



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

ESTABILIDAD GLOBAL EN SISTEMAS DE LOTKA-VOLTERRA

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

F I S I C O

PRESENTA

FAUSTINO SANCHEZ GARDUÑO

1985



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

PROLOGO

El uso de las ecuaciones diferenciales y en diferencias en el estudio de la complicada dinámica que se da como resultado de la interacción entre n especies, tiene una larga historia. Desde los más simples modelos para una especie, debidos a Malthus (1790) y Verhulst (1820), en los que -entre otras cosas- se supone que la población está aislada y que todos los miembros de ésta tienen las mismas probabilidades de reproducción y muerte, hasta otros de actualidad en los que la heterogeneidad tanto de la población como del medio es incorporada.

Al análisis de la dinámica de poblaciones descritas por modelos continuos han dedicado sus esfuerzos, lo mismo demógrafos y biólogos que matemáticos y físicos. Así, D'Ancona, Volterra, Lotka, Gause, Kolmogorov, MacArthur, Smale por solo mencionar a algunos, han hecho -en algunos casos, desde puntos de vista diferentes- importantes contribuciones a estos temas, en particular cuando las poblaciones están descritas por modelos como

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) x_i; \quad i = 1, 2, \dots, n$$

de los que los así llamados de Lotka-Volterra

$$\dot{x}_i = \left[b_i + \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right] x_i \quad (LV)$$

constituyen solo un caso particular.

Lugar importante dentro de la Biología es la determinación de las condiciones que hacen posible la

coexistencia entre las especies. Desde el punto de vista matemático, tal fenómeno ecológico para poblaciones descritas por (LV), ocurre si para este sistema:

1. Existe un atractor global. \circ
2. Existe un ciclo límite, también atractor.

Ahora bien, toda vez que el análisis de la estabilidad del equilibrio basado en el método de linealización arroja resultados poco satisfactorios en gran cantidad de casos, en el presente trabajo se estudia - en primera instancia - la coexistencia ecológica del tipo 1, utilizando el llamado Método Directo de Lyapunov, a través del cual - con solo el conocimiento de una cierta función - se puede decidir tanto estabilidad como estabilidad asintótica así como la extensión de la región de atracción. Las extensiones al Método, hechas por LaSalle complementan el análisis

La coexistencia del tipo 2 se estudia utilizando la llamada Prueba de Dulac y un resultado de Moiseev.

La forma como se expone el material es la siguiente:

En el capítulo I, además de plantear el problema que motivó el presente trabajo (Sección I.4) se establece el lenguaje mínimo necesario (Secciones I.1 y I.2). En la Sección I.3, se muestra - a través de algunos ejemplos - lo inadecuado que puede resultar el método de linealización para análisis de estabilidad. Terminamos el capítulo I en la sección I.5 donde se estudia - con ayuda del Teorema de Poincaré-Bendixon - la coexistencia del tipo 1 entre dos especies para un caso particular.

En el capítulo II se dan las herramientas con las que - en el capítulo III - se estudia la coexistencia del tipo 1. De esta manera, en la Sección II.2 se abunda sobre la estabilidad en sistemas conservativos y se concluye

con el Teorema de Estabilidad de Lagrange para éstos, así como destacando las propiedades geométricas del hamiltoniano que hacen posible la única forma de estabilidad en sistemas conservativos: a través de centros. En la Sección II.3 - generalizando las propiedades del hamiltoniano - se establece el concepto de Función de Lyapunov, así como los teoremas de estabilidad que constituyen la base del Método Directo de Lyapunov. También - a través de ejemplos - se muestran algunas dificultades que se tienen para decidir estabilidad asintótica cuando hay trayectorias para las que la derivada de la función de Lyapunov $V'(x)$, se anula. Estos casos fueron estudiados por La Salle quien obtuvo algunos resultados al respecto. Terminamos esta sección señalando la importancia de las funciones de Lyapunov y su contraparte: las dificultades de su construcción. En la Sección II.4 se exponen algunas extensiones al Método Directo de Lyapunov debidas a La Salle y se ve que las funciones de Lyapunov pueden ser utilizadas para determinar regiones de estabilidad. En las secciones II.5, II.6, II.7 y II.8 se exponen algunos aspectos de las funciones de Lyapunov que no son comunes en la literatura: Su construcción, su no unicidad, la existencia de funciones de Lyapunov que no tienen un mínimo aislado, su relación con el concepto de norma, etc.

En el Capítulo III - central en este trabajo - se resuelve el problema de la coexistencia del tipo 1, utilizando el Método Directo de Lyapunov. Se empieza por hacer una revisión (Sección III.2) del uso de las funciones de Lyapunov en modelos del tipo (LV). Esta empieza por V. Volterra quien las usa como primeras integrales (constantes de movimiento), hasta llegar a la década de los 70 en cuya segunda mitad se establecieron los principales resultados. En la sección III.3 se exponen dos resultados debidos a B.S. Goh que resuelven parcialmente el problema. En la sección III.4, Hsu - utilizando un teorema de La Salle y las Transformaciones de Poincaré - resuelve - excepto por un caso que dice "es simétrico" - casi completamente el

problema de coexistencia del tipo 1 entre dos especies. En las secciones III.5 y III.6 se exponen tanto la interpretación ecológica de la función de Lyapunov que se usa abundantemente en el capítulo III, así como otros usos - en contextos no necesariamente ecológicos - que de las funciones de Lyapunov se hace.

El capítulo IV está dedicado a estudiar la coexistencia del tipo 2, en particular para dos especies. En la sección IV.2 se demuestra - con ayuda de la Prueba de Dulac y de un resultado de Moiseev - que no existen ciclos límite para sistemas (LV) en el caso $n=2$. Este capítulo termina en la sección IV.3 en la que se plantean algunos problemas de actualidad y que a nuestro juicio, su estudio constituiría la continuación natural del presente trabajo.

Faustino Sánchez Garduño.

INDICE

CAPITULO I

	Página
I.1. Introducción.	I.1
I.2. Primeros conceptos.	I.3
I.3. El Método de Linealización: Análisis Local.	I.7
I.4. Planteamiento del problema.	I.9
I.5. Primer intento de respuesta: Un caso particular.	I.12

CAPITULO II

II.1. Introducción.	II.1
II.2. Antecedentes del Método: El Teorema de Estabilidad de Lagrange para sistemas conservativos.	II.2
II.3. Teoremas de estabilidad de Lyapunov: La función de Lyapunov.	II.17
II.4. Algunas extensiones al Método Directo de Lyapunov.	II.29
II.5. Algo sobre la construcción de funciones de Lyapunov.	II.34
II.6. Sobre la geometría de las funciones de Lyapunov.	II.39
II.7. Sobre la no unicidad de funciones de Lyapunov.	II.42
II.8. Funciones de Lyapunov, Normas y Estabilidad	II.44

CAPITULO III

III.1. Introducción.	III.1
III.2. Algunos antecedentes del uso de las funciones de Lyapunov en el análisis de la estabilidad en Sistemas de Lotka-Volterra.	III.1
III.3. Estabilidad Global en Sistemas de Lotka-Volterra: Coexistencia a través de un atractor global I.	III.16
III.4. Estabilidad Global en Sistemas de Lotka-Volterra: Coexistencia a través de un atractor global II.	III.21
III.5. Algo más de funciones de Lyapunov: Sobre su interpretación.	III.26
III.6. Más de funciones de Lyapunov: Otras aplicaciones.	III.28
APENDICE A.	III.40

CAPITULO IV

IV.1. Introducción.	IV.1
IV.2. Imposibilidad de modelar coexistencia entre dos especies a través de ciclos límite.	IV.2
IV.3. Estabilidad Global y Coexistencia a través de ciclos límite en Sistemas de Lotka-Volterra: Planteamiento de problemas.	IV.6
CONCLUSIONES.	C.1
REFERENCIAS.	R.1

CAPITULO I

I.1. Introducción.

En los intentos por describir la complicada dinámica que se da como resultado de la interacción entre diferentes especies, es de sobra reconocido el importante papel que ha jugado - desde su introducción en 1926 - el sistema clásico de Lotka-Volterra, para una interacción de tipo presa-depredador

$$\begin{cases} \dot{x} = (a - by)x \\ \dot{y} = (-d + cx)y \end{cases} \quad (LV-C)$$

o bien, su versión más general

$$\dot{x}_i = \left(b_i + \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right) x_i ; \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (LV)$$

que describe la interacción entre n especies y donde x_i representa el tamaño poblacional¹ de la i -ésima especie. En lo sucesivo, a este último sistema lo denominaremos sistema de Lotka-Volterra, para diferenciarlo del que hemos dado en llamar sistema clásico de Lotka-Volterra (LV-C).

Los sistemas de Lotka-Volterra (LV-C) y (LV) han sido extensamente estudiados por gran cantidad de autores. Desde estudios de tipo experimental como los desarrollados por G. F. Gause ([12]) en 1935, cuya intención era la demostración experimental de las oscilaciones periódicas en poblaciones animales, hasta otros de carácter más general como el de Gool, Mitra

(1) Por tamaño poblacional se entiende cualquier medida asociada a la población que puede ser desde número de individuos por unidad de área o volumen, hasta la biomasa contenida en el sistema. En el trabajo le asociaremos una función diferenciable del tiempo.

I.2

y Montroll ([24]) en 1971, en el que hacen una revisión exhaustiva de varios modelos no lineales - incluido el sistema (LV) - que describen la interacción entre poblaciones. Sin embargo, con todo y lo copioso de la literatura al respecto, hoy día hay varios problemas en relación al sistema (LV), que esperan respuesta. Uno de ellos será abordado en el presente trabajo (véase sección I.4).

Por otro lado, independientemente (que no) de la bondad de los mencionados modelos respecto a lo adecuado que resulte su descripción el hecho es que su introducción ha motivado (y lo continúan haciendo) multitud de estudios de carácter "estrictamente matemático" cuya relevancia dentro de lo que actualmente se le llama Ecología Teórica, de ninguna manera puede calificarse de despreciable. Más aún, hoy día se reconoce en esta simbiosis Ecología-Matemáticas en particular y Biología-Matemáticas en general, un área del conocimiento muy promisoría en la que el trabajo conjunto entre matemáticos y biólogos puede arrojar resultados que, por un lado, enriquezcan la literatura matemática, y por otro, aporten elementos que de otra manera no podrían obtenerse de un análisis "estrictamente biológico".

Ahora bien, los modelos (LV-c) y (LV) no son más que casos particulares de un sistema autónomo no lineal del tipo

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) \quad (I.1.1)$$

donde x es un vector en \mathbb{R}^n y f es un campo vectorial de \mathbb{R}^n en \mathbb{R}^n . No está por demás señalar aquí que a sistemas del tipo (I.1.1), conduce el estudio de infinidad de problemas en diversas áreas. Así, lo mismo aparecen en cinética química describiendo ciertas reacciones, que en mecánica describiendo complicados sistemas o en ecología intentando describir la dinámica poblacional en un ecosistema en el que caben formas por demás variadas de interacción.

Excepto en casos simples en los que es posible obte-

ner una expresión analítica para la solución a un problema de Cauchy asociado al sistema (I.1.1), en general esto no es posible debido a la no linealidad de f , siendo necesaria, consecuentemente, la introducción de otras técnicas para abordar el problema. En esta dirección - y no necesariamente independientes - son dos las grandes áreas que se han desarrollado. Por un lado, el Análisis Numérico con cuyos métodos es posible obtener aproximaciones a la solución de un problema con condiciones iniciales para el sistema (I.1.1) y por otro lado, la así llamada Teoría Cualitativa de Ecuaciones Diferenciales, cuyas técnicas permiten dar las características geométricas de las soluciones sin que éstas se conozcan explícitamente, además de que para ciertos propósitos puede no ser estrictamente necesario su conocimiento.

Dado que el enfoque cualitativo será en el que nos habremos de basar para ulteriores análisis y con objeto de precisar el lenguaje que en lo sucesivo utilizaremos, será que a continuación y en forma sucinta, dedicaremos unas líneas a aquellos aspectos de la Teoría Cualitativa necesarios para estos fines, además de servirnos para el planteamiento del problema que motivo el presente trabajo.

I.2. Primeros conceptos.

Dentro de la Teoría Cualitativa, papel central se le atribuye al análisis de la estabilidad² del equilibrio³ de un sistema como el (I.1.1), así como a los criterios que determinan la naturaleza de aquél. Precisemos: El análisis de la estabilidad del equilibrio toma como suyo el siguiente problema: ¿Cuál es el comportamiento del sistema (I.1.1) para tiempos $t > t_0$, si en $t = t_0$ están "cerca"?

(2) Durante todo el trabajo, a menos que explícitamente se diga otra cosa, cuando se hable de estabilidad se entenderá en el sentido de Lyapunov (véase nota de pie de página número 6, de este Capítulo).

(3) Por solución o estado de equilibrio del sistema (I.1.1) se entiende cualquier solución constante del mismo, es decir, \hat{x}_0 es solución de equilibrio de (I.1.1) si y solo si $f(\hat{x}_0) = 0$.

(4) Obsérvese que en la pregunta no se hace distinción entre perturbaciones "grandes" o pequeñas.

al equilibrio? o como en ocasiones -abusando del lenguaje- tambien suele decirse: ¿Cuál es el comportamiento de las soluciones del sistema (I.1.1) ante perturbaciones⁵ del equilibrio?

En el caso de que las perturbaciones sean "pequeñas", el análisis del equilibrio está basado en el método de linealización que, dicho en pocas palabras, consiste en substituir - en una vecindad "suficientemente pequeña" del equilibrio - el sistema (I.1.1) que es no lineal, por uno que si lo sea, utilizando para ello un desarrollo en serie de Taylor alrededor del multivalorado equilibrio hasta el término lineal, de ahí el nombre del método. Así, al sistema (I.1.1) localmente puede pensarse como el sistema lineal

$$\dot{X} = J_L X \quad (I.2.1)^*$$

donde J_L es la matriz de Jacobi y las derivadas parciales están evaluadas en el punto de equilibrio. Es decir, J_L tiene el siguiente aspecto

$$J_L = \left(\begin{array}{ccc} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{array} \right)_{\hat{X}_0} \quad (I.2.2)$$

De esta manera, se espera que el comportamiento cualitativo de las trayectorias en el espacio fase⁵ alrededor del equilibrio del sistema (I.1.1) sea el mismo que las del sistema (I.2.1) alrededor del origen, aunque - como es sabido - tal cosa no necesariamente es

(5) Una solución $\psi(t)$ del sistema (I.1.1) determina una colección $x_1 = \psi_1(t); \dots; x_n = \psi_n(t)$ de n funciones dependientes del parámetro t , por lo que en \mathbb{R}^{n+1} para $t > t_0$ la colección de puntos $(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$ definen lo que en lo sucesivo llamaremos curva integral del sistema (I.1.1). Por otro lado, las n funciones anteriores definen en \mathbb{R}^n una curva que representa el conjunto de posiciones o estados por los que va pasando el sistema descrito por (I.1.1). En lo que sigue a esta curva la llamaremos trayectoria integral o simplemente trayectoria del sistema (I.1.1) y al espacio \mathbb{R}^n lo denominaremos espacio fase, término éste - al igual que el concepto de estado o solución de equilibrio - de origen físico.

(*) No está por demás señalar que aquí se está abusando de la notación, pues en realidad la x que aquí aparece, mide lo alejado que se está del equilibrio, es decir, $x - \hat{x}_0$. Lo hicimos así para no introducir más variables.

es cierta en el caso de centros. Sin embargo las propiedades de estabilidad⁶ o inestabilidad sí se preservan.

Respecto a la caracterización del estado de equilibrio, un criterio tradicionalmente utilizado en la Teoría Cualitativa, toma como elemento las raíces del polinomio característico de la matriz J_L del sistema lineal asociado a (I.1.1)

$$P(\lambda) = \det(J_L - \lambda I) = 0 \quad (I.2.3)$$

y dependiendo como sean éstas se demuestran teoremas -escritos en abundante literatura- que indican el comportamiento local de las trayectorias de (I.1.1) en una vecindad del equilibrio. Así, uno de tales resultados expresa: "Si todas las raíces del polinomio característico (I.2.3) tienen parte real negativa entonces el origen es un punto de equilibrio asintóticamente estable"⁷.

Según este resultado y dada la aproximación lineal del sistema (I.1.1), diríamos que el equilibrio \hat{x}_0 es asintóticamente estable y agregaríamos: "localmente".

Volviendo a lo de la caracterización de los puntos de equilibrio, señalamos que valiéndose exclusivamente de los valores propios, es decir, del método de linealización, se puede demostrar (lo hacen, por ejemplo en ([2A]) y ([B])) que para el plano los puntos de equilibrio solo pueden ser de cualquiera de los siguientes tipos: a) Nodos, en cualquiera de sus variantes, b) centros y c) Puntos silla

(6) La solución de equilibrio \hat{x}_0 del sistema (I.1.1) es estable si dada $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $\varphi(t)$ es cualquier otra solución de (I.1.1) para la que $\|\varphi(t_0) - \hat{x}_0\| < \delta$, entonces $\|\varphi(t) - \hat{x}_0\| < \epsilon$ para todo $t > t_0$.

Para todo fin práctico, esta definición habrá de leerse de la siguiente manera: el equilibrio \hat{x}_0 es estable, si toda solución $\varphi(t)$ de (I.1.1) que permanezca "cerca" a \hat{x}_0 para todo tiempo $t > t_0$, implica que inicialmente lo estaba.

Si además de ser \hat{x}_0 estable sucede que al aumentar t más allá de toda cota, la diferencia $\varphi(t) - \hat{x}_0$ tiende al vector cero, entonces se dice que \hat{x}_0 es un equilibrio asintóticamente estable. El equilibrio \hat{x}_0 es inestable si no es estable.

(7) En el caso $n=2$ tal cosa sucede cuando la traza de la matriz J_L es negativa, pues ahí el polinomio característico es

$$P(\lambda) = \lambda^2 - \text{tr } J_L \lambda + \det J_L = 0$$

Su aspecto geométrico es como se ilustra en las figuras 1, 2, 3, 4, 5 y 6.
En el caso a) dependiendo de si la parte real de los

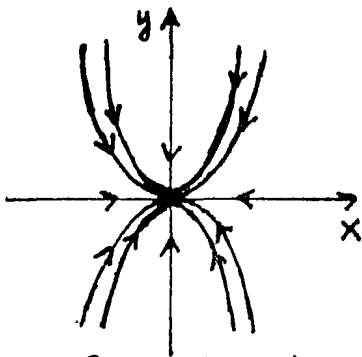


Fig. 1. Reales de igual signo

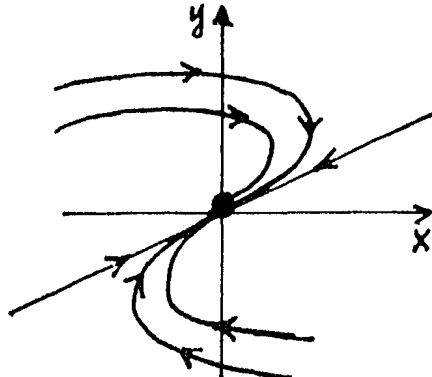


Fig. 2. Reales iguales

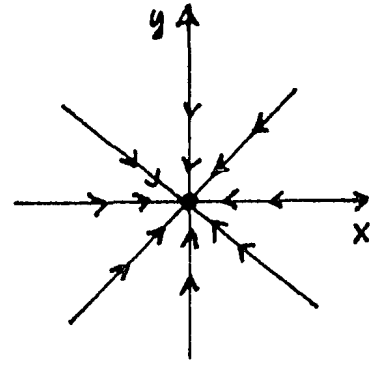
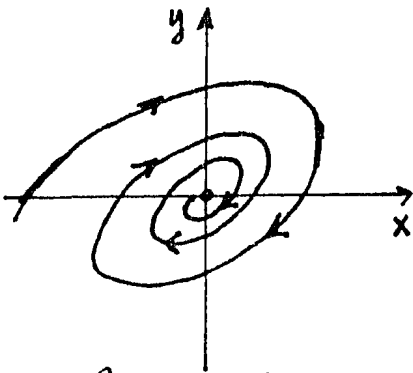
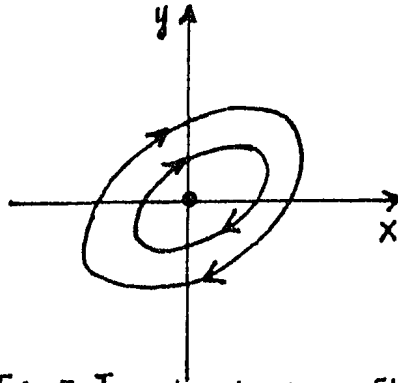
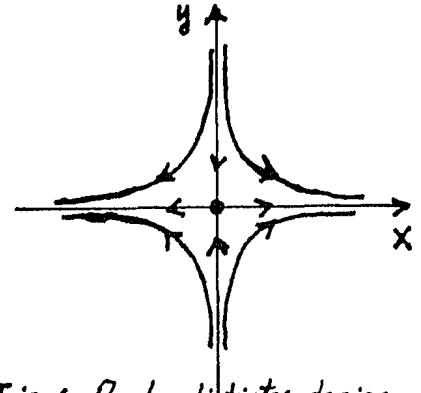


Fig. 3.

Fig. 4. Raíces complejas con parte
imagi. diferente de cero.Fig. 5. Imaginarios puros. El
sentido de giro depende de la
parte imaginaria.Fig. 6. Reales distintos de signos
contrarios

multitudes valores propios es positiva o negativa*, se tendrá que el equilibrio \hat{x}_0 es inestable o asintóticamente estable, respectivamente. En los casos b) y c) el comportamiento es cualitativamente diferente.

En lo relativo a las trayectorias del sistema (I.1.1) en el espacio fase, sólo están completamente clasificadas para el caso $n=2$, siendo entonces exclusivamente de cualquiera de los siguientes tres tipos: i) Puntos de equilibrio, ii) Trayectorias simples cerradas (incluidos los ciclos límite) y iii) Trayectorias simples no cerradas.

Lo dicho en los últimos párrafos, es efectivamente un indicativo de que en cuanto al plano se refiere, la dinámica está completamente estudiada y hay teoremas suficientemente poderosos como el de Poincaré-Bendixon (véanse referencias [8], [24] y [31]) que dan cuenta del comportamiento cualitativo de las trayectorias en el espacio fase. Este, sin embargo, no es el caso para dimensio-

* Por supuesto, se entiende que la inestabilidad se da con solo existir al menos un valor propio con parte real positiva.

nos mayores pues, por ejemplo para $n=3$, aún hay problemas que actualmente se consideran abiertos, uno de ellos lo constituye la clasificación de los atractores en \mathbb{R}^3 (véase ([48])).

I.3. El método de linealización: Análisis local.

Con todo y las ventajas metodológicas que posee el método de linealización es, sin embargo, conveniente alertar al lector en al menos las siguientes tres cuestiones:

- i) Existen dificultades de orden práctico para obtener los valores propios de la matriz del sistema lineal (I.2.1).
- ii) Imposibilidad de atribuir a los valores propios una interpretación en el contexto del problema en cuestión.
- iii) El análisis es de carácter estrictamente local y por tanto se presentan fuertes dificultades si en base a él, se pretenden inferir propiedades de las soluciones del sistema (I.1.1), en particular, propiedades de estabilidad asintótica en regiones de "mayor tamaño".

Suponiendo que el punto i) se pudiera superar y que tampoco fuera de interés hacer susceptibles de interpretación alguna a los valores propios, de todas maneras tendríamos ante sí un problema - a saber el (iii) - de ninguna manera trivial, además de suma importancia dentro de la Teoría Cualitativa de Ecuaciones Diferenciales. Para precisar las dificultades aludidas en el punto (iii), a continuación se presenta una colección de ejemplos citados por B. S. Goh ([15] y [16]) que evidencian una problemática que en buena medida guiará nuestras ulteriores discusiones.

Consideremos pues los siguientes sistemas de Lotka-Volterra que describen algún tipo de interacción entre poblaciones

$$\begin{cases} \dot{X}_1 = (-11 + X_1 + X_2) X_1 \\ \dot{X}_2 = (5.6 - 0.6X_1 - 0.5X_2) X_2 \end{cases} \quad (\text{I.3.1})$$

cuyo punto de equilibrio factible⁸ es $P_e = (1, 10)$. Los valores propios de la matriz del sistema lineal al rededor de este punto son $\lambda_1 = -2 + \sqrt{3}$ y $\lambda_2 = -2 - \sqrt{3}$, ambas negativas, por lo que, según el resultado enunciado en la sección anterior, concluiríamos estabilidad asintótica local para el punto P_e . Sin embargo, si se considera como condición inicial el punto $P = (3, 11)$, mediante una simulación numérica, puede mostrarse (lo hace Goh [15]) que la solución de (I.3.1) para esta condición inicial, tiende a $(\infty, 0)$ cuando t tiende a ∞ (!!!). De manera análoga, en el sistema

$$\begin{cases} \dot{X}_1 = (-2 + X_1 + X_2)X_1 \\ \dot{X}_2 = (5 - 3X_1 - 2X_2)X_2 \end{cases} \quad (\text{I.3.2})$$

el punto de equilibrio $P_e = (1, 1)$ es asintóticamente estable, pues los valores propios del sistema lineal correspondiente $\lambda_1 = -1 + i\sqrt{3}$ y $\lambda_2 = -1 - i\sqrt{3}$, tienen parte real negativa... Pero la solución a (I.3.2)² con condición inicial $(1.6, 1)$, tiende al punto $(\infty, 0)$ (!!!). Finalmente, para el sistema

$$\begin{cases} \dot{X}_1 = (2 - 0.8X_1 - 0.7X_2 - 0.5X_3)X_1 \\ \dot{X}_2 = (2.1 - 0.2X_1 - 0.9X_2 - X_3)X_2 \\ \dot{X}_3 = (1.5 - X_1 - 0.3X_2 - 0.2X_3)X_3 \end{cases} \quad (\text{I.3.3})$$

el punto de equilibrio factible $P_e = (1, 1, 1)$ es asintóticamente estable ya que los valores propios de la matriz J_e correspondiente, son aproximadamente $\lambda_1 = -1.88$, $\lambda_2 = -0.00985 + i0.288$ y $\lambda_3 = -0.00985 - i0.288$, que evidentemente tienen parte real negativa. Pero cuando se toma el punto $(0.5, 1, 2)$ como condición inicial, éste tiende a $(0, 0, 7.5)$ al aumentar t más allá de toda cota (!!!).

(8) Dada la interpretación de las variables x_i como tamaño poblacional, será la región $\Omega = \{x_i | x_i > 0\}$ - que en lo sucesivo llamaremos región de interés biológico - la importante. Así, a un punto de equilibrio $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$ del sistema (LV) con $\bar{x}_i > 0$, $i = 1, 2, \dots, n$ le llamaremos equilibrio factible.

Terminamos la sección señalando que cuando se utilice el método de linealización ha de tenerse cuidado en no inferir mecánicamente para el sistema no lineal propiedades que se extraen del análisis lineal.

I.4. Planteamiento del problema.

Con la evidencia de al menos los anteriores ejemplos, se tienen suficientes razones como para pensar que el análisis local (método de linealización) puede resultar inadecuado o insuficiente para modelar sucesos que pueden presentarse en la realidad ecológica, en particular modelar coexistencia⁹ entre especies, por lo que resulta necesaria la introducción de una teoría que pruebe la problemática aludida anteriormente.

Ahora bien, en el caso particular de dos especies la coexistencia solo es posible en la medida que el comportamiento de las trayectorias en el espacio fase sea de cualquiera del ilustrado en las figuras 7, 8 y 9. De éstas se infiere que tal fenómeno ecológico ocurre esencialmente si:

1. Existe un punto de equilibrio asintóticamente estable, tal que para cualquier condición inicial la solución tienda a él cuando $t \rightarrow \infty$.
2. Existe un ciclo límite, tal que las trayectorias se comporten como en la figura 8. También mediante la existencia de ciclos límite anidados como se ilustra en la figura 9 se asegura coexistencia.

En torno a la existencia de un punto de equilibrio asintóticamente estable globalmente - que en lo sucesivo llamaremos atractor global¹⁰ - para sistemas como el (LV), será que de mo-

(9) Por coexistencia entre especies estamos entendiendo el fenómeno ecológico en el que éstas interactúan sin que alguna de ellas se extinga.

(10) Un punto es atractor global si: i) Es asintóticamente estable localmente y ii) Ante perturbaciones arbitrarias del equilibrio, las trayectorias tienden asintóticamente a él.

mento centramos el análisis, postergando para el Capítulo III la posibilidad de modelar coexistencia entre especies a través de ciclos límite.

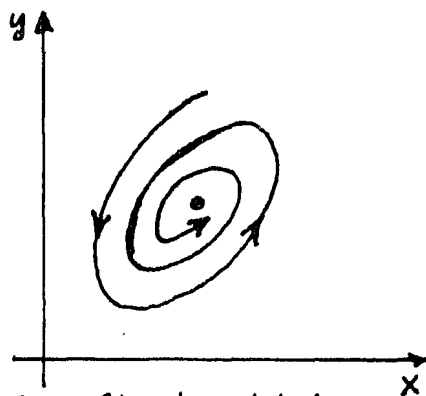


Fig. 7. Atractor global.

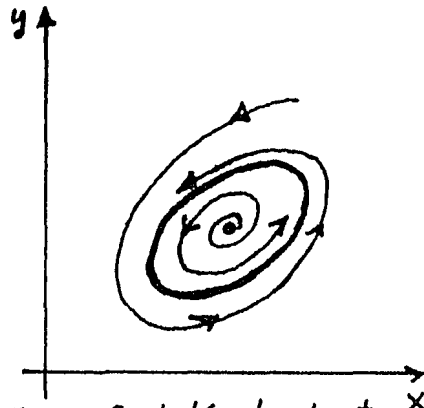


Fig. 8. Ciclo límite atractor.

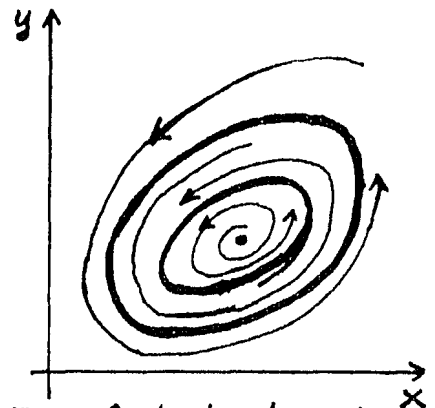


Fig. 9. Ciclos límite anidados.

Así pues, ya en este problema, diremos que se ha avanzado en las siguientes dos direcciones que no necesariamente son excluyentes:

1. Das condiciones bajo las cuales teniendo estabilidad asintótica local, se tenga estabilidad ante perturbaciones arbitrarias del equilibrio, o como suele decirse en la jerga matemática: ESTABILIDAD GLOBAL.
2. Das métodos para determinar la extensión de la región de atracción¹¹.

En la presente exposición esencialmente nos centramos sobre el punto uno y más concretamente utilizaremos el llamado Segundo Método Directo de Lyapunov, para abordar el siguiente problema tenido por importante, tanto en la teoría como en la práctica y hoy día parcialmente resuelto:

¿BAJO QUÉ CONDICIONES, ESTABILIDAD ASINTÓTICA LOCAL PARA SISTEMAS DE LOTKA-VOLTERRA

$$\dot{X}_i = \left(b_i + \sum_{j=1}^n a_{ij} X_j \right) X_i$$

(P.1)

IMPLICA ESTABILIDAD ASINTÓTICA GLOBAL?

Para decidir estabilidad global, en particular para sistemas de Lotka-Volterra, en los últimos años se ha utilizado frecuentemente el mencionado método y tiene la ventaja de que no requiere del conocimiento de las soluciones al sistema de ecuaciones diferenciales en cuestión, pero sí del conocimiento de una cierta función - llamada de Lyapunov - de cuyas características y dificultades para su construcción, así como de sus interpretaciones no estrictamente ecológicas, hablaremos en el transcurso del trabajo.

Antes de concluir esta sección señalamos que la cuestión de estabilidad global para sistemas como el (LV) ha sido tradicionalmente soslayada - si no es que ignorada - en gran cantidad de literatura. De esta suerte, en varios textos de Ecología Teórica y de Ecuaciones Diferenciales, como por ejemplo los de Maynard Smith ([44] y [45]) y el de Martin Braun ([9]), respectivamente sin hacer explícita tal problemática y basados en un análisis geométrico, implícitamente concluyen estabilidad global para dos especies en competencia, si es que existe un punto de equilibrio factible que es asintóticamente estable localmente, pero no lo demuestran rigurosamente, de ahí la importancia que tiene la respuesta a la pregunta recién formulada, en términos de dar fundamento a una técnica de análisis profusamente utilizada. Todavía más, dicha conclusión es cierta para tal caso particular, pero en otros tipos de interacción esto no necesariamente ocurre, pues recordense los ejemplos de la sección I.3.

Ahora, en otras referencias ([24]) en las que se enfrentan la problemática de estabilidad global, el análisis es incompleto en dos sentidos: Primero, analizan un tipo particular de interacción, a saber: de tipo presa-depredador con crecimiento limitado y segundo, la técnica utilizada para decidir estabilidad global es solo aplicable para el plano y por tanto invalidada para análisis similares cuando la interacción es entre más de dos especies. Sin embargo,

(11) Por región de atracción se entiende el conjunto de condiciones iniciales para las cuales las soluciones que parten de ahí tienden al atractor local. Desde el punto de vista práctico, si se tiene una región de atracción "suficientemente extensa" puede considerarse que se tiene estabilidad global.

por considerar que con todo y sus limitaciones, las ideas que se manejan en tal referencia efectivamente constituyen un primer avance en la dirección de dar respuesta a la pregunta (P.1), es que a continuación se discute tal caso particular.

I.5. Primer intento de respuesta: un caso particular.

Consideremos el sistema

$$\begin{cases} \dot{X} = (b_1 - a_{11}X - a_{12}Y)X \\ \dot{Y} = (-b_2 + a_{21}X - a_{22}Y)Y \end{cases} \quad (\text{I.5.1})$$

donde con X se está representando el tamaño de la especie presa, con Y el tamaño de la especie depredadora y todas las constantes que aparecen son positivas. El sistema (I.5.1) tiene cuatro puntos de equilibrio: $P_0 = (0, 0)$, $P_1 = (0, -b_2/a_{22})$, $P_2 = (b_1/a_{11}, 0)$ y $P_c = (\bar{X}, \bar{Y})^{12}$, de los cuales solamente el cuarto tiene interés en términos de la coexistencia ecológica. Concretamente, se supondrá que el punto P_c se encuentra en la región de interés biológico, es decir $\bar{X}, \bar{Y} > 0$.

Linealizando el sistema (I.5.1) alrededor del punto P_c se obtiene que la matriz de coeficientes del sistema lineal correspondiente es

$$J_c = \begin{pmatrix} -a_{11}\bar{X} & -a_{12}\bar{X} \\ a_{21}\bar{Y} & -a_{22}\bar{Y} \end{pmatrix}$$

cuya traza, $\text{tr} J_c = -(a_{11}\bar{X} + a_{22}\bar{Y})$ es negativa, por lo que las raíces del polinomio característico asociado tienen parte real negativa y por tanto se concluye que P_c es un atractor local¹³.

Con objeto de poseer mayor información respecto a la naturaleza del punto P_c en la región $\mathcal{R} = \{(X, Y) | X, Y > 0\}$, es necesario hacer un análisis más exhaustivo del caso, para lo

(12) El punto $P_c = (\bar{X}, \bar{Y})$ es la intersección de las rectas $L_1: b_1 - a_{11}X - a_{12}Y = 0$ y $L_2: -b_2 + a_{21}X - a_{22}Y = 0$.

(13) Por atractor local se entiende un punto que es asintóticamente estable localmente.

cual utilizaremos el siguiente resultado cuya demostración puede consultarse en las referencias [8], [2A] y [31] que se ofrecen al final del trabajo.

Teorema de Poincaré-Bendixon. Sea R una región cerrada y acotada consistente de puntos no singulares de un sistema de 2×2 tal que alguna trayectoria α del sistema, está completamente contenida en R . Entonces, o bien es ella misma una trayectoria cerrada, o tiende a una trayectoria cerrada o termina en un punto de equilibrio.

Así, para nuestros propósitos en calidad de región cerrada y acotada tomase el rectángulo R cuyos vértices son los puntos $(0,0)$, $(0, y^*)$, (x^*, y^*) y $(x^*, 0)$ con $x^* > b_1/a_{11}$ y $y^* > b_1/a_{12}$ como se ilustra en la figura 10

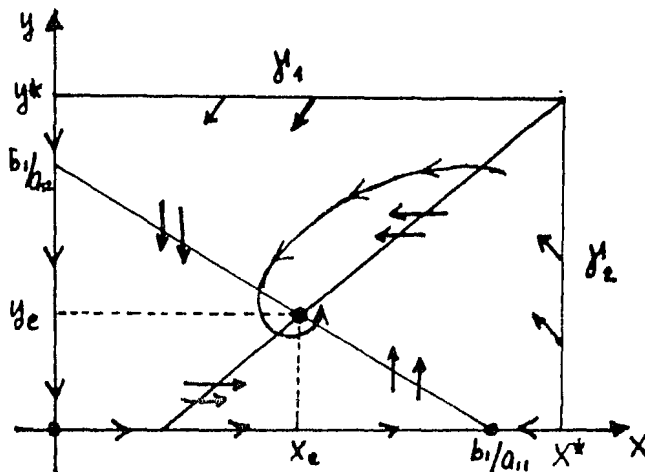


Fig. 10. Teorema de Poincaré-Bendixon ayuda para decidir estabilidad asintótica global de (x_e, y_e) .

Sea α una trayectoria del sistema (I.5.1) tal que para algún tiempo t_0 , el punto $(x(t_0), y(t_0)) = (x_0, y_0)$ pertenece a la frontera de $R: \partial R$. Siendo esta la situación, se tienen dos posibilidades: o bien alguna x_0 ó y_0 es cero, en cuyo caso una de las especies se extingue, o bien ambas x_0 y y_0 son diferentes de cero. En consecuencia, es esta última situación la importante en términos de coexistencia. Por otro lado, mediante un análisis del campo vectorial definido por (I.5.1), se evidencia que toda trayectoria que en t_0 esté en los lados δ_1 ó δ_2 del

rectángulo R queda atrapada en él, por lo que - según el Teorema de Poincaré-Bendixon - es ella misma una trayectoria cerrada o tiende a una trayectoria cerrada o bien termina en un punto de equilibrio. Ahora, la existencia de trayectorias cerradas para el sistema (I.5.1) está excluida¹⁴, lo que puede demostrarse mediante el siguiente razonamiento. Sea $\mathcal{F}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ una transformación tal que si $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ entonces

$$\mathcal{F}(u, v) = (e^u, e^v) = (x, y) \quad (\text{I.5.2})$$

Así, la región de interés biológico Ω (el primer cuadrante en el plano $x-y$) es la imagen bajo \mathcal{F} de todo el plano $u-v$ y no cuesta trabajo convencerse de que \mathcal{F} mapea el tercer cuadrante C_3 del plano $u-v$ en el cuadrado unitario del plano $x-y$ y así sucesivamente, según lo ilustran las figuras 11 y 12.

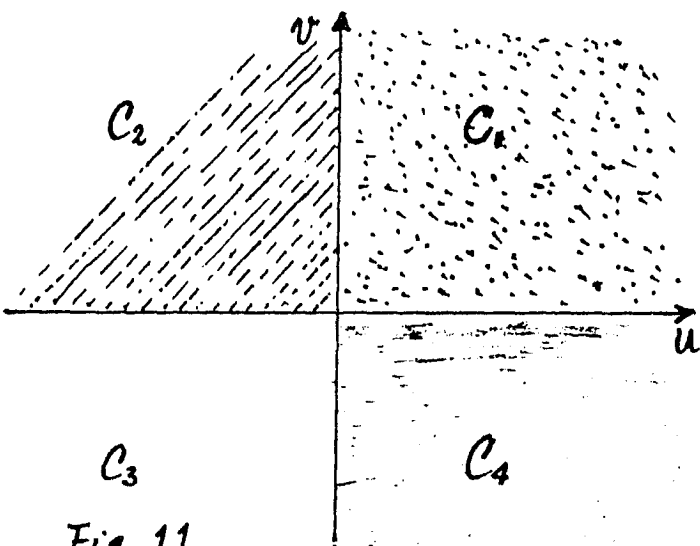


Fig. 11

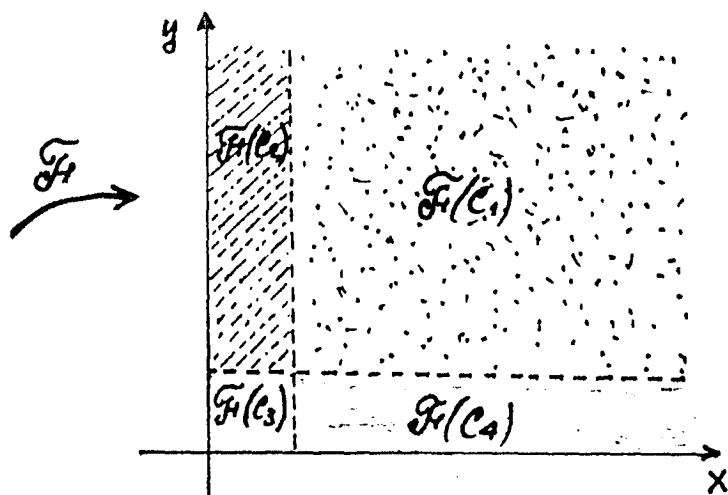


Fig. 12

En las coordenadas $u-v$ el sistema (I.5.1) toma la siguiente forma

$$\begin{cases} \dot{u} = b_1 - a_{11}e^u - a_{12}e^v = P^*(u, v) \\ \dot{v} = -b_2 + a_{21}e^u - a_{22}e^v = Q^*(u, v) \end{cases} \quad (\text{I.5.3})^{15}$$

(14) Esta justificación no la hacen en [24], la idea fue tomada de []

(15) Si llamamos $P(x, y)$ y $Q(x, y)$ a las partes derechas del sistema (I.5.1), respectivamente, es claro que $P^*(u, v) = P(\mathcal{F}(u, v)) = P(x, y)$ y $Q^*(u, v) = Q(\mathcal{F}(u, v)) = Q(x, y)$

sobre el que es muy simple aplicar el llamado Criterio Negativo de Bendixon que a continuación se enuncia, remitiendo al lector a las referencias [4] y [31], para su demostración

Teorema 2 (Criterio Negativo de Bendixon). No hay trayectoria cerrada en una región simplemente conexa¹⁶ del plano fase en la cual

$$\frac{\partial P(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial Q(x, y)}{\partial y}$$

es de un signo¹⁷.

Así, según el mencionado criterio, en ninguna región simplemente conexa contenida en el plano $u-v$ existe trayectoria cerrada alguna, pues la divergencia del campo vectorial definido por (I.5.3)

$$\frac{\partial P^*(u, v)}{\partial u} + \frac{\partial Q^*(u, v)}{\partial v} = -(a_{11}e^u + a_{22}e^v)$$

es negativa para todo (u, v) en dicho plano. Por tanto, no existe trayectoria cerrada para el sistema (I.5.3) y del hecho de que la transformación (I.5.2) manda trayectorias cerradas en trayectorias cerradas¹⁸, concluimos que (I.5.1) tampoco posee trayectorias cerradas en Ω . Luego entonces - por el Teorema de Poincaré-Bendixon - toda trayectoria que entre al rectángulo R por los lados δ_1 o δ_2 , termina en el punto P_e , concluyéndose - consecuentemente - estabilidad global para P_e en la región de interés biológico Ω .

(16) Por región simplemente conexa se entiende aquella en la que cualquier curva simple cerrada completamente contenida en la región, encierra solamente puntos de ésta.

(17) El enunciado del teorema considera el sistema autónomo $\begin{cases} \dot{x} = P(x, y) \\ \dot{y} = Q(x, y) \end{cases}$, por lo que utilizando la definición de divergencia de un campo vectorial, una forma equivalente de enunciarlo es: En una región simplemente conexa donde la divergencia del campo definido por el sistema anterior, no cambie de signo, no hay trayectoria cerrada.

(18) Para ver que \mathcal{F} manda trayectorias cerradas en trayectorias cerradas, sea $\alpha: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ una trayectoria cerrada en el plano $u-v$, es decir existe t^* en $[a, b]$ tal que para t_0 fijo sucede que $\alpha(t_0 + t^*) = \alpha(t_0)$, de donde se tiene que

$$\mathcal{F}[\alpha(t_0 + t^*)] = (e^{u(t_0 + t^*)}, e^{v(t_0 + t^*)}) = (e^{u(t_0)}, e^{v(t_0)}) = \mathcal{F}[\alpha(t_0)]$$

Terminamos el capítulo señalando que - con todo y lo limitado de la técnica - el Teorema de Poincaré-Bendixon ha jugado un importante papel para decidir estabilidad global en el presente caso particular. Sin embargo, si la intención es poseer criterios para decidir lo propio en dimensiones mayores, será menester desarrollar herramientas apropiadas para tales fines. Así, respondiendo a esta necesidad es que en el siguiente capítulo se expone el ahora llamado 2º Método Directo de Lyapunov, mismo con el que - en el capítulo III - abandonamos el problema planteado en la sección I.4. En el capítulo III se analiza la posibilidad de modelar coexistencia entre especies descritas por modelos (LV), a través de ciclos límite.

CAPITULO II

II.1. Introducción.

En las secciones I.3 y I.4, se ha abundado suficiente sobre lo limitado que es el método de linealización para responder ciertas preguntas sobre la estabilidad del equilibrio de sistemas de Lotka-Volterra en particular y sistemas autónomos en general, por lo que debe quedar clara la necesidad de introducir herramientas que superen tales dificultades.

Así, aunque no desde el punto de vista que aquí lo hemos formulado (estabilidad global), M. A. Lyapunov ([40]) en 1892 en su ahora clásica obra¹ PROBLÈME GÉNÉRAL DE LA STABILITÉ DU MOUVEMENT, expuso lo que actualmente se conoce como Segundo Método Directo de Lyapunov², a través del cual - con sólo el conocimiento de una cierta función, llamada de Lyapunov, en honor al autor del método - se puede concluir tanto el tipo de estabilidad³ del equilibrio en sistemas autónomos como la región de atracción para atractores locales, como se verá en las secciones 3 y 4 de este capítulo.

Para empezar, expandremos lo que se considera como los antecedentes del Segundo Método Directo de Lyapunov y que constituye - con todo y lo importante que es en mecánica - sólo un caso particular de la teoría desarrollada

(1) M. A. Lyapunov: "Problème général de la stabilité du mouvement" en "Annals of Mathematical Studies No. 17", Princeton University Press, Princeton, N. J.; 1949.

(2) Se le llama directo porque para averiguar la estabilidad del equilibrio no requiere del conocimiento de la solución a un problema de Cauchy como

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

(3) Aquí nos referimos a estabilidad y a estabilidad asintótica en el sentido de Lyapunov (véase nota 6 del Capítulo I).

II.2

por Lyapunov. Nos referimos al Teorema de Estabilidad de Lagrange para sistemas conservativos.

II.2. Antecedentes del Método: El Teorema de Estabilidad de Lagrange para sistemas conservativos.

En lo que sigue - mientras no se diga otra cosa - consideraremos el movimiento unidimensional⁴ de un cuerpo de masa m (constante) que se mueve bajo el efecto de un campo de fuerzas conservativo⁵ F , por lo que si representamos con $x = x(t)$ a la distancia recorrida por el objeto al tiempo t , la ecuación de movimiento es - según la 2^a ley de Newton -

$$m\ddot{x}(t) = F(x) \quad (\text{II.2.1})$$

y por tanto el problema de Cauchy asociado es

$$\begin{cases} m\ddot{x}(t) = F(x) \\ x(t_0) = x_0; \dot{x}(t_0) = v_0 \end{cases} \quad (\text{II.2.2})$$

En lo sucesivo, por la frase: "describa el movimiento del cuerpo", habremos de entender: especifica la pareja de números $(x(t), \dot{x}(t))$ para todo tiempo $t \geq t_0$, si es que ecuación de movimiento, posición y velocidad iniciales son conocidas. De esta suerte, si somos capaces de dar posición y velocidad del cuerpo para todo tiempo, diremos que conocemos la dinámica del movimiento. Así, resulta natural que en lugar de trabajar con el problema (II.2.2), hagamos con el siguiente problema

(4) También suele llamarse movimiento con un grado de libertad.

(5) A un campo de fuerzas $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, se le llama conservativo, si existe una función (llamada potencial o energía potencial) $U: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^1 tal que $F(x) = -U'(x)$

Claramente la definición se extiende para dimensiones mayores.

de Cauchy asociado

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = \frac{1}{m} F(x) \\ x(t_0) = x_0; y(t_0) = v_0 \end{cases} \quad (\text{II.2.3})$$

cuya solución⁶ $\varphi(t)$ tiene precisamente por componentes a la posición y a la velocidad del cuerpo de masa m al tiempo t , es decir $\varphi(t) = (x(t), \dot{x}(t))$.

En mecánica, a las posiciones ocupadas por el cuerpo en las que está en reposo y tampoco se ejerce fuerza alguna sobre él, se les llama puntos de equilibrio. Estos -para el sistema (II.2.3)- son puntos del plano $x-\dot{x}$ de la forma $(x^*, 0)$ donde x^* es una raíz del campo F y que en lo sucesivo supondremos aislada⁷. De lo aquí dicho y por ser F conservativo, se tiene que x^* es un valor crítico de U , en cuyo caso la gráfica de esta función en una vecindad de x^* tiene esencialmente el aspecto que se ilustra en las figuras 1, 2 y 3. Por supuesto que la dinámica del movimiento es diferente en cualquiera de estas tres situaciones, en particular la estabilidad del equilibrio mencionado líneas atrás, es distinta en cada caso como lo haremos ver en un momento. Mientras tanto, señalamos que del problema (II.2.3) y utilizando el hecho de

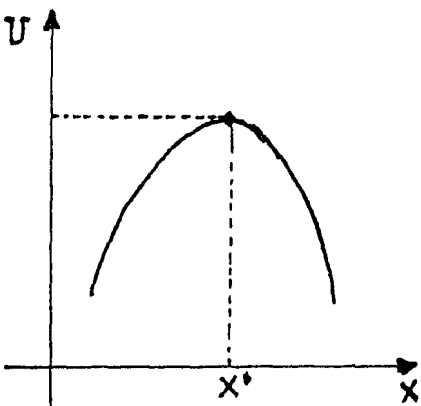


Fig. 1. Con máximo.

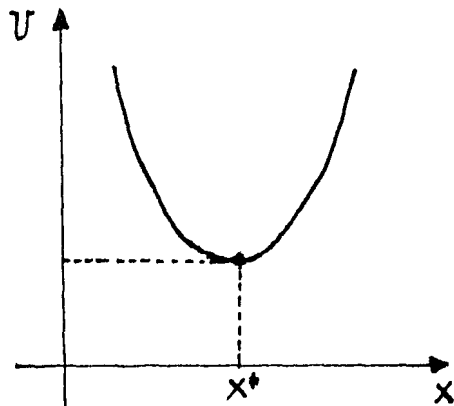


Fig. 2. Con mínimo.

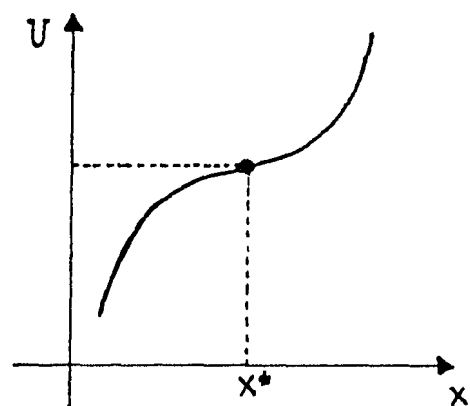


Fig. 3. Con punto de inflexión

(6) Durante el trabajo se supondrá que las condiciones del Teorema de Existencia y Unicidad para problemas como el (II.2.3) se cumplen.

(7) x^* es raíz aislada de F si con centro x^* existe una vecindad tal que para toda x en ella $F(x) \neq 0$.

II.4

que F es conservativo no es difícil concluir que la función

$$E(x, \dot{x}) = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + U(x) = \frac{1}{2} m \dot{x}_0^2 + U(x_0) = E_0 \quad (\text{II.2.4})$$

es una primera integral⁸ del mismo, pero estrictamente no cualquier primera integral, pues expresa el bien conocido principio de con-

(B) Por primera integral de un sistema autónomo $\dot{x} = f(x)$, donde $x \in \mathbb{R}^n$ y $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ se entiende a una función $H(x) = H(x_1, x_2, \dots, x_n)$ continua al igual que sus primeras derivadas parciales y tal que si $x = \varphi(t)$ es una solución arbitraria, entonces la expresión $H(\varphi(t))$ es independiente de t , es decir, solo depende de la solución $\varphi(t)$.

Como consecuencia de la definición, resulta que si $H(x_1, x_2, \dots, x_n)$ es una primera integral del sistema $\dot{x} = f(x)$, entonces esta satisface la condición

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial H}{\partial x_i}(x_1, x_2, \dots, x_n) f_i(x_1, \dots, x_n) = 0$$

El recíproco también es cierto, es decir, toda función H que satisface esta igualdad es una primera integral del sistema.

Una propiedad de las primeras integrales - que se sigue de la definición - es que si H es primera integral de un sistema, entonces también lo será $C_1 H + C_2$ con $C_1 \neq 0$ y C_2 cualquier número real.

Aunque en el caso del sistema (II.2.3) la obtención de la primera integral no representa mayor dificultad, ciertamente un problema importante es: ¿Cuándo un sistema autónomo de $n \times n$, $\dot{x} = f(x)$, tiene primeras integrales? En [49] se da una condición para que el sistema autónomo de 2×2

$$(*) \begin{cases} \dot{x} = P(x, y) \\ \dot{y} = Q(x, y) \end{cases}$$

tenga una primera integral. Tal resultado expresa: "Si $\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} = 0$, entonces existe una función H tal que $\frac{\partial H}{\partial y} = P$ y $\frac{\partial H}{\partial x} = -Q$. Más aun, cualquier H es una primera integral del sistema (*).".

Es común llamar sistemas exactos - en particular para 2×2 - para los que $\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} = 0$. Así, en términos del resultado anterior, un típico sistema exacto tiene el siguiente aspecto

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial y} \\ \dot{y} = -\frac{\partial H}{\partial x} \end{cases}$$

los que en el contexto de la mecánica se les llama Hamiltonianos.

Es claro que el sistema (II.2.3) cumple la condición de exactitud, pues haciendo las obvias identificaciones

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} = 0 + 0 = 0.$$

También en esta misma referencia ([49]) se establece el siguiente:

Teorema: Si el sistema (*) tiene una primera integral, entonces: i) ninguno de sus puntos de equilibrio es un atractor y ii) no tiene ciclos límite.

II.5

servación de la energía mecánica, ya que en los términos $\frac{1}{2}m\dot{x}^2$ y $U(x)$ reconocemos a la energía cinética y potencial, respectivamente y lo que expresa la igualdad (II.2.4), es: La suma de ambas energías tiene el mismo valor en un tiempo t (arbitrario) que el valor para $t=t_0$ (el inicial), es decir: E es constante⁹ para todo tiempo $t \geq t_0$!

Por otro lado, observemos que de la igualdad (II.2.4) se infiere que para cada estado inicial del sistema descrito por (II.2.3), es decir, para cada pareja (x_0, \dot{x}_0) se tiene una y solo una curva de nivel¹⁰ de la función E que tiene las siguientes propiedades geométricas:

i) Es simétrica respecto al eje horizontal (el de las posiciones) pues de (II.2.4) se tiene que

$$\dot{x} = \pm \sqrt{\frac{2}{m}[E - U(x)]} \quad (\text{II.2.5})$$

ii) Pensada como el trazo de la trayectoria¹¹ del problema (II.2.3), se recorre en el sentido de las manecillas del reloj, pues para $\dot{y} > 0$, x aumenta mientras que para $\dot{y} < 0$, x disminuye. Esto se infiere directamente del sistema (II.2.3).

(9) Para verificar que E es constante, puede hacerse de la siguiente manera: Sea $E(t) = E(x(t), \dot{x}(t))$ dado como $E(t) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2(t) + U(x(t))$, por lo que

$$\dot{E}(t) = m\dot{x}(t)\ddot{x}(t) + U'(x(t))\dot{x}(t) = \dot{x}(t)F(x(t)) - F(x(t))\dot{x}(t) = 0 \quad \forall t \geq t_0$$

$\therefore E$ es constante durante el movimiento.

(10) Al conjunto de puntos (x, \dot{x}) del plano fase para los que $E(x, \dot{x}) = \text{cte}$, se le llama curva de nivel de la función E y por la interpretación de ésta (energía mecánica) resulta ser que la curva de nivel de E corresponde a estados del sistema con igual energía, por lo que a esa curva se le llama equipotencial.

(11) Es importante no confundir el sentido en el que aquí se usa el concepto de trayectoria, pues ésta aquí se interpreta como la representación paramétrica de la solución al problema (II.2.3) que ciertamente no corresponde a la trayectoria - en este caso rectilínea - que sigue el cuerpo al moverse.

II.6

iii) Si cruza el eje horizontal, lo hace con pendiente ∞ , mientras que si cruza el eje vertical (el de las velocidades) lo hace con pendiente cero¹². Esto se hace evidente observando que la ecuación diferencial de las trayectorias de (II.2.3) es

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{m} \frac{F(x)}{y}$$

iv) El gradiente de la curva de nivel $E(x, \dot{x}) = \text{cte}$, en el punto (x, \dot{x}) es perpendicular al vector velocidad definido por (II.2.3) en el mismo punto. Esto es consecuencia inmediata del hecho de que $E(x, \dot{x}) = \text{cte}$ es primera integral de (II.2.3).

v) Una trayectoria de (II.2.3) es cerrada si y solo si ésta intersecta al eje de las posiciones en exactamente dos puntos. Esto puede justificarse atendiendo a la interpretación física: El movimiento de la partícula es periódico cuando hay exactamente dos posiciones en las que la velocidad es cero (puntos de retroceso).

vi) Si $(x(t), y(t))$ es trayectoria de (II.2.3), también lo será $(x(-t), -y(-t))$.

Para abundar sobre las particularidades geométricas de las equipotenciales es necesaria mayor información sobre el campo de fuerzas F - equivalentemente de la función V - o bien hacer hipótesis adicionales y analizar así el caso particular. No nos detendremos más aquí y simplemente señalamos que en la figura 4 se representa una típica trayectoria del sistema (II.2.3) en su plano fase en la que las anteriores propiedades quedan reflejadas.

A continuación, empezamos el ya anunciado análisis de la dinámica del movimiento para cuando la energía potencial tiene el aspecto ilustrado en las figuras 1, 2 y 3. Este análisis se hará desde el punto de vista de dar respuesta a la siguiente

(12) Si $(x^*, 0)$ es punto de equilibrio de (II.2.3) entonces sus trayectorias cruzan horizontales la recta $x \equiv x^*$.

te pregunta: ¿Cómo depende la estabilidad del equilibrio $(x^*, 0)$ de las propiedades geométricas de la función energía potencial? Veamos.

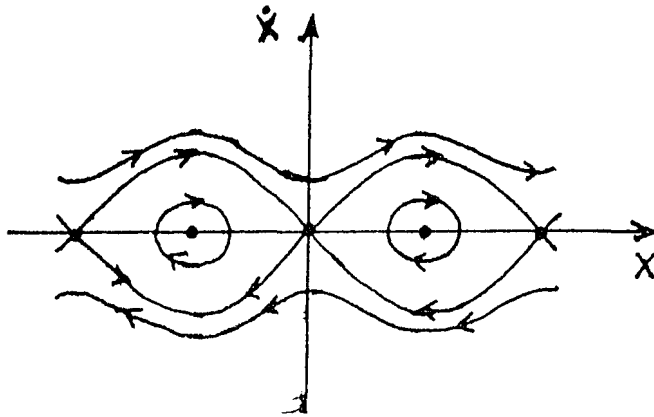


Fig. 4. Típico comportamiento de las equipotenciales

Excepto para el caso de la figura 3 donde se requiere un análisis más cuidadoso, en los casos de las figuras 1 y 2 podemos obtener resultados inmediatamente, pues solo basta linealizar¹³ el sistema (II.2.3) alrededor del equilibrio $(x^*, 0)$. De este proceso, se obtiene que la matriz de Jacobi es

$$J[y, \frac{1}{m} F(x)](x^*, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{m} F''(x^*) & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{II.2.6})$$

cuya traza es cero y determinante

$$\det J[y, \frac{1}{m} F(x)](x^*, 0) = -\frac{1}{m} F''(x^*) = \frac{1}{m} U''(x^*)$$

de donde se infiere que dependiendo del signo de $U''(x^*)$, será el tipo de trayectorias. Concretamente, si en x^* U tiene un máximo

(13) Al utilizar aquí la linealización estamos conscientes de lo limitado del método. Sin embargo, al menos para el caso de la figura 3 y por tratarse del sistema (II.2.3) las propiedades locales son también del sistema no lineal. Véase nota 14.

En el caso de la figura 3, el método de linealización no aporta elementos como para poder caracterizar a las equipotenciales pues, en tal situación, la matriz del sistema lineal asociado al (II.2.3), (II.2.6) es la matriz cero (su traza y determinante son cero) por lo que es necesario hacer el análisis recurriendo a términos de orden superior en el desarrollo de Taylor alrededor del punto $(x^*, 0)$. Para esto, supondremos que el campo F posee tantas derivadas como sea necesario en x^* . Así, de (II.2.4) escribiendo la serie de Taylor de U tenemos

$$E = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \left[E_0 + \frac{U''(x^*)}{2!} (x-x^*)^2 + \dots + \frac{U^{(k)}(x^*)}{k!} (x-x^*)^k + \dots \right] \quad (\text{II.2.7})$$

donde $E_0 = E(x^*, 0) = U(x^*)$. Ahora, introduciendo $\xi = x - x^*$ y expresando las derivadas de U en términos de las del campo, (II.2.7) se escribe como

$$E = \frac{1}{2} m \dot{\xi}^2 + E_0 - \left(\frac{A_1}{2!} \xi^2 + \dots + \frac{A_k}{(k+1)!} \xi^{k+1} + \dots \right) \quad (\text{II.2.8})$$

donde claramente $A_i = -F^{(i)}(x^*)$ con $i = 1, 2, \dots, k, \dots$. Esta última expresión es válida independientemente de que A_1 sea cero. En el caso de que esto ocurra, según ([3]), habremos de distinguir tres sub-casos, a saber:

a) $A_1 = A_2 = \dots = A_{2k-2} = 0$, con $A_{2k-1} > 0$

b) $A_1 = A_2 = \dots = A_{2k-2} = 0$, con $A_{2k-1} < 0$

c) $A_1 = A_2 = \dots = A_{2k-1} = 0$, con $A_{2k} \neq 0$

En los sub-casos (a) y (b) el comportamiento cualitativo de las trayectorias es en esencia como en las figuras 5 y 6, respectivamente, conductas que ya han sido diseu-

II.10

tidas¹⁴, por lo que nos centramos en el sub-caso (c). Ya en éste, tenemos que las trayectorias satisfacen

$$\frac{y^2}{2} - \frac{A_{2k}}{(2k+1)!} \xi^{2k+1} = E - E_0 \quad (\text{II.2.9})$$

donde si tomamos $E = E_0$, la correspondiente equipotencial es

$$y^2 = \frac{2A_{2k}}{(2k+1)!} \xi^{2k+1} \quad (\text{II.2.9}')$$

la que, para $A_{2k} < 0$, tiene el aspecto geométrico ilustrado en la figura 7. También en ésta se pueden ver las correspondientes a $E > E_0$ y $E < E_0$.

A continuación - utilizando los elementos hasta aquí desarrollados - analizamos un par de sistemas conservativos del tipo (II.2.3) donde la energía potencial no tiene un aspecto tan simple como el de las figuras 1, 2 y 3.

Ejemplo 1. $\ddot{X} + X^2(1 - X^2) = 0$

Hay tres puntos de equilibrio: $P_0 = (-1, 0)$, $P_1 = (0, 0)$ y $P_2 = (1, 0)$.

El primero es un centro, el tercero es un punto silla, mientras que P_1 - por anularse F' en cero y ser $-F''(0) = 270$ -

(14) Las trayectorias en estos sub-casos están dadas por

$$\frac{y^2}{2} - \frac{A_{2k-1}}{(2k)!} \xi^{2k} = E - E_0$$

En (b), $A_{2k-1} < 0$ por lo que el término $-\frac{2A_{2k-1}}{(2k)!}$ puede ser escrito como α^2 para algún $\alpha \neq 0$, y si llamamos $\beta^2 = 2(E - E_0)$, entonces las trayectorias satisfacen la igualdad

$$y^2 + \alpha^2 \xi^{2k} = \beta^2$$

que cualitativamente corresponden a óvalos. En (a) las trayectorias satisfacen

$$y^2 - \alpha^2 \xi^{2k} = \beta^2$$

cuyo aspecto cualitativo es el de hipérbolas centradas en el equilibrio, por lo que éste es un punto silla. Véanse figuras 5 y 6.

II.11

resulta ser como en la figura 8.
Las equipotenciales satisfacen

$$E(x, \dot{x}) = \frac{1}{2} \dot{x}^2 + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} = C$$

Para $C = 2/15$ hay una separatriz¹⁵ que pasa por $(1, 0)$ que rodea a los otros dos puntos de equilibrio. Para $C = 0$ hay otra separatriz que rodea al punto de equilibrio P_0 . En la figura 8 (superior) se ilustra la gráfica de la energía potencial y la inferior ilustra las equipotenciales.

Ejemplo 2. $\ddot{x} + x[1 - (1+a)(1+x^2)^{-1/2}] = 0$; $a > 0$

Aquí también hay tres puntos de equilibrio: $P_0 = (0, 0)$, $P_1 = (-\sqrt{(1+a)^2 - 1}, 0)$ y $P_2 = (\sqrt{(1+a)^2 - 1}, 0)$. El primero es un punto silla y los dos restantes son centros. Las equipotenciales satisfacen

$$E(x, \dot{x}) = \dot{x}^2 + x^2 - 2(1+a)(\sqrt{1+x^2} - 1) = C$$

Para $C = 0$, se tiene la separatriz

$$\dot{x}^2 + x^2 - 2(1+a)(\sqrt{1+x^2} - 1) = 0$$

que es una lemniscata como la ilustrada en la figura 9. En el caso de los centros, se tiene que los óvalos ajenos que se ilustran en la misma figura 9 satisfacen

$$\dot{x}^2 + (\sqrt{x^2 + 1} - a - 1)^2 = 0$$

(15) Las separatrices del sistema (I.1.1) son trayectorias de éste, que separan regiones del espacio fase donde el comportamiento de las trayectorias es cualitativamente distinto. El procedimiento para obtener las separatrices del sistema (II.2.3) es el siguiente: En (II.2.4) substitúyase el punto $(x^*, 0)$, esto da la equipotencial $E(x^*, 0) = C^*$. La separatriz correspondiente es $E(x, \dot{x}) = C^*$.

El aspecto de la energía potencial que hace posible que el comportamiento de las equipotenciales sea como el aquí discutido se ilustra en la figura 9 (superior).

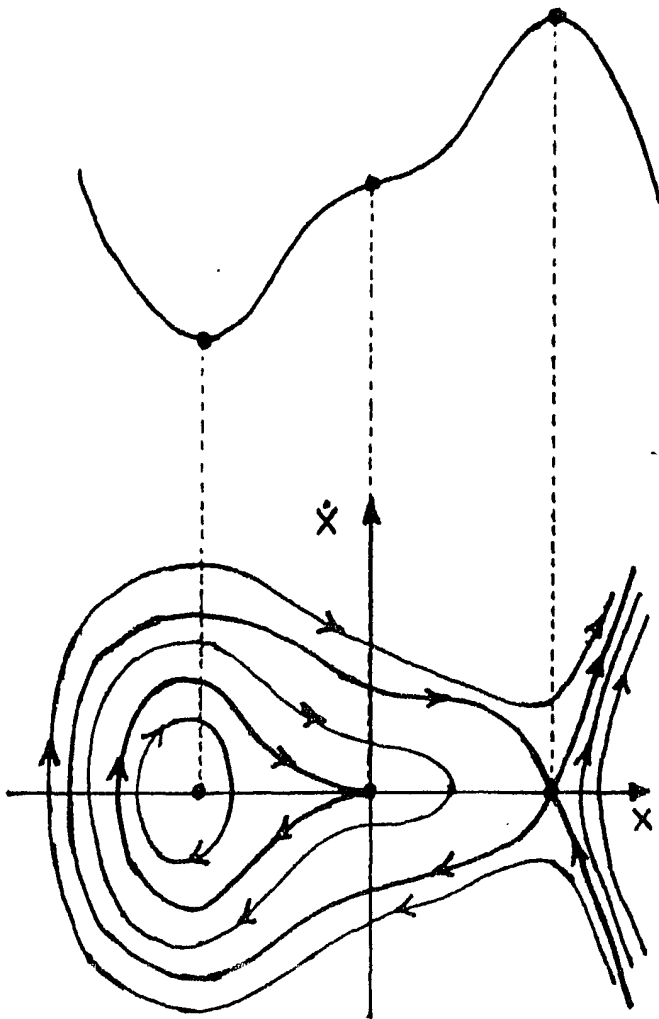


Fig. 8 Dinámica del sistema
 $\ddot{x} + x^2(1-x^2) = 0$

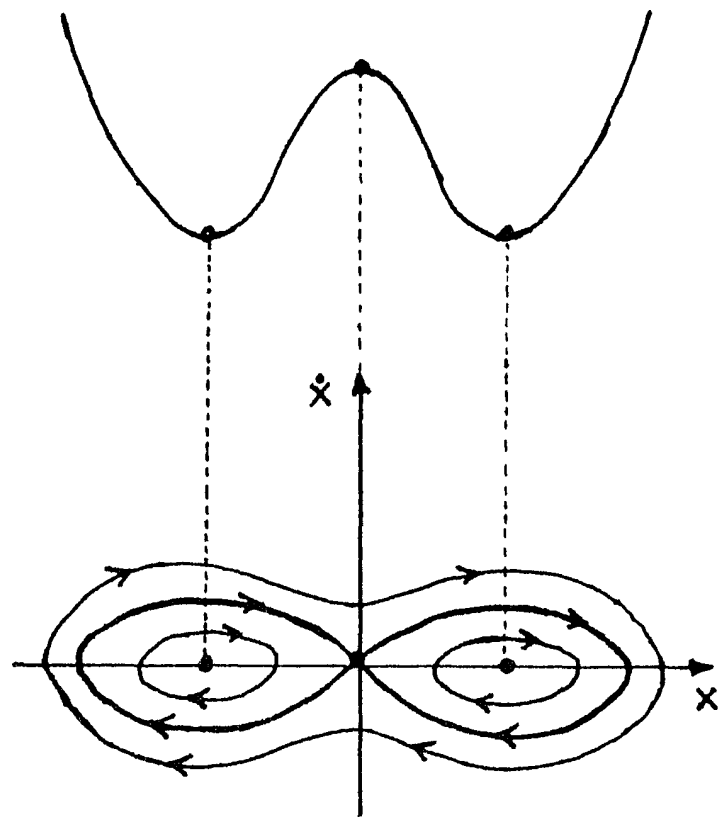


Fig. 9 Dinámica del sistema
 $\ddot{x} + x[1 - (1+a)(1+x^2)^{-1/2}] = 0$

Por todo lo anteriormente dicho, esperamos que el lector quede plenamente convencido que la siguiente es una conclusión no solamente cierta e importante, sino que también es la respuesta a la pregunta formulada en la página II.7, respecto a la estabilidad del punto de equilibrio $(x^*, 0)$, del sistema (II.2.3):

Teorema de Lagrange para campos conservativos. Si en x^* la energía potencial tiene un mínimo, entonces el estado de equilibrio $(x^*, 0)$ del sistema (II.2.3) es estable¹⁶. En los demás casos el equilibrio $(x^*, 0)$ es inestable.

Este resultado lo estableció Lagrange en el año¹⁷ 1788 en su clásica obra MECANIQUE ANALYTIQUE ([37]) y fue demostrado por Dirichlet años más tarde.

Establecido el Teorema de Lagrange, consideramos importante destacar algunas propiedades geométricas de la función (II.2.4) en el caso de haber estabilidad a través de la existencia de centros, así como dejar asentada la validez de los resultados hasta aquí discutidos para cuando de sistemas hamiltonianos con más grados de libertad se trata.

Ocupámonos señalando que la energía potencial está determinada hasta una constante aditiva, por lo que - sin pérdida de generalidad - supondremos que $V(x^*) = 0$ y $x^* = 0$. En estas condiciones no es difícil verificar que la función

$$E(x, \dot{x}) = V(x) + \frac{1}{2} m \dot{x}^2$$

continua, junto con sus derivadas parciales, tiene - al menos localmente - por propias las siguientes características:

a) E es positiva¹⁸ para todo $(x, \dot{x}) \neq (0, 0)$ y $E(0, 0) = 0$

- (16) Más aún, $(x^*, 0)$ es un centro, por lo que si x^* es un punto crítico aislado de V , entonces para todo estado inicial (x_0, v_0) el movimiento es periódico.
- (17) En 1782, Lagrange anunció a Laplace la terminación de su obra, pero ésta fue publicada hasta 1788.
- (18) Esto en efecto ocurre, pues del hecho de que V tenga el aspecto de la figura 6 aunado a la hipótesis hecha en el cuarto párrafo de esta página se concluye (a), pues $\frac{1}{2} m \dot{x}^2 \geq 0$ y es cero, sólo en $\dot{x} = 0$.

II.14

b) E tiene un mínimo¹⁹ aislado en $(0,0)$

c) Si $(x(t), \dot{x}(t))$ es solución de (II.2.2) entonces

$$\dot{E}(t) = \text{grad } E(x(t), \dot{x}(t)) \cdot (\dot{x}(t), \ddot{x}(t)) = 0 \quad \forall t$$

De estas propiedades concluimos que el aspecto geométrico de la función E - al menos en una vecindad del origen - es como el de una vasija, según lo ilustra la figura 10.

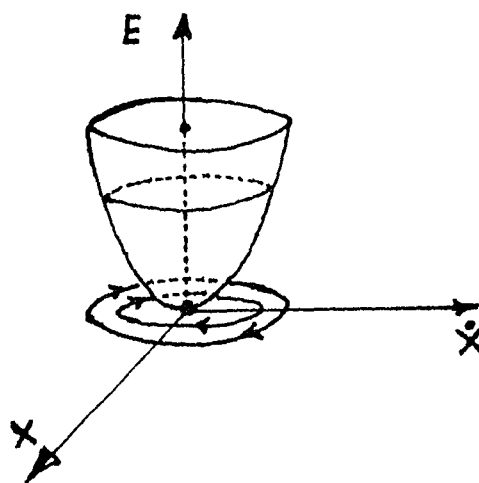


Fig.10. Comportamiento geométrico local de la función (II.2.4).

Definiendo²⁰ $H(x, \dot{x}) \equiv \frac{1}{m} E(x, \dot{x})$ es inmediato ver que el sistema (II.2.3) puede ser escrito^m como

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{\partial H(x, \dot{x})}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial H(x, y)}{\partial y} \\ \dot{y} = -\frac{\partial H(x, \dot{x})}{\partial x} = -\frac{\partial H(x, y)}{\partial x} \end{cases}$$

(19) Que E tiene un mínimo en $(0,0)$ es simple de ver, pues su hessiano en ese punto $U''(0)h^2 + mk^2$, es una forma cuadrática positiva definida, con $U''(0) > 0$.

(20) Para evitarse definir H de esta manera, pudimos haber trabajado con una masa unitaria.

II.15

sistema que resulta ser nada más que un caso particular de los así llamados sistemas hamiltonianos

$$\begin{cases} \dot{q}_i = \frac{\partial H(\vec{q}, \vec{p})}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i = -\frac{\partial H(\vec{q}, \vec{p})}{\partial q_i} \end{cases} ; i=1, \dots, n \quad (\text{II.2.10})$$

donde $H(\vec{q}, \vec{p}) = K(\vec{p}) + U(\vec{q})$ es el llamado hamiltoniano del sistema mecánico, con ecuaciones de movimiento (II.2.10) y q_i, p_i son las posiciones y momentos generalizados, respectivamente. Si el origen es punto de equilibrio del sistema (II.2.10), la energía potencial U se anula en $\vec{0}$ y ahí tiene un mínimo y del hecho de ser la energía cinética una forma cuadrática positiva definida, respecto a los momentos generalizados p_i , se sigue que H se anula en el origen. Más aún

$$\frac{d}{dt} H(\vec{q}, \vec{p}) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial H}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum_{i=1}^n \frac{\partial H}{\partial p_i} \dot{p}_i = 0$$

por lo que el hamiltoniano es una primera integral del sistema (II.2.10) con las propiedades (a), (b) y (c) de las páginas II.13 y II.14. Por tanto, el origen es un punto de equilibrio estable.

Antes de concluir la sección diremos algo respecto a la exactitud (véase nota 8) de sistemas lineales de 2×2

$$\begin{cases} \dot{X} = a_{11}X + a_{12}Y \\ \dot{Y} = a_{21}X + a_{22}Y \end{cases} \quad (\text{II.2.11})$$

éste es exacto, si y solo si $a_{11} + a_{22} = 0$. En el caso de que la matriz de coeficientes sea diagonalizable, esta suma coincide con la suma de los valores propios, que en el caso de 2×2 , son dos y si éstos -según la condición anterior- difieren en signo, enton-

cos, dos son las posibilidades: reales con signo contrario o imaginarios puros, también de signos opuestos y por tanto, el correspondiente punto de equilibrio (el origen) $(0,0)$ o es un punto silla o un centro. Así, a la luz de este resultado, señalamos que la conclusión a la que se llegó en la página II.8 (inicio), no es casual: se trata de una propiedad inherente a los sistemas lineales de 2×2 , exactos.

Supongamos que el sistema (II.2.11) es exacto, es decir, tiene el aspecto

$$\begin{cases} \dot{X} = A_{11}X + A_{12}Y \\ \dot{Y} = A_{21}X - A_{11}Y \end{cases} \quad (\text{II.2.12})$$

entonces su primera integral H , satisface (véase nota 8)

$$\frac{\partial H}{\partial Y} = A_{11}X + A_{12}Y \quad \text{y} \quad \frac{\partial H}{\partial X} = -(A_{21}X - A_{11}Y)$$

de donde integrando la primera igualdad respecto a Y , e imponiendo la segunda condición, se llega a

$$H(X, Y) = A_{11}XY + \frac{A_{12}}{2}Y^2 - \frac{A_{21}}{2}X^2$$

de donde se concluye que las curvas de nivel de la primera integral del sistema (II.2.11) son

$$H(X, Y) = A_{21}X^2 - 2A_{11}XY - A_{12}Y^2 = C \quad (\text{II.2.13})$$

siendo C un número real arbitrario. El discriminante de la forma cuadrática (II.2.13) es $\delta = -(A_{21}A_{12} + A_{11}^2)$, por lo que la familia de curvas (II.2.13) representa una colección de hipérbolas si $(A_{21}A_{12} + A_{11}^2) > 0$, mientras que si $(A_{21}A_{12} + A_{11}^2) < 0$, representa una colección de elipses centradas en el origen.

Concluimos la sección enfatizando algunos resultados que han sido discutidos a lo largo de ella

1. La estabilidad del equilibrio para sistemas hamiltonianos, la define la propia geometría de éstos. En particular si el hamiltoniano satisface las condiciones (a), (b) y (c) de las páginas II.13 y II.14 el origen es estable - que no asintóticamente estable - concretamente es un centro. El hamiltoniano tiene una interpretación física precisa sobre la que no es necesario abundar.
2. Si un sistema autónomo de 2×2 es exacto y (x_0, y_0) es un punto de equilibrio del mismo, éste no puede ser atractor (local o global). Tampoco hay ciclos límite en el caso de existir una primera integral.

II.3. Teoremas de estabilidad de Lyapunov: La función de Lyapunov.

Teniendo en mente lo útil que resultó el hamiltoniano para decidir la estabilidad del equilibrio de los sistemas mecánicos descritos por (II.2.3), es que a continuación precisaremos las ideas intuitivas manejadas en la sección precedente. Concretamente, las siguientes son tareas que tomamos por propias a lo largo de esta sección.

1. Caracterización matemática de esas funciones de las que el hamiltoniano es sin duda solo un caso particular y que resultan ser excelentes auxiliares en el análisis de la estabilidad del equilibrio y cuya virtud es que no se requiere del conocimiento de las soluciones del sistema en cuestión.
2. Dar condiciones que permitan - de existir un hamiltoniano -

II.18

miano para el sistema de ecuaciones diferenciales - de-
 cidia no solo estabilidad, sino estabilidad asintótica
 global, pues recuérdese que la existencia de un atractor
 global es una de las formas consistentes con la coexis-
 tencia ecológica (véase página I.9).

Para empezar, observemos que del punto 2 con el
 que se concluye la sección II.2 se sigue que NO SE PUEDE - a través
 de sistemas exactos (en los que se incluyen los hamiltonianos) -
 modelar la coexistencia del tipo 1 ó del tipo 2 (véase página I.9), pues
 en tales sistemas los atractores y los ciclos límite, no aparecen.
 Sin embargo, el análisis hecho en la sección anterior, nos da la
 pauta de cómo abordar el problema de la existencia de atractores
 para sistemas autónomos de $n \times n$, quedando de esta manera redu-
 cido a solo un caso particular la cuestión de la coexistencia del
 tipo 1 para sistemas (LV). Concretamente - además de tener el
 hamiltoniano un mínimo en el punto de equilibrio - la propiedad
 geométrica de aquil, que permitió concluir estabilidad de éste, es que
 sus curvas de nivel coinciden con las trayectorias del sistema (II.2.3)
 de ahí la ortogonalidad entre $\text{grad } H$ y el vector velocidad defini-
 do por el propio sistema (II.2.3). Con objeto de auxiliarnos de la imagen
 geométrica consideremos el sistema autónomo de 2×2 no exacto

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y) \\ \dot{y} = Q(x, y) \end{cases} \quad (\text{II.3.1})$$

para el que el origen es un punto de equilibrio aislado. De existir
 una función $H(t) = H(x(t), y(t))$ asociada a (II.3.1) que tenga las
 propiedades (a) y (b) de las páginas II.13 y II.14 y la (c) sea substi-
 tuída por

$$c') \dot{H}(t) = \text{grad } H(x(t), y(t)) \cdot (\dot{x}(t), \dot{y}(t)) < 0$$

para todo t y donde $(x(t), y(t))$ es cualquier solución (de (II.3.1)) distinta

de la trivial. En tales circunstancias esta especie de energía, sería una función estrictamente decreciente a lo largo de las soluciones de (II.3.1). La correspondiente imagen geométrica es la siguiente: El ángulo formado por el gradiente de H y el vector velocidad $(\dot{x}(t), \dot{y}(t))$ es obtuso en todo punto (x, y) , por lo que las trayectorias del sistema (II.3.1) cruzan a las "equipotenciales", hacia el punto de equilibrio, según se ilustra en la figura 11. Justamente esta es la situación en sistemas mecánicos en los que hay fuerzas disipativas (por ejemplo fricción).

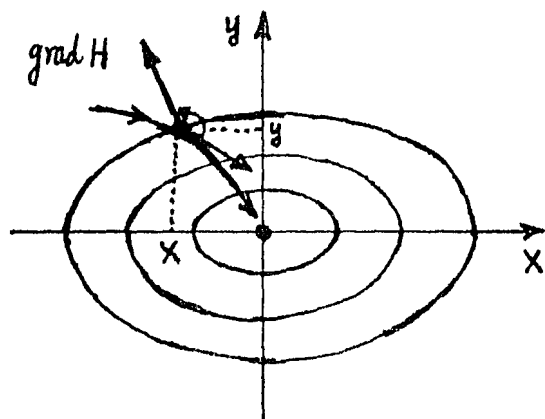


Fig. 11. La función H decrece a lo largo de las soluciones de (II.3.1).

Evidentemente que las ideas aquí desarrolladas pueden ser extendidas para sistemas autónomos de $n \times n$ como

$$\dot{x} = f(x) \quad (\text{I.1.1})$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$ y $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ a las que - mientras no se diga otra cosa - nos referiremos en esta sección, a lo largo de la cual supondremos que el origen es punto de equilibrio aislado de los mismos. Puestas así las cosas, esperamos que al lector le parezca no solamente natural sino también necesaria la introducción de la siguiente definición, en la que con Ω representamos a una región abierta de \mathbb{R}^n y que contiene al origen.

Definición 1. A una función $V: \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ continua, con pri-

II.20

medidas derivadas parciales continuas en Ω , tal que:

- i) Es positiva definida en Ω , es decir, $V(0) = 0$ y para todo punto $x \in \Omega$ diferente del origen, $V(x) > 0$
- ii) La derivada de V a lo largo de las soluciones del sistema (I.1.1)

$$\dot{V}(t) \equiv \frac{d}{dt} V(x(t)) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V(x)}{\partial x_i} f_i(x) \leq 0 \quad \forall x \in \Omega$$

se le llama Función de Lyapunov del (o para el) sistema²¹ (I.1.1)

Para el caso $n=2$ la imagen geométrica de una función de Lyapunov, aceptada en abundante literatura de estos temas, es que ésta tiene - en una vecindad del origen - el aspecto de una taza, según se ilustra en la figura 10. A pesar de lo popular de la interpretación, justo es decir aquí que ésta es solo una posibilidad, como lo hicieron ver Inselberg y Dula ([30]) quienes exhibieron una función de Lyapunov que no tiene un mínimo relativo aislado en el equilibrio, como comúnmente se interpreta la propiedad i). Para los detalles al respecto véase sección II.6. Mientras tanto, a continuación se enuncian y demuestran los teoremas que constituyen la base del Método Directo de Lyapunov o como también suele llamarsele 2º Método de Lyapunov.

Teorema 1 (sobre Estabilidad). Si en una vecindad del origen existe una función de Lyapunov para el sistema (I.1.1), entonces el origen es estable.

Demostración. Supóngase que existe una función de Lyapunov para el sistema (I.1.1). Por sea Ω una región abierta existe una bola abierta²² de radio $R > 0$ centrada en el origen $B_R(0)$ completamente contenida en Ω . Para cualquier $R > 0$

(21) Además de serlo para el sistema (I.1.1), agregamos: "y para el punto de equilibrio, en este caso el origen".

(22) Por bola abierta, entendemos el conjunto $B_R(0) = \{x \in \Omega \mid 0 \leq \|x\| < R\}$

dada podemos escoger un número real $c > 0$ tal que la "superficie de nivel" $V(x) = c$ esté totalmente contenida en $B_R(0)$. Como $c > 0$, existe $r > 0$ tal que la bola abierta de radio r con centro el origen $B_r(0)$ está contenida en la región cuya frontera es la superficie $V(x) = c$. Por otro lado, representemos con $\hat{x}(t)$ a la solución del problema

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = f(x) \\ \hat{x}(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (\text{II.3.2})$$

donde $x_0 \in B_r(0)$. Como V es no creciente a lo largo de las trayectorias, entonces

$$V(\hat{x}(t)) \leq V(x_0) = c_0 < c \quad \forall t \geq t_0$$

y del hecho de que $B_r(0) \subset \{x \mid V(x) \leq c\}$ concluimos que la trayectoria de $\hat{x}(t)$ no cruza la "superficie de nivel" $V(x) = c$, por supuesto tampoco cruza la frontera de la bola $B_R(0)$.

Toda vez que la elección de R fue arbitraria, lo anterior puede ser entendido de la siguiente manera: Dada cualquier $R > 0$ (léase $\epsilon > 0$), podemos encontrar un $r > 0$ (léase $\delta > 0$) tal que siempre que $\|x_0\| \leq r$ implica que $\|\hat{x}(t)\| \leq R$ para todo $t \geq t_0$. Pero esta es precisamente la definición de estabilidad (véase nota 6 del capítulo I). Por tanto, el origen es estable. En la figura 12 se ilustra esta situación para el caso $n=2$.

Teorema 2 (sobre Estabilidad Asintótica). Si en una vecindad del origen existe una función de Lyapunov para el sistema (I.1.1), tal que su derivada a lo largo de las trayectorias del mismo, $\dot{V}(t)$ es negativa definida, entonces el origen es asintóticamente estable.

Demostración. Que el origen es estable, es inmediato

a partir del teorema 1 (cuyas hipótesis se cumplen aquí).
 Queda por demostrar que $\lim_{t \rightarrow \infty} \hat{x}(t) = 0$, donde $\hat{x}(t)$ es solución a un problema como el (II.3.2).

Por hipótesis, V es estrictamente decreciente y eso solo en el origen, por lo que $V(\hat{x}(t)) < C_0 = V(x_0)$ para todo $t > t_0$ donde $\hat{x}(t)$ es como antes y para la que en particular sucede

$$\lim_{t \rightarrow \infty} V(\hat{x}(t)) = 0$$

Por continuidad de V , este límite se escribe como

$$V(\lim_{t \rightarrow \infty} \hat{x}(t)) = 0$$

igualdad que se da si y solo si $\lim_{t \rightarrow \infty} \hat{x}(t) = 0$

Por tanto, el origen es asintóticamente estable. En la figura 13 se ilustra este comportamiento, en el caso de dimensión dos.

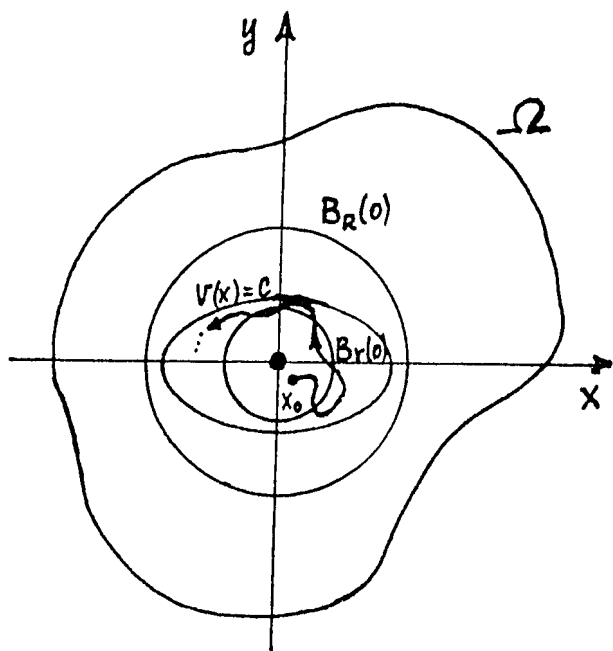


Fig. 12. Estabilidad del origen.

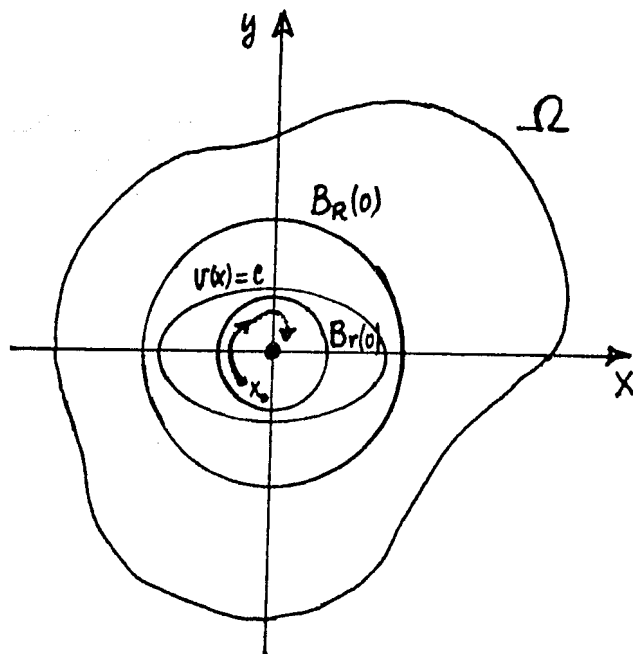


Fig. 13. Estabilidad asintótica del origen.

En el caso de inestabilidad, se tiene más de un teorema que la asegura. A continuación enunciamos dos de éstos cuya demostración omitiremos remitiendo al lector a las referencias [8] y [36]

Teorema 3 (sobre Inestabilidad). Si existe una función $V: \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ con primeras derivadas parciales continuas en Ω , $V(0) = 0$ cuya derivada respecto al sistema (I.1.1) \dot{V} es positiva definida y tal que para toda vecindad $\Omega' \subset \Omega$ que contenga al origen, exista al menos un punto \tilde{x} para el que $V(\tilde{x}) > 0$, entonces el origen es inestable.

Teorema 4 (sobre Inestabilidad). Si existe una función V cumpliendo las mismas condiciones del teorema 3, pero

$$\dot{V} = \lambda V + W$$

donde $\lambda > 0$ y W es: o idénticamente cero, o no negativa o no positiva, tal que en toda vecindad $\Omega' \subset \Omega$ que contenga al origen, exista al menos un punto \tilde{x} tal que $V(\tilde{x})W(\tilde{x}) > 0$, entonces el origen es inestable.

Una vez establecidos los anteriores teoremas - a reserva de dar ejemplos de funciones de Lyapunov para sistemas específicos - consideramos convenientemente hacer tres observaciones cuya intención no es restarles mérito alguno a estos teoremas, se trata más bien de caracterizar el terreno en el que se está.

- 0.1. La estabilidad (incluida la asintótica) y la inestabilidad, queda condicionada a la existencia de una función V que cumpla ciertas propiedades, pero nada se dice respecto a su construcción.

Este es un verdadero problema, al grado que la inexistencia de un procedimiento general de construcción es la principal limitación del Método.

- 0.2. En el caso de haber estabilidad asintótica, nada se dice respecto al tamaño de la región de atracción (véase nota 11 del capítulo I). Esto sobre todo es ventajoso desde el punto de vista práctico, pues de tener regiones de atracción "suficientemente extensas" ello bastaría para garantizar estabilidad asintótica global.
- 0.3. En las tres situaciones: estabilidad, estabilidad asintótica e inestabilidad, los teoremas establecen condiciones suficientes para que uno de estos comportamientos se dé. La búsqueda que queda pendiente es la de establecer condiciones necesarias y suficientes.

Sobre estas observaciones volveremos más adelante en este capítulo. Mientras tanto, damos pie a los ya anunciados ejemplos. Para empezar, establecemos un resultado que, por un lado, redondea gran parte de lo desarrollado en la sección II.2 y por otro, constituye una suerte de primer ejemplo de función de Lyapunov:

"El hamiltoniano de un sistema mecánico conservativo descrito por las ecuaciones (II.2.10) es función de Lyapunov para (II.2.10) si y solo si la energía potencial tiene un mínimo aislado en el origen".

Ejemplo 1. El hecho de que la primera integral del sistema exacto (II.2.12) sea una forma cuadrática - la (II.2.13) - motiva que busquemos como función de Lyapunov para el sistema lineal

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ \dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{cases} \quad (\text{II.3.3})$$

II. 25

precisamente a una forma cuadrática como

$$V(x_1, x_2) = X^t B X \quad (\text{II.3.4})$$

donde B es una matriz de 2×2 simétrica cuyas entradas se descomponen. Partiendo de (II.3.4) y utilizando (II.3.3) se puede demostrar (véase sección II:5) que al menos en el caso de que $\text{tr} A < 0$ y $\det A > 0$ la función

$$V(x_1, x_2) = \frac{-1}{2 \text{tr} A \det A} \left[(a_{22}x_1 - a_{12}x_2)^2 + (a_{21}x_1 + a_{11}x_2)^2 + \det A (x_1^2 + x_2^2) \right]$$

resulta ser de Lyapunov para (II.3.3), por lo que - según el teorema 2 - el origen es asintóticamente estable. Para los detalles sobre la construcción de esta función, véase sección II:5.

Ejemplo 2. En la ecuación de movimiento

$$\ddot{x} + k\dot{x} + x = 0 ; \quad k > 0 \quad (\text{II.3.5})$$

es natural buscar la función de Lyapunov como la energía total

$$V(x, y) = x^2 + y^2 ; \quad (y \equiv \dot{x}) \quad (\text{II.3.6})$$

cuya derivada respecto al sistema asociado a (II.3.5) es

$$\dot{V} = -2ky^2$$

que no es negativa definida, pues $\dot{V} = 0$ sobre el eje horizontal. Por tanto, lo más que podemos concluir para el origen es estabilidad.²³

Sin embargo, lo sorprendente de este caso es que la función

(23) Esto también ocurre para la ecuación $\ddot{x} + k_1\dot{x} + k_2x + x^2 = 0$ con k_1 y k_2 positivas, pues proponiendo como función de Lyapunov a la energía total

$$V(x, y) = \frac{y^2}{2} + \frac{1}{2}k_1x^2 + \frac{1}{3}x^3$$

se llega a $\dot{V} = -k_1y^2$

(II.3.6) puede ser modificada de suerte que la nueva si sea negativa definida. Veamos. Si se toma

$$\hat{V}(x, y) = x^2 + 2\alpha xy + y^2$$

donde α debe escogerse de suerte que

$$\dot{\hat{V}} = -2[(k-\alpha)y^2 + \alpha kxy + \alpha x^2]$$

sea negativa definida. Esto ocurre, si α satisface

$$0 < \alpha < \frac{4k}{k^2 + 4}$$

Por tanto, si estas desigualdades se cumplen, entonces - según el teorema 2 - el origen es asintóticamente estable.

Este es sólo un caso particular del siguiente

Ejemplo 3 (Brauer y Nohel, [B]).

Como antes, en la ecuación de movimiento

$$\ddot{x} + \dot{x} + g(x) = 0 \quad (\text{II.3.7})$$

donde g es una función continuamente diferenciable para $|x| < k$, $k > 0$, $xg(x) > 0$ para $x \neq 0$ y $g(0) = 0$, es natural proponer como función de Lyapunov para el sistema asociado a (II.3.7) a la energía total

$$V(x, \dot{x}) = \frac{\dot{x}^2}{2} + \int_0^x g(s) ds \quad (\text{II.3.8})$$

cuya derivada

$$\dot{V} = -\dot{x}^2$$

no es negativa definida, pues $\dot{V} = 0$ para todo punto de la forma $(x, 0)$. Por tanto, según el teorema 1, concluimos estabilidad - que no estabilidad asintótica - para el origen. Sin embargo, la función (II.3.8) puede modificarse.

se como

$$\begin{aligned}\hat{V}(x, \dot{x}) &= \frac{\dot{x}^2}{2} + \int_0^x g(s) ds + \beta g(x) \dot{x} \\ &= V(x, \dot{x}) + \beta g(x) \dot{x}\end{aligned}$$

y demostrar - con su ayuda - estabilidad asintótica del origen, pues se puede seleccionar β de manera que

$$\dot{\hat{V}} = -\dot{x}^2 + \beta g'(x) \dot{x}^2 - \beta g(x) \dot{x} - \beta g^2(x)$$

sea negativa definida (véase [8]).

El siguiente par de ejemplos se deben a W. Hahn ([18]).
Ejemplo 4. Para el sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = x(a^2 - x^2 - y^2) + y(x^2 + y^2 + a^2) \\ \dot{y} = -x(a^2 + x^2 + y^2) + y(a^2 - x^2 - y^2) \end{cases} \quad (\text{II.3.9})$$

donde a es un número real arbitrario, la función

$$V(x, y) = x^2 + y^2$$

- que evidentemente es positiva definida en el plano - tiene por derivada

$$\dot{V} = -2(x^2 + y^2)(x^2 + y^2 - a^2) \quad (\text{II.3.10})$$

la que, para $a = 0$ resulta ser negativa definida y por tanto - según el teorema 2 - el origen es asintóticamente estable, mientras que si $a \neq 0$, el origen es inestable pues en tal caso (II.3.10) es positiva en la región $x^2 + y^2 < a^2$.

Ejemplo 5. En el sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = (x - \beta y)(ax^2 + by^2 - 1) \\ \dot{y} = (\alpha x + y)(ax^2 + by^2 - 1) \end{cases} \quad (\text{II.3.11})$$

la función

$$V(x,y) = \alpha x^2 + \beta y^2$$

- que para α y β positivas, es positiva definida en el plano - tiene por derivada a lo largo de las soluciones de (II.3.11)

$$\dot{V} = 2(\alpha x^2 + \beta y^2)(\alpha x^2 + \beta y^2 - 1)$$

la que resulta ser negativa definida en la región $\alpha x^2 + \beta y^2 < 1$ y por tanto - según el teorema 2 - el origen es asintóticamente estable.

Concluimos la sección, haciendo un par de señalamientos:

1. En los ejemplos 2 y 3 aquí discutidos se plantea una problemática en verdad importante pues a pesar de existir trayectorias de los sistemas asociados a las ecuaciones (II.3.5) y (II.3.7) para las que la derivada de las correspondientes funciones de Lyapunov se anula, éstas pueden modificarse de suerte que el Método Directo nos permita concluir estabilidad asintótica del equilibrio. Así, esta situación nos conduce a analizar la relación que hay entre el conjunto

$$E = \{x \in \mathcal{R} \mid \dot{V}(x) = 0\} \quad (\text{II.3.12})$$

y la estabilidad del equilibrio. En la sección que sigue veremos que tal análisis no es independiente de la observación 0.2 hecha en la página II.24.

2. Respecto a la observación 0.3, de la página II.24 diremos que si se ha trabajado. Un buen repertorio de los teoremas inversos de Lyapunov puede verse en la referencia [43].

II.4. Algunas extensiones al Método Directo de Lyapunov.

Primo a establecer los resultados de esta sección, introduciremos algunos conceptos de uso corriente en estos temas. Empezamos precisando la idea de conjunto al que tiende una solución al problema (II.3.2) cuando $t \rightarrow \infty$.

Definición 2. Un punto p se dice que está en el conjunto límite positivo Γ^+ de $x(t)$ - solución al problema (II.3.2) - si para toda $\varepsilon > 0$ y toda $T > 0$ le corresponde un $t > T$ tal que $\|x(t) - p\| < \varepsilon$. Una forma equivalente de establecer esto es diciendo que existe una sucesión $\{t_n\}$ que tiende a infinito con n tal que $x_n \rightarrow p$ cuando $n \rightarrow \infty$, donde $x_n = x(t_n)$. En la figura 14 se muestra que el origen es el único elemento de Γ^+ de la solución al problema

$$\begin{cases} \dot{x} = -x & ; & x(t_0) = a \neq 0 \\ \dot{y} = y & ; & y(t_0) = 0 \end{cases}$$

mientras que en la figura 15 se ve que el ciclo límite \mathcal{C} es el conjunto límite positivo de la solución al problema

$$\begin{cases} \dot{r} = r(1-r) & ; & r(t_0) = r_0 \neq 0, 1 \\ \dot{\theta} = 1 \end{cases}$$

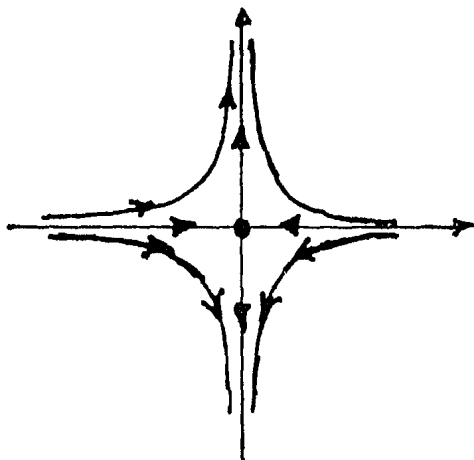


Fig. 14. El origen es el conjunto límite

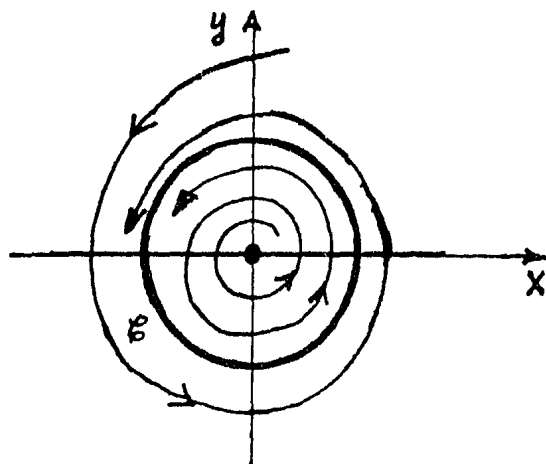


Fig. 15. El ciclo límite \mathcal{C} es el conjunto límite.

Definición 3. Un conjunto I se dice que es invariante, si

toda solución del problema (II.3.2) que parte de I permanece en I para todo tiempo posterior. Continuando con los ejemplos anteriores en las figuras 16 y 17 se ilustran respectivos conjuntos invariantes.

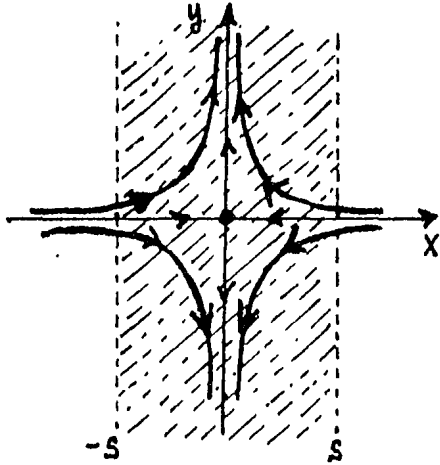


Fig. 16. Toda solución que parte de la región sombreada permanece allí para tiempos posteriores.

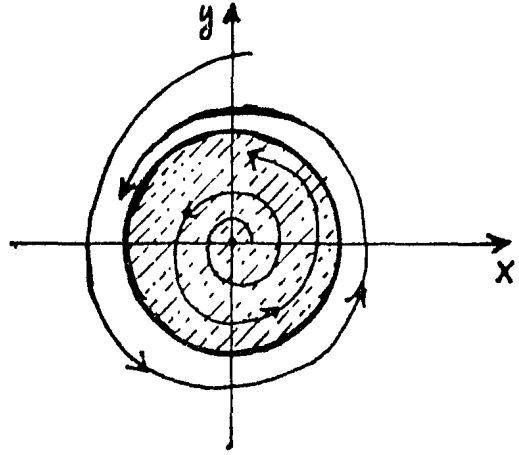


Fig. 17. Otro ejemplo de conjunto invariante.

Relativo a estas cuestiones se tiene el siguiente resultado, para cuya demostración remitimos al lector a la referencia [8].

Teorema 5. Si $x(t)$, solución al problema (II.3.2), es acotada para todo $t > t_0$, entonces su conjunto límite positivo Γ^+ es no vacío, acotado e invariante.

Definición 4. Sea $x(t)$ solución al problema (II.3.2), se dice que $x(t)$ tiende a un conjunto M cuando $t \rightarrow \infty$ si para cada $\varepsilon > 0$, existe un $T > 0$ con la propiedad de que para cada $t > T$ hay un p en M tal que $\|x(t) - p\| < \varepsilon$. Esta definición establece que para todo $t > T$, los puntos $x(t)$ distan menos de ε del conjunto M .

El siguiente es un resultado útil para nuestros propósitos inmediatos.

Proposición 1. Si $x(t)$ - solución al problema (II.3.2) es acotada para todo $t > t_0$, entonces $x(t)$ tiende a su conjunto límite positivo cuando $t \rightarrow \infty$.

Demostración. Esta se hará por contradicción. Supóngase que $x(t)$ no tiende a su conjunto límite positivo, entonces para toda $\varepsilon > 0$, existe $T > 0$ tal que al menos para un $t > T$, $\|x(t) - p\| \geq \varepsilon$ para todo p en Γ^+ , de aquí que hay una sucesión t_n que tiende a ∞ con n y tal que $\|x(t_n) - p\| \geq \varepsilon$ para todo p en Γ^+ . Por hipótesis, $x(t)$ es acotada para todo $t > t_0$, por lo que la sucesión $x(t_n)$ tiene un punto límite en Γ^+ . Esto contradice lo que se supuso y por tanto queda demostrada la proposición.

Los teoremas²⁴ que siguen (debidos a J. P. La Salle [35]) son los que establecen la relación entre el conjunto E , definido en la página II.28, y la estabilidad del equilibrio.

Teorema 6. Sea Ω un conjunto cerrado y acotado (compacto) tal que toda solución del problema (II.3.2) con x_0 en Ω permanece en Ω para todo $t > t_0$. Supóngase que hay una función escalar $V(x)$ con primeras derivadas parciales continuas en Ω tal que $\dot{V}(x) \leq 0$ en Ω . Sea E el conjunto (II.3.12), contenido en Ω . Sea M el más grande conjunto invariante contenido en E , entonces toda solución a (I.1.1) con x_0 en Ω tiende a M cuando $t \rightarrow \infty$.

Demostración. Sea $\hat{x}(t)$ solución al problema (II.3.2) con x_0 en Ω . Hay que demostrar que para todo $t > T$ los puntos $\hat{x}(t)$ están menos de $\varepsilon > 0$ del conjunto M (véase definición 4). Como $\hat{x}(t)$ permanece en Ω para todo $t > t_0$, ahí resulta acotada. Para $\hat{x}(t)$ tomemos $R \subset \Omega$ (compacto) que la contenga. La función $V(t) \equiv V(\hat{x}(t))$ es continua en R y por ser éste compacto, $V(\hat{x}(t))$ resulta acotada inferiormente, entonces $V(t)$

(24) En los casos en los que se incluye la demostración, ésta solamente se bosqueja. Para más detalles pueden consultarse las referencias [8], [35] y [36].

tiene ínfimo ahí, llamémoslo c . Por hipótesis $V(t)$ es decreciente y utilizando el último comentario

$$\lim_{t \rightarrow \infty} V(t) = c$$

Más aún, $V(\hat{x}(t)) = c$ sobre Γ^+ . Para ver esto, tómese p en Γ^+ , entonces - por definición - existe una sucesión t_n que tiende a ∞ con n tal que

$$\hat{x}(t_n) \rightarrow p \\ n \rightarrow \infty$$

de donde

$$V(\hat{x}(t_n)) \rightarrow V(p) \\ n \rightarrow \infty.$$

Pero $V(\hat{x}(t_n)) \rightarrow c$, entonces $V(p) = c$ y como p es arbitrario, entonces para todo p en Γ^+ , $V(p) = c$. Γ^+ es un conjunto invariante y de aquí $\dot{V}(x) = 0$ sobre Γ^+ . Así, Γ^+ está en M . Por tanto, $\hat{x}(t) \rightarrow M$ cuando $t \rightarrow \infty$.

El siguiente teorema - que es una consecuencia del anterior - precisa el conjunto Ω .

Teorema 7. Sea Ω una región cerrada definida por $V(x) \leq l$ y supóngase que V tiene derivadas parciales continuas en Ω . Si además Ω es acotada y $\dot{V}(x) \leq 0$ en Ω entonces toda solución que parte de Ω tiende a M cuando $t \rightarrow \infty$ (El conjunto M es el definido en el teorema 6)

En [35] y [36] se dan ejemplos donde estos dos últimos teoremas se aplican. El siguiente es un concepto central en el presente trabajo en el que lo hemos utilizado como estabilidad global.

Definición 5. Cuando todo el espacio es la región de estabilidad asintótica entonces se dirá que se tiene esta-

bilidad completa. Tambien es usual decir que el sistema (I.1.1) es completamente estable si el origen es estable y si toda solución tiende al origen cuando el parámetro t tiende a infinito.

Los siguientes dos teoremas son básicos para las aplicaciones en el capítulo III.

Teorema 8. Sea $V(x)$ una función escalar con primeras derivadas parciales continuas para toda x . Supóngase que

$$i) V(x) > 0 \text{ para todo } x \neq 0$$

$$ii) \dot{V}(x) \leq 0 \text{ para todo } x$$

Sea E el conjunto de todos los puntos donde $\dot{V}(x) = 0$ y sea M el más grande conjunto invariante contenido en E . Entonces toda solución del sistema (I.1.1) acotada para $t \geq t_0$ tiende a M cuando $t \rightarrow \infty$.

Teorema 9. Sea $V(x)$ una función escalar con primeras derivadas parciales continuas que satisfacen

$$i) V(x) > 0 \text{ para todo } x \neq 0$$

$$ii) \dot{V}(x) \leq 0 \text{ para todo } x$$

$$iii) V(x) \rightarrow \infty \text{ cuando } \|x\| \rightarrow \infty.$$

Si \dot{V} no es idénticamente cero a lo largo de cualquier otra solución que no sea el origen, entonces el sistema (I.1.1) es completamente estable.

Terminamos la sección diciendo que en las referencias [35], [36] y [29] se dan ejemplos de como determinar la extensión de la región de atracción. En particular en [29] se construye un método para tales fines.

II.5. Algo sobre la construcción de Funciones de Lyapunov.

En la observación 0.1 de las páginas II.23 y II.24 se plantea un problema que hoy día no está resuelto de manera general, a saber: ¿Cómo construir una función de Lyapunov para un sistema de ecuaciones diferenciales concreto?. Excepto en ciertos sistemas (por ejemplo mecánicos) donde la interpretación física sugiere qué tipo de funciones pueden ser candidatas adecuadas, la respuesta es: NO HAY METODO GENERAL, pues, por ejemplo en el sistema*

$$\begin{cases} \dot{p} = \frac{k_1 \sigma \mu a p}{1 + \sigma \phi \mu^2 p} - \gamma p \\ \dot{a} = \epsilon a (K - a) + \frac{k_2 \sigma \mu^2 a p}{1 + \sigma \phi \mu^2 p} \end{cases}$$

que aparece en problemas de interacción polinizador-planta, digamos que suente de interpretación física²⁵ nos puede ayudar en la búsqueda de una función de Lyapunov.

Aunque la construcción de funciones de Lyapunov para sistemas particulares queda en manos del ingenio del sujeto interesado, el panorama no es tan desolador. A continuación, de manera breve, exponemos algunas de las ideas que se han desarrollado. Al lector interesado en profundizar, lo remitimos a las referencias que se indican.

Empezamos retomando el ejemplo 1 expuesto en las páginas II.24 y II.25, donde la búsqueda de una función de Lyapunov para el sistema (II.3.3), se transforma en un problema algebraico, que no necesariamente es más simple. Veamos, al obtener la derivada de (II.3.4) a lo largo de las trayectorias de (II.3.3) se llega a

$$\dot{V}(t) = X^t (A^t B + B A) X \quad (\text{II.5.1})$$

(25) Aquí se está usando la palabra "física" en sentido amplio y no en el sentido de la Ciencia Física.

(*) Soberón M.J., Carlos Martínez del Río. J. Theor. Biol. (1981) 91, 363-378.

donde B es una matriz de 2×2 simétrica que ha de seleccionarse de manera que (II.3.4) sea positiva definida y (II.5.1) sea negativa definida. Una forma de que esto último ocurra es escogiendo a B como

$$(A^t B + BA) = -I \quad (\text{II.5.2})$$

donde I es la matriz identidad. En tal caso

$$\dot{V}(t) = -x_1^2 - x_2^2$$

que evidentemente es negativa definida. En [31], se demuestra que hay una solución de (II.5.2) de la forma

$$B = m(A^t)^{-1} A^{-1} + nI \quad (\text{II.5.3})$$

donde m y n son constantes. Al substituir (II.5.3) en la parte izquierda de (II.5.2) se tiene

$$A^t B + BA = m[A^{-1} + (A^t)^{-1}] + n(A^t + A)$$

que escrita explícitamente y utilizando (II.5.2) se llega a

$$\frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} 2ma_{22} + 2na_{11} \det A & (n \det A - m)(a_{12} + a_{21}) \\ (n \det A - m)(a_{12} + a_{22}) & 2ma_{11} + 2na_{22} \det A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

igualdad que se cumple si

$$m = -\frac{\det A}{2 \operatorname{tr} A} \quad \text{y} \quad n = -\frac{1}{2 \operatorname{tr} A}$$

las que son válidas para $\operatorname{tr} A \neq 0$ (queda excluido el caso de los centros). Substituyendo m y n en (II.5.3) y escribiendo explícitamente tal igualdad, tenemos

$$B = \frac{-1}{2 \operatorname{tr} A \det A} \begin{pmatrix} a_{21}^2 + a_{22}^2 + \det A & -a_{11}a_{21} - a_{12}a_{22} \\ -a_{11}a_{21} - a_{12}a_{22} & a_{11}^2 + a_{12}^2 + \det A \end{pmatrix}$$

la que al ser substituida en (II.3.4) da lugar a la función $V(x_1, x_2)$ de la página II.25. Tal función resulta ser positiva definida al menos en el caso de que $\operatorname{tr} A < 0$ y $\det A > 0$.

El procedimiento descrito aquí, no es más que un caso particular del método desarrollado por W. Hahn ([38]) para sistemas lineales de $n \times n$

$$\dot{x} = Ax \quad (\text{II.5.4})$$

donde A es una matriz constante. Así pues, buscando como función de Lyapunov para (II.5.4) a una forma cuadrática como

$$V(x) = x^t B x$$

donde B (de $n \times n$, simétrica) es una matriz incógnita la que habrá de buscarse de suerte que

$$\dot{V}(x) = x^t (A^t B + B A) x$$

sea negativa definida. Una forma de que esto suceda es imponiendo la condición $A^t B + B A = -C$, donde C es una matriz (cualquiera) positiva definida. En estas condiciones, el problema se redujo a un problema algebraico: Se trata de obtener la solución de un sistema con $\frac{n(n+1)}{2}$ ecuaciones lineales y $\frac{n(n+1)}{2}$ incógnitas (las b_{ij} , $i, j = 1, 2, \dots, n$).

A manera de ejemplo considérese la conocida ecuación de movimiento

$$\ddot{x} + 2p\dot{x} + w^2 x = 0$$

Busquemos como función de Lyapunov para el sistema asociado a esta ecuación a una forma cuadrática

$$V(x, y) = b_{11}x^2 + 2b_{12}xy + b_{22}y^2$$

siguiendo el procedimiento descrito, se llega a

$$\dot{V}(x, y) = -(c_{11}x^2 + 2c_{12}xy + c_{22}y^2)$$

y obteniendo las entradas de B se concluye que

$$b_{11} = c_{11} \left(\frac{p}{w^2} + \frac{1}{4p} \right) - c_{12} + \frac{w^2}{4p} c_{22}$$

$$b_{12} = \frac{c_{11}}{2w^2}$$

$$b_{22} = \frac{1}{4p} \left(c_{22} + \frac{c_{11}}{w^2} \right)$$

En la referencia [27], basados en el concepto de primeras integrales, dan un procedimiento para construir una función de Lyapunov para el sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= -g(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{aligned}$$

que es el asociado a la ecuación diferencial de orden n

$$\frac{d^n x}{dt^n} + g\left(x, \dot{x}, \dots, \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}}\right) = 0$$

Para un sistema de la forma

$$\dot{x} = A(x)x$$

donde la matriz $A(x)$ tiene la forma

$$A(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_1(x) & b_2(x) & \dots & \dots & b_n(x) \end{pmatrix}$$

en la referencia [27] se da un procedimiento para construir una función de Lyapunov de la forma

$$V(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}(x_i, x_j) x_i x_j \quad ; \quad a_{ij} = a_{ji}$$

Terminamos la sección señalando que en el cuadro 1 se exhiben algunos tipos de funciones de Lyapunov que se han utilizado en los análisis de estabilidad. Los sistemas de los cuales éstas son funciones de Lyapunov se dan en las referencias del artículo de Gurđ y Lapidus ([7]).

1. $V(x) = \ f(x)\ ^2$ (Método de Krasovskii).	6. $V(x) = V_1 + \alpha V_2$; V_1 y V_2 se construyen separadamente.
2. $V(x) = f^t A f$ (Método de Krasovskii).	7. $V(x) = \sum_{i=1}^n (f_i)^2 + (g_i)^2$
3. $V(x) = x^t B x$	8. $V(x_1, x_2; x_{10}, x_{20}) = \left[x_1 \ln \frac{x_1}{x_{10}} + x_2 \ln \frac{x_2}{x_{20}} \right]^2$ (Energía Libre de Gibbs).
4. $V(x) = \int_0^{x_1} (a f_1 - b f_2) d\mu + \frac{1}{2} (dx_1 + b x_2)$; (Método de Hahn)	9. $V(x) = \sum_{i=1}^n \ f_i\ $ (Norma Euclidiana)
5. $V(x) = \frac{1}{2} x_2^2 + \int_0^{x_1} g(\mu) d\mu$ (Método de La Salle).	

Cuadro 1. Funciones de Lyapunov de uso común. Datos tomados del artículo de Gurđ y Lapidus ([7]).

II.6. Sobre la geometría de las funciones de Lyapunov.

En base a la definición 1 de la sección II.3 se hace una interpretación geométrica de las funciones de Lyapunov, que es aceptada en abundante literatura sobre estos temas, por ejemplo en [36] y [8]. Tal interpretación descansa en el hecho de que -dicen- las funciones con esas propiedades han de tener un mínimo relativo aislado en el punto de equilibrio, por lo que su imagen geométrica local es la de una silla, como la que se ilustra en la figura 10. La utilidad de tales funciones de Lyapunov para hacer análisis de estabilidad está fuera de discusión, sin embargo diremos que tal interpretación no necesariamente es cierta, pues pueden exhibirse funciones de Lyapunov que no tienen ese aspecto y sea igualmente útiles para semejantes propósitos.

En la presente sección se muestra un ejemplo de estas funciones, cuya construcción se debe a Inselberg y Dula ([30]). Esta, parte de las propiedades que tienen las funciones del tipo

$$\hat{h}(x) = \begin{cases} x^{2N} \operatorname{sen} \frac{1}{x} & ; \quad x \neq 0 \quad ; \quad n \in \mathbb{Z}^+ \\ 0 & ; \quad x = 0 \end{cases} \quad (\text{II.6.1})$$

quienes poseen derivada continua hasta de orden $N-1$ en $x=0$, pero la N -ésima derivada no es continua en ese punto. Para hacer de (II.6.1) una función positiva definida solo basta considerar

$$h(x) = \begin{cases} x^{2N} \left(\operatorname{sen} \frac{1}{x} + 2 \right) & ; \quad x \neq 0 \\ 0 & ; \quad x = 0 \end{cases}$$

la que tiene las mismas propiedades de diferenciable de \hat{h}

y no tiene mínimo aislado en $x=0$. Más aún, no es difícil ver que

$$0 \leq \psi_1(x) \leq h(x) \leq \psi_2(x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \text{ y } N > 1 \quad (\text{II.6.1}')$$

donde $\psi_1(x) = x^{2N}$ y $\psi_2(x) = 3x^{2N}$ que son monótonas. Para el caso $N=2$, el aspecto geométrico de h es como el que se ilustra en la figura

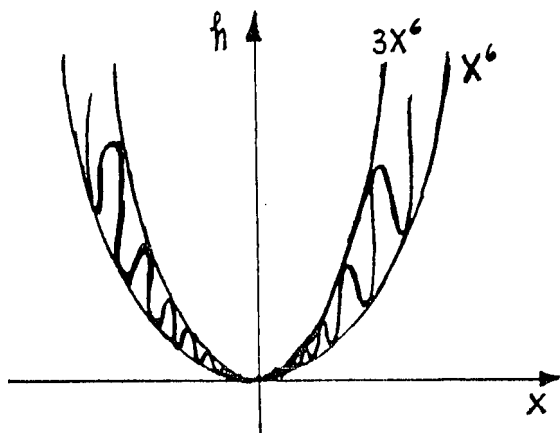


Fig. 18 Función de Lyapunov que no tiene un mínimo aislado en el equilibrio.

Por otro lado, si se considera la ecuación diferencial

$$\dot{x} = -\frac{d}{dx} h(x) \quad (\text{II.6.2})$$

puede verificarse que h es función de Lyapunov para ésta, pues su derivada a lo largo de las soluciones de (II.6.2) es

$$\dot{h}(t) = -\left[\frac{dh(x(t))}{dx}\right]^2 \leq 0$$

Estas ideas pueden generalizarse para dimensiones mayores, pues solo basta considerar la función $H: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ con regla de correspondencia

$$H(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i^{2N} \left(\sin \frac{1}{x_i} + 2 \right) \quad (\text{II.6.3})$$

que tiene derivadas parciales continuas hasta de orden $N-1$ en el origen, es positiva definida en $D = \{ (x_1, \dots, x_n) \mid |x_i| < 1 \}$, $i=1, \dots, n$ no tiene un mínimo aislado en el origen y para todo punto en D sucede que

$$0 \leq H(x_1, \dots, x_n) \leq 3 \|x\|^2 \quad (\text{II.6.3}')$$

Para el sistema autónomo tipo gradiente

$$\dot{X} = -\text{grad } H(x_1, \dots, x_n) \quad (\text{II.6.4})$$

la función (II.6.3) es de Lyapunov, pues su derivada a lo largo de las trayectorias de (II.6.4)

$$\dot{H}(t) = -\|\text{grad } H(x_1, \dots, x_n)\|^2 \leq 0$$

y por tanto - según el teorema 1 de estabilidad - el equilibrio es estable.

Resumiendo: se ha construido una función de Lyapunov cuya gráfica es "ondulada" y está contenida en la región limitada por la gráfica de dos funciones monótonas y lo fundamental: no tiene un mínimo aislado en el equilibrio. También, en las figuras 19 y 21 se ilustran las curvas de nivel de sendas funciones de Lyapunov cuyo aspecto no es el ortodoxo.

Las propiedades (II.6.1') y (II.6.3') no son más que caso particular de un resultado de W. Hahn ([18]) quien demostró que si V es una función de Lyapunov para un sistema autónomo de $n \times n$ entonces existen funciones $\psi_i(\|x\|)$ $i=1, 2$ monótonas crecientes en la norma $\|x\|$ tales que

$$\varphi_1(\|x\|) \leq V(x) \leq \varphi_2(\|x\|)$$

En el caso particular discutido aquí es inmediato ver quienes son estas funciones.

II.7. Sobre la no unicidad de funciones de Lyapunov.

Ya hemos hablado sobre las dificultades que trae la inexistencia - hasta hoy - de un método general de construcción de funciones de Lyapunov para los sistemas, en particular los autónomos. Si a aquéllas agregáramos la unicidad, consideráramos que el problema sería aún más complicado, pues: se trataría no de construir (como sea) una función de Lyapunov, sino LA función de Lyapunov para el sistema en cuestión.

El par de ejemplos que a continuación discutimos disipan el problema que aquí hemos planteado. Veamos.

Ejemplo 1. (Tuljapurkar y Semura [57]). Consideremos el sistema de Lotka-Volterra para dos especies en competencia simétrica

$$\dot{N}_i = N_i(1 + \alpha - N_i - \alpha N_j) \quad i, j = 1, 2; i \neq j \quad (\text{II.7.1})$$

cuyo equilibrio factible es el punto $(1, 1)$. Introduciendo las variables $x_i = \ln N_i$, el sistema (II.7.1) se transforma en

$$\dot{x}_i = -(e^{x_i} - 1) - \alpha(e^{x_j} - 1) \quad (\text{II.7.1}')$$

El que - según Tuljapurkar y Semura - tiene las siguientes funciones de Lyapunov asociadas.

$$V_1(x_1, x_2) = (e^{x_1} - 1)^2 + 2\alpha(e^{x_1} - 1)(e^{x_2} - 1) + (e^{x_2} - 1)^2$$

$$V_2(x_1, x_2) = e^{x_1} + e^{x_2} - x_1 - x_2 - 2$$

La tercera función la tomamos de la propuesta por Gilpin (véase página III.14)

$$V_3(x_1, x_2) = \int_{(x_1, x_2)}^{(0,0)} (\dot{x}_1, \dot{x}_2) \cdot (dx_1, dx_2)$$

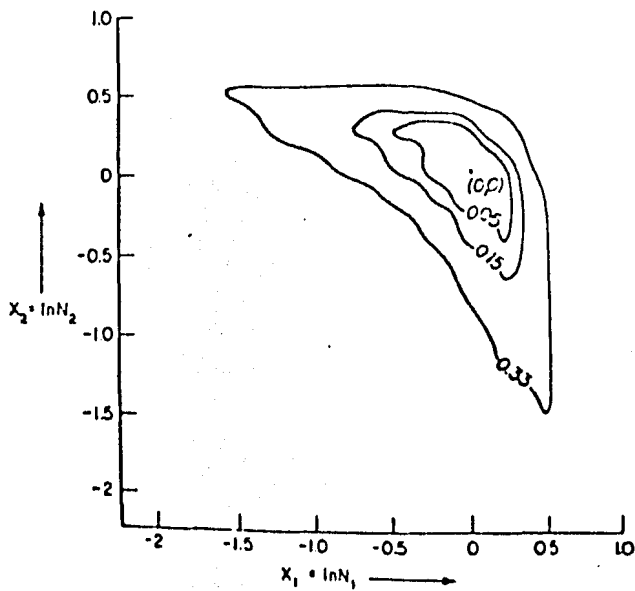


Fig.19. Curvas de nivel de V_1

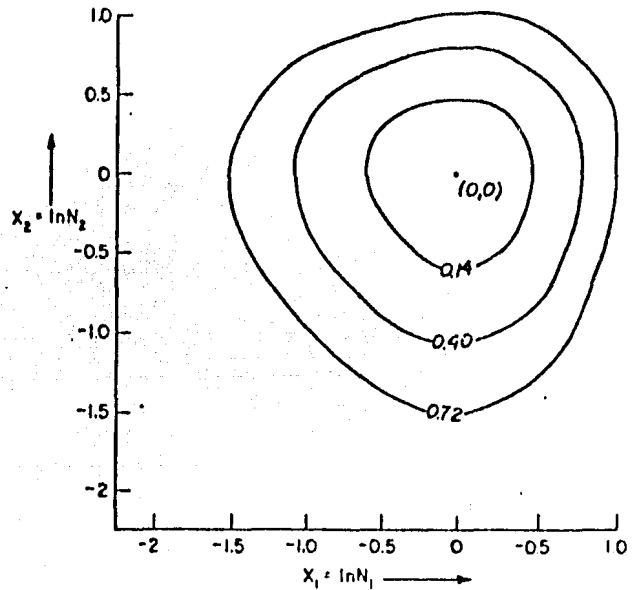


Fig.20. Curvas de nivel de V_2

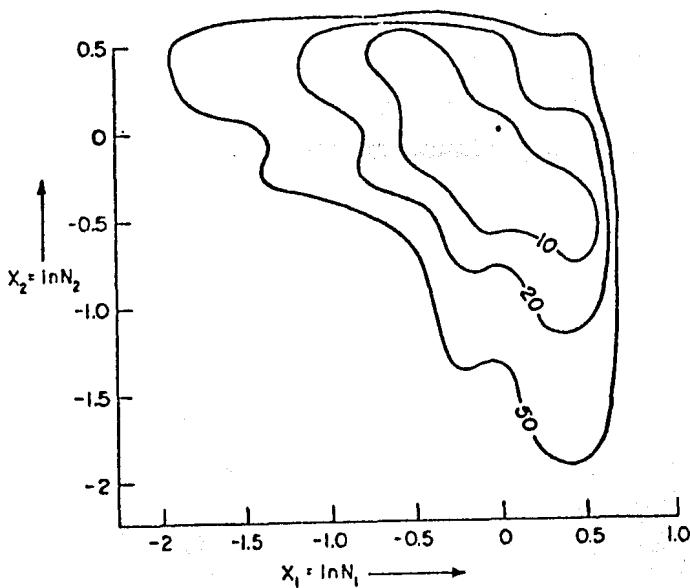


Fig.21. Curvas de nivel de V_3

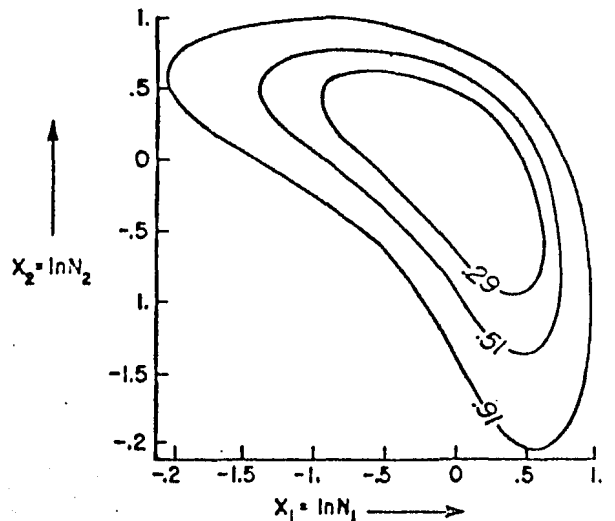


Fig.22. Curvas de nivel de V_4

La cuarta función - dice Tuljapuskos y Semura - describe los

aspectos cualitativos del comportamiento temporal del sistema (II.7.1') cuando una pequeña cantidad de ruido blanco dependiendo de la densidad, es añadido". No dicen explícitamente como la construyen. En las figuras 19, 20, 21 y 22 se pueden ver las respectivas curvas de nivel de tales funciones de Lyapunov para cuando $\alpha = 0.7$

Ejemplo 2 (Gurel y Lapidus [17]). El siguiente es un sistema que describe ciertos mecanismos de reacción (véase página III.38)

$$\dot{x}_i = \sum_j k_{ij}(x) [g_j x_j - x_i g_i]$$

Este - según Gurel y Lapidus - tiene las siguientes funciones de Lyapunov

$$V_1 = \frac{1}{2} \sum_i g_i x_i^2$$

$$V_2 = \sum_i \int f(g_i x_i) dx_i$$

$$V_3 = \sum_i g_i x_i^m$$

$$V_4 = \sum_i x_i \ln g_i x_i$$

Aunque el problema metodológico subsiste, el hecho de que un sistema tenga más de una función de Lyapunov asociada, de alguna manera "facilita" el análisis de estabilidad a través del 2º Método Directo, pero ciertamente origina una discusión respecto a la relación existente entre diferentes funciones de Lyapunov de un mismo sistema. Este es el contenido de la sección que sigue, donde lo abordaremos desde el punto de vista del concepto de norma en el espacio donde se está trabajando

II.8. Funciones de Lyapunov, Normas y Estabilidad.

Antes de entrar al análisis del problema planteado

al final de la sección precedente, diremos que la propiedad (i) de una función de Lyapunov clásica (véase página II.20) de manera natural motiva estudiar la conexión entre funciones de Lyapunov y la función distancia en el espacio fase en el que se trabaja.

Este aspecto de las multicitadas funciones de Lyapunov, ya ha sido trabajado. Rosen ([50]), por ejemplo, menciona:

... " Ya hemos notado que las funciones de Lyapunov pueden ser interpretadas como una clase de energía generalizada. Ahora apuntamos una relación extremadamente importante entre las funciones de Lyapunov y las posibles funciones distancia (métricas o normas) que puedan ser impuestas al espacio de estados. Geométricamente es evidente y no es difícil probarlo en general que si $V(x, y)$ es una función de Lyapunov para un sistema dinámico, entonces podemos modificar $V(x, y)$ para obtener una nueva función $V'(x, y)$ con las siguientes propiedades:

1. Para toda constante C suficientemente pequeña, la curva cerrada $V'(x, y) = C$ es convexa, esto es, si dos puntos no pertenecen a la curva, entonces el segmento que los une tampoco pertenece a la curva.
2. Las curvas $V'(x, y) = C$ son simétricas con respecto al origen, esto es, si $V'(x, y) \leq C$ entonces $V'(x, -y) \leq C$.
3. $V'(x, y)$ es también función de Lyapunov para el sistema".

Más aún, resulta que Rosen utiliza la función $V'(x, y)$ para introducir una norma²⁶, de la siguiente manera

... " Ahora escojamos arbitrariamente una de estas curvas $V'(x, y) = C$ la cual jugará el papel de "círculo unitario" para nuestra norma. Para (x, y) en Ω , dibujamos la línea que une a (x, y) con el origen. Esta línea intersectará a nuestro "círculo uni-

(26) Véase nota de pie de página número 27

radio" en un par de puntos; sea (x_0, y_0) el punto de intersección más cercano a (x, y) . Ya que estos puntos están en la misma línea, existe un número ρ (que depende de x) tal que $x = \rho x_0$, $y = \rho y_0$. Llamamos a este número $\rho(x, y)$ la longitud o norma de (x, y) con respecto al círculo unitario $V'(x, y) = c$. Más aún, ρ tiene las siguientes propiedades de una norma²⁷:

1. $\rho(0, 0) = 0$
2. $\rho(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| \rho(x, y)$
3. $\rho(x_1 + x_2, y_1 + y_2) \leq \rho(x_1, y_1) + \rho(x_2, y_2)$ "

Rosen da la demostración de este enunciado.

También en base a una función de Lyapunov (la III.2.22), Aiken y Lapidus ([1]) introducen una norma en el espacio fase del sistema (III.2.20). Esto lo hacen desarrollando en serie de Taylor alrededor de cero, la exponencial que aparece en (III.2.22) y cortando la serie hasta el término cuadrático, escogen como norma²⁸ de $N = (N_1, N_2, \dots, N_n)$, a

$$\|N\|^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \beta_i \bar{x}_i N_i^2 \quad (\text{II.8.1})$$

Dada la arbitrariedad de la función de Lyapunov considerada por Rosen, resulta entonces natural la siguiente conclusión

"Si $V(x, y)$ es una función de Lyapunov para el sistema $\dot{x} = P(x, y)$, $\dot{y} = Q(x, y)$ y V' se obtiene de V , cumpliéndose las propiedades 1, 2, 3 de la página II.45 entonces, asociado a V' (equivalentemente a V) se tiene una pseudonorma cuya construcción es la descrita por Rosen."

(27) Estrictamente hablando, aquí Rosen más bien debería decir "seudonorma", pues en lugar de la condición 1 debería escribirse: $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow (x, y) = (0, 0)$, para que ρ fuera una norma, claro cumpliéndose que $\rho(x, y) > 0 \forall (x, y) \neq (0, 0)$.

(28) En este caso, por tratarse esencialmente de la distancia euclidiana, resulta que $\|\cdot\|$ definida como en (II.8.1), sí es una norma.

Puestas las cosas en este terreno, diremos que el problema que motivo la presente sección puede ser abordado desde las siguientes dos puntos de vista. Ambos parten de la no unicidad de la función de Lyapunov

1. Relación entre pseudonormas. Se trata de ver la relación entre las pseudonormas asociadas a las diferentes funciones de Lyapunov para un mismo sistema. Este problema -de carácter un tanto más "teórico"- podría analizarse más en general, a través de la relación entre distintas normas en un mismo espacio.²⁹
2. Relación entre interpretaciones. Tomando en cuenta que: además de su utilidad en el análisis de la estabilidad del equilibrio, sería de interés que las funciones de Lyapunov tuvieran una interpretación en el contexto del problema en cuestión, resulta interesante entonces discutir tanto las posibles interpretaciones que se hagan a cada una de ellas, como -de ser posible- la relación entre éstas. Esto es particularmente interesante cuando la construcción de las diferentes funciones de Lyapunov se debe también a diferentes personas. Para un ejemplo sobre esta discusión remitimos al lector a la sección III.5.

Antes de concluir la sección, expendremos un problema que relaciona el concepto de estabilidad con la norma utilizada. Este tiene su origen en que para definir estabilidad es necesario medir (de alguna manera) la desviación de un estado del sistema, respecto al equilibrio. Ahora bien, toda vez

(29) Sea E un espacio lineal y sean $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ dos normas en él. Se dice que $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ son equivalentes si y solo si existen constantes a y b positivas tales que

$$0 \leq a\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq b\|x\|_1 \quad \text{para toda } x \text{ en } E.$$

Conectado con la equivalencia entre normas se tienen los resultados de la nota de pie de página número 30.

que hay más de una norma con la que esto puede hacerse, resulta entonces natural la siguiente pregunta:

¿Depende el concepto de estabilidad (y la estabilidad misma) del tipo de norma que se introduzca?

En el caso de que el espacio fase sea de dimensión finita³⁰ - dado que ahí cualesquiera dos normas son equivalentes - es de esperarse que no importa que norma se use, ésta conduce a la misma definición de estabilidad, por lo que en tal situación la pregunta formulada arriba carece de interés. Éste, sin embargo no es el caso cuando de dimensión infinita se trata, como lo hizo ver Brauchli ([7]), quien primero introduce la definición de estabilidad en el sentido de Lyapunov respecto a dos normas, y en el espacio de las sucesiones x_k , $k=0,1,2,\dots$ define las siguientes tres normas

$$\|x\|_1 = \sum (1+k)x_k \quad ; \quad \|x\|_0 = \sum x_k \quad \text{y} \quad \|x\|_{-1} = \sum (1+k)^{-1} x_k$$

Después, en base a la definición de estabilidad, demuestra que la solución general de las ecuaciones diferenciales

$$\dot{x}_k + x_k = x_{k-1} \quad k=0,1,2,\dots$$

es:

- i) Inestable respecto a las normas 1, 1
- ii) Debilmente estable respecto a las normas 1, 0 y
- iii) Asintóticamente estable respecto a las normas 1, -1

Para más detalles, puede consultarse el trabajo de Brauchli ([7]).

(30) Resultado 1. En un espacio de dimensión finita, cualesquiera dos normas son equivalentes.

Resultado 2. En un espacio de dimensión infinita, existen dos normas que no son equivalentes.

Para la demostración de éstos puede consultarse [1].

CAPITULO III

III.1. Introducción.

El uso explícito o implícito de las funciones de Lyapunov en el análisis de la estabilidad del equilibrio en sistemas que describen la dinámica de poblaciones en interacción, tiene una larga historia. Esta empieza con Vito Volterra ([58]) en 1931, quien las usa como primeras integrales o constantes de movimiento asociadas a sistemas de ecuaciones diferenciales que son casos particulares de los sistemas (LV), hasta llegar a formulaciones más recientes hechas en términos suficientemente abstractos y por ende con mayor grado de generalidad. En este capítulo, para empezar, ofrecemos un breve intento de revisión histórica de estas cuestiones, para después - haciendo uso de los resultados de las dos últimas secciones del capítulo II - retomar el problema de estabilidad global en sistemas (LV). Terminamos el capítulo exponiendo algunos aspectos relacionados con la interpretación fenomenológica de las funciones de Lyapunov en contextos no necesariamente ecológicos, así como otras aplicaciones.

III.2. Algunos antecedentes del uso de funciones de Lyapunov en el Análisis de la Estabilidad en Sistemas de Lotka-Volterra.

Sin pretender ser exhaustivos en el análisis histórico del uso de las funciones de Lyapunov en Ecología y concretamente en el análisis de la estabilidad en modelos de Lotka-Volterra, si en cambio damos a continuación una serie de elementos que muestran - contrariamente a como se atribuye en gran parte de la literatura consultada - que no es B. S. Goh el que introduce las mencionadas funciones en el contexto de la Ecología, aunque efectivamente sus trabajos tengan un mérito

III.2

del que más adelante hablaremos.

Aunque no en la moderna terminología de funciones de Lyapunov y tampoco planteandose en los términos del problema (P.1), consideramos que fue el propio Vito Volterra quien, en 1931 las introdujo en Ecología, pues en su clásica obra *Leçons sur la Théorie Mathématique de la Lutte pour la Vie* (p.15), demuestra que la función

$$H(x, y) = cx - d \ln x + by - a \ln y \quad (\text{III.2.1})$$

es una primera integral del sistema clásico para presa-depredador (LV-C) de la que, utilizando la propiedad de la nota de pie de página No.8 del capítulo II, se llega a que también lo es la función¹

$$V(x, y) = H(x, y) - H\left(\frac{d}{c}, \frac{a}{b}\right) \quad (\text{III.2.2})$$

Más aun, no cuesta trabajo convencerse de que ésta es una función de Lyapunov² para el sistema (LV-C) y cuyas curvas de nivel son los populares óvalos que se ilustran en la figura 1, de los que sabemos que junto con el equilibrio $(\frac{d}{c}, \frac{a}{b})$ y los ejes coordenados son las únicas trayectorias posibles del sistema (LV-C).

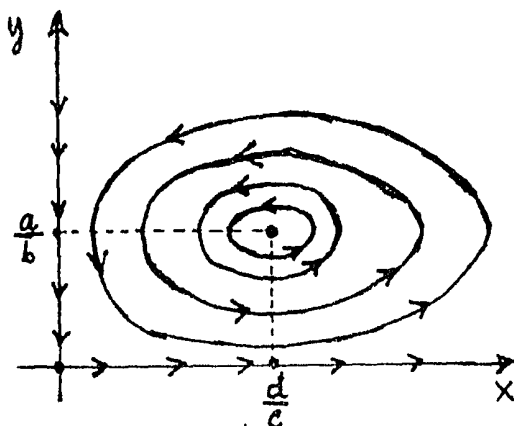


Fig. 1. Comportamiento periódico en la relación presa-depredador clásico.

- 1) El que se tome esta función está sugerido por el hecho de que la función de Lyapunov se anula en el equilibrio.
- 2) La demostración puede verse en la página III.17 donde se hace en el caso general.

Ahora, si escribimos explícitamente (III.2.2) y hacemos algunos arreglos algebraicos, se llega a la siguiente función, misma que será de fundamental importancia para sucesivos análisis

$$V(x, y) = c \left[x - \bar{x} - \bar{x} \ln \frac{x}{\bar{x}} \right] + b \left[y - \bar{y} - \bar{y} \ln \frac{y}{\bar{y}} \right] \quad (\text{III.2.3})$$

donde $\bar{x} = d/c$ y $\bar{y} = a/b$. Para el caso de más de dos especies, V. Volterra también obtuvo resultados y cuya mención diferiremos para cuando se hable de los trabajos de B. S. Goh. Mientras tanto, diremos que las funciones de Lyapunov del tipo (III.2.3) tienen una larga historia de aplicaciones a los modelos de Lotka-Volterra como veremos a continuación, donde además hemos creído conveniente intercalar algunas ideas que no necesariamente son sobre el uso explícito de las multicitadas funciones de Lyapunov en Ecología, pero que sí contienen elementos en esa dirección.

Con objeto de facilitar la lectura, las referencias se han ordenado cronológicamente. El lector notará la ausencia de citas a trabajos publicados en el lapso comprendido entre 1931 y 1957, por supuesto que no se trata de una omisión deliberada, simplemente no sabemos de la existencia de tal literatura.

En 1957, E. H. Kerner ([33]), utilizando técnicas de mecánica estadística, introduce una nueva metodología en el análisis de las complejas relaciones entre especies. Por considerar que son importantes para los propósitos de la presente sección, enseguida mencionaremos algunos aspectos de aquella, remitiendo al lector interesado en profundizar en estas cuestiones a los trabajos de Kerner ([33] y [34]) así como al de Ligh ([38]) o al de Goel, Moitra y Montrol ([14]).

La mecánica estadística intenta explicar leyes que relacionan variables macroscópicas, por ejemplo la ley de los gases ideales, en términos del movimiento de partículas microscópicas que obedecen las leyes de la mecánica como la 2ª ley de Newton. Ahora, cuando se estudia un gas, pretenden obtener la solución a la ecuación de movimiento de cada una

de las partículas que lo componen, es más bien imposible, por lo extraordinariamente numeroso de aquéllas. Sin embargo, sí pueden darse leyes estadísticas que den información del movimiento de la población de partículas. A manera de ejemplo de estas leyes, tenemos:

1. La equipartición de la energía, que establece: El promedio temporal de la energía cinética para todas las partículas es el mismo.
2. La ley de Maxwell-Boltzmann que da la distribución de velocidades para partículas con igual masa.

El cumplimiento de 1 y 2 depende de que algún principio de conservación esté presente en el sistema en cuestión, en particular en un sistema ecológico si es que ahí se pretenden aplicar estas técnicas. Más aun, previo a esto, conceptos como variables macro y microscópicas, sistema cerrado, equilibrio termodinámico, etc., debieran tener su correspondiente en Ecología si es que se aspira a hacer una adecuada aplicación de aquella teoría física. Hasta donde tenemos información, hay conceptos de mecánica estadística para los que aún no es clara cual sería su traducción ecológica. En el cuadro que sigue se muestran algunos de esos intentos.

Variables Microscópicas		Variables Macroscópicas		Definición de sistema cerrado.	
En sistemas termodinámicos (un gas)	En sistemas ecológicos	En sistemas termodinámicos (un gas)	En sistemas ecológicos	En sistemas físicos	En sistemas ecológicos
Velocidad de una partícula	densidad poblacional por especie.	presión, temperatura.	En opinión de Maynard Smith, no hay, por lo que hay que descubrirlas o inventarlas. Sin embargo se proponen: producción primaria, biomasa, número de especies, etc.	Aquellos en los que no hay flujo de materia y energía.	Aquellos en los que no hay flujos migratorios.

Teniendo en mente todo lo anterior, Kerner estudia el sistema

$$\dot{x}_i = \left[\varepsilon_i + \frac{1}{\beta_i} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right] x_i \quad (\text{III.2.4})$$

donde la matriz a_{ij} es antisimétrica, es decir, $a_{ij} = -a_{ji}$ para todo i, j . La antisimetría, entre otras cosas implica que los términos de autoinhibición no están presentes. Ahora, si $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$ es el equilibrio factible de (III.2.4), introduciendo $N_i = \ln \frac{x_i}{\bar{x}_i}$, Kerner escribe el sistema (III.2.4) como

$$\beta_i \dot{N}_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} \bar{x}_j (e^{N_j} - 1) \quad (\text{III.2.5})$$

sobre el que se puede chequear fácilmente el cumplimiento del Teorema de Liouville³ y por tanto la existencia de una magnitud que se conserva. Para encontrar la constante de movimiento asociada al sistema (III.2.5) multipliquemos de ambos lados por $\bar{x}_i (e^{N_i} - 1)$, sumemos sobre i y usemos la antisimetría de la matriz a_{ij} , para concluir que

$$\sum_{i=1}^n \beta_i \bar{x}_i \dot{N}_i [e^{N_i} - 1] = 0 \quad (\text{III.2.6})$$

de donde, observando que $\frac{d}{dt} (e^{N_i} - N_i) = (e^{N_i} - 1) \dot{N}_i$ llegamos a

- (3) El Teorema de Liouville establece la forma como cambia el volumen en el espacio fase bajo el efecto del flujo definido por el sistema autónomo y se enuncia así:
Teorema de Liouville. Sea $\dot{x} = f(x)$ un sistema autónomo, donde $x \in \mathbb{R}^n$ y $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Sea $D(t)$ la imagen de un dominio en el espacio fase, bajo el flujo y sea $V(t)$ el volumen del dominio $D(t)$, entonces $\dot{V}(t) = \int_{D(t)} \text{div} f(x) dx$.

Consecuencias inmediatas de éste son los siguientes corolarios
Corolario 1. Si $\text{div} f(x) = 0$, entonces el flujo preserva el volumen de cualquier dominio en el espacio fase.

Corolario 2. En sistemas hamiltonianos

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad i = 1, 2, \dots, n$$

el flujo preserva el volumen.

La demostración del Teorema y de los corolarios, así como más detalles al respecto, pueden consultarse en el texto de V. I. Arnold ([5]).

que la función

$$H(N_1, N_2, \dots, N_n) = \sum_{i=1}^n \beta_i \bar{x}_i (e^{N_i} - N_i) = \text{cte} \quad (\text{III.2.7})$$

es una primera integral para (III.2.5) o como dice Kerner: es una constante de movimiento para el sistema (III.2.5). Encuentra cantidades que se conserven, además de posibilitar el uso de la mecánica estadística en los sistemas donde esto ocurra, en el presente caso particular tiene la siguiente característica: Si en (III.2.7) regresamos a las variables originales, es decir, substituímos $N_i = \ln \frac{x_i}{\bar{x}_i}$, no es difícil concluir que la función

$$\sum_{i=1}^n \beta_i \left(x_i - \bar{x}_i \ln \frac{x_i}{\bar{x}_i} \right) = \text{cte}. \quad (\text{III.2.8})$$

es primera integral del sistema (III.2.4) y como puede verse, su aspecto es el mismo que el de (III.2.3). Una vez que Kerner encuentra esta constante de movimiento, enseguida define un parámetro θ al que llama "temperatura" del sistema y encuentra que para todas las especies descritas por (III.2.4) ocurre que

$$\frac{\beta_i}{\bar{x}_i} \overline{(x_i - \bar{x}_i)^2} = \theta ; \quad i=1, 2, \dots, n \quad (\text{III.2.9})$$

donde la barra sobre el término entre paréntesis significa el promedio temporal de tal cantidad. En (III.2.9) el término $(x_i - \bar{x}_i)^2$ mide la desviación cuadrática de la i -ésima especie respecto a su equilibrio, por lo que si (III.2.9) ha de cumplirse para las n especies, entonces esto lo habremos de interpretar así: En promedio, todas las especies fluctúan del equilibrio con la misma energía. De lo aquí dicho, estaremos de acuerdo en reconocer en la igualdad (III.2.9), al Teorema de la equipartición de la energía mencionado líneas atrás.

Más adelante, Kerner encuentra que la probabilidad de que el tamaño poblacional de la i -ésima es-

pecie se encuentre entre n_i y $n_i + dn_i$ en cualquier tiempo está dada por

$$P(n_i)dn_i = A n_i^{y_i-1} e^{-y_i n_i} dn_i \quad (\text{III.2.10})$$

donde $y_i = \frac{R_i \bar{X}_i}{\theta}$, y que correspondencia al análogo a la distribución de θ Maxwell-Boltzmann.

A pesar de lo potente de las herramientas de la mecánica estadística hay autores, como J. Maynard Smith ([55] pp. 85, 86) que tienen dudas respecto a la utilidad de aquéllas en ecología, pues... "a fin de utilizar el método, es necesario tener un conjunto de ecuaciones de movimiento para las cuales sea posible encontrar una cantidad que se conserve - comparable a la energía cinética de las moléculas de un gas perfecto. Para la mayoría de las ecuaciones de ecología (por ejemplo para la logística) no existe tal cantidad conservativa". Más adelante, refiriéndose a un tipo de sistemas (LV) para los que sí existe tal cantidad conservativa, dice: "ellos conducen a un sistema dinámico estructuralmente inestable; esto es, que cualquier pequeño cambio en la forma de las ecuaciones (añadiendo $\epsilon \phi(x)$, donde ϕ es una función arbitraria y ϵ pequeña) puede alterar completamente el comportamiento del sistema". Como no estamos en condiciones como para entrar en polémica con este punto de vista nos concretamos a señalar que la constante de movimiento que aquí se encuentra, años después (véase página III.11) es utilizada explícitamente como función de Lyapunov.

En 1961, L. B. Slobodkin [54] cuando analiza el modelo de competencia interespecífica o también llamado de Gause

$$\begin{cases} \dot{N}_1 = r_1 N_1 \left(\frac{K_1 - N_1 - \alpha N_2}{K_1} \right) \\ \dot{N}_2 = r_2 N_2 \left(\frac{K_2 - N_2 - \beta N_1}{K_2} \right) \end{cases} \quad (\text{III.2.11})$$

lo hace utilizando argumentos geométricos y sin proponérselo, implícitamente está utilizando las propiedades de una función de Lyapunov. Concretamente cuando estudia la coexistencia entre dos especies (lo que llama caso 2) y caracteriza el punto de equilibrio factible del sistema (III.2.11), dice: "El caso 2 puede ser representado por un modelo topográfico (véase figura 2) consistente de dos montañas separadas por dos valles en forma de cuchara y cuyas suelas bajan hacia el centro para formar un hoyo u orificio en el punto E el cual es el equilibrio para las dos especies. En este caso E es un punto de equilibrio estable o "nudo" y cualquier estado inicial eventualmente llegará ahí. En este punto la razón de cambio de ambas especies es cero sin que ninguna de ellas esté ausente. La eliminación de una de las especies podrá incrementar el valor de equilibrio de la otra o bien una puede eliminar a la otra por competencia".

Con todo y que la idea es correcta, lo que Slobodkin no dice es cómo construir el tal modelo topográfico. Específicamente: ¿Cómo les da la altura a las montañas de las que habla?

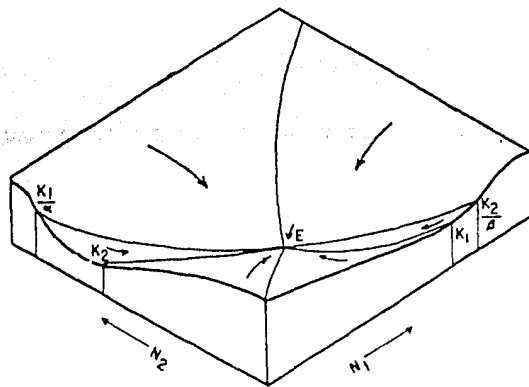


Fig. 2. Modelo topográfico para estudiar la coexistencia entre dos especies.

Continuando en este orden de ideas, diremos que

Robert Mac Arthur ([42]) en 1970 escribió: "Siempre ha sido de interés para algunos científicos construir principios mínimos para sus ciencias. Estos no solamente proporcionan una unificación conceptual sino que también conducen a algunas simplificaciones técnicas. Así, por ejemplo en mecánica una partícula sigue la trayectoria que minimiza la integral respecto al tiempo de la diferencia entre las energías cinética y potencial (principio de mínima acción) y las posiciones de equilibrio estables de tales sistemas son aquellas para las cuales la energía potencial es mínima. El primer ejemplo es un principio mínimo para la dinámica y el segundo solamente aplicable a las condiciones de equilibrio estáticas.

Aquí intento una contraparte ecológica del segundo, una especie de principio mínimo. Muestro que para cierta clase de ecuaciones para competencia una expresión cuadrática es minimizada y uso estos resultados para interpretar...". Esta búsqueda de principios mínimos en ecología la inicia Mac Arthur en 1969 ([41]) cuando estudia el modelo para especies que compiten exclusivamente por recursos que se renuevan y es éste el único factor que limita el crecimiento de los competidores. Supone que éstos (los competidores) están descritos por el sistema de ecuaciones

$$\dot{X}_i = C_i X_i \left[\sum_j W_j A_{ij} R_j - T_i \right] \quad (\text{III.2.12})$$

donde R_j es la abundancia del recurso j , W_j es su peso, A_{ij} es la probabilidad por unidad de tiempo de que un individuo de la especie i encuentre y coma una unidad de recurso j y C_i es el factor de proporcionalidad que da la conversión de recursos en especie i y T_i es la producción umbral de comida disponible abajo de la cual la especie i decrece. Mac Arthur supone además que los recursos satisfacen

$$\dot{R}_j = \frac{r_j R_j}{K_j} (K_j - R_j) - \sum_k A_{kj} X_k R_j \quad (\text{III.2.13})$$

donde k_j es la capacidad de carga del hábitat para el recurso R_j , las A_{kj} tienen la misma interpretación que en las ecuaciones (III.2.12) y r_j es la razón intrínseca de crecimiento del recurso R_j .

La abundancia de equilibrio del recurso R_j se obtiene imponiendo la condición $\dot{R}_j = 0$. De ésta se llega a

$$R_j = k_j - \sum_k A_{kj} X_k \frac{K_j}{r_j} \quad (\text{III.2.14})$$

las que al ser substituidas en (III.2.12) se llega a que \dot{x}_i satisfacen

$$\dot{x}_i = c_i x_i \left[\left(\sum_j w_j a_{ij} k_j - T_i \right) - \sum_k \left(\sum_j A_{kj} a_{ij} w_j \frac{K_j}{r_j} \right) x_k \right] \quad (\text{III.2.15})$$

cuyo estado de equilibrio factible se obtiene de la que Mac Arthur llama condición de equilibrio competitivo

$$\sum_j w_j a_{ij} k_j - T_i = \sum_k \left(\sum_j A_{kj} a_{ij} w_j \frac{K_j}{r_j} \right) x_k \quad (\text{III.2.16})$$

Ahora bien, independientemente de la dificultad práctica que tenga la obtención de las x que satisfacen esta igualdad, Mac Arthur observa que éstas son las mismas que minimizan⁴ la función

$$Q = \sum_j w_j \frac{K_j}{r_j} \left(r_j - a_{1j} - a_{2j} x_2 - \dots \right)^2 + 2 \sum_k T_k x_k \quad (\text{III.2.17})$$

4) Estrictamente hablando, Mac Arthur más bien se refiere a que los puntos críticos de (III.2.17) son los mismos que satisfacen la condición (III.2.16), pues

$$\text{grad } Q = \vec{0} \Leftrightarrow -2 \sum_j \frac{w_j K_j}{r_j} [r_j a_{ij} - \sum_k a_{ij} a_{kj} x_k] + 2 T_i = 0 \quad (*)$$

aunque más adelante, en [42], aduce "razones biológicas" para señalar que de los puntos críticos solo el mínimo es realista y demuestra que este se alcanza ... "pues con (*), el sistema (III.2.15) puede ser escrito como

$$\dot{x}_i = - \frac{x_i c_i}{2} \frac{\partial Q}{\partial x_i}$$

y de aquí $\dot{Q}(t) = \sum_i \frac{\partial Q}{\partial x_i} \dot{x}_i = - \frac{1}{2} \sum x_i c_i \left(\frac{\partial Q}{\partial x_i} \right)^2$, lo cual tiene que ser negativo. Por tanto Q se minimiza y los ecuaciones (III.2.15) son estables."

Extendiendo uno de los resultados de Kerner, Huang y Morowitz ([26]) en 1972 introducen en el modelo manejado por aquél, los que llaman términos de saturación y que en esta exposición llamamos de autoinhibición. Así, éstos consideran el modelo

$$\dot{x}_i = \alpha_i x_i + \sum_{j=1}^n \frac{\beta_{ij}}{\gamma_i} x_i x_j \quad (\text{III.2.18})$$

donde si $\alpha_i > 0$ entonces $\beta_{ii} \leq 0$, mientras que si $\alpha_i \leq 0$ entonces $\beta_{ii} = 0$. Demuestran que (III.2.8) no es una constante de movimiento para el sistema (III.2.18), pero que tal función puede ser usada como función de Lyapunov para el mismo, pues de (III.2.) y utilizando (III.2.18), estos autores llegan a que

$$\dot{V}(t) = \sum_{i=1}^n \beta_{ii} (x_i - \bar{x}_i)^2 \quad (\text{III.2.19})$$

y como $\beta_{ii} \leq 0$, entonces $\dot{V}(t) \leq 0$ de donde concluyen que el estado estacionario $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$ del sistema (III.2.18), es estable.

Partiendo de algunas ideas de Kerner, en 1973 Aiken y Lapidus ([1]) hacen importantes contribuciones al tema que nos ocupa. Éstos consideran el sistema (III.2.4) con $\alpha_{ij} = -\alpha_{ji}$ para $i \neq j$ y $\alpha_{ii} < 0$. Siguiendo el mismo procedimiento descrito en la página III.5, el equivalente a las igualdades (III.2.5) y (III.2.6) las escriben como

$$\beta_i \dot{N}_i = \sum_{j \neq i} \alpha_{ij} \bar{x}_j (e^{N_j} - 1) + \alpha_{ii} \bar{x}_i (e^{N_i} - 1) \quad \text{y} \quad (\text{III.2.20})$$

$$\sum_{i=1}^n \beta_i \bar{x}_i (e^{N_i} - 1) \dot{N}_i = \sum_{i=1}^n \alpha_{ii} \bar{x}_i^2 (e^{N_i} - 1)^2 \quad (\text{III.2.21})$$

respectivamente. A continuación, consideran la función

$$V(N_1, N_2, \dots, N_n) = \sum_{i=1}^n \beta_i \bar{x}_i (e^{N_i} - N_i - 1) \quad (\text{III.2.22})$$

III.12

la que puede chequearse es positiva definida y continuamente diferenciable. De (III.2.22) y utilizando (III.2.21) se llega sin dificultad a que

$$\dot{V}(t) = \sum_{i=1}^n d_{ii} \bar{x}_i^2 (e^{N_i} - 1)^2 \quad (\text{III.2.23})$$

y como por hipótesis $d_{ii} < 0$ entonces resulta que $\dot{V}(t)$ es negativa definida y por tanto (III.2.22) es una función de Lyapunov para el sistema (III.2.20). Más aún, como $V(N_1, N_2, \dots, N_n) \rightarrow \infty$ cuando $\|N\| \rightarrow \infty$, utilizando el Teorema 9 del capítulo II, concluimos que el equilibrio es globalmente estable.

Ahora, si en (III.2.22) regresamos a las variables x llegamos a que

$$V(x_1, \dots, x_n) \equiv V\left(\ln \frac{x_1}{\bar{x}_1}, \dots, \ln \frac{x_n}{\bar{x}_n}\right) = \sum_{i=1}^n \beta_i \left(x_i - \bar{x}_i - \bar{x}_i \ln \frac{x_i}{\bar{x}_i}\right) \quad (\text{III.2.24})$$

y puede chequearse que esta función es función de Lyapunov (véase página III.17 para la demostración en el caso general) para el sistema (III.2.) considerando $d_{ij} = -\alpha_{ji}$ $i \neq j$ y $d_{ii} < 0$ y por consideraciones análogas a las dadas inmediatamente atrás, concluiríamos que el equilibrio $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$ del sistema (III.2.) es globalmente estable.

Obsérvese que la forma de la función (III.2.24) es la misma que la de (III.2.8).

En 1974, Charles Watten ([60]) cuando analiza el que llama sistema presa-depredador con disipación de 2º orden

$$\begin{cases} \dot{x} = (\alpha_1 - a_1)x - bxy + (\beta_1 - g_1)x^2 \\ \dot{y} = (\alpha_2 - a_2)y + \beta xy + (\beta_2 - g_2)y^2 \end{cases} \quad (\text{III.2.25})$$

utiliza - a sugerencia hecha por Gregory Dunkel en 1967 - como

función de Lyapunov para el sistema (III.2.25) a

$$W(x, y) = \left(\frac{x^* e^{x/x^*}}{x} \right)^\eta \left(\frac{y^* e^{y/y^*}}{y} \right)^\mu - e^{\eta+\mu} \quad (\text{III.2.26})$$

donde $\eta = x^*/b$ y $\mu = y^*/\beta$, para cualquier estabilidad global del equilibrio factible del sistema (III.2.25), (x^*, y^*) con

$$x^* = \frac{(\alpha_1 - \alpha_1)(g_2 - \xi_2) + (\alpha_2 - \alpha_2)b}{(g_2 - \xi_2)(g_1 - \xi_1) + b\beta} ; \quad y^* = \frac{(\alpha_1 - \alpha_1)\beta + (\alpha_2 - \alpha_2)(g_1 - \xi_1)}{(g_2 - \xi_2)(g_1 - \xi_1) + b\beta}$$

Ahora, de (III.2.26) no es difícil llegar a que

$$\ln[W(x, y) + e^{\eta+\mu}] = \left[\frac{1}{b} \left(x - x^* - x^* \ln \frac{x}{x^*} \right) \right] + \left[\frac{1}{\beta} \left(y - y^* - y^* \ln \frac{y}{y^*} \right) \right] + \frac{x^*}{b} + \frac{y^*}{\beta}$$

donde en los sumandos de la derecha encerrados entre corchetes, reconocemos a una función de Lyapunov del tipo (III.2.24), es decir

$$\ln[W(x, y) + e^{\eta+\mu}] = V(x, y) + k$$

por lo que una forma equivalente de establecer el resultado de Walter, es la siguiente: la estabilidad global del equilibrio factible del sistema (III.2.25) se decide utilizando como función de Lyapunov para el mismo a

$$W(x, y) = k_1 e^{V(x, y)} + k_2$$

En el mismo año (1974), M. E. Gilpin ([13]) dio un algoritmo para la construcción de una función de Lyapunov para un sistema de Lotka-Volterra que describe la competencia entre dos especies

$$\dot{x}_i = \frac{r_i x_i}{k_i} \left(k_i - \sum_{j=1}^2 \alpha_{ij} x_j \right) = f_i(x_1, x_2) \quad (\text{III.2.27})$$

teniendo estos un atractor local. La idea de la construcción es la siguiente: Sea B una trayectoria de (III.2.27) tal que (x_0, y_0) es su punto inicial, Gilpin define a V como

$$\begin{aligned} V(x_1, x_2) &= \int_B^{(\bar{x}_1, \bar{x}_2)} (f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2)) \cdot (dx_1, dx_2) \\ &= \int_{t_0}^{\infty} (f_1^2 + f_2^2) dt \end{aligned} \quad (\text{III.2.28})$$

Continuando con la línea de pensamiento de Aiken y Lapidus, en 1975 Tuljapaukas y Semura ([56]) analizan el sistema (LV), o más bien

$$\dot{N}_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} \bar{x}_j (e^{N_j} - 1) \quad (\text{LV}')$$

que puede verificarse proviene del (LV) introduciendo $N_i = \ln \frac{x_i}{\bar{x}_i}$ donde, como siempre $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$ es el equilibrio factible del sistema (LV) y que en el (LV') corresponde al origen de coordenadas. Nada se supone previamente respecto a la matriz a_{ij} . Estos autores consideran la función

$$V(N_1, \dots, N_n) = \sum_{i=1}^n (e^{N_i} - N_i - 1) \quad (\text{III.2.29})$$

que evidentemente tiene las mismas propiedades que (III.2.22) y cuya derivada a lo largo de las trayectorias de (LV') resulta ser

$$\dot{V}(t) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (e^{N_i} - 1) a_{ij} \bar{x}_j (e^{N_j} - 1) \quad (\text{III.2.30})$$

Según Tuljapaukas y Semura ([56]): "Ahora, si la derivada $\dot{V}(t)$ es negativa definida, la función $V(N_1, \dots, N_n)$ dada en (III.2.29) puede ser una función de Lyapunov para el sistema (LV') y puede asegurarse estabilidad global alrededor del equilibrio⁽⁵⁾ $(0, \dots, 0)$."

(5) Equivalentemente el equilibrio $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$ para el sistema (LV).

La forma convencional de escribir las formas cuadráticas es en términos de una matriz simétrica. Así, definimos una matriz simétrica $B = A + A^t$. Entonces escribimos $V(t)$ como una forma cuadrática con los elementos de B , b_{ij} como

$$V(t) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (e^{N_i} - 1) b_{ij} (e^{N_j} - 1)$$

Ahora, si B es una matriz negativa definida, $V(t)$ es negativa definida y V es una función de Lyapunov.

El teorema de estabilidad de Lyapunov establece que una matriz es estable (en el sentido de que la parte real de todos sus valores propios es negativa), si y solamente si existe una matriz C positiva definida tal que $(CA + A^t C)$ es negativa definida. Escogemos $C = \frac{I}{2}$ donde I es la matriz unidad. Con esta selección, nuestras matrices originales A y B están relacionadas por $B = (CA + A^t C)$. Así, el teorema establece que estabilidad local (estabilidad de nuestra matriz A) ocurre, si y solamente si, B es negativa definida. La negatividad de B hace de $V(N_1, \dots, N_n)$ una función de Lyapunov, asegurándose estabilidad global".

El trabajo de Tuljapuar es relevante en los siguientes dos aspectos:

i) La función

$$V(x_1, \dots, x_n) \equiv \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} \left(x_i - \bar{x}_i - \bar{x}_i \ln \frac{x_i}{\bar{x}_i} \right)$$

que se obtiene de (III.2.29) mediante la substitución $N_i = \ln \frac{x_i}{\bar{x}_i}$ es función de Lyapunov para el sistema (LV) (véase página III.17). Esta no es ninguna sorpresa para el lector.

ii) La estabilidad global del equilibrio la hacen depender de la negatividad de la matriz $CA + A^t C$.

Finalmente, G. W. Harrison ([19]) menciona que en su tesis doctoral presentada en 1975 utilizó una función de Lyapunov del tipo (III.3.1) para llegar, independientemente a las mismas conclusiones que Goh (sic).

Por todo lo aquí dicho, esperamos que el lector esté plenamente convencido que no fue Goh el que introdujo las funciones de Lyapunov en ecología, en particular en el análisis de la estabilidad global para modelos del tipo (LV) y que - como veremos a continuación - una parte de sus resultados ya eran conocidos para los años 1976-1977 cuando publica sus trabajos. Sin embargo, sus investigaciones al respecto tienen los siguientes méritos

- a) Da condiciones suficientes para la estabilidad global del equilibrio factible de sistemas (LV) en el caso general de n especies. Para el caso de dos especies, construye la matriz C de la que hablan Tuljaputka y Semura, para asegurar que $V(t)$ sea negativa definida.
- b) Hace una interpretación biológica de la función de Lyapunov que maneja, en términos de la energía contenida en el ecosistema (véase página III.26).

Sin mayor comentario, a continuación exponemos los resultados de Goh.

III.3. Estabilidad Global en Sistemas de Lotka-Volterra I.

Aunque Goh no lo menciona, consideramos que sus trabajos - al menos el uso de esas funciones de Lyapunov - están motivados por la colección de resultados previos, algunas de las cuales se han citado en la sección precedente. Así, su resultado para n especies que fue publicado en 1977⁶ es

Teorema 1. Si el equilibrio no trivial $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$ del sistema (LV) es factible y existe una matriz constante C diagonal con elementos de la diagonal positivos, tal que la matriz $CA + A^T C$ es negativa definida, entonces el sistema de Lotka-Volterra (LV) es globalmente estable en la región factible.

Demostración. Si suponemos que existe una matriz C con las

(6) En otro artículo de Goh publicado en 1976 en otra revista da como referencia a éste, por lo que es razonable pensar que el publicado en 1977 fue su primera investigación en estos temas.

características del teorema y demostramos que

$$V(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n c_i \left(x_i - \bar{x}_i - \bar{x}_i \ln \frac{x_i}{\bar{x}_i} \right) \quad (\text{III.3.1})$$

donde $C = \text{diag}(c_1, \dots, c_n)$ con $c_i > 0$, es función de Lyapunov para el sistema (LV) en la región factible y entonces utilizando los teoremas de la sección II.4 concluimos la demostración de éste. Veamos: Que (III.3.1) es positiva definida; efectivamente ocurre, pues

- i) $V(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) = 0$ y en ningún otro punto de la región de interés biológico se anula. Más aún
 ii) $V(x_1, \dots, x_n) > 0$ para $x_i \neq \bar{x}_i$. Esto puede evidenciarse observando que V se puede expresar como la suma de n funciones cada una de las cuales depende solo de x_i y no es difícil hacer ver que $f_i > 0$ para toda $x_i \neq \bar{x}_i$.
 Más aún, V tiene en el equilibrio un mínimo

no⁷ pues

$$\frac{\partial V}{\partial x_i}(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) = 0, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x_i^2}(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) = \frac{c_i}{\bar{x}_i} > 0 \quad \text{para todo } i$$

y el hessiano

$$\det \frac{\partial^2 V}{\partial x_j \partial x_i}(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) = \prod_{i=1}^n \frac{c_i}{\bar{x}_i} > 0 \quad \text{para todo } i=1, \dots, n$$

Ahora, la derivada de V a lo largo de las trayectorias del sistema (LV) es

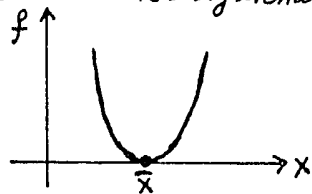
$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= \sum_{i=1}^n c_i \left(\dot{x}_i - \bar{x}_i \frac{\dot{x}_i}{x_i} \right) = \sum_{i=1}^n c_i (x_i - \bar{x}_i) \frac{\dot{x}_i}{x_i} \\ &= \sum_{i=1}^n c_i (x_i - \bar{x}_i) \left[b_i + \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right] \end{aligned}$$

(7) Dado que $c_i > 0$ para todo $i=1, \dots, n$ el problema se reduce a analizar el comportamiento de una función del tipo $f(x) = (x - \bar{x} - \bar{x} \ln \frac{x}{\bar{x}})$ con $x \in \mathbb{R}$ y $\bar{x} > 0$. De la forma de ésta, se tienen las siguientes propiedades

a) $f(\bar{x}) = 0$

b) $f'(\bar{x}) = 0$ con $f'(x) < 0$ para $x < \bar{x}$ y $f'(x) > 0$ para $x > \bar{x}$

c) $f''(\bar{x}) > 0$ y $f''(x) > 0$ para todo x .



De éstas se sigue que el comportamiento de f es como se muestra en la figura. La función V se descompone como la suma de n funciones con este comportamiento.

donde utilizando el hecho de que $b_i + \sum_{j=1}^n a_{ij} \bar{x}_j = 0$ nos queda

$$\dot{V}(t) = \sum_{i=1}^n c_i (x_i - \bar{x}_i) \sum_{j=1}^n a_{ij} (x_j - \bar{x}_j)$$

o bien

$$\dot{V}(t) = \frac{1}{2} (x - \bar{x})^t (CA + A^t C) (x - \bar{x})$$

donde x y \bar{x} denotan los vectores columna cuyas componentes son x_1, \dots, x_n y $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n$, respectivamente. Por la hipótesis del teorema concluimos que $\dot{V}(t) \leq 0$ en la región $\Omega = \{x | x = (x_1, \dots, x_n) \ x_i > 0\}$ lo que aunado a tener V un mínimo en el equilibrio y (i), (ii) hacen de V una función de Lyapunov para el sistema (LV) y utilizando los teoremas de la sección II.4 concluimos estabilidad global del equilibrio factible en la región de interés biológico. ■

Con todas las ventajas conceptuales que tiene este resultado, su dificultad práctica radica en que, para el caso general, no se tiene un método de construcción de la matriz C y hasta donde tenemos información, este es un problema hoy día parcialmente resuelto, ya que en el caso de dos especies, el propio Goh en 1976 ([15]) da condiciones que garantizan la existencia de la matriz C con las características antes señaladas. Veamos.

Teorema 2. En un modelo de Lotka-Volterra para dos especies en interacción, las condiciones suficientes para que haya estabilidad global son: (i) que el equilibrio (\bar{x}_1, \bar{x}_2) sea factible (ii) que el equilibrio sea atractor local y (iii) que ambas especies mantengan mortalidad denso-dependiente debido a las interacciones intraespecíficas.⁸

Demostración.

Como en el teorema 1, para $c_i > 0$ con $i = 1, 2$ una función

⁸El significado de esto es: La especie i -ésima limita su propio crecimiento y la forma como lo hace depende del tamaño poblacional de la misma. Dicho en símbolos significa que $a_{11} < 0$ y $a_{22} < 0$.

de Lyapunov para el sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = (b_1 + a_{11}x_1 + a_{12}x_2)x_1 \\ \dot{x}_2 = (b_2 + a_{21}x_1 + a_{22}x_2)x_2 \end{cases} \quad (\text{III.3.2})$$

es

$$V(x_1, x_2) = \sum_{i=1}^2 c_i \left[x_i - \bar{x}_i - \bar{x}_i \ln \frac{x_i}{\bar{x}_i} \right]$$

cuya derivada a lo largo de las soluciones del sistema (III.3.2)

es

$$\dot{V}(t) = \frac{1}{2}(x - \bar{x})^t (CA + A^t C)(x - \bar{x})$$

La demostración del teorema la habremos terminado si de las condiciones de éste inferimos la existencia de la matriz C tal que $CA + A^t C$ sea negativa definida. A su vez - por un resultado de Algebra Lineal - $CA + A^t C$ es negativa definida si y solo si⁹

$$(a) \quad 2c_1 a_{11} < 0$$

$$(b) \quad [4c_1 c_2 a_{11} a_{22} - (c_1 a_{12} + c_2 a_{21})^2] > 0^{10}$$

La condición (a) por supuesto que se cumple, pues de (iii) se sigue que $a_{11} < 0$ y $a_{22} < 0$. Para ver la condición (b) lo haremos considerando los siguientes tres casos
1. $a_{12} a_{21} = 0$; 2. $a_{12} a_{21} > 0$ y 3. $a_{12} a_{21} < 0$. En (1), a su vez se tienen los siguientes sub-casos $a_{12} = 0, a_{21} \neq 0$; $a_{12} \neq 0, a_{21} = 0$ y $a_{12} = a_{21} = 0$. Si $a_{12} = 0$ entonces (b) puede escribirse como

$$c_2 (4c_1 a_{11} a_{22} - c_2 a_{21}^2) > 0$$

y por supuesto que siempre pueden seleccionarse c_1, c_2

9) Como

$$(CA + A^t C) = \begin{pmatrix} 2c_1 a_{11} & c_1 a_{12} + c_2 a_{21} \\ c_1 a_{12} + c_2 a_{21} & 2c_2 a_{22} \end{pmatrix}$$

entonces las condiciones necesarias y suficientes para que ésta sea negativa definida son como en (a) y (b).

10) En el trabajo de Goh la condición equivalente a la (a) nuestra, la expresa así $c_1 a_{11} < 0$ y $c_2 a_{22} < 0$. Para propósitos de que $CA + A^t C$ sea negativa definida, esta última condición no es necesaria, aunque de la condición (iii) esto de todos modos ocurra.

ambos positivos de suerte que esta desigualdad tenga lugar, pues para cualquier $c_1 > 0$ solo basta tomar $c_2 < \frac{4a_{11}a_{22}}{a_{21}^2} c_1$.
 Para $a_{21} = 0$ el razonamiento es análogo, y si $a_{21}^2 a_{12} = a_{21} = 0$ evidentemente para cualquier c_1, c_2 positivos $4c_1c_2a_{11}a_{22} > 0$.
 En (2) lo importante es que ambos (a_{12} y a_{21}) tienen el mismo signo. La condición (b) puede ser reescrita como

$$4c_1c_2(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) - (c_1a_{12} - c_2a_{21})^2 > 0$$

de aquí, como $\frac{a_{12}}{a_{21}} > 0$ entonces para cualquier $c_1 > 0$ podemos tomar $c_2 = \frac{a_{12}}{a_{21}} c_1$ quedándonos

$$4c_1c_2(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) > 0$$

condición que en efecto se cumple considerando c_1, c_2 como antes. Por esto terminamos la demostración del teorema. ■

En la nomenclatura de Odum ([47]) en lo que aquí le llamamos caso (1) están incluidas interacciones como amensalismo, comensalismo y neutralismo. En el (2) competencia y mutualismo y en el caso (3) presa-depredador.

Quotábamos al principio de la sección 2 de este capítulo, que V. Volterra en 1931 ([58]) en relación al análisis de la estabilidad de sistemas (LV) utilizando el actualmente llamado 2º Método Directo de Lyapunov, obtuvo resultados. Tres de estos son

- i) La función (III.3.1) es una constante de movimiento del sistema (LV) cuando $CA + A^tC = \tilde{0}$ (p. 45)
- ii) Uso la función E^V para decidir estabilidad asintótica cuando $CA + A^tC$ es una matriz diagonal negativa (p. 82).
- iii) Da condiciones necesarias para la existencia de la matriz C en el caso de dos especies (p. 112).

Regresando al Teorema 2 de Goh, diremos que éste - con todo y lo importante de su resultado - aborda solo un caso particular. Precisemos: Para que $CA + A^tC$ sea negativa definida no es necesario - a diferencia de lo que menciona Goh -

que ambos A_{11} y A_{22} sean negativos, aunque por otro lado, una forma de que $(\bar{x}_1 A_{11} + \bar{x}_2 A_{22}) < 0$ (necesaria para (ii)) es que lo sean.

Excepto A_{11} que debe ser negativo, A_{22} puede no serlo y sin embargo cumplirse las respectivas condiciones anteriores para $CA + A^t C$ y $(\bar{x}_1 A_{11} + \bar{x}_2 A_{22})$. Así, B. S. Hsu en un trabajo que publica en 1978 utiliza el teorema B de La Salle y debilita las hipótesis de Goh. Más aún, tal teorema aunado a las Transformaciones de Poincaré constituyen las herramientas a través de las que Hsu mejora los resultados de Goh para cuando de dos especies se trata. Este es el contenido de la sección que sigue.

III.4. Estabilidad Global en Sistemas de Lotka-Volterra II: Coexistencia a través de un atractor global.

Observemos que el punto de equilibrio factible del sistema (III.3.2) es al propio tiempo, único elemento del conjunto E al que se refiere el Teorema de La Salle y el más grande conjunto invariante en E . Esto aunado a lo expresado en las últimas líneas de la sección precedente permiten debilitar la condición impuesta por Goh, quedando ahora expresada así

$$A_{11} < 0 \quad \text{y} \quad A_{22} \leq 0$$

o si se prefiere intercambia el papel de los coeficientes en ésta también es válido, dado lo irrelevante del orden en el que se escriban las ecuaciones en (III.3.2).

Ahora bien, basados en la observación hecha al final de la sección anterior en lo que sigue se considerará el caso

$$A_{11} < 0 \quad \text{y} \quad A_{22} > 0$$

donde -al igual que antes- puede intercambiarse esta condición.

El análisis que hace Hsu no es directamente sobre el sistema (III.3.2) sino sobre uno asociado, que a su vez se obtiene a través de las Transformaciones de Poincaré (véase referencia [4]). Para mayor claridad, a continuación reescribiremos

el sistema (III.3.2). Aplicando a (III.3.2) la Transformación de Poincaré

$$x_1 = \frac{v}{z} \quad \text{y} \quad x_2 = \frac{1}{z}$$

se escribe como

$$\begin{cases} \dot{z} = -a_{21}v - b_2z - a_{22} \\ \dot{v} = \frac{v}{z} [(a_{11} - a_{21})v + (b_1 - b_2)z + a_{12} - a_{22}] \end{cases} \quad (\text{III.4.1})$$

mientras que introduciendo en (III.3.2) u y w como

$$x_1 = \frac{1}{w} \quad \text{y} \quad x_2 = \frac{u}{w}$$

se escribe así

$$\begin{cases} \dot{u} = \frac{u}{w} [(a_{22} - a_{12})u + (b_2 - b_1)w + (a_{21} - a_{11})] \\ \dot{w} = -a_{12}u - b_1w - a_{11} \end{cases} \quad (\text{III.4.2})$$

La continuación se enuncia y demuestra el resultado de Hsu que, como se verá, efectivamente mejora los trabajos de Goh

Teorema 3. Sea (\bar{x}_1, \bar{x}_2) el equilibrio factible del sistema (III.3.2) atractor local. Supóngase que $a_{11} < 0$ y $a_{22} > 0$.

i) Si $a_{12} < a_{22}$ entonces existe una trayectoria no acotada

ii) Si

$$a_{12} = a_{22} \quad 0^\circ \quad (\text{ii.1})$$

$$a_{12} > a_{22} \quad \text{y} \quad b_1 > 0 \quad 0^\circ \quad (\text{ii.2})$$

$$a_{12} > a_{22}, \quad b_1 < 0 \quad \text{y} \quad b_2 = 0 \quad 0^\circ \quad (\text{ii.3})$$

$$a_{12} > a_{22} \quad b_1 < 0 \quad b_2 > 0 \quad \text{y} \quad a_{21} > a_{11} \quad (\text{ii.4})$$

entonces (\bar{x}_1, \bar{x}_2) es globalmente estable ⁽¹⁾

Demostración. Como $a_{22} > 0$ y $(a_{12} - a_{22}) < 0$ entonces del sistema (III.4.1) y por los argumentos del teorema del apéndice A concluimos que existe una trayectoria no acotada para (III.3.2).

(1) Decir globalmente estable, habrá de entenderse como atractor global.

Para continuar la demostración introduciremos \bar{z} , \bar{v} , \bar{w} y \bar{u} como

$$\bar{z} = \frac{1}{x_2}, \quad \bar{v} = \frac{x_1}{x_2}; \quad \bar{w} = \frac{1}{x_1}, \quad \bar{u} = \frac{x_2}{x_1}$$

con lo que los sistemas (III.4.1) y (III.4.2) quedan reescritos de la siguiente manera

$$\begin{cases} \dot{\bar{v}} = \frac{1}{\bar{z}} \bar{v} [(a_{11} - a_{21})(\bar{v} - \bar{v}) + (b_1 - b_2)(\bar{z} - \bar{z})] \\ \dot{\bar{z}} = \frac{1}{\bar{z}} \bar{z} [-a_{21}(\bar{v} - \bar{v}) - b_2(\bar{z} - \bar{z})] \end{cases} \quad \text{III.4.1'}$$

$$\text{y} \begin{cases} \dot{\bar{u}} = \frac{1}{\bar{w}} \bar{u} [(a_{22} - a_{12})(\bar{u} - \bar{u}) + (b_2 - b_1)(\bar{w} - \bar{w})] \\ \dot{\bar{w}} = \frac{1}{\bar{w}} \bar{w} [-a_{12}(\bar{u} - \bar{u}) - b_1(\bar{w} - \bar{w})] \end{cases} \quad \text{(III.4.2')}$$

Tomemos como función de Lyapunov para (III.4.2) a

$$V(u, w) = c_1 \left(u - \bar{u} - \bar{u} \ln \frac{u}{\bar{u}} \right) + c_2 \left(w - \bar{w} - \bar{w} \ln \frac{w}{\bar{w}} \right)$$

donde c_1 y c_2 son constantes positivas. La derivada de esta función a lo largo de las trayectorias de (III.4.2') es

$$\dot{V}(t) = \frac{1}{2w} \begin{pmatrix} u - \bar{u} \\ w - \bar{w} \end{pmatrix}^t (C_1 A_1 + A_1^t C_2) \begin{pmatrix} u - \bar{u} \\ w - \bar{w} \end{pmatrix}$$

donde

$$C_1 = \begin{pmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A_1 = \begin{pmatrix} a_{22} - a_{12} & b_2 - b_1 \\ -a_{12} & -b_2 \end{pmatrix}$$

Para que \dot{V} sea negativa definida se requiere que el siguiente par de condiciones se satisfaga

a) $(a_{22} - a_{12}) < 0$

b) $-4b_1(a_{22} - a_{12}) - [(b_2 - b_1) - a_{12}]^2 > 0$

Se trata de averiguar si (a) y (b) se cumplen,

cumpléndose: las hipótesis del teorema 2 de Goh y para cada una de las hipótesis del presente. Así, supongamos que (ii.1) se cumple, entonces la condición sobre el determinante de A ($\det A > 0$) se escribe como

$$\det A = a_{22}(a_{11} - a_{21}) > 0$$

de donde, utilizando una de las hipótesis del teorema se llega a que $0 > a_{11} > a_{21}$. Ahora bien, escribiendo explícitamente la relación $(\bar{x}_1 a_{11} + \bar{x}_2 a_{22}) < 0$ y utilizando (ii.1) tenemos

$$\bar{x}_1 a_{11} + \bar{x}_2 a_{22} = \frac{b_1 a_{22} (a_{21} - a_{11})}{\det A} < 0$$

por lo que $b_1 > 0$. Ahora, cumpliéndose (ii.1) - como lo estamos suponiendo - la negatividad de \dot{V} se asegura intercambiando el papel de las variables en (III.4.2), con solo pedir que

$$-[(b_2 - b_1) - a_{12}]^2 < 0$$

que por supuesto ocurre, cualesquiera b_1, b_2 y a_{12} con $(b_2 - b_1) \neq a_{12}$. Supóngase ahora que se cumple (ii.2), pero de ésta se infiere inmediatamente (a). El conjunto E consta de solo un punto (\bar{u}, \bar{w}) y este es el máximo conjunto invariante, por lo que siguiendo los argumentos de Goh y utilizando el Teorema B de La Salle concluimos que (\bar{u}, \bar{w}) es globalmente estable.

Consideremos ahora como función de Lyapunov para el sistema (III.4.1) a

$$V = c_1^* \left(v - \bar{v} - \bar{v} \ln \frac{v}{\bar{v}} \right) + \left(c_2^* \left(z - \bar{z} - \bar{z} \ln \frac{z}{\bar{z}} \right) \right)$$

para algunas $c_i^* > 0$ $i=1, 2, \dots$. Obteniendo la derivada de esta función a lo largo de las trayectorias del sistema se llega a

$$\dot{V} = \frac{1}{2\bar{z}} \begin{pmatrix} v - \bar{v} \\ \bar{z} - \bar{\bar{z}} \end{pmatrix}^t (C_2 A_2 + A_2^t C_2) \begin{pmatrix} v - \bar{v} \\ \bar{z} - \bar{\bar{z}} \end{pmatrix}$$

donde

$$C_2 = \begin{pmatrix} c_1^* & 0 \\ 0 & c_2^* \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A_2 = \begin{pmatrix} a_{11} - a_{21} & b_1 - b_2 \\ -a_{21} & -b_2 \end{pmatrix}$$

De (ii.3) y de la condición sobre la traza de la matriz del sistema lineal tenemos $a_{21} > a_{11}$. Utilizando los mismos argumentos a los dados antes concluimos que (\bar{v}, \bar{z}) es globalmente estable cumpliéndose (ii.3) y (ii.4).

Además Hsu agrega una discusión breve sobre el tamaño de la región de atracción para un ejemplo manejado por Goh.

III.5. Algo más de Funciones de Lyapunov: Sobre su interpretación.

A pesar del origen interpretativo de las funciones de Lyapunov (como hamiltonianas del sistema) entorno a la interpretación de éstas hay más de un punto de vista. Gilpin ([13]), por ejemplo, dice: "... En general las funciones de Lyapunov no son útiles como funciones de energía: son normalmente difíciles de calcular y no tienen un significado universal". En el mismo trabajo, el propio Gilpin - basado en su propuesta de función de Lyapunov, (véase página III.14) - hace una interpretación biológica de aquélla, sobre la que volveremos más adelante.

Por otro lado, Rosen ([50]), además de ver la conexión de las funciones de Lyapunov con la función distancia en el espacio fase del sistema considerado (véase página II.45) ve que éstas "pueden ser interpretadas como una clase de energía generalizada" (p.76). Dentro de esta corriente de interpretación ubicamos a Goh cuando discute el significado biológico de la función (III.3.1). Veamos. Si consideramos el caso de una sola especie, descrita por el modelo logístico usual, la correspondiente función de Lyapunov tiene la forma

$$V(x) = c \left(x - \bar{x} - \bar{x} \ln \frac{x}{\bar{x}} \right) \quad (\text{III.5.1})$$

Del comportamiento de las funciones $g(x) = x - \bar{x}$ y $h(x) = \bar{x} \ln \frac{x}{\bar{x}}$ se sigue que para tamaños poblacionales grandes, el término dominante en (III.5.1) es $x - \bar{x}$, que mide cuán alejada está la población de su equilibrio y en estas condiciones la función de Lyapunov es proporcional a la energía contenida en la biomasa que constituye la especie. La condición $\dot{V}(t) \leq 0$ la interpretamos como que para poblaciones grandes la energía se disipa. Por otro lado, para bajas densidades el término dominante en (III.5.1) es $\bar{x} \ln \frac{x}{\bar{x}} = \bar{x} (\ln x - \ln \bar{x})$, que también interpretamos como una medida de la biomasa de la especie, pero en escala logarítmica.

ca. Aquí la condición $\dot{V}(x) \leq 0$, dado que hay un signo negativo detrás, la interpretamos como que el sistema está absorbiendo continuamente energía. En el caso de considerarse un número mayor de especies la interpretación de cada uno de los sumandos en (III.3.1) es completamente análoga a la aquí hecha y simplemente los coeficientes C_i que ahí figuran, son factores de peso que indican la importancia relativa que tiene la biomasa de cada especie.

Regresando a la interpretación hecha por Gilpin, diremos que éste empieza por hacer notas que los modelos del tipo $\dot{x}_i = f_i(x_1, \dots, x_n)x_i$ - donde quedan incluidos los (LV) - no son más que "idealizaciones abstractas de la compleja y ruidosa realidad biológica", pues "... en todo momento actúan perturbaciones sobre la población". Como ejemplo de éstas, menciona: variaciones en los recursos, variaciones en las condiciones físicas, factores migratorios, etc. Dada la función de distribución de la perturbación no es una tasa simple, sin embargo, si las especies en el sistema son taxonómicamente similares - dice Gilpin - entonces se puede suponer que las perturbaciones tienen el mismo efecto sobre cada especie. Por tanto, se puede esperar que las perturbaciones sean equiprobables en dirección respecto al equilibrio. Así -continúa Gilpin- la función de distribución de las densidades de las especies en una comunidad en competencia dependerá más bien del carácter de las fuerzas restauradoras que lleven al sistema al equilibrio. Donde a su vez, éstas - en la interpretación de Gilpin - están incluidas en la función de Lyapunov que propone, pues de¹²

$$V(x) = \int_x^{\bar{x}} F \cdot dx$$

es evidente que la función de Lyapunov V representa la suma total de las fuerzas restauradoras entre x y el equilibrio. Por tanto, para mostrar que el carácter de retorno al equilibrio más importante que la perturbación de éste es que la función de distribución para las densidades de los competidores se asemejará a la función de Lyapunov. En particular, las curvas de nivel de V ...

(12) Esta forma de escribirla corresponde a la expresión compacta de (III.2.28).

serán líneas de igual probabilidad de ocurrencia del estado x para el sistema... Después, basado en una analogía de la función de Lyapunov que introduce, con una energía potencial, Gilpin concluye su interpretación diciendo que la probabilidad de que el sistema esté en el estado x , es

$$P(x) = \frac{1}{k_1} e^{-\frac{V(x)}{k_2 D}}$$

donde k_1 es constante de normalización y D es la perturbación, el "análogo a una temperatura...."

Excepto esta variante, en la literatura consultada hacen consideraciones de energía para introducir su correspondiente función de Lyapunov.

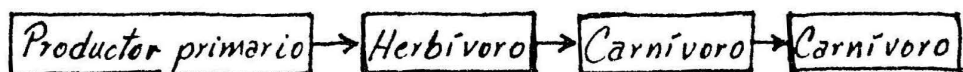
III.6. Más de Funciones de Lyapunov: Otras aplicaciones.

El uso del 2º Método Directo de Lyapunov, en su versión para sistemas autónomos o en sus ampliaciones para ecuaciones con retardo, para ecuaciones en derivadas parciales, etc. se ha extendido cuando de hacer análisis de estabilidad asintótica global, se trata. Dado que el tipo de modelos matemáticos como los antes mencionados, aparecen en áreas por demás diversas, no es ninguna sorpresa que tal método de análisis aparezca en variadas aplicaciones. De esta suerte, a continuación ofrecemos - en forma harto resumida¹³ - solo una muestra de éstas. El orden en el que se exponen es.

1. Otras aplicaciones en modelos ecológicos
2. Algo de aplicaciones en cinética química
3. Algunos problemas en ingeniería química y dinámica de reactores.

(13) En todos los casos se anotan las referencias por si se desea profundizar en estos temas.

1.a. Cadenas alimenticias simples. Por éstas se entiende la situación en la que un productor primario es consumido por una única especie, a su vez ésta es consumida por una única segunda especie y así sucesivamente. A manera de ejemplo de una de tales cadenas tenemos la siguiente



Las cadenas alimenticias simples pueden ser modeladas por sistemas del tipo (LV) como

$$\dot{X}_i = (b_i + a_{ii-1}X_{i-1} - a_{ii}X_i - a_{ii+1}X_{i+1})X_i \quad (\text{III.6.1})$$

donde por supuesto cada eslabón de la cadena está compuesto por una sola especie y cuya densidad la estamos denotando por X_i y $a_{ij} > 0$ para $i \neq j$. Para consistencia en la notación en (III.6.1), se omite X_{i-1} para $i=1$ y para $i=n$ se omite X_{i+1} . También se supone $a_{11} > 0$ y $a_{ii} > 0$ para $i > 1$. Aunque algunos elementos de la diagonal a_{ii} sean cero, Harrison ([19]) - utilizando el Teorema 9 de La Salle y usando la misma función de Lyapunov (III.3.1) - demuestra el siguiente

Teorema. Si el modelo (III.6.1) de cadena alimenticia simple tiene un equilibrio positivo \bar{X} , entonces bajo las condiciones $a_{11} > 0$ y $a_{ii} > 0$ para $i > 1$, éste es asintóticamente estable y todo el octante positivo está en el dominio de atracción.

1.b. Modelos con retardo. Debido a que la velocidad de crecimiento de una población no responde instantáneamente a cambios en el tamaño de ésta, es necesaria la introducción de un retardo en los modelos. Así, en 1948,

Evclim Hutchinson ([28]) introduce en el modelo logístico un retardo $\tau > 0$, quedando como

$$\dot{x}(t) = r x(t) \left[1 - \frac{x(t-\tau)}{K} \right] \quad (\text{III.6.2})$$

Suponiendo que el retardo es "suficientemente pequeño" este modelo es analizado cualitativamente por Cunningham ([]) en 1954. Kakutani y Markus ([32]) obtienen propiedades analíticas de las soluciones al mismo. En 1957, Wangersky y Cunningham ([61]) analizan el sistema con retardo

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = b x(t) - c x^2(t) - k_1 x(t) y(t) \\ \dot{y}(t) = k_2 x(t-\tau) y(t-\tau) - d y(t) \end{cases} \quad (\text{III.6.3})$$

y también, suponiendo que τ es pequeño y utilizando técnicas cualitativas, hacen el análisis de la estabilidad del equilibrio factible del sistema (III.6.3). Desafortunadamente, tanto en el modelo (III.6.2) como en el (III.6.3) los resultados a los que se llega para tener estabilidad asintótica del equilibrio, no son exactos, como lo hicieron ver Goel et al en 1971 ([14]) quienes, utilizando resultados de Bellman y Cooke ([6]) retomaron el análisis de la estabilidad del equilibrio no trivial para ambos modelos. Estos autores también demuestran que la función

$$H = \sum_j \beta_j \bar{x}_j (e^{N_j} - N_j) = \text{cte}$$

no es una constante de movimiento del sistema (LV) con retardo

$$\dot{x}_i(t) = \left[k_i + \frac{1}{\beta_i} \sum_j a_{ij} x_j(t-\tau) \right] x_i(t) \quad (\text{III.6.4})$$

donde $N_j = \ln \frac{x_j}{\bar{x}_j}$ y \bar{x}_j es el equilibrio factible de (III.6.4)

Gran parte de la literatura sobre análisis de la estabilidad en sistemas con retardo que describen algún tipo de interacción entre especies, se centra sobre estabilidad local. El análisis de estabilidad asintótica global en esos sistemas es relativamente reciente. Así, en 1983 Shukla ([53]) utiliza el 2º Método Directo de Lyapunov para estudiar la estabilidad global del equilibrio factible en el sistema con retardo

$$\begin{cases} \dot{X}_1(t) = \varepsilon_1 X_1 + \alpha_{11} X_1^2 + \alpha_{12} X_1 X_2 + \beta_{11} X_1 X_1(t-\tau) + \beta_{12} X_1 X_2(t-\tau) \\ \dot{X}_2(t) = \varepsilon_2 X_2 + \alpha_{21} X_1 X_2 + \alpha_{22} X_2^2 + \beta_{21} X_1(t-\tau) X_2 + \beta_{22} X_2 X_2(t-\tau) \end{cases} \quad (\text{III.6.5})$$

donde dependiendo de las combinaciones de signos de α_{ij} y β_{ij} se tendrán varios tipos de interacción. Shukla toma tres: que modelan presa-depredador, competencia y simbiosis, respectivamente. Sea (\bar{X}_1, \bar{X}_2) el equilibrio factible de (III.6.5) y llamemos $X_i(t) = \bar{X}_i + N_i(t)$, entonces el sistema para presa-depredador toma la forma

$$\begin{cases} \dot{N}_1(t) = (\bar{X}_1 + N_1) [-\alpha_{11} N_1 - \alpha_{12} N_2 - \beta_{11} N_1(t-\tau) - \beta_{12} N_2(t-\tau)] \\ \dot{N}_2(t) = (\bar{X}_2 + N_2) [\alpha_{21} N_1 - \alpha_{22} N_2 + \beta_{21} N_1(t-\tau) - \beta_{22} N_2(t-\tau)] \end{cases} \quad (\text{III.6.5}')$$

Para estudiar la estabilidad considera la funcional de Lyapunov

$$V_1(N_{1t}(s), N_{2t}(s)) = \sum_{i=1}^2 C_i \left[N_{it}(0) - \bar{X}_i \ln \left(1 + \frac{N_{it}(0)}{\bar{X}_i} \right) \right] + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 C_i \alpha_{ii} \int_{-\tau}^0 N_{it}^2(s) ds$$

donde $N_{it}(s) = N_i(t+s)$, $N_{it} \in C[-\tau, 0]$ $i=1,2$ y C_i son constantes que pueden ser escogidas. Las funcionales de Lyapunov que propone Shukla para las dos restantes tipos de interacción son parecidas a V_1 , dada arriba.

1.C. Modelos (LV) con difusión. El hecho de que en los modelos del tipo (LV) las variables de interés sean los tamaños poblacionales dependiendo solo del tiempo, entre otros factores ignoran la heterogeneidad del medio. Así, al incorporar la distribución espacial de la población, se da origen al siguiente sistema de ecuaciones diferenciales parciales no lineales acopladas

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = u_i \left[b_i + \sum_{j=1}^n a_{ij} u_j \right] + \sum_{k=1}^m \frac{\partial}{\partial x_k} \left(D_i \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) \quad (\text{III.6.6})$$

donde D_i es el coeficiente de difusión que puede depender del tamaño poblacional y del tiempo. La solución de (III.6.6) depende del tipo de condiciones a la frontera que deban satisfacerse. En el presente caso supondremos que en la frontera de una región espacial Ω donde co-habitaban las n especies, no hay flujo de éstas, por lo que se cumple la condición

$$\frac{\partial u_i}{\partial \bar{n}} = 0 \quad \text{para } t > 0 \text{ y para todo } x \in \partial\Omega \quad (\text{III.6.6}')$$

donde \bar{n} es el vector normal a la frontera de Ω , $\partial\Omega$. El análisis de la estabilidad y acotamiento de las soluciones para sistemas como (III.6.6) también es relativamente reciente. En 1976, F. Rothe ([51]) consideró el modelo de Lotka-Volterra con difusión para presa-depredador

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = u(1 - ku - v) + D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ \frac{\partial v}{\partial t} = \alpha v(u - 1) + D \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \end{cases} \quad (\text{III.6.7})$$

donde $\alpha > 0$, $D > 0$ y $0 \leq k < 1$ y con las condiciones

iniciales

$$\lim_{t \rightarrow 0} u(x,t) = u(x,0) \quad \text{y} \quad \lim_{t \rightarrow 0} v(x,t) = v(x,0) \quad (\text{III.6.8})$$

donde $u(x,0)$ y $v(x,0)$ son funciones continuas y positivas en $[0,1]$. Las condiciones de frontera consideradas para Lotke fueron de dos tipos

$$\begin{cases} u(0) = u(1), \quad \frac{\partial u}{\partial x}(0) = \frac{\partial u}{\partial x}(1) \\ u(0) = u(1) = u_0, \text{ y análogamente para } v \end{cases} \quad (\text{III.6.9})$$

y

$$\begin{cases} u = u_0 \text{ o } \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \text{ en } x = 0 \\ u(1) = u_0 \text{ o } \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \text{ en } x = 1. \text{ Condiciones} \\ \text{análogas para } v. \end{cases} \quad (\text{III.6.10})$$

donde $u_0 = 1$ y $v_0 = 1 - k$ son las poblaciones de equilibrio de (III.6.7). Además de demostrar que la solución a (III.6.7) con condiciones iniciales (III.6.8) y condiciones de frontera (III.6.9) o (III.6.10) existe y es única para todo $t \geq 0$, Lotke demuestra la continuidad de aquella respecto a las condiciones iniciales. A continuación este autor considera la función de Lyapunov

$$V(u,v) = \alpha [u - \log u - 1] + [v - (1-k) \log \frac{v}{1-k} - (1-k)]$$

para el sistema (III.6.7) sin difusión y observa que ésta satisface una serie de propiedades. Finalmente

$$(14) \text{ i) } \frac{\partial V}{\partial t} = D \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - D \eta^2 - \chi^2; \quad \eta^2 = \alpha \left(\frac{1}{u} \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + (1-k) \left(\frac{1}{v} \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \quad \text{y} \quad \chi^2 = \alpha k (u-1)^2$$

$$\text{ii) } \frac{\partial V}{\partial x} = \alpha \left(1 - \frac{1}{u} \right) \frac{\partial u}{\partial x} + \left(1 - \frac{1-k}{v} \right) \frac{\partial v}{\partial x}. \quad \text{De esta se sigue que}$$

$$\text{iii) } \frac{\partial V}{\partial x}(0) = \frac{\partial V}{\partial x}(1) \quad \text{o} \quad V(0) = V(1), \quad \frac{\partial V}{\partial x}(0) = \frac{\partial V}{\partial x}(1)$$

Rothe llega al que llama el teorema principal de su trabajo, uno de cuyos resultados es

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(x,t) = u_0 \quad \text{y} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} v(x,t) = v_0$$

La demostración de éste utiliza que

$$\int_0^1 V(u(x,t), v(x,t)) dx$$

es una funcional de Lyapunov. A su vez para demostrar esto se utiliza la última propiedad de la página anterior.

En este resultado lo sorprendente es que se utiliza - para demostrar convergencia al equilibrio - una función de Lyapunov del tipo de las utilizadas en la sección III.4. Las sorpresas continúan, cuando dos años más tarde, A. Hastings (23), utilizando que la funcional¹⁵

$$\tilde{V} = \int_{\Omega} V dx$$

es función de Lyapunov para (III.6.6) con (III.6.6'), demuestra el siguiente.

Teorema. Supóngase que las ecuaciones de velocidad de (III.6.6) (correspondientes al sistema (LV)) satisfacen las condiciones del teorema 1 de Goh, que los coeficientes de difusión $D_i(x,t, \bar{v}(x,t))$ son funciones suficientemente lisas de x y t y que son positivas en todos lados y también que existe una solución clásica a (III.6.6), (III.6.6') para todo tiempo. Entonces la solución espacialmente independiente de (III.6.6), (III.6.6') correspondiente a la factible y no trivial de las ecuaciones de velocidad es también globalmente estable para todas las condiciones iniciales con $u_i(x,0) > 0$ para toda i . (Aquí estabilidad global es en todo punto).

(15) La función que aparece en el integrando es la (III.3.1)

La lista de las funciones de Lyapunov en modelos ecológicos la podríamos aumentar, por ejemplo con los trabajos de Case y Costen ([30]) o el de Harrison ([20]), sin embargo, preferimos contarla aquí para dedicar un poco de espacio a otro tipo de aplicaciones de aquéllas.

2. Algo en Cinética química.

En 1967, una función de Lyapunov similar a la (III.3.1) es utilizada en cinética química cuando D. Shear ([52]) demostró el siguiente Teorema. En sistemas de reacciones homogéneas¹⁶ en cuyas reacciones elementales se cumple la ley de acción de masas¹⁷ la función

$$\sum_k \dot{C}_k \ln \frac{C_k}{\bar{C}_k} \quad (\text{III.6.11})$$

es siempre negativa y cero en el equilibrio \bar{C}_k cumpliéndose o no el balance detallado¹⁸ en el estado estacionario.

Para la demostración de éste se utiliza que (III.6.11) no es más que la derivada de la función de Lyapunov

$$H = \sum_k \left(C_k \ln \frac{C_k}{\bar{C}_k} - C_k + \bar{C}_k \right) \quad (\text{III.6.12})$$

de los sistemas de ecuaciones diferenciales que describen

(16) En Cinética Química las reacciones se clasifican en homogéneas y heterogéneas. Las primeras se realizan totalmente en una sola fase, mientras que las segundas se producen -al menos en parte- en más de una fase. [Gilbert Castellan: Fisicoquímica, F.E.I., 1976].

(17) La Ley de Acción de Masas establece: "La velocidad de una reacción al tiempo t es directamente proporcional al producto algebraico de las masas activas de los reactivos al tiempo t ". Si representamos con $[A_1], \dots, [A_n]$ a las concentraciones de los reactivos que al reaccionar dan los productos P_1, \dots, P_r , entonces la Ley de Acción de Masas se escribe como $\dot{A}_i(t) = -k[A_1(t)][A_2(t)] \dots [A_n(t)]$.

ben este tipo de reacciones. Shear, además señala que para admitir tales sistemas una función de Lyapunov, entonces éstos no exhiben cielo límite alguno. Conclusión señalando que su resultado es aplicable a sistemas abiertos o cerrados.

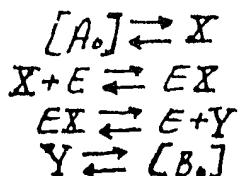
Un año más tarde, J. Higgins ([23]) hace la observación de que en trabajos previos y cumpliéndose las hipótesis de Shear hay sistemas que exhiben oscilaciones correspondientes a cielos límite. Más aun, Higgins encuentra un error en la demostración del teorema de Shear, por lo que el pretendido grado de generalidad atribuido por su autor, se ve debilitado. Concretamente, Higgins demostró:

- i) La función (III.6.12) no es de Lyapunov para sistemas abiertos con estados estacionarios y teniendo flujo neto.
- ii) La función (III.6.12) si es de Lyapunov para reacciones de pseudo-primer orden, que esquemáticamente se pueden representar así

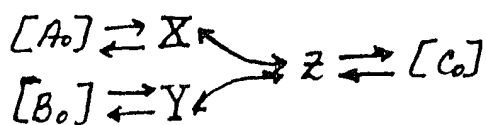


donde las concentraciones de los reactivos extremos A_1 y A_{n+1} se mantienen constantes en su estado estacionario.

- iii) En algunos casos en los que aparecen reacciones bimoleculares, la función H_2 es de Lyapunov. A manera de ejemplo de tales reacciones Higgins menciona a una reacción enzimática simple cuya representación es



y para la que el sustrato X substituido de una fuente externa (A) y el producto Y, es removido a un depósito externo (B). Otro ejemplo de reacción bimolecular en la que lo anterior es válido es



Revela Higgins señalando que 20 años antes de Lyapunov, en 1872, Boltzmann demuestra el que ahora se llama Teorema H de Boltzmann¹⁹, en el que la función H tiene las propiedades de una función de Lyapunov.

3. Algunos problemas en ingeniería química y dinámica de reactores. En 1968, Gurd y Lapidus ([17]) en un artículo muy esquemático pero abundantemente documentado, además de hacer una revisión del tipo de funciones de Lyapunov que hasta la fecha se reportaban en la literatura (véase Tabla 1, página II.38) hacen - sin entrar en detalles - un resumen del uso de éstas en las siguientes tres áreas: Ingeniería química, ingeniería nuclear y física de plasmas. A su vez, cuando discuten cada una de éstas, lo hacen agrupando el tipo de modelos. Precisemos. Cuando presentan las aplicaciones en ingeniería química primero hacen una introducción en la que mencionan que 1961, fue el año en el que por primera vez se reportó el uso de una función de Lyapunov ahí; en seguida consideran diferentes modelos

a) En Sistemas de Ecs. Dif. Se trata de sistemas que varían tipos de reacciones químicas y para estu-

(19) Para el enunciado del Teorema H de Boltzmann y su demostración pueden consultarse las referencias [2] y [5].

para la estabilidad - haciendo consideraciones energéticas - se introducen potenciales y cantidades termodinámicas como funciones de Lyapunov. Así, en el sistema

$$\dot{x}_i = \sum_j k_{ij}(x) [g_j x_j - x_i g_i]$$

que describe ciertos mecanismos de reacción, se proponen como funciones de Lyapunov a

$$V_1 = \frac{1}{2} \sum_i g_i x_i^2$$

$$V_3 = \sum_i g_i x_i^m$$

$$V_2 = \sum_i \int f(g_i x_i) dx_i$$

$$V_4 = \sum_i x_i \ln g_i x_i$$

b) En Ecuaciones Dif. Parciales. Mencionan que aquí las cuestiones de estabilidad no son tan simples de visualizar como en el caso de ordinarias, pues aquí... "el estado estacionario no es un punto en el espacio de estados, sino que es una distribución, por lo que hay un número infinito de estados estacionarios y cada uno tiene su propio espacio fase". Gard y Lapidus señalan que a la fecha (1968) el único artículo que se ha publicado es uno de Wei, quien estudia una reacción de primer orden donde hay transporte tanto de calor como de masa. El sistema al que se llega es

$$\frac{\partial x_2}{\partial t} = \frac{\partial^2 x_2}{\partial x_1^2} - f(x_2)$$

$$\frac{\partial x_2}{\partial x_1}(0) = 0, \quad x_2(1) = 1$$

La funcional de Lyapunov que se usa es

$$V(x_2(x_1)) = \frac{1}{2} \int_0^1 (x_2 - x_2^*) dx_1$$

donde x_2^* se refiere a la distribución o perfil estacionario.

En cuanto a las aplicaciones a ingeniería nuclear, lo más concreto del artículo es que en 1961 Levin y Nohel hacen el análisis de la estabilidad asintótica global en el sistema asociado a la ecuación de Liouville general

$$\ddot{x} + h(t, x, \dot{x})\dot{x} + f(x) = e(t)$$

la que -diciendo- surge en el estudio de la dinámica de un reactor. Consideran como función de Lyapunov a la función energía

$$E(x, \dot{x}) = g(x) + \frac{1}{2}\dot{x}^2$$

En este problema se pueden ver los detalles y la interpretación física de las variables, directamente en el artículo de Levin y Nohel ([39]).

APÉNDICE A

Cuando se estudia el comportamiento cualitativo de las trayectorias de sistemas que están definidos en todo el plano, con objeto de poseer una imagen más completa del espacio fase, es necesario analizar la conducta de aquéllas cuando x, y crecen indefinidamente, o como suele decirse: analizar el comportamiento en infinito. En este análisis es donde las Transformaciones de Poincaré resultan ser sumamente útiles. Dicho brevemente, éstas consisten en un mapeo del plano fase sobre la esfera unitaria $X^2 + Y^2 + Z^2 = 1$ centrada en el origen en cuyo polo sur tiene por plano tangente al plano fase. De esta manera, si $P = (x, y)$ está en el plano fase, a este punto le asociamos P' y P'' sobre la esfera, que son los puntos donde la recta que une a P con el origen corta a la esfera. Por construcción P' y P'' son antipodales. A excepción de los puntos sobre el ecuador, dados dos puntos antipodales sobre la esfera, a éstos se les asocia un único punto en el plano fase. Así, el análisis en infinito se reduce a analizar el comportamiento sobre el ecuador. Estas ideas se pueden generalizar para dimensiones mayores. Para los detalles sobre la construcción en el caso del plano, puede consultarse la referencia [4].

Consideremos las Transformaciones de Poincaré*

$$u_j = \begin{cases} \frac{x_j}{x_i} & ; j \neq i \\ \frac{1}{x_i} & ; j = i \end{cases} \quad (1)$$

o

$$x_i = \frac{1}{u_i} \quad y \quad x_j = \frac{u_j}{u_i} \quad j \neq i \quad (2)$$

Aplicando las transformaciones (1) o (2) al sistema (LV), éste toma la forma

$$\dot{u}_i = -a_{ii} + \sum_{k=1}^{i-1} (-a_{ik}) u_k + (-b_i) u_i + \sum_{k=i+1}^n -a_{ik} u_k \quad (3)$$

$$\dot{u}_j = \frac{u_i}{u_i} \left[(a_{ji} - a_{ii}) + \sum_{k=1}^{i-1} (a_{jk} - a_{ik}) u_k + (b_j - b_i) u_i + \sum_{k=i+1}^n (a_{jk} - a_{ik}) u_k \right]$$

Sea $C^+ = \max(c, 0)$, para cualquier número real c y

$$\Omega_i = \{ (x_1, \dots, x_n) \mid x_1, \dots, x_n > 0, \sum (-a_{ik})^+ x_k + (-b_i)^+ < a_{ii} x_i \text{ y}$$

$$\sum (a_{jk} - a_{ik})^+ x_k + (b_j - b_i)^+ < (a_{ii} - a_{ji}) x_i \text{ para cada } j \neq i \}$$

Teorema. Si $a_{ii} > 0$ para algún i , $1 \leq i \leq n$ y para tal i , $(a_{ji} - a_{ii}) < 0$ para todo $j \neq i$, entonces las soluciones $(x_k(t))_{k=1}^n$ del sistema (LV) con valores iniciales $(x_{k0})_{k=1}^n$ en Ω_i satisfacen que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_i(t) = \infty$$

La demostración de éste, puede consultarse en la referencia [25].

CAPITULO IV

IV.1. Introducción.

Hemos mencionado en la sección I.2 lo importante que es para el análisis cualitativo determinar no solo cuántos estados de equilibrio tiene un sistema, si no también saber de qué tipo son. A esta aseveración agregamos ahora que también de fundamental importancia dentro de la Teoría Cualitativa, es la determinación del número y tipo de trayectorias cerradas. Dentro de éstas, habrán de distinguirse dos grupos

1. Trayectorias cerradas no aisladas que cubren completamente una región del espacio fase.
2. Trayectorias cerradas aisladas (ciclos límite). Aquí, el comportamiento de las trayectorias "cercanas" al ciclo límite puede ser cualitativamente distinto, según si éste las atrae o las repele. Esto da lugar a ciclos límite atractores o repulsivos.

Desde el punto de vista de los modelos (LV) las trayectorias del grupo 1, no son de interés dado que el tipo de interacción entre las especies que hace posible la existencia de trayectorias cerradas cubriendo el primer octante y que contienen al punto de equilibrio factible del sistema, es sumamente simple, además de que el correspondiente sistema de ecuaciones diferenciales es estructuralmente inus-

IV.2

table (véase página III.7). Por tanto, para propósitos de modelar coexistencia del tipo 2 (véase página I.9) entre especies descritas por sistemas (LV) nos habremos de abocar a la búsqueda¹ de ciclos límite para éstos, aunque -por otro lado- un hecho aceptado comúnmente es que no hay métodos generales que permitan establecer cuando un sistema dinámico tiene ciclos límite y cuando no.

IV.2. Imposibilidad de modelar coexistencia entre dos especies a través de ciclos límite.

A lo largo de esta sección consideraremos el sistema (LV) para dos especies

$$\begin{cases} \dot{X} = (b_1 + a_{11}X + a_{12}Y)X \\ \dot{Y} = (b_2 + a_{21}X + a_{22}Y)Y \end{cases} \quad (\text{III.3.2})$$

Empezamos señalando que el Criterio Negativo de Bendixon, utilizado en la página I.15 para descartar la existencia de trayectorias cerradas para el sistema (I.5.1) constituye solo un caso particular de la así llamada Prueba de Dulac, que jugará un papel central en la presente sección. Aquella se enuncia así

Teorema 1 (Prueba de Dulac). Sea

$$\begin{cases} \dot{X} = P(x, y) \\ \dot{Y} = Q(x, y) \end{cases} \quad (\text{IV.2.1})$$

un sistema autónomo analítico en una región Ω abierta simplemente conexa del plano. Si $\mu(x, y)$ es una función de clase C^1 en Ω tal que

$$\frac{\partial}{\partial x}(\mu P) + \frac{\partial}{\partial y}(\mu Q) \quad (\text{IV.2.2})$$

(1) Claro que el resultado de la búsqueda puede ser que no existan ciclos límite para tales sistemas. Esto también es conocimiento.

IV.3

no cambia de signo en Ω entonces no hay curvas cerradas simples en Ω que sean la unión de trayectorias del sistema (IV.2.1).

Para la demostración de éste remitimos al lector a la referencia [4].

Haciendo las obvias identificaciones

$$P(x, y) = (b_1 + a_{11}x + a_{12}y)x \quad \text{y} \quad Q(x, y) = (b_2 + a_{21}x + a_{22}y)y \quad ,$$

Moiseev ([46]) propone como función μ para el sistema (III.3.2) a

$$\mu(x, y) = x^{k-1} y^{h-1} \quad (\text{IV.2.3})$$

donde $k = \frac{a_{22}(a_{21} - a_{11})}{\det A}$, $h = \frac{a_{11}(a_{12} - a_{22})}{\det A}$ y $\det A$ es el determinante

de la matriz de coeficientes del propio sistema y que es lo sucesivo supondremos positivo. Utilizando (IV.2.3), Moiseev demuestra que la expresión (IV.2.2) toma la forma

$$\frac{\partial(\mu P)}{\partial x} + \frac{\partial(\mu Q)}{\partial y} = \frac{\sigma}{\det A} x^{k-1} y^{h-1} \quad (\text{IV.2.4})$$

donde $\sigma = a_{11}b_2(a_{12} - a_{22}) + b_1a_{22}(a_{21} - a_{11})$.

Ahora bien, reordenando σ y tomando en cuenta que el punto de equilibrio factible de (III.3.2) es

$$\bar{x} = \frac{(a_{12}b_2 - b_1a_{22})}{\det A} \quad , \quad \bar{y} = \frac{(b_1a_{21} - b_2a_{11})}{\det A}$$

la igualdad (IV.2.4) puede reescribirse como

$$\frac{\partial(\mu P)}{\partial x} + \frac{\partial(\mu Q)}{\partial y} = (a_{11}\bar{x} + a_{22}\bar{y}) x^{k-1} y^{h-1} \quad (\text{IV.2.5})$$

IV.4.

donde lo sorprendente es que en el término entre paréntesis de la derecha, reconocemos a la traza de la matriz del sistema lineal asociado a (III.3.2) al rededor de (\bar{x}, \bar{y}) . Por tanto, la expresión (IV.2.5) toma en definitiva el siguiente aspecto

$$\frac{\partial(\mu P)}{\partial x} + \frac{\partial(\mu Q)}{\partial y} = \text{tr}[J_L] x^{k-1} y^{h-1} \quad (\text{IV.2.6})^2$$

A continuación enunciamos el resultado de Moiseev que constituye la demostración del nombre de la presente sección.

Teorema 2 (Moiseev). Parte I. Si $\sigma \neq 0^3$, entonces el sistema (III.3.2) no tiene curvas simples cerradas en \mathbb{R}_+^2 que sean la unión de trayectorias del mismo. Parte II. Si $\sigma = 0$, entonces el sistema (III.3.2) tiene una primera integral analítica y el equilibrio factible (\bar{x}, \bar{y}) es un centro, por lo que hay una región del plano fase completamente cubierta por trayectorias cerradas.

Demostración Parte I. Si $\text{tr}[J_L] \neq 0$, entonces (IV.2.6) se anula solamente sobre los ejes coordenados (donde no es de interés en términos de la coexistencia) y para todo punto (x, y) del primer cuadrante tal expresión no cambia de signo, es positiva o negativa según lo sea la traza $\text{tr}[J_L]$. En cualquier caso, por la Prueba de Dulac, se concluye que el sistema (III.3.2) no tiene trayectorias cerradas - incluidos los ciclos límite - en la región de interés biológico (el primer cuadrante).

Demostración Parte II. Si $\text{tr}[J_L] = 0$, entonces la expresión (IV.2.6) queda escrita como

-
- (2) Esta forma para la expresión (IV.2.6) no la da Moiseev. Hasta donde sabemos, ésta es nueva en la literatura.
- (3) Utilizando (IV.2.6), estas condiciones se pueden escribir como $\text{tr} J_L \neq 0$ para la Parte I y $\text{tr}[J_L] = 0$ para la Parte II.

IV.5

$$\frac{\partial(\mu P)}{\partial x} + \frac{\partial(\mu Q)}{\partial y} = 0 \quad (\text{IV.2.7})$$

Por otro lado, consideremos la 1-forma

$$-\mu Q dx + \mu P dy$$

ésta es exacta si y solo si, la siguiente condición se cumple

$$-\frac{\partial(\mu Q)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu P)}{\partial x}$$

para todo (x, y) , que - según IV.2.7 - efectivamente se satisface. Por tanto, existe una función $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, primera integral de (III.3.2) tal que

$$\text{grad } \varphi = (-\mu Q, \mu P)$$

Para obtener φ , seguimos el procedimiento ortodoxo, llegando a que

$$\varphi(x, y) = x^k y^h (A + Bx + cy) + \text{cte} \quad (\text{IV.2.8})$$

donde $A = \frac{b_1}{h}$, $B = \frac{a_{11}}{h}$ y $C = \frac{a_{12}k - 2a_{22}}{k(h+1)}$.

El equilibrio (\bar{x}, \bar{y}) es un centro local, pues $(\bar{x} a_{11} + \bar{y} a_{22}) = 0$ y se supuso que $\bar{x} \bar{y} (a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}) > 0$ y como en este caso el sistema (III.3.2) admite a (IV.2.8) por primera integral, entonces por el resultado de la página II.8, es un centro para (III.3.2)

Un análisis de las propiedades geométricas de la primera integral (IV.2.8) arrojará suficientes elementos como para tener las posibles configuraciones definidas por el centro (\bar{x}, \bar{y}) en el primer cuadrante. Con esto terminamos la demostración

IV.6

del teorema de Moiseev, quidando - de esta manera - excluida la posibilidad de modelar coexistencia vía ciclos límite, para dos especies.

Basta desde tenemos información, no hay resultados que indiquen cuándo un sistema de Lotka-Volterra (LV) tiene ciclos límite y cuándo no. Sin embargo, utilizando el resultado anterior, nos permitimos hacer la siguiente

Conjetura: No se puede modelar - a través de ciclos límite - coexistencia entre n ($n > 2$) especies descritas por sistemas del tipo (LV).

Concluimos la sección señalando que en 1981, Hastings ([22]) considera el sistema presa-depredador

$$\begin{cases} \dot{x} = Dx(1-x-y) - pX^{1/2}y \\ \dot{y} = pX^{1/2}y - y \end{cases}$$

donde $D > 0$ y $p > 1$. Utiliza la teoría de Bifurcación de Hopf respecto a dos parámetros y encuentra que este sistema posee ciclos límite.

IV.3. Estabilidad Global y Coexistencia a través de ciclos límite en sistemas de Lotka-Volterra: Planteamiento de problemas.

La siguiente es una lista de dos tipos de problemas que a nuestro juicio, además de relevantes dentro de la Ecología Teórica, son de actualidad en las cuestiones de estabilidad global en modelos (LV), en sus diversas presentaciones (con retardo, con difusión, con "memoria", etc.) utilizando el enfoque de Lyapunov y existencia de ciclos límite en tales sistemas, respectivamente.

1. Dar un procedimiento de construcción de la

IV.7

matriz C del Teorema 1 de Goh (véase página III.16) para el caso de más de dos especies y tener así condiciones necesarias y suficientes para asegurar estabilidad global en sistemas (LV).

2. Profundizar en el análisis de la estabilidad global en los sistemas de Lotka-Volterra con retardo

$$\dot{x}_i(t) = \left[b_i + \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j(t-\tau) \right] x_i(t)$$

y con difusión

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = \left(b_i + \sum_{j=1}^n a_{ij} u_j \right) u_i + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_k} D_i(\bar{x}, t) \right]$$

en particular, estudiar la posibilidad de existencia de ciclos límite en los primeros, para cierto valor del retardo τ . También sería de interés analizar la posible interpretación fenomenológica de las funcionales de Lyapunov que se proponen en las referencias [53], [52] (véanse páginas III.31 y III.34).

3. Precisar la conjetura hecha al final de la sección precedente. En el caso de que ésta resultara cierta, entonces se sugiere utilizar "no linealidades más fuertes", por ejemplo, suponer

$$\dot{x}_i = \left(b_i + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j \right) x_i$$

o bien del tipo propuesto por Hastings (véase página IV.6) e investigar la posibilidad de existencia de ciclos límite, en particular podría empezarse con dos especies. La otra vía es introducir parámetros y hacer análisis similares a los hechos por Hastings ([22]).

CONCLUSIONES

1. El uso de las funciones de Lyapunov en el análisis de la estabilidad para sistemas de Lotka-Volterra (LV), aunque no dicho explícitamente, tiene como motivación el pensar a estos sistemas como sistemas hamiltonianos y de hecho, en un caso particular lo son. En general esto no sucede, pues la función (III.3.1) decrece a lo largo de las trayectorias de (LV): Al igual que ocurre con la energía total en sistemas mecánicos cuando fuerzas disipativas están presentes.
2. En modelos de Lotka-Volterra (LV) no siempre estabilidad local implica estabilidad asintótica global. En el trabajo se dan condiciones para cuando esto si ocurre.
3. La función de Lyapunov que en el presente trabajo se utiliza para decidir estabilidad asintótica global puede ser interpretada como una especie de energía contenida en el ecosistema.
4. Para la coexistencia del tipo 1 (a través de la existencia de un atractor global) entre dos especies descritas por sistemas como el (LV) hay condiciones necesarias y suficientes (se dan en el trabajo). En el caso de suficiencia: Depende de que exista una matriz C , de $n \times n$ tal que $CA + A^T C$, sea negativa definida.
5. En el caso de dos especies descritas por un sistema co-

mo el (LV) no se puede modelar coexistencia del tipo 2 (a través de la existencia de un ciclo límite). Se conjetura que en el caso de n especies tampoco hay ciclos límite, $n > 2$.

6. El Método Directo de Lyapunov puede ser utilizado para hacer análisis de estabilidad en modelos del tipo (LV) cuando en ellos se incorporan otros factores como retardo o difusión. Sin embargo, la interpretación fenomenológica de las funciones de Lyapunov que en estos casos se usan es un problema pendiente.

REFERENCIAS

- [1]. Aiken R. C. y L. Lapidus.: The Stability of interacting populations
Int. J. Systems Sci. Vol. 4. págs. 691-695 (1973).
- [2]. Ajiezer A. I., S. V. Peletminski.: Métodos de la Física Estadística.
Editorial MIR. Moscú. (1981).
- [3]. Andronow A. A. y C. E. Chaikin.: Theory of Oscillations. Princeton
University Press. New Jersey. (1949).
- [4]. Andronov, A. A., Leotovich, E. A., Gordon, I. I., Maier, A. G.: Qualitative
Theory of Second Order Dynamical Systems, New York: J. Wiley and
Sons. (1973).
- [5]. Arnold V. I.: Ordinary Differential Equations. The MIT Press.
Massachusetts. (1980).
- [6]. Bellman R. y K. L. Cooke.: Differential-Difference Equations.
Academic Press. New York. (1963).
- [7]. Brauchli H.: On the Norm-Dependence of the Concept of Stabili-
ty. En: P. Germain y B. Nayroles (Eds.). Applications of Methods
of functional analysis to problems in Mechanics. New York. Sprin-
ger. (1976).
- [8]. Brauer F. y J. A. Nohel.: The Qualitative Theory of Ordinary Differen-
tial Equations. An Introduction. W. A. Benjamin, Inc. Wisconsin. (1969).
- [9]. Braun M.: Differential Equations and Their Applications. Springer-
Verlag. New York. (1979).
- [10]. Case T. J. y R. G. Casten.: Global Stability and Multiple Domains of
Attraction in Ecological Systems. The American Naturalist. Vol. 113
No. 5, págs. 705-714.
- [11]. Dioudoné J.: Foundations of Modern Analysis. Academic Press.
New York. (1969).
- [12]. Gause G. F.: Experimental Demonstration of Volterra's Periodic
Oscillations in the numbers of animals. J. Exp. Biol. Vol. 12,
págs. 44-48. (1935).
- [13]. Gilpin M. E.: A Liapunov Function for Competition Communities.
J. Theor. Biol. Vol. 44. págs. 35-48

- [14]. Goel N.S., S.C. Maitra, E.W. Montroll.: On the Volterra and Other Nonlinear Models in Interacting Populations. Reviews of Modern Physics. Vol. 43. No. 2. Parte 1. (1971).
- [15]. Goh B.S.: Global Stability in Two Species Interaction. J. of Math. Biol. Vol. 3. págs. 313-318. (1976).
- [16]. Goh B.S.: Global Stability in Many-Species Systems. The American Naturalist. Vol. 3. No. 977. (1977).
- [17]. Gurel O. y L. Lapidus.: Stability Via Liapunov's Second Method. Industrial and Engineering Chemistry. Vol. 60. No. 6. (1968).
- [18]. Hahn W.: Stability of Motion. Springer-Verlag. New York. (1967).
- [19]. Harrison G.W.: Global Stability of Food Chains. The American Naturalist. (1978).
- [20]. Harrison G.W.: Persistent Sets Via Lyapunov Functions. Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications. Vol. 3. No. 1 págs. 73-80. (1979).
- [21]. Hastings A.: Global Stability in Lotka-Volterra Systems with Diffusion. J. Math. Biology. Vol. 6, págs. 163-168. (1978).
- [22]. Hastings A.: Multiple Limit Cycles in Predator-Prey Models. J. Math. Biology. Vol. 11, págs. 51-63. (1981).
- [23]. Higgins J.: Some Remarks on Shear's Liapunov Function for Systems of Chemical Reaction. J. Theor. Biol. Vol. 21, págs. 293-304. (1968).
- [24]. Hirsch W. y Smale S.: Differential Equations, Dynamical Systems and Linear Algebra. Academic Press. (1974).
- [25]. Hsu S. B.: The Application of the Poincaré-Transform to the Lotka-Volterra Model. J. Math. Biology. Vol. 6, págs. 67-73. (1978).
- [26]. Huang H. W. y Morowitz H. J.: A Method for Phenomenological Analysis of Ecological Data. J. Theor. Biol. Vol. 35, págs. 498-503. (1972).
- [27]. Huaux A.: La Méthode Directe de Liapounoff, Théorie et applications récentes. Mathématiques du 20^e Siècle
- [28]. Hutchinson G.E.: Circular Causal Systems in Ecology. Annals Academy of Sciences. Vol. 50, págs. 221-246. New York (1948).

- [29]. Infante E. F. y L. G. Clark.: A method for determination of the Domain of Stability of Second-Order Nonlinear Autonomous Systems. *Journal of Applied Mechanics*. Junio 1964, págs. 315-320.
- [30]. Inselberg A. y G. Dula.: The Geometry of Liapunov Functions. *Amer. Math. Monthly*. Vol. 81, págs. 1102-1104. (1974).
- [31]. Jordan D. W. y P. Smith.: *Nonlinear Ordinary Differential Equations* Clarendon Press. Oxford. (1977).
- [32]. Kakutani S. y L. Markus.: On the Nonlinear Difference-Differential Equation $y'(t) = [A - B y(t-\tau)] y(t)$. En: *Contributions to the Theory of Nonlinear Oscillations*. Princeton University Press. Lefschetz S. (Edit.). Vol. IV (1955).
- [33]. Kerner E. H.: A Statistical Mechanics of Interacting Biological Species. *Bulletin of Mathematical Biophysics*. Vol. 19. (1957).
- [34]. Kerner E. H.: Further Considerations of the Statistical Mechanics of Biological Associations. *Bulletin of Mathematical Biophysics*. Vol. 21 (1959).
- [35]. La Salle J. P.: Some Extensions of Liapunov's Second Method. *Ire Transactions on Circuit Theory*. Vol. 7, págs. 520-527. (1960).
- [36]. La Salle J. P. y S. Lefschetz.: *Stability by Liapunov's Direct Method, with applications*. Academic Press. New York. (1961).
- [37]. Lagrange J. L.: *Mécanique Analytique*. Ediciones Oasis, S.A. Colección Clásicos de la Ciencia. Facsímil. México 1963.
- [38]. Leigh E.: The ecological role of Volterra's equations. En: *Some Mathematical Problems of Biology*. Providence: The American Mathematical Society. (1968).
- [39]. Levin J. J. y A. Nohel.: Global Asymptotic Stability for Nonlinear Systems of Differential Equations and Applications to Reactor Dynamics. En: *Symposium Internacional de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias*. Adem J et al (Eds.). UNAM y Sociedad Matemática Mexicana. México (1960).
- [40]. Liapounoff M. A.: *Problème Général de la Stabilité du Mouvement*. Princeton University Press. (1947).

- [41]. Mac Arthur R.: Species Packing, and what interspecies competition minimizes. *Proc. N.A.S.* Vol. 64, págs. 1369-1371. (1969).
- [42]. Mac Arthur R.: Species Packing and Competitive Equilibrium for Many Species. *Theoretical Population Biology*. Vol. 1, págs. 1-11 (1970).
- [43]. Massera J. L.: Converse Theorems of Lyapunov's Second Method. En: igual que [39].
- [44]. Maynard Smith J.: *Mathematical ideas in biology*. Cambridge University Press. (1968).
- [45]. Maynard Smith J.: *Models in Ecology*. Cambridge University Press. Cambridge. 1978.
- [46]. Moiseev N. D.: On a "Method" for Determination of Limit Cycles. *Zh. Eksper. Teoret. Fiz.* 9. (1939).
- [47]. Odum E. P.: *Ecología*. Editorial Interamericana. México. 1972
- [48]. Pérez Pascual R.: Atractores Extraños. *Revista Mexicana de Física*. No. 3, págs 381-407. (1982).
- [49]. Plat Otto: *Ecuaciones Diferenciales Ordinarias*. Ed. Reverte
- [50]. Rosen R.: *Dynamical System Theory in Biology*. Vol. I: Stability Theory and Its Applications. Wiley-Interscience a Division of John Wiley and Sons, Inc. New York. 1970.
- [51]. Rothe F.: Convergence to the Equilibrium State in the Volterra-Lotka Diffusion Equations. *J. Math. Biol.* Vol. 3, págs. 319-324. (1976).
- [52]. Shear D.: An Analog of the Boltzmann H-Theorem (a Liapunov Function) for Systems of Coupled Chemical Reactions. *J. Theor. Biol.* Vol. 16, págs. 222-228. (1967).
- [53]. Shukla V. P.: Conditions for Global Stability of two-species population models with Discrete Time delay. *Bulletin of Mathematical Biology*. Vol. 45. No. 5. págs. 793-805. (1983).

- [54]. Slobodkin L. B.: Growth and Regulation of Animal Populations. Dover Publications. New York. 1980.
- [55]. Thompson C. J.: Mathematical Statistical Mechanics. Princeton University Press. New Jersey. 1979.
- [56]. Tuljapurkar S. D. y J. S. Semura.: Stability of Lotka-Volterra Models. Nature Vol. 257, pág 386. (1975).
- [57]. Tuljapurkar S. D. y J. S. Semura.: Liapunov Functions: Geometry and Stability. J. Math. Biology. Vol. 8, págs. 25-32. (1979).
- [58]. Volterra V.: Leçons sur la Théorie Mathématique de la Lutte pour la Vie. Gauthier-Villars et Cie., Editeurs. Paris. 1931.
- [59]. Walker J. A y L. G. Clark.: An Integral Method of Liapunov Function Generation for nonlinear autonomous Systems. Journal of Applied Mechanics. Septiembre 1965. págs. 569-575.
- [60]. Walter Ch.: The Global Asymptotic Stability of Prey-Predator Systems with Second Order Dissipation. Bulletin of Mathematical Biology. Vol. 36, págs. 215-217 (1974).
- [61]. Wangersky P. J. y J. W. Cunningham.: Time Lag in Prey-Predator Population Models. Ecology, Vol. 38, No. 1, págs. 136-139. (1957).

