Universidad Nacional Autónoma de México

FACULTAD DE CIENCIAS

IDEAS BASICAS DE LOS MODELOS EPIDEMIOLOGICOS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE

F I S I C O

P R E S E N T A

MARCO ANTONIO ZEPEDA ZEPEDA

MÉXICO, D.F., 1985

INTRODUCCION

A. CONSIDERACIONES GENERALES.

NUESTRO INTERÉS ES ESTUDIAR EL FENÓMENO DE DIFUSIÓN DE UNA ENFERMEDAD INFECCIOSA EN UNA POBLACIÓN. CON ESE OBJETIVO, ESTABLECEREMOS UNA SERIE DE MODELOS MATEMÁTICOS, BASADOS EN ECUACIONES DIFERENCIALES, QUE RECOGEN ALGUNAS CARACTERÍSTICAS FUNDAMENTALES DE LOS PROCESOS EPIDÉMICOS. EL ESTUDIO DE ESTOS MODELOS MATEMÁTICOS NOS PERMITIRÁ DESCUBRIR Y ENTENDER VARIOS DE LOS ASPECTOS IMPORTANTES QUE INFLUYEN EN EL DESARROLLO DE UNA EPIDEMIA.

ANTES DE PASAR A EXPONER LOS MODELOS QUE ESTUDIAREMOS, ES NECESARIO ESTABLECER ALGUNOS ASPECTOS GENERALES RELATIVOS --

TANTO A LA TRANSMISIÓN DE UNA ENFERMEDAD INFECCIOSA EN UNA POBLACIÓN DETERMINADA COMO AL PROCESO QUE UN INDIVIDUO DE LA POBLACIÓN SIGUE UNA VEZ QUE HA SIDO AFECTADO POR LA ENFERMEDAD. LOS ELEMENTOS QUE ENSEGUIDA PLANTEAREMOS SERÁN RETOMADOS EN LOS CAPÍTULOS SIGUIENTES, TRATANDO DE EXPRESARLOS MATEMÁTICAMENTE EN LOS MODELOS ESTUDIADOS.

NUESTRO ESTUDIO ESTÁ RESTRINGIDO A LAS ENFERMEDADES INFECCIOSAS; ESTO ES, ENFERMEDADES PRODUCIDAS POR LA PRESENCIA EN EL INDIVIDUO DE ALGÚN GERMEN PATÓGENO, YA SEA BACTERIA, VIRUS, PARÁSITO, ETC.

PARA QUE UNA ENFERMEDAD INFECCIOSA SE VUELVA EPIDÉMICA ES NECESARIA LA CONJUNCIÓN DE UNA SERIE DE CONDICIONES, TALES QUE PERMITAN QUE EL PROCESO DE INFECCIÓN SE DESARROLLE EN LA POBLACIÓN. UNA DE LAS CONDICIONES NECESARIAS ES LA PRESENCIA DEL <u>AGENTE INFECCIOSO</u>, EL CUAL PUEDA CONSIDERARSE -EN CIERTA INSTANCIA- COMO FACTOR CAUSAL DE LA ENFERMEDAD. IGUALMENTE, ES NECESARIA LA PRESENCIA DE ALGUIEN O ALGO QUE SIRVA DE <u>HUESPED</u> AL AGENTE INFECCIOSO. EN NUESTRO CASO SERÁN PRECISAMENTE LOS INDIVIDUOS INFECTADOS DE LA POBLACIÓN LOS HUÉSPEDES DEL GERMEN INFECCIOSO. DEPENDIENDO DE LAS CONDICIONES SOCIALES EXISTENTES (ALIMENTACIÓN, VIVIENDA, COSTUMBRES, CONDICIONES AMBIENTALES, CONOCIMIENTO DE LA FORMA EN QUE DICHA ENFERMEDAD SE PRODUCE, ETC.) EL DESARROLLO DEL PROCESO PUEDE VERSE FORTALECIDO O DEBILITADO.

Para que una enfermedad infecciosa se difunda en una población es necesaria, en cierto tipo de enfermedades, la existencia de un agente transmisor de la infección. Este agente transmisor -o vector de transmisión, como lo llaman los médicos- deposita en los individuos susceptibles de adquirir la enfermedad la materia infecciosa, pudiendo tomarla ya sea de los propios individuos infectados o de algún otro lugar. Tal vector de transmisión es de lo más variado, según sea la enfermedad considerada.

En muchas enfermedades infecciosas dicho agente transmisor no interviene, la enfermedad se transmite directamente de un individuo infectado a otro individuo susceptible; en este caso, el individuo infectado juega también el papel de infeccioso, él mismo contagia directamente. La transmisión directa de la enfermedad se da a través del contacto entre un individuo infeccioso y uno susceptible.

Respecto al proceso que sufre un individuo que es atacado por la enfermedad puede ser también de lo más variado, según sea el germen patógeno involucrado y las medidas de defensa desarrolladas; sin embargo, pueden establecerse algunos rasgos generales. El curso que la enfermedad tendrá en un individuo dependerá del grado de patogenicidad o virulencia del germen infeccioso. Evidentemente, a iguales condiciones de defensa, gérmenes con igual virulencia podrán repercutir de manera cualita-

TIVAMENTE DIFERENTE EN EL INDIVIDUO INFECTADO SEGÚN LA CANTIDAD DE MATERIA INFECCIOSA ADQUIRIDA.

LA EXPERIENCIA E INVESTIGACIONES MÉDICAS DEMUESTRAN QUE PARA MUCHAS ENFERMEDADES INFECCIOSAS ES NECESARIO QUE TRANSCURRA UN CIERTO TIEMPO A PARTIR DE HABER SIDO INFECTADO, LLAMADO <u>PERIODO DE LATENCIA</u> O <u>DE EXPOSICIÓN</u>, PARA QUE DICHO INDIVIDUO INFECTADO PASE A SER INDIVIDUO INFECCIOSO; ESTO ES, QUE SEA CAPAZ DE TRANSMITIR LA INFECCIÓN. ASÍ, EN EL PERIODO DE LATENCIA, EL INDIVIDUO ESTÁ INFECTADO, PERO NO ES INFECCIOSO. EN TÉRMINOS GENERALES, DADA UNA ENFERMEDAD, EL PERIODO DE LATENCIA PARA CUALQUIER INDIVIDUO DE LA POBLACIÓN ES EL MISMO.

DE MANERA SEMEJANTE EN MUCHAS ENFERMEDADES, CUANDO UN INDIVIDUO ADQUIERE LA INFECCIÓN, LOS SÍNTOMAS NO SE MANIFIESTAN NECESARIAMENTE DE MANERA INMEDIATA; ÉSTOS APARECEN POSTERIORMENTE. EL LAPSO QUE TRANSCURRE DESDE EL MOMENTO DE HABER SIDO INFECTADO HASTA EL MOMENTO EN QUE APARECEN LOS PRIMEROS SÍNTOMAS SE LLAMA <u>PERIODO DE INCUBACIÓN</u>. EN TÉRMINOS GENERALES, LA DURACIÓN DEL PERIODO DE INCUBACIÓN EN CADA UNA DE LAS ENFERMEDADES PRESENTA REGULARIDADES PARA TODOS LOS INDIVIDUOS DE LA POBLACIÓN.

EL PERIODO DE INCUBACIÓN NO TIENE PORQUE COINCIDIR CON EL PERIODO DE LATENCIA. EN PARTICULAR, CUANDO EL PERIODO DE INCUBACIÓN ES MAYOR QUE EL DE LATENCIA SE ESTABLECE -EPIDEMIOLÓGI

CAMENTE HABLANDO- UNA SITUACIÓN GRAVE, PUES EN LA POBLACIÓN HAY PRESENCIA DE INDIVIDUOS INFECCIOSOS A LOS CUALES ES IMPOSIBLE - DETECTAR.

EL PERIODO EN EL QUE UN INDIVIDUO INFECTADO ES CAPAZ DE TRANSMITIR LA ENFERMEDAD SE LLAMA PERIODO INFECCIOSO. ASÍ, LA - SITUACIÓN ANTERIORMENTE DESCRITA COMO GRAVE SE TRATA DE UN CASO EN EL QUE EXISTEN INDIVIDUOS QUE SE ENCUENTRAN SIMULTÁNEAMENTE EN EL PERIODO DE INCUBACIÓN Y EN EL PERIODO INFECCIOSO. EL PE - RIODO INFECCIOSO DA INICIO UNA VEZ QUE HA TERMINADO EL PERIODO DE LATENCIA. LA DETECCIÓN Y TRATAMIENTO POR SEPARADO, POR TANTO, DE LOS INDIVIDUOS QUE PADECEN CIERTA ENFERMEDAD SE HACE DIFICIL DURANTE EL TIEMPO EN QUE SE ENCUENTRAN EN SU PERIODO DE INCUBA- CIÓN.

UNO DE LOS DESCUBRIMIENTOS Y LOGROS MÁS SORPRENDENTES - DE LA MEDICINA, EN LA SEGUNDA MITAD DEL SIGLO PASADO, FUE EL -- CONOCIMIENTO DEL PRINCIPIO DE INMUNUZACIÓN. DICHO PRINCIPIO CON SISTE, EN POCAS PALABRAS, EN QUE EL PROPIO CUERPO SE ENCARGA DE PONER A FUNCIONAR UN MECANISMO DE DEFENSA CUANDO UN GERMEN EX - TRAÑO LO INVADE. ESTE MECANISMO CONSISTE EN LA CREACIÓN DE UNA MULTITUD DE ANTICUERPOS QUE COMBATEN LA PRESENCIA DEL GERMEN EX TRAÑO, DEL CUERPO O MATERIAL ANTÍGENO. PRECISAMENTE, LOS MÉTO- DOS DE VACUNACIÓN UTILIZADOS SE BASAN EN INTRODUCIR EN EL CUER- PO UNA PEQUEÑA CANTIDAD DEL GERMEN PATÓGENO, CUYA VIRULENCIA HA SIDO DISMINUIDA, CALCULANDO QUE EL INDIVIDUO RESISTA A LA INFEC

CIÓN Y ASÍ LOGRE CREAR EN GRANDES CANTIDADES LAS DEFENSAS NECESARIAS PARA CONTROLAR LA INFECCIÓN INICIAL. ESTAS DEFENSAS CREADAS LE PERMITEN AL INDIVIDUO VACUNADO RESISTIR ATAQUES POSTERIORES DEL MISMO GERMEN, NO IMPORTANDO SI ESTOS ATAQUES SON CON MAYOR CANTIDAD DE GÉRMENES PATÓGENOS Y CON MAYOR VIRULENCIA.

ES ESTE PRINCIPIO DE INMUNUZACIÓN LA EXPLICACIÓN DEL HECHO CONSISTENTE EN QUE CUANDO UN INDIVIDUO ADQUIERE CIERTA ENFERMEDAD Y ÉSTA ES SUPERADA, DICHO INDIVIDUO JAMÁS VUELVE A PADECER ESA ENFERMEDAD, O TIENE QUE TRANSCURRIR UN TIEMPO PARA QUE PUEDA VOLVER A PADECERLA. CUANDO SUCEDE EL PRIMER CASO, SE TRATA DE LA ADQUISICIÓN, POR EFECTO DE LA PROPIA ENFERMEDAD, DE UNA INMUNIZACIÓN TOTAL O PERMANENTE; EN EL SEGUNDO CASO, SE TRATA DE UNA INMUNIZACIÓN TEMPORAL.

EN LOS ESTUDIOS EPIDEMIOLÓGICOS ES FUNDAMENTAL CONSIDERAR TODO LO RELATIVO A LOS PROCESOS DE INMUNIZACIÓN; ES EVIDENTE QUE TALES PROCESOS TIENEN EFECTOS CONSIDERABLES EN EL DESARROLLO DE LAS EPIDEMIAS.

UNA VEZ ESTABLECIDO LO ANTERIOR, PODEMOS PASAR A PLANTEAR NUESTRA PROBLEMÁTICA.

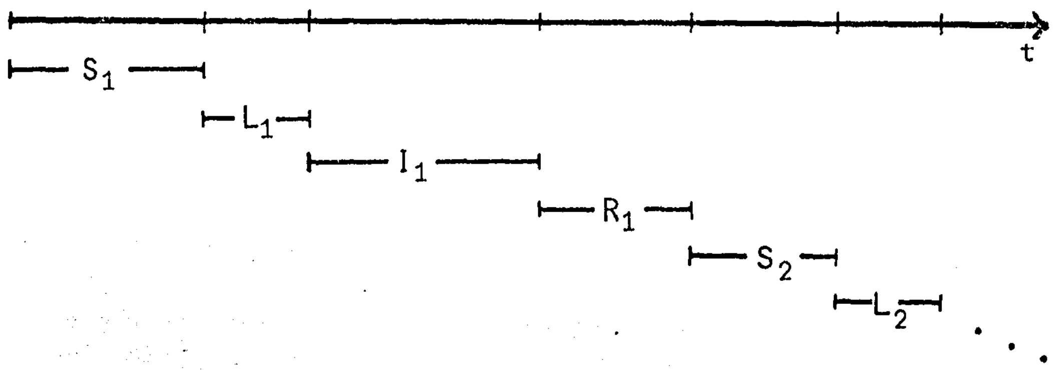
B. MECANISMOS DEL PROCESO DE DIFUSION DE LA ENFERMEDAD.

TOMEMOS UNA POBLACIÓN EN LA QUE EXISTEN MIEMBROS CAPACES DE ADQUIRIR CIERTA ENFERMEDAD; INTRODUZCAMOS EN ELLA UN GRUPO DE INDIVIDUOS INFECCIOSOS QUE PADEZCAN DICHA ENFERMEDAD Y SEAN CAPACES DE TRANSMITIRLA DIRECTAMENTE A LOS DEMÁS MIEMBROS DE LA POBLACIÓN. ESTUDIAREMOS EL PROCESO DE DIFUSIÓN DE ESTA ENFERMEDAD EN LA POBLACIÓN. EN TANTO ESTO, NOS INTERESA RESPONDER LA SIGUIENTE PREGUNTA: ¿CUÁL SERÁ EL DESARROLLO DE ESTE PROCESO CONFORME TRANSCURRA EL TIEMPO?

SI DENOTAMOS CON LAS LETRAS S,L,I,R LOS PERIODOS DE SUSCEPTIBILIDAD, DE LATENCIA, INFECCIOSO Y RECUPERACIÓN, RESPECTIVAMENTE, PODEMOS ESTABLECER, ESQUEMÁTICAMENTE, EL PROCESO QUE EN EL TIEMPO SIGUE UN INDIVIDUO DE LA POBLACIÓN QUE HA SIDO INFECTADO.

EN EL CASO DE INMUNIZACIÓN TEMPORAL, EL INDIVIDUO QUE HA SIDO INFECTADO Y HA LOGRADO SUPERAR LA ENFERMEDAD DESPUÉS DE UN TIEMPO PODRA VOLVER A SER INFECTADO; ESTO ES, PODRÁ TENER VARIOS PERIODOS DE SUSCEPTIBILIDAD, DE EXPOSICIÓN, ETC., SEGÚN SEA EL NÚMERO DE VECES QUE ADQUIERA LA ENFERMEDAD. EN TAL CASO, LA DURACIÓN DE SUS PERIODOS DE SUSCEPTIBILIDAD $S_1, S_2, \ldots, S_n$ NO ESTÁN CONDICIONADOS ENTRE SÍ; ESTO MISMO SUCEDE CON SUS PERIODOS DE RECUPERACIÓN $R_1, R_2, \ldots, R_n$, AUNQUE AQUÍ TODOS ELLOS SE -

RÁN MAYORES O IGUALES A UN NÚMERO (DE UNIDADES DE TIEMPO) DADO. PUESTO QUE EL PERIODO DE LATENCIA DEPENDE ESENCIALMENTE DE LAS CARACTERÍSTICAS DEL GERMEN PATÓGENO, SE PUEDE ESTABLECER QUE LA DURACIÓN DE SUS PERIODOS DE LATENCIA $L_1, L_2, \ldots, L_n$ ES SIEMPRE LA MISMA. EN CUANTO A LA REGULARIDAD EN LA DURACIÓN DE SUS PERIODOS INFECCIOSOS $I_1, I_2, \ldots, I_n$ NO PODEMOS DECIR MUCHO DE ANTEMANO, ÉSTA DEPENDE DEL TIPO DE ENFERMEDAD. (FIG. 1).

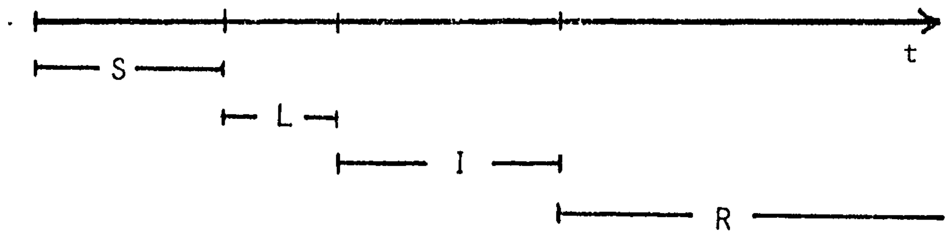


PROCESO QUE EN EL TIEMPO SIGUE UN INDIVIDUO DE LA POBLACION QUE HA SIDO INFECTADO, PARA EL CASO EN QUE EXISTE INMUNIZACION TEMPORAL.

FIGURA 1

EN EL CASO DE INMUNIZACIÓN PERMANENTE, EL INDIVIDUO PUEDE SER INFECTADO SÓLO UNA VEZ; ASÍ, CUALQUIER INDIVIDUO DE LA POBLACIÓN TENDRÁ A LO MÁS UN PERIODO DE SUSCEPTIBILIDAD, UNO DE LATENCIA, UNO INFECCIOSO Y UNO DE RECUPERACIÓN. (FIG. 2).

EN AMBOS CASOS, YA EXISTA INMUNIZACIÓN TEMPORAL O INMUNIZACIÓN PERMANENTE, LA DURACIÓN QUE DICHOS PERIODOS TIENEN EN



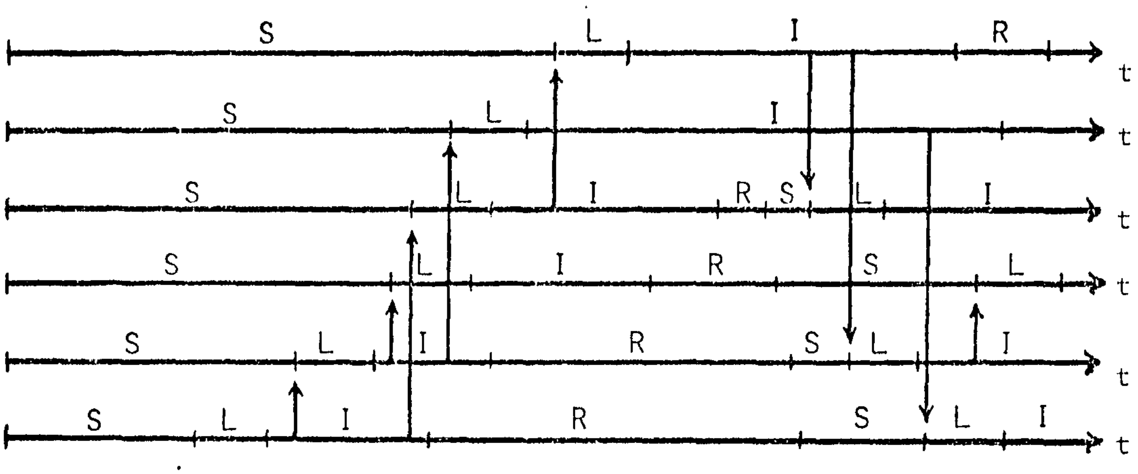
PROCESO QUE EN EL TIEMPO SIGUE UN INDIVIDUO DE LA POBLACION QUE HA SIDO INFECTADO, PARA EL CASO EN QUE EXISTE INMUNIZACION PERMANENTE.

FIGURA 2

UN INDIVIDUO NO TIENE PORQUE SER IGUAL A LA DE OTRO INDIVIDUO, A NO SER EL PERIODO DE LATENCIA, Y EN CIERTOS CASOS EL INFECCIOSO.

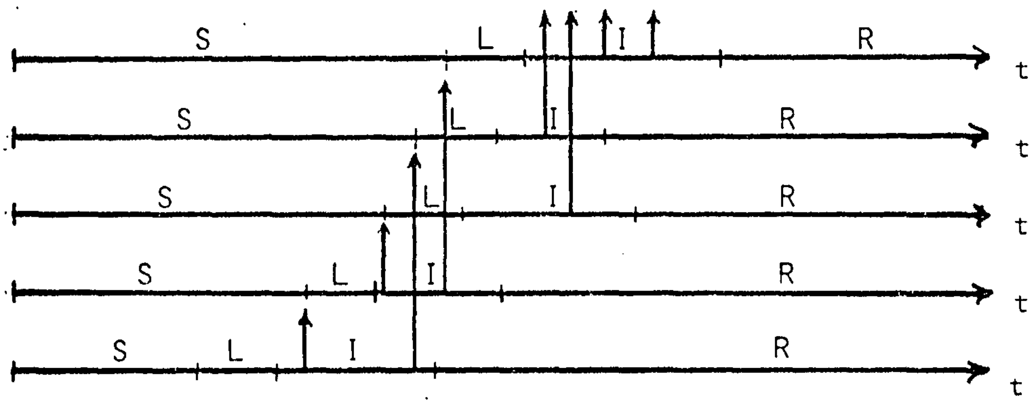
SI AHORA CONSIDERAMOS A TODOS LOS INDIVIDUOS DE LA POBLACIÓN INTERACCIONANDO, UNOS CONTAGIANDO A OTROS, OTROS MÁS RECUPERÁNDOSE Y VOLVIENDO A SER CONTAGIADOS, ETC. PODEMOS IMAGINARNOS LO INTRINCADO DEL PROCESO.(FIG.3 Y FIG.4).

COMO SE PUEDE NOTAR, CONSTRUIR UN MODELO MATEMÁTICO QUE LOGRE REFLEJAR DE MANERA GENERAL EL FENÓMENO DE DIFUSIÓN DE UNA ENFERMEDAD INFECCIOSA EN UNA POBLACIÓN DETERMINADA RESULTA SER UN PROBLEMA COMPLICADO. UNA DIFICULTAD, POR EJEMPLO, CONSISTE EN DETERMINAR LOS ASPECTOS FUNDAMENTALES QUE RIGEN EL PROCE-



MECANISMO MEDIANTE EL CUAL SE DESARROLLA EL PROCESO EN QUE UNOS INDIVIDUOS INFECCIOSOS CONTAGIAN A OTROS INDIVIDUOS SUSCEPTIBLES, OTROS MAS SE RECUPERAN, ETC., PARA EL CASO EN QUE EXISTE INMUNIZACION TEMPORAL.

FIGURA 3



MECANISMO MEDIANTE EL CUAL SE DESARROLLA EL PROCESO EN QUE UNOS INDIVIDUOS INFECCIOSOS CONTAGIAN A OTROS INDIVIDUOS SUSCEPTIBLES, OTROS MAS SE RECUPERAN, PARA EL CASO EN QUE EXISTE INMUNIZACION PERMANENTE.

FIGURA 4

SO EPIDÉMICO, TANTO LOS BIOLÓGICOS COMO LOS SOCIALES (PATOGENICIDAD DEL GERMEN INFECCIOSO, SUSCEPTIBILIDAD DE LA POBLACIÓN A DICHO GERMEN, HACINAMIENTO DE LA POBLACIÓN, MEDIDAS PREVENTIVAS, ETC.). OTRA DIFICULTAD ES LA TAN AMPLIA VARIEDAD DE ENFERMEDADES INFECCIOSAS QUE EXISTEN, CADA UNA DE ELLAS CON UNA SERIE DE PARTICULARIDADES, TANTO EN LA FORMA DE TRANSMITIRSE COMO EN LOS EFECTOS QUE TIENE SOBRE LOS INDIVIDUOS INFECTADOS (PADECIMIENTO TEMPORAL O PERMANENTE, INMUNIZACIÓN TEMPORAL O PERMANENTE, RELACIÓN ENTRE CADA UNO DE LOS PERIODOS, ETC.).

ES DIFICIL ABORDAR EL PROBLEMA EN TODA SU COMPLEJIDAD. LA MANERA EN QUE LO ABORDAREMOS SERÁ MEDIANTE EL PLANTEAMIENTO DE DIFERENTES MODELOS EN LOS CUALES, CONFORME AVANCEMOS EN SU CONSTRUCCIÓN, IREMOS INCORPORANDO DISTINTOS ASPECTOS QUE ESTÁN PRESENTES EN EL FENÓMENO DE DIFUSIÓN DE UNA ENFERMEDAD INFECCIOSA EN UNA POBLACIÓN. CADA NUEVO MODELO QUE PLANTEEMOS SERÁ MÁS RICO QUE LOS ANTERIORES, EN EL SENTIDO DE QUE INCORPORARÁ MÁS ASPECTOS DEL FENÓMENO. DE CUALQUIER MANERA, NO HAY QUE OLVIDAR QUE SÓLO SE TRATA DE MODELAR UNA SITUACIÓN Y DE NINGUNA MANERA ESTABLECER QUE A ESO SE REDUCE EL FENÓMENO ESTUDIADO.

CAPITULO I

MODELO SI.

La población que consideraremos está constituida en todo momento por dos clases de miembros; la clase S y la clase I. Cualquier miembro de la población pertenece a una de estas dos clases, y sólo a una. La clase S, llamada clase de los individuos susceptibles, está conformada por aquellos individuos que no padecen la enfermedad pero que son capaces de adquirirla en cualquier momento. La clase I, llamada clase de los individuos infecciosos, está conformada por aquellos que padecen la enfermedad y que son capaces de transmitirla en cualquier momento.

El proceso de difusión de la enfermedad se desarrollará en el tiempo conforme los individuos infecciosos transmitan la enfermedad a los individuos susceptibles. La forma de transmisión de dicha enfermedad será mediante el contacto directo en -

TRE UN MIEMBRO DE LA CLASE I CON UNO DE LA CLASE S.

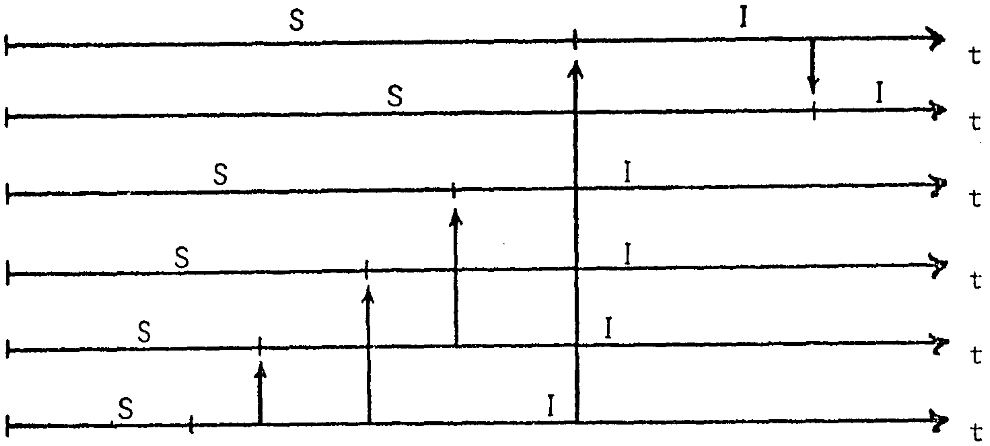
CUANDO UN INDIVIDUO SUSCEPTIBLE SEA INFECTADO, DEJARÁ LA CLASE S Y PASARÁ DIRECTAMENTE A FORMAR PARTE DE LA CLASE I; ESTO ES, DESDE EL MOMENTO MISMO EN QUE ES INFECTADO SE VUELVE INFECCIOSO. NO EXISTE, PUES, PERIODO DE LATENCIA.

TODO INDIVIDUO QUE FORME PARTE DE LA CLASE I, YA SEA DESDE EL INICIO DEL PROCESO O YA SEA A PARTIR DE ALGÚN MOMENTO, PERMANECERÁ EN ESA CLASE INDEFINIDAMENTE. POR TANTO, NO EXISTE PERIODO DE RECUPERACIÓN; LA ENFERMEDAD JAMÁS ES SUPERADA.

EL PROCESO QUE SEGUIRÁ UN INDIVIDUO QUE HA SIDO INFECTADO Y EL PROCESO DE TRANSMISIÓN DE LA ENFERMEDAD QUEDAN DESCRITOS, ESQUEMÁTICAMENTE, POR LOS DIAGRAMAS PRESENTADOS EN LA FIG.5 Y EN LA FIG.6.

PROCESO QUE EN EL TIEMPO SIGUE UN INDIVIDUO DE LA POBLACION QUE HA SIDO INFECTADO, PARA EL CASO EN QUE NO EXISTE PERIODO DE LATENCIA Y EL PADECIMIENTO ES PERMANENTE.

FIGURA 5



MECANISMO MEDIANTE EL CUAL SE DESARROLLA EL PROCESO EN QUE UNOS INDIVIDUOS INFECCIOSOS CONTAGIAN A OTROS INDIVIDUOS SUSCEPTIBLES, PARA EL CASO EN QUE NO HAY PERIODO DE LATENCIA Y EL PADECIMIENTO ES PERMANENTE.

FIGURA 6

SUPONDREMOS QUE LA INTERACCIÓN ENTRE LOS INDIVIDUOS DE LA POBLACIÓN ES HOMOGÉNEA; ESTO ES, CUALQUIER INDIVIDUO DE LA POBLACIÓN PUEDE TENER CONTACTO CON CUALQUIER OTRO INDIVIDUO DE LA POBLACIÓN Y NO EXISTE PREFERENCIA NI RESTRICCIÓN ALGUNA DE UN INDIVIDUO O SECTOR DE INDIVIDUOS HACIA OTROS.[1] TAL POBLACIÓN LA LLAMAREMOS <u>POBLACIÓN HOMOGÉNEAMENTE MEZCLADA</u>.

---

(1) Si tomamos como población a los habitantes de una ciudad y consideramos una enfermedad infantil, como por ejemplo, el sarampión, tenemos que la posibilidad de interacción de los individuos infecciosos con muchos miembros de la población es prácticamente nula; en cambio, es mayor con los miembros de la población que son compañeros en la escuela y bastante mayor con los familiares. Para este tipo de enfermedades, la hipótesis de población homogéneamente mezclada para los individuos que viven en una ciudad puede ser algo exagerado. En cambio, para una enfermedad como la influenza no lo es tanto.

SUPONDREMOS QUE EL INCREMENTO EN EL NÚMERO DE INDIVI -- DUOS INFECCIOSOS EN LA POBLACIÓN EN CUALQUIER INTERVALO DE TIEM PO ES PROPORCIONAL AL NÚMERO DE CONTACTOS POSIBLES ENTRE INDIVI DUOS DE LA CLASE I CON INDIVIDUOS DE LA CLASE S Y AL TIEMPO -- TRANSCURRIDO. COMO PUEDE NOTARSE, ESTA HIPÓTESIS ESTABLECE QUE EL CAMBIO EN EL NÚMERO DE INDIVIDUOS INFECCIOSOS NO DEPENDE DE LO QUE HAYA SUCEDIDO EN EL PASADO EN LA POBLACIÓN, DEPENDE ÚNI- CAMENTE DE LAS CARACTERÍSTICAS DE LA POBLACIÓN EN EL MOMENTO EN QUE SE CONSIDERA Y DEL TIEMPO QUE TRANSCURRE A PARTIR DE DICHO MOMENTO.

PUESTO QUE ESTAMOS CONSIDERANDO UNA POBLACIÓN HOMOGÉNEA MENTE MEZCLADA, EL NÚMERO DE CONTACTOS POSIBLE EN CUALQUIER MO- MENTO ENTRE LOS INDIVIDUOS DE LA CLASE I CON LOS INDIVIDUOS DE LA CLASE S ESTARÁ DADO POR EL PRODUCTO DEL NÚMERO DE INDIVIDUOS DE LA CLASE I POR EL NÚMERO DE INDIVIDUOS DE LA CLASE S QUE -- EXISTEN EN EL MOMENTO BAJO CONSIDERACIÓN.

EL PROCESO DE DIFUSIÓN, COMO YA DIJIMOS, SE DESARROLLA CONFORME TRANSCURRE EL TIEMPO; EMPIEZA EN EL INSTANTE $t=0$, MO - MENTO EN EL CUAL INTRODUCIMOS EL NÚMERO INICIAL DE INDIVIDUOS - INFECCIOSOS EN LA POBLACIÓN, CONFORMADA HASTA ESE MOMENTO SÓLO POR INDIVIDUOS SUSCEPTIBLES.

SUPONDREMOS QUE DURANTE TODO EL PROCESO DE DIFUSIÓN DE LA ENFERMEDAD LA POBLACIÓN PERMANECE CONSTANTE.

SUPONGAMOS QUE LAS DOS FUNCIONES S E I CON

$$S:[0,\infty) \rightarrow \mathbb{N}\cup\{0\}.$$

$$I:[0,\infty) \rightarrow \mathbb{N}\cup\{0\}.$$

MIDEN EL NÚMERO DE INDIVIDUOS DE LAS CLASE S Y DE LA CLASE I EN TODO MOMENTO, RESPECTIVAMENTE.

LOS VALORES QUE TOMAN ESTAS DOS FUNCIONES EN EL MOMENTO t, DENOTADOS POR $S(t)$ E $I(t)$, $\forall\ t\in[0,\infty)$, RESPECTIVAMENTE, SON DESCONOCIDOS; SÓLAMENTE CONOCEMOS SUS VALORES EN $t=0$ Y LOS DENOTAMOS POR

$$S(0)=S_0$$

$$I(0)=I_0$$

TRATAREMOS DE ENCONTRAR ESTAS DOS FUNCIONES Y OBSERVAR SU COMPORTAMIENTO CONFORME t TIENDE A INFINITO. A PARTIR DE ESTAS FUNCIONES ANALIZAREMOS EL PROCESO DE DIFUSIÓN DE LA ENFERMEDAD EN LA POBLACIÓN.

PUESTO QUE LA POBLACIÓN PERMANECE CONSTANTE, SUPONGÁMOSLA DE TAMAÑO N, PODEMOS ASEGURAR QUE

$$S(t)+I(t)=N \qquad \forall\ t\in[0,\infty)$$

EN PARTICULAR

$$S_0+I_0=N$$

PUESTO QUE EL INCREMENTO DE I EN EL INTERVALO $[t,t+h]$ - ES PROPORCIONAL AL PRODUCTO DE $S(t)$ POR $I(t)$ Y TAMBIÉN ES PRO -

PORCIONAL AL TIEMPO TRANSCURRIDO h, TENEMOS

$$I(t+h)-I(t)=\alpha S(t)I(t)h \qquad (1.1)$$

LA CONSTANTE DE PROPORCIONALIDAD α LA TOMAREMOS MAYOR QUE CERO, ESTO PERMITIRÁ QUE EL INCREMENTO EN EL NÚMERO DE INDIVIDUOS INFECCIOSOS SEA POSITIVO. ESTO ES RAZONABLE, PUES ES DE ESPERAR QUE A MAYOR NÚMERO POSIBLE DE CONTACTOS ENTRE LOS MIEMBROS DE LA CLASE I CON LOS DE LA CLASE S Y A MAYOR TIEMPO TRANSCURRIDO, MAYOR SEA EL INCREMENTO DE I. SI $\alpha=0$, NO OCURRE EL PROCESO DE DIFUSIÓN, NO HABRÍA EPIDEMIA; EN TAL CASO TENDRÍAMOS $S(t)=S_0$ E $I(t)=I_0$, $\forall\ t\in[0,\infty)$. ES POCO RAZONABLE TOMAR $\alpha<0$, POR LO DEMÁS, CONTRADICE LA HIPÓTESIS DE PERMANENCIA INDEFINIDA EN LA CLASE I PARA TODO MIEMBRO DE DICHA CLASE.

SI SUPONEMOS QUE CADA CONTACTO QUE SE ESTABLECE ENTRE UN INDIVIDUO DE LA CLASE I CON UNO DE LA CLASE S ES UN CONTACTO EFECTIVO, ESTO ES, CON UN SÓLO CONTACTO QUE SE TENGA ES SUFICIENTE PARA QUE EL INDIVIDUO INFECCIOSO TRANSMITA LA ENFERMEDAD Y PARA QUE EL SUSCEPTIBLE LA ADQUIERA,[2] ENTONCES EL NÚMERO DE NUEVOS INFECCIOSOS EN EL INTERVALO $[t,t+h]$ ES IGUAL AL NÚMERO DE CONTACTOS REALIZADOS EN DICHO INTERVALO. ASÍ, αh ES LA PRO-

(2) Para enfermedades altamente infecciosas esta hipótesis no es exagerada, principalmente cuando el contacto es estrecho y la susceptibilidad es alta.

PORCIÓN DE LOS CONTACTOS POSIBLES AL TIEMPO t QUE SE REALIZAN EN EL INTERVALO $[t,t+h]$ (3). ENTONCES EN POBLACIONES HOMOGÉNEAMENTE MEZCLADAS PODEMOS INTERPRETAR A αh COMO LA PROBABILIDAD DE QUE SE PRESENTE UN CONTACTO ENTRE UN INDIVIDUO ARBITRARIO DE LA CLASE I CON OTRO, TAMBIÉN ARBITRARIO, DE LA CLASE S EN EL INTERVALO DE LONGITUD h. SI LA POBLACIÓN NO ES HOMOGÉNEAMENTE MEZCLADA, PODEMOS INTERPRETAR A αh COMO LA PROBABILIDAD PROMEDIO DE QUE SE REALICE UN CONTACTO DEL TIPO ARRIBA MENCIONADO EN EL INTERVALO DE LONGITUD h.(4)

REDONDEEMOS, LA PROBABILIDAD QUE TIENE CUALQUIER INDIVIDUO INFECCIOSO DE ESTABLECER CONTACTO CON ALGÚN INDIVIDUO SUSCEPTIBLE EN EL INTERVALO $[t,t+h]$ ES αh; ÉSTA ES LA MISMA PROBABILIDAD QUE TIENE CUALQUIER INDIVIDUO SUSCEPTIBLE DE SER INFECTADO EN DICHO INTERVALO. ASÍ, EL TOTAL DE INDIVIDUOS SUSCEPTIBLES QUE UN INFECCIOSO PUEDE INFECTAR EN EL INTERVALO $[t,t+h]$ SERÁ $\alpha h S(t)$.

---

(3) Esta interpretación tiene sentido sólo cuando $\alpha h<1$, lo cual es plausible ya que esto ocurre bajo la hipótesis de h suficientemente pequeña.

(4) Esta interpretación está basada en que cada contacto realizado es un contacto efectivo. Puede hacerse también una interpretación sin considerar esta hipótesis. En tal caso, αh será la proporción de casos que resultan efectivos de un total de contactos posibles, sin saber cuántos de éstos se realizaron.

EL HECHO DE QUE $\alpha>0$ SEA CONSTANTE, ESTABLECE QUE LA PROBABILIDAD DE QUE MIEMBROS DE LA CLASE I ENTABLEN CONTACTO CON MIEMBROS DE LA CLASE S EN EL INTERVALO $[t,t+h]$ NO DEPENDE DE t SINO ÚNICAMENTE DEPENDE DEL TIEMPO TRANSCURRIDO h.

A α SE LE LLAMA <u>TASA DE CONTACTO</u> O <u>TASA DE INFECCIÓN</u>. EN LOS CASOS EN QUE EXISTE UNA ALTA DENSIDAD DE POBLACIÓN, CONDICIONES DE HACINAMIENTO, POCAS MEDIDAS PREVENTIVAS Y QUE LA ENFERMEDAD SEA ALTAMENTE INFECCIOSA, ES DE ESPERAR QUE α TOME VALORES GRANDES.

DE LA EC.(1.1), TENEMOS

$$\frac{I(t+h)-I(t)}{h} = \alpha S(t)I(t) \tag{1.1'}$$

DONDE LA LONGITUD h DEL INTERVALO LA PODEMOS TOMAR DE TAMAÑO ARBITRARIO.[5]

MEDIANTE EL PROCESO AL LÍMITE CUANDO h TIENDE A 0, LA EC.(1.1') CONDUCE A UNA ECUACIÓN DIFERENCIAL, A NO SER POR LA CONDICIÓN DE QUE S E I TOMAN SÓLO VALORES ENTEROS.

---

(5) Desde el punto de vista teórico esto es completamente válido. Desde el punto de vista práctico esto puede no tener sentido; los registros epidémicos -cuando existen- se llevan por meses o por semanas, en algunos lugares y casos especiales se llevan por días, pero nunca por horas, minutos, etc.

Si el valor de N, tamaño de la población, es suficientemente grande y así lo son los valores de S e I, podemos suponer que tanto S como I varían de manera continua y suavemente; esto es, son funciones diferenciables de variable real y valores reales

$$S:[0,\infty) \rightarrow [0,\infty)$$
$$I:[0,\infty) \rightarrow [0,\infty)$$

Siendo así, mediante el proceso al límite cuando h tiende a cero en la Ec.(1.1'), se llega a

$$I'(t) = \alpha S(t)I(t) \qquad (1.2)$$

donde $I'(t)$ representa la razón de cambio instantánea del número de miembros de la clase I al tiempo t.

Como el número de individuos de la clase I cambia sólo debido a que nuevos miembros ingresan en dicha clase, y dado que éstos provienen únicamente y de manera directa de la clase S, se tiene que la razón de cambio instantánea de S es igual a la de I, sólo que de signo contrario. Recuérdese que todos los individuos que salen de la clase S entran directamente en la clase I, y nadie abandona la clase I. Por tanto,

$$S'(t) = -\alpha S(t)I(t) \qquad (1.3)$$

Resumiendo, se tiene que el proceso de difusión de la enfermedad está regido por un sistema de dos ecuaciones diferenciales no lineal

$$I'(t) = \alpha S(t)I(t) \qquad (1.2)$$
$$S'(t) = -\alpha S(t)I(t) \qquad (1.3)$$

CON LAS CONDICIONES INICIALES

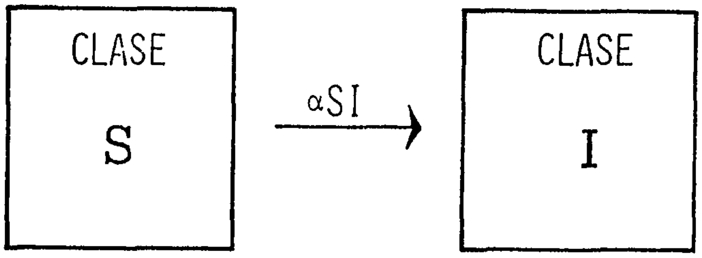
$$S(0)=S_0 \qquad \text{CON } 0<S_0<N \tag{1.4}$$

$$I(0)=I_0 \qquad \text{CON } 0<I_0<N \tag{1.5}$$

Y SE CUMPLE LA CONDICIÓN

$$S(t)+I(t)= N \qquad \forall\ t\in[0,\infty) \tag{1.6}$$

EL ESQUEMA DE LA FIG.7 ILUSTRA EL PROCESO DE FLUJO QUE SE ESTABLECE EN LA POBLACIÓN.



PROCESO DE FLUJO DE INDIVIDUOS DE LA CLASE S A LA CLASE I.

FIGURA 7

PASEMOS A RESOLVER EL SISTEMA DE ECUACIONES OBTENIDO Y ESTUDIEMOS EL COMPORTAMIENTO DE LAS FUNCIONES SOLUCIÓN.

DESPEJANDO $S(t)$ EN LA EC.(1.6) Y SUSTITUYENDO SU VALOR EN LA EC.(1.2), SE OBTIENE

$$I'(t) = \alpha N I(t)-\alpha I^2(t) \tag{1.7}$$

ESTA ECUACIÓN DIFERENCIAL, QUE RIGE LA VARIACIÓN DE LA POBLACIÓN INFECCIOSA, ESTÁ SÓLO EN FUNCIÓN DE $I(t)$; ESTO ES, SÓLO DEL NÚMERO DE INFECCIOSOS QUE EXISTEN AL TIEMPO t. PUEDE NOTARSE QUE EL CRECIMIENTO DEL NÚMERO DE INFECCIOSOS AL TIEMPO t SE VE FAVORECIDO POR EL TÉRMINO LINEAL $\alpha N I(t)$ Y SE VE OBSTACULIZADO POR EL TÉRMINO CUADRÁTICO $\alpha I^2(t)$.

ESTA ECUACIÓN OBTENIDA ES DEL MISMO TIPO DE ECUACIÓN DIFERENCIAL QUE RIGE EL CRECIMIENTO DE UNA POBLACIÓN EN LA QUE DICHO CRECIMIENTO AL TIEMPO t SE VE FAVORECIDO POR EL NÚMERO DE INDIVIDUOS EXISTENTE EN LA POBLACIÓN AL TIEMPO t, ES DECIR, SE VE FAVORECIDO POR EL TÉRMINO ay, Y SE VE OBSTACULIZADO POR EL TÉRMINO by^2, SIENDO ASÍ LA ECUACIÓN QUE RIGE EL CRECIMIENTO DE LA FORMA $y'=ay-by^2$. CUANDO LA LIMITANTE AL CRECIMIENTO ES, POR EJEMPLO, LA COMPETENCIA ENTRE LOS MIEMBROS DE LA POBLACIÓN POR EL ALIMENTO O POR EL ESPACIO, SE ACOSTUMBRA TOMAR DICHA COMPETENCIA PROPORCIONAL AL NÚMERO DE CONTACTOS POSIBLES AL TIEMPO t ENTRE LOS MIEMBROS DE LA POBLACIÓN ENTRE SÍ; ESTE NÚMERO DE CONTACTOS POSIBLES ESTÁ DADO POR y^2 PRECISAMENTE.

EN NUESTRO CASO SE PUEDE INTERPRETAR QUE EL CRECIMIENTO EN EL NÚMERO DE MIEMBROS DE LA POBLACIÓN DE INFECCIOSOS SE VE LIMITADO POR LA COMPETENCIA ENTRE ELLOS MISMOS POR CONTAGIAR A LOS SUSCEPTIBLES, LOS CUALES NO EXCEDEN A N.

LA EC.(1.7) PODEMOS RESOLVERLA POR EL MÉTODO DE SEPARACIÓN DE VARIABLES. ESCRIBIENDO ESTA ECUACIÓN EN LA FORMA

$$I'(t)=\frac{1}{\left[\alpha N I(t)-\alpha I^2(t)\right]^{-1}} \tag{1.7'}$$

Y UTILIZANDO DICHO MÉTODO, PODEMOS ASEGURAR QUE

$$\int_{I_0}^{I}(\alpha N r-\alpha r^2)^{-1}\,dr=\int_0^t ds \tag{1.8}$$

INTEGRANDO EL LADO IZQUIERDO DE ESTA IGUALDAD, TENEMOS

$$\int_{I_0}^{I}(\alpha N r-\alpha r^2)^{-1}\,dr=\frac{1}{\alpha N}\,\ell n\frac{I\left[N-I_0\right]}{I_0\left[N-I\right]} \tag{1.9}$$

Y ENTONCES

$$\frac{1}{\alpha N}\,\ell n\frac{I\left[N-I_0\right]}{I_0\left[N-I\right]}=t \tag{1.10}$$

DESPEJANDO EN ESTA ECUACIÓN A LA FUNCIÓN I, OBTENEMOS

$$I(t)=\frac{NI_0}{\left[N-I_0\right]\exp\left[-\alpha N t\right]+I_0} \tag{1.11}$$

DE LA EC.(1.6), PODEMOS OBTENER FÁCILMENTE LA FUNCIÓN S(t), ASÍ

$$S(t)=N\left[1-\frac{I_0}{\left[N-I_0\right]\exp\left[-\alpha N t\right]+I_0}\right] \tag{1.12}$$

UNA VEZ OBTENIDA LA SOLUCIÓN DEL SISTEMA DE ECUACIONES (1.2) Y (1.3), PODEMOS PASAR A ESTUDIAR SU COMPORTAMIENTO.

PRIMERO QUE TODO, SE PUEDE NOTAR QUE

$$\lim_{t\to\infty} I(t)=N \tag{1.13}$$

Y

$$\lim_{t\to\infty} S(t)=0 \tag{1.14}$$

PODEMOS CONCLUIR, A PARTIR DE LAS ECS.(1.13) Y (1.14), QUE EL PROCESO DE DIFUSIÓN DE LA ENFERMEDAD, UNA VEZ INICIADO, CESARÁ SÓLO HASTA QUE LA POBLACIÓN DE INDIVIDUOS SUSCEPTIBLES SEA AGOTADA. MÁS AÚN, PUESTO QUE EL LÍMITE DE LA FUNCIÓN I CUANDO t TIENDE A INFINITO NO DEPENDE DEL VALOR DE I_0 (RECUÉRDESE QUE $0<I_0<N$), BASTA QUE INTRODUZCAMOS UN INDIVIDUO INFECCIOSO, $I_0=1$, EN LA POBLACIÓN DE SUSCEPTIBLES DE TAMAÑO N-1, PARA QUE LA ENFERMEDAD SE DIFUNDA Y ABARQUE A TODA LA POBLACIÓN; NINGÚN INDIVIDUO SUSCEPTIBLE ESCAPARÁ A LA ENFERMEDAD, LA EPIDEMIA SE PRESENTARÁ Y AFECTARÁ A TODA LA POBLACIÓN.

TENIENDO YA RESUELTO QUÉ SUCEDERÁ A LA LARGA EN LA POBLACIÓN, PODEMOS PASAR A EXAMINAR OTROS ASPECTOS DEL DESARROLLO DEL PROCESO DE DIFUSIÓN DE LA ENFERMEDAD.

A PARTIR DE LA EC.(1.11), DERIVANDO RESPECTO A t, OBTENEMOS

$$I'(t) = \frac{\alpha N^2 I_0\left[N-I_0\right]\exp\left[-\alpha N t\right]}{\left[\left[N-I_0\right]\exp\left[-\alpha N t\right]+I_0\right]^2} \qquad (1.15)$$

DADA LA CONDICIÓN DE PERMANENCIA EN LA CLASE I QUE HEMOS IMPUESTO, ES NATURAL ESPERAR QUE LA FUNCIÓN I SEA MONÓTONA CRECIENTE. COMO $\alpha>0$ Y $0<I_0<N$, LA EC.(1.15) ESTABLECE QUE $I(t)>0$ PARA TODO $t\in[0,\infty)$; ESTO ES, LA FUNCIÓN I NO SÓLO ES MONÓTONA CRECIENTE, SINO ESTRICTAMENTE CRECIENTE. ENTONCES, PODEMOS ASEGURAR QUE LA FUNCIÓN I ESTÁ ACOTADA ENTRE LOS VALORES 0 Y N.

Así, $0<I(t)<N$ para todo $t\in[0,\infty)$. Este hecho no es sorprendente si recordamos el significado de la función I.

Podemos obtener más información sobre las funciones S e I. Sabemos que los valores de I se encuentran en el intervalo - $[I_0,N)$, así la Ec.(1.7) puesta en la forma

$$I' = \alpha NI - \alpha I^2 \tag{1.16}$$

representa un segmento de parábola en el plano fase I,I'.

De la Ec.(1.7) sabemos que $I'(0)=\alpha I_0 S_0$, así el punto -- correspondiente en el plano fase I,I' para $t=0$ es $(I_0,\alpha I_0 S_0)$, - en el cual empieza el segmento de parábola.

Derivando en la Ec.(1.16) con respecto a I, se obtiene

$$\frac{d}{dI} I' = \alpha N - 2\alpha I \tag{1.17}$$

Tenemos que $\frac{d}{dI} I'>0$ en $[I_0,N/2)$, $\frac{d}{dI} I'<0$ en $(N/2,N)$, y $\frac{d}{dI} I'=0$ en $I=N/2$. Así, la parábola crece en el intervalo $[I_0,N/2]$ y decrece en el intervalo $[N/2,N)$. En el punto $I=N/2$ la parábola alcanza su máximo.

Cuando $I=N/2$ tenemos que

$$I' = N^2\alpha/4 \tag{1.18}$$

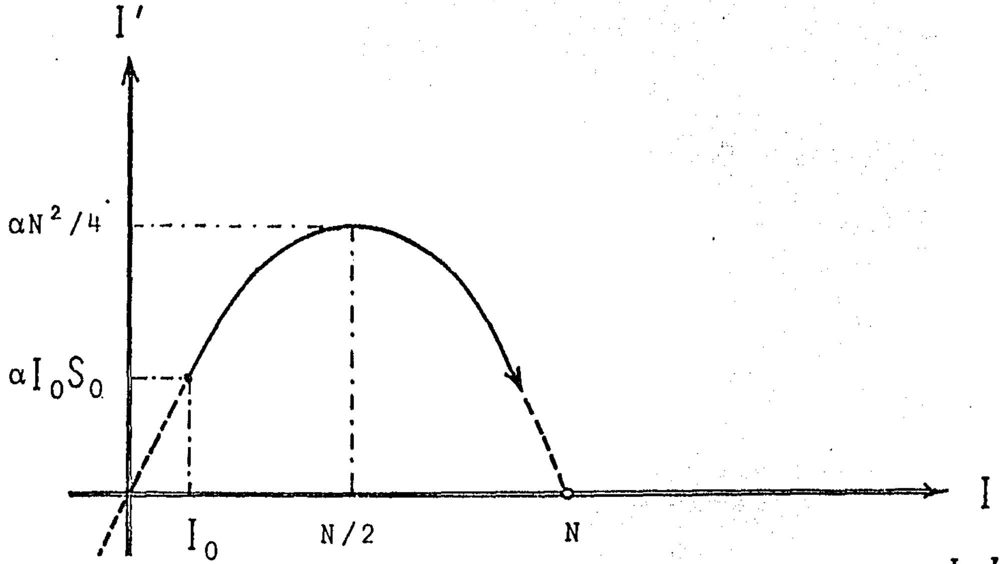
por tanto, el vértice de la parábola está en el punto $(N/2,\alpha N^2/4)$.

Considerando la Ec.(1.13), podemos deducir de la

EC.(1.16) QUE

$$\lim_{t\to\infty} I'(t) = 0 \qquad (1.19)$$

POR TANTO, LA CURVA EN EL PLANO FASE I, I' SE VA ACERCANDO AL -- PUNTO $(N, 0)$ CUANDO t TIENDE A INFINITO.(FIG.8).



CURVA DESCRITA POR LA EC.(1.16) EN EL PLANO FASE I, I'

FIGURA 8

DE LO SUCEDIDO EN EL PLANO FASE I, I', PODEMOS CONCLUIR QUE LA RAPIDEZ DE DIFUSIÓN DE LA ENFERMEDAD ES SIMÉTRICA RESPECTO AL VALOR DE $I=N/2$; ESTO ES, RESPECTO A LA MITAD DE LA POBLACIÓN TOTAL[6]. ASÍ, LA RAPIDEZ DE DIFUSIÓN VA CRECIENDO HASTA -- LLEGAR A UN VALOR MÁXIMO, EL CUAL ES ALCANZADO EN EL MOMENTO EN QUE LA EPIDEMIA ABARCA A LA MITAD DE LA POBLACIÓN; DESPUÉS DE - ELLO, LA RAPIDEZ DE DIFUSIÓN DE LA INFECCIÓN VA DISMINUYENDO, -

---

(6) De la ec.(1.16), mediante una translación en el eje I ($I^{*}=I-\frac{N}{2}$), puede observarse que se trata de una parábola vertical que se - abre hacia abajo.

DE MANERA ANÁLOGA A COMO CRECIÓ RESPECTO AL NÚMERO DE INDIVI- DUOS INFECCIOSOS EXISTENTE, ACERCÁNDOSE CADA VEZ MÁS A CERO.

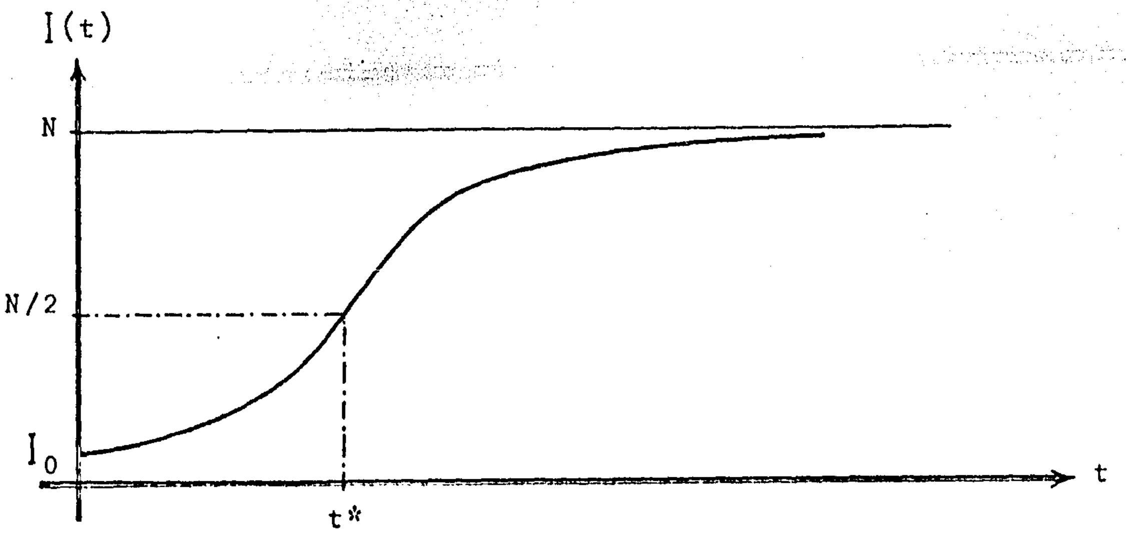
A PARTIR DE LA INFORMACIÓN OBTENIDA, TENEMOS QUE LA GRÁFICA DE I TIENE LAS SIGUIENTES CARACTERÍSTICAS.

LA GRÁFICA DE I INICIA EN EL PUNTO $(0, I_0)$. LA PENDIENTE DE SU RECTA TANGENTE VA CRECIENDO HASTA EL MOMENTO t^* EN QUE $I(t^*)=N/2$, EN ESE MOMENTO LA DERIVADA ES MÁXIMA Y LA GRÁFICA DE I TIENE AHÍ UN PUNTO DE INFLEXIÓN. DESPUÉS, LA PENDIENTE DE LA RECTA TANGENTE VA DECRECIENDO, ACERCÁNDOSE A CERO CONFORME t TIENDE A INFINITO. ENTONCES, I CRECE ACELERÁDAMENTE HASTA EL MOMENTO t^* Y POSTERIORMENTE EL CRECIMIENTO VA HACIÉNDOSE LENTO.

EVALUANDO LA EC.(1.11) EN t^*, Y DESPEJANDO A t^* OBTENEMOS

$$t^* = \frac{1}{\alpha N} \ln \frac{N-I_0}{I_0} \tag{1.20}$$

EN LA FIG.9 MOSTRAMOS LA GRÁFICA DE I.



GRAFICA DE LA FUNCION I

FIGURA 9

El hecho de que el crecimiento de I sea acelerado hasta el momento en que I toma el valor $N/2$ es muy importante. El tiempo necesario que debe transcurrir, a partir del momento en que aparecen los individuos infecciosos en la población, para que la enfermedad abarque a la mitad de la población (para una población grande) puede ser muy pequeño. En particular si $\alpha \gg 1$, este lapso se ve reducido. Este resultado refleja muy bien la situación que se establece cuando una epidemia ataca a una población; ésta se presenta en un inicio como una especie de estallamiento, pasando en un lapso muy corto de un pequeño número de infecciosos a un número bastante mayor.

La gráfica de I nos da a cada momento t el número total de individuos infecciosos que hasta dicho momento existen. Conviene obtener la gráfica de I' pues así, podemos tener también una medida directa del número de individuos infecciosos nuevos (infecciosos frescos) que empiezan su infección en el momento t; tal curva recibe el nombre de <u>curva epidémica</u>. Es importante contar con esta curva, pues la forma en que son elaborados los registros epidémicos es precisamente registrando el número de casos infecciosos nuevos que en ese día o en esa semana se presentaron; no se acostumbra registrar cuántos casos infecciosos existen hasta tal día o hasta tal semana; por la forma tan dispersa en que luego se registran los casos nuevos, tal presentación de datos es prácticamente imposible. Por lo demás, integrando la curva epidémica en el intervalo $[0,t]$ podemos obtener

EL NÚMERO TOTAL DE INDIVIDUOS INFECCIOSOS EXISTENTE HASTA EL MOMENTO t[7]. LA CURVA EPIDÉMICA ES, PUES, UN RESULTADO TEÓRICO -- QUE PUEDE SER UTILIZADO PARA COTEJAR DIRECTAMENTE EL MODELO CON LOS DATOS; ESTO ES, COMPARAR EL MODELO TEÓRICO CONSTRUIDO CON - LOS DATOS EXISTENTES EN LOS REGISTROS EPIDÉMICOS.

A PARTIR DEL CONOCIMIENTO DE I Y DE LO QUE SUCEDE EN EL PLANO FASE I, I', PODEMOS OBTENER UNA IDEA DE LA GRÁFICA DE I'. DERIVANDO CON RESPECTO A t EN LA EC.(1.7) Y SUSTITUYENDO EN DICHA ECUACIÓN EL VALOR DE $I'(t)$ DE LA EC.(1.2) Y EL DE $S(t)$ DE - LA EC.(1.6), OBTENEMOS

$$I''(t) = \alpha^2 I(t)\left[N - I(t)\right]\left[N - 2I(t)\right] \qquad (1.21)$$

PODEMOS NOTAR QUE

1) SI $t<t^*$

$\Rightarrow I(t) < \frac{N}{2}$

$\Rightarrow I''(t) > 0$

$\Rightarrow I'$ ES ESTRICTAMENTE CRECIENTE EN EL INTERVALO $[0, t^*]$

2) SI $t>t^*$

$\Rightarrow I(t) > \frac{N}{2}$

$\Rightarrow I''(t) < 0$

$\Rightarrow I'$ ES ESTRICTAMENTE DECRECIENTE EN EL INTERVALO $[t^*, \infty)$

(7) Si queremos obtener el número de casos nuevos que se presentan en un cierto día, basta integrar la curva epidémica en el intervalo correspondiente de tiempo de longitud unitaria (siendo la unidad un día).

3) Si $t=t^*$

$\Rightarrow I(t) = \frac{N}{2}$

$\Rightarrow I''(t) = 0$

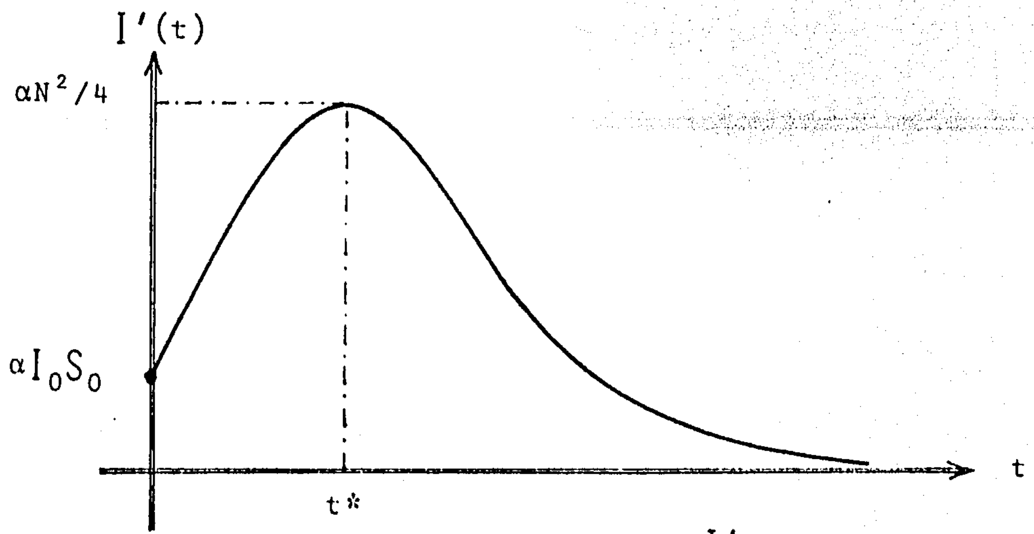
Entonces, por 1) y 2) I' tiene un máximo en t^*

Por la ec.(1.15) tenemos que la gráfica de I' empieza - en el punto $(0,\alpha I_0 S_0)$.

Con la información obtenida, podemos asegurar que la -- función I' va creciendo hasta el momento $t=t^*$, ahí alcanza su valor máximo, precisamente cuando $I=\frac{N}{2}$. Por la ec.(1.16) se tiene que el valor máximo de I' es $\frac{\alpha N^2}{4}$. Posteriormente, I' empieza a decrecer, siendo su valor -por la ec.(1.15)- siempre positivo y además

$$\lim_{t\to\infty} I'(t) = 0 \qquad (1.22)$$

En la Fig.10 ilustramos la gráfica de I'.



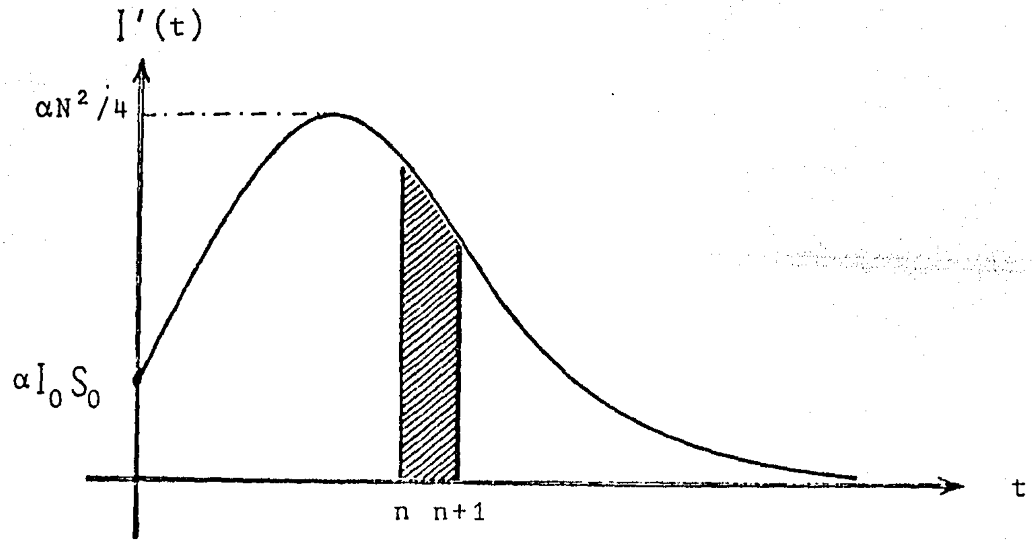
GRAFICA DE LA FUNCION I'

Figura 10

El área bajo la gráfica de la función I' en el intervalo $[0,t]$ nos da el número total de individuos infecciosos al tiempo t. (Fig. 11). Puesto que la epidemia abarcará a toda la población es de esperar que

$$\int_0^\infty I'(u)\,du = N$$

En particular, el área bajo la gráfica de la función I' en el intervalo $[n,n+1]$ dará el número de nuevos infecciosos que se presentan el día o semana n-ésima, dependiendo de cual sea la unidad de tiempo utilizada. (Fig. 11).



EL AREA BAJO LA GRAFICA DE LA FUNCION I EN EL INTERVALO [n,n+1] REPRESENTA EL NUMERO DE NUEVOS INFECCIOSOS EN EL DIA O SEMANA n-ESIMA.

Figura 11

A MANERA DE CIERRE DEL CAPÍTULO, ESTABLECEMOS EL SIGUIENTE TEOREMA, EL CUAL RECOGE ALGUNOS DE LOS ASPECTOS DISCUTIDOS A LO LARGO DE ESTE CAPÍTULO.

TEOREMA

SEA P UNA POBLACIÓN FORMADA POR INDIVIDUOS SUSCEPTIBLES E INFECCIOSOS EN LA QUE SE DESARROLLA UN PROCESO INFECCIOSO REGIDO POR EL SISTEMA DE ECUACIONES

$$S'(t) = -\alpha S(t)I(t)$$
$$I'(t) = -\alpha S(t)I(t)$$
$$S(t) + I(t) = N$$
$$S(0) = S_0 > 0$$
$$I(0) = I_0 > 0$$

DONDE $S(t)$ E $I(t)$ MIDEN EL NÚMERO DE INDIVIDUOS SUSCEPTIBLES E INFECCIOSOS AL TIEMPO t, RESPECTIVAMENTE; α ES LA TASA DE INFECCIÓN (CONSTANTE); N EL TAMAÑO DE LA POBLACIÓN, EL CUAL ES EL MISMO EN TODO MOMENTO t; Y S_0 E I_0 VALORES CONOCIDOS; ENTONCES, SE PUEDE ASEGURAR QUE EN TAL POBLACIÓN SE PRESENTARÁ UN PROCESO EPIDÉMICO QUE ABARCARÁ A TODA LA POBLACIÓN, INDEPENDIENTEMENTE DEL NÚMERO INICIAL DE INFECCIOSOS $I_0 > 0$ QUE SEA INTRODUCIDO EN LA POBLACIÓN.

CAPITULO II

MODELO SI CON RECUPERACION

La población que consideramos está constituida, al -- igual que en el modelo anterior, por sólo dos clases de individuos; a saber, la clase S de individuos susceptibles y la clase I de individuos infecciosos. Las reglas que rigen el proceso infeccioso son las mismas que las mencionadas en el Cap. I, bajo - las condiciones de una población homogéneamente mezclada. Introduciremos ahora, sin embargo, una variación. En el modelo anterior impusimos la condición de que cualquier individuo que ingresara en la clase de los individuos infecciosos, permanecería ahí indefinidamente; esto es, se trataba de enfermedades cuyo - padecimiento es de por vida, permaneciendo también de por vida como individuo infeccioso. En este modelo permitimos que la enfermedad sea superable; así, individuos que en un momento --

HAN SIDO INFECCIOSOS, EN OTRO MOMENTO YA NO TIENEN PORQUE SEGUIRLO SIENDO.

SUPONEMOS, TAMBÉN, QUE LOS INDIVIDUOS QUE SUPERAN LA ENFERMEDAD PASAN INMEDIATAMENTE A FORMAR PARTE DE LOS INDIVIDUOS SUSCEPTIBLES; ASÍ, EL HABER PADECIDO LA ENFERMEDAD NO LES CAUSA NINGÚN EFECTO DE INMUNIDAD, DE INMEDIATO PUEDEN VOLVER A SER INFECTADOS.

EN ESTE MODELO SE PERMITE, PUES, UNA SITUACIÓN DE RECIRCULACIÓN DE LOS INDIVIDUOS DE LA POBLACIÓN. INDIVIDUOS SUSCEPTIBLES PUEDEN PASAR A SER INDIVIDUOS INFECCIOSOS; DE ENTRE ESTOS, ALGUNOS PUEDEN SUPERAR LA ENFERMEDAD Y PASAR DE NUEVO A FORMAR PARTE DE LOS INDIVIDUOS SUSCEPTIBLES, CAPACES DE VOLVER A SER INFECTADOS, ETC.

SUPONDREMOS QUE EL NÚMERO DE INDIVIDUOS INFECCIOSOS QUE SUPERAN LA ENFERMEDAD AL TIEMPO t ES PRECISAMENTE PROPORCIONAL AL NÚMERO DE INDIVIDUOS INFECCIOSOS QUE EN DICHO MOMENTO EXISTEN.

ESTABLECIDO LO ANTERIOR, TENEMOS QUE EL CAMBIO EN EL NÚMERO DE INDIVIDUOS INFECCIOSOS AL TIEMPO t ES IGUAL AL NÚMERO DE NUEVOS INFECCIOSOS QUE INGRESAN A LA CLASE I EN EL MOMENTO t MENOS EL NÚMERO DE INDIVIDUOS INFECCIOSOS QUE SUPERAN LA ENFERMEDAD EN DICHO MOMENTO. ENTONCES, PODEMOS ASEGURAR QUE

$$I'(t) = \alpha S(t) I(t) - \beta I(t) \qquad (2.1)$$

DONDE α, $S(t)$ E $I(t)$ TIENEN EL MISMO SIGNIFICADO QUE EN EL CAPÍTULO ANTERIOR. EL VALOR β LO TOMAREMOS CONSTANTE; POR RAZONES EVIDENTES DE INTERPRETACIÓN IMPONEMOS LA CONDICIÓN $0 \leq \beta < 1$. LLAMAREMOS A β TASA DE RECUPERACIÓN.

LA RAZÓN DE CAMBIO INSTANTÁNEO EN EL NÚMERO DE INDIVIDUOS SUSCEPTIBLES ES IGUAL EN MAGNITUD, PERO DE SIGNO CONTRARIO, A LA RAZÓN DE CAMBIO INSTANTÁNEO DEL NÚMERO DE INDIVIDUOS INFECCIOSOS; LOS QUE ENTRAN A LA CLASE I, ABANDONAN LA CLASE S; LOS QUE ABANDONAN LA CLASE I, ENTRAN A LA CLASE S. RECORDEMOS QUE SÓLO EXISTEN DOS CLASES DE INDIVIDUOS EN LA POBLACIÓN, POR TANTO

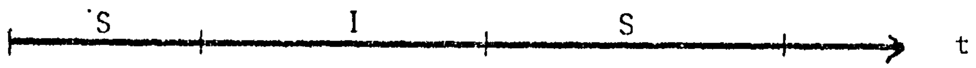
$$S'(t) = -\alpha S(t) I(t) + \beta I(t) \qquad (2.2)$$

EL PROCESO QUE PODRÁ SEGUIR UN INDIVIDUO DE LA POBLACIÓN Y EL PROCESO DE TRANSMISIÓN DE LA ENFERMEDAD QUEDAN DESCRITOS, ESQUEMÁTICAMENTE, EN LOS DIAGRAMAS PRESENTADOS EN LA FIG. 12 Y FIG. 13.

CONTINUAMOS TRABAJANDO EN UNA POBLACIÓN CERRADA, ESTO ES

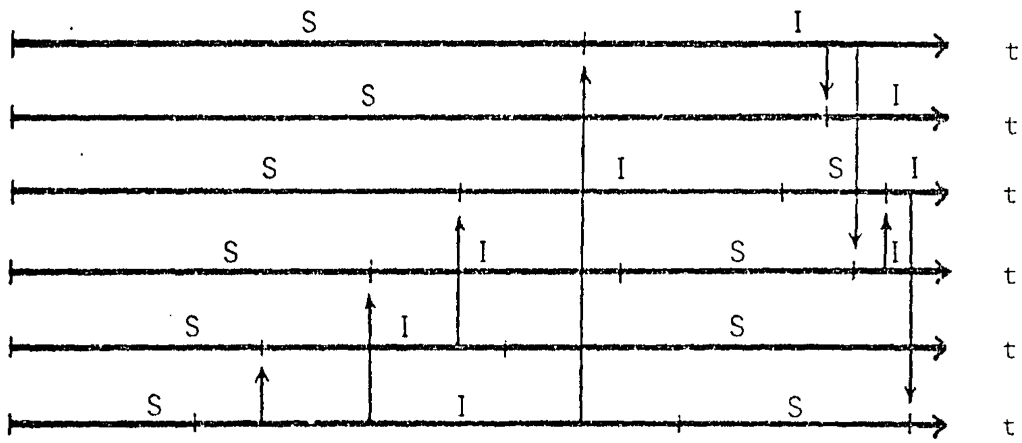
$$S(t) + I(t) = N \qquad \forall\ t \in [0, \infty) \qquad (2.3)$$

RESUMIENDO. TENEMOS QUE EL PROCESO DE DIFUSIÓN DE LA ENFERMEDAD ESTÁ REGIDO POR EL SISTEMA



PROCESO QUE EN EL TIEMPO SIGUE UN INDIVIDUO DE LA POBLACION QUE HA SIDO INFECTADO, PARA EL CASO EN QUE NO EXISTE PERIODO DE LATENCIA Y LA ENFERMEDAD PUDE SUPERARSE, AUNQUE ESTA NO CONFIERE EFECTO DE INMUNIDAD ALGUNO POR HABERLA PADECIDO.

FIGURA 12



MECANISMO MEDIANTE EL CUAL SE DESARROLLA EL PROCESO EN QUE UNOS INDIVIDUOS INFECCIOSOS CONTAGIAN A OTROS INDIVIDUOS SUSCEPTIBLES, OTROS MAS SE RECUPERAN, ETC., PARA EL CASO EN QUE NO EXISTE PERIODO DE LATENCIA NI EFECTO DE INMUNIDAD.

FIGURA 13

$$I'(t) = \alpha S(t)I(t) - \beta I(t) \tag{2.1}$$

$$S'(t) = -\alpha S(t)I(t) + \beta I(t) \tag{2.2}$$

$$S(t) + I(t) = N \qquad \forall\ t \in [0,\infty) \tag{2.3}$$

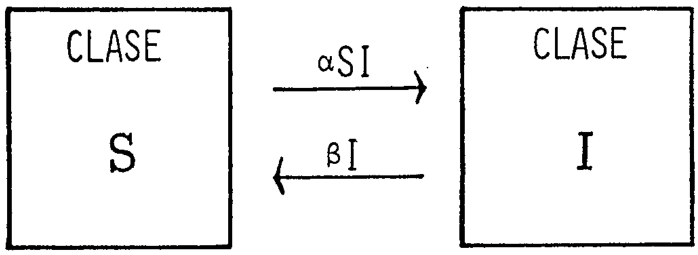
CON LAS CONDICIONES INICIALES

$$S(0) = S_0 \qquad \text{CON } 0 < S_0 < N \tag{2.4}$$

$$I(0) = I_0 \qquad \text{CON } 0 < I_0 < N \tag{2.5}$$

HEMOS IMPUESTO LA CONDICIÓN DE QUE $\beta > 0$. EL CASO EN QUE $\beta = 0$ ES PRECISAMENTE EL DISCUTIDO EN EL CAP. I.

EL ESQUEMA DE LA FIG.14 ILUSTRA EL PROCESO DE FLUJO QUE SE ESTABLECE EN LA POBLACIÓN.



PROCESO DE FLUJO DE INDIVIDUOS DE LA CLASE S A LA CLASE I, Y VICEVERSA.
FIGURA 14

PASEMOS A RESOLVER EL SISTEMA DE ECUACIONES OBTENIDO Y ESTUDIEMOS EL COMPORTAMIENTO DE LAS FUNCIONES SOLUCIÓN.

DESPEJANDO $S(t)$ EN LA EC.(2.3) Y SUSTITUYENDO SU VALOR EN LA EC.(2.1), SE OBTIENE

$$I'(t) = (\alpha N-\beta)I(t) - \alpha I^2(t) \tag{2.6}$$

ESTA ECUACIÓN ES DE LA FORMA $y'=ay-by^2$. UTILIZANDO EL MÉTODO DE SEPARACIÓN DE VARIABLES PARA RESOLVER ESTA ECUACIÓN, SE TIENE

$$\int_{I_0}^{I} \left[(\alpha N-\beta)r - \alpha r^2\right]^{-1} dr = \int_0^t ds \tag{2.7}$$

SI $\alpha N-\beta \neq 0$

$\Rightarrow$

$$\int_{I_0}^{I} \left[(\alpha N-\beta)r - \alpha r^2\right]^{-1} dr = \frac{1}{\alpha N-\beta}\,\ell n\,\frac{I\left[(\alpha N-\beta)-\alpha I_0\right]}{I_0\left[(\alpha N-\beta)-\alpha I\right]} \tag{2.8}$$

ENTONCES

$$\frac{1}{\alpha N-\beta}\,\ell n\,\frac{I\left[(\alpha N-\beta)-\alpha I_0\right]}{I_0\left[(\alpha N-\beta)-\alpha I\right]} = t \tag{2.9}$$

DESPEJANDO EN ESTA ECUACIÓN A LA FUNCIÓN I, OBTENEMOS

$$I(t) = \frac{(\alpha N-\beta)I_0}{\left[(\alpha N-\beta)-\alpha I_0\right]\exp\left[-(\alpha N-\beta)t\right] + \alpha I_0} \tag{2.10}$$

TOMANDO $\rho = \frac{\beta}{\alpha}$, SE LLEGA A

$$I(t) = \frac{(N-\rho)I_0}{\left[(N-\rho)-I_0\right] \exp\left[-\alpha(N-\rho)t\right] + I_0} \qquad (2.11)$$

SI $\alpha N-\beta = 0$, SE TIENE

$$\int_{I_0}^{I} \left[-\alpha r^2\right]^{-1} dr = \int_0^t ds \qquad (2.12)$$

ENTONCES

$$\alpha\left(\frac{1}{I} - \frac{1}{I_0}\right) = t \qquad (2.13)$$

DESPEJANDO EN ESTA ECUACIÓN A LA FUNCIÓN I, OBTENEMOS

$$I(t) = \frac{\alpha I_0}{I_0 t + \alpha} \qquad (2.14)$$

CONSIDERANDO LAS ECS. (2.3), (2.11) Y (2.14), TENEMOS - QUE LA FUNCIÓN S ESTÁ DADA POR

SI $\alpha N - \beta \neq 0$, ENTONCES

$$S(t) = (N-\rho)\left[1 - \frac{I_0}{I_0+\left[(N-\rho-I_0)\ \exp\left[-\alpha(N-\rho)t\right]\right]}\right] + \rho$$

(2.15)

SI $\alpha N - \beta = 0$, ENTONCES

$$S(t) = N - \frac{I_0}{\alpha I_0 t + 1} \tag{2.16}$$

A LA CONSTANTE $\rho = \frac{\beta}{\alpha}$ LA LLAMAREMOS TASA DE RECUPERACIÓN RELATIVA.

PODEMOS CONCLUIR LO SIGUIENTE:

1) SI $N - \rho > 0$

POR LA EC.(2.11), SE TIENE

$$\lim_{t\to\infty} I(t) = N - \rho \tag{2.17}$$

POR LA EC.(2.15), SE TIENE

$$\lim_{t\to\infty} S(t) = \rho \tag{2.18}$$

2) SI $N - \rho = 0$

POR LA EC. (2,14), SE TIENE

$$\lim_{t\to\infty} I(t) = 0 \tag{2.19}$$

POR LA EC.(2.16), SE TIENE

$$\lim_{t\to\infty} S(t) = N \tag{2.20}$$

3) SI $N - \rho < 0$

POR LA EC.(2.11), SE TIENE

$$\lim_{t\to\infty} I(t) = 0 \tag{2.21}$$

POR LA EC.(2.15), SE TIENE

$$\lim_{t\to\infty} S(t) = N \tag{2.22}$$

A PARTIR DE LA INFORMACIÓN DADA POR LAS ECS.(2.17), (2.19) Y (2.21), PUEDE NOTARSE QUE EL CURSO QUE SEGUIRÁ A LA LARGA EL PROCESO DE DIFUSIÓN DE LA ENFERMEDAD EN LA POBLACIÓN DEPENDERÁ DEL VALOR QUE TOME $N-\rho$. MÁS ADELANTE VOLVEREMOS A ESTA PROBLEMÁTICA; POR EL MOMENTO, OBTENDRÉMOS MÁS INFORMACIÓN SOBRE LA FUNCIÓN I.

SI $N-\rho \neq 0$

POR LA EC.(2.11), SE TIENE QUE

$$I'(t) = \frac{\alpha(N-\rho)^2 I_0\left[(N-\rho)-I_0\right] \exp\left[-\alpha(N-\rho)t\right]}{\left[\left[(N-\rho)-I_0\right] \exp\left[-\alpha(N-\rho)t\right] + I_0\right]^2} \tag{2.23}$$

CONSIDERANDO QUE $\alpha > 0$ Y $0 < I_0 < N$, PODEMOS ASEGURAR QUE

A) SI $N-\rho > I_0$

$\Rightarrow \quad N-\rho-I_0 > 0$

$\Rightarrow \quad I'(t) > 0 \qquad \forall\ t \in [0,\infty)$

$\Rightarrow \quad I$ ES ESTRICTAMENTE CRECIENTE.

B) SI $N-\rho = I_0$

$\Rightarrow \quad N-\rho-I_0 = 0$

$\Rightarrow \quad I'(t) = 0 \qquad \forall\ t \in [0,\infty)$

$\Rightarrow \quad I$ ES UNA FUNCIÓN CONSTANTE.

C) SI $N-\rho < I_0$ CON $N-\rho \neq 0$

$\Rightarrow \quad N-\rho-I_0 < 0$

$\Rightarrow \quad I'(t) < 0 \qquad \forall\ t \in [0,\infty)$

$\Rightarrow \quad I'(t) < 0 \qquad \forall\ t \in [0,\infty)$

$\Rightarrow \quad I$ ES ESTRICTAMENTE DECRECIENTE.

SI $N - \rho = 0$

POR LA EC.(2.14), SE TIENE QUE

$$I'(t) = \frac{-\alpha I_0^2}{(\alpha I_0 t + 1)^2} \tag{2.24}$$

CONSIDERANDO QUE $\alpha > 0$ Y $0 < I_0 < N$ ASEGURAMOS QUE

D) SI $N - \rho = 0$

$\Rightarrow \quad I'(t) < 0 \qquad \forall\ t \in [0,\infty)$

$\Rightarrow \quad I$ ES ESTRICTAMENTE DECRECIENTE.

CON TODA LA INFORMACIÓN OBTENIDA HASTA AQUÍ, PODEMOS PASAR A ANALIZAR LO QUE SUCEDE CON EL PROCESO DE DIFUSIÓN DE LA ENFERMEDAD EN LA POBLACIÓN.

CASO 1

$N - \rho > 0$

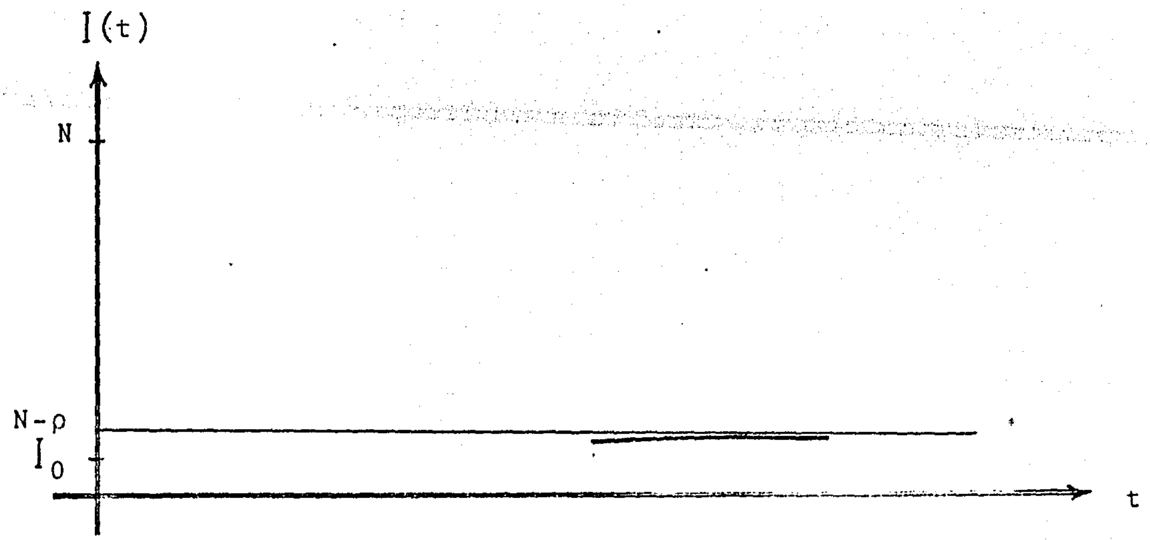
POR LA EC.(2.17) SABEMOS QUE EL PROCESO DE DIFUSIÓN DE LA ENFERMEDAD ES DE TAL FORMA QUE A LA LARGA EL NÚMERO DE INDIVIDUOS QUE PERMANECERÁN COMO INFECCIOSOS SERÁ $N - \rho$, INDEPENDIENTEMENTE DEL VALOR DE I_0.

ES IMPORTANTE SABER CÓMO SE LLEGA A ESA SITUACIÓN. LA INFORMACIÓN OBTENIDA EN LOS INCISOS A), B), C) Y D) NOS AYUDARÁ

A RESPONDER ESTA PREGUNTA.

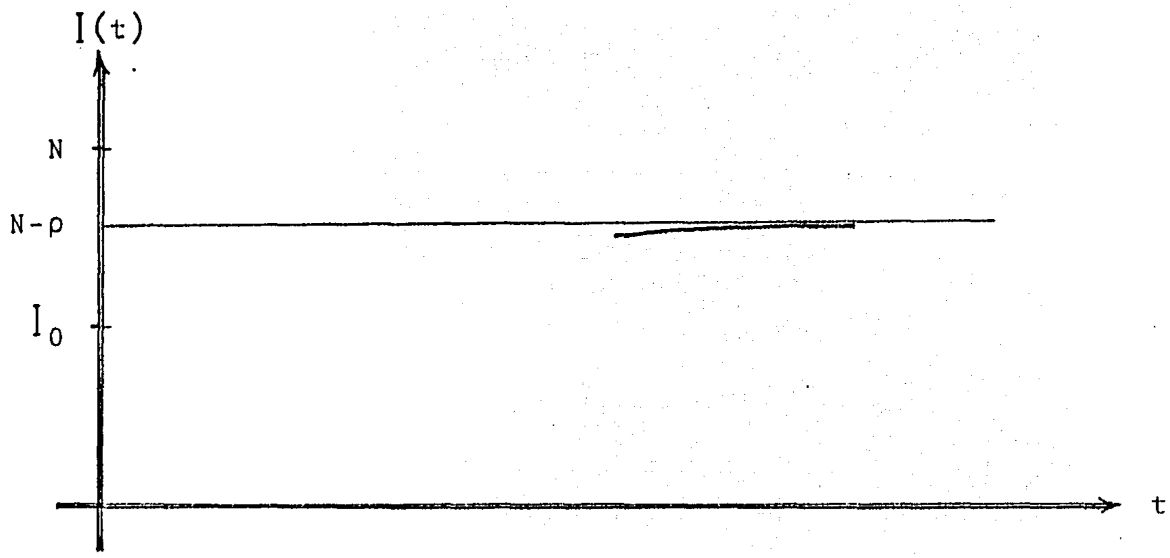
SI $N-\rho > I_0$, POR EL INCISO A), SABEMOS QUE I ES ESTRICTAMENTE CRECIENTE. POR TANTO, LA FUNCIÓN I SIEMPRE CRECE ACERCÁNDOSE CADA VEZ MÁS AL VALOR $N-\rho$.

EN PARTICULAR, SI EL VALOR DE I_0 ES MUY CERCANO AL VALOR $N-\rho$ EL NÚMERO DE INDIVIDUOS INFECCIOSOS CRECERÁ MUY POCO. SI EL VALOR DE I_0 ES MUY PEQUEÑO EN COMPARACIÓN CON EL DE $N-\rho$, ENTONCES EL NÚMERO DE INDIVIDUOS INFECCIOSOS CRECERÁ CONSIDERABLEMENTE. EN AMBAS SITUACIONES SE DA EL ESTALLAMIENTO EPIDÉMICO, SÓLO QUE EN LA PRIMERA ES DE MUY CORTO ALCANCE. ASIMISMO, EN LOS DOS CASOS SE ESTABLECE UNA SITUACIÓN ENDÉMICA, CUYA GRAVEDAD DEPENDE DE LA RELACIÓN QUE GUARDE EL VALOR DE $N-\rho$ CON N. (FIGS.15, 16 Y 17).



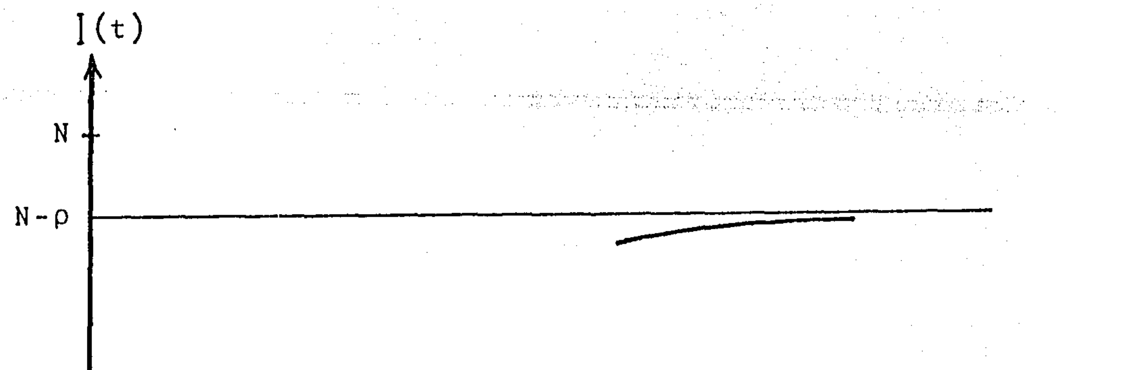
EPIDEMIA DE CORTO ALCANCE CON SITUACION ENDEMICA NO GRAVE.

FIGURA 15



EPIDEMIA DE CORTO ALCANCE CON SITUACION ENDEMICA GRAVE.

FIGURA 16

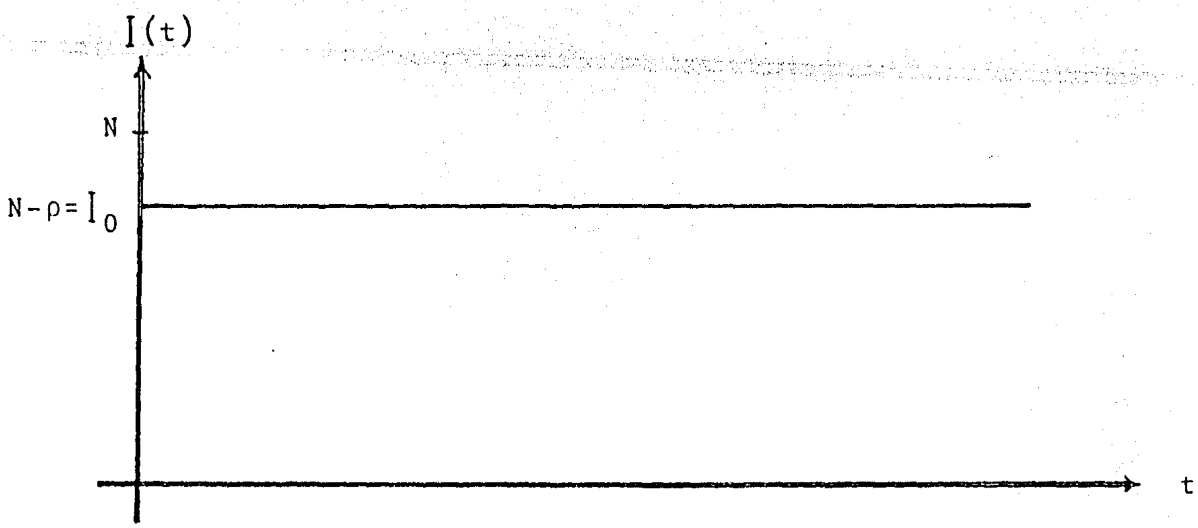


ESTALLAMIENTO EPIDEMICO CONSIDERABLE CON SITUACION ENDEMICA GRAVE.

FIGURA 17

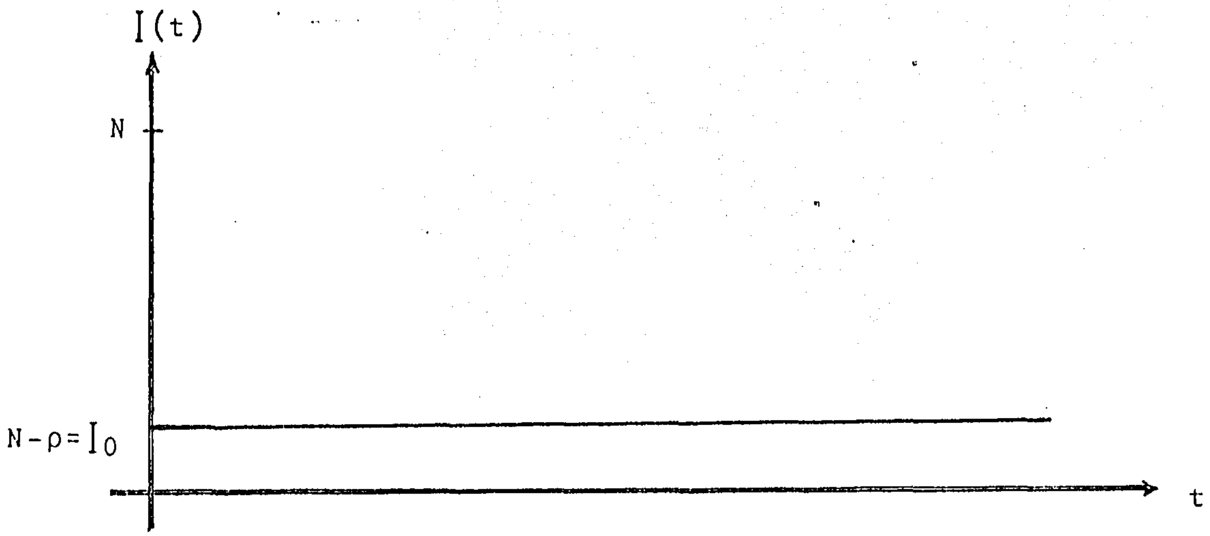
Si $N-\rho = I_0$, por el inciso b), sabemos que I es una función constante; puesto que $I(0) = I_0$, aseguramos que $I(t) = N-\rho$. Se trata, pues, de una situación de equilibrio, la cual puede observarse directamente de las ecs. (2.1) y (2.2). Veamos, si I es la función constante $I(t) = N-\rho$, por la ec. (2.3), aseguramos entonces que S es también una función constante, a saber, $S(t) = \rho$. Por tanto, $S'(t) \equiv 0$ e $I'(t) \equiv 0$. Considerando el plano fase S,I, tenemos que el punto $(\rho, N-\rho)$ es un punto de equilibrio. A saber, es el único punto de equilibrio del sistema que tiene la característica de que la función I no es idénticamente cero. Por tanto, es la única solución de equilibrio que podemos obtener en nuestro problema.

En este caso no hay estallamiento epidémico, sin embargo se establece una situación endémica cuya gravedad dependerá del valor que tome $N-\rho$ respecto a N. (Figs. 18 y 19).



NO HAY ESTALLAMIENTO EPIDEMICO, PERO EXISTE UNA SITUACION ENDEMICA GRAVE.

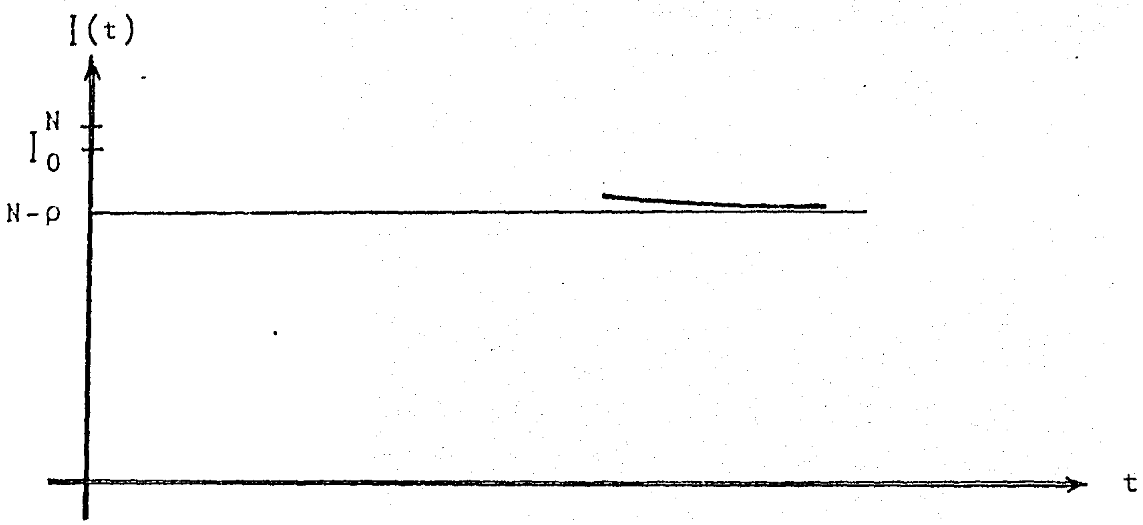
FIGURA 18



NO HAY ESTALLAMIENTO EPIDEMICO Y EXISTE UNA SITUACION ENDEMICA NO GRAVE.

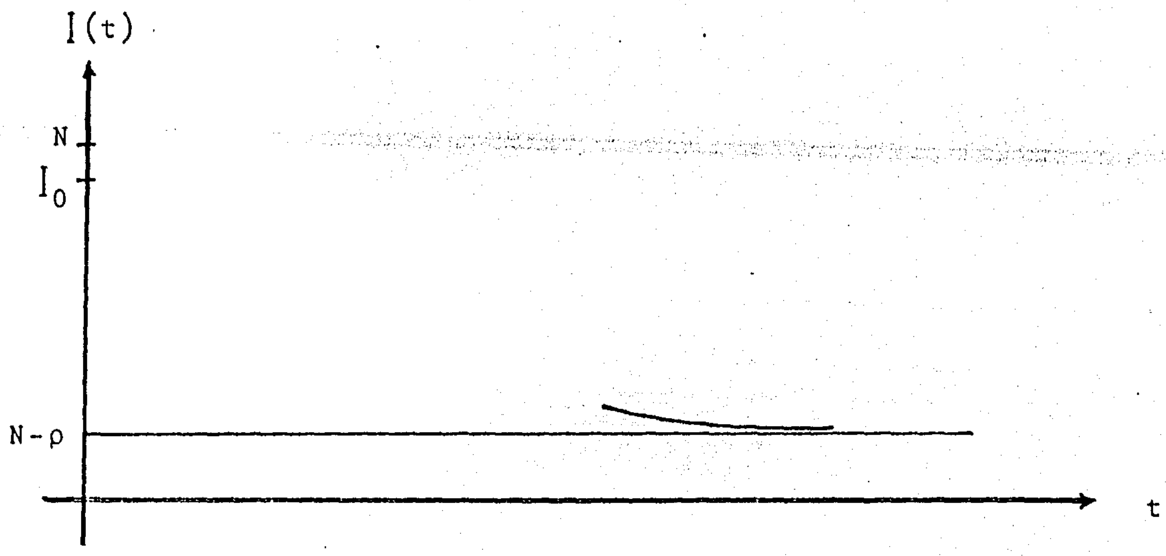
FIGURA 19

SI $N-\rho < I_0$, POR EL INCISO C), SABEMOS QUE I ES ESTRICTAMENTE DECRECIENTE. POR TANTO, LA FUNCIÓN I SIEMPRE DECRECE ACERCÁNDOSE CADA VEZ MÁS AL VALOR $N-\rho$. EN ESTE CASO, POR TANTO, TAMPOCO HAY ESTALLAMIENTO EPIDÉMICO, EL NÚMERO DE INDIVIDUOS INFECCIOSOS SIEMPRE DISMINUYE. NO HAY QUE PERDER DE VISTA, SIN EMBARGO, QUE TAMBIÉN SE ESTABLECE UNA SITUACIÓN ENDÉMICA, LA CUAL PUEDE O NO SER GRAVE DEPENDIENDO DEL VALOR DE $N-\rho$.(FIGS.20 Y 21).



NO HAY ESTALLAMIENTO EPIDEMICO Y EXISTE UNA SITUACION ENDEMICA GRAVE.

FIGURA 20



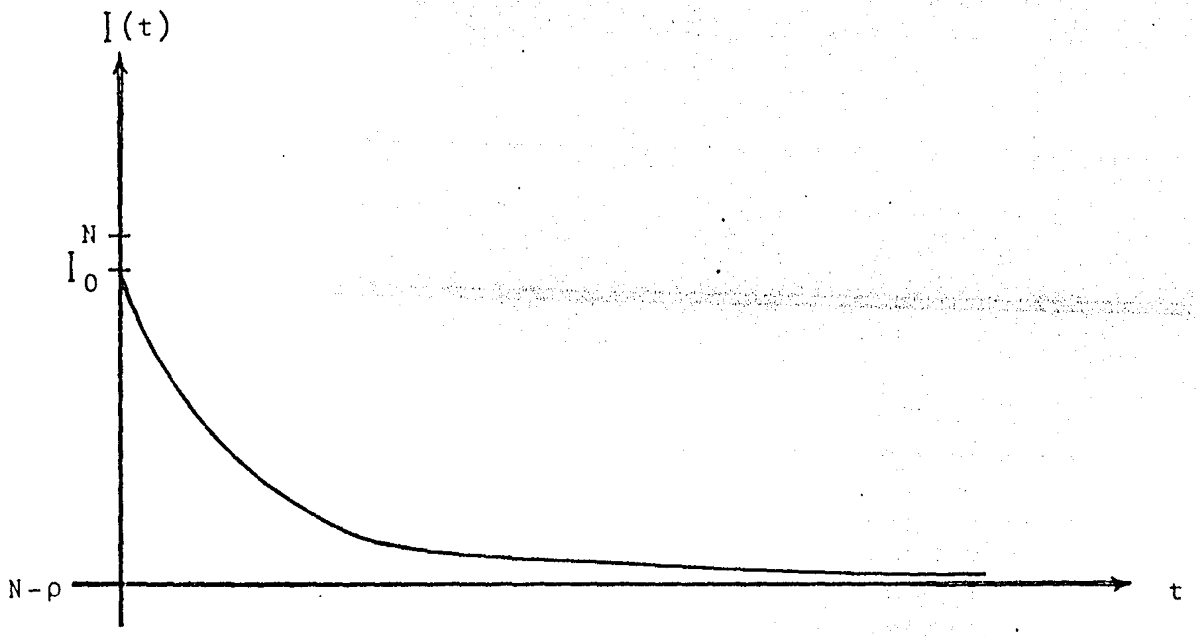
NO HAY ESTALLAMIENTO EPIDEMICO Y EXISTE UNA SITUACION ENDEMICA NO GRAVE.

FIGURA 21

CASO 2

$N - \rho = 0$

POR LA EC.(2.19) SABEMOS QUE EL PROCESO DE DIFUSIÓN DE LA ENFERMEDAD ES DE TAL FORMA QUE A LA LARGA CESARÁ LA PROPAGACIÓN DE LA ENFERMEDAD, LLEGÁNDOSE A UNA SITUACIÓN EN LA QUE NO HABRÁ INDIVIDUOS INFECCIOSOS EN LA POBLACIÓN. POR EL INCISO D) SABEMOS QUE I ES ESTRICTAMENTE DECRECIENTE. POR TANTO, SEA CUAL SEA EL VALOR DE I_0, ASEGURAMOS QUE NO HABRÁ ESTALLAMIENTO EPIDÉMICO. Y COMO EL NÚMERO DE INDIVIDUOS INFECCIOSOS DISMINUYE HASTA CERO, TAMPOCO EXISTE SITUACIÓN ENDÉMICA. LA POBLACIÓN TIENDE A CONVERTIRSE DE NUEVO EN UNA POBLACIÓN EN LA QUE SÓLO HAY INDIVIDUOS SUSCEPTIBLES.(FIG.22).



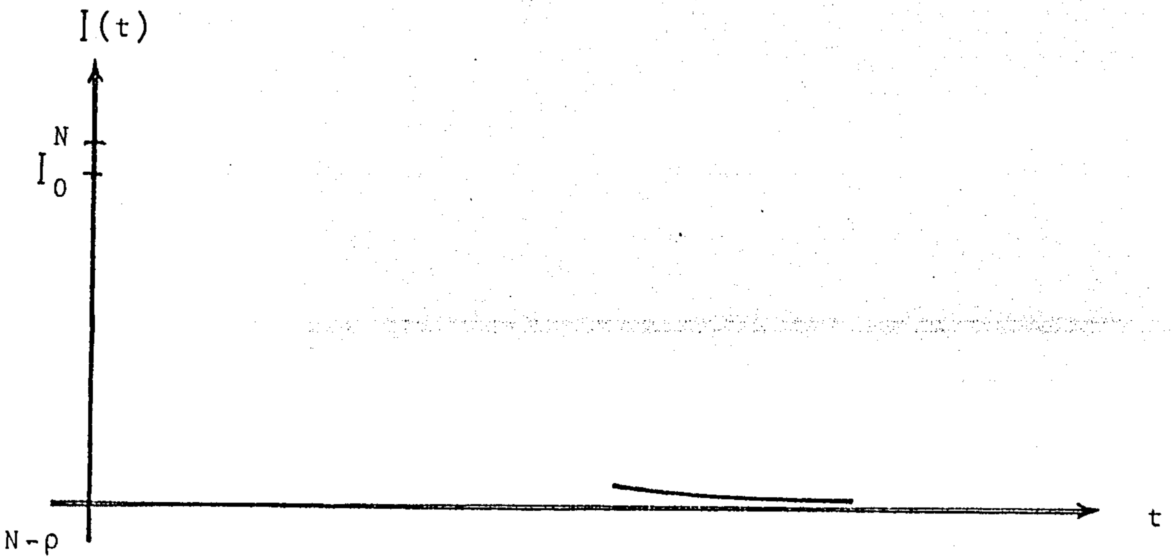
NO HAY ESTALLAMIENTO EPIDEMICO Y NO EXISTE SITUACION ENDEMICA.

FIGURA 22

CASO 3

$N - \rho < 0$

POR LA EC.(2.21) SABEMOS QUE EL PROCESO DE DIFUSIÓN DE LA ENFERMEDAD ES DE TAL FORMA QUE A LA LARGA CESARÁ LA PROPAGACIÓN DE LA ENFERMEDAD, LLEGÁNDOSE A UNA SITUACIÓN EN LA QUE NO HABRÁ INDIVIDUOS INFECCIOSOS EN LA POBLACIÓN. POR EL INCISO C) SABEMOS QUE I ES ESTRICTAMENTE DECRECIENTE. POR TANTO, SEA CUAL SEA EL VALOR DE I_0, ASEGURAMOS QUE NO HABRÁ ESTALLAMIENTO EPIDÉMICO. DE MANERA ANÁLOGA AL CASO 2, TAMPOCO HABRÁ SITUACIÓN ENDÉMICA, Y LA POBLACIÓN TAMBIÉN TENDERÁ A CONFORMARSE EN UNA POBLACIÓN DE INDIVIDUOS SUSCEPTIBLES.(FIG.23).



NO HAY ESTALLAMIENTO EPIDEMICO Y NO EXISTE SITUACION ENDEMICA.

FIGURA 23

Por último, obtendremos una idea de la gráfica de la función I para el caso en que $N-\rho \neq 0$; esto es, cuando la función I está dada por la Ec.(2.11). En el caso en que $N-\rho=0$, la función I está dada por la Ec.(2.14), y encontrar su gráfica no tiene mayor problema. (Ver Fig.22).

A partir de la Ec.(2.6), tenemos

$$I' = (\alpha N - \beta) I - \alpha I^2 \tag{2.25}$$

En el plano fase I, I', esta ecuación representa una parábola vertical que se abre hacia abajo. Dado que $I'=0$ cuando $I=0$ o $I=N-\rho$, aseguramos que dicha parábola cruza al eje I en los puntos $(0,0)$ y $(N-\rho,0)$.

Derivando respecto a I en la Ec.(2.25), se obtiene

$$\frac{dI'}{dI} = \alpha \left[(N-\rho) - 2I \right] \tag{2.26}$$

A partir de esta ecuación podemos concluir lo siguiente

i) Si $I < \frac{N-\rho}{2}$

$\Rightarrow \frac{dI'}{dI} > 0$

esto es, I' crece respecto de I.

ii) Si $I > \frac{N-\rho}{2}$

$\Rightarrow \frac{dI'}{dI} < 0$

ESTO ES, I' DECRECE RESPECTO DE I.

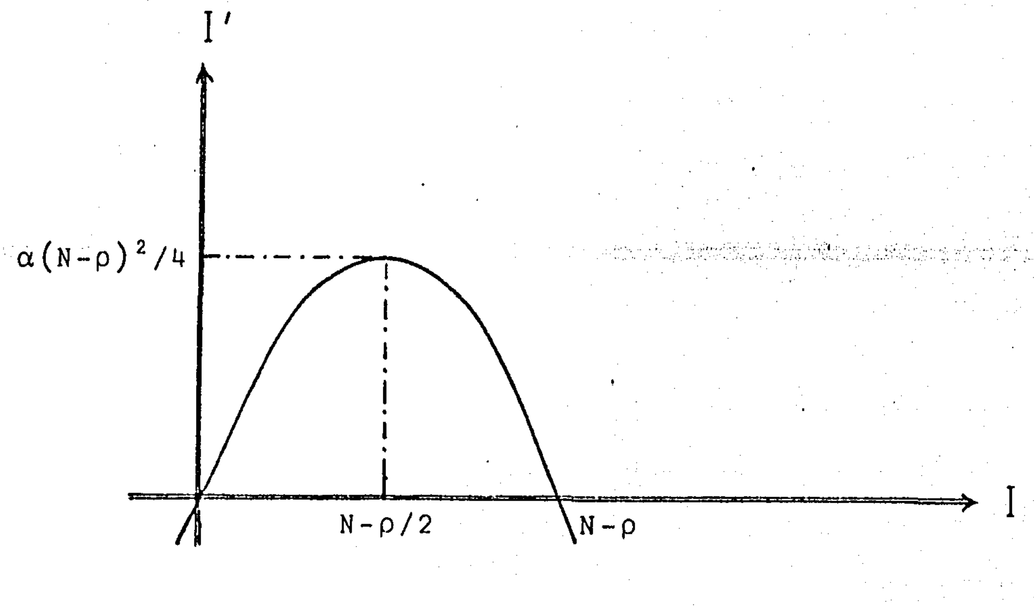
iii) SI $I = \frac{N-\rho}{2}$

$$\Rightarrow \frac{dI'}{dI} = 0$$

ESTO ES, I' ALCANZA SU VALOR MÁXIMO.

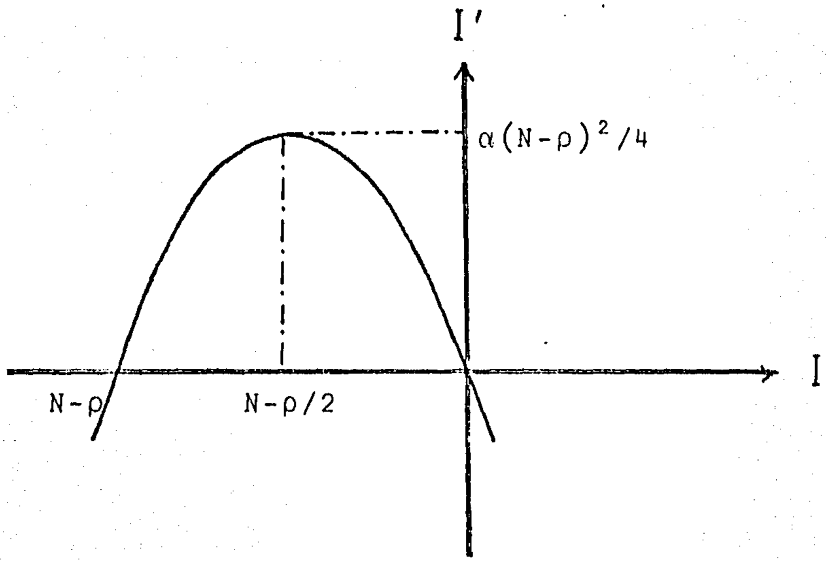
SUSTITUYENDO EL VALOR $I = \frac{N-\rho}{2}$ EN LA EC.(2.25) OBTENEMOS PRECISAMENTE EL VALOR MÁXIMO DE I', A SABER $I' = \frac{\alpha(N-\rho)^2}{4}$.

ASÍ, LA PARÁBOLA REPRESENTADA POR LA EC.(2.25) EN EL PLANO FASE I, I' ES COMO LA QUE SE ILUSTRA EN LA FIG.24 O EN LA FIG.25, SEGÚN SEA EL CASO.



CURVA DESCRITA POR LA EC.(2.25) EN EL PLANO FASE I, I' PARA EL CASO EN QUE $N-\rho > 0$.

FIGURA 24



CURVA DESCRITA POR LA EC.(2.25) EN EL PLANO FASE I, I' PARA EL CASO EN QUE $N-\rho < 0$.

FIGURA 25

EN NUESTRO PROBLEMA LOS VALORES DE LA FUNCIÓN I ESTÁN RESTRINGIDOS; POR TANTO, LA CURVA EN EL PLANO FASE QUE TIENE SENTIDO CONSIDERAR, DADA POR LA EC.(2.25), NO ES TODA LA PARÁBOLA, SINO SÓLO UN SEGMENTO DE ELLA.

COMO EN $t=0$ TENEMOS QUE $I = I_0$, Y ESTO IMPLICA, POR LA EC.(2.25) QUE $I' = \alpha\left[(N-\rho) - I_0\right] I_0$, ASEGURAMOS QUE EL PUNTO DE INICIO DEL SEGMENTO DE PARÁBOLA OBTENIDO ES $\left\{I_0, \alpha\left[(N-\rho) - I_0\right] I_0\right\}$. TAL PUNTO LO DENOTAREMOS POR (I_0, I_0').

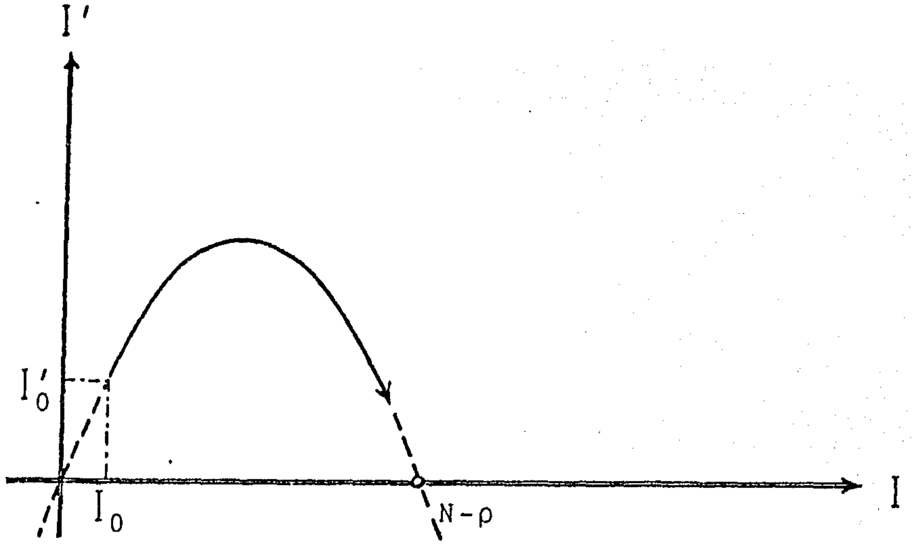
VEAMOS, AHORA, CÓMO ES RECORRIDA ESTA CURVA EN EL PLANO FASE I, I' CONFORME SE DESARROLLA EL PROCESO DE DIFUSIÓN DE LA -

ENFERMEDAD EN LA POBLACIÓN, PARA CADA UNO DE LOS CASOS EN QUE $N-\rho \neq 0$. A PARTIR DE ESTA INFORMACIÓN ESTABLECEREMOS COMO ES LA GRÁFICA DE LA FUNCIÓN I.

CASO 1

$N-\rho > 0$

SI $N-\rho > I_0$ SABEMOS QUE I ES ESTRICTAMENTE CRECIENTE; POR TANTO, LA PARÁBOLA ES RECORRIDA DE IZQUIERDA A DERECHA.
SABEMOS QUE LOS VALORES QUE PUEDE TOMAR I SATISFACEN LA CONDICIÓN $I_0 \leq I(t) < N-\rho$, $\forall\, t \in [0,\infty)$. ASÍ, AL MOMENTO $t=0$ EL PUNTO CORRESPONDIENTE EN LA PARÁBOLA ES (I_0, I_0'); CONFORME t CRECE, I TAMBIÉN CRECE; POR EL INCISO i), ASEGURAMOS QUE I' TAMBIÉN CRECE, HASTA EL MOMENTO EN QUE $I = \frac{N-\rho}{2}$. CUANDO t TOMA EL VALOR TAL QUE $I(t) = \frac{N-\rho}{2}$, ENTONCES, POR EL INCISO iii), I' TOMA SU VALOR MÁXIMO. A PARTIR DE DICHO MOMENTO, POR EL INCISO ii), I' EMPIEZA A DECRECER.
SABEMOS QUE CONFORME t TIENDE A INFINITO, I TIENDE A $N-\rho$; POR TANTO, POR LA EC.(2.25), ASEGURAMOS QUE I' TIENDE A CERO.
EN RESUMEN, EL PUNTO INICIA SU RECORRIDO EN EL PUNTO (I_0, I_0') Y CONFORME t TIENDE A INFINITO, EL PUNTO SE VA ACERCANDO AL PUNTO $(N-\rho, 0)$ A TRAVÉS DE LA PARÁBOLA.(FIG.26).
ANTES DE ESTABLECER CÓMO VARÍA LA FUNCIÓN I, OBTENDREMOS PRIMERO EL VALOR DE t PARA EL CUAL $I(t) = \frac{N-\rho}{2}$.
POR LA EC.(2.9), TENEMOS QUE DICHO MOMENTO, DENOTADO POR t^*, ESTÁ DADO POR



CURVA DESCRITA POR LA EC.(2.25) EN EL PLANO FASE I,I' PARA EL CASO EN QUE $N-\rho > 0$, TOMANDO EN CUENTA LAS CONDICIONES INICIALES.

FIGURA 26

$$t^* = \frac{1}{\alpha(N-\rho)} \ln \frac{(N-\rho) - I_0}{I_0} \tag{2.27}$$

VEAMOS, AHORA, QUÉ SUCEDE CON LA FUNCIÓN I.

DADO QUE $N-\rho > 0$, SABEMOS QUE QUE $\lim_{t\to\infty} I(t) = N-\rho$.

COMO $N-\rho > I_0$, SABEMOS QUE I ES ESTRICTAMENTE CRECIENTE.

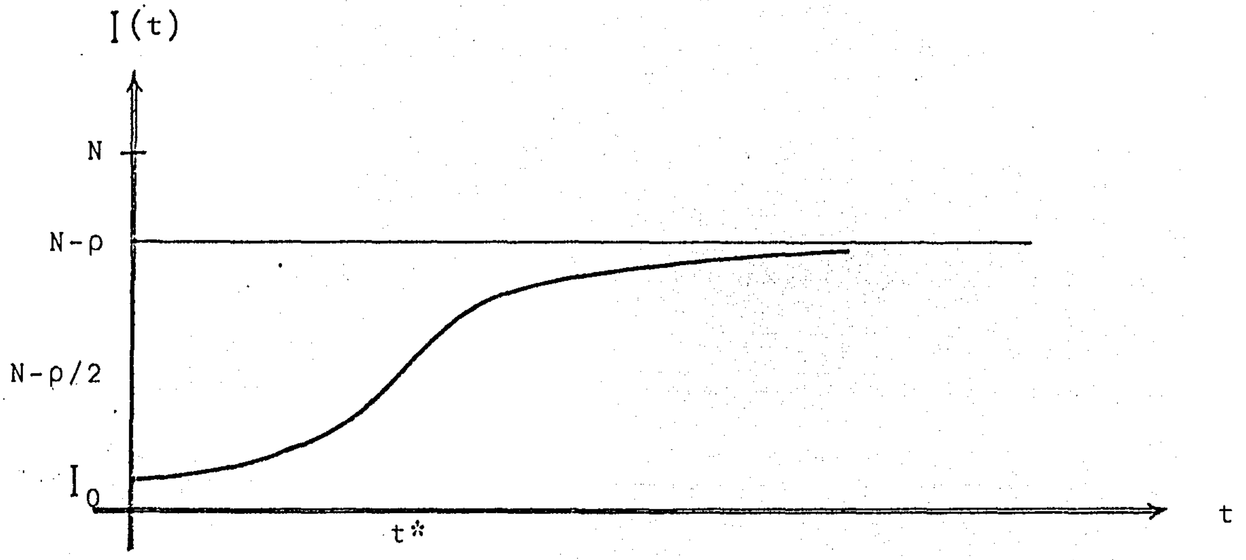
SABEMOS TAMBIÉN QUE EN $t=0$ LA FUNCIÓN I TOMA EL VALOR I_0.

ASÍ, SI t ES TAL QUE $0 \leq t \leq t^*$, ASEGURAMOS QUE I ES TAL QUE $I_0 \leq I(t) \leq \frac{N-\rho}{2}$; POR TANTO, POR EL INCISO i), TENEMOS QUE I' ES CRECIENTE RESPECTO DE t, MIENTRAS $0 \leq t \leq t^*$.

CUANDO $t=t^*$, TENEMOS QUE $I(t^*) = \frac{N-\rho}{2}$; POR TANTO, POR EL INCISO iii), I' TOMA SU VALOR MÁXIMO.

CUANDO $t \geq t^*$, ASEGURAMOS QUE I ES TAL QUE $I(t) > \frac{N-\rho}{2}$; POR TANTO,

POR EL INCISO $ii)$, TENEMOS QUE I' ES DECRECIENTE RESPECTO DE t, MIENTRAS QUE $t \geq t^*$. (FIG. 27).



GRAFICA DE LA FUNCION I PARA EL CASO EN QUE $I_0 < N-\rho$.

FIGURA 27

SI $N-\rho = I_0$, NO TENEMOS MUCHO QUE DISCUTIR; SABEMOS QUE LA FUNCIÓN I ES LA FUNCIÓN CONSTANTE $I(t) = N-\rho$.

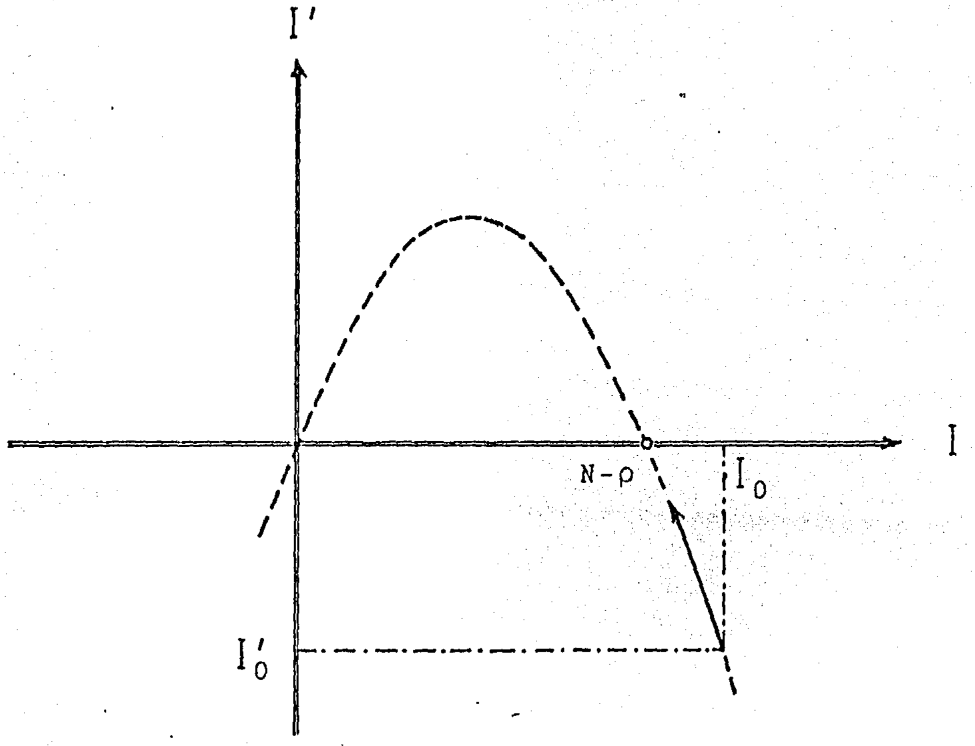
SI $N-\rho < I_0$ SABEMOS QUE I ES ESTRICTAMENTE DECRECIENTE; POR TANTO, LA PARÁBOLA ES RECORRIDA DE DERECHA A IZQUIERDA.

SABEMOS QUE LOS VALORES QUE PUEDE TOMAR I SATISFACEN LA CONDICIÓN $N-\rho < I(t) \leq I_0$, $\forall\ t \in [0,\infty)$. ASÍ, AL MOMENTO $t=0$ EL PUNTO CORRESPONDIENTE EN LA PARÁBOLA ES (I_0, I_0'); CONFORME t CRECE, I DECRECE; POR EL INCISO $ii)$, ASEGURAMOS QUE I' CRECE. NÓTESE, POR LA EC. (2.25), QUE $I' < 0$.

SABEMOS QUE CONFORME t TIENDE A INFINITO, I TIENDE A $N-\rho$; POR

TANTO, POR LA EC.(2.25), ASEGURAMOS QUE I' TIENDE A CERO.

EN RESUMEN. EL PUNTO INICIA SU RECORRIDO EN EL PUNTO (I_0, I_0') Y CONFORME t TIENDE A INFINITO, EL PUNTO SE VA ACERCANDO AL PUNTO $(N-\rho, 0)$ A TRAVÉS DE LA PARÁBOLA. (FIG.28).



CURVA DESCRITA POR LA EC.(2.25) EN EL PLANO FASE I, I' PARA EL CASO EN QUE $N-\rho > 0$, TOMANDO EN CUENTA LAS CONDICIONES INICIALES.

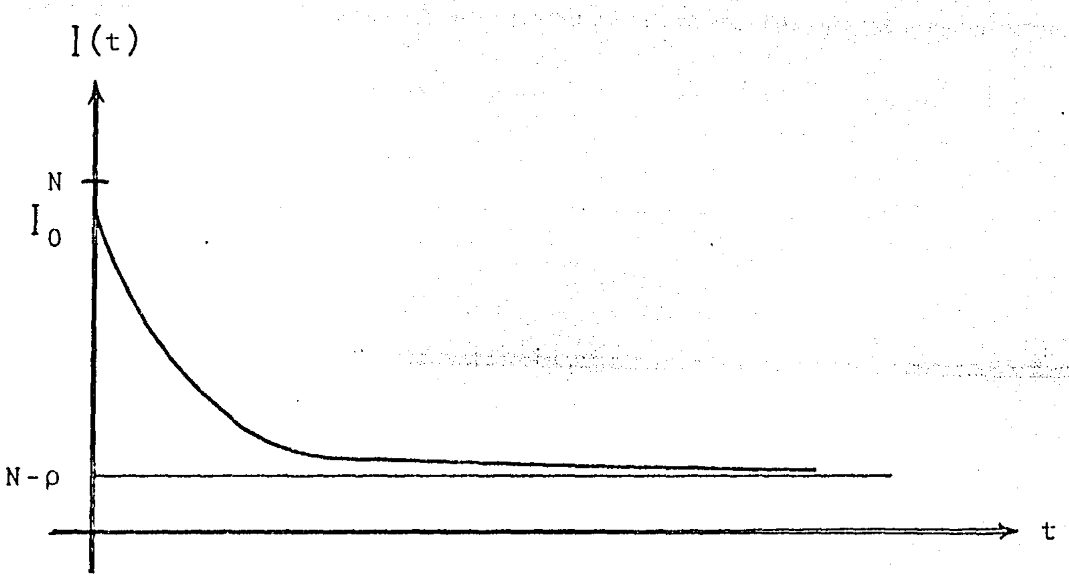
FIGURA 28

VEAMOS, AHORA, QUÉ SUCEDE CON LA FUNCIÓN I.

DADO QUE $N-\rho > 0$, SABEMOS QUE $\lim_{t\to\infty} I(t) = N-\rho$.

COMO $N-\rho < I_0$, SABEMOS QUE I ES ESTRICTAMENTE DECRECIENTE.

ASÍ, PARA TODO $t \in [0,\infty)$, ASEGURAMOS QUE I ES TAL QUE $I(t) > N-\rho$; POR TANTO, POR EL INCISO ii), TENEMOS QUE I' ES CRECIENTE RESPECTO DE t, $\forall\, t \in [0,\infty)$. (FIG.29).



GRAFICA DE LA FUNCION I PARA EL CASO EN QUE $0 < N-\rho < I_0$.

FIGURA 29

CASO 3

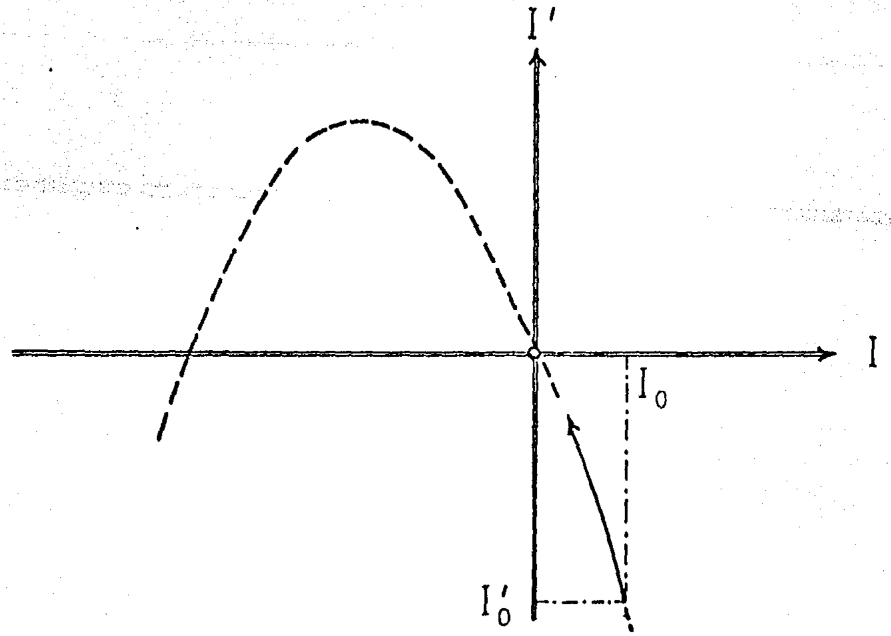
$N - \rho < 0$

SABEMOS QUE I ES ESTRICTAMENTE DECRECIENTE; POR TANTO, LA PARÁBOLA ES RECORRIDA DE DERECHA A IZQUIERDA.

SABEMOS QUE LOS VALORES QUE PUEDE TOMAR I SATISFACEN LA CONDICIÓN $0 < I(t) < I_0$, $\forall\ t \in [0,\infty)$. ASÍ, AL MOMENTO $t=0$ EL PUNTO CORRESPONDIENTE EN LA PARÁBOLA ES (I_0, I_0'); CONFORME t CRECE, I DECRECE; POR TANTO, POR EL INCISO ii), ASEGURAMOS QUE I' CRECE. NÓTESE, POR LA EC.(2.25), QUE $I' < 0$.

SABEMOS QUE CONFORME t TIENDE A INFINITO, I TIENDE A CERO; POR TANTO, POR LA EC.(2.25), ASEGURAMOS QUE I' TIENDE TAMBIÉN A CERO.

EN RESUMEN: EL PUNTO INICIA SU RECORRIDO EN EL PUNTO (I_0, I_0') Y CONFORME t TIENDE A INFINITO, EL PUNTO SE VA ACERCANDO AL PUNTO $(0,0)$ A TRAVÉS DE LA PARÁBOLA.(FIG.30).



CURVA DESCRITA POR LA EC.(2.25) EN EL PLANO FASE I, I' PARA EL CASO EN QUE $N-\rho < 0$, TOMANDO EN CUENTA LAS CONDICIONES INICIALES.

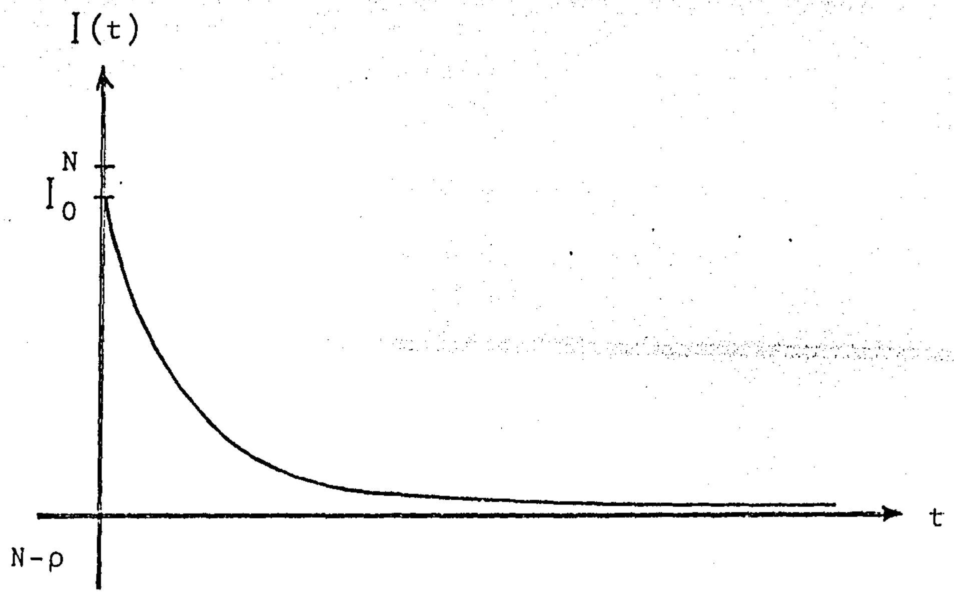
FIGURA 30

VEAMOS QUÉ SUCEDE CON LA FUNCIÓN I.

DADO QUE $N-\rho<0$, SABEMOS QUE $\lim_{t\to\infty} I(t)=0$.

COMO $N-\rho<I_0$, SABEMOS QUE I ES ESTRICTAMENTE DECRECIENTE.

ASÍ, PARA TODO $t\in[0,\infty)$, ASEGURAMOS QUE I ES TAL QUE $I(t)>N-\rho$; POR TANTO, POR EL INCISO ii), TENEMOS QUE I' ES CRECIENTE RESPECTO DE t, $\forall\ t\in[0,\infty)$. (FIG. 31).



GRAFICA DE LA FUNCION I PARA EL CASO EN QUE $N-\rho<0$.

FIGURA 31

A MANERA DE CIERRE DEL CAPÍTULO, AL IGUAL QUE EN EL ANTERIOR, ESTABLECEMOS EL SIGUIENTE TEOREMA, EL CUAL RECOGE ALGUNOS DE LOS ASPECTOS DISCUTIDOS A LARGO DE ESTE CAPÍTULO.

TEOREMA

SEA P UNA POBLACIÓN FORMADA POR INDIVIDUOS SUSCEPTIBLES E INFECCIOSOS EN LA QUE SE DESARROLLA UN PROCESO INFECCIOSO REGIDO POR EL SISTEMA DE ECUACIONES

$$S'(t) = -\alpha S(t)I(t) + \beta I(t)$$

$$I'(t) = \alpha S(t)I(t) - \beta I(t)$$

$$S(t) + I(t) = N$$

$$S(0) = S_0 > 0$$

$$I(0) = I_0 > 0$$

DONDE $S(t)$ E $I(t)$ MIDEN EL NÚMERO DE INDIVIDUOS SUSCEPTIBLES E INFECCIOSOS AL TIEMPO t, RESPECTIVAMENTE; α ES LA TASA DE INFECCIÓN (CONSTANTE); β ES LA TASA DE RECUPERACIÓN (CONSTANTE); N EL TAMAÑO DE LA POBLACIÓN, EL CUAL ES EL MISMO EN TODO MOMENTO t; Y S_0 E I_0 VALORES CONOCIDOS; ENTONCES, SE PUEDE ASEGURAR QUE EN TAL POBLACIÓN SE PRESENTARÁ UN PROCESO EPIDÉMICO SÓLO CUANDO $N - \rho > I_0$, DONDE $\rho = \frac{\beta}{\alpha}$ ES LA TASA DE RECUPERACIÓN RELATIVA. EN TAL SITUACIÓN, EL NÚMERO DE INDIVIDUOS INFECCIOSOS QUE TENDERÁN A QUEDAR EN LA POBLACIÓN SERÁ $N - \rho$. EN CASO DE QUE $N - \rho \leq I_0$, NO HABRÁ ESTALLAMIENTO EPIDÉ-

MICO Y EL NÚMERO DE INDIVIDUOS INFECCIOSOS TENDERÁ A -- CAER A

a) $N-\rho$ SI $0 < N-\rho \leqslant I_0$

b) 0 SI $N-\rho \leqslant 0$

ES IMPORTANTE HACER NOTAR QUE LAS CONDICIONES PARA QUE EL ESTALLAMIENTO EPIDÉMICO SE PRESENTE TAMBIÉN PUEDEN ESTABLE - CERSE SOBRE S_0.

VEAMOS. SABEMOS QUE $S_0 = N - I_0$. COMO EL ESTALLAMIENTO EPI DÉMICO SE PRESENTA SÓLO CUANDO $N-\rho > I_0$; PODEMOS ASEGURAR QUE - ENTONCES SE PRESENTARÁ SÓLO CUANDO $S_0 > \rho$; ESTO ES, CUANDO EL NÚ MERO DE SUSCEPTIBLES INICIAL EXCEDA A LA TASA DE RECUPERACIÓN - RELATIVA ρ.

CAPITULO III

MODELO SIR

En los dos modelos anteriores desarrollados, hemos considerado que la población está constituida por sólo dos clases de individuos, la clase S de los individuos susceptibles y la clase I de los individuos infecciosos. En el modelo SI no existe posibilidad de superar la enfermedad una vez que ésta ha sido adquirida. En el modelo SI con recuperación esta posibilidad está permitida, aunque existe la restricción de que los individuos que superan la infección pasan directamente a formar parte de los individuos susceptibles; esto es, el padecimiento de la enfermedad no confiere ningún efecto de inmunidad.

En este tercer modelo consideramos de nuevo una población homogéneamente mezclada de tamaño constante N; sólo que ahora introducimos un nuevo tipo de individuos, la clase de los

INDIVIDUOS RECUPERADOS; ASÍ, LA POBLACIÓN QUEDA AHORA CONSTITUIDA POR TRES CLASES DE INDIVIDUOS: LA CLASE DE LOS INDIVIDUOS -- SUSCEPTIBLES, LA DE LOS INFECCIOSOS Y LA DE LOS RECUPERADOS, DENOTADAS POR S, I Y R, RESPECTIVAMENTE.

LAS CLASES S E I YA LAS CONOCEMOS. LA CLASE R ESTARÁ -- CONSTITUIDA POR AQUELLOS INDIVIDUOS QUE HAN PADECIDO LA ENFERMEDAD Y LA HAN LOGRADO SUPERAR. ADEMÁS, POR EFECTO DEL MISMO PADECIMIENTO, SE HAN CONVERTIDO EN INDIVIDUOS INMUNES A DICHA ENFERMEDAD; ESTO ES, LA ENFERMEDAD CONFIERE INMUNIDAD PERMANENTE A - LOS INDIVIDUOS QUE LOGRAN SUPERARLA. ASÍ, LA ESTANCIA DE LOS INDIVIDUOS EN LA CLASE DE LOS RECUPERADOS SE VUELVE PERMANENTE; - UN INDIVIDUO RECUPERADO JAMÁS VUELVE A SER SUSCEPTIBLE Y, POR - TANTO, JAMÁS VUELVE A SER INFECCIOSO.

EL PROCESO DE DIFUSIÓN DE LA ENFERMEDAD EN LA POBLACIÓN ESTÁ REGIDO POR LAS SIGUIENTES CONDICIONES. AL IGUAL QUE EN LOS MODELOS ANTERIORES, EL NÚMERO DE NUEVOS INDIVIDUOS INFECCIOSOS AL TIEMPO t ES PROPORCIONAL AL PRODUCTO DEL NÚMERO DE SUSCEPTIBLES POR EL NÚMERO DE INDIVIDUOS INFECCIOSOS EXISTENTES AL TIEMPO t. AL IGUAL QUE EN EL MODELO SI CON RECUPERACIÓN, EL NÚMERO DE INDIVIDUOS RECUPERADOS AL TIEMPO t, ES PROPORCIONAL AL NÚMERO DE INDIVIDUOS INFECCIOSOS EXISTENTES AL TIEMPO t; SÓLO QUE AHORA HAY QUE TOMAR EN CUENTA QUE ÉSTOS QUEDAN INMUNES A LA ENFERMEDAD.

SEAN S, I Y $R:[0,\infty)\to[0,\infty)$ LAS FUNCIONES TALES QUE $S(t)$, $I(t)$ Y $R(t)$ DENOTAN EL NÚMERO DE INDIVIDUOS EXISTENTES AL TIEMPO t EN LAS CLASES S, I Y R, RESPECTIVAMENTE.

POR LAS CONDICIONES IMPUESTAS, TENEMOS QUE EL CAMBIO EN EL NÚMERO DE INDIVIDUOS SUSCEPTIBLES SE DEBE ÚNICAMENTE A AQUELLOS INDIVIDUOS QUE ABANDONAN LA CLASE S Y PASAN A FORMAR PARTE DE LA CLASE I; ESTO ES, LOS INDIVIDUOS QUE VAN SIENDO INFECTADOS. RECUÉRDESE QUE LOS INDIVIDUOS QUE SUPERAN LA ENFERMEDAD QUEDAN INMUNIZADOS PERMANENTEMENTE, ESTO HACE QUE NO HAYA PROCESO DE RETROALIMENTACIÓN EN LA CLASE S, NADIE ABANDONA OTRA CLASE PARA PASAR A LA CLASE S. ASÍ, PODEMOS ESTABLECER QUE

$$S'(t) = -\alpha S(t)I(t) \qquad \text{CON } \alpha > 0 \tag{3.1}$$

EL CAMBIO EN EL NÚMERO DE INDIVIDUOS DE LA CLASE I SE DEBE A DOS RAZONES. POR UN LADO, AL INGRESO DE LOS INDIVIDUOS QUE HAN DEJADO LA CLASE S PARA PASAR A FORMAR PARTE DE LA CLASE I; ESTO ES, CONVERTIRSE DE SUSCEPTIBLES A INFECCIOSOS. POR OTRO, AL ABANDONO DE LOS INDIVIDUOS DE LA CLASE I QUE PASAN A FORMAR PARTE DE LA CLASE R; ESTO ES, LOS QUE ABANDONAN LA CLASE I PORQUE LOGRAN SUPERAR LA ENFERMEDAD. PODEMOS, ENTONCES, ESTABLECER QUE

$$I'(t) = \alpha S(t)I(t) - \beta I(t) \qquad \text{CON } \beta \geq 0 \tag{3.2}$$

El cambio en el número de individuos de la clase R se debe únicamente a los individuos que han dejado la clase I para ingresar en la clase R; esto es, los que se han recuperado de la enfermedad. Recuérdese que todo individuo que ingresa a la clase R, permanece ahí indefinidamente; nadie abandona la clase R. Podemos establecer que

$$R'(t) = \beta I(t) \qquad (3.3)$$

Resumiendo, el proceso de difusión de la enfermedad en la población queda regido por el siguiente sistema de ecuaciones, con las condiciones iniciales que se anotan.

$$S'(t) = -\alpha S(t) I(t) \qquad \text{con } \alpha > 0 \qquad (3.1)$$

$$I'(t) = \alpha S(t) I(t) - \beta I(t) \qquad \text{con } \beta > 0 \qquad (3.2)$$

$$R'(t) = \beta I(t) \qquad (3.3)$$

$$S(t) + I(t) + R(t) = N \qquad \forall\ t \in [0,\infty) \qquad (3.4)$$

y además

$$S(t) = S_0 > 0 \qquad (3.5)$$

$$I(t) = I_0 > 0 \qquad (3.6)$$

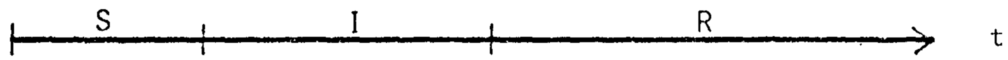
$$R(t) = R_0 = 0 \qquad (3.7)$$

Hemos establecido la condición de que $\beta>0$, puesto que en caso de que $\beta=0$, se llega a una situación equivalente a la discutida en el capítulo I.

Al haber impuesto la condición $R_0 = 0$, estamos considerando que al inicio del proceso de difusión de la enfermedad, la población sólo está constituida por individuos susceptibles e infecciosos. Esto es, la población es virgen a la enfermedad, nadie la ha padecido y, por tanto, nadie la ha superado. Así, podemos asegurar que

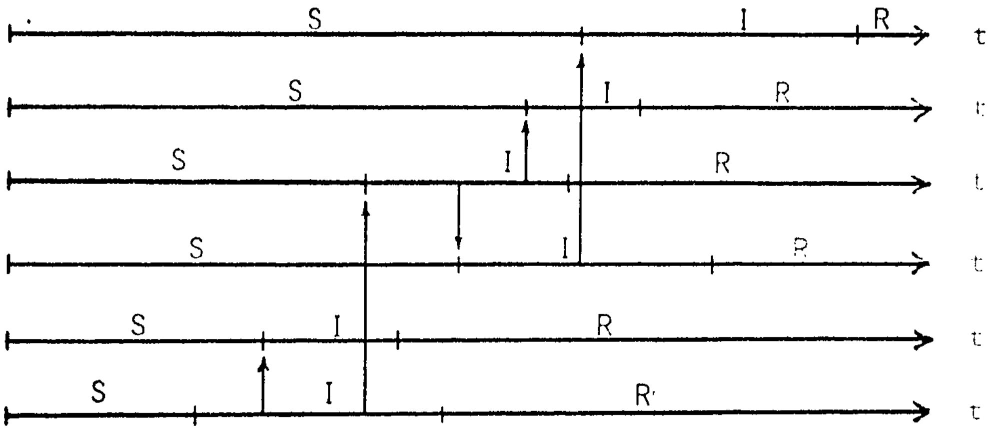
$$S_0 + I_0 = N \tag{3.8}$$

El proceso que podrá seguir un individuo de la población y el proceso de transmisión de la enfermedad quedan descritos, esquemáticamente, en los diagramas presentados en la Fig. 32 y Fig. 33.



PROCESO QUE EN EL TIEMPO SIGUE UN INDIVIDUO DE LA POBLACION QUE HA SIDO INFECTADO, PARA EL CASO EN QUE NO EXISTE PERIODO DE LATENCIA Y LA INMUNIZACION ADQUIRIDA ES PERMANENTE.

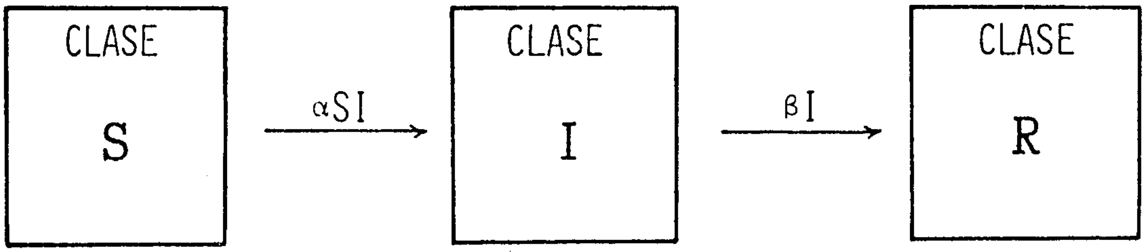
Figura 32



MECANISMO MEDIANTE EL CUAL SE DESARROLLA EL PROCESO EN QUE UNOS INDIVIDUOS INFECCIOSOS CONTAGIAN A OTROS INDIVIDUOS SUSCEPTIBLES, PARA EL CASO EN QUE NO HAY PERIODO DE LATENCIA Y LA INMUNIZACION ADQUIRIDA ES PERMANENTE.

FIGURA 33

EL ESQUEMA DE LA FIG.34 ILUSTRA EL PROCESO DE FLUJO QUE SE ESTABLECE EN LA POBLACIÓN.



PROCESO DE FLUJO DE INDIVIDUOS DE LA CLASE S A LA CLASE I, Y DE LA CLASE I A LA CLASE R.

FIGURA 34

PASEMOS A ESTUDIAR EL SISTEMA DE ECUACIONES OBTENIDO.

DE LAS ECS.(3.1) Y (3.3), TENEMOS

$$\frac{dS}{dR} = -\frac{1}{\frac{\beta}{\alpha}} S = \frac{-1}{\rho} S \tag{3.9}$$

DONDE ρ TIENE EL MISMO SIGNIFICADO QUE EN EL CAPÍTULO ANTERIOR, ES LA TASA DE RECUPERACIÓN RELATIVA.

RESOLVIENDO ESTA ECUACIÓN POR EL MÉTODO DE SEPARACIÓN - DE VARIABLES, TENEMOS QUE

$$\int_{S_0}^{S} \frac{dr}{r} = \frac{-1}{\rho} \int_{0}^{R} du \tag{3.10}$$

REALIZANDO LA INTEGRACIÓN, OBTENEMOS

$$\ell n \frac{S}{S_0} = \frac{-1}{\rho} R \tag{3.11}$$

DESPEJANDO A LA FUNCIÓN S EN ESTA ECUACIÓN, SE LLEGA A

$$S(t) = S_0 \exp\left[\frac{-1}{\rho} R(t)\right] \tag{3.12}$$

SUSTITUYENDO EN LA EC.(3.3) LOS VALORES DE $I(t)$ Y $S(t)$ -- OBTENIDOS DE LAS ECS.(3.4) Y (3.12), RESPECTIVAMENTE, SE TIENE

$$R'(t) = \beta \left[N - R(t) - S_0 \exp\left[\frac{-1}{\rho} R(t) \right] \right] \qquad (3.13)$$

NO ES POSIBLE ENCONTRAR UNA SOLUCIÓN EXPLÍCITA R COMO - FUNCIÓN DE t, PARA ESTA ECUACIÓN(8). ENCONTRAREMOS UNA "SOLUCIÓN APROXIMADA" DE ESTA ECUACIÓN.

SABEMOS QUE

$$\exp\left[\frac{-1}{\rho} R(t) \right] = 1 - \frac{R(t)}{\rho} + \frac{R^2(t)}{2\rho^2} - \frac{R^3(t)}{6\rho^3} + \ldots \qquad (3.14)$$

SUSTITUYENDO ESTA EXPRESIÓN EN LA EC.(3.13), TENEMOS

$$R'(t) = \beta \left[I_0 + \left[\frac{S}{\rho} - 1 \right] R(t) - \frac{S_0 R^2(t)}{2\rho^2} + \frac{S_0 R^3(t)}{6\rho^3} - \ldots \right] \qquad (3.15)$$

---

(8) D.G. Kendall en 1956 encontró una solución exacta en forma paramétrica a esta ecuación. Si se desea obtener mayor información sobre esta cuestión recomendamos consultar el artículo de Kendall titulado "Deterministic and Stochastic Epidemics in Closed Populations", así como los libros "The Mathematical Theory of Infectious Diseases and its Applications" de Norman T.J. Bailey, y -- "Stochastic Population Models in Ecology and Epidemiology" de M. S. Bartlett.(ver bibliografía).

CORTAREMOS LA SERIE HASTA EL TÉRMINO CUADRADO, CONSIDERANDO QUE, POR EL MOMENTO, PUEDE SER BUENA APROXIMACIÓN A $R'(t)$. ASÍ, TOMAREMOS

$$R'(t) \doteq \beta \left[I_0 + \left[\frac{S_0}{\rho} - 1\right] R(t) - \frac{S_0 R^2(t)}{2\rho^2} \right] \tag{3.16}$$

PASAREMOS A RESOLVER LA ECUACIÓN SIGUIENTE

$$R'(t) = \beta \left[I_0 + \left[\frac{S_0}{\rho} - 1\right] R(t) - \frac{S_0 R^2(t)}{2\rho^2} \right] \tag{3.17}$$

CON ELLO, ENCONTRAREMOS UNA "SOLUCIÓN APROXIMADA".

UTILIZANDO, DE NUEVO, EL MÉTODO DE SEPARACIÓN DE VARIABLES PARA RESOLVER LA EC.(3.17), TENEMOS

$$\int_0^R \frac{1}{\beta} \left[I_0 + \left[\frac{S_0}{\rho} - 1\right] r - \frac{S_0}{2\rho^2} r^2 \right]^{-1} dr = \int_0^t du \tag{3.18}$$

PARA REALIZAR LA INTEGRAL DEL LADO IZQUIERDO DE ESTA ECUACIÓN, PRIMERO COMPLETAMOS CUADRADOS EN EL INTEGRANDO. LUEGO, TOMAMOS

$$\omega^2 = \left[\frac{S_0}{\rho} - 1\right]^2 - \frac{2 S_0 I_0}{\rho^2} \tag{3.19}$$

Y REALIZANDO ALGUNAS OPERACIONES ALGEBRAICAS, OBTENEMOS

$$\frac{2S_0}{\beta\rho^2\omega^2}\int_0^R\left[1-\frac{S_0}{\rho^2\omega}r-\frac{1}{\omega}\left[\frac{S_0}{\rho}-1\right]\right]^{-2}=\int_0^t du$$

(3.20)

LA INTEGRAL DEL LADO DERECHO ES INMEDIATA. LA DEL LADO IZQUIERDO SE RESUELVE POR EL MÉTODO DE SUSTITUCIÓN, TOMANDO $v=\frac{S_0}{\rho^2\omega}r-\frac{1}{\omega}\left[\frac{S_0}{\rho}-1\right]$. ASÍ, LLEGAMOS A

$$\frac{2}{\beta\omega}\left[\text{arc.tan.h}\left[\frac{S_0}{\rho^2\omega}R-\frac{1}{\omega}\left[\frac{S_0}{\rho}-1\right]\right]-\text{arc.tan.h}\left[\frac{-1}{\omega}\left[\frac{S_0}{\rho}-1\right]\right]\right]=t \qquad (3.21)$$

DESPEJANDO A LA FUNCIÓN R EN ESTA ECUACIÓN Y TOMANDO

$$\xi=\text{arc.tan.h}\left[\frac{1}{\omega}\left[\frac{S_0}{\rho}-1\right]\right] \qquad (3.22)$$

TENEMOS

$$R(t)=\frac{\rho^2}{S_0}\left[\left[\frac{S_0}{\rho}-1\right]+\omega\ \text{tan.h}\left(\tfrac{1}{2}\beta\omega t-\xi\right)\right]$$

(3.23)

CONOCIDA LA FUNCIÓN R, PODEMOS DERIVAR RESPECTO A t; ASÍ

$$R'(t) = \frac{\beta\rho^2\omega}{2S_0}\,\mathrm{sec.h}^2\left(\tfrac{1}{2}\beta\omega t - \xi\right) \tag{3.24}$$

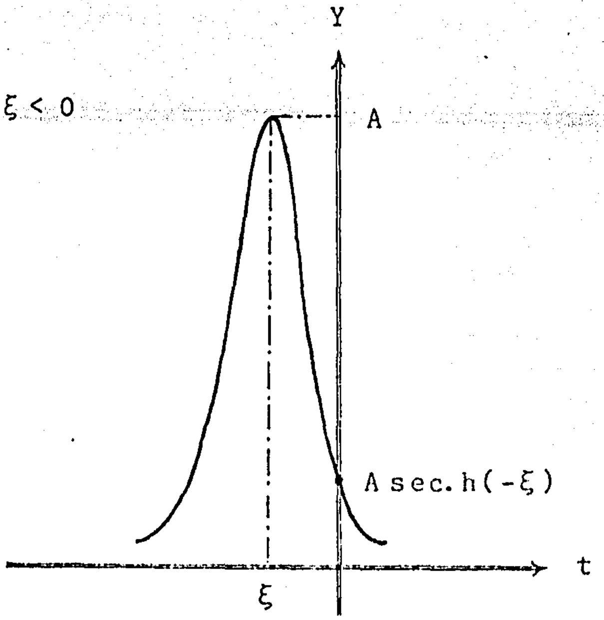
UTILIZANDO LA EC. (3.3), LLEGAMOS A QUE

$$I(t) = \frac{\rho^2\omega}{2S_0}\,\mathrm{sec.h}^2\left(\tfrac{1}{2}\beta\omega t - \xi\right) \tag{3.25}$$

HABIENDO OBTENIDO LA FUNCIÓN I, PODEMOS PASAR A ANALIZARLA, PARA ASÍ HACERNOS UNA IDEA DEL PROCESO DE DIFUSIÓN DE LA ENFERMEDAD EN LA POBLACIÓN.

SABEMOS QUE LA GRÁFICA DE LA FUNCIÓN $y(t)=A\,\mathrm{sec.h}^2(t-\xi)$ ES COMO LA QUE SE ILUSTRA EN LAS FIGS. 35, 36 Y 37, SEGÚN SEA EL VALOR QUE TOME ξ.

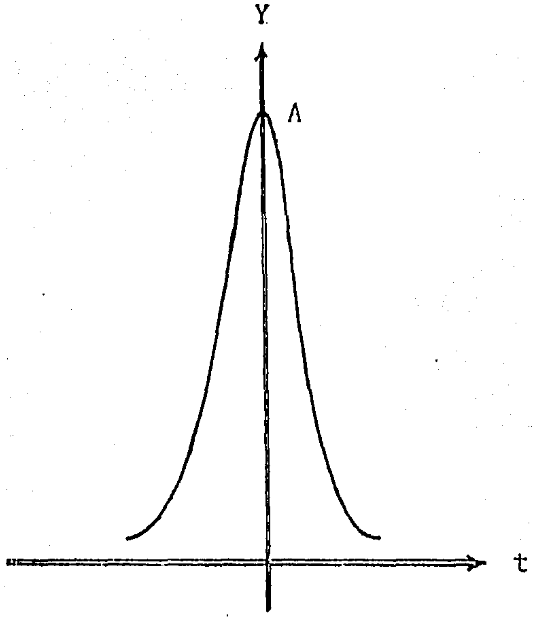
1) SI $\xi < 0$



GRAFICA DE LA FUNCION $y(t)=A\,\mathrm{sec.h}^2(t-\xi)$.

FIGURA 35

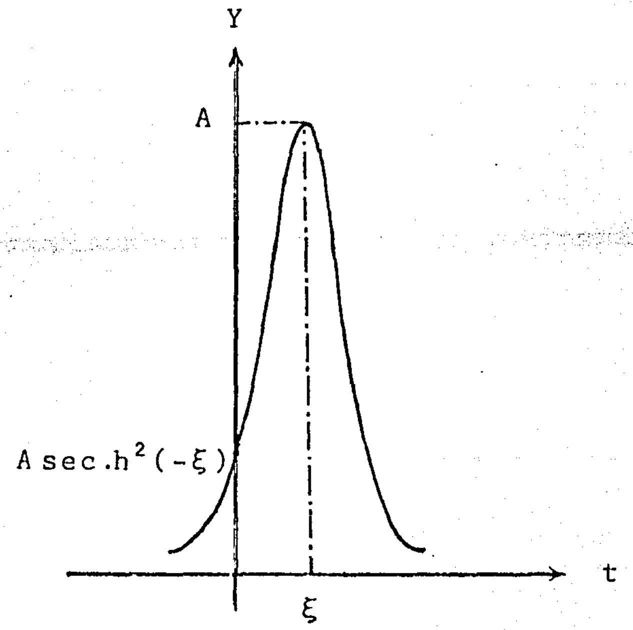
2) Si $\xi = 0$



GRAFICA DE LA FUNCION $y(t)=A\,\mathrm{sec.h}^2(t)$.

FIGURA 36

3) Si $\xi > 0$

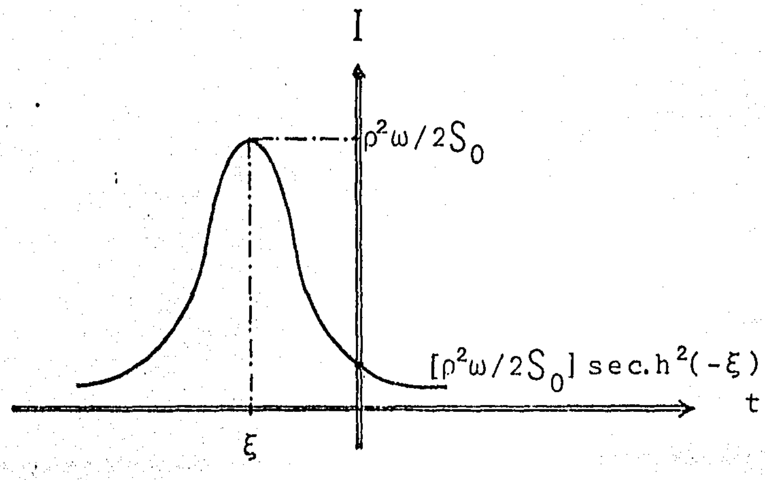


GRAFICA DE LA FUNCION $y(t)=A\,\mathrm{sec.h}^2(t-\xi)$.

FIGURA 37

POR LO ANTERIOR, GRAFICANDO LA EC.(3.25), SE OBTIENE LO QUE ILUSTRAMOS EN LAS FIG. 38, 39 Y 40, PARA CADA CASO, DEPENDIENDO DEL VALOR DE ξ.

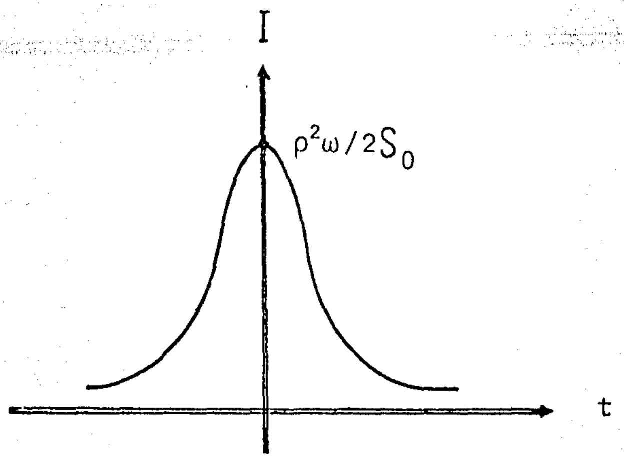
1) SI $\xi < 0$



GRAFICA DE LA FUNCION I, PARA EL CASO EN QUE $\xi<0$.

FIGURA 38

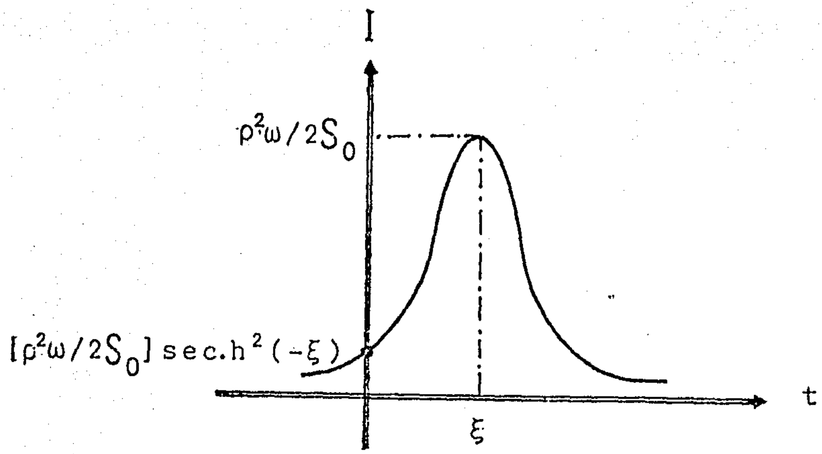
2) SI $\xi = 0$



GRAFICA DE LA FUNCION I, PARA EL CASO EN QUE $\xi=0$.

FIGURA 39

3) Si $\xi > 0$

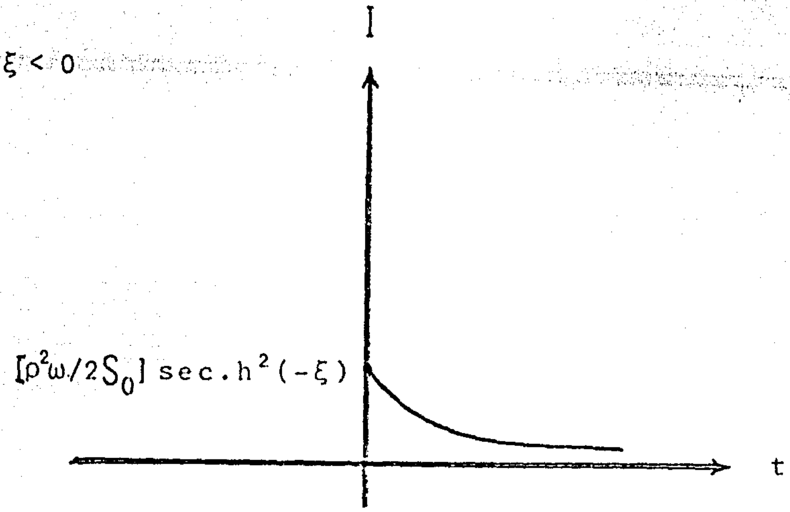


GRAFICA DE LA FUNCION I, PARA EL CASO EN QUE $\xi>0$.

FIGURA 40

Dado que el proceso infeccioso está restringido para los valores de $t \in [0,\infty)$, la gráfica de la función I está, por tanto, en el primer cuadrante, y su forma depende del valor de ξ. (Figs.41, 42 y 43).

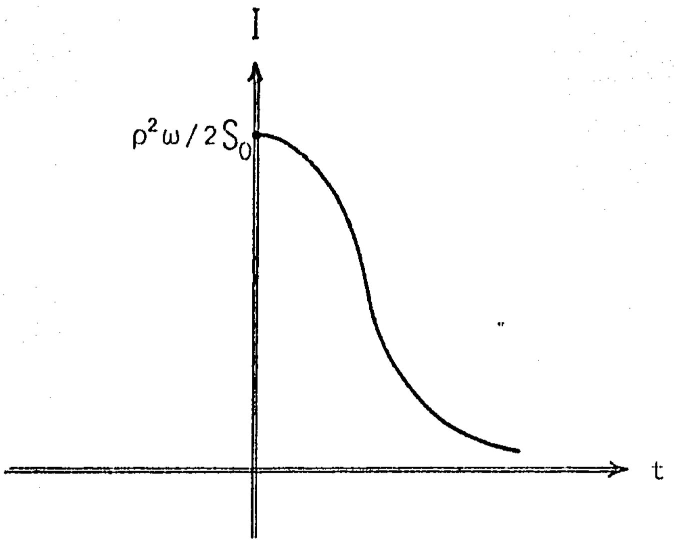
1) Si $\xi < 0$



GRAFICA DE LA FUNCION I, PARA EL CASO EN QUE $\xi<0$ TOMANDO EN CUENTA LAS CONDICIONES INICIALES DEL PROBLEMA.

FIGURA 41

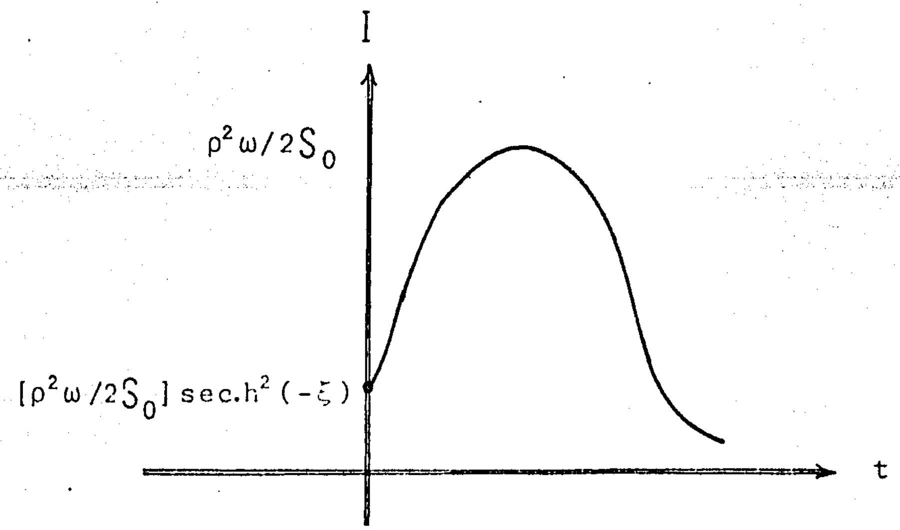
2) SI $\xi = 0$



GRAFICA DE LA FUNCION I, PARA EL CASO EN QUE $\xi=0$ TOMANDO EN CUENTA LAS CONDICIONES INICIALES DEL PROBLEMA.

FIGURA 42

3) SI $\xi > 0$



GRAFICA DE LA FUNCION I, PARA EL CASO EN QUE $\xi>0$ TOMANDO EN CUENTA LAS CONDICIONES INICIALES DEL PROBLEMA.

FIGURA 43

Hemos considerado que

$$\lim_{t\to\infty} I(t) = 0 \tag{3.26}$$

lo cual es evidente a partir de la Ec.(3.25).

A partir de esta información, podemos establecer lo siguiente.

1) Si $\xi < 0$

Aseguramos que no se presenta estallamiento epidémico y que el número inicial de individuos infecciosos cae a cero conforme t tiende a infinito.

2) Si $\xi = 0$

Aseguramos que no se presenta estallamiento epidémico y que el número inicial de individuos infecciosos cae a cero conforme t tiende a infinito.

3) Si $\xi > 0$

Aseguramos que se presenta estallamiento epidémico, y una vez que el número de infecciosos ha crecido hasta el valor $\dfrac{\rho^2\omega^2}{2S_0}$, la epidemia empieza a disminuir, tendiendo a cero el número de individuos infecciosos conforme t tiende a infinito.

En resumen, la epidemia ocurre sólo cuando $\xi > 0$; así, -

EL VALOR $\xi = 0$ ESTABLECE UN VALOR UMBRAL QUE DEBE SER REBASADO - PARA QUE EL ESTALLAMIENTO EPIDÉMICO SE PRESENTE.

DADO EL PAPEL TAN IMPORTANTE QUE JUEGA LA VARIABLE ξ, - CONVIENE ESTUDIAR MÁS EN DETALLE SU COMPORTAMIENTO. SABEMOS QUE LA FUNCIÓN $y(x)=\text{arc.tan.h}(x)$ ES UNA FUNCIÓN IMPAR CUYA GRÁFICA ES COMO LA QUE SE ILUSTRA EN LA FIG.44.

UTILIZANDO LA EC.(3.22), PODEMOS ASEGURAR, ENTONCES, QUE

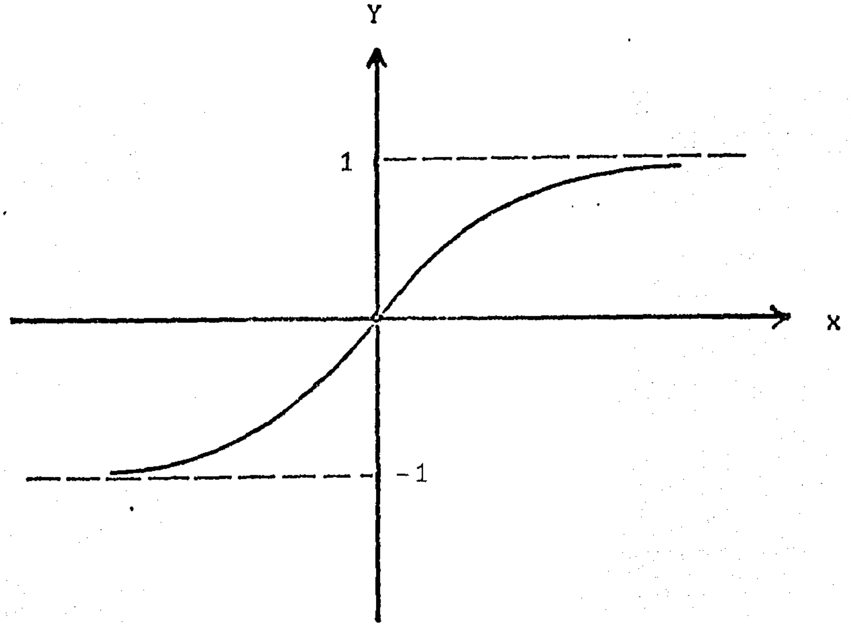
1) $\xi < 0 \Leftrightarrow S_0 < \rho$

2) $\xi = 0 \Leftrightarrow S_0 = \rho$

3) $\xi > 0 \quad S_0 = \rho$

DE LO ANTERIOR, PODEMOS CONCLUIR QUE LA TASA DE RECUPERACIÓN RELATIVA ρ ESTABLECE UN VALOR UMBRAL QUE DEBE SER REBASADO, POR EL NÚMERO INICIAL DE INDIVIDUOS SUSCEPTIBLES, PARA -- QUE OCURRA EL ESTALLAMIENTO EPIDÉMICO. EN CASO CONTRARIO, NO SE PRESENTARÁ EL ESTALLAMIENTO.

ESTE ES UN RESULTADO ANÁLOGO AL OBTENIDO EN EL CAPÍTULO ANTERIOR; POR SU IMPORTANCIA, VALE LA PENA DETENERNOS UN POCO - EN LA DISCUSIÓN DE SU SIGNIFICADO.



GRAFICA DE LA FUNCION y(x)=arc.tan.h(x).

FIGURA 44

LA CONDICIÓN PARA QUE SE PRESENTE EL ESTALLAMIENTO EPIDÉMICO, $S_0 > 0$, NOS MUESTRA QUE LO IMPORTANTE EN EL PROCESO DE DIFUSIÓN DE LA ENFERMEDAD NO SON TANTO LOS VALORES QUE TOMEN LOS PARÁMETROS α, β, NI LOS VALORES INICIALES S_0, I_0 Y R_0, EN SÍ MISMOS SINO LA RELACIÓN QUE ENTRE SÍ MANTENGAN; MUY PARTICULARMENTE LA RELACIÓN ENTRE S_0 Y ρ.

TOMEMOS UNA POBLACIÓN. PUEDE SUCEDER QUE AL INTRODUCIR EN DICHA POBLACIÓN UN CIERTO NÚMERO INICIAL DE INDIVIDUOS INFECCIOSOS, NO OCURRA NINGÚN ESTALLAMIENTO EPIDÉMICO. PERO BASTA CON QUE SE PRESENTE UN PEQUEÑO INCREMENTO EN EL TAMAÑO DE LA POBLACIÓN SUSCEPTIBLE O UNA PEQUEÑA DISMINUCIÓN EN EL VALOR DE LA TASA DE RECUPERACIÓN RELATIVA PARA QUE OCURRA EL ESTALLAMIEN-

TO EPIDÉMICO. ESTO ES, CAMBIOS CUANTITATIVOS PEQUEÑOS EN S_0 O - EN ρ PUEDEN TRANSFORMARSE EN CAMBIOS CUALITATIVOS EN EL PROCESO DE DIFUSIÓN DE LA ENFERMEDAD.

TANTO LAS IDEAS INTUITIVAS COMO EL CONOCIMIENTO EMPÍRICO QUE TENEMOS SOBRE LAS EPIDEMIAS, NOS HACEN VER QUE LAS CONDICIONES DE HACINAMIENTO FAVORECEN EL ESTALLAMIENTO DE ENFERMEDADES, POR CUANTO AUMENTA LA POSIBILIDAD DEL CONTAGIO, ESTO SE REFLEJA EN EL VALOR DE S_0. TAMBIÉN SABEMOS QUE LA ÚNICA MANERA DE EVITAR SE PRESENTEN ESTALLAMIENTOS EPIDÉMICOS ES TOMANDO LAS MEDIDAS NECESARIAS DE PREVENCIÓN, ESTO SE REFLEJA EN EL VALOR DE ρ.

ENTRE MEJOR SEA EN UNA POBLACIÓN LA ALIMENTACIÓN, SALUD Y MECANISMOS DE DEFENSA CONTRA LAS ENFERMEDADES, ES DE ESPERAR QUE EL VALOR QUE TOME α SEA PEQUEÑO; ASIMISMO, ENTRE MAYOR SEA LA ATENCIÓN MÉDICA Y MAYORES SEAN LAS POSIBILIDADES DE LOS INDIVIDUOS DE UNA POBLACIÓN PARA RECIBIR CUIDADO MÉDICO UNA VEZ QUE HAN CONTRAIDO LA ENFERMEDAD, ES DE ESPERAR QUE EL VALOR QUE TOTOME β SEA GRANDE. ESTAS DOS CUESTIONES HACEN QUE EL VALOR QUE TOME ρ SEA GRANDE. ASÍ, SE LOGRAN ESTABLECER LAS CONDICIONES -- QUE HACEN SEA MÁS DIFICIL EL ESTALLAMIENTO DE UNA EPIDEMIA EN - UNA POBLACIÓN DETERMINADA.

POR LO ANTERIOR, PODEMOS CONCLUIR QUE NUESTRO CONOCIMIENTO EMPÍRICO SOBRE LAS EPIDEMIAS QUEDA DE ALGUNA MANERA RE -

FLEJADO EN EL RESULTADO MATEMÁTICO QUE ESTABLECE QUE LA EPIDE - MIA ESTALLARÁ SÓLO CUANDO $S_0 > 0$.

OTRO RESULTADO QUE HEMOS OBTENIDO ES QUE AL FINAL DE LA EPIDEMIA, POR LA EC(3.26) NO QUEDARÁN INDIVIDUOS INFECCIOSOS EN LA POBLACIÓN.

LA INFORMACIÓN QUE HEMOS OBTENIDO A PARTIR DEL ANÁLISIS DE LA FUNCIÓN I ES MUY VALIOSA; NOS DA BASTANTE IDEA SOBRE EL - PROCESO DE DIFUSIÓN DE LA ENFERMEDAD EN LA POBLACIÓN Y REFLEJA DE MANERA MUY COMPLETA EL FENÓMENO DE ESTALLAMIENTO EPIDÉMICO. SIN EMBARGO, NO PODEMOS ESTAR CONFIADOS EN LO QUE HEMOS OBTENIDO. RECORDEMOS QUE LA FUNCIÓN I LA OBTUVIMOS A PARTIR DE CONOCER R' MEDIANTE LA EC.(3.3). Y LA FUNCIÓN R' LA CONOCIMOS DERIVANDO A LA FUNCIÓN R RESPECTO AL TIEMPO, A PARTIR DE LA EC.(3.23). SABEMOS QUE ESTA FUNCIÓN NO ES LA SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN DIFERENCIAL (3.15) SINO DE LA ECUACIÓN DIFERENCIAL (3.17). EN TANTO ESTO, ES QUE DIJIMOS SE TRATABA DE UNA "SOLUCIÓN APROXIMADA", PERO NO DE LA SOLUCIÓN A LA EC.(3.15). NO TENEMOS, POR EL MOMENTO, NINGUNA GARANTÍA DE QUE EL COMPORTAMIENTO DE LA "SOLUCIÓN APROXIMADA" SEA EQUIVALENTE, AL MENOS EN CUANTO A LAS DOS CONCLUSIONES FUERTES QUE ESTABLECIMOS, AL DE LA SOLUCIÓN A LA EC.(3.15); ESTO ES, RESPECTO AL PAPEL DE VALOR UMBRAL QUE JUEGA LA TASA DE RECUPERACIÓN RELATIVA ρ EN RELACIÓN AL NÚMERO INICIAL DE INDIVIDUOS SUSCEPTIBLES PARA QUE ESTALLE LA EPIDEMIA, Y RESPECTO AL NÚMERO DE INDIVIDUOS INFECCIOSOS QUE RESULTAN AL FINAL DEL PRO-

CESO.

PARA RESOLVER ESTA SITUACIÓN TENEMOS DOS POSIBILIDADES. LA PRIMERA, ES ENCONTRAR LA SOLUCIÓN EXACTA A LA EC.(3.15); UNA VEZ OBTENIDA, DERIVÁNDOLA, PODEMOS CONOCER A LA FUNCIÓN I ME -- DIANTE LA EC.(3.3). CONOCIDA LA FUNCIÓN, PASAR ENTONCES A DEMOS TRAR QUE LA TASA DE RECUPERACIÓN RELATIVA ρ CONTINÚA JUGANDO EL PAPEL DE VALOR UMBRAL RESPECTO AL NÚMERO INICIAL DE SUSCEPTI BLES Y ADEMÁS QUE LÍMITE DE DICHA FUNCIÓN CUANDO t TIENDE A IN- FINITO ES CERO. LA DIFICULTAD QUE AQUÍ ENFRENTAMOS ES QUE NO SE PUEDE OBTENER UNA SOLUCIÓN EXPLÍCITA A LA EC.(3.15); SE PUEDE - OBTENER UNA SOLUCIÓN PARAMÉTRICA, PERO ESTO DIFICULTA EL ESTU - DIO DE LA FUNCIÓN I.

LA SEGUNDA POSIBILIDAD ES HACER UN ANÁLISIS CUALITATIVO DEL SISTEMA DE ECUACIONES DIFERENCIALES DADO POR LAS ECS.(3.1), (3.2) Y (3.3); DEMOSTRANDO QUE SU SOLUCIÓN -AUNQUE NO LA CONOZ- CAMOS- TIENE, AL MENOS, LAS DOS PROPIEDADES QUE HEMOS ENCONTRA- DO EN LA "SOLUCIÓN APROXIMADA".

OPTAMOS POR ESTE SEGUNDO CAMINO. NUESTRO INTERÉS ES, POR TANTO, OBTENER UNA IDEA DEL COMPORTAMIENTO DE LA FUNCIÓN I SOLU CIÓN DEL SISTEMA DE ECUACIONES DIFERENCIALES ORIGINAL, EN TÉRMI NOS DE LA RELACIÓN QUE TENGAN ENTRE SÍ LOS VALORES S_0 Y ρ.

A PARTIR DE LAS ECS.(3.1) Y (3.2), TENEMOS

$$\frac{dI}{dS} = -1 + \frac{\rho}{S} \tag{3.27}$$

UTILIZANDO EL MÉTODO DE SEPARACIÓN DE VARIABLES PARA RE SOLVER ESTA ECUACIÓN, SE TIENE

$$\int_{I_0}^{I} du = \int_{S_0}^{S} \left(-1 + \frac{\rho}{r}\right) dr \tag{3.28}$$

REALIZANDO AMBAS INTEGRALES, OBTENEMOS

$$I - I_0 = -S + S_0 + \rho \, \ell n(S/S_0) \tag{3.29}$$

DESPEJANDO A LA FUNCIÓN I EN ESTA ECUACIÓN, Y CONSIDERENDO LA - EC.(3.8), SE LLEGA A

$$I(S) = N - S + \rho \, \ell n(S/S_0) \tag{3.30}$$

UNA VEZ OBTENIDA ESTA EXPRESIÓN, VEAMOS EL COMPORTAMIEN TO DE LA FUNCIÓN I EN TÉRMINOS DEL VALOR DE S.

DE MANERA DIRECTA, POR LA EC.(3.27), PODEMOS ASEGURAR - QUE

1) SI $S > \rho$ ENTONCES $\frac{dI}{dS}(S) < 0$

2) SI $S = \rho$ ENTONCES $\frac{dI}{dS}(S) = 0$

3) SI $S < \rho$ ENTONCES $\frac{dI}{dS}(S) > 0$

POR TANTO, PODEMOS ESTABLECER QUE

1) SI $S > \rho$

ENTONCES, I ES ESTRICTAMENTE DECRECIENTE RESPECTO A S.

2) SI $S = \rho$

ENTONCES, I ALCANZA SU VALOR MÁXIMO; A SABER,

$I(\rho) = N - \rho + \rho \ln (\rho/S_0)$.

3) SI $S < \rho$

ENTONCES, I ES ESTRICTAMENTE CRECIENTE RESPECTO A S.

POR LA EC.(3.1), SABEMOS QUE S ES UNA FUNCIÓN DECRECIENTE EN EL TIEMPO. ASÍ, POR EL INCISO 1), TENEMOS QUE CONFORME TRANSCURRE EL TIEMPO LA FUNCIÓN I CRECERÁ MIENTRAS $S(t) > \rho$. POR EL INCISO 2), AL MOMENTO $t=t^*$ EN QUE $S(t^*) = \rho$, LA FUNCIÓN I ALCANZARÁ SU VALOR MÁXIMO. POSTERIORMENTE, CUANDO $t > t^*$, POR EL INCISO 3), PODEMOS ASEGURAR QUE $I(t)$ DECRECERÁ.

PUESTO QUE LA FUNCIÓN S ES DECRECIENTE, TENEMOS QUE $S(t) > \rho$ SÓLO CUANDO $S_0 > \rho$; EN CASO CONTRARIO NO HABRÁ ESTALLAMIENTO EPIDÉMICO, PUES LA FUNCIÓN I SIEMPRE DECRECERÁ.

CON ESTE RESULTADO HEMOS LOGRADO ESTABLECER, AHORA SÍ, DE MANERA INCUESTIONABLE, EL PAPEL FUNDAMENTAL QUE JUEGA EL VALOR QUE TOMA LA TASA DE RECUPERACIÓN RELATIVA RESPECTO AL NÚMERO INICIAL DE INDIVIDUOS INFECCIOSOS QUE EXISTEN EN LA POBLACIÓN., PARA QUE OCURRA EL ESTALLAMIENTO EPIDÉMICO.[9]

LOGRADO LO ANTERIOR, PODEMOS PASAR A VER ALGUNOS ASPECTOS MÁS SOBRE LA FUNCIÓN I DADA POR LA EC.(3.30), OBTENIENDO UNA IDEA DEL LUGAR GEOMÉTRICO QUE DICHA ECUACIÓN REPRESENTA EN EL ESPACIO FASE S,I, LO CUAL NOS AYUDARÁ A ENTENDER ALGUNOS ASPECTOS SIGNIFICATIVOS ACERCA DEL DESARROLLO DEL PROCESO EPIDÉMICO.

TOMEMOS LA ECUACIÓN TRASCENDENTAL SIGUIENTE

$$N - S + \rho \ln (S/S_0) = 0 \tag{3.31}$$

Y DEFINAMOS LAS FUNCIONES f_1 Y f_2 COMO SIGUE

---

(9) Este es uno de los resultados clásicos de la epidemiología. Lo establecieron W.O.Kermack y A.G.McKendrick, quienes entre 1927 y 1940 publicaron una serie de artículos que actualmente son referencias históricas importantes para el estudio de la epidemiología.(ver bibliografía).

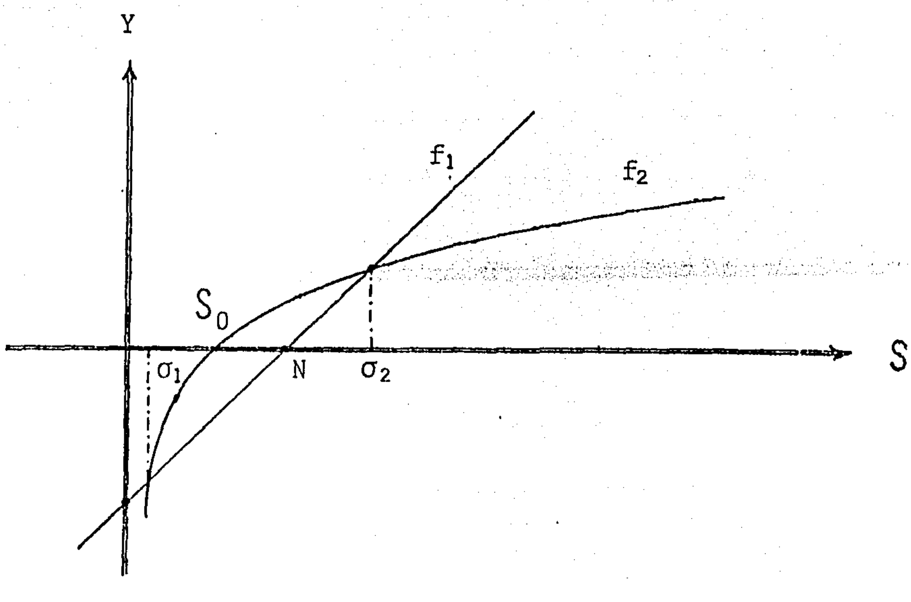
$$f_1(S) = -(N - S) \tag{3.32}$$

$$f_2(S) = \rho \ln(S/S_0) \tag{3.33}$$

DE INMEDIATO, SE TIENE QUE

$$I(S) = -f_1(S) + f_2(S) \tag{3.34}$$

POR TANTO, PODEMOS ASEGURAR QUE LA EC.(3.31) SE SATISFACE SÓLO CUANDO $f_1(S) = f_2(S)$. Y ESTO ÚLTIMO, SE SATISFACE SÓLO CUANDO SUS GRÁFICAS SE INTERSECTAN.(FIG.45).



GRAFICAS DE LAS FUNCIONES f_1 y f_2, CUYAS INTERSECCIONES DETERMINAN LAS RAICES DE LA ECUACION TRASCENDENTAL $N - S + \rho \ln(S/S_0) = 0$.

FIGURA 45

PUESTO QUE LAS GRÁFICAS SE INTERSECTAN EN SÓLO DOS PUNTOS, PODEMOS ASEGURAR QUE EXISTEN ÚNICAMENTE DOS PUNTOS, DENOTADOS POR σ_1 Y σ_2, TALES QUE

$$f_1(\sigma_1) = f_2(\sigma_1) \tag{3.35}$$

$$f_1(\sigma_2) = f_2(\sigma_2) \tag{3.36}$$

POR TANTO, LA EC.(3.31) SÓLO TIENE DOS RAÍCES; A SABER σ_1 Y σ_2.

EN BASE A LA INFORMACIÓN HASTA AQUÍ OBTENIDA, TENEMOS LOS SIGUIENTES RESULTADOS

i) SI $0 < S < \sigma_1$

$\Rightarrow \quad f_1(S) > f_2(S)$

$\Rightarrow \quad I(S) < 0$

ii) SI $S = \sigma_1$ O $S = \sigma_2$

$\Rightarrow \quad f_1(S) = f_2(S)$

$\Rightarrow \quad I(S) = 0$

iii) SI $\sigma_1 < S < \sigma_2$

$\Rightarrow \quad f_1(S) < f_2(S)$

$\Rightarrow \quad I(S) > 0$

iv) SI $\sigma_2 < S$

$\Rightarrow \quad f_1(S) > f_2(S)$

$\Rightarrow \quad I(S) < 0$

ADICIONALMENTE, POR LA EC.(3.30), SABEMOS QUE

$$\lim_{S\to 0} I(S) = -\infty \tag{3.37}$$

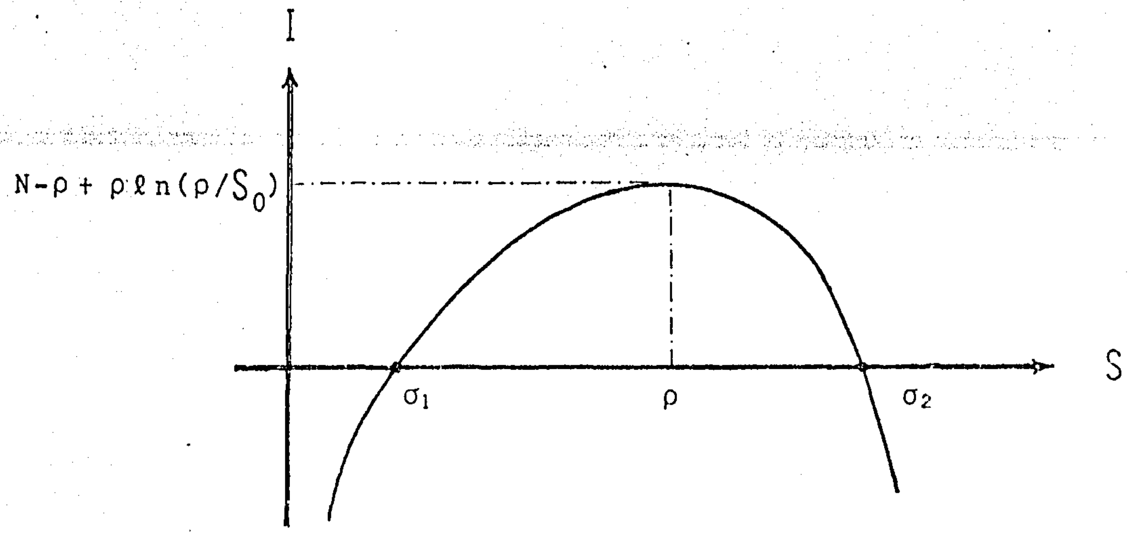
Y

$$\lim_{S\to\infty} I(S) = -\infty \tag{3.38}$$

DADO QUE I ALCANZA SU VALOR MÁXIMO EN $S=\rho$, POR EL INCISO iii), PODEMOS ASEGURAR QUE

$$\sigma_1 < \rho < \sigma_2 \tag{3.39}$$

CON TODA LA INFORMACIÓN OBTENIDA ACERCA DE LA FUNCIÓN I(S) NOS DAMOS UNA IDEA DE COMO ES LA CURVA DESCRITA POR LA EC.(3.30). (FIG.46).



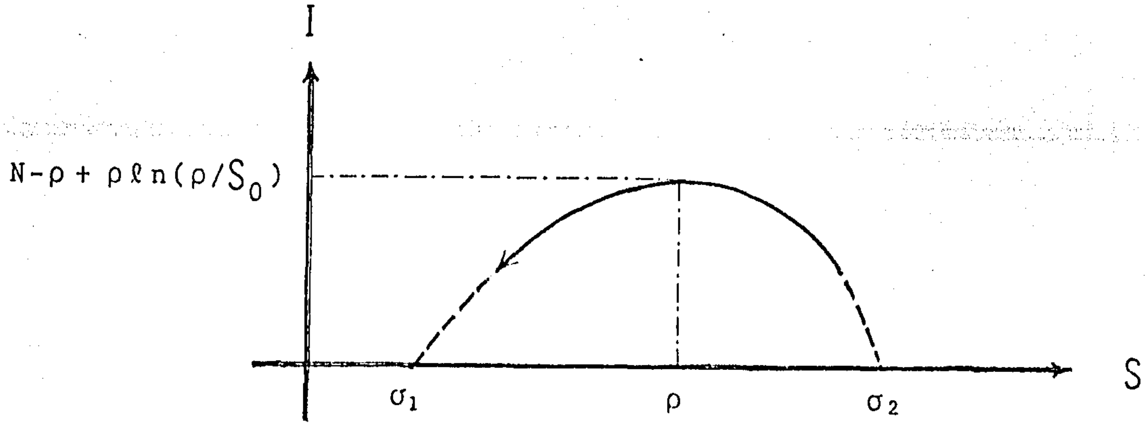
CURVA DESCRITA POR LA ECUACION $I = N - S + \rho\,\ell n(S/S_0)$.

FIGURA 46

POR LA EC.(3.1), TENEMOS QUE $S'(t) \leq 0$, $\forall\ t \in [0,\infty)$; ESTO ES, S ES UNA FUNCIÓN DECRECIENTE. PODEMOS AFIRMAR, ENTONCES, -- QUE LA CURVA DADA POR LA EC.(3.31) EN EL PLANO FASE S,I ES RECORRIDA DE DERECHA A IZQUIERDA, CONFORME TRANSCURRE EL TIEMPO.

POR DEFINICIÓN, SABEMOS QUE $I(t) \geq 0$, $\forall\ t \in [0,\infty)$; POR -- TANTO, EL TRAMO DE CURVA A CONSIDERAR, EN NUESTRO PROBLEMA, SE RESTRINGE A LA PARTE DE DICHA CURVA QUE QUEDA POR ARRIBA DEL -- EJE S.

CON ESTA INFORMACIÓN, Y CONSIDERANDO QUE $I_0 > 0$, ASEGURAMOS QUE EL RECORRIDO DE LA CURVA SE HACE COMO SE MUESTRA EN LA FIG.47.



SENTIDO EN QUE ES RECORRIDA LA CURVA DADA POR LA ECUACION $I = N - S + \rho \ell n (S/S_0)$ CONFORME TRANSCURRE EL TIEMPO.

FIGURA 47

PASEMOS A VER DE MANERA MÁS PRECISA QUÉ SUCEDE CON LOS VALORES DE LAS FUNCIONES S, I Y R, CONFORME t TIENDE A INFINITO.

LA FUNCIÓN S

SABEMOS QUE S ES DECRECIENTE; ADEMÁS, ESTÁ ACOTADA INFERIORMENTE. POR TANTO, ASEGURAMOS QUE TIENE LÍMITE CONFORME t TIENDE A INFINITO; DENOTANDO DICHO LÍMITE POR S_∞, TENEMOS

$$\lim_{t\to\infty} S(t) = S_\infty \tag{3.40}$$

LA FUNCIÓN R

SABEMOS, POR LA EC.(3.3), QUE $R'(t) \geq 0$, $\forall\, t \in [0,\infty)$; ESTO ES, R ES UNA FUNCIÓN CRECIENTE; ADEMÁS, ESTÁ ACOTADA SUPERIORMENTE. POR TANTO, ASEGURAMOS QUE TIENE LÍMITE, CONFORME t TIENDE A INFINITO; DENOTANDO DICHO LÍMITE POR R_∞, TENEMOS

$$\lim_{t\to\infty} R(t) = R_\infty \tag{3.41}$$

LA FUNCIÓN I

DESPEJANDO A LA FUNCIÓN I EN LA EC.(3.4), Y CONSIDERANDO QUE TANTO LA FUNCIÓN S COMO LA FUNCIÓN R TIENEN LÍMITE CONFORME t TIENDE A INFINITO, ASEGURAMOS QUE I TAMBIÉN TIENE LÍMITE Y ESTÁ DADO POR

$$\lim_{t\to\infty} I(t) = N - S_\infty - R_\infty \tag{3.42}$$

DICHO LÍMITE LO DENOTAREMOS POR I_∞.

HEMOS DEMOSTRADO QUE LAS FUNCIONES S, I Y R TIENEN LÍMITE CONFORME t TIENDE A INFINITO. PASEMOS, AHORA, A ENCONTRAR -- SUS VALORES.

CONFORME TRANSCURRE EL TIEMPO, EL PUNTO $(S(t),I(t))$ RECORRE LA CURVA DADA POR LA EC.(3.30), COMO YA DIJIMOS, DE DERECHA A IZQUIERDA, INICIANDO SU RECORRIDO DESDE EL PUNTO (S_0,I_0). SI CONSIDERAMOS EL SISTEMA DE ECUACIONES DIFERENCIALES DADO POR LAS ECS. (3.1), (3.2) Y (3.3), PODEMOS ESTABLECER, DE MANERA INMEDIATA, QUE $S'(t) = I'(t) = R'(t) = 0$, $\forall\ t \in [0,\infty)$ SÍ Y SÓLO SI -- $I(t) = 0$, $\forall\ t \in [0,\infty)$. ESTO ES, LOS PUNTOS (S,I,R) DE EQUILIBRIO DEL SISTEMA DE ECUACIONES NECESARIAMENTE SON DE LA FORMA $(S,0,R)$. PUESTO QUE EL PUNTO $(S(t),I(t))$, AL RECORRER LA CURVA, NECESARIAMENTE DEBE TENDER A UN PUNTO DE EQUILIBRIO DEL SISTEMA SI ESTE EXISTE, Y LOS ÚNICOS PUNTOS DE EQUILIBRIO DEL SISTEMA SON DE LA FORMA $(S,0,R)$, PODEMOS ASEGURAR QUE

$$S_\infty = \sigma_1 \tag{3.43}$$

$$I_\infty = 0 \tag{3.44}$$

DESPEJANDO A R_∞ EN LA EC.(3.42), TENEMOS QUE

$$R_\infty = N - \sigma_1 \tag{3.45}$$

Hemos obtenido bastante información acerca del desarrollo del proceso epidémico, vale la pena recapitularla.

El proceso se inicia al momento $t=0$, encontrándose la población en el estado $(S_0, I_0, 0)$.

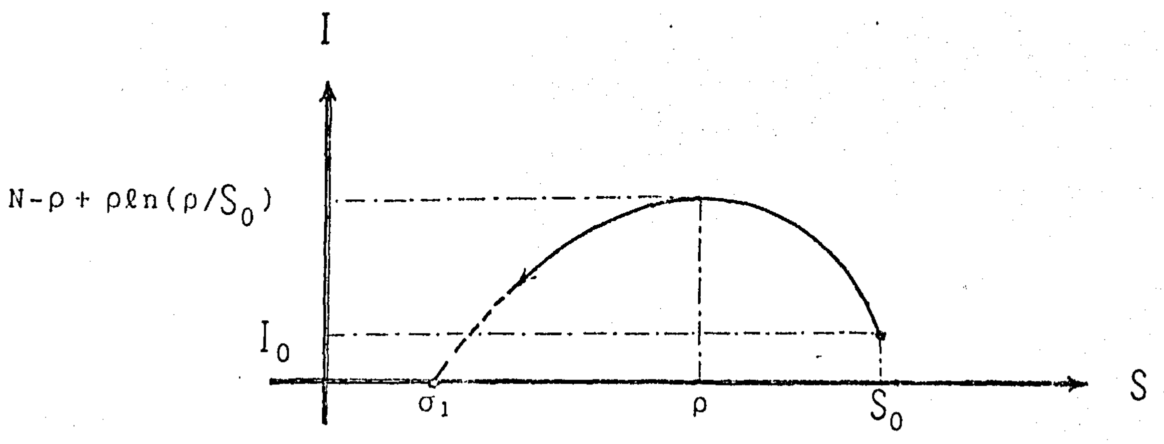
Tenemos varias posibilidades para el desarrollo del proceso de difusión de la enfermedad. Veamos.

Si $S_0 > \rho$

Podemos asegurar que se presenta un estallamiento epidémico. Así, el número de individuos infecciosos crece hasta el momento $t=t^*$ en que $S(t^*) = \rho$, tomando en dicho momento el valor $I(t^*) = N - \rho + \rho \ln (\rho / S_0)$. Posteriormente, el número de individuos infecciosos empieza a disminuir, tendiendo a cero conforme t tiende a infinito.

Respecto a la función S, tenemos que es decreciente, y que conforme t tiende a infinito el número de individuos susceptibles tiende a σ_1.(Fig.48).

En cuanto a la función R, tenemos lo siguiente. Por la ec.(3.3), tenemos que mientras la función I crece, esto es, mientras $0 \leq t \leq t^*$, la función R' va tomando valores más grandes; así, la función R crece cada vez más rápido. Cuando $t > t^*$,



CURVA DESCRITA POR LA ECUACUON $I = N - S + \rho \ell n(S/S_0)$, CONSIDERANDO LA CONDICION INICIAL $S_0 > \rho$.

FIGURA 48

LA FUNCIÓN I ES DECRECIENTE; POR TANTO R' VA TOMANDO VALORES CADA VEZ MENORES; ASÍ, R CONTINÚA CRECIENDO, PERO CADA VEZ DE MANERA MÁS LENTA.

CUANDO t TIENDE A INFINITO, LA POBLACIÓN TIENDE A TOMAR EL ESTADO $(\sigma_1, 0, N-\sigma_1)$.

FINALMENTE, PODEMOS ASEGURAR, POR LAS ECS. (3.1), (3.2), (3.3), (3.43), (3.44) Y (3.45) QUE

$$\lim_{t\to\infty} S'(t) = 0 \qquad (3.46)$$

$$\lim_{t\to\infty} I'(t) = 0 \qquad (3.47)$$

$$\lim_{t\to\infty} R'(t) = 0 \qquad (3.48)$$

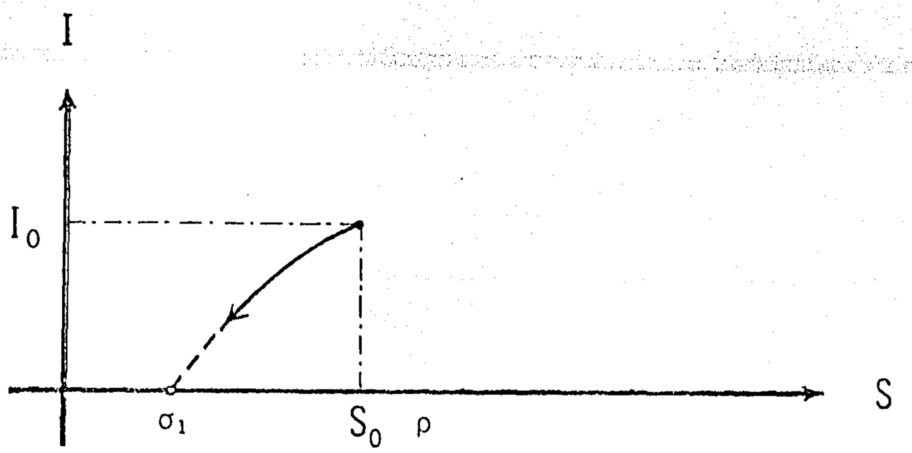
Si $S_0 < \rho$

Podemos asegurar que no se presenta estallamiento epidémico. El número inicial de individuos infecciosos decrece, acercándose a cero conforme t tiende a infinito.

Respecto a la función S, tenemos que es decreciente, y que conforme t tiende a infinito el número de individuos susceptibles tiende a σ_1.(Fig.49).

En cuanto a la función R, tenemos lo siguiente. Como la función I es decreciente, por la Ec.(3.3), tenemos que R' va tomando valores cada vez menores; por tanto, R crece cada vez de manera más lenta.

Cuando t tiende a infinito, la población tiende al estado $(\sigma_1, 0, N-\sigma_1)$.

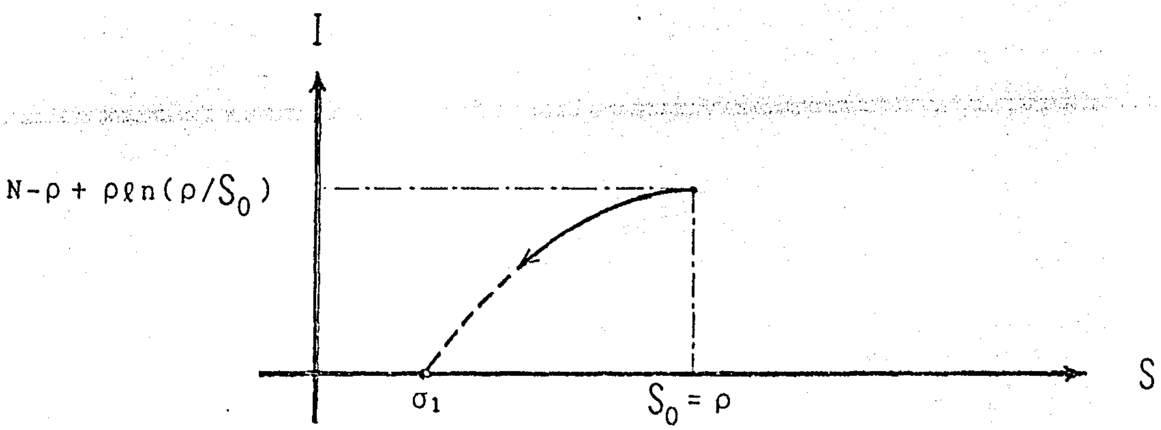


CURVA DESCRITA POR LA ECUACION $I = N - S + \rho \ln(S/S_0)$, CONSIDERANDO LA CONDICION INICIAL $S_0 < \rho$.

Figura 49

SI $S_0 = \rho$

SUCEDE LO MISMO QUE EN EL CASO ANTERIOR, SÓLO QUE AHORA EL PUNTO DE INICIO DEL PROCESO, EN CUANTO AL VALOR DE I_0, COINCIDE CON EL PUNTO MÁXIMO QUE ALCANZARÍA EL NÚMERO DE INDIVIDUOS INFECCIOSOS, EN CASO DE QUE SE PRESENTARA UN ESTALLAMIENTO EPIDÉMICO COMO EL DESCRITO CUANDO $S_0 > \rho$. (FIG.50).



CURVA DESCRITA POR LA ECUACION $I = N - S + \rho \ln(S/S_0)$, CONSIDERANDO LA CONDICION INICIAL $S_0 = \rho$.

FIGURA 50

A MANERA DE CIERRE DEL CAPÍTULO, AL IGUAL QUE EN LOS ANTERIORES, ESTABLECEMOS EL SIGUIENTE TEOREMA, EL CUAL RECOGE ALGUNOS DE LOS ASPECTOS DISCUTIDOS A LO LARGO DE ESTE CAPÍTULO.

TEOREMA

SEA P UNA POBLACIÓN FORMADA POR INDIVIDUOS SUSCEPTIBLES, INFECCIOSOS Y RECUPERADOS EN LA QUE SE DESARROLLA UN PROCESO INFECCIOSO REGIDO POR EL SISTEMA DE ECUACIONES

$$S'(t) = -\alpha S(t)I(t) \qquad \text{CON } \alpha > 0$$
$$I'(t) = \alpha S(t)I(t) - \beta I(t) \qquad \text{CON } \beta > 0$$
$$R'(t) = \beta I(t)$$
$$S(t) + I(t) + R(t) = N$$
$$S(0) = S_0 > 0$$
$$I(0) = I_0 > 0$$
$$R(0) = R_0 = 0$$

DONDE $S(t)$, $I(t)$ Y $R(t)$ MIDEN EL NÚMERO DE INDIVIDUOS SUSCEPTIBLES, INFECCIOSOS Y RECUPERADOS AL TIEMPO t, RESPECTIVAMENTE; α ES LA TASA DE INFECCIÓN (CONSTANTE), β ES LA TASA DE RECUPERACIÓN (CONSTANTE); N EL TAMAÑO DE LA POBLACIÓN, EL CUAL ES EL MISMO EN TODO MOMENTO t; Y S_0, I_0 Y R_0 VALORES CONOCIDOS; ENTONCES SE PUEDE ASEGURAR QUE EN TAL POBLACIÓN SE PRESENTARÁ UN PROCESO EPIDÉMICO SÓLO CUANDO $S_0 > \rho$, DONDE $\rho = \frac{\beta}{\alpha}$ ES LA TASA DE RECUPERACIÓN RELATIVA. EN CASO CONTRARIO NO HABRÁ ESTALLAMIENTO EPIDÉMICO. SI SE DENOTA POR S_∞, I_∞ Y R_∞

EL NÚMERO DE INDIVIDUOS SUSCEPTIBLES, INFECCIOSOS Y RECUPERADOS, RESPECTIVAMENTE, QUE TENDERÁN A QUEDAR EN LA POBLACIÓN CONFORME SE DESARROLLE EL PROCESO INFECCIOSO, SE TIENE

a) SI $S_0 > \rho$

EL NÚMERO INICIAL DE INDIVIDUOS INFECCIOSOS CRECE HASTA EL VALOR MÁXIMO $N - \rho + \rho \ln (\rho/S_0)$ Y DESPUÉS DECRECE, PRESENTÁNDOSE LA SITUACIÓN

$$S_\infty = \sigma_1$$
$$I_\infty = 0$$
$$R_\infty = N - \sigma_1$$

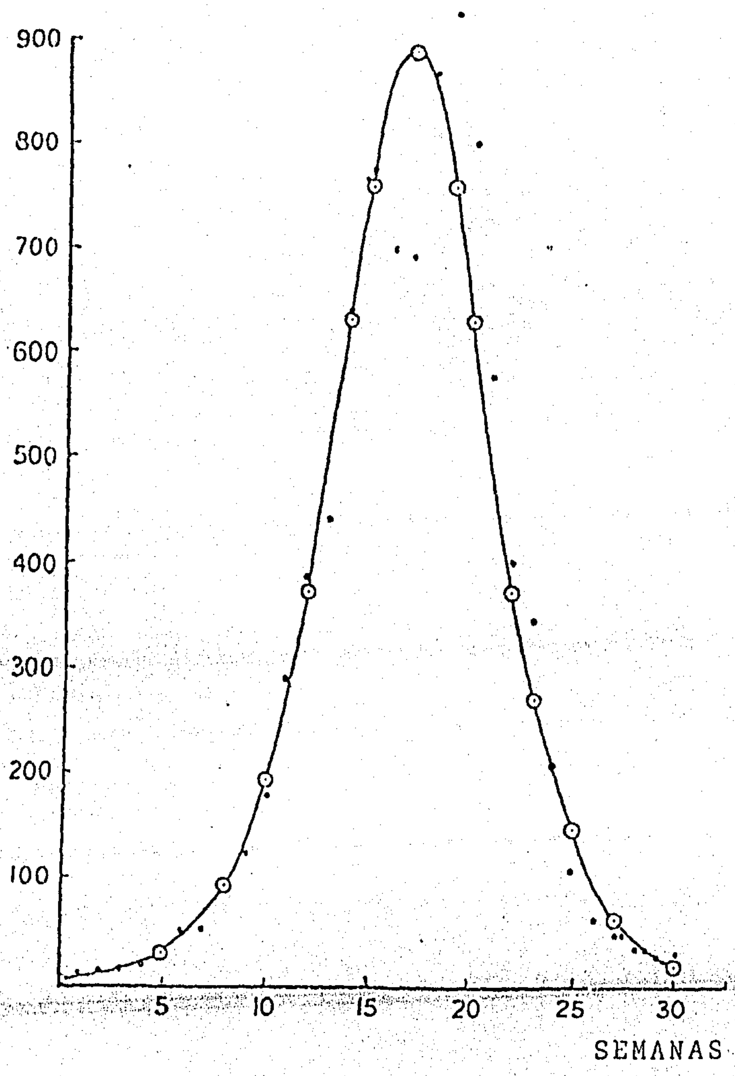
b) SI $S_0 \leqslant \rho$

EL NÚMERO INICIAL DE INDIVIDUOS INFECCIOSOS DECRECE, PRESENTÁNDOSE LA SITUACIÓN

$$S_\infty = \sigma_1$$
$$I_\infty = 0$$
$$R_\infty = N - \sigma_1$$

DONDE σ_1 ES LA RAÍZ MÍNIMA DE LA ECUACIÓN TRASCENDENTAL

$$N - S + \rho \ln (S/S_0) = 0$$



$$R'(t) = 890 \ \mathrm{sec.h}^2(0.2\ t + 3.4)$$

COMPARACION DE LA GRAFICA DE LA FUNCION R' ESTABLECIDA POR KERMACK Y McKENDRICK CON LOS DATOS DE LA PLAGA DE BOMBAY EN 1905 Y 1906, ESTUDIADA POR ELLOS. LOS VALORES REGISTRADOS MIDEN EL NUMERO DE MUERTES POR SEMAÑA Y SE TOMAN COMO BUENA APROXIMACION AL VALOR DE R' PUESTO QUE AL MENOS EL 80% O 90% DE LOS CASOS REPORTADOS ACABARON POR MORIR. COMO UNIDAD DE TIEMPO SE TOMO UNA SEMANA.

CAPITULO IV

MODELO EPIDEMICO CON CARACTERIZACION CONTINUA DE LOS ESTADOS MEDICO-BIOLOGICOS DE LOS INDIVIDUOS.[10]

EN LOS MODELOS ANTERIORES HEMOS ESTUDIADO EL PROCESO DE DIFUSIÓN DE UNA ENFERMEDAD INFECCIOSA EN UNA POBLACIÓN A TRAVÉS DE OBSERVAR EL COMPORTAMIENTO DE LAS DISTINTAS CLASES DE INDIVIDUOS QUE CONFORMAN LA POBLACIÓN; EN NUESTRO CASO , HAN SIDO LA DE LOS INDIVIDUOS SUSCEPTIBLES, LA DE LOS INDIVIDUOS INFECCIOSOS Y LA DE LOS INDIVIDUOS RECUPERADOS; ASIMISMO, HEMOS PARTIDO DEL SUPUESTO DE QUE TODO INDIVIDUO DE LA POBLACIÓN PERTENECE A UNA Y SÓLO A UNA DE ESTAS CLASES. POR TANTO, EN TÉRMINOS DE ESTA CLASIFICACIÓN, HEMOS EQUIPARADO A TODOS LOS INDIVIDUOS SUSCEPTIBLES ENTRE SÍ, Y LO MISMO HEMOS HECHO EN LA CLASE DE LOS -

---

(10) La discusión presentada en este capítulo está basada en el modelo sobre influenza desarrollado por O.V. Baroyan y L.A. Rvachov en la URSS; aquí presentamos un caso simplificado de él. (Ver - bibliografía).

INDIVIDUOS INFECCIOSOS Y EN LA DE LOS INDIVIDUOS RECUPERADOS, ESTO ES, DADOS DOS INDIVIDUOS DE UNA MISMA CLASE, NO TENEMOS FORMA DE DISTINGUIRLOS ENTRE SÍ; HEMOS CONSIDERADO QUE TODOS SE ENCUENTRAN EN EL MISMO ESTADO. DE AHÍ QUE, EN LOS MODELOS ANTERIORES, TODOS LOS INDIVIDUOS SUSCEPTIBLES SE ENCUENTRAN EN IGUALDAD DE CONDICIONES PARA PASAR A LA CLASE DE LOS INDIVIDUOS INFECCIOSOS; Y TODOS LOS INDIVIDUOS INFECCIOSOS SE ENCUENTRAN EN IGUALDAD DE CONDICIONES PARA PASAR A FORMAR PARTE DE LOS INDIVIDUOS RECUPERADOS, CUANDO ÉSTO ES POSIBLE.

EN ESTE MODELO, AVANZAMOS EN EL ESTUDIO DEL PROCESO DE DIFUSIÓN DE UNA ENFERMEDAD INFECCIOSA EN UNA POBLACIÓN, CONSIDERANDO ALGUNAS CARACTERÍSTICAS MÉDICO-BIOLÓGICAS DE LOS INDIVIDUOS QUE COMPONEN LA POBLACIÓN; CON ELLO, SE ESTABLECE UNA CARACTERIZACIÓN MÁS FINA QUE LAS ANTERIORES EN CUANTO A LOS POSIBLES ESTADOS DE LOS INDIVIDUOS.

DADA UNA ENFERMEDAD EN UNA POBLACIÓN, PODEMOS CARACTERIZAR LA SITUACIÓN DE CADA INDIVIDUO RESPECTO A ESA ENFERMEDAD A PARTIR DE UNA SERIE DE DIVERSOS PARÁMETROS, COMO LO PUEDEN SER LA CANTIDAD DE GERMEN PATÓGENO PRESENTE EN EL INDIVIDUO, LAS CARACTERÍSTICAS INMUNOLÓGICAS ESPECÍFICAS PRESENTES EN DICHO INDIVIDUO (POR EJEMPLO, CANTIDAD DE ANTICUERPOS A LA MATERIA INFECCIOSA, MEDIDA DE CIERTA FORMA), LAS CARACTERÍSTICAS INMUNOLÓGICAS GLOBALES, NIVEL ALIMENTICIO (MEDIDO, POR EJEMPLO, A TRAVÉS

DE DEFICIENCIAS VITAMÍNICAS, ETC.); Y OTROS TANTOS ASPECTOS QUE QUE PUEDEN SER TOMADOS EN CUENTA.

PODEMOS SUPONER, ENTONCES, QUE EN PRINCIPIO LA SITUA -- CIÓN DE CUALQUIER INDIVIDUO DE LA POBLACIÓN QUEDA CARACTERIZADA POR UN CONJUNTO DE PARÁMETROS, DENOTADOS POR $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n$. ASÍ, EN ESTADO MÉDICO-BIOLÓGICO DE CUALQUIER INDIVIDUO DE LA POBLA - CIÓN, A UN CIERTO TIEMPO t, QUEDA DETERMINADO POR EL VALOR QUE TOMA CADA UNO DE LOS PARÁMETROS $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n$.

DENOTEMOS POR F EL CONJUNTO DE TODOS LOS POSIBLES ESTA- DOS MÉDICO-BIOLÓGICO DE LOS INDIVIDUOS DE LA POBLACIÓN. POR SEN CILLEZ, TOMAREMOS A $F \subseteq \mathbb{R}^n$, CON $\Phi = (\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n) \in F$; ASÍ, DADO CUALQUIER INDIVIDUO DE LA POBLACIÓN, AL MOMENTO t, TIENE ASOCIA DO UN VECTOR $\Phi \in F$, EL CUAL REPRESENTA SU ESTADO MÉDICO-BIOLÓGI- CO; Y VECEVERSA, DADO CUALQUIER VECTOR $\Phi \in F$, REPRESENTA UN POSI BLE ESTADO MÉDICO-BIOLÓGICO DE LOS INDIVIDUOS DE LA POBLACIÓN.

CONSIDERANDO QUE ESTAMOS HABLANDO DE PROCESOS DE DIFU - SIÓN DE UNA ENFERMEDAD INFECCIOSA EN POBLACIONES DE GRAN CONCEN TRACIÓN HUMANA, PODEMOS SUPONER QUE EL CONJUNTO DE POSIBLES ES- TADOS MÉDICO-BIOLÓGICO DE LOS INDIVIDUOS, ESTO ES, LA REGIÓN F, ES UN CONJUNTO SIMPLEMENTE CONEXO DE UNA SOLA PIEZA EN $\mathbb{R}^n$.

SI SUPONEMOS QUE, EN TÉRMINOS GENERALES, EL PROCESO ES DETERMINISTA, PODEMOS ASEGURAR QUE EL CAMBIO DE ESTADO (MÉDICO-

BIOLÓGICO) DE UN INDIVIDUO QUE SE ENCUENTRA EN EL ESTADO Φ DEPENDE ÚNICAMENTE DE SU ESTADO Φ Y NO DE SU PASADO. ASÍ, EL CAMBIO EN LA I-ÉSIMA COMPONENTE DEL ESTADO DEL INDIVIDUO ESTA DADO POR

$$\frac{d\phi_i}{dt} = f_i(\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n) = f_i(\Phi) \qquad (4.1)$$

CON

$$\phi_i : A \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$f_i : F \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

SI CONSIDERAMOS EL CAMBIO GLOBAL DE ESTADO, ESTO ES, EL CAMBIO DEL VECTOR DE ESTADO Φ, TENEMOS

$$\frac{d\Phi}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{d\phi_1}{dt} \\ \vdots \\ \frac{d\phi_n}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(\Phi) \\ \vdots \\ f_n(\Phi) \end{pmatrix} = f(\Phi) \qquad (4.2)$$

CON

$$\Phi : A \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$$
$$f : F \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

IDENTIFIQUEMOS CADA UNO DE LOS ESTADOS $\Phi \in F$ DE LOS INDI

VIDUOS DE LA POBLACIÓN CON LA POSICIÓN Φ QUE PUEDEN OCUPAR CIERTAS PARTÍCULAS, EN EL ESPACIO FASE DE LOS ESTADOS MÉDICO-BIOLÓGICOS DE LOS INDIVIDUOS DE DICHA POBLACIÓN.

TOMANDO EN CUENTA QUE EL CAMBIO DE ESTADO DE UN INDIVIDUO, AL TIEMPO t, DEPENDE ÚNICAMENTE DEL ESTADO Φ EN QUE SE ENCUENTRE DICHO INDIVIDUO EN ESE MOMENTO, PODEMOS ASEGURAR QUE TODOS LOS INDIVIDUOS QUE OCUPEN UN MISMO ESTADO, INDEPENDIENTEMENTE DEL MOMENTO EN QUE LO HAGA CADA UNO DE ELLOS, SEGUIRÁN EXACTAMENTE EL MISMO CURSO MÉDICO-BIOLÓGICO.

POR TANTO, CONFORME TRANSCURRE EL TIEMPO, SE ESTABLECE UN FLUJO DE PARTÍCULAS EN LA REGIÓN $F \subseteq \mathbb{R}^n$, DONDE LA TRAYECTORIA DE CADA PARTÍCULA REPRESENTA EL CURSO DE ESTADOS MÉDICO-BIOLÓGICOS QUE IRÁN OCUPANDO LOS INDIVIDUOS QUE EN ALGÚN MOMENTO SE ENCUENTREN EN UN ESTADO REPRESENTADO POR ALGÚN PUNTO DE DICHA TRAYECTORIA.

ASÍ, EL PROCESO DE CAMBIOS MÉDICO-BIOLÓGICOS EN LA POBLACIÓN QUEDA REPRESENTADO POR EL FLUJO DEL FLUIDO. LAS POSICIONES QUE OCUPAN LAS PARTÍCULAS DE DICHO FLUIDO REPRESENTAN LOS ESTADOS MÉDICO-BIOLÓGICOS DE LOS INDIVIDUOS Y EL CAMPO DE VELOCIDADES DE DICHO FLUIDO ESTÁ DADO POR f.

DADO QUE HEMOS SUPUESTO QUE EL CAMBIO DE ESTADO DE UN -

INDIVIDUO, AL TIEMPO t, SÓLO DEPENDE DEL ESTADO EN QUE SE EN-CUENTRA EL INDIVIDUO EN DICHO MOMENTO, PODEMOS ASEGURAR QUE EL CAMPO DE VELOCIDADES f ES UN CAMPO ESTACIONARIO; ESTO ES, SUS VALORES SON INDEPENDIENTES DEL TIEMPO, SÓLO DEPENDEN DE LA POSICIÓN Φ.

SEA $X : F \times [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ LA FUNCIÓN TAL QUE $X(\Phi,t)$ MIDE EL NÚMERO DE INDIVIDUOS DE LA POBLACIÓN QUE AL TIEMPO t SE ENCUENTRAN EN EL ESTADO MÉDICO-BIOLÓGICO Φ.

EN TÉRMINOS DEL FLUIDO EN EL ESPACIO FASE, ES CLARO QUE PODEMOS INTERPRETAR A $X(\Phi,t)$ COMO LA DENSIDAD DEL FLUIDO EN EL PUNTO Φ AL TIEMPO t. ESTO ES, LA FUNCIÓN X PUEDE SER INTERPRETADA COMO LA FUNCIÓN DE DENSIDAD DEL FLUIDO.

RESUMIENDO, TENEMOS UN FLUIDO EN LA REGIÓN $F \subseteq \mathbb{R}^n$, CON UNA FUNCIÓN DE DENSIDAD $X : F \times [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ Y UN CAMPO DE VELOCIDADES $f : F \longrightarrow \mathbb{R}^n$ ESTACIONARIO. SIN MAYOR PROBLEMA, PODEMOS SUPONER QUE $f : F \times [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}^n$; ELLO NOS PERMITIRÁ REALIZAR OPERACIONES ENTRE LA FUNCIÓN DE DENSIDAD Y LA FUNCIÓN CAMPO DE VELOCIDADES SIN DIFICULTADES. EL CAMPO DE VELOCIDADES, POS SUPUESTO, SIGUE SIENDO ESTACIONARIO.

DADAS LAS CARACTERÍSTICAS DEL PROCESO, NO ES EXAGERADO SUPONER QUE LAS FUNIONES X Y f SON CONTINUAMENTE DIFERENCIABLES.

Así, por la ecuación de continuidad de los medios continuos, tenemos que las funciones definidas cumplen con

$$\frac{\partial X}{\partial t}(\Phi,t) + \operatorname{div.}\left[X(\Phi,t)\, f(\Phi,t)\right] = 0 \qquad (4.3)$$

Por tanto, el problema puede plantearse de la siguiente manera. Dada una enfermedad particular, una vez que han sido escogidos los parámetros $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n$, los cuales se considera caracterizan la situación médico-biológica de los individuos, y conocida la dinámica del proceso médico-biológico de dichos individuos, esto es, conocida la función f, el problema consiste en encontrar una función X que satisfaga la ecuación de continuidad.

Evidentemente no contamos todavía con la información suficiente para resolver esta ecuación diferencial. Esta cuestión la abordaremos más adelante.

En cuanto al paralelismo que hemos establecido entre el proceso de cambio de los estados médico-biológicos de la población y el fluido en la región F conviene recordar que en mecánica de fluidos el conocimiento de la trayectoria de una o varias partículas aporta muy buena información sobre el comportamiento global del fluido. En términos del problema que tenemos planteado, ésto significa que la dinámica del proceso médico-bio

LÓGICO DE UNO O VARIOS INDIVIDUOS, APORTA MUCHA INFORMACIÓN SOBRE EL COMPORTAMIENTO GLOBAL DE LA POBLACIÓN. EN PARTICULAR, EL CONOCIMIENTO DEL CURSO DE ALGUNOS INDIVIDUOS NOS DA INFORMACIÓN VALIOSA SOBRE LA TRAYECTORIA QUE SEGUIRÁN LOS INDIVIDUOS DE LA POBLACIÓN Y , ES LO IMPORTANTE, SOBRE EL CAMPO DE VELOCIDADES f.

HAY QUE TENER EN CUENTA QUE LA SELECCIÓN DE LOS PARÁMETROS $\phi_1,\phi_2,\ldots,\phi_n$, NO ES ÚNICA; ENTONCES, TAMPOCO ES ÚNICO EL FLUIDO QUE REPRESENTA EL PROCESO DE CAMBIOS MEDICO-BIOLÓGICOS EN LA POBLACIÓN. DEPENDIENDO DEL NÚMERO DE PARÁMETROS ESCOGIDOS, YA SEAN n O m, EL FLUIDO OBTENIDO TENDRÁ n O m GRADOS DE LIBERTAD, SEGÚN SEA EL CASO; POR TANTO, EN GENERAL, SERÁ DIFICIL SU COMPARACIÓN. MÁS AÚN, PUESTO QUE TAMPOCO ES ÚNICA LA MANERA DE ESCOGER n PARÁMETROS QUE CARACTERICEN LA SITUACIÓN MÉDICO-BIOLÓGICA DE LOS INDIVIDUOS DE LA POBLACIÓN RESPECTO A UNA ENFERMEDAD, PODEMOS OBTENER DIFERENTES FLUIDOS, CON IGUALES GRADOS DE LIBERTAD, PARA REPRESENTAR LA SITUACIÓN.

EVIDENTEMENTE, CONVIENE ESCOGER EL CONJUNTO DE PARÁMETROS $\phi_1,\phi_2,\ldots,\phi_n$, DE TAL FORMA QUE PODAMOS DETERMINAR, DE MANERA MÁS O MENOS SENCILLA, EL CAMPO DE VELOCIDADES ESTACIONARIO ASOCIADO.

ABORDAR EL PROBLEMA CON UNA CANTIDAD GRANDE DE PARÁMETROS ES UN PROBLEMA MUY COMPLEJO. EN ESTE TRABAJO NOS RESTRINGIREMOS A UNA PRIMERA APROXIMACIÓN DE LA PROBLEMÁTICA; EN TANTO ES

TO, REDUCIREMOS EL NÚMERO DE PARÁMETROS QUE CARACTERIZAN LOS ESTADOS MÉDICO-BIOLÓGICOS DE LOS INDIVIDUOS. ESTO NOS PERMITIRÁ AVANZAR EN EL PLANTEAMIENTO.

PLANTEAMIENTO PARTICULAR.

UN ÍNDICE DE LA SITUACIÓN MÉDICO-BIOLÓGICA DE UN INDIVIDUO ES, SIN DUDA, LA CANTIDAD DE GERMEN PATÓGENO ESPECÍFICO QUE EXISTA EN SU ORGANISMO; DENOTEMOS POR ϕ LA CANTIDAD DE GERMEN PATÓGENO PRESENTE EN EL INDIVIDUO. ADICIONALMENTE, SABEMOS QUE LA SITUACIÓN MÉDICO-BIOLÓGICA DE UN INDIVIDUO DEPENDE TAMBIÉN DE SUS MECANISMOS DE DEFENSA ANTE LA ENFERMEDAD; EL INDIVIDUO CUENTA CON UN CIERTO NIVEL DE INMUNIDAD, GENERADA POR EL PROPIO ORGANISMO COMO RESPUESTA AL AGENTE PATÓGENO INVASOR O ADQUIRIDA POR OTROS MEDIOS; DENOTEMOS POR ψ EL NIVEL DE DEFENSA DEL INDIVIDUO.

SUPONDREMOS QUE EL ESTADO MÉDICO-BIOLÓGICO DE CUALQUIER INDIVIDUO DE LA POBLACIÓN QUEDA CARACTERIZADO POR ESTOS DOS PARÁMETROS.

DENOTEMOS POR $G \subseteq \mathbb{R}^2$ EL CONJUNTO DE TODOS LOS POSIBLES ESTADOS MÉDICOS-BIOLÓGICOS DE LOS INDIVIDUOS DE LA POBLACIÓN. ASÍ, CUALQUIER INDIVIDUO, AL MOMENTO t, TIENE ASOCIADA UNA PAREJA $(\phi,\psi) \in G$ QUE REPRESENTA SU ESTADO MÉDICO-BIOLÓGICO. TAMBIÉN DE MANERA INVERSA, CUALQUIER PAREJA $(\phi,\psi) \in G$ REPRESENTA UN POSIBLE

ESTADO MÉDICO-BIOLÓGICO DE LOS INDIVIDUOS DE LA POBLACIÓN.

CONSIDERANDO EL SIGNIFICADO QUE TIENEN LOS PARÁMETROS ϕ Y ψ DEFINIDOS, SE TIENE QUE LA REGIÓN $G \subseteq \mathbb{R}^2$ ES UN SUBCONJUNTO DEL PRIMER CUADRANTE DEL PLANO, INCLUYENDO LOS DOS SEMIEJES. EN ESTE ESPACIO FASE, LOS PUNTOS DE LA FORMA $(\phi,0) \in G$ CON $\phi>0$ REPRESENTAN TODOS LOS ESTADOS POSIBLES DE LOS INDIVIDUOS DE LA POBLACIÓN EN LOS QUE EXISTE ϕ CANTIDAD DE GERMEN PATÓGENO EN EL ORGANISMO Y EL INDIVIDUO NO CUENTA CON DEFENSAS, SU NIVEL DE DEFENSA ES CERO; ESTOS ESTADOS SON LOS MÁS DELICADOS, Y SE TRANSFORMAN EN GRAVES CUANDO ϕ ES MUY GRANDE. LOS PUNTOS DEL ESPACIO FASE DE LA FORMA $(0,\psi)$ CON $\psi>0$ REPRESENTAN TODOS LOS ESTADOS POSIBLES DE LOS INDIVIDUOS DE LA POBLACIÓN EN LOS QUE NO HAY PRESENCIA DEL GERMEN PATÓGENO EN EL ORGANISMO Y ADEMÁS EL INDIVIDUO CUENTA CON UN NIVEL DE DEFENSA ψ; ES DE ESPERAR QUE ENTRE MAYOR SEA EL NIVEL DE DEFENSA, MÁS ESTABLE SEA -EN TÉRMINOS GENERALES- LA SITUACIÓN DE LOS INDIVIDUOS QUE SE ENCUENTREN EN DICHOS ESTADOS. EL ORIGEN DEL ESPACIO FASE REPRESENTA EL ESTADO EN EL QUE NO HAY PRESENCIA DE MATERIA INFECCIOSA EN EL ORGANISMO Y EL INDIVIDUO NO CUENTA CON DEFENSAS. CUALQUIER OTRO PUNTO $(\phi,\psi) \in G$ CON $\phi>0$ Y $\psi>0$ REPRESENTA UN ESTADO EN EL QUE EXISTE ϕ CANTIDAD DE GERMEN PATÓGENO EN EL ORGANISMO Y EL INDIVIDUO CUENTA CON UN NIVEL DE DEFENSA ψ.

PARTIENDO DEL HECHO DE QUE EL PROCESO DE CAMBIO DE ESTADO DE LOS INDIVIDUOS ES UN PROCESO DETERMINISTA RESPECTO A LOS

ESTADOS MISMOS, BASTA ENTONCES CONOCER LA DINÁMICA DE LA POBLACIÓN PATÓGENA EN EL ORGANISMO Y LA DINÁMICA DE LAS DEFENSAS DEL PROPIO ORGANISMO, PARA UN CIERTO NÚMERO DE CASOS, PARA OBTENER INFORMACIÓN SOBRE EL CAMPO DE VELOCIDADES ESTACIONARIO. MEDIANTE LA EXTRAPOLACIÓN DE ESTA INFORMACIÓN, PODEMOS CONOCER LOS VALORES DE LA FUNCIÓN f, ESTO ES $f(\phi,\psi,t)$.

SI $X: G \times [0,\infty) \longrightarrow [0,\infty)$ ES LA FUNCIÓN TAL QUE $X(\phi,\psi,t)$ MIDE EL NÚMERO DE INDIVIDUOS DE LA POBLACIÓN QUE AL TIEMPO t SE ENCUENTRAN EN EL ESTADO (ϕ,ψ), POR LA ECUACIÓN DE CONTINUIDAD OBTENEMOS ENTONCES QUE

$$\frac{\partial}{\partial t} X(\phi,\psi,t) + \operatorname{div.}\left[X(\phi,\psi,t)\, f(\phi,\psi,t)\right] = 0 \tag{4.4}$$

ENCONTRAR UNA FUNCIÓN QUE SEA SOLUCIÓN DE LA EC.(4.4) NO ES SENCILLO SI EL CAMPO DE VELOCIDADES f ES ARBITRARIO. DADO QUE EN ÚLTIMA INSTANCIA LO QUE NOS INTERESA ES RESOLVER EL PROBLEMA EPIDEMIOLÓGICO PLANTEADO, Y NO LA EC.(4.4), PODEMOS HACER UNA SERIE DE CONSIDERACIONES MÉDICAS SOBRE DICHO PROBLEMA CON LA BÚSQUEDA DE OBTENER UNA REPRESENTACIÓN FÍSICA Y MATEMÁTICA MENOS COMPLEJA, Y PODAMOS, POR TANTO, ABORDARLA MÁS FÁCILMENTE. MÁS AÚN, HACER TALES CONSIDERACIONES PUEDE AYUDAR A DARLE UN CARÁCTER MÁS REAL AL PROBLEMA QUE ESTAMOS RESOLVIENDO.

SUPONGAMOS, PUES, QUE TENEMOS UNA POBLACIÓN QUE AL MOMENTO $t=0$ ESTÁ CONFORMADA ÚNICAMENTE POR INDIVIDUOS SUSCEPTIBLES; EN ESE MOMENTO INTRODUCIMOS UN GRUPO DE INDIVIDUOS INFECCIOSOS. LOS ESTADOS (ϕ,ψ) QUE PUEDEN OCUPAR LOS INDIVIDUOS DE LA POBLACIÓN ESTÁN DEFINIDOS; ESTO ES, YA CONOCEMOS LA REGIÓN $G \subseteq \mathbb{R}^2$. - SI CONSIDERAMOS QUE SE TRATA DE UNA POBLACIÓN HOMOGÉNEAMENTE -- MEZCLADA, TENEMOS ENTONCES QUE A PARTIR DEL MOMENTO $t=0$ SE INICIA EL PROCESO DE DIFUSIÓN DE LA ENFERMEDAD EN LA POBLACIÓN. -- SIN IMPLICAR GRANDES RESTRICCIONES, SE PUEDE ACEPTAR QUE DICHO PROCESO QUEDA REGIDO POR LA LEY DISCUTIDA EN LOS CAPÍTULOS ANTERIORES EN CUANTO A LA PROPORCIÓN EN QUE SE VAN PRESENTANDO CASOS INFECCIOSOS NUEVOS. RESPECTO A LA PROPORCIÓN EN QUE SE VAN RECUPERANDO LOS INDIVIDUOS INFECCIOSOS NO PUEDE ASEGURARSE LO MISMO; AHORA, EL ESTADO MÉDICO-BIOLÓGICO DE LOS INDIVIDUOS DEBE TOMARSE EN CUENTA PARA DETERMINAR SU RECUPERAMIENTO.

PLANTEADO LO ANTERIOR, SE PRESENTA LA SIGUIENTE DIFICULTAD. SE HA CONSIDERADO AHORA UNA CARACTERIZACIÓN MÁS FINA DE -- LOS ESTADOS MÉDICO-BIOLÓGICOS DE LOS INDIVIDUOS DE LA POBLACIÓN; SIN EMBARGO, NO SE HA ESTABLECIDO UNA DEFINICIÓN FORMAL DE LO - QUE AHORA SIGNIFICA INDIVIDUO SUSCEPTIBLE, INFECCIOSO Y RECUPERADO. EN TANTO ESTO, NO SE CUENTA CON UNA DEFINICIÓN DEL TIPO DE CLASES QUE CONFORMAN LA POBLACIÓN.

EVIDENTEMENTE, SEAN CUALES SEAN LAS CLASES DE INDIVIDUOS QUE CONFORMAN LA POBLACIÓN, SU DEFINICIÓN DEBE ESTAR EN CONCOR-

DANCIA, DE ALGUNA MANERA, CON LOS ESTADOS MÉDICO-BIOLÓGICOS QUE OCUPAN LOS INDIVIDUOS.

A PESAR DE QUE LOS PARÁMETROS DE ESTADO ESTÉN BIEN DEFINIDOS, LA MANERA DE DEFINIR A LAS CLASES QUE CONFORMAN LA POBLACIÓN NO ES ÚNICA. PASEMOS A VER ESTA PROBLEMÁTICA.

PARTAMOS DEL SUPUESTO DE QUE LA POBLACIÓN ES CONSTANTE DURANTE TODO EL PROCESO; A SABER, DE TAMAÑO N.

UNA DE LAS CLASES DE INDIVIDUOS QUE NECESARIAMENTE TENEMOS QUE CONSIDERAR ES LA CLASE DE LOS INDIVIDUOS SUSCEPTIBLES DE ADQUIRIR LA ENFERMEDAD. ESTA CLASE LA PODEMOS DEFINIR, POR EJEMPLO, COMO EL CONJUNTO DE INDIVIDUOS QUE SE ENCUENTRAN EN UN ESTADO DE LA FORMA $(0,\psi)$. SI DENOTAMOS POR $S_1(\psi,t)$ EL NÚMERO DE INDIVIDUOS SUSCEPTIBLES QUE AL MOMENTO t SE ENCUENTRAN EN EL ESTADO ψ, TENEMOS QUE

$$S_1(\psi,t) = X(0,\psi,t) \tag{4.5}$$

SI QUEREMOS OBTENER EL NÚMERO TOTAL DE INDIVIDUOS SUSCEPTIBLES QUE EXISTEN AL MOMENTO t, INDEPENDIENTEMENTE DE SU NIVEL DE DEFENSA, DENOTADO POR $S_1^*(t)$, TENEMOS QUE

$$S_1^*(t) = \int_0^{\psi_{máx}} S_1(\psi,t)\,d\psi$$

$$= \int_0^{\psi_{máx}} X(0,\psi,t)\,d\psi \tag{4.6}$$

DONDE $\psi_{máx}$ ES EL NIVEL DE DEFENSA MÁXIMO QUE PUEDE ADQUIRIR UN INDIVIDUO DE LA POBLACIÓN.

ESTA DEFINICIÓN DE INDIVIDUOS SUSCEPTIBLES TIENE UNA LIMITACIÓN. HEMOS EXIGIDO QUE EL ESTADO QUE CARACTERICE LA SITUACIÓN DE LOS INDIVIDUOS SUSCEPTIBLES SEA DE LA FORMA $(0,\psi)$; ESTO ES, $\phi=0$. DICHA CONDICIÓN FRECUENTEMENTE ES IMPOSIBLE DE SATISFACER.

PODEMOS ESTABLECER UNA SEGUNDA DEFINICIÓN PARA SUPERAR ESTA LIMITACIÓN. LA CLASE DE LOS INDIVIDUOS SUSCEPTIBLES QUEDARÁ INTEGRADA POR EL CONJUNTO DE PERSONAS QUE SE ENCUENTRAN EN UN ESTADO DE LA FORMA (ϕ,ψ) TAL QUE $0 \leqslant \phi \leqslant \varepsilon$, CON $\varepsilon > 0$. EL VALOR DE ε SE TOMARÁ FIJO PARA CADA ENFERMEDAD, SU VALOR DEPENDERÁ DE LA ENFERMEDAD QUE EN CONCRETO SE CONSIDERE. SI $S_2(\psi,t)$ DENOTA EL NÚMERO DE INDIVIDUOS SUSCEPTIBLES QUE AL TIEMPO t SE ENCUENTRAN EN EL ESTADO (ϕ,ψ) CON $0 \leqslant \phi \leqslant \varepsilon$, TENEMOS QUE

$$S_2(\psi,t) = \int_0^{\varepsilon} X(\phi,\psi,t)\,d\phi \tag{4.7}$$

SI SE QUIERE OBTENER EL NÚMERO TOTAL DE INDIVIDUOS SUSCEPTIBLES QUE EXISTEN AL MOMENTO t, INDEPENDIENTEMENTE DE SU NI

VEL DE DEFENSA ψ, DENOTADO POR $S_2^*(t)$, TENEMOS QUE

$$S_2^*(t) = \int_0^{\psi_{máx}} S_2(\psi,t)\, d\psi$$

$$= \int_0^{\psi_{máx}} \int_0^{\varepsilon} X(\phi,\psi,t)\, d\phi\, d\psi \tag{4.8}$$

DONDE $\psi_{máx}$ TIENE EL MISMO SIGNIFICADO QUE ANTES.

POR RAZONES PRÁCTICAS, CONVIENE TRABAJAR CON ESTA SEGUNDA DEFINICIÓN.

ASÍ, $S(\psi,t)$ MEDIRÁ EL NÚMERO DE INDIVIDUOS SUSCEPTIBLES QUE AL TIEMPO t SE ENCUENTRAN EN EL ESTADO (ϕ,ψ) CON $0 \leqslant \phi \leqslant \varepsilon$, POR TANTO

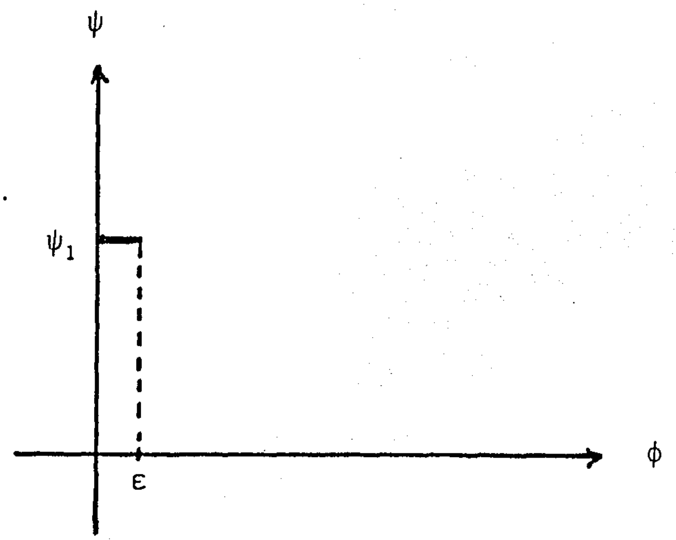
$$S(\psi,t) = \int_0^{\varepsilon} X(\phi,\psi,t)\, d\phi \tag{4.9}$$

ADICIONALMENTE, $S^*(t)$ MEDIRÁ EL NÚMERO DE INDIVIDUOS SUSCEPTIBLES EXISTENTES AL TIEMPO t, INDEPENDIENTEMENTE DE SU NIVEL DE DEFENSA ψ, ASÍ QUE

$$S^*(t) = \int_0^{\psi_{máx}} S(\psi,t)\, d\psi$$

$$= \int_0^{\psi_{máx}} \int_0^{\varepsilon} X(\phi,\psi,t)\, d\phi\, d\psi \tag{4.10}$$

Así, con esta definición tenemos que dos individuos susceptibles están en el mismo estado médico-biológico sí y sólo si tienen el mismo nivel de defensa ψ.(Fig.51)



TODOS LOS PUNTOS DE LA FORMA (ϕ,ψ_1) con $\phi < \varepsilon$ Y ψ_1 CONSTANTE REPRESENTAN EL MISMO ESTADO DE SUSCEPTIBILIDAD.

Figura 51

Consideraremos que, conforme transcurre el tiempo, no hay transiciones de uno a otro estado de susceptibilidad. Esto es, no se puede pasar de un estado (ϕ_1,ψ_1) a un estado (ϕ_2,ψ_2) con $\psi_1 \neq \psi_2$ si ϕ_1 y ϕ_2 son menores o iguales que ε. Dicho en lenguaje nuevo, ningún individuo que se encuentre en el estado de susceptibilidad ψ_1 puede pasar al estado de susceptibilidad ψ_2.

El resto de los individuos de la población conforman las demás clases; sus estados médico-biológicos son representados por las parejas (ϕ,ψ) con $\phi > \varepsilon$. Entre éstos, hay quienes padecen

LA ENFERMEDAD; EN TANTO ESTO, PODEMOS CONSIDERARLOS COMO INDIVIDUOS INFECCIOSOS. TAMBIÉN ESTÁN LOS QUE HAN SUPERADO LA ENFERMEDAD, ADQUIRIENDO INMUNIDAD PERMANENTE POR HABER PADECIDO DICHA ENFERMEDAD; EN TANTO ESTO, PODEMOS CONSIDERARLOS COMO INDIVIDUOS RECUPERADOS. POR EL MOMENTO ES DIFÍCIL ESTABLECER UNA DEFINICIÓN DE ESTOS INDIVIDUOS EXPLÍCITAMENTE EN TÉRMINOS DE SU ESTADO MÉDICO-BIOLÓGICO DADO POR (ϕ,ψ).

HASTA AQUÍ SÓLO HEMOS DEFINIDO UNA CLASE DE INDIVIDUOS EN TÉRMINOS DE SU ESTADO MÉDICO-BIOLÓGICO; A SABER, LA CLASE DE LOS INDIVIDUOS SUSCEPTIBLES. LA CLASE DE INDIVIDUOS QUE AHORA CONSIDERAMOS ESTÁ CONSTITUÍDA POR TODOS LOS INDIVIDUOS DE LA POBLACIÓN QUE NO SON INDIVIDUOS SUSCEPTIBLES; ESTO ES, LOS INDIVIDUOS QUE SE ENCUENTRAN EN UN ESTADO DE LA FORMA (ϕ,ψ) CON $\phi>\varepsilon$. ESTOS INDIVIDUOS CONFORMARÁN LA CLASE DE LOS INDIVIDUOS QUE HAN SUFRIDO EL ATAQUE INFECCIOSO. ASÍ, ESTA NUEVA CLASE, DENOTADA POR Y, COMPRENDE TANTO A LOS INDIVIDUOS QUE PADECEN LA ENFERMEDAD (INDIVIDUOS INFECCIOSOS) COMO A LOS INDIVIDUOS QUE HAN LOGRADO RECUPERARSE (INDIVIDUOS RECUPERADOS).

CUALQUIER INDIVIDUO DE ESTA NUEVA CLASE TIENE LA CARACTERÍSTICA DE QUE FUE INFECTADO EN ALGÚN MOMENTO, INDEPENDIENTEMENTE DE QUE CONTINÚE PADECIENDO LA ENFERMEDAD O YA LA HAYA SUPERADO. ASÍ, SI AL MOMENTO t NOS FIJAMOS EN CUALQUIER INDIVIDUO DE ESTE TIPO, SABEMOS QUE FUE INFECTADO EN ALGÚN MOMENTO $t-\tau$. EVIDENTEMENTE, τ ES EL TIEMPO TRANSCURRIDO HASTA EL MOMENTO t A --

PARTIR DEL MOMENTO DE HABER SIDO INFECTADO. HAY QUE TENER PRESENTE QUE τ NO TIENE POR QUÉ COINCIDIR CON EL TIEMPO QUE SE TIENE PADECIENDO LA ENFERMEDAD; ESTA COINCIDENCIA SÓLO SUCEDERÁ CUANDO EL INDIVIDUO CONSIDERADO CONTINÚE COMO INFECCIOSO AL MOMENTO t.

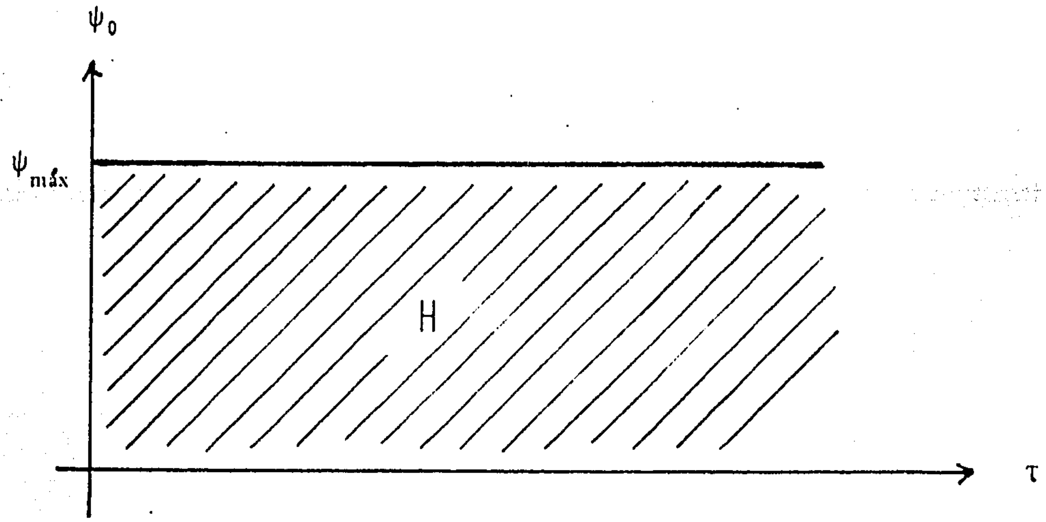
UN DATO ADICIONAL QUE CONVIENE CONSIDERAR ES EL NIVEL DE DEFENSA EN EL QUE SE ENCONTRABA EL INDIVIDUO AL MOMENTO DE SER INFECTADO. DICHO NIVEL DE DEFENSA LO DENOTAREMOS POR ψ_0.

EN RESUMEN, TODO INDIVIDUO QUE NO PERTENECE A LA CLASE DE LOS INDIVIDUOS SUSCEPTIBLES NECESARIAMENTE PERTENECE A LA CLASE DE LOS INDIVIDUOS QUE HAN SUFRIDO EL ATAQUE INFECCIOSO. CADA UNO DE ESTOS INDIVIDUOS TIENE ASOCIADO UN NUEVO ESTADO, DADO POR LA PAREJA (τ,ψ_0).

EN CONCLUSIÓN, HEMOS CLASIFICADO A LOS INDIVIDUOS EN DOS CLASES, EN TÉRMINOS DE SU ESTADO MÉDICO-BIOLÓGICO (ϕ,ψ). SI UN INDIVIDUO DE LA POBLACIÓN SE ENCUENTRA EN UN ESTADO DE LA FORMA (ϕ,ψ) CON $0\leqslant\phi\leqslant\varepsilon$, ENTONCES TIENE ASOCIADO UN NUEVO ESTADO, A SABER, EL ESTADO ψ; EN ESTE CASO SE ENCUENTRAN TODOS LOS INDIVIDUOS SUSCEPTIBLES. SI EL INDIVIDUO DE LA POBLACIÓN SE ENCUENTRA EN UN ESTADO DE LA FORMA (ϕ,ψ) CON $\phi>\varepsilon$, ENTONCES TIENE ASOCIADO UN NUEVO ESTADO, A SABER, EL ESTADO (τ,ψ_0); EN TAL SITUACIÓN SE ENCUENTRAN TODOS LOS INDIVIDUOS QUE HAN SUFRIDO EL ATAQUE INFECCIOSO.

ESTUDIAREMOS EL PROCESO DE DIFUSIÓN DE LA ENFERMEDAD A PARTIR DE LO QUE SUCEDE CON EL NÚMERO DE INDIVIDUOS QUE INTEGRAN CADA UNA DE ESTAS DOS CLASES DEFINIDAS, DENOTADAS POR S Y Y, RESPECTIVAMENTE.

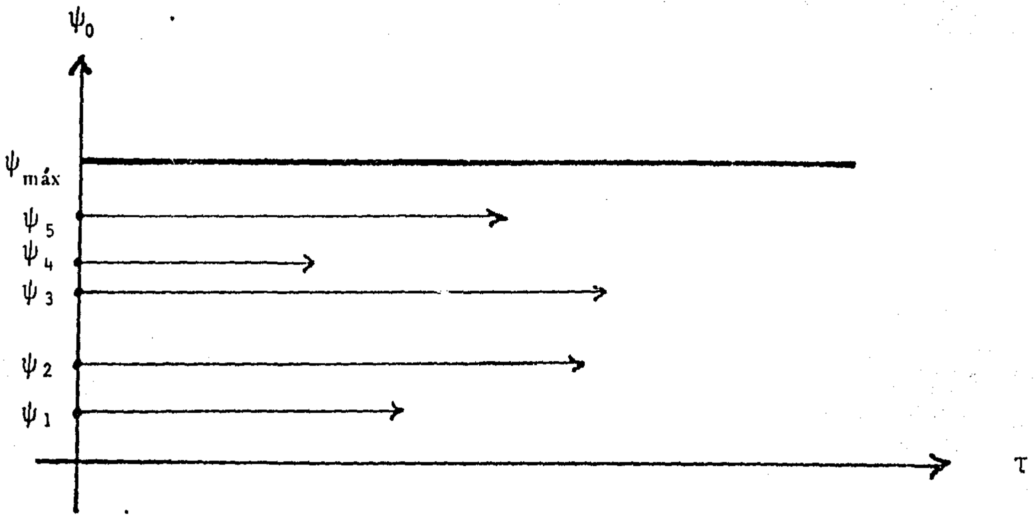
TOMEMOS PRIMERO EL ESPACIO FASE τ,ψ_0. LA REGIÓN H DE ESTE ESPACIO SERÁ EL CONJUNTO DE TODOS LOS ESTADOS POSIBLES QUE PUEDEN OCUPAR LOS INDIVIDUOS DE LA POBLACIÓN QUE HAN SIDO INFECTADOS. ASÍ, CUALQUIER INDIVIDUO DE LA CLASE Y TIENE ASOCIADA UNA PAREJA $(\tau,\psi)\in H$; TAMBIÉN DE MANERA INVERSA, CUALQUIER PUNTO $(\tau,\psi)\in H$ REPRESENTA UN POSIBLE ESTADO DE LOS INDIVIDUOS DE DICHA CLASE. COMO ψ_0 ES TAL QUE $0\leqslant\psi_0\leqslant\psi_{máx}$ Y τ ES TAL QUE $0\leqslant\tau\leqslant\infty$, LA REGIÓN $H\subseteq\mathbb{R}^2$ ES COMO LA QUE SE MUESTRA EN LA FIG.52.



LA REGION H EN EL ESPACIO FASE τ,ψ_0 REPRESENTA EL CONJUNTO DE ESTADOS POSIBLES DE TODOS LOS INDIVIDUOS DE LA CLASE DE LOS QUE HAN SUFRIDO EL ATAQUE INFECCIOSO.

FIGURA 52

CONFORME TRANSCURRE EL TIEMPO t LOS INDIVIDUOS DE LA CLASE Y VAN OCUPANDO DISTINTOS ESTADOS (τ,ψ_0); POR EL SIGNIFICADO DE ψ_0, PODEMOS ASEGURAR QUE ψ_0 PERMANECE CONSTANTE EN EL TIEMPO PARA CADA INDIVIDUO. ASÍ, EL CURSO DE UN INDIVIDUO DE LA CLASE Y EN EL ESPACIO FASE τ,ψ_0 QUEDA REPRESENTADO POR EL DIAGRAMA DE LA FIG.53.



CURSO QUE SIGUEN LOS INDIVIDUOS DE LA CLASE DE LOS QUE HAN SUFRIDO EL ATAQUE INFECCIOSO EN EL ESPACIO FASE τ,ψ_0 CONFORME TRANSCURRE EL TIEMPO t.

FIGURA 53

SI AHORA CONSIDERAMOS EL PROCESO GLOBAL DEL CURSO QUE SIGUEN LOS INDIVIDUOS DE LA POBLACIÓN QUE HAN SIDO INFECTADOS EN EL ESPACIO FASE τ,ψ_0, CONFORME EL TIEMPO TRANSCURRE, SE OBTIENE UN FLUIDO EN LA REGIÓN H, EN EL QUE LA TRAYECTORIA DE LAS PARTÍCULAS REPRESENTA EL CURSO QUE SIGUEN LOS INDIVIDUOS QUE HAN SIDO INFECTADOS.

PUESTO QUE

$$\frac{\partial \tau}{\partial t}(t) = 1 \quad \forall\ t \in [0,\infty) \tag{4.11}$$

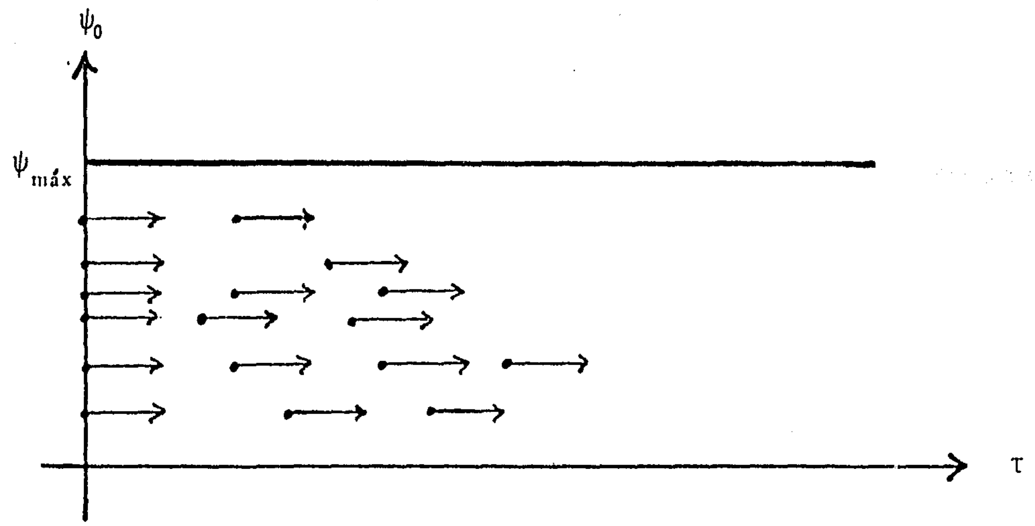
Y

$$\frac{\partial \psi_0}{\partial t}(t) = 0 \quad \forall\ t \in [0,\infty) \tag{4.12}$$

TENEMOS QUE EL CAMPO DE VELOCIDADES $V: H \times [0,\infty) \longrightarrow H$ ESTÁ DADA -- POR

$$V(\tau,\psi_0,t) = (1,0) \tag{4.13}$$

POR TANTO, EL CAMPO DE VELOCIDADES OBTENIDO ES PARALELO Y UNITARIO. (FIG. 54).



CAMPO DE VELOCIDADES PARALELO Y UNITARIO ASOCIADO AL FLUIDO EN EL ESPACIO FASE τ,ψ_0 QUE REPRESENTA LA DINAMICA DE LOS INDIVIDUOS QUE HAN SUFRIDO EL ATAQUE INFECCIOSO.

FIGURA 54

SEA $Y: H \times [0,\infty) \longrightarrow [0,\infty)$ LA FUNCIÓN TAL QUE $Y(\tau,\psi_0,t)$ MIDE EL NÚMERO DE INDIVIDUOS INFECCIOSOS DE LA CLASE Y QUE AL TIEMPO t EXISTEN EN EL ESTADO (τ,ψ_0); ESTO ES, EL NÚMERO DE INDIVIDUOS QUE EXISTEN AL TIEMPO t Y QUE FUERON INFECTADOS EN EL MOMENTO $t-\tau$, TENIENDO AL MOMENTO DE INICIAR SU INFECCIÓN UN NIVEL DE DEFENSA ψ_0. PODEMOS INTERPRETAR ESTA FUNCIÓN COMO LA FUNCIÓN DE DENSIDAD DEL FLUIDO EN LA REGIÓN H.

SI CONSIDERAMOS QUE LA POBLACIÓN ES CERRADA, LA FUNCIÓN Y EN EL PUNTO (τ,ψ_0,t) MIDE SIMPLEMENTE EL NÚMERO DE INDIVIDUOS QUE INICIARON SU INFECCIÓN EN EL MOMENTO $t-\tau$, ENCONTRÁNDOSE CON UN NIVEL DE DEFENSA ψ_0 AL MOMENTO DE INICIAR SU PROCESO INFECCIOSO. BAJO TAL CONDICIÓN, TENEMOS QUE

$$Y(\tau,\psi_0,t) = Y(\tau+h,\psi_0,t+h) \quad \forall\ h \in [0,\infty) \tag{4.14}$$

ESTO ES, LA FUNCIÓN Y DEFINIDA PUEDE CONSIDERARSE COMO FUNCIÓN DE τ,ψ_0 Y t, O COMO FUNCIÓN DE ψ_0 Y $t-\tau$.

POR LA ECUACIÓN DE CONTINUIDAD, TENEMOS QUE

$$\frac{\partial Y}{\partial t}(\tau,\psi_0,t) + \operatorname{div}.\left[Y(\tau,\psi_0,t)V(\tau,\psi_0,t)\right] = 0 \tag{4.15}$$

TOMANDO EN CUENTA LA EC.(4.13), OBTENEMOS DE LA EC.(4.15)

$$\frac{\partial Y}{\partial t}(\tau,\psi_0,t) + \frac{\partial Y}{\partial \tau}(\tau,\psi_0,t) = 0 \qquad (4.16)$$

Esta ecuación es bastante más sencilla que la Ec.(4.4).

Vale la pena repasar lo que hemos hecho. Originalmente, el proceso global del curso médico-biológico de los individuos estaba representado por un fluido en el espacio fase ϕ,ψ, con función de densidad X y campo de velocidades f. En dicho espacio fase la ecuación de continuidad obtenida es demasiado compleja, puesto que el campo de velocidades puede ser de lo más variado. Al establecer la clasificación de los individuos de la población en individuos susceptibles e individuos que han sufrido el ataque infeccioso, hemos introducido dos nuevos fluidos, cuya dinámica representa el proceso que siguen los individuos de la población mientras éstos no pasen de la primera de estas clases a la segunda. En particular, la función que mide el número de individuos de la clase Y satisface la Ec.(4.16).

Para poder representar con estos dos últimos fluidos el proceso global de difusión de la enfermedad en la población, tenemos que considerar la transición de estado que se da cuando un individuo de la clase S pasa a formar parte de la clase Y. Pasemos a ello.

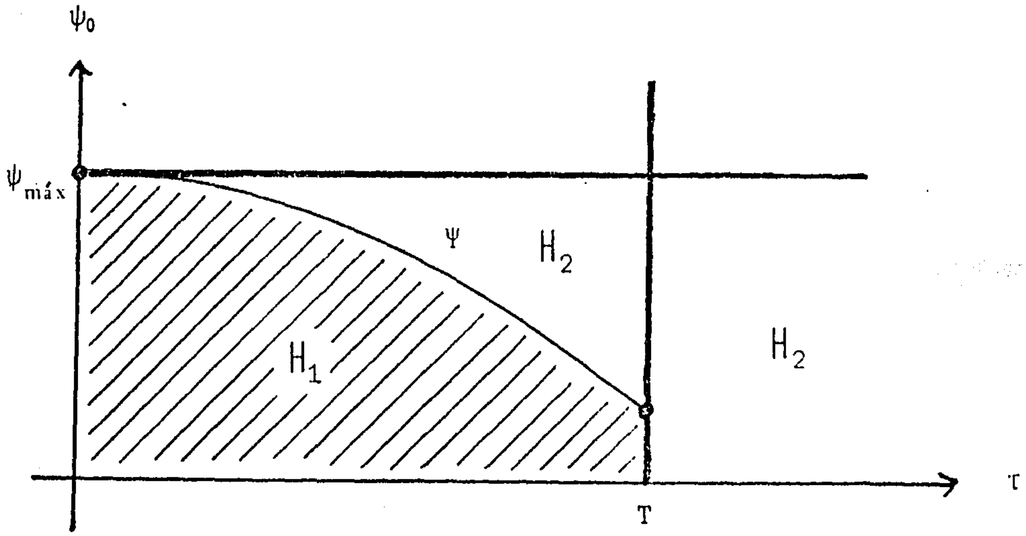
Sabemos que cualquier individuo de la clase Y necesaria-

MENTE ES UN INDIVIDUO INFECCIOSO O ES UN INDIVIDUO QUE EN ALGÚN MOMENTO PADECIÓ LA ENFERMEDAD, PERO YA LA HA SUPERADO; NO EXISTE NINGUNA OTRA POSIBILIDAD. ASIMISMO, SABEMOS QUE EL ESTADO DE CUALQUIER INDIVIDUO DE LA CLASE Y ESTÁ REPRESENTADO POR UN PUNTO (τ,ψ_0) EN LA REGIÓN H. SE PRESENTA EL SIGUIENTE PROBLEMA ¿QUÉ PUNTOS (τ,ψ_0) DE LA REGIÓN H REPRESENTAN LOS ESTADOS DE LOS INDIVIDUOS INFECCIOSOS Y QUÉ PUNTOS DE ESTA MISMA REGIÓN REPRESENTAN LOS ESTADOS DE LOS INDIVIDUOS RECUPERADOS?

CONSIDERANDO QUE LA RECUPERACIÓN DE LA ENFERMEDAD DEPENDE PRECISAMENTE DEL TIEMPO τ Y DEL VALOR ψ_0, PODEMOS SUPONER QUE LA REGIÓN H ESTÁ CONSTITUIDA POR DOS SUBREGIONES. UNA DE ESTAS SUBREGIONES ESTÁ CONFORMADA POR TODOS LOS PUNTOS (τ,ψ_0) QUE REPRESENTAN EL ESTADO DE LOS INDIVIDUOS DE LA CLASE Y QUE CONTINÚAN COMO INFECCIOSOS. LA OTRA SUBREGIÓN ESTÁ CONFORMADA POR LOS PUNTOS (τ,ψ_0) QUE REPRESENTAN EL ESTADO DE LOS INDIVIDUOS DE LA CLASE Y QUE YA HAN SUPERADO LA ENFERMEDAD; ESTO ES, SE ENCUENTRAN RECUPERADOS. TALES SUBREGIONES LAS DENOTAREMOS POR H_1 Y H_2, RESPECTIVAMENTE.

PODEMOS SUPONER QUE ESTAS DOS SUBREGIONES ESTÁN SEPARADAS POR UNA CURVA CONTENIDA EN LA REGIÓN H. SIN PÉRDIDA DE GENERALIDAD, SUPONDREMOS QUE DICHA CURVA PUEDE VERSE COMO LA GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN DE τ, ESTO ES, $\Psi = \Psi(\tau)$; Y QUE DICHA CURVA ESTÁ CONTENIDA EN LA REGIÓN H_1. SI A LA VEZ, SUPONEMOS QUE EL TIEMPO MÁXIMO DE DURACIÓN COMO INFECCIOSO ES T, PODEMOS ENTON-

CES ASEGURAR QUE EL CONJUNTO DE PUNTOS (τ, ψ_0) QUE SE ENCUENTREN EN LA REGIÓN QUE ESTÁ ACOTADA SUPERIORMENTE POR LA GRAFICA DE LA FUNCIÓN $\Psi(\tau)$, INFERIORMENTE POR LA RECTA $\psi_0 = 0$, POR LA IZQUIERDA POR LA RECTA $\tau = 0$ Y POR LA DERECHA POR LA RECTA $\tau = T$ REPRESENTA TODOS LOS ESTADOS INFECCIOSOS. QUEDA, ASÍ, BIEN DETERMINADA LA REGIÓN H_1. CUALQUIER PUNTO FUERA DE ESTA SUBREGIÓN H_1, CONTENIDO EN LA REGIÓN H, REPRESENTARÁ, POR TANTO, EL ESTADO DE UN INDIVIDUO RECUPERADO. QUEDA ASÍ, TAMBIÉN, BIEN DETERMINADA LA REGIÓN H_2.(FIG.55).



LAS REGIONES H_1 Y H_2 REPRESENTAN EL CONJUNTO DE ESTADOS POSIBLES EN EL ESPACIO FASE τ, ψ_0 DE LOS INDIVIDUOS DE LA CLASE DE LOS INFECCIOSOS Y DE LA DE LOS RECUPERADOS, RESPECTIVAMENTE.

FIGURA 55

CONTAMOS, ASÍ, CON UNA DEFINICIÓN PRECISA DE LOS INDIVIDUOS INFECCIOSOS Y DE LOS INDIVIDUOS RECUPERADOS.

PODEMOS, AHORA, PASAR A ENCONTRAR EL NÚMERO TOTAL DE INDIVIDUOS INFECCIOSOS QUE EXISTEN AL MOMENTO t. SI DENOTAMOS POR I A LA FUNCIÓN QUE MIDE EL NÚEMRO TOTAL DE INDIVIDUOS INFECCIOSOS EXISTENTES AL TIEMPO t, TENEMOS ENTONCES QUE

$$I(t) = \int_0^T \int_0^{\Psi(\tau)} Y(\tau, \psi_0, t)\, d\psi_0\, d\tau \qquad (4.16)$$

SABEMOS QUE LA DENSIDAD DEL FLUIDO QUE REPRESENTA A LOS INDIVIDUOS SUSCEPTIBLES ESTÁ DADA POR $S(\psi,t)$. DADO QUE NO ES POSIBLE LA TRANSICIÓN DE ESTADO ENTRE LOS PROPIOS INDIVIDUOS SUSCEPTIBLES, TENEMOS QUE LA VARIACIÓN DE LA FUNCIÓN DE DENSIDAD S SE DEBE ÚNICAMENTE A LAS TRANSICIONES DE ESTADO DE ESTE FLUIDO AL FLUIDO DE LOS INDIVIDUOS QUE HAN SUFRIDO EL ATAQUE INFECCIOSO; ESTO ES, LA VARIACIÓN DE LA FUNCIÓN S SE DEBE ÚNICAMENTE A LOS INDIVIDUOS QUE ABANDONAN LA CLASE S PARA PASAR A FORMAR PARTE DE LA CLASE I.

TENEMOS, POR TANTO, QUE LA RAZÓN DE CAMBIO INSTANTÁNEO DE LA FUNCIÓN S RESPECTO AL TIEMPO t EN CADA PUNTO (ψ,t) ES PROPORCIONAL AL PRODUCTO DEL NÚMERO DE INDIVIDUOS SUSCEPTIBLES QUE SE ENCUENTRAN EN DICHO ESTADO POR EL NÚMERO TOTAL DE INDIVIDUOS INFECCIOSOS EXISTENTES EN ESE MOMENTO, ASÍ

$$\frac{\partial S}{\partial t}(\psi,t) = -\alpha\, S(\psi,t)\, I(t)$$

$$= -\alpha\, S(\psi,t)\, I(t) \int_0^T \int_0^{\Psi(\tau)} Y(\tau,\psi_0,t)\, d\psi_0\, d\tau \tag{4.17}$$

ADICIONALMENTE, PUESTO QUE $Y(0,\psi_0,t)$ MIDE EL NÚMERO DE INFECCIONES FRESCAS AL TIEMPO t CON UN NIVEL DE DEFENSA ψ_0, TENEMOS QUE

$$Y(0,\psi_0,t) = -\frac{\partial S}{\partial t}(\psi_0,t) \tag{4.18}$$

POR LAS ECS. (4.17) Y (4.18), TENEMOS

$$Y(0,\psi_0,t) = \alpha\, S(\psi,t) \int_0^T \int_0^{\Psi(\tau)} Y(\tau,\psi_0,t)\, d\psi_0\, d\tau \tag{4.19}$$

RESUMIENDO, HEMOS OBTENIDO UN SISTEMA DE TRES ECUACIONES INTEGRODIFERENCIALES QUE GOBIERNAN EL PROCESO INFECCIOSO EN LA POBLACIÓN; A SABER

$$\frac{\partial Y}{\partial t}(\tau,\psi_0,t) + \frac{\partial Y}{\partial \tau}(\tau,\psi_0,t) = 0 \qquad (4.15)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t}(\psi,t) = -\alpha\, S(\psi,t)\int_0^T\int_0^{\Psi(\tau)} Y(\tau,\psi_0,t)\, d\psi_0\, d\tau \qquad (4.17)$$

$$Y(0,\psi_0,t) = \alpha\, S(\psi,t)\int_0^T\int_0^{\Psi(\tau)} Y(\tau,\psi_0,t)\, d\psi_0\, d\tau \qquad (4.19)$$

CON $0 \leqslant \psi_0 \leqslant \psi_{máx}$ Y $(\tau,\psi_0) \in H$.

RECORDANDO EL SIGNIFICADO DE LAS FUNCIONES S, Y, Ψ Y -- CONSIDERANDO QUE $0 \leqslant \psi_0 \leqslant \psi_{máx}$, PODEMOS REESCRIBIR, SIN PÉRDIDA DE GENERALIDAD, ESTE SISTEMA DE ECUACIONES COMO SIGUE

$$\frac{\partial Y}{\partial t}(\tau,\psi,t) + \frac{\partial Y}{\partial \tau}(\tau,\psi,t) = 0 \qquad (4.20)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t}(\psi,t) = -\alpha\, S(\psi,t)\int_0^T\int_0^{\Psi(\tau)} Y(\tau,\psi,t)\, d\psi\, d\tau \qquad (4.21)$$

$$Y(0,\psi,t) = \alpha\, S(\psi,t)\int_0^T\int_0^{\Psi(\tau)} Y(\tau,\psi,t)\, d\psi\, d\tau \qquad (4.22)$$

CON $0 \leqslant \psi \leqslant \psi_{máx}$ Y $0 \leqslant \tau \leqslant T$.

SABEMOS QUE PARA VALORES $0 \leqslant \tau \leqslant T$, LA INTEGRAL

$$\int_0^{\Psi(\tau)} Y(\tau,\psi,t)\, d\psi \tag{4.23}$$

MIDE EL NÚMERO DE INDIVIDUOS INFECCIOSOS QUE EXISTEN AL MOMENTO t Y QUE FUERON INFECTADOS HACE τ TIEMPO.

DE MANERA ANÁLOGA, LA INTEGRAL

$$\int_0^{\psi_{máx}} Y(\tau,\psi,t)\, d\psi \tag{4.24}$$

MIDE EL NÚMERO DE INDIVIDUOS QUE EXISTEN AL TIEMPO t HABIENDO SIDO INFECTADOS HACE τ TIEMPO; ENTRE ELLOS, HAY QUIENES AL TIEMPO t PUDIERON YA HABER SUPERADO LA ENFERMEDAD, ENCONTRARSE RECUPERADOS.

SUPONDREMOS QUE LA DISTRIBUCIÓN DE LOS INDIVIDUOS SUSCEPTIBLES RESPECTO A ψ AL TIEMPO $t=0$ ESTÁ DADA POR LA FUNCIÓN $g:[0,\psi_{máx}] \longrightarrow \mathbb{R}$ TAL QUE

$$g(\psi_1) = \frac{\int_0^{\psi_1} S(\psi,0)\, d\psi}{\int_0^{\psi_{máx}} S(\psi,0)\, d\psi} \tag{4.25}$$

SUPONIENDO, EN BASE A LO ANTERIOR, QUE LA RELACIÓN QUE

GUARDAN, AL TIEMPO t ARBITRARIO, EL NÚMERO DE PERSONAS INFECTADAS EN EL MOMENTO $t-\tau$ ENCONTRÁNDOSE EN EL INSTANTE DE INICIAR SU INFECCIÓN EN UN NIVEL DE DEFENSA ENTRE 0 Y ψ_1 CON EL NÚMERO TOTAL DE INDIVIDUOS QUE FUERON INFECTADOS EN ESE MISMO MOMENTO ES IGUAL A LA RELACIÓN QUE GUARDAN EL NÚMERO DE INDIVIDUOS SUSCEPTIBLES EXISTENTES AL TIEMPO $t = 0$ CONTANDO CON UN NIVEL DE DEFENSA ENTRE 0 Y ψ_1 CON EL NÚMERO TOTAL DE INDIVIDUOS SUSCEPTIBLES INICIAL, PODEMOS ASEGURAR, POR TANTO, QUE

$$\frac{\displaystyle\int_0^{\Psi(\tau)} Y(\tau,\psi,t)\ d\psi}{\displaystyle\int_0^{\psi_{máx}} Y(\tau,\psi,t)\ d\psi} = g(\Psi(\tau)) \tag{4.26}$$

TOMANDO A Y^* COMO LA FUNCIÓN TAL QUE $Y^*(\tau,t)$ MIDA EL NÚMERO DE INDIVIDUOS QUE EXISTEN AL MOMENTO t Y QUE FUERON INFECTADOS EN EL MOMENTO $t-\tau$; ESTO ES, BAJO LA HIPÓTESIS DE POBLACIÓN CERRADA, EL NÚEMRO TOTAL DE INDIVIDUOS QUE FUERON INFECTADOS EN EL MOMENTO $t-\tau$, TENEMOS

$$Y^*(\tau,t) = \int_0^{\psi_{máx}} Y(\tau,\psi,t)\ d\psi \tag{4.27}$$

POR TANTO, POR LAS ECS. (4.26) Y (4.27), TENEMOS

$$\int_0^{\Psi(\tau)} Y(\tau,\psi,t)\, d\psi = Y^*(\tau,t)\; g^*(\tau) \qquad (4.28)$$

DONDE

$$g^* = g \circ \Psi$$

POR OTRO LADO, A PARTIR DE LA EC.(4.20), PODEMOS ESTA - BLECER QUE

$$\int_0^{\psi_{máx}} \frac{\partial Y}{\partial t}(\tau,\psi,t)\, d\psi + \int_0^{\psi_{máx}} \frac{\partial Y}{\partial \tau}(\tau,\psi,t)\, d\psi = 0 \qquad (4.29)$$

CONSIDERANDO EL SISTEMA DE ECUACIONES DADO POR LAS -- ECS.(4.20),(4.21) Y (4.22) Y HACIENDO USO DE LAS ECS.(4.27), -- (4.28) Y (4.29), LLEGAMOS A

$$\frac{\partial Y^*}{\partial t}(\tau,t) + \frac{\partial Y^*}{\partial \tau}(\tau,t) = 0 \qquad (4.30)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t}(\psi,t) = -\alpha\, S(\psi,t)\int_0^T Y^*(\tau,t)\; g^*(\tau)\, d\tau \qquad (4.31)$$

$$Y(0,\psi,t) = \alpha\, S(\psi,t)\int_0^T Y^*(\tau,t)\; g^*(\tau)\, d\tau \qquad (4.32)$$

TOMANDO A S^* COMO LA FUNCIÓN QUE MIDE EL NÚMERO TOTAL DE INDIVIDUOS SUSCEPTIBLES EXISTENTES AL TIEMPO t, TENEMOS

$$S^*(t) = \int_0^T S(\psi,t)\, d\psi \tag{4.33}$$

ASÍ, REALIZANDO LA INTEGRACIÓN DE 0 A $\psi_{máx}$ RESPECTO A ψ EN LAS ECS. (4.31) Y (4.32), OBTENEMOS EL SISTEMA

$$\frac{\partial Y^*}{\partial t}(\tau,t) + \frac{\partial Y^*}{\partial \tau}(\tau,t) = 0 \tag{4.30}$$

$$\frac{dS^*}{dt}(t) = -\alpha\, S^*(t) \int_0^T Y^*(\tau,t)\, g^*(\tau)\, d\tau \tag{4.34}$$

$$Y^*(0,t) = \alpha\, S^*(t) \int_0^T Y^*(\tau,t)\, g^*(\tau)\, d\tau \tag{4.35}$$

CON LAS CONDICIONES INICIALES SIGUIENTES

$$S^*(t) = S_0^* \tag{4.36}$$

$$Y^*(\tau,0) = a(\tau) \tag{4.37}$$

$$0 \leqslant \tau \leqslant T \tag{4.38}$$

DONDE a ES UNA FUNCIÓN CONOCIDA, LA CUAL -POR DEFINICIÓN- MEDIRÁ EL NÚMERO DE INDIVIDUOS EXISTENTES AL TIEMPO $t=0$ QUE INICIARON SU PROCESO INFECCIOSO HACE τ TIEMPO.

EL CONOCIMIENTO DE LAS FUNCIONES S^* Y Y^* SOLUCIONES DEL SISTEMA DE ECUACIONES DADO POR LAS ECS. (4.30), (4.34) Y (4.35) NOS AYUDA A OBTENER UNA BUENA IDEA DE LA DINÁMICA DEL PROCESO INFECCIOSO EN LA POBLACIÓN. SIN EMBARGO, A PESAR DE QUE DICHO SISTEMA DE ECUACIONES INTEGRODIFERENCIAL ES BASTANTE MÁS SENCILLO QUE EL SISTEMA DADO POR LAS ECS.(4.20), (4.21) Y (4.22), SIGUE SIENDO COMPLEJO Y ES DIFICIL OBTENER UNA SOLUCIÓN ANALÍTICA AL PROBLEMA.

NO OBSTANTE, ESTAMOS AHORA EN UNA MEJOR SITUACIÓN. CONSIDERANDO, DE NUEVO, QUE LO QUE EN ÚLTIMA INSTANCIA NOS INTERESA ES OBTENER UNA IDEA DE LA DINÁMICA DE PROCESO EPIDÉMICO EN LA POBLACIÓN, PODEMOS PASAR A ABORDAR LA PROBLEMÁTICA QUE ESTAMOS DISCUTIENDO BAJO LA FORMA DE UNA MODELACIÓN DISCRETA. ACEPTADO ÉSTO, LAS DERIVADAS DE LAS FUNCIONES SE TRASFORMAN EN TASAS DE INCREMENTO DE LAS MISMAS FUNCIONES Y LAS INTEGRALES EN SUMATORIAS. ASÍ, EL SISTEMA DE ECS.(4.30), (4.34) Y (4.35) SE SIMPLIFICARÁ Y PODREMOS OBTENER UNA MAYOR INFORMACIÓN DE LAS FUNCIONES SOLUCIÓN S^* Y Y^* DEL MODELO DISCRETIZADO.

PARTIENDO DEL HECHO DE QUE

$$\frac{\partial Y^*}{\partial \tau}(\tau,t) = \lim_{h\to 0} \frac{Y^*(\tau,t+h) - Y^*(\tau,t)}{h} \qquad (4.39)$$

$$\frac{\partial Y^*}{\partial \tau}(\tau,t) = \lim_{h\to 0} \frac{Y^*(\tau+h,t) - Y^*(\tau,t)}{h}$$

$$= -\lim_{h\to 0} \frac{Y^*(\tau-h,t) - Y^*(\tau,t)}{h} \qquad (4.40)$$

$$\frac{dS^*}{dt}(t) = \lim_{h\to 0} \frac{S(t+h) - S(t)}{h} \qquad (4.41)$$

Y CONSIDERANDO QUE EL VALOR DE h=1 EN UNIDADES DE DÍA ES EL MÍNIMO VALOR DE h QUE PUEDE TENER SENTIDO PARA EL MODELO DISCRETO DADAS LAS CARACTERÍSTICAS DEL PROBLEMA ESTUDIADO Y LA FORMA EN QUE SON ELABORADOS LOS REGISTROS EPIDÉMICOS, LLEGAMOS A LAS SIGUIENTES ECUACIONES

POR LA EC.(4.30), TENEMOS

$$Y^*(\tau,t+1) - Y^*(\tau,t) - Y^*(\tau-1,t) + Y^*(\tau,t) = 0 \qquad (4.42)$$

$$\Rightarrow \quad Y^*(\tau,t+1) = Y^*(\tau-1,t) \qquad (4.43)$$

CON $\tau \in \{1,2,\ldots,T\}$

POR LA EC.(4.34), TENEMOS

$$S(t+1) - S(t) = -\alpha\, S(t) \sum_{\tau=0}^{T} Y^*(\tau,t)\, g^*(\tau) \qquad (4.44)$$

POR LA EC.(4.35), TENEMOS

$$Y^*(0,t+1) = \alpha S(t) \sum_{\tau=0}^{T} Y^*(\tau,t)\, g^*(\tau) \qquad (4.45)$$

$$\Rightarrow \quad S(t+1) = S(t) - Y^*(0,t+1) \qquad (4.46)$$

RESUMIENDO, EL SISTEMA DE ECUACIONES

$$Y^*(\tau,t+1) = Y^*(\tau-1,t) \quad \text{CON } \tau \in \{1,2,\ldots,T\} \qquad (4.43)$$

$$Y^*(0,t+1) = \alpha S^*(t) \sum_{\tau=0}^{T} Y^*(\tau,t)\, g^*(\tau) \qquad (4.45)$$

$$S^*(t+1) = S(t) + Y^*(0,t+1) \qquad (4.46)$$

RIGE LA DINÁMICA DEL PROCESO DE DIFUSIÓN DE LA ENFERMEDAD INFECCIOSA EN LA POBLACIÓN.

CONOCIENDO LA DISTRIBUCIÓN INICIAL DE LOS INDIVIDUOS SUSCEPTIBLES RESPECTO AL NIVEL DE DEFENSA ψ (VER EC.(4.25)) Y A LA FUNCIÓN Ψ CUYA GRÁFICA DIVIDE A LAS REGIONES H_1 Y H_2, PODEMOS CONOCER A LA FUNCIÓN g^*.

CONTANDO CON LA INFORMACIÓN DE LA FUNCIÓN g^* MENCIONADA,

PODEMOS FÁCILMENTE OBTENER LAS FUNCIONES SOLUCIÓN S^* Y Y^* DEL SISTEMA DE ECS.(4.43), (4.45) Y (4.46) MEDIANTE EL PROCESO DE RECURRENCIA. VEAMOS

POR LAS CONDICIONES INICIALES DADAS POR LAS ECS.(4.36), (4.37) Y (4.38) SABEMOS QUE

$$Y^*(T,0) = a(T)$$
$$Y^*(T-1,0) = a(T-1)$$
$$\vdots$$
$$Y^*(0,0) = a(0)$$

Y

$$S^*(0) = S_0^*$$

PARA $t=0$

POR LA EC.(4.43), TENEMOS

$$Y^*(T,1) = Y^*(T-1,0)$$
$$Y^*(T-1,1) = Y^*(T-2)$$
$$\vdots$$
$$Y^*(1,1) = Y^*(0,0)$$

POR LA EC.(4.45), TENEMOS

$$Y^*(0,1) = \alpha S_0^* \sum_{\tau=0}^{T} Y^*(\tau,0)\, g^*(\tau)$$

POR LA EC. (4.46), TENEMOS

$$S^*(1) = S_0^* - Y^*(0,1)$$

ASÍ, TENEMOS LOS VALORES $Y^*(\tau,1)$ PARA $\tau \in \{0,1,\ldots,T\}$ Y EL VALOR $S^*(1)$.

CONTINUANDO CON ESTE PROCEDIMIENTO, PODEMOS CONOCER LOS VALORES $Y^*(\tau,t)$ Y $S^*(t)$ PARA $\tau\in\{0,1,2,\ldots,T\}$ Y $t\in[0,\infty)$.

CONTANDO CON LOS VALORES MENCIONADOS, PODEMOS -- CONCLUIR QUE HEMOS LOGRADO OBTENER UN BUEN CONOCIMIENTO SOBRE - LA DINÁMICA DE DIFUSIÓN DE UNA ENFERMEDAD INFECCIOSA EN LA PO - BLACIÓN, EN LA QUE SE HA TOMADO EN CUENTA, CON CIERTO DETALLE, LA SITUACIÓN MEDICO-BIOLÓGICA DE LOS INDIVIDUOS QUE CONFORMAN - DICHA POBLACIÓN. PODEMOS CONSIDERAR, POR TANTO, QUE EL PROBLEMA PLANTEADO ESTÁ RESUELTO.

o

BIBLIOGRAFIA

BAILEY N.T.J., THE MATHEMATICAL THEORY OF INFECTIOUS DISEASES AND ITS APPLICATIONS, C.GRIFFIN AND CO. LTD., (1975).

BAROYAN O.V., RVACHOV L.A., MATEMATIKA Y EPIDEMIOLOGUIYA, ZNANIE SERIYA MATEMATIKA, KIBERNETIKA, Nº 2, (1977).

BAROYAN O.V., RVACHOV L.A., PROGNOZIROVANIE EPIDEMII GRIPPA V USLOVIYAJ SSSR, VOPROSY VIRUSOLOGHII, 2, 131-137, (1978).

BAROYAN O.V., RVACHEV L.A., BASILEVSKY V.V., ERMAKOV K.D., FRANK M.A., RVACHEV AND SHASHKOV V.A., COMPUTER MODELLING OF INFLUENZA EPIDEMICS FOR THE WHOLE COUNTRY (USSR), WHO SYMPOSIUM ON QUANTITATIVE EPIDEMIOLOGY, MOSCOW, 23-27 NOV., (1970).

BARTLETT M.S., STOCHASTIC POPULATION MODELS IN ECOLOGY AND EPIDEMIOLOGY, METHUEN'S MONOGRAPHS ON APPLIED PROBABILITY AND STATISTICS, METHUEN AND CO. LTD., (1970).

BRAUER F. AND NOHEL J.A., ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS: A FIRST COURSE, W.A. BENJAMIN INC., (1973).

BRAUN M., DIFFERENTIAL EQUATIONS AND THEIR APPLICATIONS, SPRINGER-VERLAG, (1975).

BURROWS W., TRATADO DE MICROBIOLOGÍA, INTERAMERICANA, (1974).

DIETZ K., EPIDEMICS AND RUMOURS: A SURVEY, J.R. STATIST. SOC., SER.A, 130, 505-528, (1967).

HETHCOTE H.W., ASYMPTOTIC BEHAVIOR IN A DETERMINISTIC EPIDEMIC MODEL, BULL. MATH. BIOL., 35, 607-614, (1973).

HETHCOTE H.W. AND WALTMAN P., OPTIMAL VACCINATION SCHEDULES IN A DETERMINISTIC EPIDEM MODEL, MATH. BIOSCI., 18, 365-381, (1973).

KENDALL D.G., DETERMINISTIC AND STOCHASTIC EPIDEMICS IN CLOSED POPULATIONS, PROC. THIRD BERKELEY SYMP. MATH. STATIST. AND PROB., 4, 149-165, BERKELEY AND LOS ANGELES: UNIV. CALIFORNIA PRESS, (1956).

KERMACK W.O. AND MCKENDRICK A.G., CONTRIBUTIONS TO THE MATHEMATICAL THEORY OF EPIDEMICS,
PROC. ROY. SOC., SER.A, 115, 700-721, (PART I), (1927).
PROC. ROY. SOC., SER.A, 138, 55-83 , (PART II), (1932).
PROC. ROY. SOC., SER.A, 141, 94-122, (PART III), (1933).
J. HYG., CAMB., 37, 172-187, (PART IV), (1937).
J. HYG., CAMB., 39, 271-288, (PART V), (1939).

LANDES J.H., NOCIONES PRÁCTICAS DE EPIDEMIOLOGÍA, LA PRENSA MÉDICA MEXICANA, (1977).

MACMAHON B. Y PUGH T.F., PRINCIPIOS Y MÉTODOS DE EPIDEMIOLOGÍA, LA PRENSA MÉDICA MEXICANA, (1978).

MADELUNG E., DIE MATHEMATISCHEN HILFSMITTEL DES PHYSIKERS, SPRINGER-VERLAG. (1957).

MALVERN L.E., INTRODUCTION TO THE MECHANICS OF A CONTINUOUS MEDIUM, PRENTICE-HALL, SERIES IN ENGINEERING OF THE PHYSICAL SCIENCES, (1969).

RVACHOV L.A., EKSPERIMENT PO MASHINNOMU PROGNOSIROVANIYU EPIDEMII GRIPPA, DOKLADY AKADEMII NAUK SSSR, T.198, Nº 1, 68-70, (1971).

RVACHOV L.A., MODELIROVANIE MEDIKO-BIOLOGUICHESKIJ PROTZESSOV V OBSHESTVE KAK RAZDIEL DINAMIKI SPLOSHNYJ SRIED, DOKLADY AKADEMII NAUK SSSR, T.203, Nº 3, 540-542, (1972).

SERFLING R.E., HISTORICAL REVIEW OF EPIDEMIC THEORY, HUM. BIOL., 24, 145-166, (1952).

TERRIS M., LA REVOLUCIÓN EPIDEMIOLÓGICA Y LA MEDICINA SOCIAL, SIGLO VEINTIUNO EDITORES, (1980).

WALTMAN P., DETERMINISTIC THRESHOLD MODELS IN THE THEORY OF EPIDEMICS, SPRINGER-VERLAG, (1974).

WEISS G.H. AND DISHON M., ON THE ASYMPTOTIC BEHAVIOR OF THE STOCHASTIC AND DETERMINISTIC MODELS OF AN EPIDEMIC, MATH. BIOSCI., 11, 261-265, (1971).

WILSON E.B. AND WORCESTER J., THE LAW OF MASS ACTION IN EPIDEMIOLOGY,
PROC. NAT. ACAD. SCI., WASH., 31, 24-34 , (PART I), (1945).
PROC. NAT. ACAD. SCI., WASH., 31, 109-116, (PART II), (1945).