



**UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTONOMA DE MEXICO**

Facultad de Ciencias

**TRAYECTORIAS OPTIMAS DENTRO DE UNA
ESFERA DE DENSIDAD CONSTANTE**

T E S I S
Que para obtener el Título de
F I S I C O
P r e s e n t a

DAGOBERTO ROSAS MARTINEZ



México, D. F.

1985



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

INDICE

INTRODUCCION.

CAPITULO PRIMERO.

Aspectos Historicos.

CAPITULO SEGUNDO.

- 2.1 Principios del cálculo variacional.
- 2.2 Ecuación de Euler.
- 2.3 Campo gravitatorio en el interior de una esfera homogénea.
- 2.4 Trayectoria braquistocrona.
- 2.5 Tiempo de recorrido.
- 2.6 La astroide como un caso particular de hipocicloide.
- 2.7 Ecuación de movimiento de la partícula que se mueve por la astroide.
- 2.8 Longitud total de la trayectoria.
- 2.9 Velocidad y Aceleración de la partícula que viaja por la - astroide
- 2.10 Curva de energía potencial para la astroide.
- 2.11 La astroide como una curva tautocrona.
- 2.12 Campos gravitacionales cuyas braquistocronas e isócronas - son curvas idénticas.

CAPITULO TERCERO.

- 3.1 Túnel rectilíneo que pasa por el centro de la tierra.
- 3.2 Análisis cinemático de la partícula que viaja por la tra - yectoria rectilínea que pasa por el centro de la tierra.
- 3.3 Trayectoria rectilínea que coincide con una cuerda.
- 3.4 Análisis del movimiento.
- 3.5 Curva de energía potencial para la trayectoria rectilínea - que coincide con una cuerda.
- 3.6 Esfera rodando por una trayectoria rectilínea.
- 3.7 Isócronia de la trayectoria rectilínea.
- 3.8 Trayectorias cónicas.
- 3.9 Definición general de cónica.
- 3.10 Cálculo de tiempos y distancias a través de cónicas.

CAPITULO CUARTO.

- 4.1 Análisis y comparación de resultados de las diferentes tra - yectorias.

Conclusiones.

Apéndices A y B

Bibliografía.

INTRODUCCION.

El hombre a través de su desarrollo histórico siempre ha - buscado la manera de hacerse la vida un poco más placentera, -- para realizar su trabajo cotidiano ha inventado máquinas, para -- viajar de un punto a otro ha construido caminos, tratando de -- que estos lo lleven de una manera más directa a su destino, --- para trasladarse más rápidamente, trata de perfeccionar sus --- vehículos. Así podríamos enumerar más ejemplos donde el hombre -- desde el punto de vista de la física, trata de minimizar ener-- gía y tiempo. Esta búsqueda de la eficiencia ha conducido al -- hombre a desarrollar la rama de las matemáticas conocida como, - principios variacionales.

En la presente tesis nos ha parecido interesante trabajar -- usando el cálculo de variaciones, para hacer una aplicación al -- problema de túneles terrestres dentro de los cuales viaja una - partícula, suponiendo que la tierra es una esfera de densidad - constante. Por lo tanto en el presente trabajo nos planteamos - los siguientes objetivos. Primero, encontrar la trayectoria de -- tiempo mínimo que seguiría una partícula de masa "m" si viaja - dentro de la tierra a través de un túnel, suponiendo que ésta - es completamente esférica, de densidad constante, que se encuentra - en reposo y que no existe fricción. A este problema también -- se le conoce como el problema de la braquistócrona terrestre, - en donde la palabra braquistócrona se deriva de dos palabras -- griegas, brachistos, que significa más pequeño y chronos, que - significa tiempo; el segundo objetivo consiste en comparar el - tiempo que realizaría una partícula cuando viaja entre dos pun-- tos que se encuentran sobre la superficie de la tierra a través -- de la trayectoria de tiempo mínimo, con el tiempo que realiza - cuando viaja a través de trayectorias cónicas y rectilíneas.

Para alcanzar estos dos objetivos, esta tesis se dividió -

en cuatro capítulos. En el primer capítulo se dan a conocer --- algunos aspectos históricos sobre el desarrolló del cálculo de variaciones a través de algunos problemas físicos. En el capítulo segundo, se efectúa un breve estudio sobre los principios variacionales, y se analiza el tipo de fuerza a la que esta --- sujeta la partícula cuando se encuentra dentro de la tierra. A partir de este análisis, y usando principios variacionales, se encuentra la trayectoria de tiempo mínimo. En este capítulo se alcanza el primer objetivo de esta tesis, al encontrar que la trayectoria de tiempo mínimo es una curva conocida como hipocicloide. La hipocicloide es la curva que describe un punto fijo de una circunferencia que rueda sin resbalar, permaneciendo --- siempre tangente interiormente a otra circunferencia fija, (ver apéndice A).

A pesar de que el problema de la braquistócrona terrestre no es muy conocido, ya había sido resuelto por Newton, además el Físico y Matemático francés Puisseux, escribió una memoria -- sobre las curvas tautócronas en la revista Liouville, vol. IX, - 1844, en la cuál hace un análisis sobre este tipo de curvas --- cuando la fuerza que actúa sobre una partícula es central y --- varía con la distancia, ref.(11). El problema de la braquistócrona terrestre resurgió con el artículo de Cooper, "Trough the Earth in Forty Minutes", aparecido en el American Journal of -- Physics, 34,68,1966, en el cual calcula el tiempo para ir de un punto a otro de la tierra, viajando por túneles dentro de ella y usando como único modo de propulsión los cambios de energía - potencial del vehículo. Cooper en su artículo solo realiza algunos cálculos numéricos con trayectorias rectilíneas y deja -- planteada la ecuación diferencial que dará la curva de tiempo - mínimo. A partir de esta publicación siguieron varios artículos de diferentes autores, donde tratan el mismo problema dándole -

diferentes enfoques ref(1-7).

Para poder analizar las propiedades cinemáticas de la hipocicloide, se tomó el caso particular en donde el radio del círculo que rueda dentro del círculo fijo es un cuarto del radio de la tierra. La hipocicloide generada con este radio es llamada astroide. El análisis que se hizo fue para dos puntos que se encuentran sobre la superficie de la tierra separados por una distancia de 10005.973 km. En la sección 2.11 se demuestra que la astroide es una curva tautócrona, o sea que el tiempo para que una partícula alcance el punto más bajo de esta curva no depende del punto de donde parta desde el reposo. Finalmente en la sección 2.12 se hizo una traducción de la referencia (4), donde se demuestra que las curvas braquistócrona e isócrona son curvas idénticas solo cuando el potencial proveniente de un campo de fuerzas, es radial y varía con el cuadrado de la distancia.

En el capítulo tercero se analiza el caso cuando los dos puntos que se encuentran sobre la superficie de la tierra son antípodas. En este caso se demuestra que la trayectoria braquistócrona es una línea recta que coincide con el diámetro de la tierra. En la sección 3.3 se tomó el caso cuando la trayectoria rectilínea coincide con una cuerda de la tierra, se buscó que esta trayectoria abarcara un arco de la tierra de 10005.973km, pues es el mismo arco que abarcan dos cúspides consecutivas de la astroide, o sea que se están uniendo dos puntos que se encuentran sobre la superficie de la tierra por medio de dos trayectorias diferentes. En la sección 3.6, se encontró la ecuación de movimiento para una esfera que rueda dentro de un túnel rectilíneo cuya superficie es uniformemente rugosa. En la sección 3.7, se demuestra una propiedad interesante para las trayectorias rectilíneas; en esta sección se demuestra que estas -

trayectorias son isócronas, pero no son braquistócronas, puesto que la curva de tiempo mínimo es la hipocicloide. En la sección 3.8, se alcanza el segundo objetivo de esta tesis, se comienza con el planteamiento de una ecuación general que a toda la familia de cónicas. Con esta ecuación se plantearon expresiones para calcular la distancia que recorrería una partícula y el tiempo que tardaría para ir entre dos puntos que se encuentran sobre la superficie terrestre, separados por un arco de la tierra de 10005.973km, viajando a través de trayectorias cónicas y así poder encontrar cuál de todas las cónicas es la óptima después de la curva de tiempo mínimo o sea la hipocicloide. Al empezar a efectuar algunos cálculos preliminares con cónicas y círculos estos nos conducían a integrales elípticas, por lo cual fue necesario hacer un cálculo numérico en computadora para evaluar este tipo de integrales.

En el capítulo cuarto se hace una comparación entre los resultados obtenidos por las diferentes trayectorias que se tomaron.

Al final de esta tesis vienen como suplemento dos apéndices con cálculos algebraicos. En el apéndice A se encuentra la deducción de las ecuaciones paramétricas de la hipocicloide y en el apéndice B se demuestra que la cicloide es un caso particular de la hipocicloide, cuando el radio del círculo fijo es mucho mayor que el radio del círculo que rueda dentro de él.

Después de estos apéndices se encuentra una bibliografía que abarca algunos libros y artículos donde se interesan por los problemas aquí tratados.

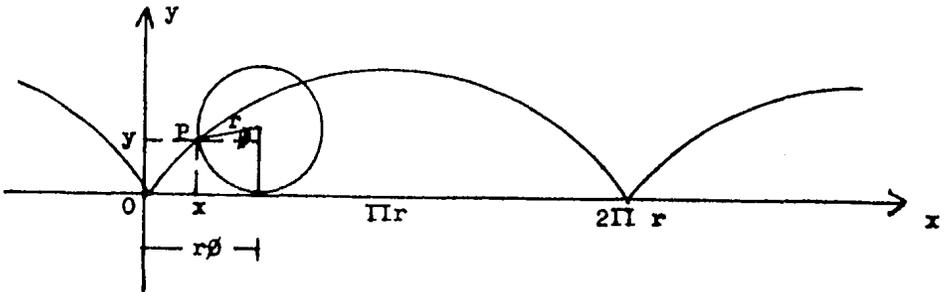
CAPITULO PRIMERO.
ASPECTOS HISTORICOS.

La historia de los principios minimales; dentro de la fisica es larga e interesante. La investigación de tales principios se basa en la idea de que la naturaleza actúa siempre de tal forma que determinadas cantidades de importancia resultan siempre minimizadas cuando tiene lugar un proceso físico. El primero de estos principios minimales se desarrolló en el campo de la óptica. Fue Herón de Alejandría quien, en el siglo II a. de J.C., encontró que la ley que rige la reflexión de la luz puede obtenerse admitiendo que un rayo luminoso, que viaje de un punto a otro reflejándose en un espejo plano, recorre siempre el camino mas corto posible. Una sencilla construcción geométrica servirá para comprobar que este principio minimal conduce verdaderamente a la igualdad de los ángulos de incidencia y reflexión de un rayo luminoso reflejado en un espejo plano. No obstante, el principio del camino mas corto de Herón no puede proporcionar una expresión correcta de la ley de la refracción. En 1657, Fermat formuló nuevamente el principio, postulando que los rayos luminosos viajan siempre de un punto a otro de un medio siguiendo el camino que requiera el menor tiempo. Este principio de tiempo mínimo de Fermat conduce inmediatamente, no solo a la ley correcta de la reflexión, sino también a la ley de la refracción de Snell.

Los estudios acerca de los principios minimales continuaron y, en la última parte del siglo XVII, Newton, Leibniz y los hermanos Bernoulli iniciaron el desarrollo del cálculo variacional con la resolución de problemas como el de la braquistócrona y el de la forma de una cuerda suspendida (catenaria).

El problema que formularon los hermanos Bernoulli y que dio inicio a una nueva rama de las matemáticas, que se denominó cálculo de variaciones, fue el siguiente: si un cuerpo pequeño-

se mueve bajo la influencia de la gravedad de un punto a otro a lo largo de una curva dada en un plano vertical, entonces el tiempo necesario para efectuar el recorrido por dicha curva dependerá naturalmente de la forma de la curva. El tiempo será diferente si el cuerpo se mueve a lo largo de una línea recta, esto es, en un plano inclinado, que a lo largo de una curva. La pregunta de los hermanos Bernoulli era, ¿que trayectoria requiere menor tiempo?. Uno podría pensar que el movimiento a lo largo de una línea recta es el más rápido, pero Galileo ya había advertido que el tiempo requerido en algunas curvas es menor que el de la línea recta. Los hermanos Bernoulli, Juan y Jacobo hallaron la forma de la curva que requiere el menor tiempo. Se trataba de una curva ya conocida en geometría y que había sido denominada cicloide. La cicloide es el lugar geométrico descrito por un punto de una circunferencia que rueda sin deslizar sobre una línea recta, figura(1.1)



Figura(1.1)

Los matemáticos de la época reconocieron inmediatamente que el problema de la braquistócrona, era de un carácter enteramente diferente a los problemas estudiados mediante el cálculo diferencial, en donde la cantidad cuyo máximo o mínimo se bus--

caba dependía solo de una o más variables numéricas, en este -- problema la cantidad que se consideraba, es decir, el tiempo -- necesario para el descenso, dependía de toda la curva, lo que -- constituyó una diferencia esencial, que ponía al problema fuera del alcance del cálculo diferencial o de cualquier otro método-- conocido en aquella época. Este problema interesó grandemente a los matemáticos contemporáneos, tanto más al conocer que la --- solución estaba dada por la cicloide, curva que había sido rela-- cionada con la construcción de un péndulo ideal. Huygens había-- descubierto que un punto ideal provisto de masa, que oscilara -- sin rozamiento bajo la acción de la gravedad en una cicloide -- vertical, tendría un período de oscilación independiente de la-- amplitud del movimiento.

El primer método desarrollado por Jacobo Bernoulli para -- resolver el problema de la braquistócrona, utilizó el principio minimal de la ley de la refracción simple. Esta ley empírica -- encontrada por Snell (1591-1602), afirma que la trayectoria de-- un rayo de luz que pasa de un medio homogéneo a otro se desvía-- en la superficie de separación de ambos de tal forma que la --- trayectoria consta de dos segmentos rectilíneos, AA' y A'B, que-- forman con la normal dos ángulos, α y α' determinados por la --- condición.

$$\frac{\text{sen } \alpha}{\text{sen } \alpha'} = \frac{V}{V'}$$

Es importante hacer notar que la trayectoria será mínima solo -- cuando V sea la velocidad en el vacío y V' sea la velocidad en -- el medio. Así en la figura (1.2), un rayo luminoso que parte de un punto A, en el medio superior donde la velocidad de la luz -- es V hacia un punto B, donde la velocidad es V', seguirá la tra-- yectoria AA'B, cumpliéndose la ley de la refracción.

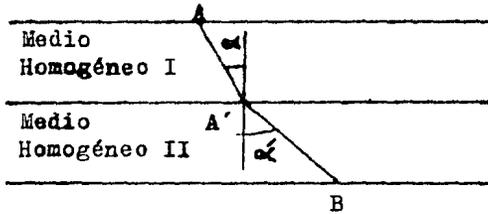


Figura (1.2)

Permat demostró, por medio del cálculo, que esta trayectoria es tal que el tiempo necesario para que el rayo de luz pase de A a B es mínimo, es decir, menor de lo que sería si siguiera cualquier otra trayectoria. Para utilizar esta ley, Jacobo Bernoulli tuvo primero en cuenta que cuando una partícula cae desde un punto P_0 sin velocidad inicial, siguiendo una curva C, -- fig(1.3) tendrá en cualquier punto P de la curva una velocidad proporcional a \sqrt{H} , siendo H la distancia vertical entre P_0 y P, es decir, $v=k\sqrt{H}$, donde k es una constante. Luego dividió el espacio en numerosas y delgadas capas horizontales, cada una de espesor h y supuso que la velocidad de la partícula en movimiento no variaba continuamente, sino en pequeños saltos, al -- pasar de una capa a otra, es decir que en la primera capa adyacente a P_0 , la velocidad es $k\sqrt{h}$, en la segunda, $k\sqrt{2h}$, y en la n-ésima, $k\sqrt{nh} = k\sqrt{H}$. Al ser rectilínea la trayectoria en cada capa, la solución es una poligonal, ver figura(1.3)

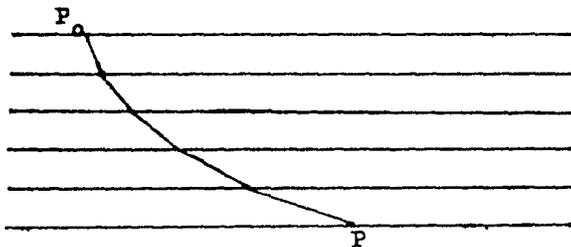


Figura (1.3)

En este momento es donde Jacobo Bernoulli utiliza el principio-minimal de la ley de la refracción, ya que de acuerdo a esta ley en cada par de capas sucesivas el movimiento de A a B pasando por A', figura (1.2) debe ser tal que, suponiendo A y B fijos A' proporciona la curva de tiempo mínimo. Por lo tanto, si tomamos la capa m-ésima y la que le sigue, figura (1.4) y apliquemos dicha ley tendremos:

$$\frac{\text{sen } \alpha}{\text{sen } \alpha'} = \frac{k\sqrt{mh}}{k\sqrt{(m+1)h}}, \text{ esto es, } \frac{\text{sen } \alpha}{\sqrt{mh}} = \frac{\text{sen } \alpha'}{\sqrt{(m+1)h}}$$

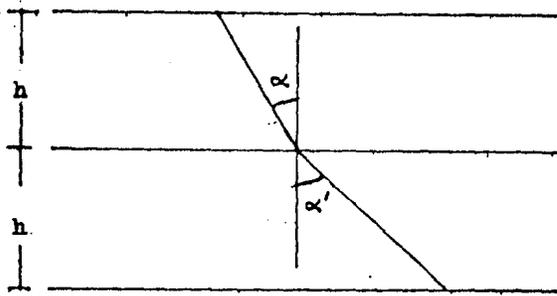


Figura (1.4)

aplicando reiteradamente este razonamiento se obtiene una sucesión de igualdades:

$$\frac{\text{sen } \alpha_1}{\sqrt{h}} = \frac{\text{sen } \alpha_2}{\sqrt{2h}} = \frac{\text{sen } \alpha_3}{\sqrt{3h}} = \dots = \frac{\text{sen } \alpha_n}{\sqrt{H}} \quad (1.1)$$

donde α_n es el ángulo entre la poligonal en la n-ésima capa y la vertical. Jacobo supone ahora que el espesor h se hace cada vez más pequeño y tiende a cero, de modo que el polígono tiende a la solución buscada del problema original. Este paso al límite no afecta a las igualdades (1.1), por lo que Jacobo concluye que la solución debe ser una curva C que tenga la siguiente propiedad: Si α es el ángulo formado por la tangente y la

vertical en cualquier punto P de C, y H es la distancia vertical de P a la horizontal que pasa por P₀, Sen α/\sqrt{H} es constante - para todos los puntos P de C, figura (1.5)

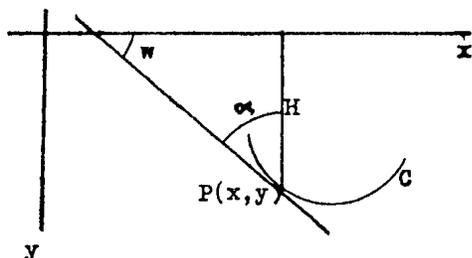


Figura (1.5)

De este modo para todo punto P(x,y) de la curva requerida-C, tendremos, $H=y$, y que $\text{Sen } \alpha/\sqrt{H} = k$, esto es:

$$\text{Sen } \alpha = k \sqrt{y} \quad (1.2)$$

donde, k es una constante. Así mismo, de acuerdo a la figura (1.5)

$$\frac{dy}{dx} = \text{Tan } w = \text{Cot } \alpha = \frac{1}{k} \sqrt{\frac{1 - k^2 y}{y}},$$

elevando al cuadrado $y' = \frac{dy}{dx}$, obtenemos

$$y'^2 = \frac{1}{k^2 y} - 1 \quad \text{esto es} \quad 1 + y'^2 = \frac{1}{k^2 y}$$

pero de (1.2) $k^2 y = \text{Sen}^2 \alpha$, por lo que la ecuación anterior toma la forma:

$$1 + y'^2 = \text{Csc}^2 \alpha \quad (1.3)$$

pero, $y'' = (-\text{Csc}^2 \alpha) \alpha'$, en donde $\alpha' = \frac{d\alpha}{dx}$, lo cual implica:

$$\text{Csc}^2 \alpha = - \frac{y''}{\alpha'}. \quad (1.4)$$

Por otra parte derivando la expresión (1.2) con respecto a x -- nos da:

$$(\text{Cos } \alpha) \alpha' = \frac{ky'}{2\sqrt{y}}, \quad \text{de donde} \quad \alpha' = \frac{1}{2y}$$

sustituyendo esta última expresión en (1.4), tenemos que:

$$\text{Csc}^2 \alpha = -2yy''$$

por lo que la relación (1.3) se puede escribir como:

$$1 + y'^2 + 2yy'' = 0$$

ecuación diferencial cuya solución son las ecuaciones paramétricas de la cicloide, esto es:

$$x=r(\vartheta - \text{sen}\vartheta)$$

y

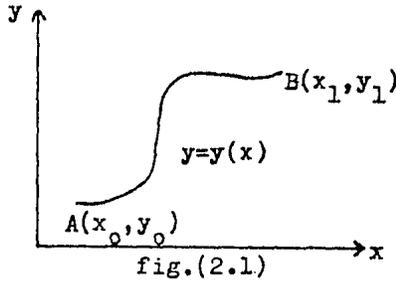
$$y=r(1 - \text{cos}\vartheta)$$

donde r es el radio de la circunferencia que engendra la cicloide al rodar sobre una recta fija y ϑ es el ángulo central de dicha circunferencia, ver figura (1.1)

CAPITULO SEGUNDO

2.1 Principios del Cálculo Variacional

Conjuntamente con los problemas en que es necesario determinar los máximos y mínimos de cierta función $z=f(x)$, con frecuencia surge en los problemas físicos la necesidad de hallar los valores máximos o mínimos de un género especial de magnitudes, llamadas funcionales. Se llaman funcionales a las magnitudes variables cuyos valores se determinan mediante la elección de una o de varias funciones. Por ejemplo, la longitud L del arco de una curva plana o alabeada que une dos puntos dados por $A(x_0, y_0)$ y $B(x_1, y_1)$, es un funcional, ver la figura (2.1)



la magnitud L puede calcularse si se da la ecuación de la curva $y=y(x)$, entonces:

$$L(y(x)) = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + (y')^2} \, dx$$

El área S de cierta superficie es también un funcional, puesto que se determina escogiendo la superficie, es decir, escogiendo la función $z(x,y)$ que figurará en la ecuación $z=z(x,y)$ de la superficie, como es sabido:

$$S(z(x,y)) = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} \, dx dy$$

donde D es la proyección de la superficie en el plano Oxy .

Los momentos de inercia, las coordenadas del centro de --

gravidad de cierta curva o superficie homogénea, son también -- funcionales, puesto que sus valores se determinan eligiendo la curva o la superficie, es decir, las funciones contenidas en la ecuación de dicha curva o superficie. En estos ejemplos se tiene una dependencia que es característica para los funcionales; -- a una función escalar o vectorial le corresponde un número, --- mientras que al dar una función $z=f(x)$ a un número le correspondría otro número.

El cálculo variacional estudia los métodos que permiten -- hallar los valores máximos y mínimos de los funcionales. Los -- problemas en que se exige investigar el máximo o el mínimo de -- un funcional, se denominan problemas variacionales.

Muchas leyes de la Mecánica y de la Física en general se -- reducen a la afirmación de que cierto funcional debe alcanzar -- su mínimo o su máximo en el proceso considerado. En este enun -- ciado, dichas leyes reciben el nombre de principios variaciona -- les de la Mécanica o de la Física. A dichos principios variacio -- nales, o a sus corolarios más simples, pertenecen: el principio de la mínima acción, la ley de conservación de la energía, la -- ley de conservación de la cantidad de movimiento y diferentes -- principios variacionales de la Física clásica y de la teoría -- relativista del campo.

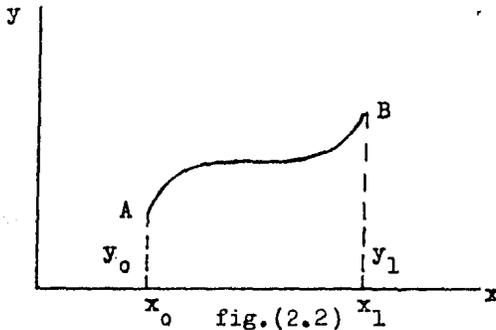
El cálculo variacional comenzó a desarrollarse en el siglo XVII, llegando a ser una disciplina matemática independiente -- con métodos propios de investigación.

2.2 Ecuación de Euler.

El problema fundamental de el cálculo de variaciones es -- determinar la función $y(x)$ con la condición de que la integral:

$$V(y(x)) = \int_{x_0}^{x_1} F(y(x), y'(x); x) dx$$

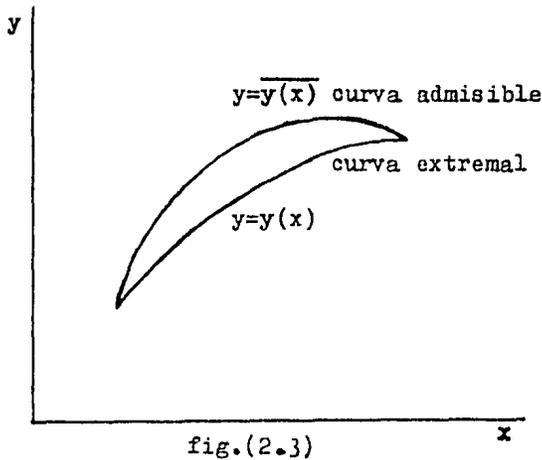
sea un extremal o sea, que tenga un valor máximo o mínimo. En -- donde $y'(x) = dy/dx$ y el punto y coma de F separa a la variable-- independiente x , de la variable dependiente $y(x)$ y de su deri -- vada $y'(x)$. Se supone que el funcional F está dado y que los -- puntos frontera de las curvas admisibles están fijos o sea: $y(x_0) = y_0$ e $y(x_1) = y_1$, figura (2.2)



Para que exista un extremo, la condición necesaria es que-- la variación del funcional se anule. Supongamos que en la cur-- va $y=y(x)$ derivable dos veces, se tiene un extremo; tomemos --- cierta curva admisible $y=\overline{y(x)}$ cercana a $y=y(x)$ e incluyamos a -- $y=y(x)$ e $y=\overline{y(x)}$ en la familia monoparamétrica de curvas:

$$y(\alpha, x) = y(x) + \alpha(\overline{y(x)} - y(x))$$

cuando $\alpha=0$, se obtiene la curva $y=y(x)$; para $\alpha=1$, se tiene que $y=\overline{y(x)}$, figura (2.3) . A la diferencia $\overline{y(x)} - y(x)$ se le llama-- variación de la función $y(x)$ y se designa por δy .



En los problemas variacionales la variación δy desempeña un papel análogo al de el incremento de la variable independiente Δx , en los problemas del estudio de los extremos de una función $f(x)$.

La variación $\delta y = \overline{y(x)} - y(x)$ es una función de x , esta función se puede derivar una o varias veces, siendo:

$(\delta y)' = \overline{y(x)'} - y'(x) = \delta y'$, es decir, la derivada de la variación es igual a la variación de la derivada, análogamente:

$$(\delta y)'' = \overline{y(x)''} - y''(x) = \delta y''$$

$$(\delta y)^k = \overline{y(x)^k} - y^k(x) = \delta y^k$$

De este modo, consideremos a la familia $y=y(\alpha, x)$ donde $y(\alpha, x) = y(x) + \alpha \delta y$; que contiene, para $\alpha=0$, la curva en la cual se alcanza el extremo, y para $\alpha=1$, cierta curva admisible cercana, llamada curva de comparación.

Si consideramos a los valores de el funcional $V(y(x))$, donde:

$$V(y(x)) = \int_{x_0}^{x_1} F(y(\alpha, x), y'(\alpha, x); x) dx$$

sólo en las curvas de la familia $y=y(\alpha, x)$ el funcional se transforma en una función de α ; o sea $V(y(\alpha, x)) = \psi(\alpha)$ ya que el -- valor del parámetro α determina una curva de la familia $y=y(\alpha, x)$ determinando también con esto el valor del funcional $V(y(\alpha, x))$ esta función $\psi(\alpha)$ tiene un extremo en $\alpha=0$ puesto que para dicho valor se tiene $y=y(x)$, teniendo el funcional, por hipótesis, un extremo con respecto a cualquier curva cercana admisible y , en particular, con respecto a las curvas cercanas de la familia: $y=y(\alpha, x)$

La condición necesaria para que la función $\psi(\alpha)$ tenga un extremo en $\alpha=0$, como es sabido, es la anulación de su primera derivada para $\alpha=0$, o sea:

$$\left. \frac{\partial \psi(\alpha)}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} = 0$$

como:

$$\psi(\alpha) = \int_{x_0}^{x_1} F(y(\alpha, x), y'(\alpha, x); x) dx$$

entonces

$$\frac{\partial \psi(\alpha)}{\partial \alpha} = \frac{\partial}{\partial \alpha} \int_{x_0}^{x_1} F(y(\alpha, x), y'(\alpha, x); x) dx.$$

Como los límites de integración son fijos la derivación afectará únicamente al integrando; por lo tanto:

$$\frac{\partial \psi(\alpha)}{\partial \alpha} = \int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \alpha} + \frac{\partial F}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial \alpha} \right) dx$$

haciendo el siguiente cambio de notación:

$$F_y = \frac{\partial F}{\partial y} ; \quad F_{y'} = \frac{\partial F}{\partial y'}$$

tenemos que:

$$\frac{\partial \psi(\alpha)}{\partial \alpha} = \int_{x_0}^{x_1} \left(F_y \frac{\partial y}{\partial \alpha} + F_{y'} \frac{\partial y'}{\partial \alpha} \right) dx$$

Puesto que:

$$\frac{\partial Y(\alpha, x)}{\partial \alpha} = \frac{\partial}{\partial \alpha} (y(x) + \alpha \delta(y))$$

$$= y$$

$$\frac{\partial Y'(\alpha, x)}{\partial \alpha} = \frac{\partial}{\partial \alpha} (y'(x) + \alpha \delta'(y))$$

$$= \delta y'$$

se obtiene:

$$\frac{\partial \Psi(\alpha)}{\partial \alpha} = \int_{x_0}^{x_1} (F_y \delta y + F_{y'} \delta y') dx$$

$$\frac{\partial \Psi(\alpha)}{\partial \alpha} = \int_{x_0}^{x_1} (F_y(y(x), y'(x); x) \delta y + F_{y'}(y(x), y'(x); x) \delta y') dx$$

como ya hemos visto, $\left. \frac{\partial \Psi(\alpha)}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0}$ se llama la variación del

funcional, y se denota por δV . La condición necesaria para que — el funcional $V(y(x))$ tenga un extremo, consiste en la anulación — de su variación $\delta V=0$. Para el funcional:

$$V(y(x)) = \int_{x_0}^{x_1} F(y, y'; x) dx$$

está condición tiene la forma:

$$\int_{x_0}^{x_1} (F_y \delta y + F_{y'} \delta y') dx = 0 ;$$

integrando el segundo sumando por partes, y tomando en cuenta que:

$\delta y' = (\delta y)'$, obtenemos:

$$\delta V = (F_y \delta y) \Big|_{x_0}^{x_1} + \int_{x_0}^{x_1} (F_y - \frac{d}{dx} F_{y'}) \delta y dx$$

pero

$$\delta y \Big|_{x=x_0} = \overline{y(x_0)} - y(x_0) = 0$$

y

$$\delta y \Big|_{x=x_1} = \overline{y(x_1)} - y(x_1) = 0$$

En virtud de que todas las curvas admisibles en el problema simple considerado, pasan por los puntos frontera fijos; por lo tanto:

$$\delta V = \int_{x_0}^{x_1} (F_y - \frac{d}{dx} F_{y'}) \delta y \, dx$$

de este modo, la condición necesaria de extremo toma la forma:

$$\int_{x_0}^{x_1} (F_y - \frac{d}{dx} F_{y'}) \delta y \, dx = 0$$

donde el primer factor $F_y - \frac{d}{dx} F_{y'}$ es una función continua dada en la curva $y=y(x)$ que realiza el extremo, y el segundo factor δy debido a la arbitrariedad en la elección de la curva de comparación $\overline{y=y(x)}$ es una función arbitraria que satisface sólo ciertas condiciones muy generales. Más exactamente, la función δy se anula en los puntos frontera $x=x_0$ y $x=x_1$, es continua y derivable -- una o varias veces, y o bien δy y $\delta y'$ son pequeños en valor absoluto. Para simplificar la condición de extremo se aplicara el siguiente lema.

Lema fundamental del cálculo de variaciones.

Si para cada función continua $\eta(x)$ se tiene:

$$\int_{x_0}^{x_1} \Phi(x) \eta(x) dx = 0$$

siendo $\Phi(x)$ una función continua en el intervalo $[x_0, x_1]$, entonces $\Phi(x) = 0$ en dicho intervalo. Para la demostración de este lema ver la referencia (8).

Apliquemos ahora el lema fundamental para simplificar la -- condición necesaria de extremo obtenida anteriormente.

$$\int_{x_0}^{x_1} \left(F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} \right) \delta y dx = 0$$

todas las condiciones del lema se cumplen; en la curva que realiza el extremo, el factor $\left(F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} \right)$ es una función continua -- y la variación δy es una función arbitraria a la cuál se han -- impuesto sólo limitaciones de carácter general, ya previstas en el lema fundamental; por lo tanto:

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0$$

en la curva $y=y(x)$ que realiza el extremo del funcional considerado, es decir, $y=y(x)$ es solución de la ecuación diferencial de segundo orden:

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0$$

o bien en forma desarrollada:

$$F_y - F_{xy'} - F_{yy'} y' - F_{y''} y'' = 0$$

Esta ecuación se denomina ecuación de Euler (y fue publicada por primera vez por él en 1744). Las curvas integrales de la -- ecuación de Euler $y=y(x, C_1, C_2)$ se llaman extremales, sólo en las

extremales puede alcanzarse un extremo del funcional:

$$V(y(x)) = \int_{x_0}^{x_1} F(y(x), y'(x); x) dx$$

2.3 Campo gravitatorio en el interior de una esfera homogénea.

Como una aplicación en la física de los principios variables, resolveremos el problema de encontrar la trayectoria de tiempo mínimo para una partícula, que viaje por dentro de la Tierra a través de un túnel, suponiendo que la tierra es completamente esférica, de densidad constante y que no existe fricción.

Primeramente se calculará la fuerza gravitatoria que se ejerce sobre un objeto situado en el interior de la Tierra como si esta fuera una esfera uniforme. Haciendo referencia a la figura(2.4), consideremos una esfera uniforme de radio R con un punto P situado a una distancia r del centro.

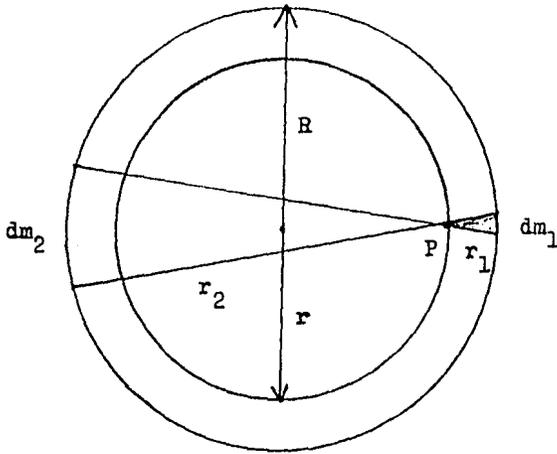


Figura (2.4)

Por el principio de superposición, la fuerza que se ejerce sobre P (masa m) puede considerarse como la suma de las fuerzas ejercidas por la capa esférica entre los radios r y R , y la ejercida por la esfera de radio r . La primera contribución es nula, este resultado se puede obtener de la siguiente forma. Para calcular la fuerza que se ejerce sobre P podemos dividir -

la capa esférica entre r y R figura(2.4) en elementos dm_1 y dm_2 hayando que la fuerza resultante debida a cada uno de dichos -- pares es nula ya que $dm_1/r_1^2 = dm_2/r_2^2$, (el área de la superfi-- cie de la capa correspondiente a un ángulo sólido elemental $d\Omega$, es proporcional a r_1^2). La contribución de la segunda no es más-- que $Gm_r m/r^2$, donde m_r es la masa de la esfera de radio r . La -- masa M de la esfera de radio R será $M=(4/3 \pi R^3)\rho$, y la de la esfera de radio r es la expresión dada por la siguiente ecua -- ción, $m_r=(4/3 \pi r^3)\rho$. A través de estas dos ecuaciones encon -- tramos que la relación entre m_r y M es:

$$m_r=(r/R)^3 M. \quad (2.1)$$

Podemos encontrar la fuerza que se ejerce sobre P usando la ley de la gravitación de Newton, o sea:

$$F= - \frac{Gm_r m}{r^2} \quad (2.2)$$

sustituyendo (2.1) en (2.2) tenemos que:

$$F= - \frac{GMm}{R^3} r \quad (2.3)$$

de esta expresión encontramos que la fuerza que se ejerce sobre m es de tipo central y es directamente proporcional a la distan-- cia que hay del cuerpo al centro de la Tierra. Su valor máximo-- lo alcanza en la superficie de la esfera cuando $r=R$ y este es,-- $F= - GMm/R^2$. Cuando r se hace mayor que R , la fuerza que se --- ejerce sobre m disminuye, siendo proporcional a $1/r^2$. Por lo -- que respecta a su dirección y a su dependencia con la distancia la fuerza en el interior de la Tierra es análoga a la fuerza -- del tipo de un resorte, porqué actúa como fuerza restauradora,-- proporcional al desplazamiento r de su posición de equilibrio.-- Si en la ecuación (2.3) sustituimos $G= gR^2/M$ donde M y R son la masa y el radio de la Tierra, entonces (2.3) se transforma en:

$$F= - \frac{mg}{R} r \quad (2.4)$$

De la ecuación (2.4) podemos deducir que el movimiento de cualquier partícula que se mueva en el interior de la Tierra, será armónico simple y en un plano, aunque la partícula se mueva en el espacio, debido a que la fuerza es central.

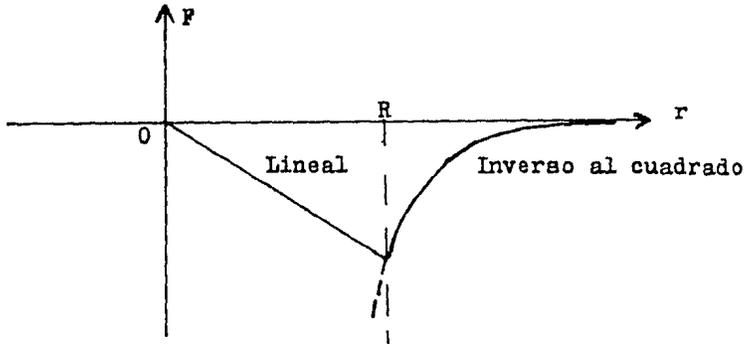


Fig.(2.5), variación de F para una esfera homogénea sólida.

La energía potencial asociada a la fuerza cuya ecuación es: $F = -\frac{mg}{R} r$; se encuentra integrando esta ecuación en el intervalo de 0 a r , o sea:

$$E_p = - \int_0^r \frac{(-mg)}{R} r \, dr$$

después de efectuar la integración, encontramos el siguiente resultado:

$$E_p = \frac{1}{2} mg \frac{r^2}{R} \quad (2.5)$$

2.4 Trayectoria braquistócrona.

Ahora estamos ya en posibilidad de encontrar la trayectoria braquistócrona, o de tiempo mínimo, para una partícula que viaje por dentro de la Tierra, suponiendo que ésta es completamente -- esférica, de densidad constante, que esta en reposo y que no exig te fricción.

Supongamos que la partícula parte del punto A, ver figura-- (2.6), y se traslada hasta el punto B. A través del cálculo va-- riacional, vamos a encontrar la trayectoria que nos de el menor-- tiempo, para ir del punto A al punto B. En el punto A, la partí-- cula parte desde el reposo, en la superficie $r=R$ solo tiene ener gía potencial, cuya expresión la podemos encontrar usando la --- ecuación (2.5), esta es:

$$E_p = \frac{1}{2} mg R. \quad (2.6)$$

En cualquier otro punto dentro de la Tierra existe una combina-- ción de energía cinética y de energía potencial, sus correspon -- dientes ecuaciones son:

$$E_p = \frac{1}{2} mg \frac{r^2}{R} \quad (2.7)$$

y

$$E_c = \frac{1}{2} mv^2 \quad (2.8)$$

la suma de estas dos ecuaciones nos lleva a la siguiente igual-- dad:

$$E = \frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} mg \frac{r^2}{R} \quad (2.9)$$

que representa la energía total de la partícula. Esta energía es siempre positiva, y es una primera integral del movimiento.

Por el principio de la conservación de la energía, tenemos-- que:

$$E = \frac{1}{2} mg R \quad (2.10)$$

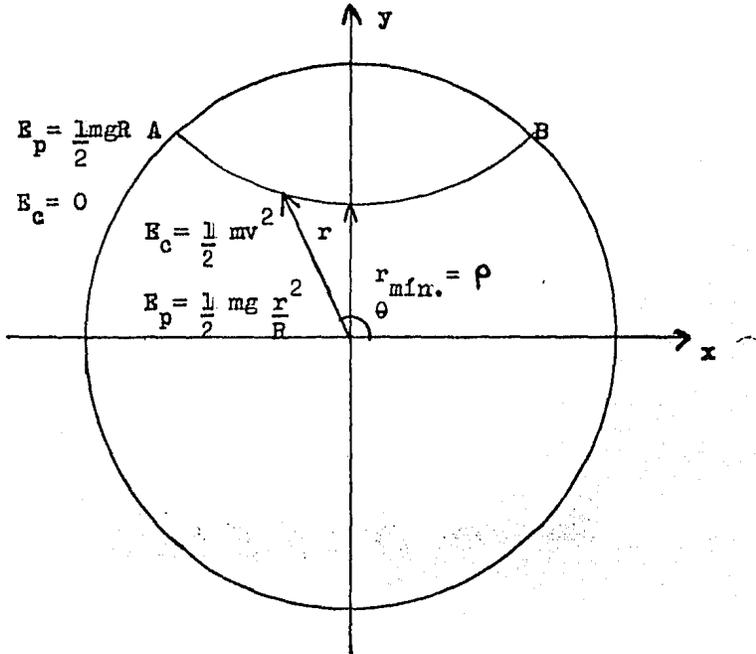


Figura (2.6)

La figura(2.7) muestra la gráfica de la energía potencial, representada por una parábola. Como el movimiento de la partícula va a ser oscilatorio, los límites de la oscilación van a estar determinados por las intersecciones de la energía total E , con la curva de energía potencial. Estos límites de oscilación se encuentran a distancias iguales $\pm R$ del origen O ; en cualesquier punto r la energía cinética E_c está dada por la distancia entre la curva E_p y la línea E , si $r > R$ la energía cinética es menor que cero, lo cual es imposible, por lo tanto las distancias permitidas estarán en el intervalo $-R \leq r \leq R$.

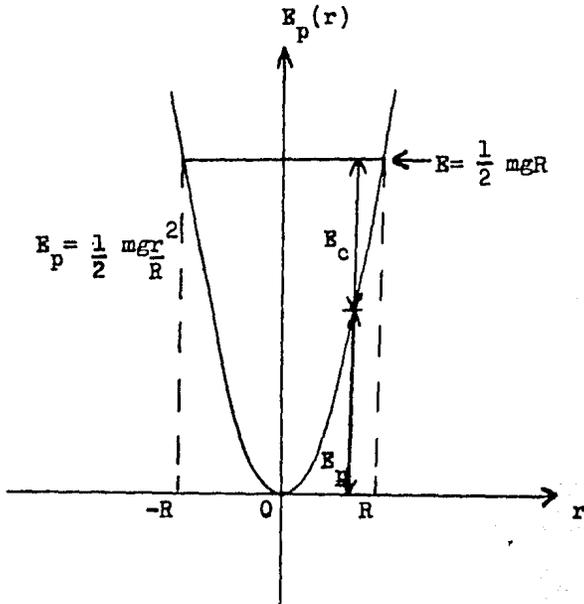


fig.(2.7)

Usando las ecuaciones (2.9) y (2.10), por el principio de conservación de la energía, tenemos la siguiente igualdad:

$$\frac{1}{2} m g R = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} m g \frac{r^2}{R} \quad (2.11)$$

despejando la velocidad, su expresión es:

$$v = \sqrt{\frac{g}{R}} \sqrt{R^2 - r^2} \quad (2.12)$$

de esta expresión podemos encontrar el tiempo que se realiza para ir de el punto A a el punto B, encontrándose los dos sobre la superficie terrestre, fig.(2.6); la expresión para el tiempo que se efectúa es:

$$t = \sqrt{\frac{R}{g}} \int_A^B \sqrt{\frac{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}{R^2 - r^2}} d\theta \quad (2.13)$$

La ecuación (2.13) es la expresión que deseamos sea mínimo.

Como $(R/g)^{1/2}$ es una constante que no afecta a la ecuación final- podemos admitir que el funcional es el integrando de la expre -- sión (2.13). Este funcional depende de r y de $dr/d\theta$, la ecuación - de Euler con estas dos dependencias se transforma en:

$$F - y'F_{y'} = \sigma \quad (2.14)$$

donde $y' = dr/d\theta$; $F = \sqrt{\frac{r^2 + (dr/d\theta)^2}{R^2 - r^2}}$ y σ es una constante que -

para simplificar los cálculos se escoge como:

$$\sigma = \frac{c}{\sqrt{R^2 - c^2}}, \text{ donde } c \text{ es una constante cuyo dominio es } 0 \leq c < R.$$

Sustituyendo estas expresiones en la ecuación (2.14) y despejan- do $dr/d\theta$ e integrando, tenemos que:

$$\theta = \frac{c}{R} \int \sqrt{\frac{R^2 - r^2}{r^2 - c^2}} \frac{dr}{r} \quad (2.15)$$

haciendo $r^2 = R^2 \cos^2 \Psi + c^2 \sin^2 \Psi$ para evaluar esta integral, -- encontramos que:

$$\theta = \frac{c}{R} \Psi - \text{Arctan} \left(\frac{c}{R} \tan \Psi \right) \quad (2.16)$$

tomando la tangente a ambos miembros de la ecuación (2.16) y -- desarrollando la tangente del segundo miembro haciendo:

$$R - c = 2b$$

$$\tan \theta = y/x$$

y

$$\theta = \frac{2b \Psi}{R}$$

encontramos que, x e y son iguales a las siguientes expresiones:

$$x(\theta) = (R-b) \cos \theta + b \cos \frac{(R-b)\theta}{b} \quad (2.17)$$

$$y(\theta) = (R-b) \sin \theta - b \sin \frac{(R-b)\theta}{b} \quad (2.18)$$

Las ecuaciones (2.17) y (2.18) son las ecuaciones parámetricas de una hipocicloide, por lo tanto la trayectoria de tiempo - mínimo es una hipocicloide generada por un círculo de radio igual a $\frac{1}{2}(R - c)$, que rueda con una velocidad constante dentro de un círculo fijo de radio R . Estas ecuaciones muestran que el --- movimiento de la partícula será en un plano, esto es debido a -- que la fuerza a la que esta sujeta es de tipo central.

2.5 Tiempo de recorrido.

Ya hemos encontrado que la trayectoria de tiempo mínimo es la hipocicloide, ahora encontraremos una expresión general para el tiempo de recorrido de la partícula, cuando esta se mueva — por la trayectoria braquistócrona.

De la expresión (2.15) podemos encontrar $dr/d\theta$, está es — igual a:

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{Rr}{c} \sqrt{\frac{r^2 - c^2}{R^2 - r^2}} \quad (2.19)$$

la constante c puede ser evaluada usando el hecho de que:

$$\frac{dr}{d\theta} = 0 \quad \text{para } r_{\min} = \rho \quad \text{ver fig. (2.6)}$$

por lo tanto c tiene un valor de:

$$c = \rho$$

sustituyendo el valor de c en la ecuación (2.19), esta se transforma en:

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{Rr}{\rho} \sqrt{\frac{r^2 - \rho^2}{R^2 - r^2}}$$

sustituyendo $dr/d\theta$ en:

$$t = 2 \int_{\rho}^R \frac{\sqrt{\frac{R}{g}}}{\sqrt{R^2 - r^2}} \sqrt{1 + r^2 \left(\frac{d\theta}{dr} \right)^2} dr \quad (2.20)$$

después de reducir términos, encontramos la siguiente expresión para el tiempo de recorrido:

$$t = 2 \sqrt{\frac{R^2 - \rho^2}{Rg}} \int_{\rho}^R \frac{r dr}{\sqrt{R^2 - r^2} \sqrt{r^2 - \rho^2}}$$

al evaluar esta integral encontramos el siguiente resultado:

$$t = \pi \sqrt{\frac{R^2 - \rho^2}{Rg}} \quad (2.21)$$

está ecuación da el tiempo total de recorrido entre dos -- puntos que se encuentren sobre la superficie de la Tierra, si se esta viajando a través de la curva braquistócrona, o sea la hipocicloide. Esta expresión ésta en función de R que es el -- radio de la tierra, de la aceleración g debida a la gravedad y de ρ que es la mínima distancia que hay del centro de la Tierra a la curva braquistócrona.

2.6 La astroide como un caso particular de hipocicloide.

Ya hemos demostrado que la trayectoria de tiempo mínimo es la hipocicloide cuyas ecuaciones paramétricas son:

$$x(\vartheta) = (R-b)\cos\vartheta + b\cos\frac{R-b}{b}\vartheta \quad (2.22)$$

$$y(\vartheta) = (R-b)\sin\vartheta - b\sin\frac{R-b}{b}\vartheta \quad (2.23)$$

donde R es el radio del círculo fijo y b es el radio del círculo que rueda en la parte interna del círculo fijo. Si la razón de los radios de las circunferencias que intervienen en la generación de la hipocicloide es un número irracional, la curva encuentra a la circunferencia del círculo fijo en una infinidad de puntos y nunca se cierra, y si es un número racional la hipocicloide se cierra después de que el círculo móvil ha girado un número entero de veces. Tomando esto en consideración para el análisis de las propiedades cinemáticas de la hipocicloide, tomaremos el caso particular en donde:

$$b=R/4$$

sustituyendo este radio en las ecuaciones (2.22) y (2.23), estas se transforman en:

$$x = \frac{R}{4} (3\cos\vartheta + \cos 3\vartheta) \quad (2.24)$$

$$y = \frac{R}{4} (3\sin\vartheta - \sin 3\vartheta) \quad (2.25)$$

para simplificar a las ecuaciones anteriores usaremos las siguientes identidades trigonométricas:

$$\cos 3\vartheta = 4\cos^3\vartheta - 3\cos\vartheta$$

$$\sin 3\vartheta = 3\sin\vartheta - 4\sin^3\vartheta$$

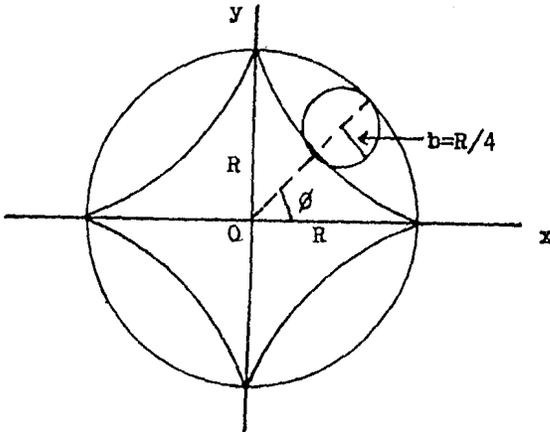
así encontramos que:

$$x(\vartheta) = R\cos^3\vartheta \quad (2.26)$$

$$y(\vartheta) = R\sin^3\vartheta \quad (2.27)$$

Las ecuaciones (2.26) y (2.27), representan un caso parti -

cular de hipocicloide, esta es conocida como astroide; su gráfica se muestra en la figura (2.8).

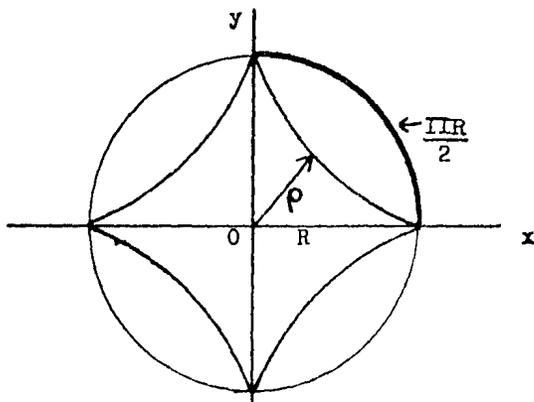


figura(2.8)

En la sección (2.6) encontramos una ecuación general, --- que da el tiempo total de recorrido para una partícula que viaja de un punto a otro de la superficie de la Tierra, viajando dentro de ella a través de la curva de tiempo mínimo, esta ---- ecuación es:

$$t = \pi \sqrt{\frac{R^2 - \rho^2}{Rg}} \quad (2.28)$$

donde ρ es la profundidad de la curva, midiéndose esta profundidad del centro de la Tierra a la curva. Para encontrar el valor de ρ en la astroide, procederemos de la siguiente forma: - tomaremos una cuarta parte de la curva, que corresponde a un arco de la Tierra de 10005.973 km. figura(2.9); esta porción de curva es simétrica con respecto a su punto medio, que se - - encuentra a un ángulo de 45° , siendo además este punto, el que se encuentra a la mínima distancia del centro de la Tierra a la curva.



figura(2.9)

para encontrar las coordenadas del punto medio usaremos las --
ecuaciones (2.26) y (2.27):

$$x(\phi) = R \cos^3 \phi$$

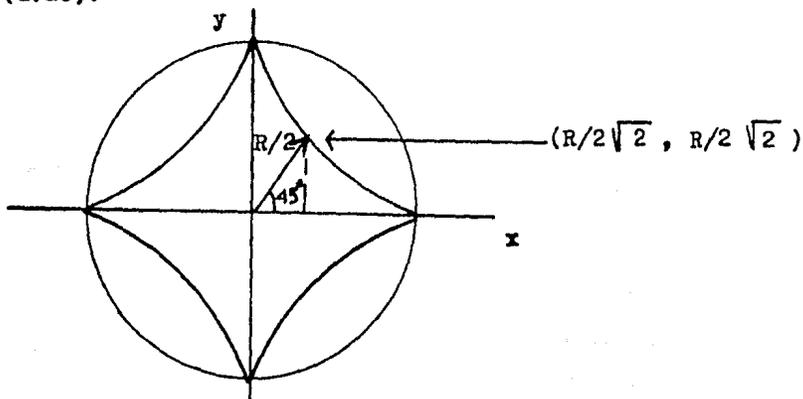
$$y(\phi) = R \sin^3 \phi$$

como $\phi = 45^\circ$, sustituyendo este valor en las ecuaciones anteriores, se encuentra que:

$$x = \frac{R}{2\sqrt{2}} \quad (2.29)$$

$$y = \frac{R}{2\sqrt{2}} \quad (2.30)$$

por lo tanto las coordenadas del punto medio serán $(R/2\sqrt{2}, R/2\sqrt{2})$
ver figura (2.10).



figura(2.10)

para encontrar la profundidad ρ de la curva, usaremos el teorema de pitágoras:

$$\rho = \sqrt{\left(\frac{R}{2\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{R}{2\sqrt{2}}\right)^2}$$

efectuando los pasos algebraicos, se encuentra que:

$$\rho = \frac{R}{2} \tag{2.31}$$

sustituyendo el valor de ρ en la ecuación (2.28), llegamos al siguiente resultado:

$$t = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{3R}{g}} \tag{2.32}$$

sustituyendo los valores del radio de la Tierra y de la aceleración de la gravedad, el tiempo en minutos es:

$$t = 36.558$$

que es el tiempo total que efectuaría una partícula en su recorrido por un cuarto de longitud de astroide.

2.7 Ecuación de movimiento de la partícula que se mueve por la astroide.

A partir de las ecuaciones (2.7), (2.8), (2.26) y (2.27) --- encontraremos la ecuación de movimiento para la partícula que viaja por la curva conocida como astroide, siendo esta un caso particular de la hipocicloide, que es la curva de tiempo mínimo. La ecuación de movimiento la deduciremos a partir de las ecuaciones de Euler-Lagrange.

Según la ecuación (2.8) la energía cinética de la partícula es:

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$$

usando las ecuaciones (2.26) y (2.27) para calcular las derivadas \dot{x} y \dot{y} , después de sustituir las expresiones de las derivadas, encontramos que:

$$T = \frac{9}{2} m R^2 \cos^2 \phi \sin^2 \phi \dot{\phi}^2$$

Tomando como origen del sistema de referencia, desde el cual se está midiendo la energía potencial, al centro de la Tierra, la expresión para dicha energía es:

$$E_p = \frac{1}{2} mg \frac{r^2}{R}$$

sustituyendo en esta ecuación las expresiones (2.26) y (2.27)--- esta se transforma en:

$$E_p = \frac{1}{2} mgR(\sin^6 \phi + \cos^6 \phi)$$

la correspondiente lagrangiana, para estas energías cinética y potencial es:

$$L = \frac{9}{2} R^2 m \cos^2 \phi \sin^2 \phi \dot{\phi}^2 - \frac{1}{2} mgR(\sin^6 \phi + \cos^6 \phi)$$

la ecuación de Euler-Lagrange, para esta lagrangiana, es:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \phi} = 0 \quad (2.33)$$

donde:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{9}{4} R^2 m \text{sen} 4\theta \dot{\theta}^2 - \frac{3}{4} mgR \text{sen} 4\theta$$

y

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = \frac{9}{4} mR^2 \text{sen}^2 2\theta \ddot{\theta}$$

sustituyendo estas ecuaciones en (2.33) se encuentra la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{1}{2} \text{sen} 2\theta \ddot{\theta} + \cos 2\theta \dot{\theta}^2 - \frac{g}{3R} \cos 2\theta = 0$$

que es la ecuación de movimiento para la partícula que se mueve por la curva de tiempo mínimo. Para obtener una expresión más sencilla, haremos la siguiente sustitución:

$$u = \cos 2\theta$$

haciendo esto, la ecuación de movimiento se transforma en:

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + \frac{4g}{3R} u = 0$$

esta ecuación nos muestra que la partícula oscilará con un movimiento armónico simple y con una frecuencia angular total igual a:

$$\omega = \sqrt{\frac{4g}{3R}}$$

y con un período:

$$P = 2\pi \sqrt{\frac{3R}{4g}}$$

A partir de la expresión para el período, se deduce un resultado que ya conocemos, es el tiempo que necesita la partícula para ir de un punto a otro de la Tierra, cuando viaje a través de la curva braquistócrona, este tiempo es la mitad del período o sea:

$$T = P/2$$

de donde:

$$r = R \sqrt{\frac{3R}{4g}}$$

La solución de la ecuación de movimiento, es una combinación lineal de las funciones seno y coseno, de la siguiente forma:

$$u(t) = C_1 \operatorname{sen} \sqrt{\frac{4g}{3R}} t + C_2 \operatorname{cos} \sqrt{\frac{4g}{3R}} t$$

pero $u = \operatorname{os} 2\phi$, por lo tanto:

$$\operatorname{os} 2\phi = C_1 \operatorname{sen} \sqrt{\frac{4g}{3R}} t + C_2 \operatorname{cos} \sqrt{\frac{4g}{3R}} t$$

para transformar esta ecuación a coordenadas cartesianas, haremos uso de las siguientes identidades trigonométricas:

$$\operatorname{cos} 2\phi = 1 - 2\operatorname{sen}^2 \phi$$

y

$$\operatorname{cos} 2\phi = 2\operatorname{cos}^2 \phi - 1$$

y de las ecuaciones paramétricas de la trayectoria:

$$x = R \operatorname{cos}^3 \phi$$

$$y = R \operatorname{sen}^3 \phi$$

haciendo uso de las identidades trigonométricas, llegamos a las siguientes igualdades:

$$\operatorname{sen}^2 \phi = \frac{1}{2} \left(1 - C_1 \operatorname{sen} \sqrt{\frac{4g}{3R}} t - C_2 \operatorname{cos} \sqrt{\frac{4g}{3R}} t \right)$$

$$\operatorname{cos}^2 \phi = \frac{1}{2} \left(1 + C_1 \operatorname{sen} \sqrt{\frac{4g}{3R}} t + C_2 \operatorname{cos} \sqrt{\frac{4g}{3R}} t \right)$$

empleando a las ecuaciones paramétricas de la trayectoria, las anteriores identidades se transforman en:

$$(y/R)^{2/3} = \frac{1}{2} \left(1 - C_1 \operatorname{sen} \sqrt{\frac{4g}{3R}} t - C_2 \operatorname{cos} \sqrt{\frac{4g}{3R}} t \right) \quad (2.34)$$

$$(x/R)^{2/3} = \frac{1}{2} \left(1 + C_1 \operatorname{sen} \sqrt{\frac{4g}{3R}} t + C_2 \operatorname{cos} \sqrt{\frac{4g}{3R}} t \right) \quad (2.35)$$

para evaluar a las constantes C_1 y C_2 , empleamos las siguientes condiciones iniciales:

$$r(0) = R \quad \text{y} \quad \dot{r}(0) = 0$$

que nos llevaron a los siguientes resultados:

$$C_1=0 \text{ y } C_2=1 \quad (2.36)$$

sustituyendo estos valores en las ecuaciones (2.34) y (2.35) y después de usar algunas identidades trigonométricas, llegamos finalmente a las siguientes ecuaciones:

$$x(t) = R \cos^3 \sqrt{\frac{g}{3R}} t \quad (2.37)$$

$$y(t) = R \operatorname{sen}^3 \sqrt{\frac{g}{3R}} t \quad (2.38)$$

estas ecuaciones paramétricas dan la posición de la partícula en función del tiempo, cuando esta viaja por la trayectoria braquistócrona.

2.8 Longitud total de la trayectoria.

Nuestro análisis cinemático de la partícula que viaja por un cuarto de astroide, comenzará con el cálculo de la distancia que recorre la partícula en cada instante de tiempo. Podemos calcular la distancia recorrida usando la siguiente --- expresión, ya conocida del cálculo integral:

$$d = \int \sqrt{1 + (dy/dx)^2} \, dx. \quad (2.39)$$

Derivando a las ecuaciones (2.37) y (2.38) con respecto a t y sustituyendo los resultados en la ecuación (2.39) se tiene que:

$$d = \frac{3R}{2} \sqrt{\frac{g}{3R}} \int \sin 2\sqrt{\frac{g}{3R}} t \, dt; \quad (2.40)$$

efectuando la integración indefinida y usando la condición -- inicial $d=0$ cuando $t=0$, llegamos al siguiente resultado:

$$d = -\frac{3R}{4} \cos 2\sqrt{\frac{g}{3R}} t + \frac{3R}{4} \quad (2.41)$$

el tiempo total que realiza la partícula en su recorrido es de:

$$t = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{3R}{g}}$$

por lo tanto la ecuación (2.41) nos da la distancia total que cubre la partícula durante este tiempo, esta es:

$$d = \frac{3}{2} R$$

sustituyendo el valor del radio de la Tierra, que es de 6370km la distancia total en km. que recorre la partícula es:

$$d = 9555 \text{ km.} \quad (2.42)$$

2.9 Velocidad y aceleración de la partícula que viaja por la astroide.

Usando la conservación de la energía, encontramos a la ecuación (2.12), que nos da una expresión para la velocidad - que adquiere una partícula que viaje dentro de la Tierra, esta es:

$$v = \sqrt{\frac{g}{R}} \sqrt{R^2 - r^2} \quad (2.43)$$

sustituyendo en esta ecuación las expresiones (2.37) y (2.38) se encuentra que:

$$v = \frac{\sqrt{3gR}}{2} \operatorname{sen} 2 \sqrt{\frac{g}{3R}} t \quad (2.44)$$

A partir de esta ecuación es muy sencillo encontrar la aceleración tangencial a la que estará sujeta la partícula. Sabemos que la aceleración tangencial se encuentra por medio de - la expresión:

$$a_t = \frac{dv}{dt};$$

derivando a la ecuación (2.44) con respecto a t, encontramos el siguiente resultado:

$$a_t = g \cos 2 \sqrt{\frac{g}{3R}} \quad (2.45)$$

Para encontrar la aceleración normal o centrípeta usaremos la siguiente ecuación:

$$a_N = \frac{v^2}{R_c} \quad (2.46)$$

donde v es la velocidad de la partícula ec.(2.43) y R_c es el radio de curvatura de la trayectoria, la expresión para R_c en coordenadas cartesianas es:

$$R_c = \left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{3/2} \frac{dx^2}{d^2y} \quad (2.47)$$

A partir de las ecuaciones (2.37) y (2.38) es muy sencillo encontrar la ecuación cartesiana de la astroide, efectuando algunos pasos algebraicos se encuentra que esta es:

$$x^{2/3} + y^{2/3} = R^{2/3} \quad (2.48)$$

Su forma explícita es:

$$y = (R^{2/3} - x^{2/3})^{3/2} \quad (2.49)$$

de donde la primera y segunda derivadas con respecto a x son:

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{(R^{2/3} - x^{2/3})^{1/2}}{x^{1/3}} \quad (2.50)$$

y

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{R^{2/3}}{3x^{4/3} \sqrt{R^{2/3} - x^{2/3}}} \quad (2.51)$$

Sustituyendo las ecuaciones (2.50) y (2.51) en (2.47) obtenemos el siguiente resultado:

$$R_c = 3R^{1/3} x^{1/3} \sqrt{R^{2/3} - x^{2/3}} \quad (2.52)$$

Usando este resultado, junto con la ecuación (2.43), la expresión (2.46) toma la siguiente forma:

$$a_N = \frac{g}{R} \frac{(R^2 - r^2)}{3R^{1/3} x^{1/3} \sqrt{R^{2/3} - x^{2/3}}} \quad (2.53)$$

como $r^2 = x^2 + y^2$, usando la ec. (2.49) se transforma en:

$$r^2 = R^2 - 3R^{4/3} x^{2/3} + 3R^{2/3} x^{4/3}$$

sustituyendo este resultado en la ec. (2.53), esta se transforma en:

$$a_N = \frac{g}{R^{2/3}} x^{1/3} \sqrt{R^{2/3} - x^{2/3}} \quad (2.54)$$

Pondremos esta ecuación en función del tiempo usando la ecuación (2.37); haciendo esto el resultado final es:

$$a_N = \frac{g}{2} \operatorname{sen} 2 \sqrt{g/3R} t \quad (2.55)$$

A partir de las ecuaciones para la aceleración centrípeta y la aceleración tangencial, podemos encontrar la aceleración total a la que estará sujeta la partícula, cuando esta viaje -- por la astroide. La aceleración total se encuentra por medio de la siguiente ecuación:

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_N^2} \quad (2.56)$$

sustituyendo aquí las ecuaciones (2.45) y (2.55), la aceleración total es dada por el siguiente resultado:

$$a = g \sqrt{\sin^6 \sqrt{\frac{g}{3R}} t + \cos^6 \sqrt{\frac{g}{3R}} t} \quad (2.57)$$

En resumen, hemos encontrado las siguientes ecuaciones -- que proporcionan toda la información acerca del movimiento de -- una partícula que se mueva por la parte de la astroide que se encuentra en el primer cuadrante.

$$t = \frac{11}{2} \sqrt{\frac{3R}{g}} \quad (2.58)$$

$$d = -\frac{3}{4}R \cos \sqrt{\frac{4g}{3R}} t + \frac{3}{4}R \quad (2.59)$$

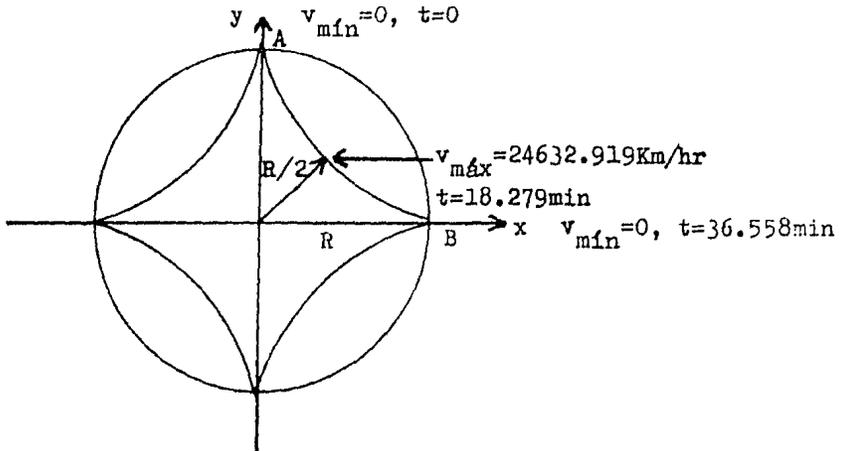
$$v = \sqrt{\frac{3gR}{4}} \sin \sqrt{\frac{4g}{3R}} t \quad (2.60)$$

$$a_t = g \cos \sqrt{\frac{4g}{3R}} t \quad (2.61)$$

$$a_N = \frac{g}{2} \sin \sqrt{\frac{4g}{3R}} t \quad (2.62)$$

$$a = g \sqrt{\sin^6 \sqrt{\frac{g}{3R}} t + \cos^6 \sqrt{\frac{g}{3R}} t} \quad (2.63)$$

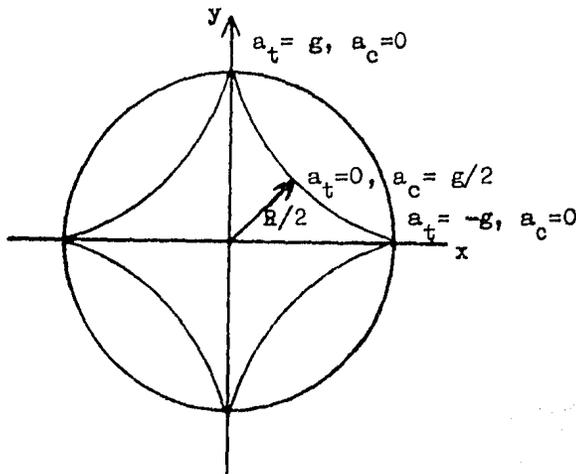
La información que nos da la ecuación (2.60) acerca de la variación de la velocidad es la siguiente; en el punto de partida donde $t=0$, la partícula se encuentra sobre la superficie de la Tierra con una velocidad nula; que corresponde a su velocidad mínima, a partir de este punto la velocidad aumenta conforme transcurre el tiempo; llegando a tener un valor máximo de 24632.919 km/hr, en un tiempo de 18.279 minutos, a partir de este tiempo su magnitud empieza a decrecer, hasta llegar a cero en un tiempo de 36.558 minutos, en este tiempo la partícula ha recorrido una distancia de 9555 km; o sea la totalidad de su trayectoria AB, figura(2.11)



figura(2.11)

El análisis de la aceleración normal y tangencial, a la que estará sujeta la partícula durante toda su trayectoria, se basará en las ecuaciones (2.61) y (2.62). En el punto de partida cuando $t=0$, la aceleración tangencial toma su valor máximo que es de 9.8 m/s^2 ; y la aceleración centrípeta tiene un valor mínimo igual a cero, la aceleración tangencial y centrípeta adquieren un mismo valor cuando a transcurrido un tiempo

po de 12.8837 minutos y lo vuelven adquirir en un tiempo de -- 23.674553 minutos, en el primer tiempo ambas aceleraciones forman un ángulo de 45° y en el segundo un ángulo de 135° . En un tiempo de 18.279 minutos la partícula alcanza el punto medio de la trayectoria con una aceleración tangencial mínima igual a -- cero y la aceleración centrípeta adquiere su valor máximo que es de 4.9m/s^2 , o sea la mitad de la aceleración de la gravedad; en este punto la aceleración centrípeta y tangencial son mutuamente perpendiculares. A partir del punto medio de la trayectoria, la aceleración tangencial empieza a aumentar hasta -- llegar al valor de 9.8m/s^2 encontrándose nuevamente la partícula en la superficie de la Tierra, y contrariamente la aceleración centrípeta empieza a disminuir hasta llegar a cero -- cuando la partícula se encuentra sobre la superficie terrestre, figura(2.12)



figura(2.12)

Los datos aportados por las ecuaciones (2.59) - (2.63) se encuentran resumidos en las tablas 1-4 y sus correspondientes gráficas estan numeradas del 1-4

TABLA I

tiempo (minutos)	distancia recorrida (Kilómetros)
0	0
1	17.6
2	70.3
3	157.8
4	279.4
5	434.2
6	621.0
7	838.6
8	1085.1
9	1359.0
10	1658.0
11	1980.1
12	2322.8
13	2683.7
14	3060.0
15	3448.9
16	3847.7
17	4253.4
18	4662.9
19	5073.2
20	5481.4
21	5884.3
22	6279.1
23	6662.9
24	7032.7
25	7385.8
26	7719.7
27	8031.9
28	8320.1
29	8582.1
30	8816.1
31	9020.3
32	9193.1
33	9333.3
34	9440.0
35	9512.2
36	9549.5
37	9551.5
38	9518.3
39	9450.2
40	9347.5
41	9211.2
42	9042.1
43	8841.5

GRAFICA I.

47

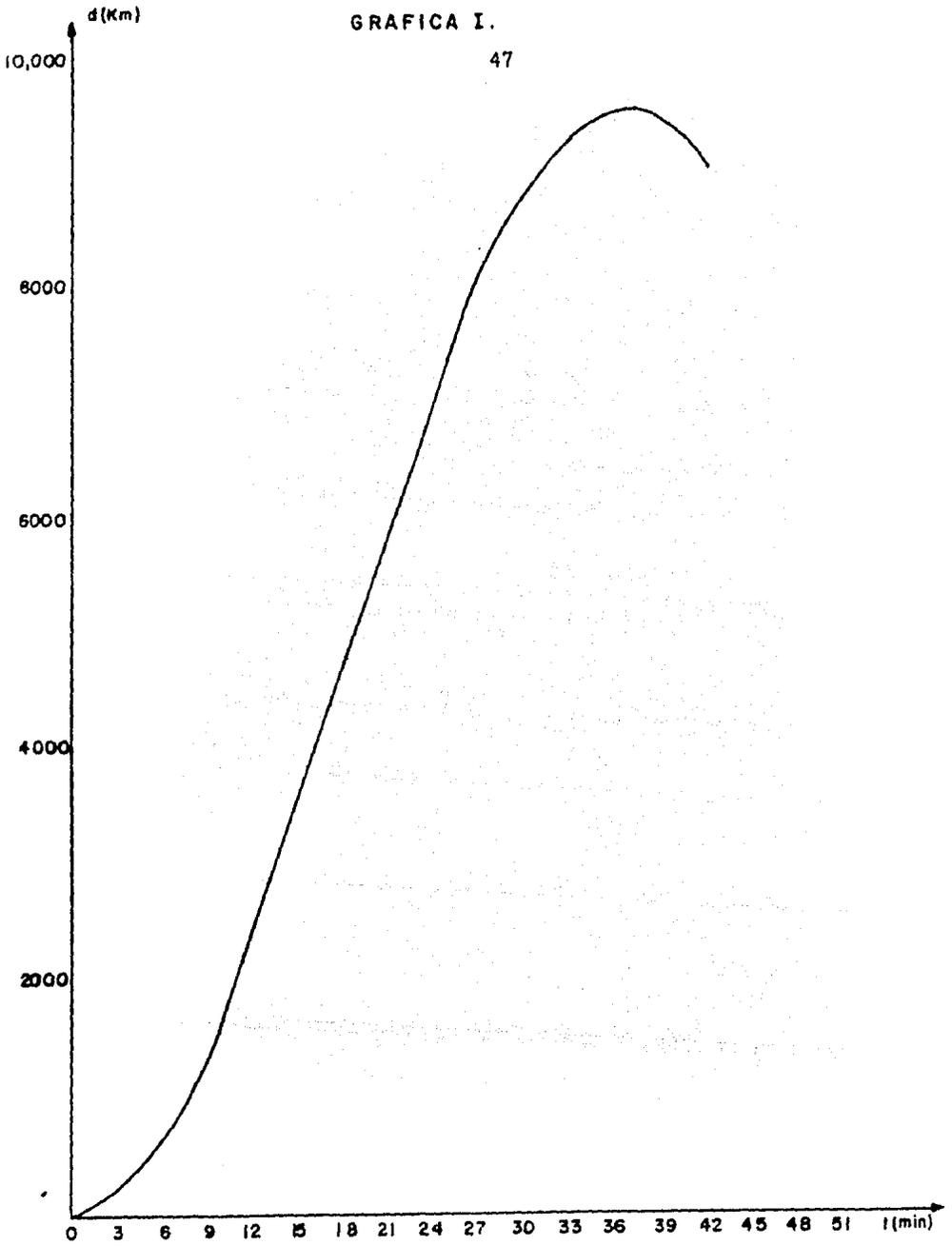


TABLA 2

tiempo (minutos)	rapidez (icm/hr)
0	0
1	2114.1
2	4212.7
3	6280.2
4	8301.4
5	10261.3
6	12145.4
7	13939.9
8	15631.6
9	17207.9
10	18657.1
11	19968.7
12	21133.0
13	22141.2
14	22986.1
15	23661.3
16	24161.9
17	24484.2
18	24625.8
19	24585.6
20	24364.0
21	23962.6
22	23384.4
23	22633.6
24	21715.7
25	20637.6
26	19407.1
27	18033.5
28	16526.7
29	14898.0
30	13159.3
31	11323.6
32	9404.2
33	7415.5
34	5372.0
35	3288.9
36	1181.5
37	934.6
38	3043.8
39	5130.5
40	7179.4
41	9175.3
42	11103.5
43	12949.8

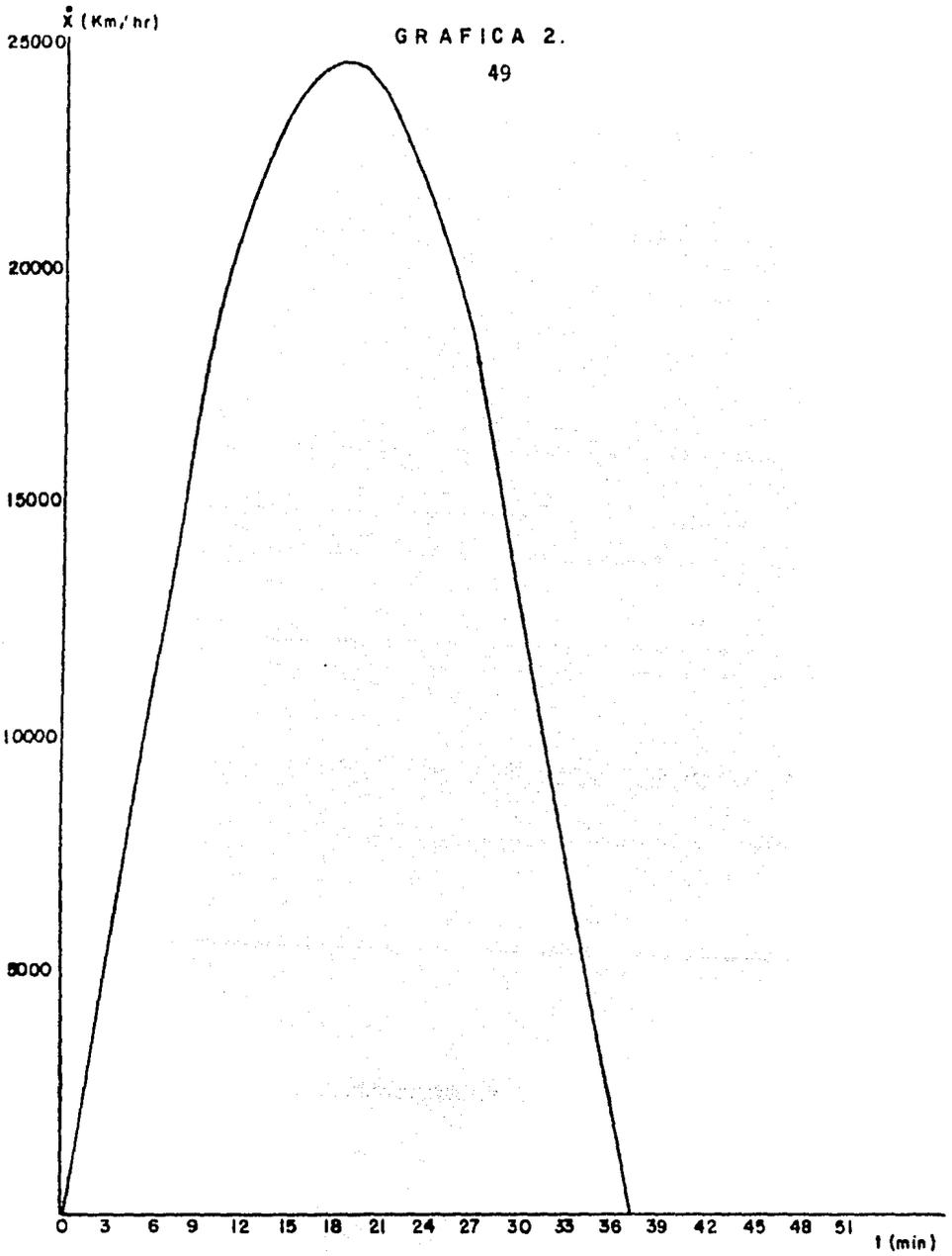
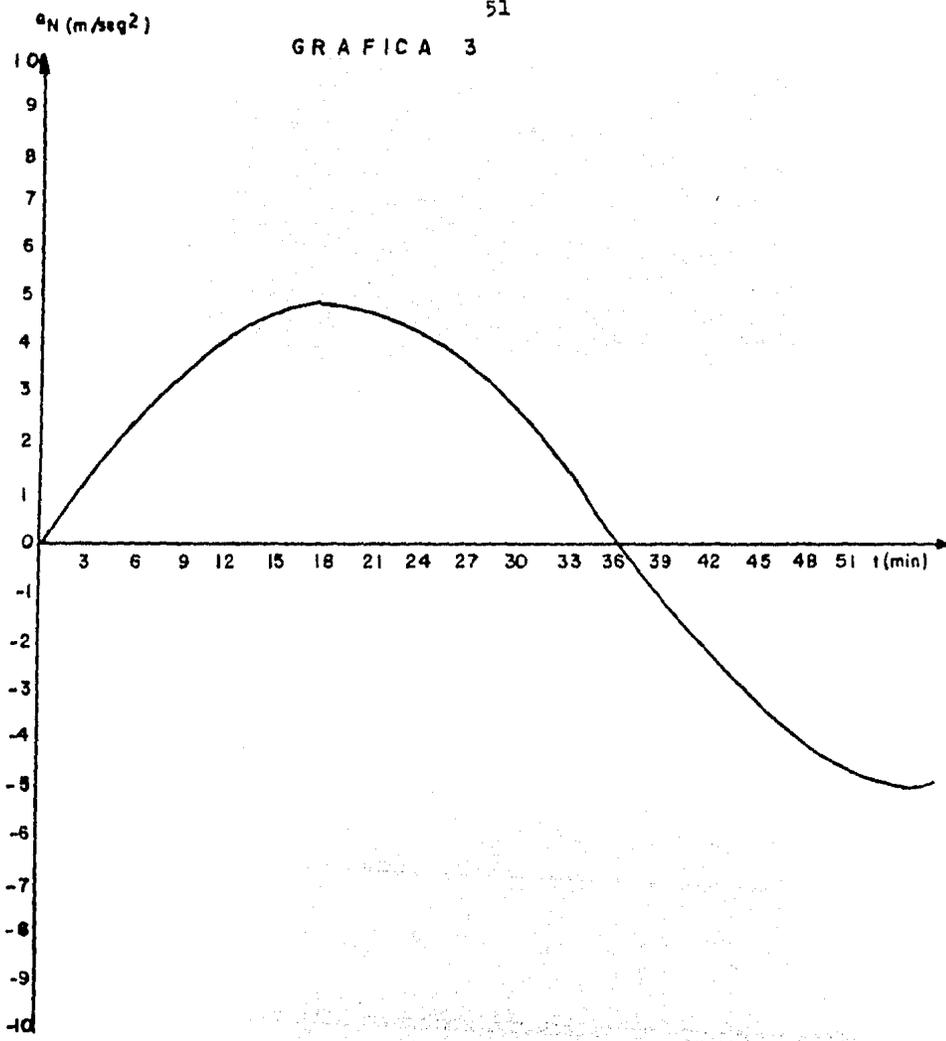


TABLA 3

tiempo (minutos)	Aceleración tangencial (m/seg ²)	Aceleración centrípeta (m/seg ²)
0	9.80	0
1	9.76	0.42
2	9.65	0.83
3	9.47	1.24
4	9.22	1.65
5	8.90	2.04
6	8.52	2.41
7	8.07	2.77
8	7.57	3.10
9	7.01	3.42
10	6.39	3.71
11	5.73	3.97
12	5.03	4.20
13	4.29	4.40
14	3.52	4.57
15	2.72	4.70
16	1.90	4.80
17	1.07	4.87
18	0.23	4.89
19	-0.60	4.89
20	-1.44	4.84
21	-2.27	4.76
22	-3.08	4.65
23	-3.86	4.50
24	-4.62	4.31
25	-5.35	4.10
26	-6.03	3.86
27	-6.67	3.58
28	-7.26	3.28
29	-7.80	2.96
30	-8.28	2.61
31	-8.70	2.25
32	-9.05	1.87
33	-9.34	1.47
34	-9.56	1.06
35	-9.71	0.65
36	-9.78	0.23
37	-9.79	-0.18
38	-9.72	-0.60
39	-9.58	-1.02
40	-9.37	-1.42
41	-9.09	-1.82
42	-8.74	-2.20
43	-8.33	-2.57

GRAFICA 3



GRAFICA 4

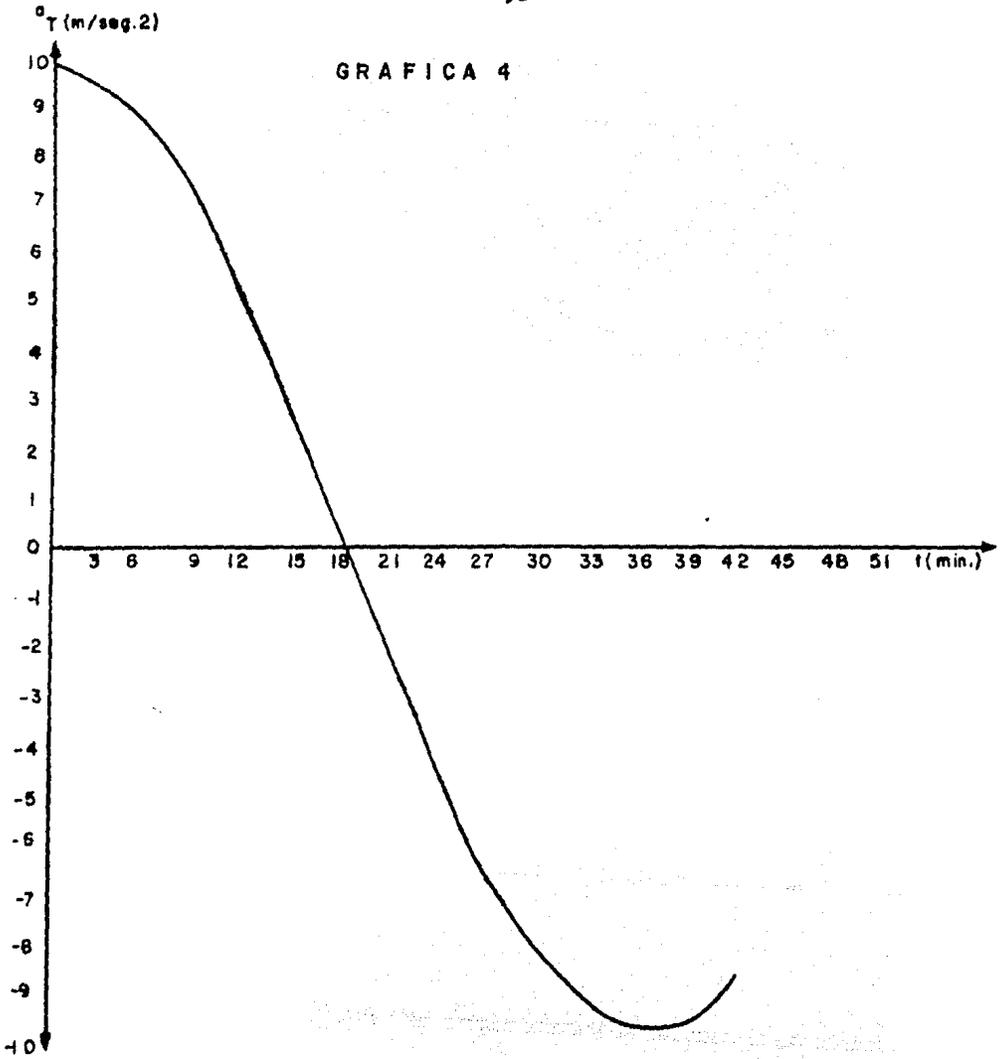
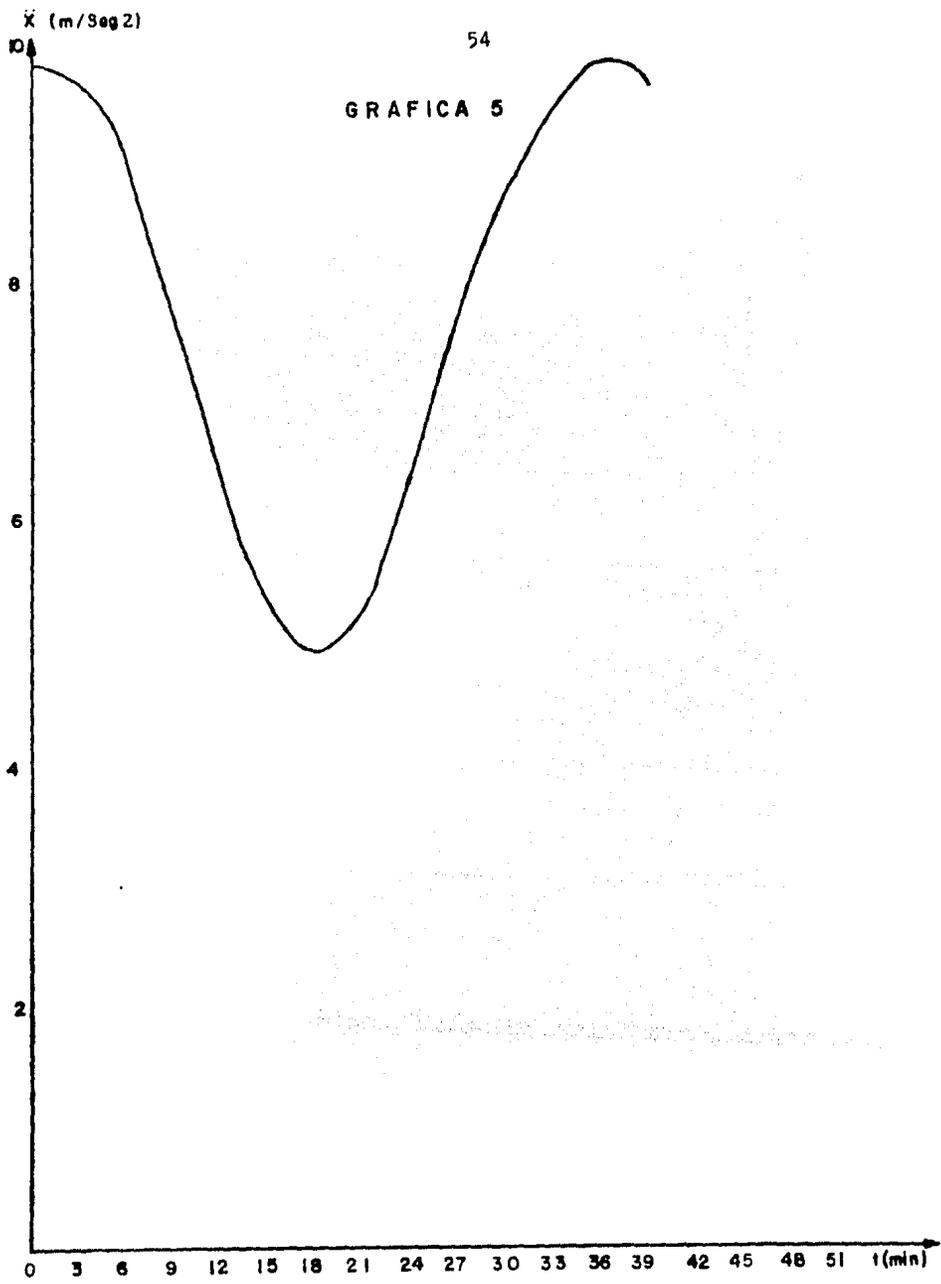


TABLA 4

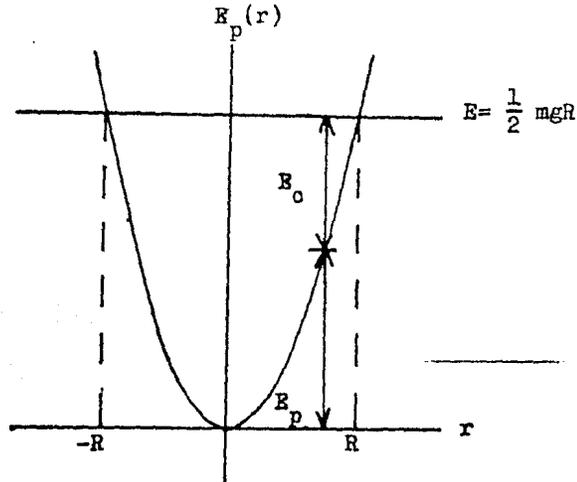
tiempo (minutos)	Aceleración total (m/seg ²)
0	9.80
1	9.77
2	9.69
3	9.55
4	9.37
5	9.14
6	8.86
7	8.54
8	8.18
9	7.80
10	7.39
11	6.97
12	6.55
13	6.15
14	5.77
15	5.43
16	5.17
17	4.98
18	4.90
19	4.92
20	5.05
21	5.27
22	5.57
23	5.93
24	6.32
25	6.74
26	7.16
27	7.57
28	7.97
29	8.34
30	8.68
31	8.98
32	9.24
33	9.46
34	9.62
35	9.73
36	9.79
37	9.79
38	9.74
39	9.63
40	9.48
41	9.27
42	9.02
43	8.72



2.10 Curva de energía potencial para la astroide.

Como las fuerzas que se ejercen sobre la partícula son conservativas, se puede introducir el concepto de energía potencial y formular el principio de conservación de la energía mecánica total, que es una constante de movimiento. El movimiento se puede describir convencionalmente y en forma vívida mediante diagramas energéticos, a partir de los cuales se pueden observar las características generales del movimiento.

Como la función energía potencial E_p tiene solamente un mínimo en $r=R/2$, en la parte de la astroide que analizamos, escogeremos como origen de coordenadas, la posición del mínimo de la energía potencial y tomaremos este mínimo de energía como cero. Tomando esto en consideración se obtuvo la siguiente gráfica.



figura(2.13)

A partir de la figura (2.13) se puede observar que la energía potencial tiene un máximo en la superficie de la Tierra, o sea cuando $r=R$. En este punto su energía cinética es mínima e igual a cero, conforme la partícula se va adentrando en la Tierra

su energía potencial va disminuyendo hasta llegar a su valor - mínimo que se encuentra en $r=R/2$, que conforme a lo ya establecido se tomo como el origen de coordenadas. Por el hecho de — ser un mínimo, se trata de un punto de equilibrio estable, don de la partícula tendra un movimiento armónico simple alrededor de este punto, donde la fuerza tangencial es cero. En $r=R/2$ la energía cinética alcanza su máximo, como el movimiento es armó nico simple, a partir de este punto la energía cinética empie za a disminuir y la energía potencial empieza a aumentar hasta llegar otra vez a su valor máximo en $r=R$, que es el punto de-- retorno de la partícula.

2.11 La astroide como una curva tautócrona.

La curva de tiempo mínimo, para una partícula que viaja dentro de una esfera, de densidad constante y sin fricción, es la hipocicloide. Cuando hablamos de la hipocicloide estamos — tomando en consideración a toda una familia de curvas, que recibirán distintos nombres de acuerdo a los valores que tomen — el radio del círculo fijo y el radio del círculo que rueda — sin deslizarse.

Nosotros tomamos, para el análisis del problema que nos planteamos, el caso cuando el radio del círculo que se mueve — es un cuarto del radio del círculo fijo, que en este caso es — la tierra. La hipocicloide con estas características, se conoce como astroide, para su estudio nos restringimos a una cuarta parte de la curva.

La astroide aparte de ser braquistócrona es tautócrona, o sea que el tiempo para que la partícula alcance el punto más bajo, no depende de el punto desde donde se abandone a la partícula una velocidad inicial. así en la figura (2.11) dos partículas que partan al mismo tiempo de los puntos A y B alcanzando el punto C simultáneamente.

Enseguida demostraremos esta propiedad para la astroide, en la ref.(4) se demuestra en forma más general, lo cual se — muestra en la sec. 2.12.

En el punto B, que es el punto de partida, la partícula parte desde el reposo, por lo tanto solamente tendrá una energía potencial igual a:

$$E_p = \frac{1}{2} \frac{mg}{R} r_a^2 \quad (2.64)$$

En cualquier otro punto, la partícula tendrá una combinación de energía cinética y energía potencial, cuyas expresiones son:

$$E_c = \frac{1}{2} mg \frac{r^2}{R} \quad (2.65)$$

y

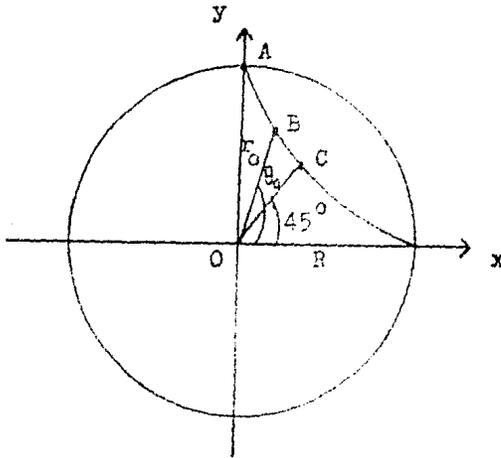
$$E_p = \frac{1}{2} mv^2 \quad (2.66)$$

Por el principio de conservación de la energía y usando las ecuaciones(2.64) - (2.66), tenemos la siguiente relación:

$$\frac{1}{2} \frac{mg}{R} r_0^2 = \frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} \frac{mg}{R} r^2$$

despejando a la velocidad, se encuentra que:

$$v = \sqrt{\frac{g}{R}} \sqrt{r_0^2 - r^2} \quad (2.67)$$



figura(2.14)

para encontrar el tiempo que tarda la partícula para ir del -- punto B al punto C, usaremos la siguiente expresión:

$$t = \int \frac{ds}{v} \quad (2.68)$$

sustituyendo (2.67) en (2.68), encontramos que:

$$t = \sqrt{\frac{R}{g}} \int \sqrt{\frac{dx^2 + dy^2}{r_0^2 - r^2}} \quad (2.69)$$

Las ecuaciones paramétricas de la astroide son:

$$x = R \cos^3 \phi \quad (2.70)$$

$$y = R \sin^3 \phi \quad (2.71)$$

al diferenciar ambas ecuaciones, encontramos las siguientes relaciones:

$$dx = -3R \cos^2 \phi \sin \phi \, d\phi \quad (2.72)$$

$$dy = 3R \sin^2 \phi \cos \phi \, d\phi \quad (2.73)$$

sustituyendo a las ecuaciones (2.70)-(2.73), en la expresión - (2.69), y después de hacer algunas simplificaciones, encontramos que:

$$t = \sqrt{\frac{3R}{g}} \int_{\phi_0}^{\pi/4} \frac{\sin 2\phi \, d\phi}{\sqrt{\cos^2 2\phi_0 - \cos^2 2\phi}} \quad (2.74)$$

La evaluación de esta integral, nos lleva al siguiente resultado:

$$t = \frac{\pi}{4} \sqrt{\frac{3R}{g}} \quad (2.75)$$

que concuerda con la expresión (2.32), cuya expresión es:

$$t = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{3R}{g}}$$

esta expresión da el tiempo que tarda la partícula para ir entre dos puntos que se encuentran sobre la superficie de la tierra, viajando dentro de ella por un túnel cuya forma es la de una astroide y cuya longitud es un cuarto de la longitud total de esta curva. Por lo tanto la mitad de este tiempo es el que necesita la partícula para llegar al punto medio de la trayectoria, o sea:

$$t = \frac{\pi}{4} \sqrt{\frac{3R}{g}}$$

que concuerda con la ecuación (2.75). Por lo tanto hemos demostrado que la astroide, siendo esta un caso particular de hipo-

cicloide, a parte de ser braquistócrona es tautócrona, pues el tiempo para llegar al punto más bajo de la curva, no depende - de donde se suelte la partícula.

495.

2.12 Campos gravitacionales cuyas braquistócronas e isócronas son curvas idénticas.

Es sabido desde el siglo XVII y ampliamente discutido en -- textos de Mecánica, Dinámica y cálculo de variaciones, que las -- braquistócronas e isócronas del campo gravitatorio de la Tierra, suponiendo que para distancias pequeñas éste es constante en mag -- nitud y dirección, son cicloides cuyas cúspides apuntan en la -- dirección opuesta a la de la gravedad.

Una partícula que se mueve entre un par de puntos dados en el tiempo más corto posible, se dice que se mueve a lo largo de una curva braquistócrona. Una isócrona es una curva donde una -- partícula oscila con una frecuencia que es independiente de la -- amplitud de oscilación.

En el artículo de Mallett, ref.(13), se establece que a lo largo de una braquistócrona dentro de una esfera de densidad --- constante el tiempo requerido para alcanzar el punto más bajo de la braquistócrona es el mismo que el tiempo requerido para empezar desde el reposo en cualquier punto intermedio de la trayec -- toria y descender al punto más bajo. Esta observación asegura -- que si la braquistócrona fuera extendida simétricamente más allá del punto más bajo, entonces una partícula restringida a moverse a lo largo de la curva ejecutaría oscilaciones isócronas alrededor del punto mínimo, fig.(2.15). En otras palabras, las braquis -- tócronas y las isócronas son curvas idénticas dentro de una esfe -- ra de densidad constante. El potencial en la esfera es proporció -- nal al cuadrado de la distancia desde el centro de la esfera a -- cualquier punto dentro de ella.

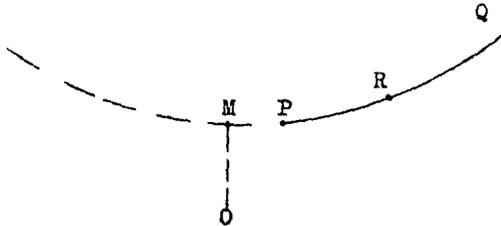
Se demostrará a continuación que de entre la infinidad de -- campos de fuerza radiales, cuyos potenciales $v(r)$ están dados -- por la ecuación:

$$v(r) = kr^n \quad (2.76)$$

donde k es una constante del campo, r la distancia desde el -- centro del campo y n es cualquier número distinto de cero, úni camente los campos correspondientes a $n=2$, tienen la propiedad de que sus isócronas y braquistócronas son curvas idénticas, - la demostración se dará en tres etapas:

- determinación de la braquistócrona entre los puntos P y Q - fig. (2.15) en un campo gravitacional radial.
- La localización de un punto M de equilibrio estable en la - curva.
- probando si oscilaciones alrededor de M a lo largo de la -- curva pueden ser isócronas.

Sea O fig.(2.15) el centro del campo gravitacional y el origen de un sistema de coordenadas polares con OM la línea -- desde la cuál la coordenada angular ϑ es medida. Sea (P, ϑ_p) , - (q, ϑ_q) y (r, ϑ) las coordenadas de P, Q y de R que es un punto- cualquiera sobre la curva braquistócrona.



figura(2.15)

Sin pérdida de generalidad supongamos que la partícula - es de masa unitaria y que empieza desde el reposo en Q, su ve- locidad en el punto R es dado por:

$$\frac{1}{2} v^2 + v(r) = \text{Const.} = v(q)$$

despejando a la velocidad, encontramos que:

$$v = \sqrt{2} (v(q) - v(r))^{1/2} \quad (2.77)$$

usando a la ecuación (2.76), la expresión para la velocidad es:

$$v = (2k)^{1/2} (q^n - r^n)^{1/2}$$

en la terminología de el cálculo de variaciones, a lo largo de la braquistócrona, el tiempo total dado por la integral:

$$t = \int \frac{ds}{v} \quad \text{es un mínimo, sustituyendo a:}$$

$$ds = (1 + r^2 \dot{\phi}^2)^{1/2} dr$$

donde

$$\dot{\phi} = d\phi/dr$$

y

$$v = (2k)^{1/2} (q^n - r^n)^{1/2}$$

tenemos que:

$$t = (2k)^{-1/2} \int_r^q (1 + r^2 \dot{\phi}^2)^{1/2} (q^n - r^n)^{-1/2} dr$$

$$t = (2k)^{-1/2} \int_r^q F(r, \dot{\phi}) dr$$

La función $F(r, \dot{\phi}) = (1 + r^2 \dot{\phi}^2)^{1/2} (q^n - r^n)^{-1/2}$, como depende solamente de r y $\dot{\phi}$, la ecuación de Euler-Lagrange:

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{\phi}} \right) - \frac{\partial F}{\partial \phi} = 0$$

se reduce a:

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{\phi}} = \sigma$$

donde σ , es una constante de integración que puede ser evaluada. Calculando la derivada parcial y reduciendo términos, se encuentra que:

$$\dot{\phi} = d\phi/dr = f(r) \tag{2.78}$$

donde:

$$f(r) = r^{-1} \sigma (q^n - r^n)^{1/2} [r^2 - 2(q^n - r^n)]^{-1/2} \tag{2.79}$$

la ecuación de la braquistócrona se encuentra integrando la ec. (2.78).

En un punto de equilibrio estable sobre una curva de restricción en un campo gravitacional radial $dr/d\phi = 0$. De la ecuación (2.78) esta condición será cumplida en el punto M sobre la

braquistócrona, si m , la distancia OM, satisface la ecuación:

$$m^2 - \sigma^2(q^n - m^n) = 0$$

ya que σ y q son conocidas, m puede ser determinada de esta -- ecuación.

A lo largo de una constricción isócrona se debe de cum-- plir que:

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = -w^2 s \quad (2.80)$$

la aceleración tangencial de la partícula a lo largo de la isócrona es dado por:

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = - \frac{dv(r)}{ds}$$

usando a la ecuación (2.76), tenemos que:

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = - knr^{n-1} \frac{dr}{ds} \quad (2.81)$$

combinando a las ecuaciones (2.80) y (2.81) encontramos que:

$$w^2 s = knr^{n-1} \frac{dr}{ds} \quad (2.82)$$

integrando esta expresión, se obtiene el siguiente resultado:

$$\frac{w^2 s^2}{2} = kr^n + C \quad (2.83)$$

donde C es la constante de integración y s es la longitud de -- arco de un punto R sobre la isócrona medida desde un punto de -- equilibrio estable sobre la curva, mientras que r es la coorde -- nada radial de el punto R , w es la frecuencia angular de osci -- lación de la partícula a lo largo de la isócrona y es constan -- te para esta isócrona.

Si la braquistócrona ya mencionada es al mismo tiempo -- isócrona, entonces debe de satisfacer a las ecs.(2.82) y (2.83) midiendo s desde M , el punto de equilibrio estable sobre la -- braquistócrona, donde $s=0$ cuando $r=m$, de manera que de la ec.

(2.83), se cumple que:

$$C = - km^n$$

por lo tanto:

$$u = (2k)^{1/2} w^{-1} (r^n - m^n)^{1/2}$$

sustituyendo s en la ec. (2.82), encontramos que:

$$w = (k/2)^{1/2} nr^{n-1} (r^n - m^n)^{-1/2} dr/ds$$

para calcular dr/ds , se usa la expresión para la longitud de arco ds y la ec. (2.78), finalmente se encuentra que:

$$w = (k/2)^{1/2} nr^{n-2} \left[r^2 - m^2 (q^n - r^n)(q^n - m^n)^{-1} \right]^{1/2} (r^n - m^n)^{-1/2}$$

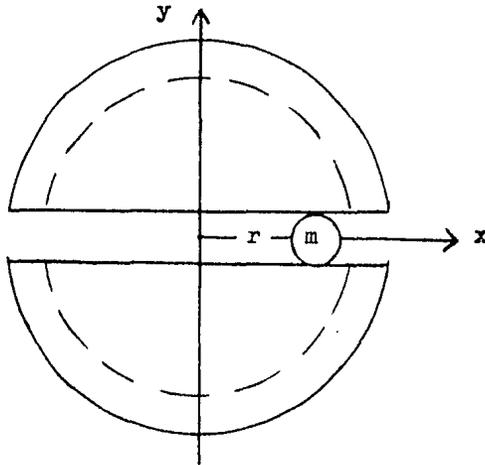
de esta expresión se puede comprobar que a menos que $n=2$, w será una función de r , contrario a la definición de isócrona. Así de la infinidad de campos gravitacionales radiales especificados por la ec. (2.76), únicamente aquellos para los cuales $n=2$, tienen la propiedad de que sus curvas braquistócronas e isócronas son curvas idénticas. Cuando $n=2$, la curva geométrica relevante es la hipocicloide.

CAPITULO TERCERO

3.1 Túnel rectilíneo que pasa por el centro de la Tierra.

Demostraremos en esta sección que la hipocicloide que conecta a dos puntos antípodas, es una línea recta que pasa por el centro de la Tierra.

Supongamos que se pudiese perforar un túnel que cruzara a la Tierra de un punto a otro a lo largo de su diámetro, como se muestra en la figura (3.1).



figura(3.1)

Para encontrar la ecuación que de la posición de la partícula, partiremos de las ecuaciones paramétricas de la hipocicloide que es la curva de tiempo mínimo. Ya hemos encontrado que estas ecuaciones son:

$$x(\vartheta) = (R - b)\cos\vartheta + b\cos\left(\frac{R - b}{b}\vartheta\right) \quad (3.1)$$

$$y(\vartheta) = (R - b)\sin\vartheta - b\sin\left(\frac{R - b}{b}\vartheta\right) \quad (3.2)$$

donde R es el radio del círculo fijo, que en este caso es la tierra y b es el radio del círculo que gira dentro del círculo

lo de radio R y genera a la hipocicloide.

En el caso especial en el que el círculo fijo tiene un radio igual a dos veces el radio del círculo que se mueve, o sea $R=2b$ la hipocicloide degenerará en una línea recta que coincide con el diámetro del círculo fijo. Usando las ecuaciones (3.1) y (3.2), encontramos el siguiente resultado:

$$x(\vartheta) = R \cos \vartheta \quad (3.3)$$

$$y(\vartheta) = 0 \quad (3.4)$$

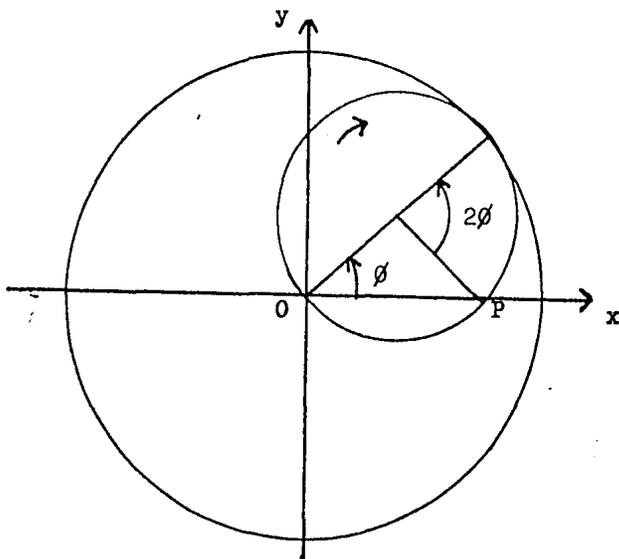


fig.(3.2), un punto P sobre la periferia de un círculo que rueda interiormente sobre una circunferencia de radio doble describe un segmento de recta.

La ecuación (3.3) se puede poner en función del tiempo, para esto analicemos un poco más el movimiento del círculo que genera a la línea recta. El círculo al girar, durante todo el tiempo del movimiento, su velocidad angular permanecera constante, por lo tanto:

$$\vartheta = \omega t \quad (3.5)$$

de donde la ecuación (3.5) toma la siguiente forma:

$$x(t) = R \cos wt \quad (3.6)$$

la expresión para w se puede encontrar de la siguiente condición inicial:

$$\ddot{x}(0) = -g \quad (3.7)$$

así la expresión para w es:

$$w = \sqrt{\frac{g}{R}}$$

y la ecuación (3.6) se transforma en:

$$x(t) = R \cos \sqrt{\frac{g}{R}} t \quad (3.8)$$

Ahora hallaremos el tiempo t que necesitaría una partícula, para viajar entre dos puntos que se encuentran sobre la superficie de la Tierra, moviéndose dentro de un túnel en línea recta, que pasa por el centro de ella. Para encontrar este tiempo usaremos la expresión (3.8), y la condición de que en el punto final del túnel $x = -R$, sustituyendo esta condición en la ecuación (3.8) se encuentra que el tiempo que necesita la partícula es:

$$t = \pi \sqrt{\frac{R}{g}} \quad (3.9)$$

al sustituir el valor del radio de la Tierra que es de 6370 km, y tomando un valor para g de 9.8 m/s^2 , el tiempo es de 42'11," como se ve este es un resultado interesante, pues tomando en cuenta el tiempo que se realiza con los actuales medios de transporte, este tiempo es excelente debido sobre todo, a que el único medio de propulsión se debe a los cambios de energía-potencial.

3.2 Análisis cinemático de la partícula que viaja por el túnel que pasa por el centro de la Tierra.

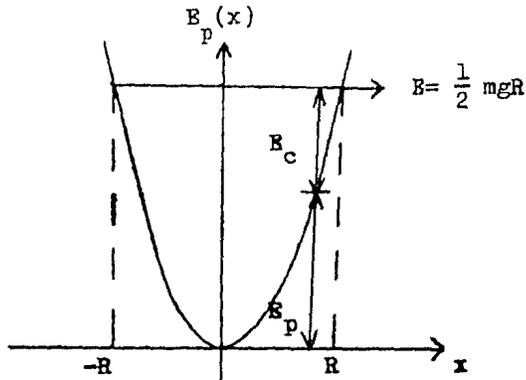
Primeramente haremos una discusión de la curva de energía-potencial. Se demostró en el capítulo II que la energía potencial a la que está sujeta una partícula que viaje por la parte interna de la superficie de la Tierra es:

$$E_p = \frac{1}{2} mg \frac{r^2}{R}$$

la energía potencial de la partícula que se mueva por el diámetro de la Tierra es:

$$E_p = \frac{1}{2} mg \frac{x^2}{R}$$

para medir esta energía potencial, montamos un sistema de referencia sobre el diámetro de la Tierra, haciendo coincidir su origen con el centro de la Tierra. De la ecuación para la energía potencial se deduce que la gráfica de E_p será una parábola de vértice en el origen, fig.(3.3).



figura(3.3)

donde $E = \frac{1}{2} mgR$, es la energía total. Como la fuerza a la que se encuentra sometida la partícula es directamente proporcional a su desplazamiento, se deduce que su movimiento será oscilatorio. De la figura (3.3) se observa que la amplitud de la oscilación-

es igual a R.

El origen es un punto de equilibrio estable, puesto que -- ahí la energía potencial es mínima; como consecuencia la fuerza sobre la partícula en este punto es igual a cero y por consi -- guiente también podemos advertir que la aceleración de la partí -- cula será nula.

Ahora analizaremos el movimiento de la partícula usando -- las ecuaciones de movimiento.

A partir de la expresión (3.8), podemos calcular la velo -- cidad y la aceleración que alcanzará la partícula en cualquier -- intervalo de tiempo; la ecuación (3.8) es:

$$x(t) = R \cos \sqrt{\frac{g}{R}} t$$

para calcular la expresión que nos de la velocidad de la partí -- cula derivaremos esta ecuación con respecto al tiempo, el resul -- tado es:

$$\dot{x}(t) = -\sqrt{gR} \sin \sqrt{\frac{g}{R}} t \quad (3.10)$$

Calculando la derivada de la ecuación (3.10) con respecto al -- tiempo, encontramos que la expresión para la aceleración es:

$$\ddot{x}(t) = -g \cos \sqrt{\frac{g}{R}} t \quad (3.11)$$

Combinando a las ecuaciones (3.8) y (3.10), encontramos que:

$$\dot{x}(t) = \sqrt{\frac{g}{R}} \sqrt{R^2 - x^2} \quad (3.12)$$

Esta ecuación indica claramente que la rapidez de la partícula -- tiene un máximo en la posición de equilibrio $x=0$, que corres -- ponde al centro de la Tierra. Alcanzandose este máximo en un -- tiempo de 21'12''. La rapidez de la partícula es igual a cero -- cuando el desplazamiento es máximo, alcanzandose este en $x = \pm R$ esto ocurre en un tiempo $t=0$, o sea en el punto de partida y en un tiempo $t=42'11''$ que corresponde al punto de llegada.

Combinando a las ecuaciones (3.8) y (3.11), encontramos --

que:

$$\ddot{x}(t) = -\frac{g}{R} x \quad (3.13)$$

de esta ecuación se deduce que cuando la partícula se encuentra sobre la superficie de la Tierra, la aceleración es igual a $-g$, la partícula se encuentra sujeta solamente a la aceleración de la gravedad, en este punto la aceleración es máxima, y es mínima cuando $x=0$, o sea en el centro de la Tierra. Por lo tanto de las ecuaciones (3.12) y (3.13), encontramos que cuando la velocidad de la partícula es mínima la aceleración es máxima y viceversa, cuando la aceleración es mínima la velocidad es máxima.

Como el movimiento de la partícula, es armónico simple de amplitud R , la distancia total que recorrerá la partícula es $2R$ y el tiempo que necesitará será de $42'11''$. Los datos aportados por las ecuaciones (3.8), (3.10) y (3.11), se encuentran en las tablas 5,6 y 7 y su representación gráfica, en las gráficas 6,7 y 8.

TABLA 5

tiempo (minutos)	distancia recorrida (Kilómetros)
0	0
1	17.63
2	70.42
3	158.10
4	280.16
5	435.93
6	624.55
7	844.98
8	1096.00
9	1376.21
10	1684.07
11	2017.87
12	2375.76
13	2755.76
14	3155.77
15	3573.57
16	4006.86
17	4453.23
18	4910.21
19	5375.26
20	5845.83
21	6319.30
22	6793.05
23	7264.45
24	7730.91
25	8189.83
26	8638.68
27	9074.96
28	9496.28
29	9900.28
30	10284.75
31	10647.54
32	10986.65
33	11300.20
34	11586.46
35	11843.85
36	12070.93
37	12266.45
38	12429.32
39	12558.66

tiempo (minutos)	distancia recorrida (kilómetros)
40	12653.73
41	12714.02
42	12739.19
43	12729.10
44	12683.80
45	12603.56

GRAFICA 6

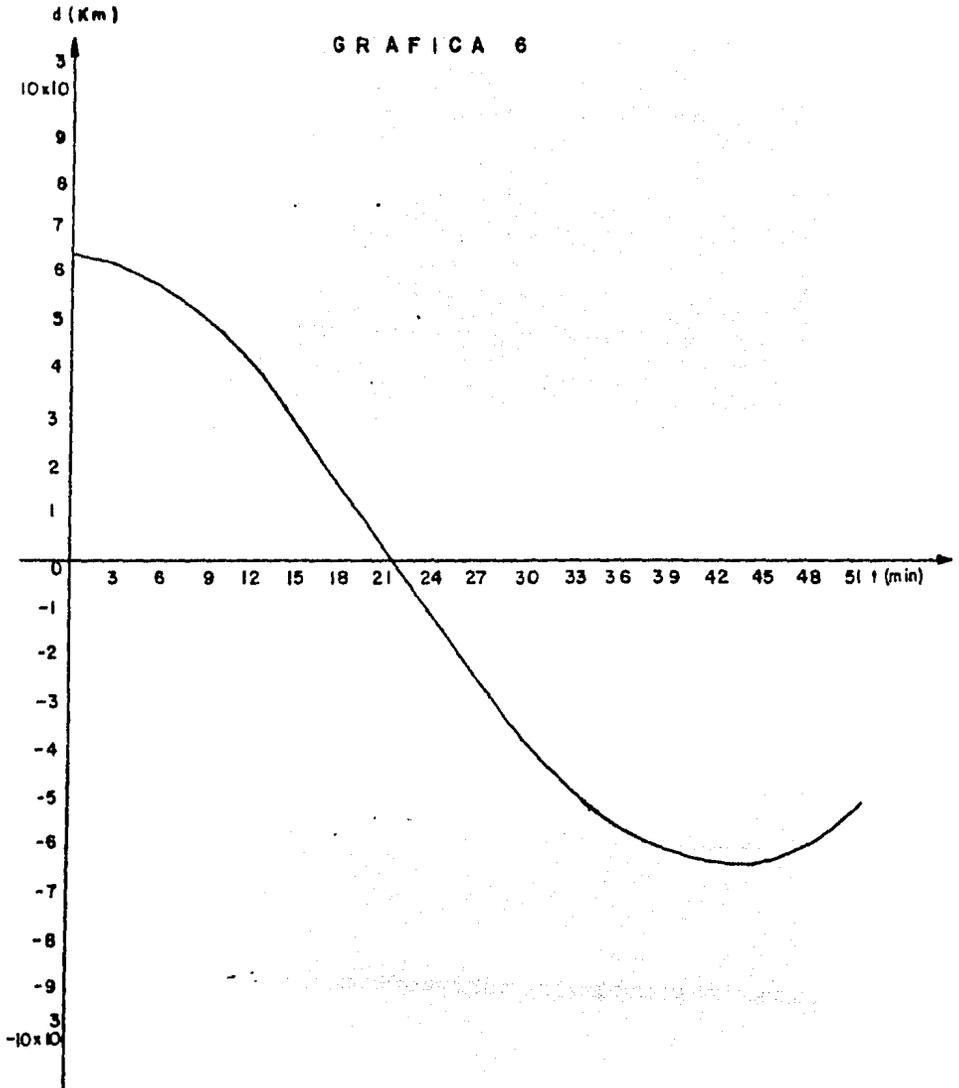


TABLA 6

tiempo (minutos)	Velocidad (Km/hr)
0	0
1	2114.84
2	4217.98
3	6297.77
4	8342.69
5	10341.44
6	12282.93
7	14156.42
8	15951.55
9	17658.36
10	19267.43
11	20769.83
12	22157.25
13	23421.99
14	24557.09
15	25556.24
16	26413.92
17	27125.37
18	27686.66
19	28094.68
20	28347.16
21	28442.72
22	28380.83
23	28161.82
24	27786.91
25	27258.18
26	26578.54
27	25751.78
28	24782.45
29	23675.93
30	22438.34
31	21076.53
32	19598.04
33	18011.07
34	16324.39
35	14547.33
36	12689.75
37	10761.90
38	8774.49
39	6738.50

tiempo (minutos)	Velocidad (Km/hr)
40	4665.21
41	2566.09
42	452.77
43	1663.10
44	3769.72
45	5855.48

77

GRAFICA 7

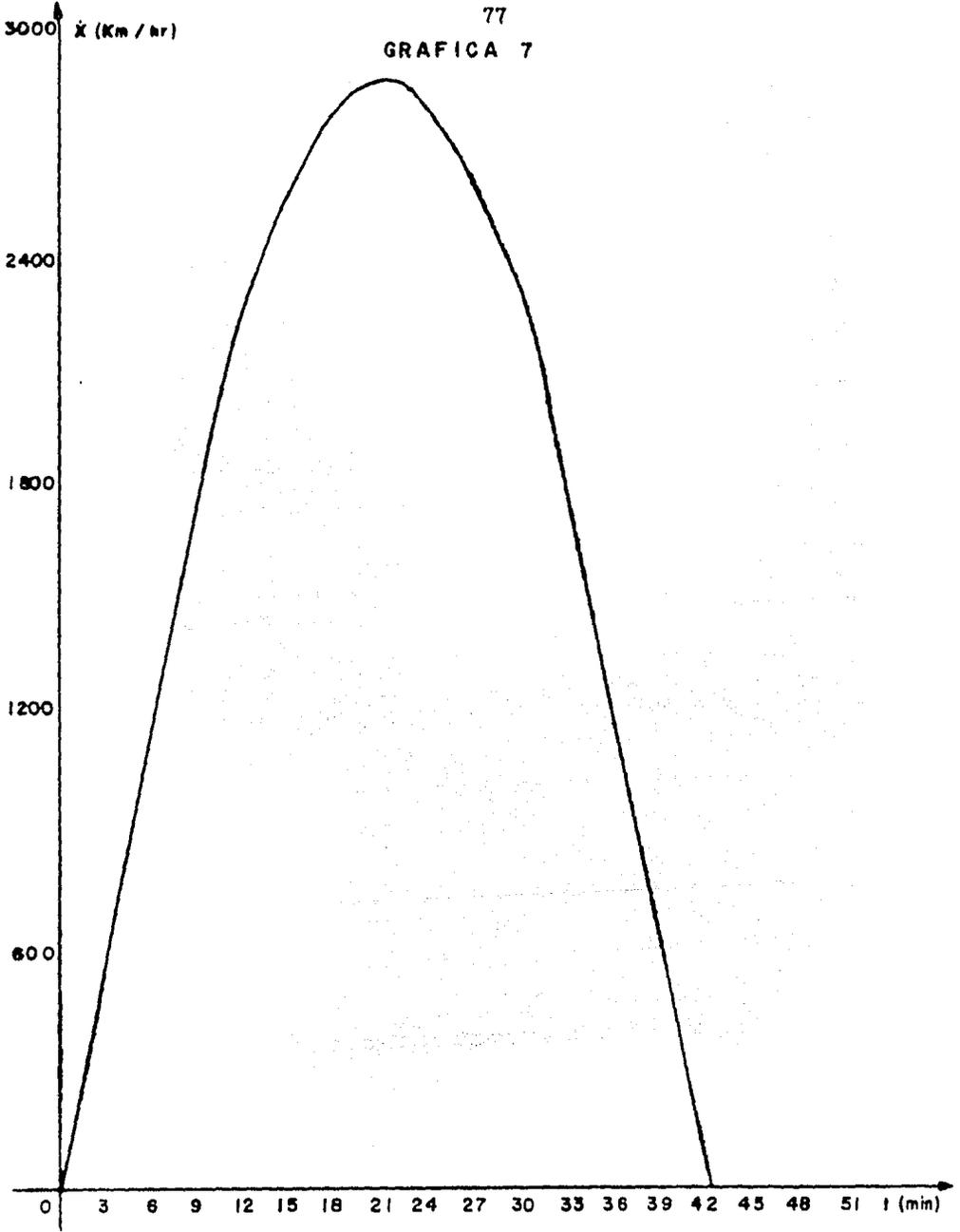
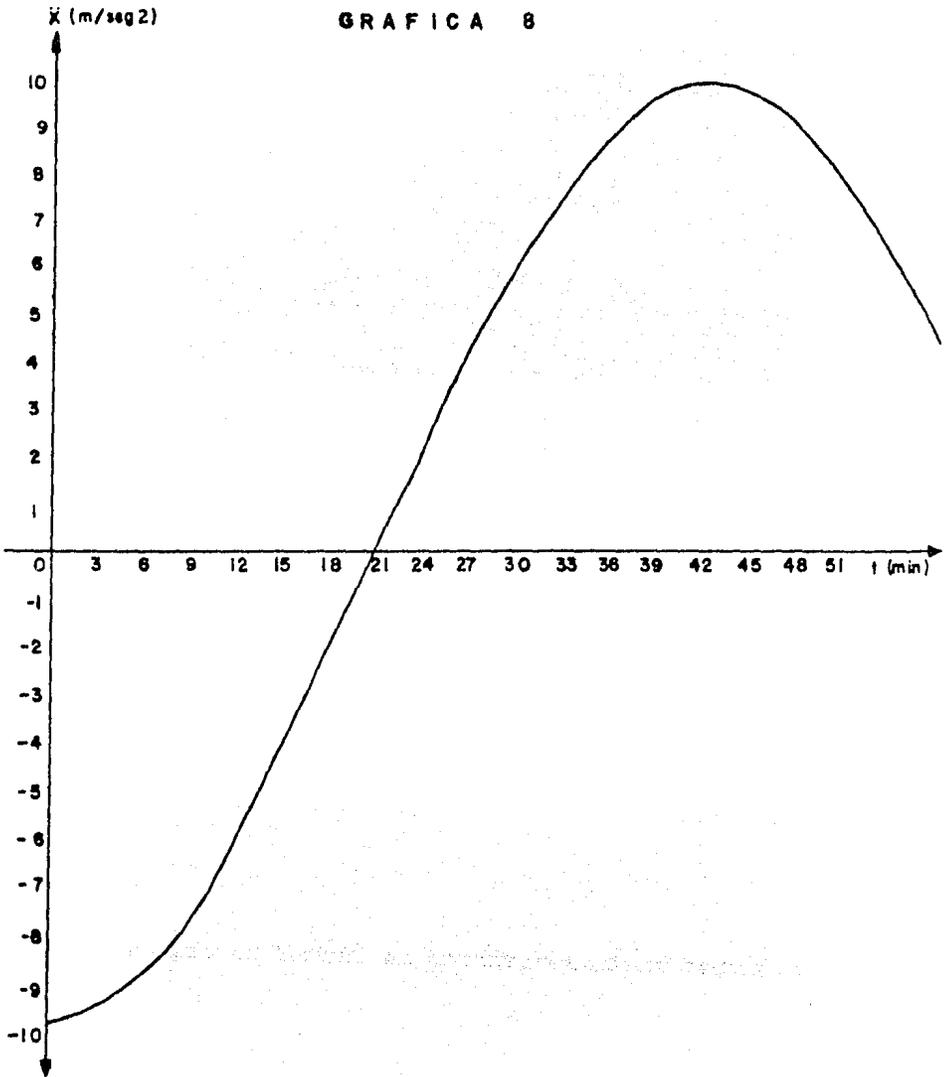


TABLA 7

Tiempo (minutos)	Aceleración (m/seg ²)
0	-9.8
1	-9.77
2	-9.69
3	-9.55
4	-9.36
5	-9.13
6	-8.84
7	-8.50
8	-8.11
9	-7.68
10	-7.20
11	-6.69
12	-6.14
13	-5.56
14	-4.95
15	-4.30
16	-3.63
17	-2.94
18	-2.24
19	-1.53
20	-0.80
21	-0.07
22	0.65
23	1.37
24	2.09
25	2.80
26	3.50
27	4.16
28	4.80
29	5.43
30	6.02
31	6.58
32	7.10
33	7.58
34	8.02
35	8.42
36	8.77
37	9.07
38	9.32
39	9.52
40	9.66

Tiempo (minutos)	Aceleración (m/seg ²)
41	9.76
42	9.79
43	9.78
44	9.71
45	9.6

GRAFICA 8



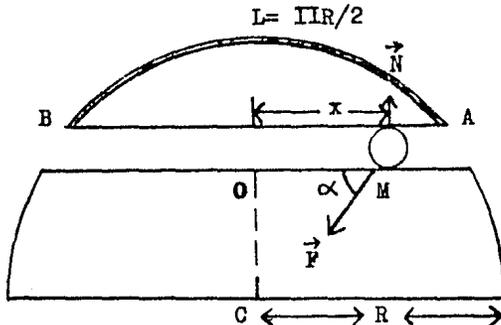
3.3 Trayectoria rectilínea que coincide con una cuerda.

En la sección(3.2) se analizarón las propiedades cinemáticas de la trayectoria rectilínea para el caso en que esta coincidía con el diámetro de la Tierra. Ahora tomaremos una línea recta que abarque un arco de la Tierra de 10005.973km, que además es el arco que abarcan dos cúspides consecutivas de la astroide, se toma este caso para posteriormente hacer una comparación entre ambas trayectorias.

En el capítulo II se analizarón las propiedades de la astroide, en esta sección se analizarán las propiedades cinemáticas de la línea recta cuyas características ya se enunciarón anteriormente. Primeramente deduciremos la ecuación de movimiento para una partícula que viaje a través de esta trayectoria, en el capítulo II se demostró que todo cuerpo situado en el interior de la Tierra es atraído hacia su centro por una fuerza F que es directamente proporcional a la distancia r que lo separa de este centro, teniendo en cuenta que cuando $r=R$, la fuerza es igual al peso del cuerpo, por lo tanto para el interior de la Tierra:

$$F = \frac{mg}{R} r$$

donde $r = \overline{MC}$, es la distancia entre el punto M y el centro de la Tierra fig.(3.4).



figura(3.4)

Para encontrar la ecuación de movimiento de la partícula de masa m , coloquemos el origen O en la parte media de la cuerda \overline{AB} y orientemos el eje Ox a lo largo de la línea \overline{OA} , -- la longitud del túnel para que abarque un arco de la Tierra de 10005.973 km, es de $R\sqrt{2}$ fig.(3.4) y las condiciones iniciales serán; para $t=0$, $X = R/\sqrt{2}$, $V_x=0$. En una posición arbitraria, -- la partícula está sometida a la acción de las fuerzas \vec{F} y \vec{N} , -- por consiguiente:

$$\begin{aligned}\sum F_{kx} &= -F \cos \alpha \\ &= -\frac{mgr \cos \alpha}{R}\end{aligned}\quad (3.14)$$

de la figura (17) se ve que:

$$\begin{aligned}r \cos \alpha &= \overline{MC} \cos \alpha \\ &= X\end{aligned}$$

sustituyendo este resultado en la ecuación (3.14) tenemos:

$$F_{kx} = -\frac{mg}{R} X \quad (3.15)$$

la ecuación de movimiento de la partícula la podemos encontrar usando la ecuación (3.15) y la segunda ley de Newton; esta es:

$$\frac{d^2 X}{dt^2} + \frac{mg}{R} X = 0 \quad (3.16)$$

la solución general de esta ecuación diferencial es:

$$X(t) = C_1 \cos \sqrt{\frac{g}{R}} t + C_2 \operatorname{Sen} \sqrt{\frac{g}{R}} t \quad (3.17)$$

haciendo uso de las condiciones iniciales ya dadas anteriormente, encontramos que la ecuación que determina la posición de la partícula en cualquier tiempo es:

$$X(t) = \frac{R}{\sqrt{2}} \cos \sqrt{\frac{g}{R}} t \quad (3.18)$$

Por lo tanto, la partícula efectuará en el canal \overline{AB} oscilaciones armónicas de amplitud $R/\sqrt{2}$.

Ahora hallaremos el tiempo t del movimiento de la partícula hasta el final B del canal. En el punto B, la coordenada es $X = -R/\sqrt{2}$; poniendo este valor en la ecuación (3.18), encontramos que:

$$t = \pi \sqrt{\frac{R}{g}}$$

De esta expresión hallamos que el tiempo efectuado por la partícula al moverse por el canal \overline{AB} no depende de su longitud y siempre es igual a:

$$t = 42 \text{ min } 11 \text{ seg.}$$

resultado que ya habíamos demostrado, pues la trayectoria rectilínea posee la propiedad de isocronía.

La velocidad y la aceleración que lleva la partícula en cualquier tiempo, se puede encontrar fácilmente a partir de la ecuación (3.18), sus expresiones son:

$$\dot{X}(t) = -\sqrt{\frac{Rg}{2}} \text{ Sen } \sqrt{\frac{g}{R}} t \quad (3.19)$$

$$\ddot{X}(t) = -\frac{g}{2} \text{ Cos } \sqrt{\frac{g}{R}} t \quad (3.20)$$

los datos aportados por las ecuaciones (3.18) - (3.20), se encuentran tabulados en las tablas 8-10, y sus correspondientes gráficas están numeradas del 9-11.

TABLA 8

tiempo (minutos)	distancia recorrida (Kilómetros)
0	0
1	12.4
2	49.8
3	111.7
4	198.1
5	308.2
6	441.6
7	597.4
8	774.8
9	973.0
10	1190.8
11	1426.8
12	1679.8
13	1948.6
14	2231.4
15	2526.8
16	2833.2
17	3148.8
18	3472.0
19	3800.8
20	4133.6
21	4468.4
22	4803.4
23	5136.6
24	5466.4
25	5791.0
26	6108.4
27	6416.8
28	6714.8
29	7000.4
30	7272.4
31	7528.8
32	7768.6
33	7990.4
34	8192.8
35	8374.8
36	8535.4
37	8673.6
38	8788.8
39	8880.2
40	8947.5
41	8990.1
42	9007.9
43	9000.8

85

GRAFICA 9

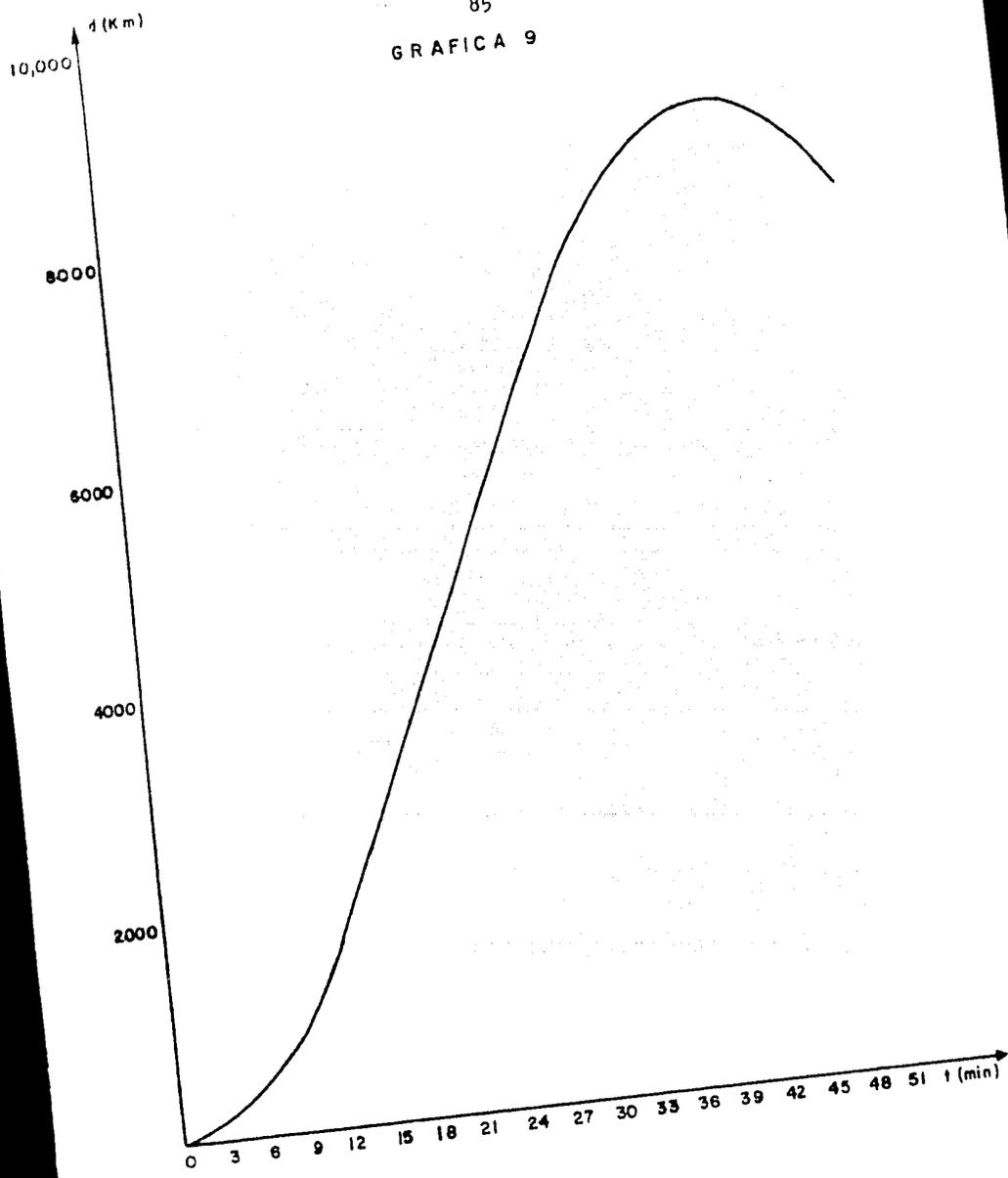


TABLA 9

tiempo (minutos)	rapidez (km/hr)
0	0
1	1495.4
2	2982.5
3	4453.1
4	5899.1
5	7312.5
6	8685.3
7	10010.1
8	11279.4
9	12486.3
10	13624.1
11	14686.4
12	15667.5
13	16561.8
14	17364.5
15	18071.0
16	18677.4
17	19180.5
18	19577.4
19	19865.9
20	20044.4
21	20112.0
22	20068.2
23	19913.4
24	19648.3
25	19274.4
26	18793.8
27	18209.2
28	17523.8
29	16741.4
30	15866.2
31	14903.3
32	13857.8
33	12735.7
34	11543.0
35	10286.4
36	8972.9
37	7609.7
38	6204.4
39	4764.8
40	3298.7
41	1814.4
42	320.1
43	-1175.9

GRAFICA 10

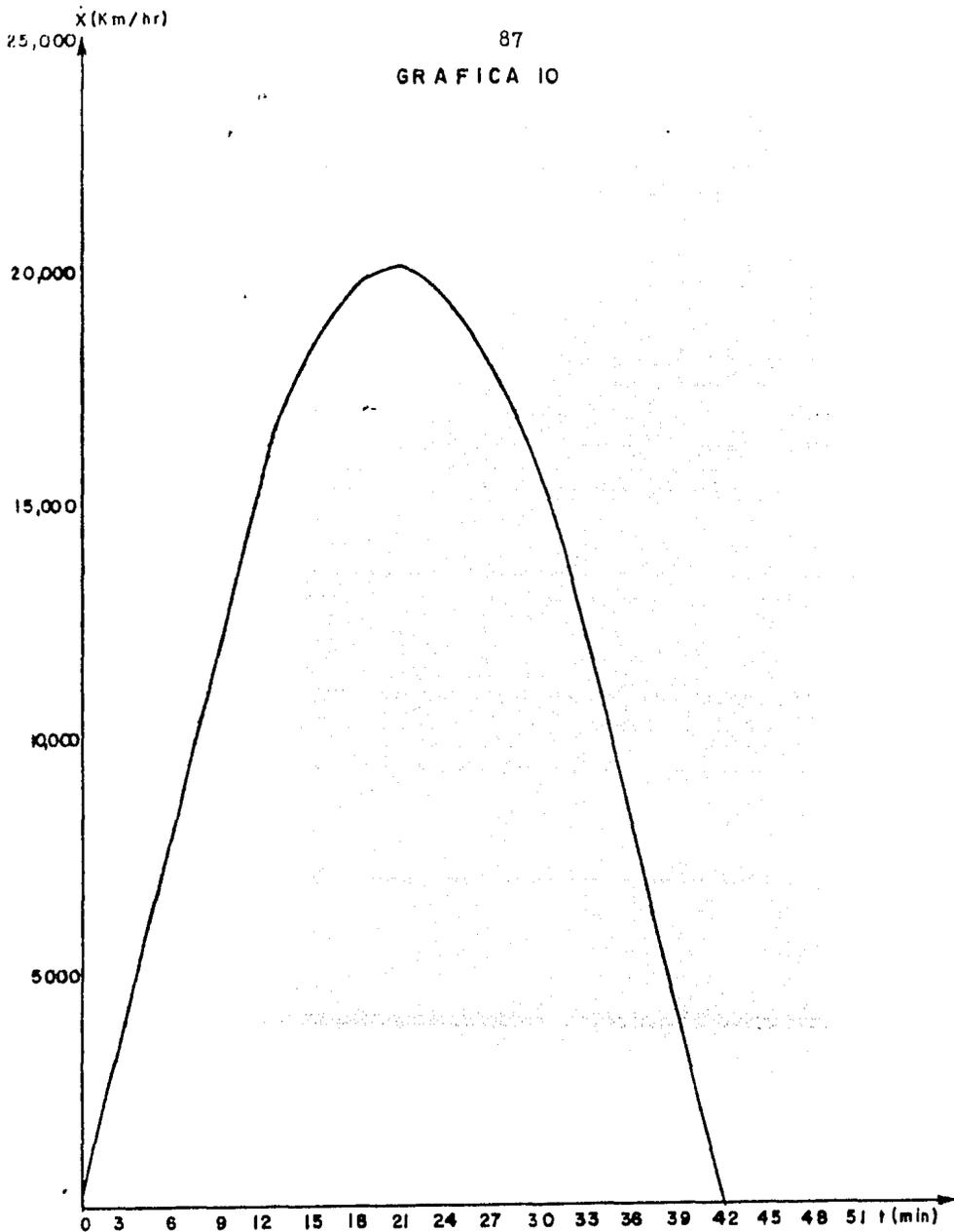
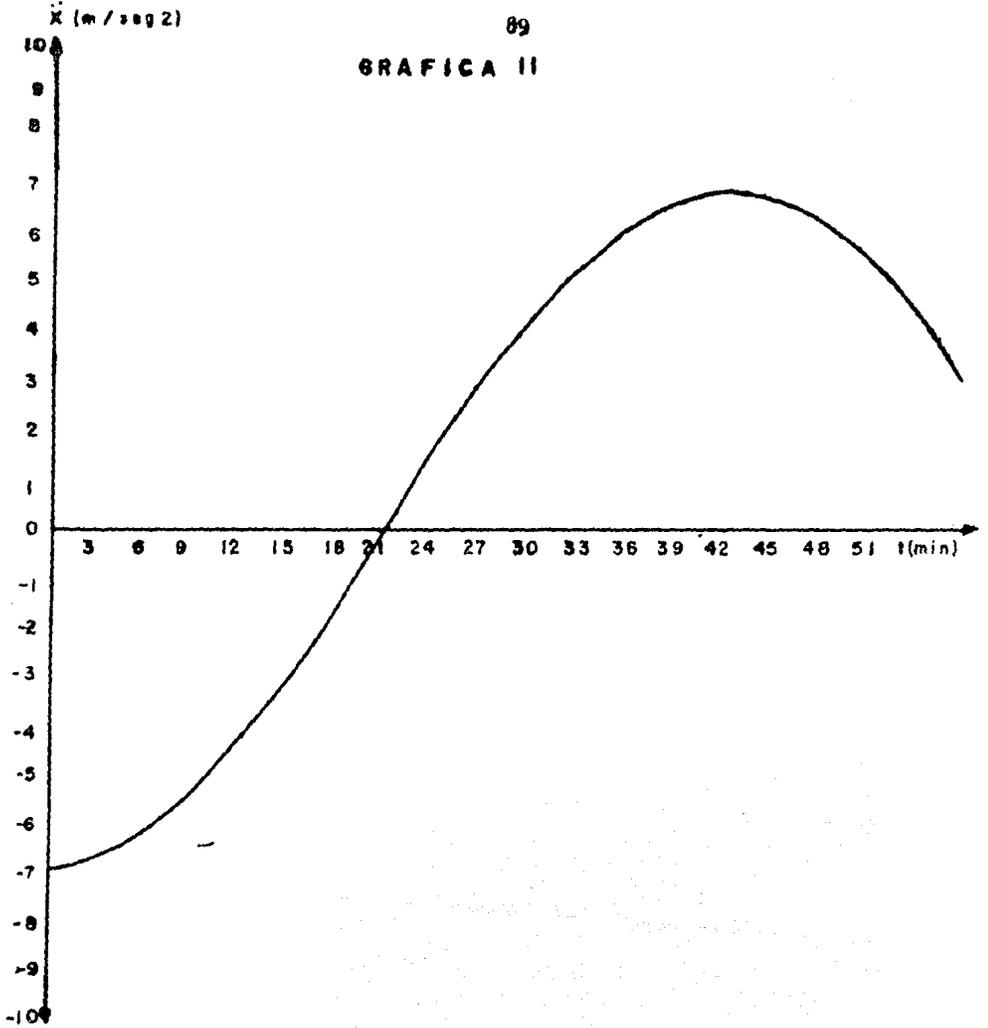


TABLA 10

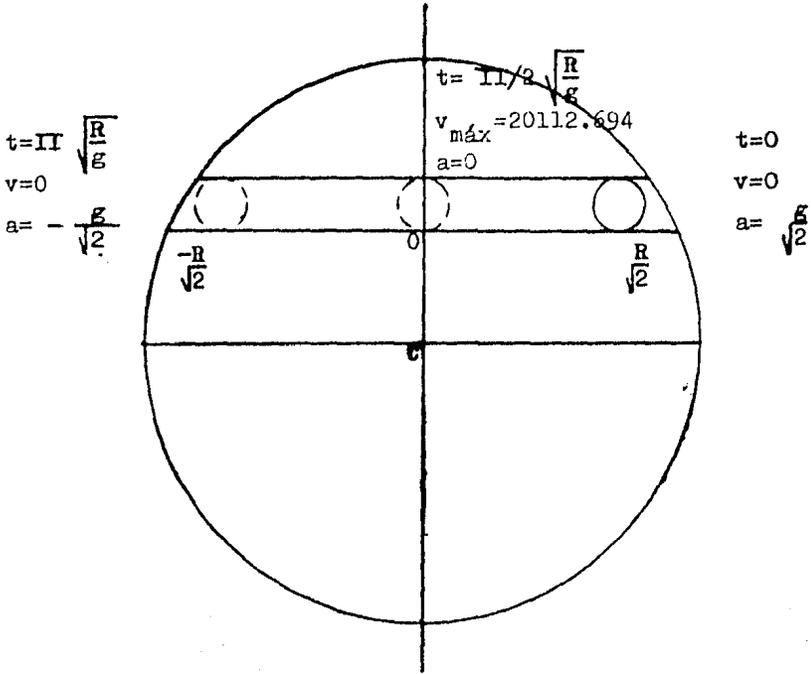
tiempo (minutos)	aceleración alcanzada (m/seg ²)
0	-6.92
1	-6.91
2	-6.85
3	-6.75
4	-6.62
5	-6.45
6	-6.25
7	-6.01
8	-5.73
9	-5.43
10	-5.09
11	-4.73
12	-4.34
13	-3.93
14	-3.49
15	-3.04
16	-2.57
17	-2.08
18	-1.59
19	-1.08
20	-0.57
21	-0.05
22	0.46
23	0.97
24	1.48
25	1.97
26	2.46
27	2.94
28	3.40
29	3.84
30	4.25
31	4.65
32	5.02
33	5.36
34	5.67
35	5.95
36	6.20
37	6.41
38	6.59
39	6.73
40	6.83
41	6.90
42	6.92
43	6.91

GRAFICA II



3.4 Análisis del movimiento.

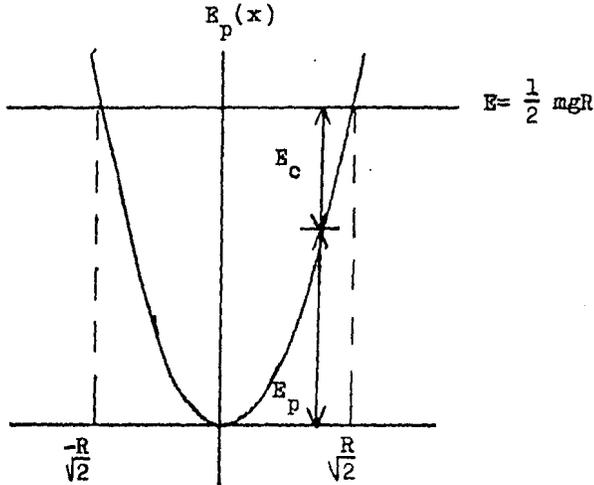
Este caso de trayectoria rectilínea, es muy semejante al de la trayectoria en línea recta que coincidía con el diámetro de la Tierra, por ejemplo el tiempo total del recorrido en --- ambos casos es de 42min.11seg., aunque la longitud en este caso es de 9008.5404km, pues buscamos que abarcara un arco de la --- Tierra de 10005.973km y en el otro caso la longitud de la tra-- yectoria era de 12740km, y abarcaba un arco de la Tierra de --- 20011.945km, este valor para el tiempo de recorrido esta de --- acuerdo con la demostración que hicimos, en el sentido de que - la línea recta posee la propiedad de isócronia. En este caso de trayectoria rectilínea, la componente de la aceleración de la - gravedad, a lo largo del eje x es $g\sqrt{2}$, la componente en y se anula con la normal. La distancia total que recorre la partí- cula es de 9008.5404km, recorriéndola en un tiempo de 42min.11s, a partir de las ecuaciones (3.19) y (3.20) se observa que en el punto de partida la velocidad es cero y la componente de la --- aceleración a lo largo del eje x es $-g\sqrt{2}$, cuando a transcu -- rrido un tiempo de 21min.6.5s., la partícula a alcanzado el pun- to medio de la trayectoria, donde adquiere su velocidad máxima- de 20112.694km/h y la aceleración es mínima con un valor igual- a 0, a partir de este punto medio la velocidad de la partícula- empieza a decrecer y su aceleración a aumentar, alcanzando un - valor de $g\sqrt{2}$, en la superficie y un valor igual a 0 para su - velocidad, como el movimiento es armónico simple, se vuelven a repetir todos los valores anteriores, de la velocidad y la ace- leración ver fig.(3.5).



figura(3.5)

3.5 Curva de energía potencial para la trayectoria rectilínea que coincide con una cuerda.

La gráfica de energía potencial para este caso de trayectoria rectilínea es la siguiente.



donde:

figura(3.6)

$$E_p = \frac{1}{2} mg \frac{x^2}{R}$$

El punto de equilibrio estable se encuentra en $x=0$, pues aquí la energía potencial es mínima. De la fig.(3.6) se deduce que la amplitud del movimiento es igual a $R/\sqrt{2}$, siendo este movimiento armónico simple, pues la fuerza a la que esta sujeta la partícula es:

$$F = \frac{mg}{R} r$$

Los puntos de retorno se encuentran en los puntos $-R/\sqrt{2}$, y en $R/\sqrt{2}$. En estos puntos la energía potencial es máxima y la energía cinética mínima, en el punto de equilibrio estable es máxima la energía cinética y mínima la energía potencial. El periodo del movimiento es igual a:

$$P = 2\pi \sqrt{\frac{R}{g}}$$

3.6 Esfera rodando por una trayectoria rectilínea.

Se dice que un cuerpo rueda sobre una superficie S si sus puntos de contacto con la superficie tienen una velocidad igual a cero con respecto a la superficie en que dicho cuerpo rueda.

La restricción de rodamiento no es, generalmente, integrable; es una restricción no holonómica. Sin embargo, en el movimiento plano de un cuerpo rígido, como es nuestro caso, la ecuación que expresa la condición de rodamiento, puede integrarse y la restricción es holonómica. Una restricción implica necesariamente, la existencia de fuerzas restrictivas. Estas, que son necesarias para mantener al cuerpo rodando sobre la superficie actúan tangencialmente a ésta como una superficie uniforme y sólo puede ejercer fuerzas en dirección normal a ella, el rodamiento no será posible generalmente sobre una superficie uniforme sin rozamiento. Las fuerzas restrictivas son complicadas, sin embargo, para que haya rodamiento sólo será necesario que la fuerza restrictiva, requerida para mantener el cuerpo rodando, no exceda de la máxima fuerza de rozamiento que la superficie pueda ejercer sobre el cuerpo. Esta máxima fuerza de rozamiento se halla empíricamente que es proporcional a la fuerza normal, N , entre la superficie y el cuerpo:

$$f_{\text{máx}} = \mu_s F_n = \mu_s N$$

donde μ_s se conoce como coeficiente de rozamiento estático. En la rodadura, la fuerza restrictiva de rozamiento f , necesaria para mantener al cuerpo rodando, deberá ser menor que esta máxima fuerza de rozamiento que la superficie puede aplicar,

$$f \leq \mu_s N$$

si no se satisface esta condición el cuerpo no rodará, sino --

que efectuará un movimiento de rodadura y deslizamiento.

Las fuerzas de rozamiento que actúan en un cuerpo, están siempre dirigidas en sentido contrario al de la velocidad relativa del punto de contacto del cuerpo con respecto a la superficie en que se mueve.

Notemos que las fuerzas de rozamiento que aparecen en problemas de cuerpos rodantes no disipan energía. Esto se ve fácilmente considerando el movimiento del cuerpo rodante con respecto a su eje instantáneo de rotación. En los cuerpos que ruedan sobre superficies en reposo, el eje instantáneo pasa por el punto o los puntos de contacto entre el cuerpo que rueda y dicha superficie. Verificándose el contacto entre la superficie y el cuerpo a lo largo del eje instantáneo, las fuerzas de rozamiento que actúan en esos puntos no contribuyen al momento rotacional con respecto al eje instantáneo; por lo tanto, no contribuyen al cambio o variación de la energía cinética de rotación alrededor del eje instantáneo. Puesto que esta energía representa la cinética total del cuerpo, se concluye que la fuerza de rozamiento en la rodadura no hace ningún trabajo neto sobre el cuerpo.

Enseguida analizaremos el movimiento de una esfera, que rueda a través de un túnel rectilíneo, en donde la superficie es uniforme y con rozamiento y atraviesa a la tierra de un punto a otro. ver fig.(3.7)

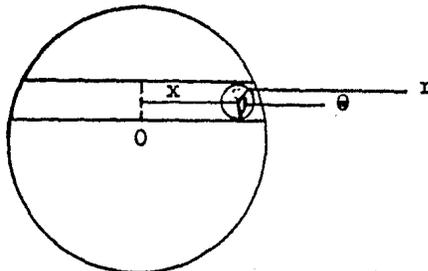


figura (3.7)

la condición de rodamiento esta expresada por la siguiente ecuación

$$\dot{x} = r\dot{\theta} \quad (3.21)$$

que es una restricción holonómica; es facilmente integrable dando por resultado:

$$x = r\theta \quad (3.22)$$

la fuerza a la que esta sujeta la esfera es:

$$F = - \frac{mg}{2R} x^2$$

Integrando esta ecuación obtenemos la energía potencial, que — esta medida con respecto al centro de la trayectoria, el resultado de la integración es:

$$E_p = \frac{mg}{2R} x^2$$

Con esta información podemos construir el siguiente lagrangiano:

$$L = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 + \frac{1}{2} I_c \dot{\theta}^2 - \frac{mg}{2R} x^2 \quad (3.23)$$

las ecuaciones de Lagrange modificadas, con la introducción de restricciones no holonómicas, se expresan en la siguiente ecuación:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \sum_k \lambda^{(k)} \frac{\partial \Phi^{(k)}}{\partial q_i} \quad (3.24)$$

donde $\Phi^{(k)}$ son las ecuaciones de restricción, usando la ecuación — (3.22), encontramos que:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = \lambda \quad (3.25)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = -r\lambda \quad (3.26)$$

donde:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \qquad \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = I_c$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -\frac{mg}{R} x \qquad \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$

sustituyendo estas ecuaciones en (3.25) y (3.26), encontramos los siguientes resultados:

$$m\ddot{x} + \frac{mg}{R} x = \lambda \qquad (3.27)$$

$$I_c \ddot{\theta} = -r\lambda \qquad (3.28)$$

derivando a la ecuación (3.21) con respecto al tiempo, se encuentra que:

$$\dot{x} = r\dot{\theta}$$

sustituyendo este resultado en la ecuación (3.28) esta se transforma en:

$$\lambda = -\frac{I_c \ddot{x}}{r^2} \qquad (3.29)$$

el momento de inercia para una esfera de radio r es $I_c = \frac{2}{5} mr^2$, usando este resultado para eliminar a λ en la ecuación (3.27) llegamos a la siguiente ecuación diferencial lineal y de segundo grado, que es la ecuación de movimiento para la esfera:

$$\ddot{x} + \frac{5g}{7R} x = 0 \qquad (3.30)$$

y la fuerza de restricción nos la da la siguiente ecuación:

$$\lambda = -\frac{2}{5} m\ddot{x} \qquad (3.31)$$

La ecuación (3.30) es semejante a la de un oscilador armónico; con una frecuencia angular w igual a:

$$w = \sqrt{\frac{5g}{7R}} \qquad (3.32)$$

por lo tanto podemos deducir que la esfera se moverá con un movimiento armónico simple, cuya amplitud estará dada según el túnel rectilíneo que tomemos. El tiempo que tardará para ir de un punto a otro será igual a la mitad de un período, o sea:

$$t = \pi \sqrt{\frac{7R}{5g}} \quad (3.33)$$

Sustituyendo los valores de R que es el radio de la Tierra y de g, que es la aceleración de la gravedad, encontramos que el tiempo que efectuará la esfera para ir de un punto a otro de la Tierra es:

$$t = 49.95 \text{ minutos}$$

comparando este tiempo con el que se obtuvo, cuando la partícula se deslizaba de un punto a otro de la Tierra, por túneles rectilíneos, suponiendo que no había fricción, la diferencia entre los dos tiempos es de:

$$t = 7.73 \text{ minutos}$$

3.7 Isócronia de la trayectoria rectilínea.

En la sección (2.13), se mostró usando la referencia (4), que las curvas braquistócronas, cuando el potencial varía con el cuadrado de la distancia son curvas idénticas con las isócronas. En esta sección demostraremos que las trayectorias rectilíneas, dentro de una esfera de densidad constante son isócronas, pero no son braquistócronas pues ya hemos encontrado la trayectoria de tiempo mínimo, ésta es la hipocicloide. La isócronia de las trayectorias rectilíneas podemos demostrarla a través de la siguiente expresión.

$$t = \sqrt{\frac{R}{g}} \int \sqrt{\frac{1 + (dy/dx)^2}{R^2 - (x^2 + y^2)}} dx \quad (3.34)$$

haciendo $y=c$, donde c es cualquier constante, tendremos a toda una familia de líneas rectas, así la ecuación (3.34) se transforma en:

$$t = \sqrt{\frac{R}{g}} \int \frac{dx}{\sqrt{R^2 - c^2 - x^2}} \quad (3.35)$$

los límites de integración son desde $-\sqrt{R^2 - c^2}$ hasta $\sqrt{R^2 - c^2}$

o sea: $\sqrt{R^2 - c^2}$

$$t = \sqrt{\frac{R}{g}} \int_{-\sqrt{R^2 - c^2}}^{\sqrt{R^2 - c^2}} \frac{dx}{\sqrt{R^2 - c^2 - x^2}} \quad (3.36)$$

para evaluar a la integral (3.36) se hace un cambio de variable y se usa el hecho de que el integrando es una función par, el resultado final es:

$$t = \pi \sqrt{\frac{R}{g}} \quad (3.37)$$

la ecuación anterior no depende de la recta que se tome o sea que, el tiempo para ir entre dos puntos que se encuentran sobre la superficie de la Tierra es el mismo si uno se va por una trayectoria rectilínea que coincida con el diámetro o con una cuerda.

Por lo tanto se ha demostrado que la trayectoria rectilínea, es una trayectoria isócrona, pues el período de oscilación de la partícula, es independiente de la amplitud de la trayectoria.

Este resultado es interesante, pues con el se demuestra que la isocronía de una curva, aunque el potencial varíe con el cuadrado de la distancia, no implica que sea braquistócrona, en cambio si una curva es braquistócrona si implica que sea isócrona. ref.(4)

3.8 Trayectorias Cónicas

En el capítulo segundo y en la sección 3.3, se analizó el movimiento de una partícula que viajaba por dentro de la Tierra para ir de un punto a otro de su superficie. Se analizaron dos trayectorias diferentes, una fue un caso particular de la trayectoria braquistócrona, conocida como astroide, la otra fue una trayectoria rectilínea. En ambos casos, el análisis que se hizo fue para dos puntos que se encontraban sobre la superficie de la Tierra, separados por una distancia de 10005.973km. En esta sección uniremos los mismos puntos sobre la superficie de la Tierra por medio de trayectorias cónicas, como son: la parábola e hipérbola y también por medio de trayectorias circulares exceptuando a la elipse, debido a que el ajuste de la distancia focal para que la cónica abarque un arco de la Tierra de 100005.973km, no está definido para excentricidades cuyos valores sean menores que uno. El caso de la trayectoria circular, se planteó en forma independiente, el cual se mostrará mas adelante.

3.9 Definición general de Cónica.

Veamos ahora una definición geométrica de cónica que incluye a la parábola, la elipse y la hipérbola.

Dada una recta fija L y un punto fijo F no contenido en esa recta, se llama cónica al lugar geométrico de un punto P que se mueve en el plano de L y F de tal manera que la razón de su distancia de F a su distancia de L es siempre igual a una constante positiva.

La recta fija L se llama directriz, el punto fijo F , foco, y la constante positiva, a la que designaremos por " e ", excentricidad de la cónica.

Sin ninguna pérdida de generalidad, podemos tomar el eje-Y como directriz del punto $F(p,0)$, $p \neq 0$, como foco, fig.(3.8).- Sea $P(x,y)$ un punto cualquiera del lugar geométrico. Desde P - tracemos el segmento \overline{PA} perpendicular al eje Y. Entonces, por la definición anterior, el punto P debe satisfacer la condición geométrica:

$$\frac{|\overline{PF}|}{|\overline{PA}|} = e \quad (3.38)$$

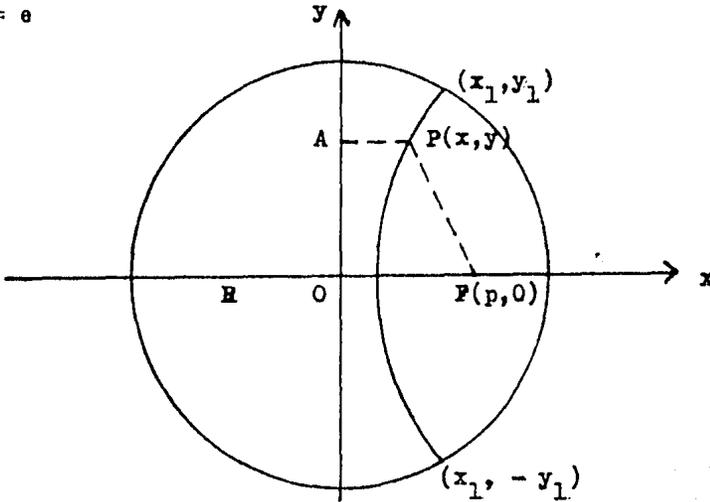


figura (3.8)

de la figura se obtiene que:

$$|\overline{PF}| = \sqrt{(x - p)^2 + y^2}$$

$$|\overline{PA}| = x$$

por lo tanto:

$$\frac{\sqrt{(x - p)^2 + y^2}}{|x|} = e$$

elevando al cuadrado ambos miembros de esta ecuación, quitando denominadores y transponiendo términos, resulta que:

$$y^2 = (e^2 - 1)x^2 + 2px - p^2 \quad (3.39)$$

Podemos demostrar, recíprocamente, que cualquier punto cu yas coordenadas satisfacen a la ec. (3.39) es un punto que sa- tisface a la condición geométrica (3.38) y, por lo tanto, está sobre el lugar geométrico. De acuerdo con esto, la ecuación — (3.39) es la condición buscada.

La naturaleza de la ec.(3.39) depende, evidentemente, del valor de la excentricidad e . Hay entonces dos casos generales— por considerar:

I. $e=1$

y

II. $e \neq 1$

I. $e=1$. En este caso, la ecuación (3.39) toma la forma:

$$-2px + y^2 + p^2 = 0$$

esta ecuación se puede escribir como:

$$y^2 = 2p(x - p/2)$$

que representa una parábola cuyo vértice es el punto $(p/2, 0)$ y cuyo eje coincide con el eje X.

II. $e \neq 1$. En este caso $1 - e^2 \neq 0$. Dividiendo la ecuación (3.39) por $1 - e^2$, y completando cuadrados en x , se encuentra que:

$$\frac{(x - p/1-e^2)^2}{p^2 e^2 / (1-e^2)^2} + \frac{y^2}{p^2 e^2 / 1 - e^2} = 1 \quad (3.40)$$

El que la ecuación (3.40) represente una elipse o una hi- pérbola depende del valor de e . Tenemos dos subcasos:

a) $e < 1$

y

b) $e > 1$

a) $e < 1$. En este caso, $1 - e^2 > 0$, y ambos denominadores en el- primer miembro de (3.40) son positivos. Por lo tanto, el lugar

geométrico de la ecuación (3.40) es una elipse.

b) $e > 1$. En este caso, $1 - e^2 < 0$. Por lo tanto, con el fin de tener ambos denominadores positivos, escribimos la ecuación (3.39) en la forma:

$$\frac{(x - p/1 - e^2)}{p^2 e^2 / (1 - e^2)^2} - \frac{y^2}{p^2 e^2 / e^2 - 1} = 1 \quad (3.41)$$

evidentemente, el lugar geométrico de la ecuación (3.41) es una hipérbola.

3.10 Cálculo de tiempos y distancias a través de Cónicas.

Para que las cónicas pasen por los puntos (x_1, y_1) y $(x_1, -y_1)$ fig. (3.8), es necesario hacer un ajuste en la distancia focal. Este se hará a partir de la ecuación (3.39) de la siguiente forma, tenemos que:

$$y^2 = (e^2 - 1)x^2 + 2px - p^2$$

como la cónica debe de pasar por el punto (x_1, y_1) y $(x_1, -y_1)$ se debe de cumplir que:

$$y_1^2 = (e^2 - 1)x_1^2 + 2px_1 - p^2 \quad (3.42)$$

de esta ecuación sacaremos una condición para p , se encuentra resolviendo a la ecuación (3.42), teniendo como incógnita a la distancia focal, el resultado es:

$$p = x_1 + \sqrt{e^2 x_1^2 - y_1^2} \quad (3.43)$$

como el arco que se está tomando es de 10005.973km, (x_1, y_1) debe ser igual a:

$$x_1 = R/\sqrt{2}$$

y

$$y_1 = R/\sqrt{2}$$

Por lo tanto la ec.(3.43) se transforma en:

$$p = \frac{R}{\sqrt{2}} \pm \frac{R}{\sqrt{2}} \sqrt{e^2 - 1} \quad (3.44)$$

la variación de p se encuentra en el intervalo $0 < p < R$ por lo tanto, esta condición nos impone una restricción en el signo de la ec.(3.44), tomando en cuenta el intervalo de variación de p , se tomo el signo negativo, así la ec.(3.44), se transforma en:

$$p = \frac{R}{\sqrt{2}} - \frac{R}{\sqrt{2}} \sqrt{e^2 - 1} \quad (3.45)$$

también tendremos una cota superior e inferior para la excentricidad e , esta será:

$$1 < e < 2 \quad (3.46)$$

En base a esta condición las únicas cónicas posibles que pasan por los puntos, $(R/\sqrt{2}, R/\sqrt{2})$ y $(R/\sqrt{2}, -R/\sqrt{2})$, solo son para bolas con $e=1$ y hipérbolas con $e < \sqrt{2}$.

Se vió en el capítulo segundo que la expresión para calcular el tiempo de recorrido para una partícula que recorre dos puntos que se encuentran sobre la superficie terrestre viajando dentro de ella es:

$$t = \sqrt{\frac{R}{g}} \int \frac{ds}{\sqrt{R^2 - r^2}} \quad (3.47)$$

haciendo en la ecuación (3.39):

$$A = e^2 - 1$$

$$B = 2p$$

$$C = -p^2$$

se transforma en:

$$y^2 = Ax^2 + Bx + C$$

para calcular el tiempo que realiza la partícula cuando esta - viaja a través de cónicas, sustituiremos la ec.(3.39) en función de A, B y C en la ecuación (3.47), para hacer la comparación entre las diferentes trayectorias se tomara un arco de la

Tierra de 10005.973km, en base a esto la ecuación (3.47) adquiere la forma:

$$t = \frac{\sqrt{\frac{R}{g}}}{2} \int_0^{\frac{R}{2}} \frac{\sqrt{4(Ax^2 + Bx + C) + (2Ax + B)^2} dx}{\sqrt{Ax^2 + Bx + C} \sqrt{R^2 - ((A+1)x^2 + Bx + C)}} \quad (3.48)$$

Para calcular la distancia que se recorre durante este tiempo, usaremos las mismas condiciones anteriores. La distancia recorrida se calculó usando la siguiente expresión:

$$d = 2 \int_0^{\frac{R}{2}} \sqrt{\frac{1 + (2Ax + B)^2}{4(Ax^2 + Bx + C)}} dx \quad (3.49)$$

Las integrales (3.48) y (3.49) conducen a integrales-elípticas; para su evaluación numérica se tuvo que construir un programa de computación. Los resultados que se obtuvieron fueron los siguientes:

EXCENRICIDAD	TIEMPO (min)	DISTANCIA (Km.)
1.000001	37.13303945	13355.6852
1.100001	40.88070264	14470.1641
1.200001	42.69206807	14943.9425
1.300001	44.13813648	15238.5202
1.400001	45.72835762	15429.4386

Para analizar el caso de la trayectoria circular se tomó un círculo de centro en $(R/\sqrt{2}, 0)$ y radio igual a $R/\sqrt{2}$, fig.(3.9). El tiempo que tardará la partícula para ir del punto A al punto B, fig.(3.9), lo podemos calcular de la siguiente relación:

$$t = \sqrt{\frac{R}{g}} \int \frac{ds}{\sqrt{R^2 - r^2}} \quad (3.50)$$

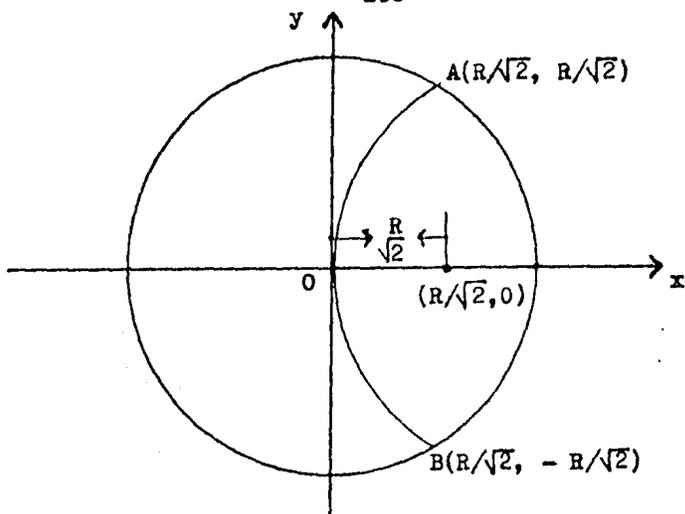


figura (3.9)

La ecuación del círculo con centro en $(R/\sqrt{2}, 0)$ y radio $R/\sqrt{2}$ es:

$$x^2 + y^2 = R\sqrt{2}x$$

Después de sustituir esta ecuación en la expresión (3.50), tenemos que:

$$t = R \sqrt{\frac{2R}{g}} \int_0^{R/\sqrt{2}} \frac{dx}{\sqrt{xR\sqrt{2} - x^2} \sqrt{R^2 - xR\sqrt{2}}} \quad (3.51)$$

para evaluar esta integral, hicimos el siguiente cambio de variable:

$$x = \frac{R}{\sqrt{2}} \operatorname{sen}^2 \theta$$

y llegamos a:

$$t = 2 \sqrt{\frac{R}{g}} \int_0^{\pi/4} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - \frac{1}{2} \operatorname{sen}^2 \theta}} \quad (3.52)$$

esta es una integral elíptica de primera clase, usando tablas de integrales elípticas para evaluarla, encontramos el siguiente resultado:

$$t = 2 \sqrt{\frac{R}{g}} (1.8541)$$

$$t = 3.7082 \sqrt{\frac{R}{g}}$$

de donde:

$$t = 49'49''$$

La distancia que recorre la partícula la podemos calcular usando la siguiente expresión:

$$d = 2 \int_0^{\frac{R}{\sqrt{2}}} \sqrt{1 + \frac{(x - R/\sqrt{2})^2}{(R\sqrt{2}x - x^2)}} dx$$

efectuando algunos pasos algebraicos, encontramos que:

$$d = R\sqrt{2} \int_0^{\frac{R}{\sqrt{2}}} \frac{dx}{\sqrt{xR\sqrt{2} - x^2}}$$

para evaluar esta integral, haremos el siguiente cambio de variable:

$$x = \frac{R}{\sqrt{2}} \sin^2 \theta$$

esta transformación nos lleva a lo siguiente:

$$d = 2R \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos \theta d\theta}{\sqrt{1 - \frac{1}{2} \sin^2 \theta}}$$

evaluando esta integral, encontramos que:

$$d = \frac{\pi R}{\sqrt{2}}$$

como $R = 6370 \text{ km}$

$d = 14150.582 \text{ km}$

CAPITULO CUARTO.

4.1 Análisis y comparación de resultados de las diferentes -- trayectorias.

En el capítulo segundo, encontramos que la trayectoria de tiempo mínimo es la hipocicloide cuyas ecuaciones paramétricas son:

$$x(\vartheta) = (R - b)\cos\vartheta + b\cos\frac{(R - b)\vartheta}{b}$$

$$y(\vartheta) = (R - b)\sen\vartheta - b\sen\frac{(R - b)\vartheta}{b}$$

se observa de estas ecuaciones, que existe toda una familia de hipocicloides, dependiendo del valor que tome el parámetro b .-- Para el estudio de las propiedades cinemáticas de la hipoci -- cloide, se tomó el caso particular en donde $b=R/4$, con este -- valor de b , las ecuaciones paramétricas de la hipocicloide toman la siguiente forma:

$$x(\vartheta) = R\cos^3\vartheta$$

$$y(\vartheta) = R\sen^3\vartheta$$

este caso particular de hipocicloide, se conoce como astroide -- cuya gráfica es:

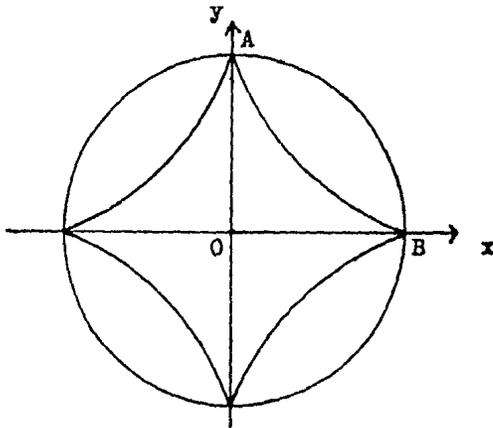


figura (4.1)

como se observa de la figura (4.1), esta curva es simétrica con respecto a el origen y a los ejes coordenados. Por lo tanto, -- para el análisis cinemático de la partícula que viaja por la -- astroide, fue suficiente restringirse a un solo cuadrante, pues to que las propiedades cinemáticas que se dedujeron para este cuadrante, serán válidos para los demás, pues se hizo la supo sición de que la Tierra es una esfera de densidad constante.

En el capítulo tercero se tomó una trayectoria rectilínea para unir los dos puntos A y B de la fig.(4.1), esto se hizo -- con el fin de hacer una comparación de las propiedades cinemáticas de las dos trayectorias. Los resultados se muestran en las tablas comparativas I, II, y III.

De las tablas I y II se observa que tanto la distancia recorrida como la rapidez alcanzada por la partícula que viaja -- por la astroide, son en cualquier intervalo de tiempo, sensible mente mayores que los de la trayectoria rectilínea. Todo esto -- se puede explicar en base a la tabla comparativa III, pues de -- ahí se puede observar que la partícula que viaja por la astroide, se encuentra sujeta a una aceleración mayor que la partícula que viaja por la trayectoria rectilínea. Como era de esperar se, la aceleración en cualquiera de estas trayectorias es menor o igual que la aceleración debida a la gravedad.

TABLA COMPARATIVA I

	HIPOCICLOIDE	RECTA
Tiempo (minutos)	distancia recorrida (Kilómetros)	distancia recorrida (Kilómetros)
0	0	0
1	17.6	12.4
2	70.3	49.8
3	157.8	111.7
4	279.4	198.1
5	434.2	308.2
6	621.0	441.6
7	838.6	597.4
8	1085.1	774.8
9	1359.0	973.0
10	1658.0	1190.8
11	1980.1	1426.8
12	2322.8	1679.8
13	2683.7	1948.6
14	3060.0	2231.4
15	3448.9	2526.8
16	3847.7	2833.2
17	4253.4	3148.8
18	4662.9	3472.0
19	5073.2	3800.8
20	5481.4	4133.6
21	5884.3	4468.4
22	6279.1	4803.4
23	6662.9	5136.6
24	7032.7	5466.4
25	7385.8	5791.0
26	7719.7	6108.4
27	8031.9	6416.8
28	8320.1	6714.8
29	8582.1	7000.4
30	8816.1	7272.4
31	9020.3	7528.8
32	9193.1	7768.6
33	9333.3	7990.4
34	9440.0	8192.8
35	9512.2	8374.8
36	9549.5	8535.4
37	9551.5	8673.6
38	9518.3	8788.8
39	9450.2	8880.2
40	9347.5	8947.5

	HIPOCICLOIDE	RECTA
tiempo (minutos)	distancia recorrida (Kilómetros)	distancia recorrida (Kilómetros)
41	9211.2	8990.1
42	9042.1	9007.9
43	8841.5	9000.8

TABLA COMPARATIVA II

tiempo (minutos)	HIPOCICLOIDE	ALCATA
	Velocidad alcanzada (Km/hr)	Velocidad alcanzada (Km/hr)
0	0	0
1	2114.1	1495.4
2	4212.7	2982.5
3	6280.2	4453.1
4	8301.4	5899.1
5	10261.3	7312.5
6	12145.4	8685.3
7	13939.9	10010.1
8	15631.6	11279.4
9	17207.9	12466.3
10	18657.1	13624.1
11	19968.7	14686.4
12	21133.0	15667.5
13	22141.2	16561.8
14	22986.1	17364.5
15	23661.3	18071.0
16	24161.9	18677.4
17	24484.2	19180.5
18	24625.8	19577.4
19	24585.6	19865.9
20	24364.0	20044.4
21	23962.6	20112.0
22	23384.4	20063.2
23	22633.6	19913.4
24	21715.7	19648.3
25	20637.6	19274.4
26	19407.1	18793.6
27	18033.5	18209.2
28	16526.7	17523.3
29	14898.0	16741.4
30	13159.3	15866.2
31	11323.6	14903.3
32	9404.2	13857.3
33	7415.5	12735.7
34	5372.0	11543.0
35	3288.9	10286.4
36	1181.5	8972.9
37	934.6	7609.7
38	3043.8	6204.4
39	5130.5	4764.8
40	7179.4	3293.7
41	9175.3	1614.4
42	11103.5	320.1
43	12949.8	-1175.9

TABLA COMPARATIVA III

tiempo (minutos)	HIPOCICLOIDE	RECTA
	Aceleracion total (m/seg ²)	Aceleracion alcanzada (m/seg ²)
0	9.80	6.92
1	9.77	6.91
2	9.69	6.85
3	9.55	6.75
4	9.37	6.62
5	9.14	6.45
6	8.86	6.25
7	8.54	6.01
8	8.18	5.73
9	7.80	5.43
10	7.39	5.09
11	6.97	4.73
12	6.55	4.34
13	6.15	3.93
14	5.77	3.49
15	5.43	3.04
16	5.17	2.57
17	4.98	2.08
18	4.90	1.58
19	4.92	1.08
20	5.05	0.57
21	5.27	0.05
22	5.57	0.46
23	5.93	0.97
24	6.32	1.48
25	6.74	1.97
26	7.16	2.46
27	7.57	2.94
28	7.97	3.40
29	8.34	3.84
30	8.68	4.25
31	8.98	4.65
32	9.24	5.02
33	9.46	5.36
34	9.62	5.67
35	9.73	5.95
36	9.79	6.20
37	9.79	6.41
38	9.74	6.59
39	9.63	6.73
40	9.48	6.83
41	9.27	6.90
42	9.02	6.92
43	8.72	6.91

Después de haber unido los dos puntos A y B de la fig.(4.1) por medio de una trayectoria rectilínea, se usarón trayectorias cónicas como hipérbolas y parábolas para unir los dos puntos, no se tomaron trayectorias elípticas, pues no existe ninguna elipse que pase por los puntos $(R/\sqrt{2}, R/\sqrt{2})$ y $(R/\sqrt{2}, -R/\sqrt{2})$ y cuya directriz coincida con el eje y.

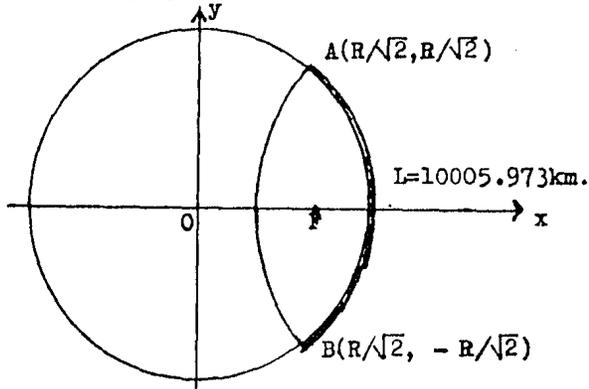


figura (4.2)

Por último se tomó una trayectoria circular de radio $r=R/\sqrt{2}$ y centro en $(R/\sqrt{2}, 0)$. Los resultados obtenidos con estas tres trayectorias se muestran en la tabla comparativa IV.

TABLA COMPARATIVA IV.

trayectoria	tiempo (minutos)	distancia recorrida (Kilómetros)
parábola	37.13303945	13355.6852
hipérbola		
$e= 1.1$	40.88070264	14470.1641
$e= 1.2$	42.69206807	14943.9425
$e= 1.3$	44.13813644	15238.5202
$e= 1.4$	45.72835762	15429.4386
círculo	49.82744	14150.582

De la tabla IV, podemos observar que la trayectoria parabólica, es la curva donde la partícula efectúa un tiempo menor que por las trayectorias hiperbólica y circular. Es importante hacer notar, que aunque la longitud de la trayectoria circular sea menor, que la longitud de cualquier trayectoria hiperbólica el tiempo efectuado por la trayectoria circular es mayor que el efectuado por cualquiera de las trayectorias hiperbólicas.

La tabla comparativa V, se construyó con los distintos tiempos efectuados y las distancias recorridas para cada una de las trayectorias que se tomaron, para unir los dos puntos A y B, fig (4.2), separados por una distancia de 10005.973Km.

TABLA COMPARATIVA V.

trayectoria	tiempo (minutos)	distancia recorrida (Kilómetros)
Astroide	36.558295	9555
Recta	42.213883	9008.5404
Círculo	49.82744	14150.582
Hipérbola		
e= 1.1	40.88070264	14470.1641
e= 1.2	42.69206807	14943.9425
e= 1.3	44.13813644	15238.5202
e= 1.4	45.72835762	15429.4386
Parábola	37.13303945	13355.6852

De esta tabla se observa que la trayectoria de tiempo mínimo es la astroide, lo cuál esta de acuerdo con los principios variacionales. En seguida es la trayectoria parabólica, en tercer término aparece la hipérbola con una excentricidad de $e=1.1$, en cuarto lugar aparece la trayectoria rectilínea, en quinto, sexto y séptimo lugar vuelven a aparecer trayectorias hiperbólicas con excentricidades $e=1.2$, 1.3 y 1.4 respectivamente, en octavo lugar aparece la trayectoria circular. Tomando en cuenta este orden se construyó la tabla comparativa VI.

TABLA COMPARATIVA VI.

Trayectoria.	Tiempo. (min. y seg.)	Distancia recorrida. (Kilómetros)
Astroide	36'33''	9555
Parábola	37'7''	13355.6852
Hipérbola e= 1.1	40'52''	14470.1641
Recta	42'12''	9008.5404
Hipérbola e= 1.2	42'41''	14943.9425
e= 1.3	44'8''	15238.5202
e= 1.4	45'43''	15429.4386
Círculo	49'49''	14150.582

Podemos observar de esta tabla, que la trayectoria rectilínea - es la que tiene la menor longitud, incluso su longitud es menor que la de la trayectoria de tiempo mínimo, sin embargo, el tiempo que se realiza por esta trayectoria la coloca en cuarto lugar de entre todas las trayectorias.

Finalmente construiremos la tabla VII, tomando en cuenta a la trayectoria rectilínea con fricción uniforme.

TABLA COMPARATIVA VII.

Trayectoria	Tiempo (min. y seg.)	Distancia recorrida. (Kilómetros)
Astroide	36'33''	9555
Parábola	37'7''	13355.6852
Hipérbola e= 1.1	40'52''	14470.1641
Recta sin fricción	42'12''	9008.5404
Hipérbola e= 1.2	42'41''	14943.9425
e= 1.3	44'8''	15238.5202
e= 1.4	45'43''	15429.4386
Círculo	49'49''	14150.582
Recta con fricción	49'56''	9008.5404

Como era de esperarse, por la trayectoria con fricción uniforme, es en donde la partícula realiza un mayor tiempo en su recorrido.

CONCLUSIONES.

En este trabajo hemos encontrado que la trayectoria de -- tiempo mínimo para una partícula que viaja bajo la superficie de la Tierra, suponiendo que esta es esférica y de densidad -- constante, aunque ingenuamente se haya pensado que sería una -- trayectoria rectilínea, resultó ser una curva conocida como -- hipocicloide. De las ecuaciones paramétricas de la hipocicloide, se observa que existe toda una familia de hipocicloides -- dependiendo del valor que tome el parámetro b . Para el estudio de las propiedades cinemáticas de la hipocicloide, se tomó el caso particular en donde $b=R/4$, con este valor de b , la hipocicloide se conoce como astroide. El análisis que se hizo fue para una partícula que viaja por dentro de la Tierra, recorriendo dos puntos que se encuentran sobre su superficie, separados por una distancia de 10005.973Km., estos dos puntos primeramente se unieron por medio de una trayectoria rectilínea, y por medio de un segmento de astroide. El análisis reveló algunas -- cualidades interesantes; se encontró que el movimiento de la -- partícula en ambas trayectorias es armónico simple y además es isócrono o sea que la partícula oscila con una frecuencia que es independiente de su amplitud, esta propiedad es importante -- puesto que con esto se demuestra que una curva que posea la -- propiedad de isocronía no implica que la curva sea braquistó--crona, en la ref.(4) se demuestra en forma general que la im -- plicación inversa es válida siempre y cuando el potencial al -- que se encuentre sujeta la partícula sea proporcional al cua--drado de la distancia.

Es importante hacer notar que el único caso en donde la -- trayectoria de tiempo mínimo y la trayectoria rectilínea coinciden, es cuando se quieren unir dos puntos antípodas por me--dio de una hipocicloide, pues esta degenera en una línea recta

que pasa por el centro de la Tierra.

Como una corrección a la partícula que se desliza sin rodar dentro de la Tierra a través de la trayectoria rectilínea se tomó el caso de una esfera que rueda sobre una superficie rectilínea con fricción uniforme, encontrándose que la diferencia entre los tiempos de los dos movimientos es de $7'44''$, --- efectuándose el mayor tiempo por la trayectoria con fricción uniforme.

El siguiente paso fue unir los dos puntos que se encontraban sobre la superficie de la Tierra, por medio de trayecto --- rias cónicas, y en base a los tiempos realizados por este tipo de trayectorias y tomando en cuenta el tiempo realizado por la trayectoria rectilínea, poder encontrar cual dé estas trayecto rias es la óptima despues de la curva braquistócrona. Se encon tró que es la parábola la cónica más rápida, pues esta se pare ce en algunos segmentos a la hipocicloide (astroide). La peor trayectoria y sin embargo es la que se apega más a la realidad como era de esperarse es la trayectoria rectilínea con fric --- ción uniforme.

El problema nos ha servido para ejercitarnos con el cálcu lo de variaciones, y para aprender que en problemas dinámicos no siempre el camino más corto es el más rápido. Esto nos da - pie para trabajar en problemas de eficiencia que son parte de la teoría de juegos.

APENDICE A

ECUACION DE LA HIPOCICLOIDE

En este apéndice se deducirán, las ecuaciones paramétricas de la hipocicloide.

La hipocicloide es la curva que describe un punto fijo de una circunferencia que rueda, sin resbalar, permaneciendo siempre tangente interiormente a otra circunferencia fija.

Sean a el radio de la circunferencia fija, de centro O , - b el radio de la circunferencia menor, de centro O' , que rueda, permaneciendo siempre tangente interiormente a la circunferencia mayor, M el punto fijo de la circunferencia menor -- que describe la hipocicloide, y T el punto de tangencia. Ver fig. (1-A)

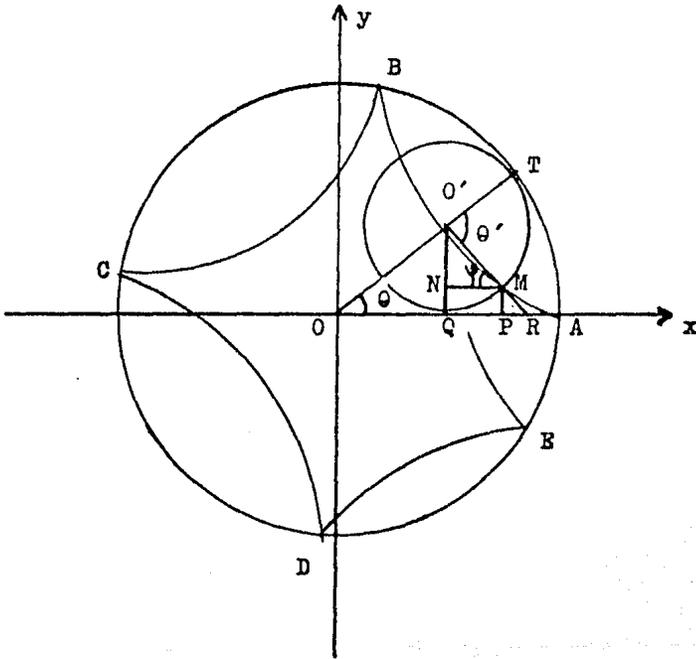


Figura (1-A)

En A coinciden M y T, cuando M haya descrito la arcada AB, habrá girado 360° , y el punto T habrá recorrido el arco-AB; o sea:

$$\text{Arco AB} = 2\pi b \quad (\text{A-1})$$

designando por φ el ángulo $O'MN$; tenemos que:

$$x = \overline{OP} = \overline{OQ} + \overline{NM} \quad (\text{A-2})$$

$$y = \overline{PM} = \overline{QO'} - \overline{NO'} \quad (\text{A-3})$$

de la figura (1-A) encontramos que:

$$x = OO' \cos \theta + O'M \cos \varphi \quad (\text{A-4})$$

$$y = OO' \sin \theta - O'M \sin \varphi \quad (\text{A-5})$$

conviene expresar el ángulo φ en función de θ , para que solo-figure un parámetro. El ángulo θ' es exterior al triángulo $OO'R$; por lo tanto:

$$\begin{aligned} \theta' &= \cancel{\angle O'OR} + \cancel{\angle O'RO} \\ &= \varphi + \theta \end{aligned}$$

o sea

$$\varphi = \theta' - \theta \quad (\text{A-6})$$

además, por la manera en que es generada la curva, el arco-AT es igual al arco MT; de donde:

$$a\theta = b\theta'$$

es decir:

$$\theta' = \frac{a}{b} \theta \quad (\text{A-7})$$

sustituyendo A-7 en A-6, encontramos que:

$$\varphi = \left(\frac{a-b}{b} \right) \theta \quad (\text{A-8})$$

sustituyendo la ecuación A-8, OO' por $(a - b)$ y $O'M$ por b , en las ecuaciones A-4 y A-5, llegamos finalmente a las siguientes ecuaciones:

$$x = (a - b)\cos\theta + b\cos\left(\frac{a - b}{b}\theta\right) \quad (A-9)$$

$$y = (a - b)\sen\theta - b\sen\left(\frac{a - b}{b}\theta\right) \quad (A-10)$$

las ecuaciones A-9 y A-10 son las ecuaciones de la hipocicloide.

APENDICE B.

La cicloide como un caso particular de la hipocicloide.

En este apéndice demostraremos que la cicloide es un caso particular de la hipocicloide. Esta demostración la haremos a partir de la ecuación natural o intrínseca de la hipocicloide.

En una curva plana, la relación entre la curvatura y la longitud de arco, da una ecuación natural ref. (15). En base a esto, procederemos a encontrar las expresiones para la longitud de arco y la curvatura para la hipocicloide.

En el apéndice A, se demostró que las ecuaciones paramétricas de la hipocicloide son:

$$x(\vartheta) = (a-b)\cos\vartheta + b\cos\frac{(a-b)\vartheta}{b} \quad (\text{B-1})$$

$$y(\vartheta) = (a-b)\sin\vartheta - b\sin\frac{(a-b)\vartheta}{b} \quad (\text{B-2})$$

a través de el cálculo integral, sabemos que la longitud de arco de una curva plana, la podemos calcular por medio de la siguiente relación:

$$S = \int \sqrt{\left(\frac{dx}{d\vartheta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\vartheta}\right)^2} d\vartheta \quad (\text{B-3})$$

calculando las derivadas con respecto a ϑ de (B-1) y (B-2), se encuentra que:

$$\frac{dx}{d\vartheta} = - (a-b)\left(\sin\vartheta + \sin\frac{(a-b)\vartheta}{b}\right)$$

$$\frac{dy}{d\vartheta} = (a-b)\left(\cos\vartheta - \cos\frac{(a-b)\vartheta}{b}\right)$$

sustituyendo estos resultados en (B-3) e integrando, encontramos que la longitud de arco es:

$$S = -\frac{4b(a-b)\cos\frac{a\vartheta}{2b}}$$

Ahora calcularemos el radio de curvatura, por medio de la

siguiente fórmula:

$$R_c = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{3/2}}{\left| \frac{d^2y}{dx^2} \right|} \quad (B-4)$$

usando las ecuaciones (B-1) y (B-2) junto con la regla de la cadena:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\theta} \frac{d\theta}{dx}$$

obtuvimos el siguiente resultado:

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{\left[\cos\theta - \cos\left(\frac{a-b}{b}\theta\right) \right]}{\frac{\sin\theta + \sin\left(\frac{a-b}{b}\theta\right)}{b}}$$

volviendo a usar la regla de la cadena, se encuentra que:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(a-2b)(1 - \cos a\theta)}{b \left(\frac{\sin\left(\frac{a-b}{b}\theta\right) + \sin\theta \right)^3}$$

sustituyendo ambas derivadas en (B-4) encontramos el radio de curvatura, este es:

$$R_c = \frac{4(a-b)b \operatorname{sen} \frac{a\theta}{2b}}{(a-2b)}$$

resumiendo, hemos encontrado las siguientes ecuaciones:

$$S = \frac{-4b}{a} (a-b) \cos \frac{a\theta}{2b}$$

$$R_c = \frac{4(a-b)b \operatorname{sen} \frac{a\theta}{2b}}{(a-2b)}$$

haciendo:

$$A = \frac{-4b(a-b)}{a}$$

y

$$B = \frac{4b(a-b)}{(a-2b)}$$

entonces:

$$S = A \cos \frac{\varphi}{2b}$$

y

$$R_c = B \sin \frac{\varphi}{2b}$$

elevando al cuadrado ambas ecuaciones, y sumandolas, encontramos que:

$$\frac{S^2}{A^2} + \frac{R_c^2}{B^2} = 1 \quad (B-5)$$

siendo esta, la ecuación natural o intrínseca de la hipocicloide.

Tomando el caso cuando $a \gg b$, $A \rightarrow 4b$ y $B \rightarrow 4b$, y así la ecuación (B-5), se transforma en:

$$S^2 + R_c^2 = 16b^2$$

que es la ecuación natural de una cicloide, obtenida al rodar un círculo de radio b sobre una línea recta.

Por lo tanto hemos demostrado que la cicloide es un caso particular de la hipocicloide cuando $a \gg b$, o sea cuando el radio del círculo fijo es mucho mayor que el radio del círculo que rueda dentro de él.

Otra forma de demostrar que la cicloide es un caso particular de la hipocicloide, es partiendo de las ecuaciones (A-4) y (A-5). Sustituyendo en ambas ecuaciones la expresión (A-8), éstas se transforman es:

$$x = (a-b) \cos \frac{b}{a-b} \varphi + b \cos \varphi \quad (B-6)$$

$$y = (a-b) \sin \frac{b}{a-b} \varphi - b \sin \varphi \quad (B-7)$$

Trasladando los ejes de coordenadas una distancia a , las ecuaciones (B-6) y (B-7) las podemos escribir como:

$$x' = (a-b)\cos \frac{b}{a-b} \varphi + b\cos \varphi - a \quad (\text{B-8})$$

$$y' = (a-b)\sin \frac{b}{a-b} \varphi - b\sin \varphi \quad (\text{B-9})$$

Tomando en ambas ecuaciones el caso cuando $a \rightarrow \infty$, estas se reducen a:

$$x' = -b(1 - \cos \varphi) \quad (\text{B-10})$$

$$y' = b(\varphi - \sin \varphi) \quad (\text{B-11})$$

Que son las ecuaciones paramétricas de una cicloide, generada por un círculo de radio b que rueda sobre una línea recta vertical.

BIBLIOGRAFIA

- 1.- PAUL W COOPER: TROUGH THE EARTH IN FORTY MINUTES
AMERICAN JOURNAL PHYSICS, VOL. 34, No. 68, JUN. 1966
- 2.- J.E. PRUSSING: BRACHISTOCHRONE-TAUTOCHRONE IN A HOMOGENEUS
SPHERE.
AMERICAN JOURNAL PHYSICS, VOL. 44, No. 3, MARCH 1976
- 3.- P.K. ARAVINA: SIMPLIFIED APPROACH TO BRACHISTOCHRONE PROBLEMS.
AMERICAN JOURNAL PHYSICS, VOL. 49, No. 9, SEPT. 1981
- 4.- RAMESA CHANDER: GRAVITATIONAL FIELDS WHOSE BRACHISTOCHRONE AND
IS OCHRONES ARE IDENTICAL CURVES.
AMERICAN JOURNAL PHYSICS, VOL. 45, No. 9, SEPT. 1977
- 5.- JOHN M. MC. KINLEY: BRACHISTOCHRONES, TAUTOCHRONES, EVOLUTES,
AND TESSELATIONS.
AMERICAN JOURNAL PHYSICS, VOL. 47, No. 1, JAN. 1979
- 6.- DJ.S. DJUKIC AND T.M. ATANACKOVIC: A NOTE ON THE CLASSICAL
BRACHISTOCHRONE.
JOURNAL OF APLIED MATHEMATICS AND PHYSICS, VOL. 27, 1976
- 7.- GIULIO VENEZIAN: TERRESTRIAL BRACHISTOCHRONE.
AMERICAN JOURNAL PHYSICS, VOL. 34, No. 8, AUGUST 1966
- 8.- L. EISGOLT: ECUACIONES DIFERENCIALES Y CALCULO VARIACIONAL.
EDIT. CULTURA POPULAR.
- 9.- JERRY B. MARION: DINAMICA CLASICA DE LAS PARTICULAS Y SISTEMAS.
EDIT. REVERTE.
- 10.- A. ANFOSSI: GEOMETRIA ANALITICA.
EDIT. PROGRESO.
- 11.- E.J. ROUTH: A TREATISE ON DYNAMICS OF A PARTICLE.
CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS, 1898.
- 12.- ROBERTO CONDE DEL AGUILA: TRAYECTORIA OPTIMA DE PARTICULAS
QUE SE MUEVEN EN UN CAMPO GRAVITACIONAL. TESIS FACULTAD DE -
CIENCIAS U.N.A.M. 1985
- 13.- RUSSELL L. MALLETT: COMMENTS ON " THROUGH THE EARTH IN FORTY
MINUTES".
AMERICAN JOURNAL PHYSICS, VOL. 34, N^o. 8 AUGUST-1966
- 14.- LEHMANN: GEOMETRIA ANALITICA.
EDIT. LIMUSA.
- 15.- STRUICK: DIFFERENTIAL GEOMETRY.
EDIT. ADDISON WESLEY