\varphi^{(\nu-p+1)}\cdot r = \sum_{p=0}^{\nu}\beta_p\,\xi^{(p)}\wedge(\varphi^{(\nu-p+1)}\cdot r) \\ &= \sum_{p=0}^{\nu}\beta_{p+1}\,\xi^{(p+1)}\wedge(\varphi^{(\nu-p)}\cdot r) = -\sum_{p=0}^{\nu}\beta_{p+1}(-1)^{(\nu-p)(p+1)}\varphi^{(\nu-p)}\wedge(\xi^{(p+1)}\cdot r)\end{aligned} \tag{2.28}$$

$$= -\sum_{\rho=0}^{\nu}(-1)^{(\rho+1)(\rho+1)}(-1)^{(\nu-\rho)(\rho+1)}\varphi^{(\nu-\rho)}\wedge(\xi^{(\rho+1)}\cdot r) = \sum_{\rho=0}^{\nu}(-1)^{\rho(\nu-\rho)}(-1)^{\nu}\beta_\rho\,\varphi^{(\nu-\rho)}\wedge(\xi^{(\rho+1)}\cdot r). \quad (2.29)$$

De la misma manera, es facilmente comprobable que

$$\sum_{\rho=0}^{\nu}\beta_\rho(\xi\cdot r)^{(\rho)}\wedge\varphi^{(\nu-\rho)} = \sum_{\rho=0}^{\nu}\beta_\rho(\xi^{(\rho+1)}\cdot r)\wedge\varphi^{(\nu-\rho)} = \sum_{\rho=0}^{\nu}\beta_\rho(-1)^{\rho(\nu-\rho)}\varphi^{(\nu-\rho)}\wedge(\xi^{(\rho+1)}\cdot r) \quad (2.30)$$

de donde al comparar con (2.29) vemos que

$$\sum_{\rho=0}^{\nu}\beta_\rho\,\xi^{(\rho)}\wedge(\varphi\cdot r)^{(\nu-\rho)} = (-1)^{\nu}\sum_{\rho=0}^{\nu}\beta_\rho(\xi\cdot r)^{(\rho)}\wedge\varphi^{(\nu-\rho)} \quad (2.31)$$

Para llegar al resultado deseado, debemos ahora substituír (2.31) y (2.29) en (2.13), de donde resulta que

$$\begin{aligned}(X(a)\xi|\varphi)\Lambda &= \Big\{2\sum_{\rho=0}^{\nu}\beta_\rho(\xi\wedge r')^{(\rho)}\wedge\varphi^{(\nu-\rho)} + \sum_{\rho=0}^{\nu}(-1)^{\rho}\beta_\rho\,\xi^{(\rho)}\wedge\varphi^{(\nu-\rho)}a^{\circ} + \sum_{\rho=0}^{\nu}\beta_\rho(\xi\cdot r)^{(\rho)}\wedge\varphi^{(\nu-\rho)}\Big\}\Lambda \quad (2.32)\\ &= \Big\{(-1)^{\nu}\cdot 2\sum_{\rho=0}^{\nu}\beta_\rho\,\xi^{(\rho)}\wedge(\varphi\wedge r')^{(\nu-\rho)} + (-1)^{\nu}\sum_{\rho=0}^{\nu}(-1)^{\nu-\rho}\beta_\rho\,\xi^{(\rho)}\wedge\varphi^{(\nu-\rho)}a^{\circ} + (-1)^{\nu}\sum_{\rho=0}^{\nu}\beta_\rho(\xi\cdot r)^{(\rho)}\wedge\varphi^{(\nu-\rho)}\Big\}\\ &= (-1)^{\nu}(\xi|X(a)\varphi),\end{aligned}$$

que era lo que queríamos demostrar.

## 2.3. ESPINORES PUROS .

Como ya hemos visto, a cada $z\in\mathbb{C}E_n$ le asociamos un operador $X(z)$, el cual es un mapeo de Clifford, dado por (2.2). En vista de que cada espinor $\xi\in\Lambda W_\nu'$ posee $2^\nu$ componentes, es claro que si ponemos $\eta=X(z)\xi$, al ser $X(z)$ una transformación en el espacio de los espinores, $\eta$ también va a tener $2^\nu$ componentes y $\eta\in\Lambda W_\nu'$. Por la linealidad de $X(z)$, podemos definir una transformación lineal $A_\xi$ definida como

$$A_\xi := \{(z,\eta) \mid z\in\mathbb{C}E_n,\ \eta\in\Lambda W_\nu'\} \in L(\mathbb{C}E_n, \Lambda W_\nu')$$

Sabamos que[3] $\ker A_\xi=\{z\in\Lambda W_\nu' \mid A_\xi z=0\}$, y ademas, que $\ker A_\xi$ es un subespacio de $\mathbb{C}E_n$. Si definimos ahora $\mathrm{Im}\, A_\xi=\{\eta\in\Lambda W_\nu' \mid \eta=A_\xi z\}$, es fácil ver que $\mathrm{Im}\, A_\xi$ es un subespacio de $\Lambda W_\nu'$. Luego, por el primer teorema de isomorfismos[12], vamos a tener el isomorfismo de espacios

$$\mathrm{Im}\, A_\xi \approx \mathbb{C}E_n / \ker A_\xi$$

el cual nos conduce a la relación entre las dimensiones[13]:

$$\dim(\mathrm{Im}\, A_\xi)+\dim(\ker A_\xi) = \dim(\mathbb{C}E_n) =: n \tag{2.33}$$

La condición de $A_\xi z=0$ claramente es equivalente a poner $X(z)\xi=0$. Podemos entonces extraer el siguiente conjunto de conclusiones:

1) Si $\xi\neq 0$ entonces $\ker A_\xi$ es un subespacio isotrópico. Esto es fácil de comprobar, ya que $X(z)\xi=0$ y como $\xi\neq 0$, $X(z)X(z)\xi=0$ debido a la linealidad del operador $X$, pero $X(z)X(z)\xi=z\cdot z\xi=0$, de donde se desprende que para todo $z\in\ker A_\xi$, $z\cdot z=0$, es decir, $\ker A_\xi$ es subespacio isotrópico.

2) Sabemos que la máxima dimensión posible de un subespacio isotrópico es $\nu$, entonces como $\dim(\mathrm{Im}\, A_\xi)=n-\dim(\ker A_\xi)$ se tiene necesariamente que $\dim(\mathrm{Im}\, A_\xi)\geq \nu+1$, en el caso de que $\xi$ sea distinto de cero.

3) Si $\dim(\mathrm{Im}\, A_\xi)<\nu+1$, entonces $\xi=0$, ya que de otro modo, tendríamos la posibilidad de encontrar subespacios isotrópicos de dimensión mayor que $\nu$.

Se define como espinor puro a aquel espinor $\xi$ que corresponde al mínimo de $\dim(\mathrm{Im}\, A_\xi)$, es decir, aquel al que $\ker A_\xi$ corresponde a un subespacio isotrópico de dimensión máxima. Inversamente, cualquier plano isotrópico de dimensión $\nu$ se puede definir por medio de un espinor puro. Puede verse entonces que se dan los siguientes resultados:

Lema 1. El resultado de aplicar una reflexión o una rotación a un espinor puro nos da otro espinor puro, y el plano isotrópico (de dimensión $\nu$) asociado con este último espinor es la reflexión o rotación del plano isotrópico asociado con el primer espinor

Para ver esto, tomemos un espinor puro $\xi$, y $\underline{z}$ un vector en el plano isotrópico asociado a éste. Sea $\underline{a}$ el vector unitario que representa al plano de reflexión, entonces, como ya vimos, la reflexión del espinor $\xi$ nos conducirá al espinor $\xi'=X(\underline{a})\xi$, y la del vector $\underline{z}$ va a estar representada por $X(\underline{z}')=-X(\underline{a})X(\underline{z})X(\underline{a})$. Asi

$$X(\underline{z}')\xi'=-X(\underline{a})X(\underline{z})X(\underline{a})X(\underline{a})\xi=-X(\underline{a})X(\underline{z})\xi\ , \qquad (2.34)$$

pero para un espinor puro $X(\underline{z})\xi=0$, por lo tanto $X(\underline{z}')\xi'=0$, lo que corresponde a decir que $\xi'$ es un espinor puro asociado a los vectores $\underline{z}'$ que generan un plano isotrópico de dimensión $\nu$.

Podemos también ver que es posible mediante una rotación o reflexión transformar cualquier plano isotrópico de dimensión $\nu$ en cualquier otro plano de dimensión $\nu$. Para una demostración de esto, véase Cartan[4].

Debido a estos resultados, cualquier plano isotrópico de dimensión $\nu$, puede ser obtenido mediante una simple rotación del plano definido por $x^0=x^{1'}=\ldots=x^{\nu'}=0$, el cual tiene asociado un espinor puro, y por el primer lema, al rotar el plano mencionado, obtenemos un espinor puro que estará asociado al plano isotrópico dado, es decir, se tiene el siguiente resultado:

<u>TEOREMA</u> : Cualquier plano isotrópico de dimensión $\nu$ puede ser definido en términos de un espinor puro. El conjunto de espinores puros es entonces invariante ante rotaciones y reflexiones.

## 2.4 Espinores Conjugados.

Como ya se vió al principio del primer capítulo, disponíamos de espacios vectoriales definidos sobre el campo real, y a fin de tener subespacios isotrópicos cambiamos la base $\{e_0, a_1, \ldots, a_n\}$ por la base $\{e_0, e_1, \ldots e_\nu\}$ con las e's definidas por (1.4), es decir, se cambió a un espacio definido ahora sobre el campo complejo. Cabe entonces preguntarse por la operación de conjugación de un espinor, o bien por la relación existente entre los distintos tipos de conjugación posibles. Comenzaremos por ver el caso más sencillo, que corresponde al caso de espacios Euclideanos.

Sea $\mathcal{E}_{2\nu+1}$ un espacio Euclideano de dimensión $2\nu+1$. Un vector $\underline{z} \in \mathcal{E}_{2\nu+1}$ tiene la forma $\underline{z} = \underline{e}_0 x^0 + \underline{x} + \underline{x}' = \underline{e}_0 x^0 + x^k \underline{e}_k + x^{k'} \underline{e}'_k$, donde $\underline{e}_0 = \bar{\underline{e}}_0$, $\bar{e}_k = e'_k$ Un tipo de conjugación posible para $\underline{z}$ es

$$\bar{\underline{z}} = x^{0*} \bar{\underline{e}}_0 + x^{k*} \bar{\underline{e}}_k + x^{k'*} \bar{\underline{e}}'_k \tag{2.35}$$

pero de la forma encontrada para las $x^k$ al principio del capítulo se encuentra que $x^{k*} = x^{k'}$, entonces

$$\bar{\underline{z}} = x^0 \underline{e}_0 + x^{k'} \underline{e}'_k + x^k \underline{e}_k = \underline{z} \tag{2.36}$$

y podemos afirmar que con este tipo de conjugación, el vector $\underline{z}$ es real. Definamos ahora otro tipo de conjugación de $\underline{z}$, tomando solamente la conjugación en las componentes,

$$\underline{z}^{+} = x^{0*} e_0 + x^{k*} e_k + x^{k'*} e'_k \,. \tag{2.37}$$

Aplicando lo mismo que ya hicimos,

$$\underline{z}^{+} = x^0 e_0 + x^{k'} e_k + x^k e'_k \neq \underline{z} \tag{2.38}$$

Como la componente $x^0$ y el vector $e_0$ son reales, vemos que ninguno de los dos tipos de conjugación los afecta, y podemos entonces quitarlos, es decir, lo que se haga para un espacio $\mathcal{E}_{2\nu}$ es lo mismo que lo que se haga en $\mathcal{E}_{2\nu+1}$ en lo que respecta a conjugaciones. Haciendo en $\mathcal{E}_{2\nu}$ todo, se tiene

$$X(\underline{z})\,\xi = 2\,\xi \wedge \underline{x}' + \underline{x} \cdot \xi \tag{2.39}$$

tomando $\underline{z} = x^{\mu'}e_{\mu}' + x^{\nu}e_{\nu} = \underline{r} + \underline{r}'$ ,se tiene $X(\underline{z})\xi = 2\xi\wedge\underline{r} + \xi\cdot\underline{r}'$, es decir $X(\underline{r})\xi = 2\xi\wedge\underline{r} = 2\xi\wedge e_{\mu}' x^{\mu'} = 2x_{\mu}'\xi\wedge\underline{\epsilon}^{\mu}$ por lo tanto

$$X(\underline{r})\xi^{(p)} = 2\sum_{i}\xi_{i_1\cdots i_p}\chi_{i_{p+1}}\underline{\epsilon}^{i_1}\wedge\cdots\wedge\underline{\epsilon}^{i_p}\wedge\underline{\epsilon}^{i_{p+1}} \qquad (2.40)$$

y como $X(\underline{r}') = \xi\cdot\underline{r}'$,

$$X(\underline{r}')\xi^{(p)} = \sum_{i}\xi_{i_1\cdots i_p}x^{\mu}(\underline{\epsilon}^{i_1}\wedge\cdots\wedge\underline{\epsilon}^{i_p})\cdot e_{\mu}. \qquad (2.41)$$

Como $C = [X(e_1) - X(e_1')]\cdots[X(e_\nu) - X(e_\nu')]$ vamos a tener que

$$C\,X(\underline{r})\xi = [X(e_1) - X(e_1')]\cdots[X(e_\nu) - X(e_\nu')]\,X(x^{\mu'}e_{\mu}')\xi \qquad (2.42)$$

Por lo que ya vimos, en la parte correspondiente al producto interno, si $k\neq\nu$, $[X(e_\nu) - X(e_\nu')]X(e_k') = -X(e_k')[X(e_\nu) - X(e_\nu')]$ y $[X(e_k) - X(e_k')]X(e_k')\xi = -X(e_k')[X(e_k) - X(e_k')]\xi$, y se tiene

$$C\,X(\underline{r})\xi = x^{1'}X(e_1)(-1)^{\nu}C\xi + \cdots + x^{\nu'}X(e_\nu)(-1)^{\nu}C\xi = (-1)^{\nu}X(r^{+})C\xi \quad (2.43)$$

ya que $r^{+} = x^{\mu'}e_{\mu}$ . De igual manera se obtiene $C\,X(\underline{r}')\xi = (-1)^{\nu}X(\underline{r}'^{+})C\xi$ , es decir,

$$C\,X(\underline{z})\xi = (-1)^{\nu}X(\underline{z}^{+})C\xi. \qquad (2.44)$$

En particular, para un espinor conjugado vamos a escribir

$$C\,X(\underline{z})\xi^{c} = (-1)^{\nu}X(\underline{z}^{+})C\xi^{c}. \qquad (2.45)$$

Si $X(\underline{Z})$ actua en $\xi$, es natural que $X(\underline{Z}^{+})$ actúe en $\xi^{+}$, y para ello como $X(\underline{Z})$ es lineal en $\xi$ , ponemos $C\xi^{c} = m_1\xi^{+}$ para que $X(\underline{Z})$ actue en $\xi^{+}$.

Tomando entonces como punto de partida $C\xi^{c} = m_1\xi^{+}$, se tiene que $\xi^{c} = mC\xi^{+}$ , ya que $C^{2}$ es un escalar. Queremos entonces calcular el valor de m. Para ello, pongamos un "producto interno conjugado" como

$$(\xi|\underset{(\nu)}{X}(\underline{z})\xi)^{+} = (\xi^{+}|\underset{(\nu)}{X}(\underline{z}^{+})\xi^{+}) \qquad (2.46)$$

y con el otro tipo de conjugación,

$$(\xi|\underset{(\nu)}{X}(\underline{z})\xi)^{c} = (\xi^{c}|\underset{(\nu)}{X}(\bar{\underline{z}})\xi^{c}) \qquad (2.47)$$

donde $\underset{(\nu)}{X}(\underline{z})=X(\underline{e}_1)\ldots X(\underline{e}_\nu)$ es el operador X correspondiente al $\nu$-vector $\underline{e}_1\wedge\ldots\wedge\underline{e}_\nu$. Como el producto interno es un escalar, ambos tipos de conjugación nos deben conducir al mismo resultado, asi

$$(\xi|\underset{(\nu)}{X}(\underline{z})\,\xi)^{+}:=(\xi^{+}|\underset{(\nu)}{X}(\underline{z}^{+})\,\xi^{+})=(\xi\,|\,\underset{(\nu)}{X}(\underline{z})\,\xi)^{c}:=(\xi^{c}|(\underset{(\nu)}{X}(\bar{\underline{z}})\,\xi)^{c}). \quad (2.48)$$

Recordando el álgebra de operadores se tiene que

$$(\xi^{c}|(\underset{(\nu)}{X}(\bar{\underline{z}})\xi)^{c})=(\xi^{c}|\underset{(\nu)}{X}(\bar{\underline{z}})\,\xi^{c})=m^{2}(C\xi^{c}|\underset{(\nu)}{X}(\bar{\underline{z}})C\xi^{+}). \quad (2.49)$$

Anteriormente vimos que $(X(\underline{z})\xi|\lambda)=(-1)^{\nu}(\xi\,|\,X(\underline{z})\lambda)$, entonces $(\underset{(\nu)}{X}(\underline{z})\xi|\lambda)=(-1)^{\nu^2}(\xi|\underset{(\nu)}{X}(\underline{z})\lambda)$ por lo cual $(\xi^{c}|\underset{(\nu)}{X}(\bar{\underline{z}})\xi^{c})=m^{2}(C\xi^{+}|\underset{(\nu)}{X}(\bar{\underline{z}})C\xi^{+})=m^{2}(-1)^{\nu^2}(\xi^{+}|\tilde{C}\underset{(\nu)}{X}(\bar{\underline{z}})C\xi^{+})$ donde hemos puesto $\tilde{C}=[X(e_\nu)-X(e_\nu')]\cdots[X(e_1)-X(e_1')]$ por lo tanto $\tilde{C}=(-1)^{\frac{1}{2}\nu(\nu+1)}C$,

$$(\xi^{c}|\underset{(\nu)}{X}(\bar{\underline{z}})\xi^{c})=m^{2}(-1)^{\nu^2}(-1)^{\frac{1}{2}\nu(\nu+1)}(-1)^{\nu^2}(\xi^{+}|\underset{(\nu)}{X}(\underline{z}^{+})CC\,\xi^{+}),$$

$$(\xi^{c}|\underset{(\nu)}{X}(\bar{\underline{z}})\xi^{c})=m^{2}(-1)^{\nu^2}(\xi^{+}|\underset{(\nu)}{X}(\underline{z}^{+})\,\xi^{+}) \quad (2.50)$$

y debido a que ambos tipos de conjugación deben conducir al mismo resultado, $m^2(-1)^{\nu^2}=1$, pero podemos poner $\nu^2=(\nu+1)\nu-\nu$; necesariamente el término $\nu(\nu+1)$ es par, ya que forzosamente uno de los dos factores es par, de donde $(-1)^{\nu^2}=(-1)^{-\nu}=(-1)^{\nu}$ por lo tanto $m^2=(-1)^{\nu}$ y obtenemos finalmente $m=i^{\nu}$, es decir,

$$\xi^{c}=i^{\nu}C\xi^{*}\ . \quad (2.51)$$

Ahora, en el caso de estar en un espacio Seudo-euclideano, disponíamos de la base $[\underline{e}_0,\underline{e}_1,\ldots,\underline{e}_{\nu-h},\underline{g}_{\nu-h+1},\ldots,\underline{g}_\nu]$ dados por (1.19). De esta manera, un vector $\underline{z}$ en este espacio esta dado por (1.23). Es claro que a los vectores $\underline{g}_j$ en nada se les va alterar al tomar conjugaciones complejas, por lo que tendremos

$$\bar{\underline{r}}=\sum_{k=1}^{\nu-h}x^{k'}\underline{e}_k'+\sum_{k=\nu-h+1}^{\nu}y^{k}\underline{g}_k \quad (2.53)$$

$$\bar{\underline{r}}'=\sum_{k=1}^{\nu-h}x^{k}\underline{e}_k+\sum_{k=\nu-h+1}^{\nu}y^{k'}\underline{g}_k' \quad (2.54)$$

y al igual que antes, $X(\underline{r})\xi=2\xi\wedge\underline{r}$ y $X(\underline{r}')\xi=\xi\cdot\underline{r}'$. Ahora, como las componentes $y^k$ y los vectores $\underline{g}_k$ son reales, al poner $C=IJ$ con $I=[X(\underline{e}_1)-X(\underline{e}_1')]\cdots[X(\underline{e}_{\nu-h})-X(\underline{e}_{\nu-h}')]$, $J=[X(\underline{g}_{\nu-h+1})-X(\underline{g}_{\nu-h+1}')]\cdots[X(\underline{g}_\nu)-X(\underline{g}_\nu')]$, se tendrá

$$I X(\bar{\underline{r}})\xi = [X(\underline{e}_1)\cdot X(\underline{e}_1')] \cdots [X(\underline{e}_{\nu-h}) - X(\underline{e}_{\nu-h}')] X(x^{k'}\underline{e}_k + y^k \underline{g}_k)\xi$$
$$= x^{1'}X(\underline{e}_1)(-1)^{\nu-1} I\xi + x^{2'}X(\underline{e}_2)(-1)^{\nu-h} I\xi + \cdots \mp \sum_{k=1}^{\nu-h} x^{k'}X(\underline{e}_k)(-1)^{\nu-h} I\xi + \sum_{k=\nu-h+1}^{\nu}(-1)^{\nu-h} y^k X(\underline{g}_k) I\xi$$

y como

$$\underline{r}^* = \sum_{k=1}^{\nu-h} x^{k'}\underline{e}_k + \sum_{k=\nu-h+1}^{\nu} y^k \underline{g}_k$$

tenemos que $IX(\bar{\underline{r}})\xi = (-1)^{\nu-h} X(\underline{r}^*)\xi$, y análogamente para $IX(\bar{\underline{r}}') = (-1)^{\nu-h}X(\underline{r}^{*\prime})\xi$, es decir,

$$IX(\bar{\underline{z}})\xi = (-1)^{\nu-h}X(\underline{z}^*)I\xi\ , \tag{2.55}$$

y se pueden repetir los razonamientos de arriba para llegar a la definición de espinor conjugado

$$\xi^c = i^{\nu-h} I\xi^*\ , \tag{2.56}$$

lo cual era de esperarse, ya que si precisamente en el espacio $\mathcal{E}_{2\nu H}$ quitamos la componente $\underline{e}_0$ por ser real, y por ello inalterada ante conjugaciones, lo mismo tenía que suceder con las $\underline{g}_k$. Es claro que cuando $h=0$ recuperamos los resultados para espacios Euclideanos.

# CAPITULO III

# APLICACIONES

3a) Espinores asociados con $\mathcal{E}_4$.

En el espacio Euclideano de cuatro dimensiones tenemos la forma fundamental dada por

$$\Phi = x^1 x^{1'} + x^2 x^{2'} \quad , \tag{3.1}$$

es decir, $\nu=2$, y por ello, el espacio de los espinores será de cuatro dimensiones. Entonces se tiene que un espinor $\xi$ es de la forma

$$\xi = \xi_0 + \xi_1 \epsilon^1 + \xi_2 \epsilon^2 + \xi_{12} \epsilon^1 \wedge \epsilon^2 \tag{3.2}$$

En el espacio $C\mathcal{E}_4$, el vector $\underline{z}$ tiene la expresión

$$\underline{z} = x^1 \underline{e}_1 + x^2 \underline{e}_2 + x^{1'} \underline{e}_{1'} + x^{2'} \underline{e}_{2'} \tag{3.3.}$$

y, debido a que $X(\underline{z})\xi = 2\xi\wedge\underline{z}' + (S\xi)x^0 + \xi\cdot\underline{z}$.

$$X(\underline{z})\xi = 2(\xi_0 + \xi_1\epsilon^1 + \xi_2\epsilon^2 + \xi_{12}\epsilon^1\wedge\epsilon^2)\wedge(x^{1'}e_1 + x^{2'}e_2) + (\xi_0 + \xi_1\epsilon^1 + \xi_2\epsilon^2 + \xi_{12}\epsilon^1\wedge\epsilon^2)\cdot(x^1 e_1 + x^2 e_2)$$
$$= \xi_1 x^1 + \xi_2 x^2 + (\xi_0 x^{1'} + \xi_{12} x^2)\epsilon^1 + (\xi_0 x^{2'} - \xi_{12} x^1)\epsilon^2 + (\xi_1 x^{2'} - \xi_2 x^{1'})\epsilon^1\wedge\epsilon^2. \tag{3.4}$$

En forma matricial (3.4) esta dada por

$$X(\underline{z})\,\xi = \begin{pmatrix} 0 & x^1 & x^2 & 0 \\ x^{1'} & 0 & 0 & x^2 \\ x^{2'} & 0 & 0 & -x^1 \\ 0 & x^{2'} & -x^{1'} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_0 \\ \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_{12} \end{pmatrix} \tag{3.5}$$

Claramente la matriz que nos da la representación de $X(\underline{z})$ es una matriz Hermitiana, y satisface la relación $X(\underline{z})X(\underline{z}) = (z,z)$.

En este caso particular de espacio, el operador $X(\underline{z})$ asociado con un vector $\underline{z}$ unitario resulta ser una isometría del espacio espinorial. Para verlo, basta con referirnos a la relación (2.31) para la cual, poniendo $\nu=2$ se tiene

$$(X(\underline{z})\eta \mid X(\underline{z})\lambda) = (\eta \mid X(\underline{z})X(\underline{z})\lambda) = (\eta \mid X(\underline{z})X(\underline{z})\lambda) = (\eta \mid \lambda). \tag{3.6}$$

Si llevamos a cabo ahora una descomposición de los espinores en términos de semiespinores del primer y segundo tipo, el producto escalar de espinores se verá como una suma de productos escalares de semiespinores, en donde en cada escalar solo ocurren semiespinores de un mismo tipo. Sean $\xi = \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix}$, $\lambda = \begin{pmatrix} \kappa \\ \rho \end{pmatrix}$ dos espinores asociados con $C\mathcal{E}_4$, ya descompuestos en terminos de semiespinores. En esta descomposición hemos reordenado los renglones en $\xi$ de modo que $\varphi = \begin{pmatrix} \xi_0 \\ \xi_{12} \end{pmatrix}$, $\psi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$ y simólarmente para $\lambda$. Si ahora recordamos que el producto escalar de dos espinores de la forma (3.2) esta dado por

$$(\xi \mid \lambda) = \xi_0 \lambda_{12} - \xi_1 \lambda_1 + \xi_2 \lambda_1 - \xi_{12} \lambda_0 \tag{3.7}$$

Tenemos entonces que de acuerdo con nuestra reordenación, los términos en (3.7) quedan como

$$(\xi|\lambda) = (\xi_0\lambda_{12} - \xi_{12}\lambda_0) + (\xi_2\lambda_1 - \xi_1\lambda_2)$$
$$= (\varphi|\chi) + (\psi|\rho) \qquad (3.8)$$

Esto implica que el espacio de espinores asociado con $\mathbb{C}\mathcal{E}_1$ puede separarse como una suma directa de los subespacios de semiespinores de cada tipo. Ahora, al llevar a cabo la descomposición de los esinores en terminos de semiespinores, es claro que también debemos cambiar la matriz (3.5) a fin de que siga siendo igual su acción sobre el espinor, por lo tanto, debemos poner

$$X(\underline{z}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \chi^{1'} & \chi^{2} \\ 0 & 0 & \chi^{2'} & -\chi^{1} \\ \chi^{1'} & \chi^{2} & 0 & 0 \\ \chi^{2'} & -\chi^{1} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad (3.9)$$

de donde vemos que

$$X(\underline{z})\xi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \chi^{1} & \chi^{2} \\ 0 & 0 & \chi^{2'} & -\chi^{1'} \\ \chi^{1'} & \chi^{2} & 0 & 0 \\ \chi^{2'} & -\chi^{1} & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi_0 \\ \xi_{12} \\ \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma \\ \hat{\sigma} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma\psi \\ \hat{\sigma}\varphi \end{pmatrix} \qquad (3.10)$$

con $\sigma$ y $\hat{\sigma}$ matrices complejas de 2x2,

$$\sigma = \begin{pmatrix} \chi^{1} & \chi^{2} \\ \chi^{2'} & -\chi^{1'} \end{pmatrix}, \qquad \hat{\sigma} = \begin{pmatrix} \chi^{1'} & \chi^{2} \\ \chi^{2'} & -\chi^{1} \end{pmatrix}$$

Tomando $\underline{z}$ como un vector unitario tenemos que

$$\sigma^{+} = \begin{pmatrix} \chi^{1} & \chi^{2} \\ \chi^{2'} & -\chi^{1'} \end{pmatrix}^{+} = \begin{pmatrix} \chi^{1'} & \chi^{2} \\ \chi^{2'} & -\chi^{1} \end{pmatrix} = \hat{\sigma} = \sigma^{-1}$$

esto es, $\sigma$ es una matriz unitaria, y $\sigma$, $\hat{\sigma}$ son matrices inversas. Tomando en cuenta (1. 8 ), vemos que

$$x^{1'} = y^1 + iy^2,$$
$$x^1 = y^1 - iy^2,$$
$$x^{2'} = y^3 + iy^4,$$
$$x^2 = y^3 - iy^4.$$

Consecuentemente, las matrices $\sigma$ y $\hat{\sigma}$ pueden escribirse como

$$\sigma = \begin{pmatrix} y^1 - iy^2 & y^3 - iy^4 \\ y^3 + iy^4 & -y^1 + iy^2 \end{pmatrix} = y^1\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - iy^2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + y^3\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + y^4\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{\sigma} = \begin{pmatrix} y^1 + iy^2 & y^3 - iy^4 \\ y^3 + iy^4 & -y^1 + iy^2 \end{pmatrix} = y^1\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - iy^2\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + y^3\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + y^4\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

Lo que nos dice que los generadores del álgebra de Clifford asociada a $\mathbb{C}\mathcal{E}_4$, son combinaciones lineales de las matrices de Pauli y que (c.f.(3.7))los subespacios de semiespinores son isomorfos y su grupo de isometrías es generado por las representaciones de derecha ($\sigma$) e izquierda ($\sigma^L$) de las matices de Pauli.[23] Esto nos conduce a poder concentrar nuestra atención en lo que le ocurra a uno de los semiespinores únicamente, sabiendo de antemano que al semiespinor complementario le ocurrirá lo mismo.

A fin de establecer contacto entre los espinores definidos como lo hemos hecho arriba y el procedimiento original de introducir estas entidades por medio de la proyección estereográfica[25] consideremos el producto $(\psi^c|\psi)$, de un semiespinor del segundo tipo con su conjugado, siguiendo las definiciones introducidas anteriormente. Tenemos que

$$(\psi^c|\psi) = \xi_1'\xi_1'^* + \xi_2'\xi_2'^* = (\chi^1\xi_1 + \chi^2\xi_2)(\chi^{1'}\xi_1^* + \chi^{2'}\xi_2^*) + (\chi^{2'}\xi_1 - \chi^{1'}\xi_2)(\chi^2\xi_1^* - \chi^1\xi_2^*) \tag{3.11}$$

$$= \chi^1\chi^{1'}|\xi_1|^2 + \chi^2\chi^{2'}|\xi_2|^2 + \chi^1\chi^{2'}(\xi_1\xi_2^*) + \chi^{1'}\chi^2\xi_1^*\xi_2 + \chi^2\chi^{2'}|\xi_1|^2 + \chi^1\chi^{1'}|\xi_2| - \chi^{2'}\chi^1\xi_1\xi_2^* - \chi^{1'}\chi^2\xi_2\xi_1^*$$

o sea

$$(\psi^c|\psi) = \xi_1'\xi_1'^* + \xi_2'\xi_2'^* = (\chi^1\chi^{1'} + \chi^2\chi^{2'})|\xi_1|^2 + (\chi^1\chi^{1'} + \chi^2\chi^{2'})|\xi_2|^2 = \xi_1\xi_1^* + \xi_2\xi_2^*$$

Mediante el uso de la proyección estereográfica ,podemos asociar al semiespinor $(\xi_1', \xi_2')$ un punto en la esfera dado por las coordenadas

$$u^1 = \frac{\xi_1'\xi_2'^* + \xi_1'^*\xi_2'}{\xi_1'\xi_1'^* + \xi_2'\xi_2'^*} \qquad u^2 = \frac{1}{i}\frac{(\xi_1'^*\xi_2' - \xi_1'\xi_2'^*)}{\xi_1'\xi_1'^* + \xi_2'\xi_2'^*} ; \quad u^3 = \frac{\xi_1'\xi_1'^* - \xi_2'\xi_2'^*}{\xi_1'\xi_1'^* + \xi_2'\xi_2'^*} \tag{3.12}$$

Sabemos que una transformación unitaria de la forma dada, tiene determinante $\pm 1$, y también que las matrices unitarias forman un grupo. De esta forma, si multiplicamos $\sigma$ por $e^{-i\varphi/2}$, tenenmos otro elemento del grupo, $\sigma'$ ,pero al hacer esto, $\xi_1'$ y $\xi_2'$ también estan multiplicados por $e^{-i\varphi/2}$. Este factor extra no tiene repercusión en el factor $\xi_2'/\xi_1'$, por lo tanto, el punto representado en la esfera es el mismo. Aun asi, dos transformaciones con coeficientes de distintos signos, nos dan valores de $\xi_1'$ y $\xi_2'$ de distinto signo, pero finalmente se llega al mismo punto $(u^1, u^2, u^3)$ sobre la esfera. Esto muestra que bajo una rotación completa ($\varphi = 2\pi$), la matriz $\sigma$ cambia en un factor $e^{-i\pi} = -1$, es decir, el semiespinor $\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{pmatrix}$ cambia de signo, sin embargo, ambas representaciones de $\sigma$ dan el mismo punto en la esfera, luego, por tratarse de transformaciones de la esfera en la esfera, las matrices $\sigma$ y $-\sigma$ representan una isometría del espacio $\{u^1, u^2, u^3\}$, es decir, una rotación.

Si en la ecuación (3.12) ponemos

$$v^0 = i(\xi_1'\xi_1'^{*} + \xi_2'\xi_2'^{*}) \quad , \quad v^1 = \xi_1'\xi_2'^{*} + \xi_1'^{*}\xi_2' \quad , \quad v^2 = \frac{1}{i}(\xi_1'^{*}\xi_2' - \xi_1'\xi_2'^{*}) \, , \quad v^3 = \xi_1'\xi_1'^{*} - \xi_2'\xi_2'^{*} \qquad (3.13)$$

se tiene claramente que

$$(v^1)^2 + (v^2)^2 + (v^3)^2 + (v^4)^2 = 0 . \qquad (3.14)$$

Podemos afirmar entonces que un espinor corresponde a la imagen de un vector nulo bajo la proyección estereográfica.

Como siguiente tema, abordaremos ahora el análisis detallado del grupo de isometrías de los espinores asociados con $\mathbb{C}\mathcal{E}_4$.

Notando primero que el producto $(\xi|\lambda) = \xi_0\lambda_{12} - \xi_1\lambda_2 + \xi_2\lambda_1 - \xi_{12}\lambda_0$ puede ser visto como un producto de la forma

$$(x|y) = \sum_{i=1}^{2}(x_i y_{i+2} - x_{i+2} y_i) = x_1y_3 - x_3y_1 + x_2y_4 - x_4y_2 \qquad (3.15)$$

Podemos tomar una base $\{p_i\} \in \mathcal{U}_4$, donde $\mathcal{U}_4$ es el espacio de los espinores, de tal forma que se tenga $\xi_0 = x_2$, $\xi_{12} = x_4$, $\xi_1 = x_3$, $\xi_2 = x_1$, esto es,

$$\xi = \xi_1 p_1 + \xi_0 p_2 + \xi_1 p_3 + \xi_{12} p_4 \qquad (3.16)$$

Definimos ahora de la manera acostumbrada, la base dual $\{q^i\}_{i=1}^{4}$ con $\{q^i\} \in \mathcal{U}_4^*$ de modo que $q^i(p_j) = \delta^i{}_j$, y poniendo

$$(\xi|\lambda) := \xi \cdot \Gamma \cdot \lambda$$

es elemental ver que la métrica debe tener la forma

$$\begin{aligned} \Gamma &= q^1 \wedge q^3 + q^2 \wedge q^4 \\ &\equiv q^1 \otimes q^3 - q^3 \otimes q^1 + q^2 \otimes q^4 - q^4 \otimes q^2 , \end{aligned} \qquad (3.17)$$

que en forma matricial puede escribirse como

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vamos a ver que tipo de transformaciones nos proporcionan invariancia del producto escalar (3.15). Sea $\xi' = S\xi$ y $\lambda' = S\lambda$, entonces, para tener invariancia,

$$(\xi'|\lambda') = S\xi \cdot \Gamma \cdot S\lambda = \xi \cdot \tilde{S} \cdot \Gamma \cdot S \cdot \lambda = \xi \cdot \Gamma \cdot \lambda = (\xi|\lambda)$$

es decir, se debe satisfacer la condición

$$\tilde{S} \cdot \Gamma \cdot S = \Gamma \qquad (3.18)$$

Claramente, el inverso a $\Gamma$ en (3.17) es

$G = p_3 \otimes p_1 - p_1 \otimes p_3 + p_4 \otimes p_2 - p_2 \otimes p_4 = p_3 \wedge p_1 + p_4 \wedge p_2$, y esto nos servirá para encontrar la forma explícita de los S's que dejan invariante el producto escalar de espinores. Para ello, tomemos primero sus generadores infinitesimales: Pongamos $S=\tilde{E}+\epsilon A$, donde $E=G\cdot\Gamma$ y por consiguiente, como $\hat{E}\in U_4\otimes U_4'$, $A\in U_4\otimes U_4'$. Sustituyendo en (3.18) tenemos

$$(E+\epsilon\tilde{A})\cdot\Gamma\cdot(\tilde{E}+\epsilon A)=\Gamma$$

lo cual implica que

$$\tilde{A}\cdot\Gamma+\Gamma\cdot A=0=(-\Gamma\cdot A)^{\sim}+\Gamma\cdot A$$

ya que $\Gamma=-\tilde{\Gamma}$, y por ello

$$(\Gamma\cdot A)=(\Gamma\cdot A)^{\sim}\equiv B\,. \tag{3.19}$$

Con esto, podemos ya obtener todas los A's posibles, notando que B es simétrico y A=GB, ya que

$$G\cdot\Gamma\cdot A=\tilde{E}\cdot A=A=G\cdot B$$

entonces

$$\begin{aligned}
A^{11}&=G\cdot(q^1\otimes q^1)=p_3\otimes q^1\,,\\
A^{22}&=G\cdot(q^2\otimes q^2)=p_4\otimes q^2\,,\\
A^{33}&=G\cdot(q^3\otimes q^3)=-p_1\otimes q^3\,,\\
A^{44}&=G\cdot(q^4\otimes q^4)=-p_2\otimes q^4\,,\\
A^{12}&=G\cdot(q^1\otimes q^2+q^2\otimes q^1)=p_3\otimes q^2+p_4\otimes q^1.\\
A^{13}&=G\cdot(q^1\otimes q^3+q^3\otimes q^1)=p_3\otimes q^3-p_1\otimes q^1.\\
A^{14}&=G\cdot(q^1\otimes q^4+q^4\otimes q^1)=p_3\otimes q^4-p_2\otimes q^1.\\
A^{23}&=G\cdot(q^2\otimes q^3+q^3\otimes q^2)=p_4\otimes q^3-p_1\otimes q^2.\\
A^{24}&=G\cdot(q^2\otimes q^4+q^4\otimes q^2)=p_4\otimes q^4-p_2\otimes q^2,\\
A^{34}&=G\cdot(q^3\otimes q^4+q^4\otimes q^3)=-p_1\otimes q^4-p_2\otimes q^3.
\end{aligned} \tag{3.20}$$

Evidentemente, la forma matriciál de estoas generadores infinitesimales es

$$A^{11}=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\quad A^{22}=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix},\quad A^{33}=\begin{pmatrix}0&0&-1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\quad A^{44}=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&-1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$A^{12}=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix},\quad A^{13}=\begin{pmatrix}-1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\quad A^{14}=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\-1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix},\quad A^{23}=\begin{pmatrix}0&-1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}$$

$$A^{24}=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\quad A^{34}=\begin{pmatrix}0&0&0&-1\\0&0&-1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

Recordando que las matrices de Pauli son

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} .$$

se tiene que

$$\frac{1}{2}(\sigma_1 + i\sigma_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \frac{1}{2}(\sigma_1 - i\sigma_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{2}(I_2 + \sigma_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \frac{1}{2}(I_2 - \sigma_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Finalmente, tomando el producto de Kronecker para matrices nos queda que

$$\begin{aligned}
A^{11} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{2}(I_2+\sigma_3) & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes \frac{1}{2}(I_2+\sigma_3) = \frac{1}{2}(\sigma_1 - i\sigma_2) \otimes \frac{1}{2}(I_2+\sigma_3) , \\
A^{22} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes \frac{1}{2}(I_2-\sigma_3) = \frac{1}{4}(\sigma_1 - i\sigma_2) \otimes (I_2-\sigma_3) , \\
A^{33} &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \otimes \frac{1}{2}(I_2+\sigma_3) = -\frac{1}{4}(\sigma_1 + i\sigma_2) \otimes (I_2+\sigma_3) , \\
A^{44} &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \otimes \frac{1}{2}(I_2-\sigma_3) = -\frac{1}{4}(\sigma_1 + i\sigma_2) \otimes (I_2-\sigma_3) , \\
A^{12} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes \sigma_1 = \frac{1}{2}(\sigma_1 - i\sigma_2) \otimes \sigma_1 , \\
A^{13} &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & +1 \end{pmatrix} \otimes \frac{1}{2}(I_2+\sigma_3) = -\frac{1}{2}\sigma_3 \otimes (I_2+\sigma_3) , \\
A^{14} &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}(\sigma_1 - i\sigma_2) & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(\sigma_1 + i\sigma_2) \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\sigma_1 \otimes \sigma_1 + \frac{i}{2} I_2 \otimes \sigma_2 , \\
A^{23} &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}(\sigma_1 + i\sigma_2) & \\ & \frac{1}{2}(\sigma_1 - i\sigma_2) \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\sigma_2 \otimes \sigma_1 - \frac{i}{2} I_2 \otimes \sigma_2 , \\
A^{24} &= -\frac{1}{2}\sigma_3 \otimes (I_2 - \sigma_3) , \\
A^{34} &= \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}(\sigma_1 + i\sigma_2) \otimes \sigma_1 .
\end{aligned} \qquad (3.21)$$

Para obtener ahora los elementos del grupo, debemos aplicar un numero infinito de veces la transformación infinitesimal, esto es

$$S^{ij} = \lim_{N \to \infty} \left(\tilde{E} + \epsilon A^{ij}\right)^N .$$

Por analogía con la función exponencial

$$e^{x}=\lim_{\mathcal{N}\to\infty}\left(1+\frac{x}{\mathcal{N}}\right)^{\mathcal{N}}$$

ponemos $\epsilon=\frac{\alpha}{\mathcal{N}}$ ,con $\alpha$ un parámetro finito,y se tiene entonces que

$$S^{ij}=e^{\alpha A^{ij}}=\left(I_2\otimes I_2+\frac{\alpha A^{ij}}{1}+\frac{\alpha^2(A^{ij})^2}{2!}+\dots\right) \tag{3.22}$$

Notando que para $A^{ii}$ tenemos que $(A^{ii})^2=0$,resulta que

$$\begin{aligned}
S^{11} &= I_2\otimes I_2+\alpha A^{11} = I_2\otimes I_2+\frac{\alpha_1}{4}(\sigma_1-i\sigma_2)\otimes(I_2+\sigma_3),\\
S^{22} &= I_2\otimes I_2+\frac{\alpha_2}{4}(\sigma_1-i\sigma_2)\otimes(I_2-\sigma_3),\\
S^{33} &= I_2\otimes I_2-\frac{\alpha_3}{4}(\sigma_1+i\sigma_2)\otimes(I_2+\sigma_3),\\
S^{44} &= I_2\otimes I_2-\frac{\alpha_4}{4}(\sigma_1+i\sigma_2)\otimes(I_2-\sigma_3),\\
S^{12} &= I_2\otimes I_2-\frac{\alpha_5}{4}(\sigma_1-i\sigma_2)\otimes\sigma_1 ,
\end{aligned} \tag{3.23}$$

Notando además que $(A^{13})^2=p_1\otimes q^1+p_3\otimes q^3$ , $(A^{13})^2=-p_1\otimes q^1+p_3\otimes q^3=A^{13}$ se tiene

$$(A^{13})^2=\frac{1}{2}I_2\otimes(I_2+\sigma_3)$$

$$(A^{24})^2=\frac{1}{2}I_2\otimes(I_2-\sigma_3)$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}
S^{13}=e^{\alpha_6A^{13}} &= I_2\otimes I_2+\alpha_6A^{13}+\frac{1}{2}\alpha_6^2(A^{13})^2+\dots \\
&= I_2\otimes I_2+\operatorname{senh}\alpha_6(A^{13})+(\cosh\alpha_6-1)(A^{13})^2,
\end{aligned} \tag{3.24}$$

$$\begin{aligned}
S^{24}=e^{\alpha_7A^{24}} &= I_2\otimes I_2+\alpha_7A^{24}+\frac{1}{2}\alpha_7^2(A^{24})^2+\dots ,\\
&= I_2\otimes I_2+\operatorname{senh}\alpha_7\left(-\frac{1}{2}\sigma_3\otimes(1-\sigma_3)\right)+(\cosh\alpha_7-1)\left(\frac{1}{2}I_2\otimes(I_2-\sigma_3)\right).
\end{aligned} \tag{3.25}$$

Mas aun,como las demás $A^{ij}$'s son nilpotentes,obtenemos que

$$\begin{aligned}
S^{14} &= I_2\otimes I_2-\frac{\alpha_8}{2}(\sigma_3\otimes\sigma_1-iI_2\otimes\sigma_2),\\
S^{23} &= I_2\otimes I_2-\frac{\alpha_9}{2}(\sigma_3\otimes\sigma_1+iI_2\otimes\sigma_2)\\
S^{34} &= I_2\otimes I_2-\frac{\alpha_{10}}{2}((\sigma_1+i\sigma_2)\otimes\sigma_1)
\end{aligned} \tag{3.26}$$

Las transformaciones $S^{ij}$ obtenidas claramente son los elementos del grupo simpléctico[25] Sp(4).En efecto,el determinante de $S^{ij}$ es igual a uno,el número de parámetros independientes (N) del grupo satisface $N=n(n+1)/2=10$ ($n=4$ dimensiones),y el producto escalar de dos vectores en el espacio de representación del grupo tiene la forma simpléctica

$$(x,y)=x_1y_2-x_2y_1+x_3y_4-x_4y_3. \tag{3.27}$$

Sabemos también que los vectores base $\{a_1,a_2,a_3,a_4\}$ del espacio $\mathbb{C}\mathcal{E}_4$ inducen los operadores de reflexión $X(\underline{a}_1),\dots X(\underline{a}_4)$ en el espacio de los espinores,y dichos operadores satisfacen el álgebra de Clifford

$$X(a_i)X(a_j)+X(a_j)X(a_i)=2(a_i|a_j)=2\delta_{ij}$$

Los elementos del álgebra de Clifford son

$$\mathcal{B}_{C\mathcal{E}_4}=\{\mathbb{1},\ X(a_1),X(a_2),X(a_3),X(a_4),X(a_1)X(a_2),X(a_1)X(a_3),X(a_1)X(a_4),X(a_2)X(a_3),X(a_2)X(a_4),X(a_3)X(a_4),$$
$$X(a_1)X(a_2)X(a_3),X(a_1)X(a_2)X(a_4),X(a_1)X(a_3)X(a_4),X(a_2)X(a_3)X(a_4),\ X(a_1)X(a_2)X(a_3)X(a_4)\},\qquad(3.28)$$

es decir, $2^n=16$ elementos.

Por las propiedades de los operadores $X(\underline{a}_i)$, podemos formar un grupo multiplicativo $C_E^*$, de 32 elementos a partir de $\mathcal{B}_{C\mathcal{E}_4}$ poniendo simplemente $\pm$ a cada elemento de $\mathcal{B}_{C\mathcal{E}_4}$, a fin de disponer de todos los inversos multiplicativos, y a $C_E^*$ lo llamamos gupo de Clifford[14]

Ahora, sabemos que el grupo de Clifford es también un grupo de isometrías de $(\xi|\lambda)$.

En pparticular, consideremos primero aquellos elementos obtenidos de (3.28) de la forma

$$Y^{ij}=\cos\frac{\theta_{ij}}{2}I_2\otimes I_2+\operatorname{sen}\frac{\theta_{ij}}{2}X(a_i)X(a_j)\qquad(i\neq j).\qquad(3.29)$$

La invariancia del producto escalar puede verificarse facilmente notando que

$$(Y^{ij}\xi\,|\,Y^{ij}\lambda)=\left(\left(\cos\frac{\theta_{ij}}{2}I_2\otimes I_2+\operatorname{sen}\frac{\theta_{ij}}{2}X(a_i)X(a_j)\right)\xi\,\Big|\left(\cos\frac{\theta_{ij}}{2}I_2\otimes I_2+\operatorname{sen}\frac{\theta_{ij}}{2}X(a_i)X(a_j)\right)\lambda\right)$$
$$=(\xi|\lambda)\cos^2\frac{\theta_{ij}}{2}+\operatorname{sen}\frac{\theta_{ij}}{2}\{(X(a_i)X(a_j)\xi|\lambda)+(\xi|X(a_i)X(a_j)\lambda)\}+\operatorname{sen}^2\frac{\theta_{ij}}{2}(X(a_i)X(a_j)\xi|X(a_i)X(a_j)\lambda)$$

pero como $X(a_i)X(a_j)=-X(a_j)X(a_i)$, y $(X(a_i)\xi|\lambda)=(\xi|X(a_i)\lambda)$

$$\therefore\ (Y^{ij}\xi|Y^{ij}\lambda)=(\xi|\lambda)\cos^2\frac{\theta_{ij}}{2}+(\xi|\lambda)\operatorname{sen}^2\frac{\theta_{ij}}{2}=(\xi|\lambda).\qquad(3.30)$$

Por otro lado, los operadores $X(\underline{a}_i)$ pueden también ser puestos en términos de las matrices de Pauli. Por ejemplo

$$X(a_1)\xi=\xi_0\,p_3-\xi_2\,p_4+\xi_1\,p_2-\xi_{12}\,p_1,$$

de donde

$$X(a_1)=p_3\otimes q^2+p_2\otimes q^3-p_4\otimes q^1-p_1\otimes q^4,$$

que puesto en forma matricial nos da

$$X(a_1)=\begin{pmatrix}0&0&0&-1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\-1&0&0&0\end{pmatrix}=\sigma_2\otimes\sigma_2\ .\qquad(3.31)$$

Análogamente, encontramos que

$$\begin{aligned}X(a_2)&=-\sigma_1\otimes\sigma_2\ ,\\X(a_3)&=I_2\otimes\sigma_1\\X(a_4)&=-\sigma_3\otimes\sigma_2\end{aligned}\qquad(3.32)$$

y tenemos por consiguiente que el álgebra de Clifford en términos de las matrices de Pauli puede expresarse como

$$
\begin{aligned}
X(a_1)X(a_2) &= [\sigma_2\otimes\sigma_2]\cdot[-\sigma_1\otimes\sigma_2] = i\sigma_3\otimes\sigma_2\cdot\sigma_2 = i\sigma_3\otimes I_2 ,\\
X(a_1)X(a_3) &= [\sigma_2\otimes\sigma_2]\cdot[I_2\otimes\sigma_1] = -i\sigma_2\otimes\sigma_3 ,\\
X(a_1)X(a_4) &= [\sigma_2\otimes\sigma_2]\cdot[-\sigma_3\otimes\sigma_2] = i\sigma_1\otimes I_2 ,\\
X(a_2)X(a_3) &= [-\sigma_1\otimes\sigma_2]\cdot[I_2\otimes\sigma_1] = i\sigma_1\otimes\sigma_3 ,\\
X(a_2)X(a_4) &= [-\sigma_1\otimes\sigma_2]\cdot[-\sigma_3\otimes\sigma_2] = -i\sigma_2\otimes I_2 ,\\
X(a_3)X(a_4) &= [I_2\otimes\sigma_1]\cdot[-\sigma_3\otimes\sigma_2] = -i\sigma_3\otimes\sigma_3 .
\end{aligned}
\qquad (3.33)
$$

Los elementos $Y^{ij}$, definidos en (3.29) toman ahora la forma

$$
\begin{aligned}
Y^{12} &= \cos\tfrac{\theta_1}{2} I_2\otimes I_2 + i\,\mathrm{sen}\tfrac{\theta_1}{2}(\sigma_3\otimes I_2) = e^{i\frac{\theta_1}{2}(\sigma_3\otimes I_2)} ,\\
Y^{13} &= \cos\tfrac{\theta_2}{2} I_2\otimes I_2 - i\,\mathrm{sen}\tfrac{\theta_2}{2}(\sigma_1\otimes\sigma_3) = e^{-i\frac{\theta_2}{2}(\sigma_1\otimes\sigma_3)} ,\\
Y^{14} &= \cos\tfrac{\theta_3}{2} I_2\otimes I_2 + i\,\mathrm{sen}\tfrac{\theta_3}{2}(\sigma_1\otimes I_2) = e^{i\frac{\theta_3}{2}(\sigma_1\otimes I_2)} ,\\
Y^{23} &= \cos\tfrac{\theta_4}{2} I_2\otimes I_2 + i\,\mathrm{sen}\tfrac{\theta_4}{2}(\sigma_1\otimes\sigma_3) = e^{i\frac{\theta_4}{2}(\sigma_1\otimes\sigma_3)} ,\\
Y^{24} &= \cos\tfrac{\theta_5}{2} I_2\otimes I_2 - i\,\mathrm{sen}\tfrac{\theta_5}{2}(\sigma_2\otimes I_2) = e^{-i\frac{\theta_5}{2}(\sigma_2\otimes I_2)} ,\\
Y^{34} &= \cos\tfrac{\theta_6}{2} I_2\otimes I_2 - i\,\mathrm{sen}\tfrac{\theta_6}{2}(\sigma_3\otimes\sigma_3) = e^{-i\frac{\theta_6}{2}(\sigma_3\otimes\sigma_3)} .
\end{aligned}
$$

Es evidente ahora que las $Y^{ij}$ obtenidas satisfacen la propiedad

$$
Y^{ij}\,X(a_i)(Y^{ij})^{-1} = X(a_k) \qquad (3.34)
$$

entonces, podemos ver que las $Y^{ij}$ junto con $I_2\otimes I_2$ y $X(a_1)X(a_2)X(a_3)X(a_4)$ forman un grupo, que denotaremos por Spin(4,C) que satisface las condiciones[16]

$$
\begin{aligned}
&\Lambda\,\underset{\sim}{v}\,\Lambda^{-1} \in C_1 \qquad \forall\ \underset{\sim}{v}\in C_1 ,\ \Lambda\in \mathrm{Spin}(4,C)\\
&\Lambda\,\tilde{\Lambda} = \pm 1
\end{aligned}
\qquad (3.35)
$$

donde $C_1$ son los elementos generados por $\{X(a_1), X(a_2), X(a_3), X(a_4)\}$.

Si al grupo Spin(4,C) le agregamos los elementos de orden impar del álgebra de Clifford, obtenemos otro grupo, al cual llamamos Pin(4,C). Los elementos adicionales son

$$
X(a_1) = \sigma_2\otimes\sigma_1 ,\quad X(a_2) = -\sigma_1\otimes\sigma_2 ,\quad X(a_3) = I_2\otimes\sigma_1 ,\quad X(a_4) = -\sigma_3\otimes\sigma_2
$$

$$
X(a_1)X(a_2)X(a_3) = i\sigma_3\otimes\sigma_1 ,\ X(a_1)X(a_2)X(a_4) = -iI_2\otimes\sigma_2 ,\ X(a_1)X(a_3)X(a_4) = i\sigma_1\otimes\sigma_1 ,\ X(a_2)X(a_3)X(a_4) = i\sigma_2\otimes\sigma_1 .
$$

Es claro que los elementos de Pin(4,C) satisfacen la condición (3.13), ya que para P Pin(4,C) se cumple

$$
\tilde{P}\cdot\Gamma\cdot P = \Gamma
$$

y det(P)=1. Entonces $\mathrm{Spin}(4,C)\subset \mathrm{Pin}(4,C)\subset \mathrm{Sp}(4,C)$. De hecho, tomando combinaciones lineales de los generadores de Sp(4.C) podemos construír todos los generadores infinitesimales de Pin(4,C):

$$\begin{aligned}
A'_1 &= -(A^{13}+A^{24}) = \sigma_3\otimes I_2 \ , \\
A'_2 &= A^{11}-A^{22}-A^{44}+A^{33} = i\sigma_2\otimes\sigma_3 \ , \\
A'_3 &= A^{11}+A^{22}-A^{33}-A^{44} = \sigma_1\otimes I_2 \ , \\
A'_4 &= A^{11}-A^{22}-A^{33}-A^{44} = \sigma_1\otimes\sigma_3 \ , \\
A'_5 &= A^{11}+A^{22}+A^{33}+A^{44} = -i\sigma_2\otimes I_2 \ . \\
A'_6 &= A^{24}-A^{13} = \sigma_3\otimes\sigma_3 \ , \\
A'_7 &= A^{12}-A^{34} = i\sigma_2\otimes\sigma_1 \ , \\
A'_8 &= A^{12}-A^{34} = \sigma_1\otimes\sigma_1 \ , \\
A'_9 &= A^{14}+A^{23} = -\sigma_3\otimes\sigma_1 \ , \\
A'_{10} &= A^{14}-A^{23} = i I_2\otimes\sigma_2 \ .
\end{aligned} \tag{3.36}$$

Nótese que los generadores A' también satisfacen la condición

$$\tilde{A}'\cdot\Gamma + \Gamma\cdot A' = 0 \tag{3.37}$$

por lo que son igualmente buenos como generadores de Sp(4,C).

Vemos también que

$$X(a_1)X(a_2)X(a_3)X(a_4) = I_2\otimes\sigma_3 = \Gamma(-i\sigma_2\otimes\sigma_3) = e^{-\frac{\pi}{2}A'_5}e^{\frac{\pi}{2}A'_1} \in Sp(4,C)$$

$$X(a_1) = \sigma_2\otimes\sigma_2 = -\Gamma(i I_2\otimes\sigma_1) = e^{\frac{\pi}{2}A'_2}e^{\frac{\pi}{2}A'_{10}} \in Sp(4,C)$$

$$X(a_2) = -\sigma_1\otimes\sigma_1 = i(\sigma_1\otimes I_2)(i I_2\otimes\sigma_2) = e^{i\frac{\pi}{2}A'_3}e^{\frac{\pi}{2}A'_{10}} \in Sp(4,C)$$

$$X(a_4) = -\sigma_3\otimes\sigma_2 = (i\sigma_3\otimes I_2)(i I_2\otimes\sigma_2) = e^{i\frac{\pi}{2}A'_1}e^{\frac{\pi}{2}A'_{10}} \in Sp(4,C)$$

para los elementos faltantes en Spin(4,C) obtenemos lo siguiente

$$\begin{aligned}
Y^{12}\left(\tfrac{\theta_1}{2}\right) &= e^{i\frac{\theta_1}{2}A'_7} && \in Sp(4,C) \ , \\
Y^{13}\left(\tfrac{\theta_2}{2}\right) &= e^{\frac{\theta_2}{2}A'_2} && \in Sp(4,C) \ , \\
Y^{14}\left(\tfrac{\theta_3}{2}\right) &= e^{-i\frac{\theta_3}{2}A'_3} && \in Sp(4,C) \ , \\
Y^{23}\left(\tfrac{\theta_4}{2}\right) &= e^{i\frac{\theta_4}{2}A'_9} && \in Sp(4,C) \ , \\
Y^{24}\left(\tfrac{\theta_5}{2}\right) &= e^{\frac{\theta_5}{2}A'_5} && \in Sp(4,C) \ , \\
Y^{34}\left(\tfrac{\theta_6}{2}\right) &= e^{-i\frac{\theta_6}{2}A'_6} && \in Sp(4,C) .
\end{aligned}$$

Nos falta únicamente por demostrar que las A' son linealmente independientes a fin de ver que los espacios generados por $A^{ij}$ y $A^{i}$ son isomorfos. Para ello, hacemos

$$A^{11}=A_1 \ , \quad A^{22}=A_2 \ , \quad A^{33}=A_3 \ , \quad A^{44}=A_4 \ , \quad A^{12}=A_5 \ , \quad A^{13}=A_6 \ .$$
$$A^{14}=A_7 \ , \quad A^{23}=A_8 \ , \quad A^{24}=A_9 \ , \quad A^{34}=A_{10} \ ,$$

y ponemos $A_i'=a_{ij}A_j$. Para demostrar que las $A_i'$ son linealmente independientes debemos verificar que la matriz $a_{ij}$ tenga determinante distinto de cero, lo cual es sencillo si notamos que

$$\mathfrak{a}_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

que transformamos a una matriz equivalente

$$a_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

la cual evidentemente tiene determinante distinto de cero, quedando así demostrado que $Pin(4,C) \subset Sp(4,C)$.

Hemos visto hasta aquí que el grupo Spin(4,C) es un grupo de invariancia para el producto escalar $(\xi|\lambda)$, sin embargo, es no es posible mediante combinaciones de elementos del grupo Spin(4,C) generar a todo el grupo Sp(4,C), que es el grupo total de isometrías del producto escalar.

## 3b) Espinores asociados con el espacio $\mathcal{C}\mathcal{E}_3$ .

Consideremos ahora a los espinores en un espacio tan conocido como lo es el espacio Euclideano tridimensional. En este espacio tenemos que $\nu=1$, y la forma fundamental del espacio complexificado esta dada por $\Phi=(x^0)^2+x^1x^{1'}$ para un vector $\underline{x}=(x^0,x^1,x^2)$ referido a las coordenadas ortogonales con base $\{\eta_1,\eta_2,\eta_3\}$ , donde $\eta_1=(1,0,0)$, $\eta_2=(0,1,0)$; $\eta_3=(0,0,1)$. De la ecuación (1.4 ) tenemos entonces que

$$e_1=\tfrac{1}{2}(\eta_1+i\eta_2).$$

y en la base recíproca, $\epsilon^1=(\eta_1-i\eta_2)$.

Aplicando ahora el operador $X(\underline{z})$ obtenemos para las reflexiones de los espinores en torno de cada uno de los ejes coordenados la matrices de Pauli. Para verificarlo, tomtmos primero un espinor $\xi$ ; como $\nu=1$ la forma de $\xi$ es

$$\xi=\xi_0+\xi_1\epsilon^1$$

y de la definición (2.2) se encuentra fácilmente que como $S\xi_0=\xi_0$ y $S\xi_1=-\xi_1\epsilon^1$ ,

$$X(e_0)\xi=\xi_0-\xi_1\epsilon^1,$$
$$X(e_1)\xi=\xi\cdot e_1=\xi_1$$
$$X(e_1')\xi=2\xi_0\wedge e_1'=2\xi_0 e_1'=\xi_0\epsilon^1$$

Representando esto en forma matricial tendremos de la primera ecuación

$$X(e_0)\xi=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi_0\\ \xi_1\epsilon^1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\xi_0\\ -\xi_1\epsilon^1\end{pmatrix}=\sigma_z\xi\,. \tag{3.38}$$

Para obtener las demás, debemos encontrar la expresión para la reflexión del espinor $\xi$ con respecto a $\eta_1$ y $\eta_2$ . Centrando nuestra atención en el vector isotrópico $e_1$ , vemos que $\eta_1=e_1+e_1'$ y $\eta_2=i(e_1'-e_1)$ , entonces, por la linealidad del operador $X(\underline{z})$ se encuentra que

$$X(\eta_1)\xi=X(e_1+e_1')\xi=X(e_1)\xi+X(e_1')\xi=\xi_1+\xi_0\epsilon^1$$

y tomando nuevamente el lenguaje matricial,

$$X(\eta_1)\xi=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi_0\\ \xi_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_0\end{pmatrix}=\sigma_x\xi\,. \tag{3.39}$$

Finalmente se llega a

$$X(\eta_2)\xi = X(ie_1' - ie_1)\xi = iX(e_1')\xi - iX(e_1)\xi = i(\xi_0 \epsilon^1 - \xi_1)$$

por lo tanto,

$$X(\eta_2)\xi = i\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi_0 \\ \xi_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i\xi_1 \\ \xi_0 \end{pmatrix} = \sigma_y\,\xi\,. \qquad (3.40)$$

Hemos encontrado entonces que la reflexión de un espinor en tres dimensiones es susceptible de expresarse en términos de las matrices de Pauli, y además, a cada rotación le corresponde un par de representaciones en términos de matrices generadas por las de Pauli, es decir, llegamos a que mediante el uso de los elementos del grupo U(2) somos capaces de dar una descripción bivaluada del grupo O(3)[17].

## 3c) Relación Entre Twistores y Espinores para $\mathbb{C}\mathcal{E}_{4,2}$ .

Los twistores pueden ser brevemente caracterizados como los tensores del grupo SU(2,2).Ahora,SU(2,2) es 2:1 homomórfico a la componentre conexa de O(4,2), y a su vez,O(4,2) es 2:1 homomórfico[28] al grupo conforme $\mathcal{C}$ de 15 parámetros en un espacio de Minkowski compactificado ($\mathcal{M}$).Consecuentemente,los twistores de rango uno forman una base para dar una representación 4:1 del grupo de transformaciónes conformes.De esta manera,podemos afirmar que un producto escalar que sea invariante bajo SU(2,2) también lo será bajo $\mathcal{C}$ .Para poder tener la invariancia bajo SU(2,2) vamos a tener que confinar a los twistores a estar inmersos en un espacio de cuatro dimensiones,definido sobre el campo de los números complejos,al cual vamos a dotar a priori de una métrica Hermitiana

$$\eta^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} ,$$

es decir,con la siguiente norma invariante bajo SU(2,2):

$$\| X(t) = t^{+}_{\alpha} \eta^{\alpha\beta} t_{\beta} = \bar{t}t = |t_1|^2 + |t_2|^2 - |t_3|^2 - |t_4|^2 ,$$

donde $\bar{t}=t^{*}\eta$ .El homomorfismo entre SU(2,2) y el grupo conforme se obtiene mediante la elección de las siguientes matrices Hermitianas[29] de 4x4:

$$p_\mu = \mp \frac{1}{2} \gamma_\mu (I_4 \pm i\gamma_5) \quad , \qquad K_\mu = \pm \frac{1}{2} \gamma_\mu (I_4 \mp i\gamma_5) ,$$
$$m_{\mu\nu} = J_{\mu\nu} = \frac{1}{4} [\gamma_\mu, \gamma_\nu] \quad , \qquad d = \mp \frac{1}{2} \gamma_5 , \qquad (3.41)$$

donde $\gamma_0 = \eta = \sigma_3 \otimes I_2$.El hecho de tener dos signos posibles en la representación del grupo conforme corresponde a tener una representación izquierda y otra derecha de este .

Vamos ahora a ver como podemos obtener un espacio twistoriala partir de nuestro formalismo de espinores.Comenzamos con el espacio Seudo-euclideano $\mathbb{C}\mathcal{E}_{4,2}$ ,que tiene la forma fundamental

$$\Phi(\underline{z})=(x^1)^2+\ldots+(x^4)^2-(x^5)^2-(x^6)^2 ,$$

y evidentemente,al llevar a cabo la complexificación vamos a tener que la máxima dimensión posible de un subespacio isotrópico en $\mathbb{C}\mathcal{E}_{4,2}$ es $\nu=3$.Un espinor entonces tiene la forma

$$\xi = \xi_0 + \xi_i \epsilon^i + \xi_{12} \epsilon^1 \wedge \epsilon^2 + \xi_{13} \epsilon^1 \wedge \epsilon^3 + \xi_{23} \epsilon^2 \wedge \epsilon^3 + \xi_{123} \epsilon^1 \wedge \epsilon^2 \wedge \epsilon^3$$

y podemos descomponerlo en semiespinores, dados por

$$\xi = \xi_e + \xi_o = \left(\xi_0 + \xi_{12} \epsilon^1 \wedge \epsilon^2 + \xi_{13} \epsilon^1 \wedge \epsilon^3 + \xi_{23} \epsilon^2 \wedge \epsilon^3\right) + \left(\xi_i \epsilon^i + \xi_{123} \epsilon^1 \wedge \epsilon^2 \wedge \epsilon^3\right).$$

Llevando a cabo la conjugación del espinor $\xi$, vamos a tener para la componente $\xi_o$

$$\begin{aligned} \xi_o^c &= i\left[X(e_1) - X(e_1')\right]\xi_o^* = i\left[\xi_1^* + \xi_{123}^* \epsilon^2 \wedge \epsilon^3 - \xi_2^* \epsilon^2 \wedge \epsilon^1 - \xi_3^* \epsilon^3 \wedge \epsilon^1\right] \\ &= i\left[\xi_1^* + \xi_{123}^* \epsilon^2 \wedge \epsilon^3 + \xi_2^* \epsilon^2 \wedge \epsilon^1 + \xi_3 \epsilon^3 \wedge \epsilon^1\right] =: \psi_e . \end{aligned} \tag{3.42}$$

Es claro que la operación de conjugación transforma un semiespinor del segundo tipo en un semiespinor del primer tipo. La misma situación se tiene en el caso de que se decida conjugar la componente $\xi_e$. En vista de que el producto escalar tiene que ser un múltiplo de $\Lambda$, vamos a tener necesariamente que para $\nu=3$ el producto escalar mezcla semiespinores del primer tipo con semiespinores del segundo tipo, es decir, vamos a tener que para $\lambda = \lambda_e + \lambda_o$,

$$(\xi_o \mid \lambda_o) = (\xi_e \mid \lambda_e) = 0 . \tag{3.43}$$

Sin embargo, en virtud de que la operación de conjugación nos transforma la componente $\xi_o$ en una componente $\psi_e$, podemos definir un nuevo producto escalar para semiespinores del mismo tipo dado por

$$\begin{aligned} \langle \xi_o \mid \lambda_o \rangle &:= (\xi^c \mid \lambda) = \\ &= i\left[\sum_{p=1}^{3} \sum_{<} (-1)^{\frac{1}{2}p(p+1)} \epsilon^{k_1 \dots k_p j_1 \dots j_{\nu-p}} \xi^{*}_{k_1 \dots k_p} \lambda_{j_1 \dots j_{\nu-p}}\right] \\ &= i\left[\xi_1^* \lambda_{123} - \xi_2^* \lambda_3 + \xi_3^* \lambda_2 - \xi_{123}^* \lambda_1\right] . \end{aligned} \tag{3.44}$$

De aqui en adelante omitiremos el subíndice de los semiespinores. Definamos ahora una base $\{g^1, g^2, g^3, g^{123}\}$ tal que

$$\begin{aligned} \langle g^1 \mid g^{123} \rangle &= i , & \langle g^3 \mid g^2 \rangle &= i , \\ \langle g^{123} \mid g^1 \rangle &= -i , & \langle g^2 \mid g^3 \rangle &= -i , \end{aligned} \tag{3.45}$$

en la cual el semiespinor $\xi$ va a estar dado por

$$\xi = \xi_1 g^1 + \xi_2 g^2 + \xi_3 g^3 + \xi_{123} g^{123} . \tag{3.46}$$

El producto escalar $\langle \xi \mid \lambda \rangle$ es claramente lineal en $\lambda$ y antilineal en $\xi$, ya que para $p \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned} \langle \xi + p\eta \mid \lambda \rangle &= \langle \xi \mid \lambda \rangle + p^* \langle \eta \mid \lambda \rangle , \\ \langle \xi \mid \lambda + p\mu \rangle &= \langle \xi \mid \lambda \rangle + p \langle \xi \mid \mu \rangle . \end{aligned} \tag{3.47}$$

Además de (3.45) vemos que el producto $\langle \mid \rangle$ es también

Hermitiano. Podemos ahora hacer un cambio de base, definiendo

$$h^1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(g^1 - i g^{123}\right) \quad , \qquad h^2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(g^2 + i g^3\right)$$
$$h^3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(g^1 + i g^{123}\right) \quad , \qquad h^4 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(g^2 - i g^3\right). \tag{3.48}$$

Los vectores $\underline{h}^i$ satisfacen

$$\langle h^1 | h^1 \rangle = \langle \tfrac{1}{\sqrt{2}}(g^1 - i g^{123}) | \tfrac{1}{\sqrt{2}}(g^1 - i g^{123}) \rangle$$
$$= \tfrac{1}{2}\left\{ \langle g^1 | g^1 \rangle - i \langle g^1 | g^{123} \rangle + i \langle g^{123} | g^1 \rangle + \langle g^{123} | g^{123} \rangle \right\} = 1 \tag{3.49}$$
$$\langle h^2 | h^2 \rangle = -\langle h^3 | h^3 \rangle = -\langle h^4 | h^4 \rangle$$

y $\langle h^i | h^j \rangle = 0$ para $i \neq j$.

En esta nueva base reexpresamos al espinor $\xi$, quedando

$$\xi = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{ (\xi_1 + i\xi_{123}) h^1 + (\xi_2 - i\xi_3) h^2 + (\xi_1 - i\xi_{123}) h^3 + (\xi_2 + i\xi_3) h^4 \right\} \tag{3.50}$$

y poniendo

$$\xi_1' = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\xi_1 + i\xi_{123}\right) \quad , \qquad \xi_2' = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\xi_2 - i\xi_3\right),$$
$$\xi_3' = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\xi_1 - i\xi_{123}\right) \quad , \qquad \xi_4' = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\xi_2 + i\xi_3\right). \tag{3.51}$$

obtenemos

$$\xi = \xi_1' h^1 + \xi_2' h^2 + \xi_3' h^3 + \xi_4' h^4 .$$

De esta manera tenemos que (3.44) queda expresada como

$$\langle \xi | \lambda \rangle = \xi_1'^{+} \lambda_1' \langle h^1 | h^1 \rangle + \xi_2'^{+} \lambda_2' \langle h^2 | h^2 \rangle + \xi_3'^{+} \lambda_3' \langle h^3 | h^3 \rangle + \xi_4'^{+} \lambda_4' \langle h^4 | h^4 \rangle \tag{3.52}$$

Hemos logrado hasta aquí llevar al producto escalar de semiespinores a una forma canónica, ya que ahora tenemos

$$\langle \xi | \lambda \rangle = \xi^{+t} \eta \, \lambda$$

donde claramente $\eta$ es una métrica diagonal de signatura $(++--)$,

$$\eta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} , \tag{3.53}$$

como lo requerimos para los twistores. Vamos a verificar en seguida que el grupo de invariancia para el producto escalar $\langle \, | \, \rangle$ es precisamente $SU(2,2)$. Para ello, consideremos la transformación

$$\xi' = M\xi \qquad\qquad \lambda' = M\lambda .$$

por lo que

$$\langle \xi' | \lambda' \rangle = \langle M\xi | M\lambda \rangle = (M\xi)^{+t} \eta (M\lambda) = \xi^{+t} M^{+} \eta M \lambda . \tag{3.54}$$

Es decir, afin de que el producto $\langle \, | \, \rangle$ sea invariante, necesitamosque las matrices M satisfagan la condición

$$M^{+} \eta M = \eta . \tag{3.55}$$

Si nos restringimos a la componente conexa del grupo que generan las matrices M, podemos limitarnos a considerar a M como el conjunto detransformaciones infinitesimales de la forma

$$M = I + \epsilon S \tag{3.56}$$

por lo que la condición de invariancia es

$$(I+\epsilon S)^{+}\eta\,(I+\epsilon S) = \eta \tag{3.57}$$

Despreciando términos infinitesimales de segundo orden,la propiedad que debemos satisfacer es

$$S^{+}\eta + \eta S = 0 \;. \tag{3.58}$$

Por otro lado,el determinante de $\eta$ es uno,lo cual implica tomando en cuenta ( 3.55 ) que det(M) =1.Mas aun como nos estamos restringiendo a la componente conexa del grupo de transformaciones,tenemos que det(M)=1.

Haciendo uso ahora de la relación[30]

$$\det(I+S) = 1 + \operatorname{Tr} S$$

se debe tener que la traza de S es nula,lo que impone una condición adicional sobre S.De esta manera,tomando en cuenta ( 3.58 ) se encuentra mediante procedimientos directos que S debe ser de la forma

$$S = \begin{pmatrix} ip_1 & p_2+ip_3 & p_4+ip_5 & p_6+ip_7 \\ -p_2+ip_3 & ip_8 & p_9+ip_{10} & p_{11}+ip_{12} \\ p_4-ip_5 & -p_9+ip_{10} & ip_{13} & p_{14}+ip_{15} \\ p_6-ip_7 & p_{11}-ip_{12} & -p_{14}+ip_{15} & -i(p_1+p_8+p_{13}) \end{pmatrix} \tag{3.59}$$

es decir,S es generada por un total de 15 parámetros independientes,al igual que el grupo de transformaciones conformes.Podemos der explícitamente los generadores infinitesimales del grupo obtenido,a saber

$$S^1 = \begin{pmatrix} i&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \\ 0&0&0&-i \end{pmatrix}, \quad S^2 = \begin{pmatrix} 0&1&0&0 \\ -1&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \end{pmatrix}, \quad S^3 = \begin{pmatrix} 0&i&0&0 \\ i&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \end{pmatrix},$$

$$S^4 = \begin{pmatrix} 0&0&1&0 \\ 0&0&0&0 \\ 1&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \end{pmatrix}, \quad S^5 = \begin{pmatrix} 0&0&i&0 \\ 0&0&0&0 \\ -i&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \end{pmatrix}, \quad S^6 = \begin{pmatrix} 0&0&0&1 \\ 0&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \\ 1&0&0&0 \end{pmatrix}, \tag{3.60}$$

$$S^7 = \begin{pmatrix} 0&0&0&i \\ 0&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \\ -i&0&0&0 \end{pmatrix}, \quad S^8 = \begin{pmatrix} 0&0&0&0 \\ 0&i&0&0 \\ 0&0&0&0 \\ 0&0&0&-i \end{pmatrix}, \quad S^9 = \begin{pmatrix} 0&0&0&0 \\ 0&0&1&0 \\ 0&-1&0&0 \\ 0&0&0&0 \end{pmatrix},$$

$$S^{10} = \begin{pmatrix} 0&0&0&0 \\ 0&0&i&0 \\ 0&i&0&0 \\ 0&0&0&0 \end{pmatrix}, \quad S^{11} = \begin{pmatrix} 0&0&0&0 \\ 0&0&0&1 \\ 0&0&0&0 \\ 0&1&0&0 \end{pmatrix}, \quad S^{12} = \begin{pmatrix} 0&0&0&0 \\ 0&0&0&i \\ 0&0&0&0 \\ 0&-i&0&0 \end{pmatrix},$$

$$S^{12}=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&i&0\\0&0&0&-i\end{pmatrix}\quad,\qquad S^{14}=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&-1&0\end{pmatrix}\quad,\qquad S^{15}=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&i\\0&0&i&0\end{pmatrix}\tag{3.60}$$

y claramente podemos expresar a las matrices (3.41 ) como combinaciones lineales de las S.Por ejemplo,tomando la representación de Weyl,

$$\gamma_k=i\sigma_2\otimes\sigma_k\quad,\qquad\gamma_0=\sigma_1\otimes I_2\quad,\qquad\gamma_5=\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3=i\sigma_3\otimes I_2\tag{3.61}$$

entonces,como $d=\frac{1}{2}\gamma_5$ ,

$$d=\frac{1}{2}\gamma_5=\frac{i}{2}\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\otimes I_2=\frac{i}{2}\begin{pmatrix}I_2&0\\0&-I_2\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\left(S^1+S^8-S^{13}\right).\tag{3.62}$$

También,

$$p_\mu=\frac{1}{2}\gamma_\mu\left(I_4-i\gamma_5\right),\tag{3.63}$$

por lo tanto

$$\begin{aligned}p_k&=\frac{1}{2}\gamma_k\left(I_4-i\gamma_5\right)=\frac{1}{2}\gamma_k\left(I_2\otimes I_2+\sigma_3\otimes I_2\right)=\frac{1}{2}\gamma_k\left(I_2+\sigma_3\right)\otimes I_2\\&=\frac{i}{2}\left(\sigma_2\otimes\sigma_k\right)\left[\left(I_2+\sigma_3\right)\otimes I_2\right]=\frac{i}{2}\left(\sigma_2+i\sigma_1\right)\otimes\sigma_k=-\frac{i}{2}\left(\sigma_1-i\sigma_2\right)\otimes\sigma_k\\&=-\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\otimes\sigma_k=\begin{pmatrix}0&0\\-\sigma_k&0\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

De esta forma

$$\begin{aligned}p_1&=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\left(S^6+iS^7-S^9-iS^{10}\right),\\p_2&=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&-i&0&0\\i&0&0&0\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\left(S^7+iS^9-iS^6-S^{10}\right),\\p_3&=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\1&0&0&0\\0&-1&0&0\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\left(S^4+iS^5-S^{11}-iS^{12}\right).\end{aligned}\tag{3.64}$$

De la misma manera,tenemos

$$\begin{aligned}k_k&=-\frac{i}{2}\left(\sigma_2\otimes\sigma_k\right)\left(I_2\otimes I_2-\sigma_3\otimes I_2\right)=-\frac{i}{2}\left(\sigma_2\otimes\sigma_k\right)\left[\left(I_2-\sigma_3\right)\otimes I_2\right]\\&=-\frac{i}{2}\left(\sigma_2-i\sigma_1\right)\otimes\sigma_k=-\frac{1}{2}\left(\sigma_1+i\sigma_2\right)\otimes\sigma_k=\begin{pmatrix}0&-1\\0&0\end{pmatrix}\otimes\sigma_k=\begin{pmatrix}0&-\sigma_k\\0&0\end{pmatrix}\end{aligned}\tag{3.65}$$

$$k_1=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\left(S^6-iS^7+S^9+iS^{10}\right)$$

$$k_2=\frac{1}{2}\left(S^7+iS^6+S^{10}+iS^9\right)$$

$$k_3=\frac{1}{2}\left(S^4-iS^5+S^{11}-iS^{12}\right)$$

Finalmente, $m_{\mu\nu}=\sigma_{\mu\nu}=\frac{1}{4}\left[\gamma_\mu,\gamma_\nu\right]$ de donde

$$\begin{aligned}m_{ik}&=\frac{1}{4}\left[\gamma_i,\gamma_k\right]=\frac{1}{4}\left(\gamma_i\gamma_k-\gamma_k\gamma_i\right)=-\frac{1}{4}\left(\left(\sigma_2\otimes\sigma_i\right)\left(\sigma_2\otimes\sigma_k\right)-\left(\sigma_2\otimes\sigma_k\right)\left(\sigma_2\otimes\sigma_i\right)\right)\\&=-\frac{i}{4}\left[I_2\otimes\left(\epsilon_{ikl}\sigma_l-\epsilon_{kil}\sigma_l\right)\right]=-\frac{i}{2}\epsilon_{ikl}I_2\otimes\sigma_l\end{aligned}\tag{3.66}$$

es decir,

$$m_{12}=-\frac{i}{2}I_2\otimes\sigma_3=-\frac{i}{2}\begin{pmatrix}1&&&\\&-1&&\\&&1&\\&&&-1\end{pmatrix}=-\frac{1}{2}\left(S^1+S^{13}-S^8\right)$$

$$m_{13} = \frac{i}{2} I_2 \otimes \sigma_2 = \frac{1}{2}(S^2 + S^{14})$$

$$m_{23} = -\frac{i}{2}\epsilon_{231}\, I_2 \otimes \sigma_1 = -\frac{1}{2}(S^5 + S^9)$$

$$m_{10} = \frac{1}{4}\Big((i\sigma_2 \otimes \sigma_1)(\sigma_1 \otimes I_2) - (\sigma_1 \otimes I_2)(i\sigma_2 \otimes \sigma_1)\Big) = \frac{i}{2}(S^{15} - S^3)$$

$$m_{20} = \frac{1}{4}\Big((i\sigma_2 \otimes \sigma_2)(\sigma_1 \otimes I_2) - (\sigma_1 \otimes I_2)(i\sigma_2 \otimes \sigma_2)\Big) = \frac{i}{2}(S^{14} - S^2)$$

$$m_{30} = \frac{1}{4}\Big((i\sigma_2 \otimes \sigma_3)(\sigma_1 \otimes I_2) - (\sigma_1 \otimes I_2)(i\sigma_2 \otimes \sigma_3)\Big) = \frac{i}{2}(S^8 + S^{13} - S^1)$$

Hemos obtenido asi una representación del grupo unitario SU(2,2) en términos de combinaciones lineales de 15 parámetros independientes, por lo tanto, las matrices S generan a SU(2,2) y tenemos asi el formalismo de twistores bien determinado en lo que a la parte algebráica concierne.

### 3.4) Espinores en el Espacio de Minkowski.

En el espacio de Minkowski tenemos la forma fundamental

$$\phi=(x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2-(x^4)^2,$$

por lo cual, al llevar a cabo la complexificación descrita en la sección 1.2, nos quedan dos vectores isotrópicos dados por

$$e_1=(u_1+iu_2)\div 2,$$

$$e_2=(u_3+\ u_4)\div 2,$$

donde $u_1=(1,0,0,0)$, $u_2=(0,1,0,0)$, $u_3=(0,0,1,0)$ y $u_4=(0,0,0,1)$. Evidentemente, en este espacio se tiene $\nu=2$. El álgebra de espinores correspondiente a este espacio será entonces la misma que la correspondiente al espacio de cuatro dimensiones $E_4$, tratada en la sección 3.1. Lo que deseamos ahora es ver la forma de los operadores $X(u_i)$ para el espacio de Minkowski, y establecer contaco con resultados conocidos para la teoría de espinores usual. Para ello, notamos que

$$e_1^*=(u_1-iu_2)\div 2,$$

$$e_2^*=(u_3-\ u_4)\div 2,$$

por lo cual, $u_1=e_1+e_1^*$, $u_2=i(e_1^*-e_1)$, $u_3=(e_2+e_2^*)$ y $u\ =e_2-e_2^*$. De esta manera, tomando la representación matricial (3.5) se encuentra que

$$X(u_1)\xi=X(e_1+e_1^*\ )\xi=X(e_1)\xi+X(e_1^*)\xi=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&-1\\0&0&-1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\xi_0\\\xi_1\\\xi_2\\\xi_{12}\end{bmatrix}.$$

De la misma manera,

$$X(u_2)\xi=\begin{bmatrix}0&-i&0&0\\i&0&0&0\\0&0&0&i\\0&0&-i&0\end{bmatrix}\xi\ ,$$

$$X(u_3)\xi=\begin{bmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{bmatrix}\xi\ ,$$

$$X(u_4)\,\xi=\begin{bmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\-1&0&0&0\\0&-1&0&0\end{bmatrix}\xi\ ,$$

es decir, tenemos una representación matricial de los operadores $X(u_i)$, los cuales claramente tienen determinante uno. Si ahora tomamos la notación de Bjorken & Drell[14],

$$\gamma^0=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{bmatrix}$$

$$\{\gamma^i\}=\gamma=\begin{bmatrix}0&\sigma^i\\-\sigma^i&0\end{bmatrix}$$

donde $\sigma^i$ son las matrices de Pauli, nos resulta

$$X(u_1)=\gamma^0\sigma^{23}\ ,$$

$$X(u_2)=\gamma^0\sigma^{13}\ ,$$

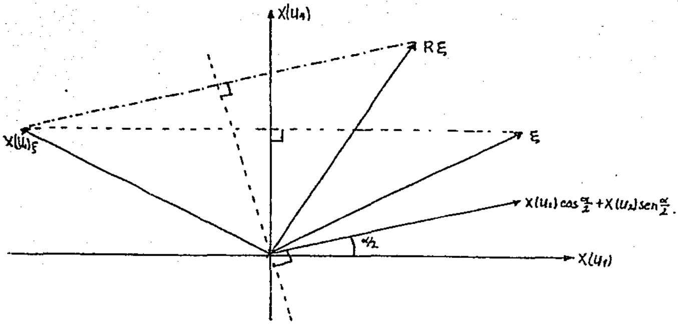
$$X(u_3)=\gamma^5\ ,$$

$$X(u_4)=\gamma^0\gamma^5\ ,$$

con $\sigma^{\mu\nu}=[\gamma^\mu,\gamma^\nu]$. Para verificar que con nuestro formalismo recuperamos los resultados conocidos sobre transformaciones de espinores, vamos a encontrar la transformación de un espinor que corresponde a un "empujón" con la velocidad en el eje $u_1$. Sabemos que las transformaciones de Lorentz son rotaciones en el espacio-tiempo, por lo que la transformación en cuestión será una rotación en el plano $\{u_1,u_4\}$. Una rotación en el espacio de los espinores va a estar dada por dos reflexiones, que a fin de tener como resultado una rotación en un ángulo $\alpha$, ponemos

$$R=(X(u_1)\cos\alpha/2+X(u_4)\,\mathrm{sen}\,\alpha/2)\,X(u_1)\ ,$$

ya que al aplicar sobre el espinor $\xi$, tenemos que éste se refleja primero en un plano normal a $X(u_1)$, y posteriormente a $X(u_1)\cos\alpha/2+X(u_4)\,\mathrm{sen}\,\alpha/2$. Esto es:




De esta manera, tomando X(u ) y X(u ) como en (3. ), se obtiene

$$R=\cos\alpha/2-X(u_1)X(u_4)\operatorname{sen}\alpha/2$$

$$=\cos\alpha/2\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & -\tan\alpha/2\\ 0 & 1 & -\tan\alpha/2 & 0\\ 0 & -\tan\alpha/2 & 1 & 0\\ -\tan\alpha/2 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

que es la expresión conocida para un "empujón en la dirección x.

# A P E N D I C E .

Vamos a justificar ahora la visualización del operador $X(\underline{z})$ como un operador de reflexiones cuando $\underline{z}\in V$ es un vector unitario. Para ello, recordamos que el modo de llevar a cabo una reflexión es dejando invariante la componente paralela al plano de reflexión e invirtiendo la componente perpendicular, es decir, se tiene que

$$\underline{z}'=\underline{z}-2\underline{a}(\underline{z},\underline{a}) \tag{A.1}$$

donde $\underline{a}$ es un vector unitario perpendicular al plano de reflexión y $\underline{z}'$ es el vector reflejado. Como

$$X(\underline{z})X(\underline{w})+X(\underline{w})X(\underline{z})=2(\underline{z},\underline{w})e_A \quad , \tag{A."}$$

podemos pensar en traducir la expresión (A.1) en términos del operador $X(\underline{z})$ quedando

$$X(\underline{z}')=X(\underline{z})-X(\underline{a})(X(\underline{z})X(\underline{a})-X(\underline{a})X(\underline{z}))=-X(\underline{a})X(\underline{z})X(\underline{a}) \quad . \tag{A.3}$$

Si aplicamos una transformación de similitud a (A.2) vemos que

$$\Lambda X(\underline{w})\Lambda^{-1}\Lambda X(\underline{z})\Lambda^{-1}+\Lambda X(\underline{z})\Lambda^{-1}\Lambda X(\underline{w})\Lambda^{-1}=2(\underline{z},\underline{w})e_A \tag{A.4}$$

por lo tanto, esto corresponde a una transformación ortogonal en V, y por ello, es claro que si tomamos $\{\underline{w}_i\}$ un conjunto de vectores unitarios, se encuentra

$$\Lambda X(\underline{w}_i)\Lambda^{-1}=a_j{}^i X(\underline{w}_i)$$

Poniendo ahora $\Lambda=X(\underline{w}_k)$ es claro que por (A.2),

$$X(\underline{w}_k)X(\underline{w}_i)X(\underline{w}_k)=X(\underline{w}_k)[-X(\underline{w}_k)X(\underline{w}_i)+2(\underline{w}_i,\underline{w}_k)]=-X(\underline{w}_i)+2X(\underline{w}_k)(\underline{w}_i,\underline{w}_k)=a_j{}^i X(\underline{w}_i)$$

y si $\{\underline{w}_i\}$ son ortonormales, se tendrá

$$a_j{}^i=\begin{pmatrix} -1 & & & & & \\ & -1 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & -1 & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & -1 \end{pmatrix}$$

lo cual confirma la visualización del operador $X(\underline{z})$ como un operador generador de reflexiones para $\underline{z}$ unitario.

La reflexión de un espinor $\xi$ respecto al plano normal a $\underline{z}$ se define a priori como

$$\xi' = X(\underline{z})\xi. \tag{A.5}$$

# R E F E R E N C I A S .

1. Dirac,P.A.M. THE PRINCIPLES OF QUANTUM MECHANICS . Oxford University Press,Oxford 1957.

2. Schweber,Silvan S. RELATIVISTIC QUANTUM FIELDS .Harper & Row Int.,New York 1961 .

3. Penrose,R & Rindler,W. SPINORS AND SPACE-TIME .Cambridge University Press,Cambridge 1981.

4. Cartan,Elie. SPINORS THEORY .Dover Publications ,New York 1981.

5. Brauer,R & Weyl,H. Am. J. Math.,(57),1935,pp 425-449.

6. Carmeli Moshe. GROUP THEORY & GENERAL RELATIVITY . Mc. Graw-Hill,New York 1976.

7. Lukierski,J. J.Math. Phys.,(21),1980,pp561.

8. Penrose,R. BATELLE RENCONTRES:1967 LECTURES IN MATHEMATICS AND PHYSICS.Edited by J.A.Wheeler & C. DeWitt,W.A.Benjamin, New York.

9. Penrose,R. in QUANTUM GRAVITY:AN OXFORD SIMPOSIUM,edited by D.W Sciama,Penrose R. & C.J.Isham,Oxford 1975.

10. Penrose,R. & MacCallum,M.A.H. Phys. Rep. (6),241 (1972).

11. Hermann,Robert. SPINORS,CLIFFORD AND CAYLEY ALGEBRAS. Math Sci Press,Mass 1976.

12. Bjorken,J & Drell,S. RRELATIVISTIC QUANTUM MECHANICS. Mc. Graw-Hill,New York 1968.

13. Loomis,L.H. & Sternberg,S. ADVANCED CALCULUS. Addison & Weseley,Mass. 1968.

14. Greub,Werner. LINEAR ALGEBRA.GTM,Vol. 23 Sprnger-Verlag, Berlin,1972.

15. Jauch,J.M. & Rohrlich,F. THE THEORY OF PHOTONS AND ELEC-

TRONS. Springer-Verlag, Berlin 1980.

16. Taylor, Robert. SPECIAL RELATIVITY . Oxford University Press, Oxford 1973.

17. Plebanski, F. SPINORS, TETRADS AND FORMS. Notas de clase, CINESTAV, IPN. México D.F. 1974.

18. Nelson, R. TENSOR ANALYSIS . Mathematical Notes, Princeton University Press, Princeton N.J., 1967.

19. Flanders, Harley. DIFFERENTIAL FORMS. Academic Press, New York 1967.

20. Greub, Werner. Multilinear Algebra. Springer-Verlag, Berlin 1973.

21. Blade, W.L. & Jehle, H. Rev. Mod. Phys. (25), 714 (1953).

22. Boothby, W.M. AN INTRODUCTION TO DIFFERENTIABLE MANIFOLDS AND RIEMANNIAN GEOMETRY. Academic Press, New York 1969.

23. Kursunoglu, B. MODERN QUANTUM THEORY .W.H. Freeman & Co., San Francisco 1962.

24. Smirnov, V.I. GROUPS AND LINEAR ALGEBRA. Mc. Graw-Hill, New York 1961.

25. Abraham, R.& Marsden, J.E. FOUNDATIONS OF MECHANICS. W.A. Benjamin, New York 1976.

26. Choquet, B.I. et Al. ANALYSIS, MANIFOLDS AND PHYSICS. North-Holland, New York 1975.

27. Weyl, Hermann. GROUP THEORY. Princeton University Press, Princeton N.J. 1946.

28. Klotz, F.S. J. Math. Phys. (15) 12, 1974.

29. Luher, C.P. & Rosenbaum, M. J. Math. Phys. 26(7), July 1985.

30. Arnold, V.I. DIFFERENTIAL EQUATIONS . MIT Press, Cambridge Mass. 1981.