LA JERARQUIA DE LOS CONCEPTOS

DE LA

ELECTRODINAMICA CLASICA

TESIS que presenta el alumno ANGEL PRIETO RUIZ, para optar al título de FISICO en la FACULTAD DE CIENCIAS de la U.N.A.M.

México, D.F., 3 de diciembre de 1985.

UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

I N D I C E

I

INTRODUCCION Y TESIS

La idea de que la electrodinámica clásica sólo puede presentarse en una de dos formas es aceptada generalmente. Estas dos formas se distinguen porque una parte de las ecuaciones de Maxwell-Hertz y la otra concluye en ellas.[1] A la primera se le llama deductiva ya que procediendo de la expresión asumida como la más universal, que son las mencionadas ecuaciones, obtiene las expresiones de las leyes que rigen los fenómenos de los diversos estadios de la electrodinámica. De los textos que siguen este procedimiento es quizá el más riguroso todavía, el de Stratton[2], que en su introducción señala: "Por un campo electromagnético entendamos el dominio de cuatro vectores $\bar{E}$ y $\bar{B}$, $\bar{D}$ y $\bar{H}$ ..."

"La fuente de un campo electromagnético es una distribución de carga eléctrica y de corriente ... y puede suponerse que esta distribución es continua y no discreta ... y <u>postulamos</u> que en cada punto ordinario del espacio los vectores de campo están sujetos a las ecuaciones de Maxwell ..."[3]

Es indiscutible que este modo de exposición conforma un todo lógico y congruente en el ámbito de su aplicación, y además que satisface el siguiente planteamiento de Stratton:

"Este libro trata solamente de fenómenos en gran escala. Es una viva tentación extender la discusión a ese fructífero campo que Frenkel llama 'estado quasi-microscópico', y tener que ver con los muchos resultados hermosos de la teoría clásica de los electrones. A la luz de los desarrollos contemporáneos, cualquiera que intente tal programa estará pronto superado por las dudas. Aunque muchas leyes de la electrodinámica clásica son válidas directamente en dominios sub-microscópicos, uno no tiene la base para la selección. El autor está firmemente convencido de que la transición debe hacerse de la electrodinámica cuántica hacia la teoría clásica, y no en la dirección contraria. Cualquiera que sea la forma que al final tengan las ecuaciones cuánticas de la electrodinámica, sus promedios estadísticos sobre un gran número de átomos deben conducir a las ecuaciones de Maxwell."[4]

En opinión de Stratton, entonces, la electrodinámica clásica puede expresarse mediante funciones continuas, inclusive en lo que se refiere a carga y corriente, y que, la obtención de las ecuaciones microscópicas cuyos promedios estadísticos deberán proporcionar las ecuaciones macroscópicas, pertenece a la mecánica cuántica. Esta opinión no es compartida por otros físicos, como Dirac que contrariamente observa: "Los problemas de la electrodinámica cuántica actual deben ser atribuídos principalmente, en mi opinión, no a una falta en los principios básicos de cuantificación, sino al estar nosotros trabajando a partir de una teoría clásica equivocada."[5] Para Dirac, como se verá más adelante, la teoría clásica significa esencialmente el lagrangiano que proporciona las ecuaciones microscópicas del campo.

En el presente trabajo, compartiendo la idea de Dirac y de otros, el concepto de electrón quedará fuera de la esfera de la teoría clásica, la que se refiere a cuerpos en reposo, no así las ecuaciones microscópicas, compuestas por funciones continuas, que pertenecerán a ella, y que serán el objeto principal de atención en este estudio.

La postulación de la validez de las ecuaciones de Maxwell que hace Stratton, y que se requiere hacer en toda presentación deductiva, tiene mucho de acto de fe, pues es inaceptable partir de forma axiomática de la expresión más compleja de la electrodinámica para explicarla. Por ello tal vez, Planck al utilizar la presentación deductiva en su texto de electrodinámica haya preferido partir de otros postulados, equivalentes a las ecuaciones de Maxwell, para él más aceptables, aunque igualmente complejos: el principio de la conservación de la energía, la ley de Poynting y la expresión para la generación de calor de Joule. A las tres las supone leyes empíricas y de ellas extrae las ecuaciones de Maxwell,[6] con un procedimiento idéntico al que se encuentra en el texto de Joos, bajo el subtítulo de "Derivación unificada y rigurosa de las ecuaciones de campo y de las condiciones en la frontera", en donde se dice: "El método propuesto para obtener las ecuaciones de Maxwell se basa en cinco hipótesis que, debe ser admitido, no son tan inmediatamente obtenibles del experimento como aquellas que formaban la base de nuestro método anterior [leyes de Faraday y Ampere] . Sin embargo, el siguiente procedimiento tiene la ventaja de generalidad y compacidad. Las cinco suposiciones son las que siguen:

1.- La expresión para la densidad de energía eléctrica es

$$u_{el} = \frac{K}{8\pi}\bar{E}^2.$$

2.- La expresión para la densidad de energía magnética es

$$u_{mag} = \frac{\mu}{8\pi}\bar{H}^2.$$

3.- El flujo de energía está dado por

$$\bar{S} = \frac{c}{4\pi} \bar{E} \times \bar{H}$$

4.- La expresión para la energía eléctrica que es convertida en calor de Joule por segundo por centímetro cúbico es

$$\frac{du_{el}}{dt} = -\sigma \bar{E}^2$$

5.- El hecho experimental de la superposición lineal de campos electromagnéticos, que requiere que las ecuaciones de campo sean lineales y homogéneas en $\bar{E}$ y $\bar{H}$".[7]

Es indudable que la obtención de las ecuaciones de Maxwell que hacen Planck y Joos a partir de estas cinco suposiciones es instructiva e interesante, sin embargo cabe preguntarse qué tan diferente es postular la validez de las ecuaciones de campo o postular la validez de las leyes a que acuden Planck y Joos. En lo que toca a la complejidad de ambos planteamientos, la situación de los dos casos es idéntica.

La otra forma de exposición, la inductiva, es la más común. En ella se analizan los fenómenos de la electrostática primero, de la electrodinámica después; en cada caso se formulan las ecuaciones que contienen las leyes que los describen, y en este proceso, añadiendo a las expresiones matemáticas fenómenos cada vez más complejos se llega, unas veces de modo natural y otras a la fuerza, a la obtención de las expresiones matemáticas que son aceptadas como las más universales, las ecuaciones de Maxwell, para medios materiales en reposo. Un ejemplo de esta abreviación forzada se encuentra en la definición de los vectores $\bar{D}$ y $\bar{H}$ a partir de su contenido matemático y no de su contenido físico; al promediar los valores de los campos microscópicos y de sus fuentes, se llega a la siguiente ecuación:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial \bar{E}_{macro}}{\partial t} = \nabla \times \bar{B}_{macro} - \mu_0 \bar{J} - \mu_0 \frac{\partial \bar{P}}{\partial t} - \mu_0 \nabla \times \bar{M}.$$

Los términos que contienen los vectores $\bar{E}$ y $\bar{B}$ describen el campo electromagnético y los otros tres describen las fuentes del mismo dentro del material; dispuesta de esta manera la ecuación muestra la relación causal entre las fuentes y el campo, pero lamentablemente en atención a dos derivadas temporales y dos rotacionales se definen dos vectores híbridos $\bar{D}$ y $\bar{H}$ que contienen campos y fuentes:

$$\bar{D} = \varepsilon_0\bar{E} + \bar{P} \quad y \quad \bar{H} = \frac{1}{\mu_0}\bar{B} - \bar{M}.$$

De esta manera se simplifica la expresión matemática de la ecuación que vuelve a tener la forma de la ecuación correspondiente del electromagnetismo en el vacío con cargas. La forma es más bella pero el contenido no es tan inmediato.

La ordenación de los fenómenos del electromagnetismo de acuerdo con su dependencia temporal es la única que puede encontrarse en las exposiciones del tema. Se utiliza en los planteamientos inductivos porque esta clasificación es paralela al desarrollo histórico de los fenómenos; también se emplea en la exposición deductiva porque las expresiones más sencillas contenidas en las ecuaciones de Maxwell corresponden a la estática, y es natural empezar el análisis del contenido por su lado más sencillo.

Así como el desarrollo deductivo es un todo congruente y lógico, el inductivo no puede serlo porque presenta una fractura en la adición del término $\dot{\bar{D}}$, que se hace atendiendo a razones de simetría en las ecuaciones y no, como debiera ser, por razones empíricas. El origen conceptual del término $\dot{\bar{D}}$ es como se sabe incorrecto, ya que Maxwell atribuyó su existencia a un desplazamiento electrónico, al considerar una analogía entre un medio dieléctrico y el éter, desarrollando una teoría de campo, o sea, de propagación de las acciones en forma contigua. El problema más importante que Maxwell debía enfrentar era el planteado por las teorías de W. Weber y C. Neumann: "Estas teorías", dice Maxwell, "suponen más o menos explícitamente, la existencia de substancias cuyas partículas tienen la propiedad de actuar una sobre otra a distancia por atracción o repulsión. La teoría más desarrollada de este tipo es aquella del Sr. W. Weber, quien ha hecho que la misma teoría incluya fenómenos electrostáticos y electromagnéticos ... Las dificultades mecánicas, sin embargo, que están involucradas en la suposición de partículas que actúan a distancia con fuerzas que dependen de sus velocidades, son tales como para impedirme considerar a esta teoría como la última...

Yo he, por tanto, preferido buscar una explicación de los hechos en otra dirección, suponiéndolos producidos por acciones que continúan en el medio circundante tanto como en los medios excitados, y dirigiéndome a explicar la acción entre cuerpos distantes sin suponer la existencia de fuerzas capaces de actuar directamente a distancias sensibles.

La teoría que yo propongo puede entonces ser llamada una teoría del <u>Campo Electrodinámico</u>, porque tiene que ver con el espacio en la vecindad de los cuerpos eléctricos o magnéticos, y puede llamarse una teoría <u>Dinámica</u>, porque supone que en ese espacio hay materia en movimiento, por la que se producen los fenómenos electromagnéticos observados".[8]

Más adelante, después de definir el desplazamiento de las cargas en un dieléctrico, y de relacionar la fuerza eléctrica aplicada con la cantidad de electricidad desplazada en el dieléctrico, señala: "...Aquí, entonces, percibimos otro efecto de la fuerza electromotriz, a saber, el desplazamiento eléctrico, que de acuerdo con nuestra teoría es una especie de cesión elástica a la acción de la fuerza, similar a la que ocurre en estructuras y máquinas debido a la condición de rigidez perfecta de las conexiones."

Finalmente, supone que el éter existe, que tiene una estructura, y en consecuencia con lo que acabo de transcribir, que en él se puede dar el término $\dot{\bar{D}}$.

"...que las partes de este medio son capaces de ser puestas en movimiento por corrientes eléctricas y por imanes; que este movimiento es comunicado de una parte del medio a otra por fuerzas provenientes de las conexiones de esas partes; que bajo la acción de estas fuerzas hay una cierta cesión que depende de la elasticidad de esas conexiones..."

Es así como conceptualmente, entra en la teoría este término que habría de redondear la ecuación que contiene a la ley de Ampere, y da entrada a la posibilidad de obtener la ecuación de onda que predijo la existencia de las ondas electromagnéticas.

Frecuentemente se atribuye la presencia del término $\dot{\bar{D}}$ en las ecuaciones de campo a una inspiración genial de Maxwell. Sin restarle el mérito que tiene el haberlo hecho, por el camino que fuese, es muy importante señalar aquí que había otra forma para identificarlo a partir de la teoría de Helmholtz, suponiendo solamente que las acciones electromagnéticas se propagan en el espacio con velocidad finita. Sobre ello dice Levi-Civita:

"Es sabido que Maxwell ha deducido sus ecuaciones de hipótesis más bien complicadas y con razonamientos no siempre correctos; para no incurrir en inconvenientes similares, le pareció a Hertz la mejor cosa prescindir (al menos en el caso de cuerpos en reposo) de toda justificación a priori, limitándose a hacer resaltar el perfecto acuerdo entre la representación matemática y casi todos los hechos experimentales estudiados hasta ahora". Y después de señalar la necesidad que entonces existía de expresar todos los fenómenos electromagnéticos conocidos en una sola dirección, dice: "Con tal propósito fueron propuestas por físicos y matemáticos hipótesis disparatadas, de las que, aunque algunas se pueden impugnar por consecuencias físicamente inaceptables [en nota añade: "(Véase además por ejemplo en la memoria de Helmholtz, Wissenschaftliche Abhandlungen, V.1, pag. 537-687, la crítica de la ley de Weber)"] otras, con sus deducciones bien armonizadas, y no contradichas hasta ahora por los hechos, requieren una discusión madura.

Entre las teorías clásicas de la electrodinámica, aquella que, siendo sin ninguna duda particularmente notable, es la que fue establecida y desarrollada ampliamente por Helmholtz, en base a la ley potencial de F. Neumann.[9] Si ella coincide en sustancia con la de Hertz o dónde y cómo difiere, no fue examinado hasta ahora, pero la indagación no es para mí superflua, y en ello quisiera entretener a los lectores de este periódico.

Expongo antes el resultado obtenido...

La teoría electrodinámica de Helmholtz (correspondiente a la ley potencial de F. Neumann) conduce a las ecuaciones Hertzianas, siempre que se admita que las acciones a distancia (tanto de origen electrostático, cuanto de origen electrodinámico) se propagan con velocidad finita [Subrayado en el texto original] .

...Se ve inmediatamente que, para darle forma matemática, ...basta sustituir al potencial elemental

$$\frac{\Omega(\xi,\eta,\zeta,t)}{r}$$

$$\left(r=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}\right),$$

de una masa componente de corriente Ω, existente en el instante t, en el punto (ξ,η,ζ), con el potencial

$$\frac{\Omega(\xi,\eta,\zeta,t-\frac{r}{c})}{r}$$."[10]

Puede parecer extraña la aclaración que Levi-Civita hace sobre la velocidad de propagación del potencial electrostático, pero no debe ser motivo de confusión; se verá en el capítulo IV que tanto el potencial vectorial $\bar{A}$, como el potencial escalar φ , forman parte de un potencial único que satisface una cierta ecuación de movimiento, cuya solución conduce a una interpretación matemática en la que el potencial escalar se desplaza con la velocidad crítica c.

La introducción del término $\dot{\bar{D}}$ en la electrodinámica se hace generalmente en los libros de texto, recordando el golpe de genio de Maxwell sin utilizar los potenciales retardados cuyo uso, matemáticamente, es mucho más satisfactorio para su obtención; algo queda en ellos de aquello que produjo en Poincaré el comentario con que introduce su electrodinámica: "La primera vez que un lector francés abre el libro de Maxwell, una sensación de malestar, y frecuentemente también de desconfianza, se mezclan desde el principio a su admiración."[11]

Es así como, recorriendo el vasto campo de la electrodinámica por el camino inductivo o por el deductivo, nos encontramos cada prominencia en cada lugar gobernada por alguna forma de las ecuaciones de Maxwell, situación que nos conduce, con Boltzmann, a aplicar la frase de Goethe a las ecuaciones de Maxwell, "¿Fué un dios quien escribió estas líneas?"[12]

Intentar obtener otra perspectiva de este vasto campo, para así dársela también a las ecuaciones, es el propósito de este trabajo. La primera labor a desarrollar será la de clasificar, o de ordenar los fenómenos del electromagnetismo de acuerdo a la complejidad de la estructura física de los elementos que en cada uno de ellos participen; esto nos conducirá, en consecuencia, al establecimiento de una estructura jerárquica entre los conceptos utilizados en la electrodinámica de forma natural, pues, por ejemplo, al considerar a la materia como el elemento más complejo que participa en los fenómenos, los vectores $\bar{D}$ y $\bar{H}$ quedarán automáticamente en el rango jerárquico más bajo, si a éste corresponde lo más complejo. De existir esta estructura jerárquica, deberá tener una forma piramidal, es decir que los fenómenos más complejos serán los más profusos y, consecuentemente, los conceptos correspondientes, los más abundantes. Obtenida la pirámide, será posible identificar el concepto que se encuentre en la cúspide, que será el concepto más sencillo. Por complejidad entenderemos lo siguiente: entre dos conceptos, será más complejo aquel en el que participen más elementos; para distinguir entre los niveles jerárquicos de los vectores $\bar{B}$ y $\bar{H}$, hay que referirse a sus definiciones, para encontrar que el vector $\bar{B}$ se expresa como el rotacional de un vector llamado potencial, y que $\bar{H}$ está compuesto por dos elementos, luego es más complejo y se encuentra, consecuentemente, en un nivel jerárquico inferior. Estos razonamientos nos conducen a identificar un gran bloque que forma la base de la pirámide, compuesto por todos los conceptos que se utilizan para describir los fenómenos electromagnéticos dentro de medios materiales, y con ellos, a la <u>Teoría de los Electrones</u> creada por Lorentz. En esta teoría se parte de dar por válidas las ecuaciones del campo electromagnético en el vacío con cargas y, mediante procesos de promediación estadísticos, se obtienen las ecuaciones de campo para medios materiales en reposo. Los conceptos que participan en las ecuaciones del campo en el vacío con cargas están, consecuentemente, en un nivel jerárquico superior con respecto del nivel en el que se encuentran los conceptos que participan en las ecuaciones de campo para medios materiales, como se vió para el caso de $\bar{B}$ respecto de $\bar{H}$.La Teoría de los Electrones nos conduce de las ecuaciones

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial \bar{E}}{\partial t} = \nabla \times \bar{B} - \mu_0 \bar{j},$$

$$\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} = -\nabla \times \bar{E},$$

$$\nabla \cdot \bar{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho,$$

$$\nabla \cdot \bar{B} = 0,$$

a las ecuaciones

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial \bar{E}_{macro}}{\partial t} = \nabla \times \bar{B}_{macro} - \mu_0 \bar{j} - \mu_0 \frac{\partial \bar{P}}{\partial t} - \mu_0 \nabla \times \bar{M},$$

$$\frac{\partial \bar{B}_{macro}}{\partial t} = -\nabla \times \bar{E}_{macro},$$

$$\varepsilon_0 \nabla \cdot \bar{E}_{macro} = \rho - \nabla \cdot \bar{P},$$

$$\nabla \cdot \bar{B}_{macro} = 0$$

De esta forma se reduce el problema a la identificación del concepto que nos conduzca a las ecuaciones primeras, las de campo en el vacío con cargas. Si el concepto está correctamente identificado, y así la cúspide de la pirámide, será posible, a partir de éste, a través de la estructura jerárquica, obtener las ecuaciones del electromagnetismo para cuerpos en reposo; esta será la definición de estructura jerárquica: si es posible llevar a cabo lo anterior, necesariamente se realizará a través de una estructura jerárquica.[13]

No considerando necesario postular la validez de la tercera ley de Newton en lo que concierne al electromagnetismo, ni la de las expresiones vectoriales usuales, y en consecuencia con los razonamientos antes expuestos, propongo lo siguiente:

Tesis.

La teoría clásica del electromagnetismo para cuerpos en reposo está contenida en los postulados:

A- La velocidad de propagación de las perturbaciones electromagnéticas en el vacío es constante, numéricamente igual a <u>c</u>, e independiente de la velocidad del emisor.

B- La velocidad <u>c</u> es la máxima que una perturbación electromagnética u objeto de cualquier otra índole pueden alcanzar en el vacío.

II

CAMPO ELECTROMAGNETICO EN EL VACIO SIN CARGAS

El problema matemático es el de dar forma a una función vectorial $\bar{P}'$, que deberá representar el campo electromagnético, haciendo que cumpla con el contenido de los postulados A y B.

Las componentes de $\bar{P}'$ a lo largo de tres ejes de coordenadas cartesianas rectangulares deberán ser tres funciones univaluadas y por lo menos tres veces diferenciables, con dominio en el espacio-tiempo.

Se tiene que:

$$\bar{P}' = (P'_x, P'_y, P'_z) = (P'_1, P'_2, P'_3), \qquad \ldots(1)$$

y para cada componente:

$$\begin{aligned} P'_1 &= P'_1(x,y,z,t), \\ P'_2 &= P'_2(x,y,z,t), \text{ y} \\ P'_3 &= P'_3(x,y,z,t). \end{aligned} \qquad \ldots(2)$$

Las coordenadas x, y, z, t son las del lugar de observación; en lo sucesivo se denominarán coordenadas naturales.

Se nos ha enseñado que para cumplir con el postulado A, las coordenadas naturales no pueden tomar valores en forma independiente, sino en la forma que obliga la métrica del contínuo espacio-tiempo. Esta condición es posible satisfacerla para trayectorias en un espacio de cuatro coordenadas x_1, x_2, x_3, x_4, que serán llamadas coordenadas normales; son pseudo-euclidianas[14] y están relacionadas con las naturales por medio de la transformación lineal:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= (i/b)x, \\
x_2 &= (i/b)y, \\
x_3 &= (i/b)z, \\
x_4 &= -t/a, \qquad \qquad \ldots(3)
\end{aligned}
$$

siendo $i=\sqrt{-1}$; b es, por definición, una longitud constante, y a es, igualmente, un tiempo constante, de forma que las coordenadas normales no tienen dimensión. Las constantes anteriores deben satisfacer la relación: $(b^2/a^2)= c^2$, siendo c la velocidad de propagación que aparece en el postulado A. Como se verá en los desarrollos que siguen, la transformación lineal anterior es muy significativa, pues será inmediato identificar a a^2 con ε_0, y a b^2 con $1/\mu_0$, de forma que $(b^2/a^2)= (1/\varepsilon_0\mu_0)$, ya que ambos son iguales a c^2.

La función vectorial $\bar{P}'$ representa un espacio geométrico; las características que debe tener este espacio para representar el campo electromagnético, pueden dársele imponiendo restricciones a su elemento de arco, o sea, a su métrica. Las dos restricciones que debe obedecer son: que las funciones componentes sean ortogonales en cada punto regular del espacio, y que el movimiento represente el menor desplazamiento posible, es decir, que sea el más corto. El elemento de arco, en su expresión más general es:

$$
\begin{aligned}
ds^2 &= dP_1'^2 + dP_2'^2 + dP_3'^2 = \\
&= \left(\frac{\partial P_1'}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial P_1'}{\partial x_2}dx_2 + \frac{\partial P_1'}{\partial x_3}dx_3 + \frac{\partial P_1'}{\partial x_4}dx_4\right)^2 +
\end{aligned}
$$

$$+\left(\frac{\partial P_2'}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial P_2'}{\partial x_2}dx_2+\frac{\partial P_2'}{\partial x_3}dx_3+\frac{\partial P_2'}{\partial x_4}dx_4\right)^2+$$

$$+\left(\frac{\partial P_3'}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial P_3'}{\partial x_2}dx_2+\frac{\partial P_3'}{\partial x_3}dx_3+\frac{\partial P_3'}{\partial x_4}dx_4\right)^2. \qquad \ldots(4)$$

Al elevar al cuadrado las tres expresiones entre paréntesis y reacomodar términos, se puede expresar el elemento de arco en forma compacta como:

$$ds^2=\left[\frac{\partial P_1'}{\partial x_i}\frac{\partial P_1'}{\partial x_j}+\frac{\partial P_2'}{\partial x_i}\frac{\partial P_2'}{\partial x_j}+\frac{\partial P_3'}{\partial x_i}\frac{\partial P_3'}{\partial x_j}\right]dx_i\,dx_j\ ;\ i,j=1,2,3\ y\ 4.$$

Si además se define:

$$g_{ij}\equiv\left[\frac{\partial P_1'}{\partial x_i}\frac{\partial P_1'}{\partial x_j}+\frac{\partial P_2'}{\partial x_i}\frac{\partial P_2'}{\partial x_j}+\frac{\partial P_3'}{\partial x_i}\frac{\partial P_3'}{\partial x_j}\right], \qquad \ldots(5)$$

entonces $ds^2= g_{ij}dx_i dx_j$, haciendo uso de la conocida convención sobre índices repetidos. El tensor g_{ij} tiene dieciséis componentes, pero al satisfacer la condición de ortogonalidad, los elementos que se encuentran fuera de la diagonal, deberán ser nulos. Entonces se tiene que $g_{ij}= 0$ si $i\neq j$. El elemento de arco puede ahora escribirse como:

$$ds^2= g_{ii}dx_i dx_i,\ \text{siendo } i= 1,\ 2,\ 3\ y\ 4.$$

Considérese la siguiente parametrización:

$x_1= a+ pt,$

$x_2= b+ qt,$

$x_3= c+ rt,$ y

$x_4= d+ st.$ Siendo a, b, c, d, p, q, r y s constantes. El elemento de arco puede ahora expresarse sencillamente, si en la parametrización se hacen $p= q= r= s$, como:

$$ds^2=\left(\frac{\partial P_1'^2}{\partial x_1}+\frac{\partial P_2'^2}{\partial x_1}+\frac{\partial P_3'^2}{\partial x_1}\right)\left(\frac{\partial x_1}{\partial t}dt\right)^2+\left(\frac{\partial P_1'^2}{\partial x_2}+\frac{\partial P_2'^2}{\partial x_2}+\frac{\partial P_3'^2}{\partial x_2}\right)\left(\frac{\partial x_2}{\partial t}dt\right)^2+$$

$$+\left(\frac{\partial P_1'^2}{\partial x_3}+\frac{\partial P_2'^2}{\partial x_3}+\frac{\partial P_3'^2}{\partial x_3}\right)\left(\frac{\partial x_3}{\partial t}dt\right)^2+\left(\frac{\partial P_1'^2}{\partial x_4}+\frac{\partial P_2'^2}{\partial x_4}+\frac{\partial P_3'^2}{\partial x_4}\right)\left(\frac{\partial x_4}{\partial t}dt^2\right), \qquad \ldots(6)$$

donde por brevedad de escritura se ha utilizado:

$$\left(\frac{\partial P_i'}{\partial x_j}\right)^2\equiv\frac{\partial P_i'^2}{\partial x_j}.$$

$$ds^2 = \left[\frac{\partial P_1'}{\partial x_1}^2 + \frac{\partial P_2'}{\partial x_1}^2 + \frac{\partial P_3'}{\partial x_1}^2 + \frac{\partial P_1'}{\partial x_2}^2 + \frac{\partial P_2'}{\partial x_2}^2 + \frac{\partial P_3'}{\partial x_2}^2 + \frac{\partial P_1'}{\partial x_3}^2 + \frac{\partial P_2'}{\partial x_3}^2 + \frac{\partial P_3'}{\partial x_3}^2 + \frac{\partial P_1'}{\partial x_4}^2 + \frac{\partial P_2'}{\partial x_4}^2 + \frac{\partial P_3'}{\partial x_4}^2 \right] \alpha^2 dt^2$$

La expresión entre paréntesis es la traza del tensor g_{ii}, que llamaremos ω. La longitud del arco entre los puntos t_0 y t_1 puede expresarse como:

$$J_1 = \alpha \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\omega}\, dt.$$

Las geodésicas son curvas con arco de mínima longitud; la siguiente tarea es pues determinar las funciones $\bar{P}'$ que hagan estacionaria la funcional J_1. Por la parametrización empleada, las ecuaciones de Euler para la funcional anterior, son las mismas que para la funcional:

$$J_2 = \alpha \int_V \sqrt{\omega}\, dx_1 dx_2 dx_3 dx_4.$$

Por conveniencia, pero de forma equivalente, buscaremos las funciones $\bar{P}'$ que hagan estacionaria la funcional:

$$J = \int_V \omega\, dx_1 dx_2 dx_3 dx_4,$$

ya que por el teorema del valor medio J y J_2 difieren por el producto de un valor constante, el que no afecta a la ecuación de Euler.

Procediendo a aplicar a la función ω la ecuación de Euler, dada por (15):

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left\{\frac{\partial \omega}{\partial\left\{\frac{\partial P_1'}{\partial x_1}\right\}}\right\} + \frac{\partial}{\partial x_2}\left\{\frac{\partial \omega}{\partial\left\{\frac{\partial P_1'}{\partial x_2}\right\}}\right\} + \frac{\partial}{\partial x_3}\left\{\frac{\partial \omega}{\partial\left\{\frac{\partial P_1'}{\partial x_3}\right\}}\right\} + \frac{\partial}{\partial x_4}\left\{\frac{\partial \omega}{\partial\left\{\frac{\partial P_1'}{\partial x_4}\right\}}\right\} - \frac{\partial \omega}{\partial P_1'} = 0$$

habiendo ecuaciones idénticas para P_2' y P_3'. Para P_1' tendríamos:

$$2\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial P_1'}{\partial x_1} + 2\frac{\partial}{\partial x_2}\frac{\partial P_1'}{\partial x_2} + 2\frac{\partial}{\partial x_3}\frac{\partial P_1'}{\partial x_3} + 2\frac{\partial}{\partial x_4}\frac{\partial P_1'}{\partial x_4} = 0 \text{ , ó}$$

$$\frac{\partial^2 P_1'}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 P_1'}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 P_1'}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 P_1'}{\partial x_4^2} = 0$$

y las correspondientes ecuaciones para P_2' y P_3'. ...(9)

Para conocer la forma de las ecuaciones anteriores en el espacio de coordenadas naturales, es necesario aplicar la inversa de la transformación lineal (3):

$$x = \frac{b}{i} x_1 \qquad \frac{\partial x}{\partial x_1} = \frac{b}{i} \qquad \left(\frac{\partial x}{\partial x_1}\right)^2 = -b^2$$

$$y = \frac{b}{i} x_2 \qquad \frac{\partial y}{\partial x_2} = \frac{b}{i} \qquad \left(\frac{\partial y}{\partial x_2}\right)^2 = -b^2$$

$$z = \frac{b}{i} x_3 \qquad \frac{\partial z}{\partial x_3} = \frac{b}{i} \qquad \left(\frac{\partial z}{\partial x_3}\right)^2 = -b^2$$

$$t = -a x_4 \qquad \frac{\partial t}{\partial x_4} = -a \qquad \left(\frac{\partial t}{\partial x_4}\right)^2 = a^2 \qquad \ldots (10)$$

Para el primer término de la ecuación correspondiente a P_1, por ejemplo, tendríamos:

$$\frac{\partial^2 P_1'}{\partial x_1^2} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial P_1'}{\partial x_1}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial P_1'}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x_1}\right)\frac{\partial x}{\partial x_1} = \frac{\partial^2 P_1'}{\partial x^2}\left(\frac{\partial x}{\partial x_1}\right)^2 .$$

Y la ecuación completa de P_1 sería:

$$\frac{\partial^2 P_1'}{\partial x^2}\left(\frac{\partial x}{\partial x_1}\right)^2 + \frac{\partial^2 P_1'}{\partial y^2}\left(\frac{\partial y}{\partial x_2}\right)^2 + \frac{\partial^2 P_1'}{\partial z^2}\left(\frac{\partial z}{\partial x_3}\right)^2 + \frac{\partial^2 P_1'}{\partial t^2}\left(\frac{\partial t}{\partial x_4}\right)^2 = 0.$$

Sustituyendo los valores anteriores (10):

$$-b^2\left(\frac{\partial^2 P_1'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P_1'}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 P_1'}{\partial z^2}\right) + a^2\frac{\partial^2 P_1'}{\partial t^2} = 0.$$

Utilizando la relación:

$$\frac{b^2}{a^2} = c^2 \qquad \ldots (11)$$

y definiendo al operador:

$$\Box^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

la ecuación para la primera componente sería:

$$\Box^2 P_1' = 0$$

Como las otras componentes satisfacen iguales ecuaciones, las tres pueden expresarse vectorialmente como:

$$\Box^2 \bar{P}' = 0. \qquad \ldots (12)$$

Llamaré a la ecuación (12), condición de Hertz-Righi porque, como se verá más adelante, fueron ellos los primeros en utilizar, creo, el concepto de partir de una ecuación de movimiento para de ella obtener las ecuaciones del campo electromagnético.

Puesto que se ha elegido para su consideración, una región del espacio donde no se encuentran las fuentes de la perturbación, debe suponerse que la divergencia de $\bar{P}'$ es nula, entonces, de la relación:

$$\nabla \times \nabla \times \bar{P}' = \nabla(\nabla \cdot \bar{P}') - \nabla^2 \bar{P}' \qquad \ldots(13)$$

puede expresarse la condición de Hertz-Righi así:

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \bar{P}'}{\partial t^2} = -\nabla \times \nabla \times \bar{P}'. \qquad \ldots(14)$$

El campo electromagnético debe definirse, en términos del vector $\bar{P}'$, con las relaciones siguientes:

$$\bar{E} \equiv -\frac{\partial \bar{P}'}{\partial t} \qquad \ldots(15)$$

$$\bar{B} \equiv \nabla \times \bar{P}'. \qquad \ldots(16)$$

La ecuación de movimiento (14), con las definiciones anteriores, son en todo equivalentes a las ecuaciones de Maxwell-Hertz para el vacío sin cargas, ya que, con sencillas operaciones, se pueden obtener éstas a partir de las primeras. Derivando parcialmente respecto del tiempo la ecuación (16):

$$\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \bar{P}').$$

Como las derivadas espaciales y temporales conmutan, por las características exigidas a las funciones $\bar{P}'$, entonces:

$$\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} = \nabla \times \frac{\partial \bar{P}'}{\partial t},$$

y por (15), se obtiene una de las ecuaciones de Maxwell-Hertz:

$$\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} = -\nabla \times \bar{E} \qquad \ldots(17)$$

Derivando igualmente la ecuación (15):

$$\frac{\partial \bar{E}}{\partial t} = -\frac{\partial^2 \bar{P}'}{\partial t^2}$$

De la condición de Hertz-Righi (14) y de la definición (16), se obtiene otra de las ecuaciones buscadas:

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial \bar{E}}{\partial t} = \nabla \times \bar{B}. \qquad \ldots(18)$$

Al tomar la divergencia de la ecuación (15), y tomando en cuenta que la divergencia del vector $\bar{P}'$ es nula, se tiene:

$$\nabla\cdot\bar{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\nabla\cdot\bar{P}' = 0. \qquad \ldots(19)$$

Finalmente, al tomar la divergencia de la ecuación (16), como la divergencia de un rotacional es nula:

$$\nabla\cdot\bar{B} = 0. \qquad \ldots(20)$$

Las ecuaciones (17), (18), (19) y (20) son las ecuaciones de Maxwell-Hertz para el vacío sin cargas.

Los vectores $\bar{E}$ y $\bar{B}$ son vectores abstractos y su validez depende de la validez que tengan las relaciones macroscópicas que se obtengan a partir de ellos. Sabiendo que las ecuaciones de Maxwell-Hertz están ampliamente comprobadas en este sentido, puede pensarse que las definiciones de los campos a partir del vector $\bar{P}'$ se ha diseñado <u>ad-hoc</u> para obtenerlas, no habiendo justificación más profunda.Para poder ver que no es así, es necesario analizar qué otras posibilidades existen. Volviendo al punto de partida, la función ω, que es la traza del tensor g_{ii}:

$$\omega = \frac{\partial P_1'^2}{\partial x_1}+\frac{\partial P_1'^2}{\partial x_2}+\frac{\partial P_1'^2}{\partial x_3}+\frac{\partial P_1'^2}{\partial x_4}+\frac{\partial P_2'^2}{\partial x_1}+\frac{\partial P_2'^2}{\partial x_2}+\frac{\partial P_2'^2}{\partial x_3}+\frac{\partial P_2'^2}{\partial x_4}+\frac{\partial P_3'^2}{\partial x_1}+\frac{\partial P_3'^2}{\partial x_2}+\frac{\partial P_3'^2}{\partial x_3}+\frac{\partial P_3'^2}{\partial x_4} \qquad \ldots(21)$$

donde como antes se ha abreviado:

$$\left(\frac{\partial P_i'}{\partial x_j}\right)^2 \equiv \frac{\partial P_i'^2}{\partial x_j}$$

Al reagrupar términos, compensando adecuadamente aquellos añadidos dentro de los paréntesis, se tiene:

$$\begin{aligned}\omega = {} & \frac{\partial P_1'^2}{\partial x_4}+\left(\frac{\partial P_3'}{\partial x_2}-\frac{\partial P_2'}{\partial x_3}\right)^2+2\,\frac{\partial P_3'}{\partial x_2}\,\frac{\partial P_2'}{\partial x_3}+\\ & +\frac{\partial P_2'^2}{\partial x_4}+\left(\frac{\partial P_1'}{\partial x_3}-\frac{\partial P_3'}{\partial x_1}\right)^2+2\,\frac{\partial P_1'}{\partial x_3}\,\frac{\partial P_3'}{\partial x_1}+\\ & +\frac{\partial P_3'^2}{\partial x_4}\left(\frac{\partial P_2'}{\partial x_1}-\frac{\partial P_1'}{\partial x_2}\right)^2+2\,\frac{\partial P_2'}{\partial x_1}\,\frac{\partial P_1'}{\partial x_2}+\\ & +\left[\frac{\partial P_1'}{\partial x_1}+\frac{\partial P_2'}{\partial x_2}+\frac{\partial P_3'}{\partial x_3}\right]^2-2\,\frac{\partial P_1'}{\partial x_1}\,\frac{\partial P_2'}{\partial x_2}-2\,\frac{\partial P_1'}{\partial x_1}\,\frac{\partial P_3'}{\partial x_3}-\frac{\partial P_2'}{\partial x_2}\,\frac{\partial P_3'}{\partial x_3}.\end{aligned}$$

Vectorialmente la ecuación anterior se puede expresar como sigue:

$$\begin{aligned}\omega = {} & \left|\frac{\partial\bar{P}'}{\partial x_4}\right|^2+\left|\nabla\times\bar{P}'\right|^2+(\nabla\cdot\bar{P}')^2-2\left\{\left[\frac{\partial P_1'}{\partial x_1}\,\frac{\partial P_2'}{\partial x_2}-\frac{\partial P_2'}{\partial x_1}\,\frac{\partial P_1'}{\partial x_2}\right]+\right.\\ & \left.+\left[\frac{\partial P_1'}{\partial x_1}\,\frac{\partial P_3'}{\partial x_3}-\frac{\partial P_3'}{\partial x_1}\,\frac{\partial P_1'}{\partial x_3}\right]+\left[\frac{\partial P_2'}{\partial x_2}\,\frac{\partial P_3'}{\partial x_3}-\frac{\partial P_3'}{\partial x_2}\,\frac{\partial P_2'}{\partial x_3}\right]\right\}. \qquad \ldots(22)\end{aligned}$$

El operador ∇ , como es aquí evidente, opera con las tres primeras coordenadas, las que corresponden al espacio; cuando se refiera a las cuatro coordenadas se hará notar.

Lo que resulta sumamente importante del desarrollo anterior, es que las últimas tres expresiones entre corchetes, cada una separadamente, son nulas cuando se les aplica la ecuación de Euler. Ello significa que pueden añadirse o quitarse a una densidad de Lagrangiano, sin alterar las ecuaciones de movimiento que de ésta se derivan. Por ello, la función ω es equivalente a $\bar{E}^2 - \bar{B}^2$ cuando se trata del vacío sin cargas. Para comprobar lo anterior, se puede aplicar la ecuación de Euler a la primera expresión. Si definimos por razones de espacio:

$$[\;] \equiv \left[\frac{\partial P_1'}{\partial x_1}\frac{\partial P_2'}{\partial x_2} - \frac{\partial P_2'}{\partial x_1}\frac{\partial P_1'}{\partial x_2}\right],$$

la ecuación de Euler será:

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left\{\frac{\partial[\;]}{\partial\left\{\frac{\partial P_1'}{\partial x_1}\right\}}\right\} + \frac{\partial}{\partial x_2}\left\{\frac{\partial[\;]}{\partial\left\{\frac{\partial P_1'}{\partial x_2}\right\}}\right\} + \frac{\partial}{\partial x_3}\left\{\frac{\partial[\;]}{\partial\left\{\frac{\partial P_1'}{\partial x_3}\right\}}\right\} + \frac{\partial}{\partial x_4}\left\{\frac{\partial[\;]}{\partial\left\{\frac{\partial P_1'}{\partial x_4}\right\}}\right\} - \frac{\partial[\;]}{\partial P_1'} = 0.$$

Al operar la derivada entre corchetes:

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left\{\frac{\partial P_2'}{\partial x_2}\right\} + \frac{\partial}{\partial x_2}\left\{-\frac{\partial P_2'}{\partial x_1}\right\} + \frac{\partial}{\partial x_3}\left\{0\right\} + \frac{\partial}{\partial x_4}\left\{0\right\} - 0 = 0$$

y como las derivadas conmutan:

$$\frac{\partial^2 P_2'}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial^2 P_2'}{\partial x_2 \partial x_1} = 0,$$

como se quería demostrar.

Resulta claro en este caso, donde la divergencia del vector $\bar{P}'$ es nula, que los únicos elementos que quedan en la función ω , que es la que debe definir a los campos son dos. Pueden entonces definirse los campos en la forma empleada, o la contraria, pero no hay más opciones. Las definiciones aquí utilizadas, (15) y (16), las usó por primera vez Fresnel, y las otras McCullagh.[16]

Finalmente, es conveniente aclarar que para el caso del campo electromagnético en el vacío sin cargas, y únicamente en este caso, es posible obtener las ecuaciones de Maxwell-Hertz de la ecuación (14), y con las definiciones siguientes de los campos:

$$\bar{E} \equiv -\frac{\partial^{(n+1)}\bar{P}'}{\partial t^{(n+1)}}$$

$$\bar{B} \equiv \nabla\times\frac{\partial^{n}\bar{P}'}{\partial t^{n}} \quad ; \quad n = 0, 1, 2, \ldots \qquad \ldots(24)$$

O bien, a partir de:

$$\bar{E} \equiv (\nabla\times)^{(n+1)}\,\bar{P}'$$

$$\bar{B} \equiv \frac{1}{c^2}(\nabla\times)^{n}\frac{\partial\bar{P}'}{\partial t} ; \quad n = 0,1,2\ldots \qquad \ldots(25)$$

$$(\nabla\times)^{0} = 1$$

$$(\nabla\times)^{n} = \nabla_1\times\nabla_2\times\cdots\times\nabla_n$$

III

C A M P O   E L E C T R O M A G N E T I C O
E N   E L   V A C I O   C O N   C A R G A S

1- La expresión más general.

En el capítulo anterior se ha considerado una región del espacio donde se encontraba una perturbación electromagnética en la que, sin embargo, no se localizaban sus fuentes. En el presente, las fuentes deberán ser consideradas, pero el comportamiento del vector $\bar{P}'$, y consecuentemente, el de los campos $\bar{E}$ y $\bar{B}$ deberá ser el mismo. De esta manera se garantiza que al anular en las expresiones que resulten los términos que describan a las fuentes, se reduzcan a las obtenidas antes, reflejando así en las ecuaciones, lo considerado para los espacios.

Para representar a las fuentes se utilizará una función vectorial $\bar{S}$ a la que debe suponerse, en todos los puntos regulares del espacio y del tiempo, univaluada y continua. Entonces,

$$\bar{S}= (S_x, S_y, S_z)= (S_1, S_2, S_3), \text{ y, además,}$$
$$S_1= S_1(x, y, z, t),$$
$$S_2= S_2(x, y, z, t),$$
$$S_3= S_3(x, y, z, t).$$

En el capítulo anterior se consideró que la función $\bar{P}'$ representaba desplazamiento de la posición de equilibrio por unidad de tiempo. Su dimensión es entonces la de una velocidad, y en virtud de la condición de continuidad impuesta a la función $\bar{P}'$, puede asegurarse la existencia de una función $\bar{P}$, cuya derivada parcial respecto del tiempo sea $\bar{P}'$.[17] Tendríamos entonces:

$$\frac{\partial \bar{P}}{\partial t} = \bar{P}'. \qquad \ldots(26)$$

La función $\bar{P}$ es la que, como antes y con las mismas definiciones, representará a los campos. El espacio conjunto de $\bar{P}$ y $\bar{S}$ conforma un sistema en el que existen causa y efecto, lo que permitirá aplicar la tercera ley de Newton entre ambas funciones. Así, si nos encontramos con una función que las contenga a ambas, la derivada de esta tercera función respecto de, por ejemplo, $\bar{S}$, será igual, pero de signo opuesto, que la derivada de la función respecto de $\bar{P}$.

Cuando se considera que el elemento de volumen $dx_1dx_2dx_3dx_4$ tiende a cero, en alguna región del espacio, consecuentemente, el elemento de arco, en esa región, tiende también a cero. Ese elemento de arco que tiende a cero en el espacio de coordenadas normales, representa una onda esférica con centro en el punto que corresponde al centro del volumen, en el espacio de coordenadas naturales, cuyo frente se desplaza respecto de este punto con la velocidad $\underline{c}$. El postulado B plantea que no debe existir nada que se desplace a una velocidad mayor que ésta, en el espacio de coordenadas naturales, por lo que, creo, es aceptable suponer que la divergencia espacial del vector $\bar{P}$, considerada dentro de una integral de volumen en el espacio de coordenadas normales, sea constante, o sea:

$$\int_v \nabla \cdot \bar{P}\, dx_1 dx_2 dx_3 dx_4 = cte. \qquad \ldots(27)$$

En las conclusiones se verá que, al fundirse campos y fuentes en un solo espacio geométrico, es posible considerar la divergencia tetradimensional de un vector $\overline{P}$ de cuatro componentes.[18]

La función $\overline{S}$ definirá a los campos, en la forma que se verá más adelante, en el espacio de coordenadas naturales. Como la ecuación de Euler ha sido aplicada en el espacio de coordenadas normales, se llamará $\overline{S}^*$ la forma de la función $\overline{S}$ en ese espacio, ya que podría diferir por alguna constante. Entonces se tendría:

$$\int \omega \, dx_1 dx_2 dx_3 dx_4 = \int S^{*2} dx_1 dx_2 dx_3 dx_4,$$

y la funcional que las funciones $\overline{P}$ y $\overline{S}^*$ deben hacer estacionaria es:

$$J = \int (\omega - S^{*2}) \, dx_1 dx_2 dx_3 dx_4 . \qquad \ldots (28)$$

Además, como condición subsidiaria tendrá que cumplirse con:

$$\int (\nabla \cdot \overline{P})^2 dx_1 dx_2 dx_3 dx_4 = cte. \qquad \ldots (29)$$

La función a la que ahora hay que aplicar la ecuación de Euler, que se distinguirá con la letra Ω, es:

$$\Omega = \left(\frac{\partial P_1}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial P_2}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial P_3}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial P_1}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial P_2}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial P_3}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial P_1}{\partial x_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial P_2}{\partial x_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial P_3}{\partial x_3}\right)^2$$
$$+ \left(\frac{\partial P_1}{\partial x_4}\right)^2 + \left(\frac{\partial P_2}{\partial x_4}\right)^2 + \left(\frac{\partial P_3}{\partial x_4}\right)^2 - S_1^{*2} - S_2^{*2} - S_3^{*2} - \lambda \left(\frac{\partial P_1}{\partial x_1} + \frac{\partial P_2}{\partial x_2} + \frac{\partial P_3}{\partial x_3}\right)^2 \qquad \ldots (30)$$

En atención a los resultados que se obtendrán, puede hacerse $\lambda = 1$. Aplicando la ecuación (8) a la función anterior, y recordando lo convenido:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial P_1} = - \frac{\partial \Omega}{\partial S_1^*}, \; etc. \qquad \ldots (31)$$

para P_1 se tiene:

$$2 \frac{\partial}{\partial x_1}\left[\frac{\partial P_1}{\partial x_1} - \left(\frac{\partial P_1}{\partial x_1} + \frac{\partial P_2}{\partial x_2} + \frac{\partial P_3}{\partial x_3}\right)\right] + 2\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial P_1}{\partial x_2}\right) + 2\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial P_1}{\partial x_3}\right) + 2\frac{\partial}{\partial x_4}\left(\frac{\partial P_1}{\partial x_4}\right) - 2S_1^* = 0$$

o bien:

$$\frac{\partial^2 P_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 P_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 P_1}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 P_1}{\partial x_4^2} - \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial P_1}{\partial x_1} + \frac{\partial P_2}{\partial x_2} + \frac{\partial P_3}{\partial x_3}\right) = S_1^*$$

y en forma similar para las otras dos componentes P_2 y P_3:

$$\frac{\partial^2 P_2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 P_2}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2 P_2}{\partial x_3^2}+\frac{\partial^2 P_2}{\partial x_4^2}-\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial P_1}{\partial x_1}+\frac{\partial P_2}{\partial x_2}+\frac{\partial P_3}{\partial x_3}\right)=S_2^*$$

$$\frac{\partial^2 P_3}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 P_3}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2 P_3}{\partial x_3^2}+\frac{\partial^2 P_3}{\partial x_4^2}-\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial P_1}{\partial x_1}+\frac{\partial P_2}{\partial x_2}+\frac{\partial P_3}{\partial x_3}\right)=S_3^*$$

Al hacer uso de la transformación lineal (10):

$$-b^2\frac{\partial^2 P_1}{\partial x^2}-b^2\frac{\partial^2 P_1}{\partial y^2}-b^2\frac{\partial^2 P_1}{\partial z^2}+a^2\frac{\partial^2 P_1}{\partial t^2}+b^2\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial P_1}{\partial x}+\frac{\partial P_2}{\partial y}+\frac{\partial P_3}{\partial z}\right)=S_1$$

$$-b^2\frac{\partial^2 P_2}{\partial x^2}-b^2\frac{\partial^2 P_2}{\partial y^2}-b^2\frac{\partial^2 P_2}{\partial z^2}+a^2\frac{\partial^2 P_2}{\partial t^2}+b^2\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial P_1}{\partial x}+\frac{\partial P_2}{\partial y}+\frac{\partial P_3}{\partial z}\right)=S_2$$

$$-b^2\frac{\partial^2 P_3}{\partial x^2}-b^2\frac{\partial^2 P_3}{\partial y^2}-b^2\frac{\partial^2 P_3}{\partial z^2}+a^2\frac{\partial^2 P_3}{\partial t^2}+b^2\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial P_1}{\partial x}+\frac{\partial P_2}{\partial y}+\frac{\partial P_3}{\partial z}\right)=S_3.$$

La expresión vectorial de las tres ecuaciones anteriores es:

$$a^2\frac{\partial^2\bar{P}}{\partial t^2}-b^2\nabla^2\bar{P}+\nabla(\nabla\cdot\bar{P})=\bar{S}$$

Haciendo uso de la definición:

$$(b^2/a^2)=c^2,\ \text{y de que} \qquad \ldots(32)$$

$$b^2=(1/\mu_0),$$

y haciendo uso de la relación vectorial (13), se obtiene la ecuación:

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\bar{P}}{\partial t^2}=-\nabla\times\nabla\times\bar{P}+\mu_0\bar{S}. \qquad \ldots(33)$$

La ecuación anterior es la forma que tiene la condición de Hertz-Righi para el campo electromagnético en el vacío con cargas. El vector $\bar{S}$ determina las fuentes por medio de las definiciones:

$$\nabla\cdot\bar{S}=-\rho \qquad \ldots(34)$$

$$\frac{\partial\bar{S}}{\partial t}=\bar{j}\ . \qquad \ldots(35)$$

Los campos están definidos, como antes, por las relaciones (15) y (16), que en virtud de (26):

$$\bar{E}=-\frac{\partial\bar{P}'}{\partial t}=-\frac{\partial^2\bar{P}}{\partial t^2} \qquad \ldots(36)$$

$$\bar{B}=\nabla\times\bar{P}'=\nabla\times\frac{\partial\bar{P}}{\partial t}, \qquad \ldots(37)$$

La ecuación (33) es, a mi parecer, la expresión más concisa del campo electromagnético en el vacío con cargas. Las identificaciones que se hacen con las definiciones (34-37) entre elementos de la función $\bar{P}$-$\bar{S}$ representada por Ω , con los nombres comúnmente usados, $\bar{E}$, $\bar{B}$, ρ y $\bar{j}$, es puramente simbólica. Se podría igualmente usar otras letras para denotar esos conceptos, pero si se usaran simplemente:

$$-\frac{\partial^2 \bar{P}}{\partial t^2}, \quad \nabla \times \frac{\partial \bar{P}}{\partial t}, \quad -\nabla \cdot \bar{S}, \quad \frac{\partial \bar{S}}{\partial t},$$

para señalar esos mismos conceptos, entonces la ecuación (33) comprendería todo; dos de las ecuaciones de Maxwell-Hertz:

$$\nabla \cdot \bar{B} = 0 \qquad ,y$$

$$\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} = -\nabla \times \bar{E}$$

estarían expresadas en forma obvia como:

$$\nabla \cdot \left(\nabla \times \frac{\partial \bar{P}}{\partial t}\right) = 0 \qquad , y$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla \times \frac{\partial \bar{P}}{\partial t}\right) = \nabla \times \frac{\partial^2 \bar{P}}{\partial t^2} .$$

Claro que empíricamente todas las relaciones matemáticas existentes tienen que ser igualmente confirmadas pues, de lo contrario habría inconsistencia entre la teoría y la práctica. Pero todas las relaciones conocidas entre $\bar{E}$, $\bar{B}$, ρ y $\bar{j}$ están igualmente contenidas en la ecuación (33), es decir, las ecuaciones de Maxwell-Hertz, los potenciales $\bar{A}$ y ϕ , etc. Este es nuestro próximo tema.

2- Las ecuaciones de Maxwell-Hertz.

A partir de la ecuación de movimiento, o condición de Hertz-Righi:

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \bar{P}}{\partial t^2} = -\nabla\times\nabla\times\bar{P} + \mu_0\bar{S}, \qquad \ldots(33)$$

y de las identificaciones simbólicas:

$$\bar{E} \equiv -\frac{\partial^2 \bar{P}}{\partial t^2} \quad \ldots(36) \qquad \rho \equiv -\nabla\cdot\bar{S} \quad \ldots(34)$$

$$\bar{B} \equiv \nabla\times\frac{\partial\bar{P}}{\partial t} \quad \ldots(37) \qquad \bar{J} \equiv \frac{\partial\bar{S}}{\partial t} \quad \ldots(35)$$

la obtención de las ecuaciones de Maxwell-Hertz es una cuestión puramente operativa: derivando parcialmente respecto del tiempo la ecuación (36) y sustituyendo en su segundo miembro el resultado de la multiplicación de la ecuación (33) por c^2, se tiene:

$$\frac{\partial\bar{E}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}\left(-c^2\nabla\times\nabla\times\bar{P} + \mu_0 c^2\bar{S}\right) = c^2\nabla\times\nabla\times\frac{\partial\bar{P}}{\partial t} - \mu_0 c^2\frac{\partial\bar{S}}{\partial t}$$

y al sustituir en la ecuación anterior las definiciones (37) y (35):

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial\bar{E}}{\partial t} = \nabla\times\bar{B} - \mu_0\bar{J} \qquad \ldots(38)$$

Derivando igualmente la ecuación (37):

$$\frac{\partial\bar{B}}{\partial t} = \nabla\times\frac{\partial^2\bar{P}}{\partial t^2}.$$

Al sustituir la definición (36)

$$\frac{\partial\bar{B}}{\partial t} = -\nabla\times\bar{E} \qquad \ldots(39)$$

Al tomar la divergencia de (36), y sustituyendo de (33):

$$\nabla\cdot\bar{E} = \nabla\cdot\left(+c^2\nabla\times\nabla\times\bar{P} - c^2\mu_0\bar{S}\right).$$

Como la divergencia de un rotacional es nula, el primer término del segundo miembro es cero, y el segundo, por (34) y (32):

$$\nabla\cdot\bar{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad \ldots(40)$$

Al tomar la divergencia de (37), se obtiene:

$$\nabla\cdot\bar{B} = 0. \qquad \ldots(41)$$

Las ecuaciones (38), (39), (40) y (41) son las ecuaciones de

Maxwell-Hertz para el campo electromagnético en el vacío con cargas, expresadas en el sistema m. k. s. racionalizado[19].

Puede entonces afirmarse que las ecuaciones de Maxwell-Hertz son lo mismo que la ecuación (33) mediante la equivalencia simbólica expresada por las definiciones (34-37).

IV

POTENCIALES SUPLEMENTARIOS

1- Solución de la condición de Hertz-Righi.

La ecuación de Hertz-Righi para el vacío con cargas, (33), es de las del tipo que se encuentra en el estudio de las deformaciones del cuerpo sólido[20]. El método clásico de solución, sin embargo, no puede aplicarse en esta ocasión; consiste en separar las partes solenoidales de las lamelares, tomando primero la divergencia de toda la ecuación y, después, la rotación. Como no está definido el rotacional del vector $\bar{S}$, no puede entonces aplicarse este método, pero si pueden separarse las soluciones en forma tal que conducen a los potenciales vectorial $\bar{A}$ y escalar φ , como partes integrantes del potencial general $\bar{P}$.

Al aplicar la relación vectorial (13) a la ecuación de Hertz-Righi tenemos:

$$\Box^2 \bar{P} = \nabla(\nabla\cdot\bar{P}) - \mu_0 \bar{S}. \qquad \ldots(42)$$

Considerando al vector $\bar{P}$ compuesto de dos partes tales que $\bar{P} = \bar{P}_1 + \bar{P}_2$, satisfaciendo separadamente P_1 y P_2 las ecuaciones:

$$\Box^2 \bar{P}_1 = -\mu_0 \bar{S} \qquad \ldots(43)$$

$$\Box^2 \bar{P}_2 = \nabla(\nabla\cdot\bar{P}), \qquad \ldots(44)$$

se habrá resuelto la ecuación (42), por la linealidad del D'Alembertiano. La solución es ahora posible en función de la densidad de corriente y de la carga. Derivando (43) parcialmente respecto del tiempo y usando la definición (35), se tiene:

$$\frac{\partial}{\partial t}\Box^2 \bar{P}_1 = \Box^2 \frac{\partial \bar{P}_1}{\partial t} = -\mu_0 \frac{\partial \bar{S}}{\partial t} = -\mu_0 \bar{j} \quad \text{, o sea:}$$

$$\Box^2 \frac{\partial \bar{P}_1}{\partial t} = -\mu_0 \bar{j} \qquad \text{...(45)}$$

cuya solución es:

$$\frac{\partial \bar{P}_1}{\partial t} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_v \frac{[\bar{j}]}{r}\, dv', \qquad \text{...(46)}$$

indicándose, como es usual, con los paréntesis cuadrados, que se trata de la solución retardada[21]. Conocida la densidad de corriente, queda determinada entonces la parte $\bar{P}_1$ del potencial $\bar{P}$.

Queda por resolver la ecuación (44). Para ello se necesita eliminar el término que contiene a $\bar{P}$, lo que se consigue tomando la divergencia de la ecuación (33), y usando la definición (34):

$$\nabla\cdot\frac{\partial^2 \bar{P}}{\partial t^2} = -\nabla\cdot(c^2\nabla\times\nabla\times\bar{P}) + c^2\mu_0\,\nabla\cdot\bar{S} = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho$$

derivando dos veces con respecto al tiempo la ecuación (44), se obtiene:

$$\Box^2\frac{\partial^2 \bar{P}_2}{\partial t^2} = \nabla\left(\nabla\cdot\frac{\partial^2 \bar{P}}{\partial t^2}\right)$$

Al sustituir en esta ecuación lo obtenido en la anterior, se tiene:

$$\Box^2\frac{\partial^2 \bar{P}_2}{\partial t^2} = -\frac{1}{\varepsilon_0}\nabla\rho \qquad \text{...(47)}$$

Esta ecuación indica que el vector $\frac{\partial^2 \bar{P}_2}{\partial t^2}$ es irrotacional y por ello derivable de un potencial. Puede entonces definirse $\wp$ como:

$$\frac{\partial^2 \bar{P}_2}{\partial t^2} \equiv \nabla\wp \qquad \text{...(48)}$$

Utilizando lo expresado por (48) en (47):

$$\Box^2\nabla\wp = -\frac{1}{\varepsilon_0}\nabla\rho \quad .$$

Analizando la ecuación anterior por componentes, puede verse que como las derivadas conmutan, también lo hacen los operadores del primer término. La ecuación anterior es equivalente a la siguiente[22]:

$$\nabla\left(\Box^2\varphi + \frac{1}{\varepsilon_0}\rho\right) = 0$$

De las posibles soluciones de la ecuación anterior, expresadas como:

$$\Box^2\varphi + \frac{1}{\varepsilon_0}\rho = \zeta \ , \quad \nabla\zeta = 0$$

la que debe elegirse es aquélla en la que la función ζ es nula, pues la ecuación debe poder representar el caso en el que el valor de la fuente sea cero, y como el valor de la función ζ es el mismo siempre, debe ser cero. Entonces:

$$\Box^2\varphi = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho \qquad \ldots(49)$$

La solución de esta ecuación es la que ya fue utilizada en (46). Conocida la carga, puede conocerse el potencial φ, y, por la relación (48), se puede conocer la parte $\bar{P}_2$ que faltaba, del potencial $\bar{P}$.

Las partes en que se dividió al potencial $\bar{P}$, no son del todo independientes; deben estar acopladas cumpliendo una cierta relación, que para el caso entre $\bar{P}_1$ y $\bar{P}_2$ se obtiene tomando la divergencia de la ecuación (43), y comparando el resultado con (49):

$$\nabla\cdot\Box^2\bar{P}_1 = \Box^2\nabla\cdot\bar{P}_1 = -\mu_0\nabla\cdot\bar{S}$$

$$\Box^2\nabla\cdot\bar{P}_1 = \mu_0\rho$$

de donde se sigue la igualdad:

$$\frac{1}{\mu_0}\nabla\cdot\bar{P}_1 = -\varepsilon_0\varphi$$

y al dividir por $1/\mu_0$ queda:

$$\nabla\cdot\bar{P}_1 + \frac{1}{c^2}\varphi = 0 \qquad \ldots(50)$$

Esta expresión corresponde a la condición de Lorentz entre los potenciales $\bar{A}$ y φ, como se verá en la sección siguiente. Al tomar el gradiente de la ecuación anterior, utilizando (48), se tiene:

$$\nabla(\nabla\cdot\bar{P}_1) + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\bar{P}_2}{\partial t^2} = 0.$$

2- Los potenciales $\bar{A}$ y φ .

Los potenciales $\bar{A}$ y φ , se sabe que deben satisfacer ecuaciones de onda no homogéneas cuyos términos independientes son, para la primera la densidad de corriente y para la segunda la carga. Observando entonces las ecuaciones (45) y (49), es inmediato establecer las siguientes relaciones:

$$\bar{A} = \frac{\partial \bar{P}_1}{\partial t} \qquad \ldots(51)$$

$$\nabla \varphi = \frac{\partial^2 \bar{P}_2}{\partial t^2} \qquad \ldots(48)$$

Debe observarse que el potencial escalar había ya sido elegido como tal en la sección anterior. Como consecuencia de estas definiciones, y en comparación con las ya mencionadas ecuaciones (45) y (49), tenemos:

$$\Box^2 \bar{A} = -\mu_0 \bar{j} \qquad \ldots(51')$$

$$\Box^2 \varphi = -\frac{1}{\varepsilon_0} \rho . \qquad \ldots(49)$$

Derivando la ecuación (50) respecto al tiempo, y utilizando la definición (51), se obtiene la condición de Lorentz:

$$\nabla \cdot \bar{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 \qquad \ldots(52)$$

La ecuación de continuidad de la carga es satisfecha por la misma definición de carga y corriente en función del vector $\bar{S}$. Derivando con respecto del tiempo la ecuación (34), tomando la divergencia de la ecuación (35) y sumándolas:

$$\nabla \cdot \bar{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \qquad \ldots(53)$$

De (36), sustituyendo en $\bar{P}$, la suma de $\bar{P}_1$ y $\bar{P}_2$ tenemos:

$$\bar{E} = -\frac{\partial^2 \bar{P}}{\partial t^2} = -\frac{\partial^2 \bar{P}_1}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \bar{P}_2}{\partial t^2} ,$$

por (48) y (51), finalmente queda:

$$\bar{E} = -\frac{\partial \bar{A}}{\partial t} - \nabla \varphi. \qquad \text{...(54)}$$

Haciendo lo correspondiente para la definición de $\bar{B}$, (37):

$$\bar{B} = \nabla \times \frac{\partial \bar{P}}{\partial t} = \nabla \times \frac{\partial \bar{P}_1}{\partial t} + \nabla \times \frac{\partial \bar{P}_2}{\partial t}$$

como se ha visto que el vector $\bar{P}_2$ es irrotacional (47), por (51):

$$\bar{B} = \nabla \times \bar{A}. \qquad \text{...(55)}$$

3- E l p o t e n c i a l d e H e r t z .

Este potencial se deriva de $\bar{P}$ eliminando de todas las expresiones a la componente $\bar{P}_2$ al utilizar las ecuaciones (48) y (50).

Hertz en su artículo Sobre las fuerzas de las oscilaciones eléctricas, tratadas de acuerdo a la teoría de Maxwell,[23] dice: "...Entonces nosotros afirmamos que si Π es una función cualquiera de x, y, z, t que satisface la ecuación

$$A^2 \frac{\partial^2 \Pi}{\partial t^2} = \nabla^2 \Pi,$$

y si... [siguen definiciones de los campos similares a las de McCullagh] ...el sistema ...es una posible solución de nuestras ecuaciones... [las de Maxwell] ".

Augusto Righi presentó en la sesión de la R. Accademia delle Scienze dell' Istituto di Bologna del 24 de febrero de 1901, con posterioridad a Hertz, un razonamiento similar, aunque por lo que se desprende de su siguiente afirmación, sin conocimiento del trabajo de éste: "El vector característico [da la misma definición que Hertz para Π] , no ha de confundirse con el potencial vectorial, y no ha sido hasta ahora tomado en consideración por otros".

Righi introduce su artículo como sigue: "Partiendo de las ecuaciones fundamentales del campo electromagnético bajo la forma simétrica que les dió Hertz, se empieza por hacer la importantísima observación de que la integración de las mismas, se puede reconducir a la búsqueda de tres funciones especiales Π_x, Π_y, Π_z las cuales pueden considerarse como componentes de un vector que provisionalmente se llamará vector característico... cada una de las tres funciones debe ser una solución de la ecuación

$$\nabla^2 \Pi = A^2 \frac{\partial^2 \Pi}{\partial t^2}$$

siendo A la inversa de la velocidad de propagación de las perturbaciones electromagnéticas en el caso del éter libre.

Conocido el vector característico, con sencillas derivaciones se obtienen las componentes... del campo eléctrico y del campo magnético, merced a las fórmulas

$$\bar{E} = -\nabla\times\nabla\times\Pi$$

$$\bar{B} = A\frac{\partial}{\partial t}\nabla\times\Pi \qquad ."^{24}$$

Se debe observar que ambos autores consideran el problema en el éter libre, o sea, en el vacío sin cargas. Como se ha visto en las ecuaciones (24) y (25), las definiciones de los campos en este caso pueden hacerse de infinitas maneras; sin embargo, Righi emplea las correctas para el vacío con cargas.

Stratton, respecto de este vector dice: "Fue mostrado por Hertz que, bajo condiciones ordinarias, es posible definir un campo electromagnético en términos de una sola función vectorial... La solución general se debe a Righi... Entonces podemos afirmar que <u>toda solución de la ecuación vectorial</u>

$$\nabla\times\nabla\times\Pi - \nabla\nabla\cdot\Pi + \mu\varepsilon\frac{\partial^2 \Pi}{\partial t^2} = 0$$

<u>determina un campo electromagnético a través de</u>

$$\bar{B} = \mu\varepsilon\,\nabla\times\frac{\partial \Pi}{\partial t}\ ,\quad \bar{E} = \nabla\nabla\cdot\Pi - \mu\varepsilon\frac{\partial^2 \Pi}{\partial t^2} \qquad ."^{25}$$

La definición más amplia del vector de Hertz para el caso del vacío con cargas, que he encontrado, es la siguiente:

Ecuación de movimiento

$$\Box^2 \bar{Z} = -\mu_0 \bar{S},$$

Definición de fuentes:

$$\nabla \cdot \bar{S} = -\rho$$

$$\frac{\partial \bar{S}}{\partial t} = \bar{j}$$

Definición de los campos:

$$\bar{E} = c^2 \nabla \times \nabla \times \bar{Z} - \frac{1}{\varepsilon_0} \bar{S}$$

$$\bar{B} = \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \bar{Z} \qquad .26$$

Por la ecuación de movimiento que satisface, el potencial de Hertz se identifica con $\bar{P}_1$. La función $\bar{S}$ y las definiciones de las fuentes en términos de ella, son las mismas que se utilizaron en el capítulo III. Lo que impide que la expresión del campo electromagnético en el vacío con cargas por medio del vector de Hertz sea completa, es que se ha eliminado la parte que corresponde a $\bar{P}_2$, y a que hay una mezcla entre definiciones y ecuación de movimiento que no permite llegar a una expresión covariante de las ecuaciones de campo.

4- Otra definición posible de los campos $\bar{E}$ y $\bar{B}$.

Partiendo de la ecuación de onda no homogénea para un vector cualquiera $\bar{R}$:

$$\Box^2 \bar{R} = -\mu_0 \bar{S}, \qquad \ldots(56)$$

pueden definirse los campos $\bar{E}$ y $\bar{B}$ en función de $\bar{R}$, de forma que se generen las ecuaciones de Maxwell-Hertz. Considérense las siguientes definiciones:

$$\bar{E} = -\frac{\partial^2 \bar{R}}{\partial t^2} + c^2 \nabla(\nabla\cdot\bar{R}) \qquad \ldots(57)$$

$$\bar{B} = \frac{\partial}{\partial t}(\nabla\times\bar{R}). \qquad \ldots(58)$$

Derivando la primera respecto al tiempo:

$$\frac{\partial \bar{E}}{\partial t} = -\frac{\partial^3 \bar{R}}{\partial t^3} + c^2 \nabla\left(\nabla\cdot\frac{\partial \bar{R}}{\partial t}\right).$$

Derivando la ecuación (56) también respecto al tiempo, y usando la definición (35) tenemos:

$$\nabla^2 \frac{\partial \bar{R}}{\partial t} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^3 \bar{R}}{\partial t^3} = -\mu_0 \bar{j}$$

Sustituyendo el último resultado en la ecuación inmediata anterior, tenemos:

$$\frac{\partial \bar{E}}{\partial t} = -c^2 \nabla^2 \frac{\partial \bar{R}}{\partial t} + c^2 \nabla\left(\nabla\cdot\frac{\partial \bar{R}}{\partial t}\right) - \frac{1}{\varepsilon}\bar{j}$$

Haciendo uso de la relación vectorial (13), esta ecuación se puede transformar en:

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial \bar{E}}{\partial t} = \nabla\times\nabla\times\frac{\partial \bar{R}}{\partial t} - \mu_0 \bar{j}.$$

Utilizando la definición (58), finalmente tenemos:

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial \bar{E}}{\partial t} = \nabla\times\bar{B} - \mu_0 \bar{j} \qquad \ldots(59)$$

Derivando la ecuación (58) respecto al tiempo:

$$\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} = \nabla\times\frac{\partial^2 \bar{R}}{\partial t^2}.$$

Al añadir la cantidad nula:

$$-c^2 \nabla \times (\nabla \nabla \cdot R),$$

$$\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} = \nabla \wedge \left[\frac{\partial^2 \bar{R}}{\partial t^2} - c^2 \nabla (\nabla \cdot R) \right],$$

y por la definición (57):

$$\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} = -\nabla \times \bar{E}. \qquad \ldots (60)$$

Al tomar la divergencia de (57) y de (56) tenemos:

$$\nabla \cdot \bar{E} = -\frac{\partial^2}{\partial t^2} \nabla \cdot \bar{R} + c^2 \nabla \cdot [\nabla \nabla \cdot R] = -\frac{\partial^2}{\partial t} \nabla \cdot \bar{R} + c^2 \nabla^2 (\nabla \cdot R)$$

$$\nabla^2 (\nabla \cdot \bar{R}) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \nabla \cdot \bar{R} = -\mu_0 \nabla \cdot \bar{S} = \mu_0 \rho$$

multiplicando la última por c^2, y sustituyendo una en otra, tenemos:

$$\nabla \cdot \bar{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho \qquad \ldots (61)$$

Al tomar la divergencia de (58) tenemos:

$$\nabla \cdot \bar{B} = 0 \qquad \ldots (62)$$

Las ecuaciones (59), (60), (61) y (62) son las ecuaciones de Maxwelll para el vacío con cargas.

V

ANTECEDENTES

Existe una opinión bastante generalizada entre físicos y estudiosos de la epistemología, de que las ecuaciones de Maxwell son la expresión última y más sencilla que se puede obtener del campo electromagnético. Al respecto dice Cassirer: "...Las ecuaciones de Maxwell y Hertz ... son para nosotros el objeto primario alcanzable del conocimiento físico, están colocadas como la última realidad esencial que podemos obtener. La idea del éter como de una substancia de la que no se puede tener experiencia, está excluida por la teoría de la relatividad para dar expresión conceptual sólo a las propiedades puras del conocimiento empírico."[27]

Por su parte, Born y Wolf afirman en su texto: "Maxwell mismo y sus seguidores, trataron por mucho tiempo de describir el campo electromagnético con la ayuda de modelos mecánicos. Fue sólo gradualmente, al hacerse los conceptos de Maxwell más familiares, que la búsqueda de una 'explicación' de sus ecuaciones en términos de modelos mecánicos, fue abandonada; hoy no hay dificultad conceptual en referirse al campo de Maxwell como algo que no puede ser reducido a nada más simple."[28]

Aun cuando en los desarrollos presentados en los capítulos II y III no hubiésemos partido de los postulados A y B, se vería que las definiciones de los campos utilizadas en ellas, conducen a convertir el lagrangiano comúnmente utilizado para la obtención de las ecuaciones en una expresión que es la suma de cuadrados perfectos y que se puede transformar en la ecuación (22). Así pues, aun cuando no partiésemos de los postulados A y B, las definiciones presentadas nos conducirían inexorablemente a una interpretación puramente geométrica del campo electromagnético, y entonces no podríamos, ni en esas circunstancias, aceptar a las ecuaciones de Maxwell como "algo que no puede ser reducido a nada más simple". Una interpretación geométrica es mucho más simple que la aceptación ciega de unas relaciones misteriosas entre vectores. Aunque esta interpretación esencialmente no es nueva en el ámbito de la electrodinámica, el derecho a ella parece estarle negado: "Dos cosas acerca de la gravitación impactan al novato por extrañas. Una es la debilidad de la interacción; la otra es su interpretación como de una manifestación de la geometría Riemanniana. Es verdaderamente notable que todas las otras fuerzas sean tratadas como efectos de la interacción entre partículas, o cuando muchos Bosones están involucrados como en el efecto de los campos clásicos, y que solamente la gravitación es distinguida con el honor de una interpretación geométrica."[29]

Las ecuaciones de Maxwell-Hertz para el vacío con cargas se expresan con mayor frecuencia en la forma en que han sido utilizadas aquí, o sea las relaciones vectoriales (38), (39), (40) y (41). También pueden expresarse, aunque menos frecuentemente, como un lagrangiano; respecto a éste dice Rohrlich: "La funcional L [en $I = \int L\, dx_1 dx_2 dx_3 dx_4$] debe ser el lagrangiano que, via el principio de Hamilton de mínima acción, proporciona las ecuaciones del campo electromagnético. Nuestra primera tarea es por tanto encontrar L de tal forma que las ecuaciones de campo de Maxwell-Lorentz, tomen la forma [usual] .

No hay una receta general para determinar el lagrangiano que vaya a proporcionar un conjunto dado de ecuaciones... Su determinación exacta es, en el último análisis, un trabajo de tanteo educado. Una teoría involucra necesariamente el establecimiento de un conjunto de ecuaciones básicas. El principio de Hamilton y el lagrangiano asociado son un pensamiento posterior, una construcción post-facto por la que estas ecuaciones pueden reducirse a un principio variacional; lo último es a menudo considerado más bonito. Físicamente, no añade nada que no esté contenido en las ecuaciones básicas."[31]

Otra forma de plantear las ecuaciones de campo es a través de otro principio variacional que se deriva de las expresiones de las fuerzas entre partículas cargadas que ocurren como acciones a distancia; pero de ella cabría decir otro tanto que lo antes citado de Rohrlich.[32]

En realidad, lo que verdaderamente es difícil es desligar resultados físicos de planteamientos geométricos. Ya en 1845 Stokes nos decía: "La proposición de este artículo es... puramente geométrica y puede enunciarse así: 'Suponiendo al espacio, o a cualquier porción del espacio, lleno con un número infinito de puntos que se mueven en cualquier forma de manera continua, reteniendo su identidad, examinar la naturaleza del movimiento instantáneo de una porción elemental de estos puntos'...".[33] Langevin hace también una definición geométrica del éter: "El éter será para nosotros un medio continuo y homogéneo, en cada punto del cual se pueden superponer dos modificaciones caracterizadas respectivamente por dos magnitudes dirigidas, el campo eléctrico y el campo magnético."[34]

Stokes desarrolla su planteamiento, con el que obtiene un conocido resultado, como sigue: considérense dos puntos cercanos O y P; en el primero se instala el origen de coordenadas cartesianas rectangulares, teniendo entonces el punto P coordenadas (x, y, z). Transcurrido un tiempo infinitesimal, nos dice, se comparan las posiciones relativas de O y P; si el vector (ξ, η , ζ) representa el desplazamiento sufrido como consecuencia del movimiento de un punto cualquiera del medio, los cambios en las posiciones de O y P, las denotaremos por ξ_0 , η_0 , ζ_0 y ξ , η , ζ respectivamente. La expansión del desplazamiento de P relativo a O, según la fórmula de Taylor[35], da :

$$\xi = \xi_0 + + \frac{\partial \xi}{\partial x} x + \frac{\partial \xi}{\partial y} y + \frac{\partial \xi}{\partial z} z + \cdots$$

$$\eta = \eta_0 + \frac{\partial \eta}{\partial x} x + \frac{\partial \eta}{\partial y} y + \frac{\partial \eta}{\partial z} z + \cdots$$

$$\zeta = \zeta_0 + \frac{\partial \zeta}{\partial x} x + \frac{\partial \zeta}{\partial y} y + \frac{\partial \zeta}{\partial z} z + \cdots$$

donde los puntos suspensivos indican que por estar próximos O y P se desprecian los términos cuadráticos en las derivadas parciales y los términos superiores a éstos. Cabe señalar que este desarrollo debe coincidir con el desarrollo de $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$, si $\xi = \xi(x, y, z)$, etc., para valores infinitesimales de x, y, z.

Disponiendo los términos pares separadamente de los impares,[36] se obtiene el conocido resultado que Stokes resume así: "... el movimiento instántaneo más general de una porción elemental de un fluído está compuesto por un movimiento de translación, un movimiento de rotación, un movimiento de dilatación uniforme, y dos movimientos cortantes de la clase antes mencionada."[37]

La descomposición de un campo vectorial en la suma de una divergencia y un rotacional, está relacionada con los nombres de Stokes, Clebsh y de Helmholtz.

La interpretación mecánica del éter, por otra parte, condujo a la búsqueda de un lagrangiano que proporcionase las ecuaciones de la óptica, búsqueda que es más antigua que las ecuaciones de Maxwell. Ya en 1840 McCullagh decía: "Sean x,y,z las coordenadas rectángulares de una partícula antes de ser disturbada, y $x+\xi$, $y+\eta$, $z+\zeta$ sus coordenadas en el tiempo t, los desplazamientos ξ, η, ζ siendo funciones de x, y, z, t. Sea la densidad del éter, que es la misma en todos los medios, unitaria, de forma que dxdydz pueda, en cualquier momento, representar indistintamente el elemento de volumen o de masa. Entonces la ecuación de movimiento será de la forma:

$$\iiint dx\,dy\,dz\left(\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}\delta\xi+\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2}\delta\eta+\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2}\delta\zeta\right)=\iiint dx\,dy\,dz\,\delta V$$

donde V es alguna función que depende de las acciones mutuas de las partículas."[38]

Larmor expone estos conceptos de McCullagh, como sigue: "Requerimos primero construir un esquema dinámico para el éter libre cuando no hay moléculas materiales presentes. Es por supuesto un medio elástico: supongamos que está prácticamente en reposo, y hagamos que el vector (ξ, η, ζ) represente al desplazamiento, elástico u otro, de su substancia en el punto (x, y, z) que proviene de la tensión que existe en él. Suponemos (para ser verificados aquí después de los resultados del análisis) para su energía cinética T y su energía potencial W las expresiones

$$T=\frac{1}{2}A\int(\dot{\xi}+\dot{\eta}+\dot{\zeta})\,d\tau$$
$$W=\frac{1}{2}B\int(f^2+g^2+h^2)\,d\tau$$

en las que $d\tau$ denota al elemento de volumen, A y B son constantes, la primera una constante de inercia, la última un módulo de elasticidad, y en la que (f, g, h) es un vector definido respecto de su modalidad de cambio por la relación

$$(\dot{f}, \dot{g}, \dot{h}) = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial\dot{\zeta}}{\partial y} - \frac{\partial\dot{\eta}}{\partial z}, \frac{\partial\dot{\xi}}{\partial z} - \frac{\partial\dot{\zeta}}{\partial x}, \frac{\partial\dot{\eta}}{\partial x} - \frac{\partial\dot{\xi}}{\partial y}\right), \quad \ldots(\mathrm{I}),$$

donde 4π es insertado para ir de acuerdo con el uso eléctrico ordinario.

Esta definición hace

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z} = 0$$

de forma que (f, g, h) es un vector solenoidal.

Para obtener las ecuaciones dinámicas de este medio, tenemos que desarrollar la ecuación variacional

$$\delta \int (T - W)\, d\tau = 0$$

sujeta a que el tiempo de movimiento permanezca sin variación." Después de realizar las operaciones, concluye: "Esto da, de la integral de volumen, las ecuaciones de vibración o propagación de onda

$$\frac{B}{4\pi}\left(\frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial z}, \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial h}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right) = -A(\ddot{\xi}, \ddot{\eta}, \ddot{\zeta}) \ldots(\mathrm{II})$$

Los sistemas de ecuaciones (I) y (II) a los que así se ha llegado, resultan idénticos en forma con las ecuaciones circuitales de Maxwell que expresan el trabajo electrostático y electrodinámico del éter libre, si $(\dot{\xi}, \dot{\eta}, \dot{\zeta})$ representa la inducción magnética y (f, g, h) el desplazamiento del éter, de tal manera que $B/A = 16\pi^2 c^2$ donde c es la velocidad de la radiación. Estas son también idénticas a las ecuaciones ópticas de MacCullagh, la investigación aquí dada es de hecho debida a él."[39]

Como ya se apuntó antes, en el caso del vacío sin cargas o del éter libre, cuya consideración se acaba de transcribir, las definiciones de los campos $\bar{E}$ y $\bar{B}$ pueden hacerse, básicamente, de dos maneras distintas según las ecuaciones (24) o (25), debido a que la condición de Hertz-Righi no contiene el término de las fuentes. Corresponde a Fresnel, como se ha dicho antes, el haber utilizado las definiciones de los campos correctas para el caso del vacío con cargas; así lo expresa O'Rahilly en su emotivo libro sobre electrodinámica.[40]

Se ha visto cómo Larmor encasqueta los títulos de energía cinética y energía potencial a dos expresiones, en virtud de los resultados a que quiere llegar,utilizando el principio de mínima acción. Su actitud, entonces, no es muy distinta de la que antes nos ha descrito Rohrlich.

Sobre las deducciones de las ecuaciones de los campos a partir de principios mecánicos, opina Cassirer: "En lugar de preguntarnos acerca de las propiedades o de la constitución del éter como de una cosa real, la pregunta debe ser hecha de con qué derecho uno busca una substancia particular con propiedades materiales particulares y con una constitución mecánica definida... 'Uno no puede definir', dice L.Poincaré, 'al éter por propiedades materiales sin cometer una falacia real... El éter está definido cuando conocemos los dos campos que pueden existir en él, los campos eléctrico y magnético, en su magnitud y en su dirección en cada punto. Los dos campos pueden cambiar; por costumbre hablamos de un movimiento que se propaga en el éter; pero los fenómenos accesibles al experimento son la propagación de estos cambios'."[41]

Al proseguir el análisis, con objeto de identificar su procedencia y así quitarle el calificativo, hasta ahora bien puesto, de post facto, y siguiendo lo expresado por L.Poincaré, o sea habiendo superado el deseo de una interpretación mecánica del mismo, resta intentar la interpretación geométrica. Hay que señalar entonces que, a partir del lagrangiano que proporciona las ecuaciones del campo para el vacío sin cargas, añadiendo según se necesite términos nulos vis a vis la ecuación de Euler, ecuación (22) y siguientes, y utilizando las definiciones de los campos (36) y (37), o, si el lagrangiano está dado en términos de los potenciales $\bar{A}$ y φ , usando entonces las relaciones (51) y (48) se puede convertir el lagrangiano en una suma de cuadrados de derivadas, como la expresión (21). En esta forma se convierte el lagrangiano en ds^2 de la función $\bar{P}$, la cual, ya se ha visto, implica un desplazamiento a lo largo de una línea geodésica en un espacio de cuatro componentes ortogonales. La extensión de estos conceptos al caso del vacío con cargas, expuesto en el capítulo III, es solamente una extensión de ideas.

Aunque por un camino distinto, y sin la utilización del vector único $\bar{P}$, Dirac vierte conceptos similares en su artículo A new classical theory of electrons: "La forma usual de introducir cargas en la teoría es trayendo al esquema matemático variables dinámicas adicionales que describen a los electrones, y añadiendo términos adecuados que involucran estas variables con la integral de acción. Una forma más sencilla y más directa es usar las variables superfluas en la teoría sin cargas con el propósito de describir las cargas, y no introducir nuevas variables de ninguna forma. Las transformaciones de escala deben ser entonces anuladas, pues mientras permanezcan, las variables superfluas de la teoría sin cargas tendrán que continuar sin tener significado físico.

Estudiemos la forma relativista más sencilla de destruir las transformaciones de escala, es decir, imponiendo la condición subsidiaria

$$A_\mu A^\mu = K^2 \qquad \ldots(9)$$

donde K es una constante universal. Veremos que esta condición es la única suposición que necesitamos hacer para que aparezcan electrones clásicos en la teoría.

La condición (9) debe ser impuesta a los potenciales en el principio de acción

$$\left[\delta \int \mathcal{L}\, dx_1 dx_2 dx_3 dx_4 = 0, \ \text{y} \ \ \mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right]$$

Podemos tomarlo en cuenta convenientemente añadiendo un término a L, para hacerlo

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\lambda \left(A_\mu A^\mu - k^2 \right) \qquad \ldots (10)$$

donde λ es una función desconocida, que puede ser tratada como una cantidad adicional del campo.

Las ecuaciones de campo que se siguen del nuevo principio de acción $\left[\delta \int \mathcal{L}\, dx_0 dx_1 dx_2 dx_3 \right]$ y (10) son (9) y

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = \lambda A_\mu \qquad \ldots (11)$$

Vemos que debemos identificar la densidad de carga eléctrica $\bar{j}_\mu$ como

$$\bar{j}_\mu = -\lambda A_\mu \qquad \ldots (12)$$

y entonces (11) da correctamente la generalización de la ecuación de Maxwell $\left[\partial F_{\mu\nu}/\partial x_\nu = 0 \right]$ para la presencia de cargas. De (11) y (12) se sigue la conservación de la carga eléctrica

$$\frac{\partial \bar{j}_\mu}{\partial x_\mu} = 0$$

Las ecuaciones (9) y (11) son las ecuaciones de campo fundamentales de la teoría."[42]

El lagrangiano utilizado por Dirac,

$$\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = \frac{1}{2} |E|^2 - \frac{c^2}{2} |\bar{B}|^2$$

es el mismo que utilizó McCullagh en su desarrollo hace casi ciento cincuenta años; Dirac lo usa, sin embargo, como una densidad de lagrangiano, o sea bajo una integral cuádruple con elemento $dx_1 dx_2 dx_3 dx_4$.

De la ecuación (9) del texto de Dirac, que califica como una de las ecuaciones fundamentales de la teoría, llega a la ecuación (12) que relaciona linealmente al vector de la carga con el potencial generalizado. Recordando que parte del potencial vectorial contenido en A^{μ} es la derivada temporal del vector $\bar{P}_1$, según la ecuación (51), y que así mismo la parte correspondiente del vector de carga es la derivada temporal del vector $\bar{S}$, según la ecuación (35), llegamos a concluir que la ecuación (12) de Dirac mencionada, es una igualdad del vector $\bar{P}$ con el vector $\bar{S}$, de signo contrario, tal como se supuso en el capítulo III exigiendo la relación entre $\bar{S}$ y $\bar{P}$ regida por la tercera ley de Newton.

Otra forma de aplicación de la tercera ley de Newton, <u>de facto</u>, que frecuentemente se utiliza para dar entrada a las cargas en las ecuaciones de campo, añadiéndose al lagrangiano es la expresión:

$$j_{\mu} A^{\mu} \quad .$$ [43]

Sobre el mismo asunto, en una carta dirigida al editor de <u>Nature</u>, manifiesta Dirac: "Recientemente yo he expuesto una nueva teoría de electrodinámica en la que los potenciales A_{μ} están restringidos por:

$$A_{\mu} A^{\mu} = k^2,$$

donde k es una constante universal. De la continuidad de A_o [corresponde a ϕ , véase cap. VII] vemos que ésta debe tener siempre el mismo signo y que lo podemos tomar positivo. Podemos entonces poner

$$k^{-1} A_{\mu} = v_{\mu} \quad \ldots (2)$$

y obtener v_{μ} satisfaciendo

$$v_o^2 - v_1^2 - v_2^2 - v_3^2 = 1, \; v_o > 0.$$

Estas v_{μ} definen una velocidad.

Su significación física en la teoría es que si hay alguna carga debe fluir con esta velocidad, y en regiones donde no hay carga es la velocidad con que una pequeña carga tendría que fluir si fuese introducida.

Tenemos ahora la velocidad (2) en todos los puntos del espacio tiempo, jugando una parte fundamental en electrodinámica. Es natural referirse a ella como a la velocidad de alguna cosa física real. Así, con la nueva teoría de electrodinámica estamos más bien obligados a tener un éter."[44] Y en efecto, como lo expresa la ecuación (51), $\bar{A}$ se identifica con la velocidad local de $\bar{P}_1$. Entonces, el sugestivo comentario de Dirac nos reconduce a McCullagh, Larmor, Stokes, Fresnel, Lodge, Whittaker, y tantos otros.

VI

LA TEORIA DE LOS ELECTRONES

1- Introducción.

Se ha mostrado que a partir de la definición de dos funciones continuas sobre el espacio-tiempo, es posible describir al campo electromagnético haciendo que estas funciones obedezcan las condiciones geométricas que se desprenden del contenido de los postulados A y B. Se ha tratado de mantener una nítida separación entre los conceptos derivados de la función $\bar{P}$, que básicamente representan los campos, de los conceptos derivados del vector $\bar{S}$, que representan cargas y corrientes. También se vió que la existencia separada e independiente de ϵ_o y μ_o proviene de la consideración del continuo espacio-tiempo, como un espacio que es imagen de otro de cuatro componentes, entre las que no hay distinciones, mediante la transformación afín (3). Es deseable mantener esta misma postura cuando se analiza el campo electromagnético en presencia de materiales, pero ello llevaría a la negación de los vectores $\bar{D}$ y $\bar{H}$, lo que sería para muchos difícil de aceptar.

El propósito de traer aquí la llamada Teoría de los Electrones, es el de obtener la expresión de las ecuaciones del campo electromagnético en presencia de materiales a partir de las del vacío con cargas.

Ello no sería más que un trabajo de transcripción del artículo del fundador de la teoría, Lorentz, titulado The fundamental equations for electromagnetic phenomena in ponderable bodies, deduced from the theory of electrons, sin mayor interés. Trataré entonces de obtener una derivación a partir de las funciones $\bar{P}$ y $\bar{S}$, para también así mantener separados los conceptos de campos y fuentes.

Siguiendo entonces a Lorentz: "Al enmarcar una teoría que busque explicar todos los fenómenos electromagnéticos que no tengan lugar en el éter libre, por medio de partículas cargadas pequeñas, electrones, tenemos que empezar por dos tipos de ecuaciones, unas que relacionan los cambios de estado en el éter, otras que determinan las fuerzas ejercidas por este medio sobre los electrones. A estas fórmulas tenemos que añadir suposiciones elegidas apropiadamente sobre los electrones que existen en los dieléctricos, conductores y substancias magnetizables, y las fuerzas con que las partículas materiales actúan sobre los electrones en estos varios casos.

Si fuera posible, por medio de nuestras observaciones, penenetrar en la estructura molecular de un cuerpo material, que contuviese un número inmenso de partículas cargadas, deberíamos percibir dentro y entre ellas un campo electromagnético, cambiando muy rápidamente y en la mayoría de los casos muy irregularmente de un punto a otro. Este es el campo al que las ecuaciones [(38), (39), (40) y (41)] deben aplicarse, pero no es el campo que nuestras observaciones nos revelan. Realmente, todos los fenómenos observados dependen del estado promedio de las cosas en espacios que contienen un muy grande número de partículas; las expresiones matemáticas apropiadas para tales fenómenos no contendrán entonces las mismas cantidades que aparecen en las fórmulas [citadas] sino solamente sus valores medios. Por supuesto, las dimensiones del espacio para el que se van a tomar estos valores, aunque muy grande si se compara con las distancias mutuas entre partículas vecinas, deben al mismo tiempo ser mucho más pequeñas que la distancia que uno debe recorrer en el cuerpo para observar un cambio perceptible en su estado. Podemos expresar esto diciendo que las dimensiones deben ser <u>físicamente infinitamente pequeñas</u>."[45]

2- Definición del valor medio de una función.

La mayor discrepancia que aparece en la definición de valor medio en las diversas presentaciones de la teoría de los electrones, es la de considerar el promedio en una región espacial en un cierto instante, o considerarlo en una región espacial en un intervalo de tiempo con una duración determinada.

Uno de los trabajos más influyentes sobre el tema, a excepción del de Lorentz, es el de R.Becker, Théorie des Electrons;[46] en el que se define el valor medio de una función como sigue: "Sea f(x,y, z, t) una de las funciones muy irregulares del espacio y del tiempo que figuran en... [ecuaciones (38), (39), (40) y (41)] ; uno puede concebir la media buscada de la manera siguiente. Si $\bar{f}$ debe representar a la media en el punto x, y, z, en el instante t, construimos, alrededor del punto x, y, z como centro, una esfera de radio a, y elegimos además un intervalo de tiempo determinado τ . El valor medio del espacio y del tiempo en el interior de la esfera a y por el intervalo de tiempo que va de t- τ a t+ τ , está dado entonces por

$$\bar{f}(x,y,z,t) = \frac{1}{\frac{4}{3}a^3 2\tau}\int_{\vartheta=-\tau}^{\vartheta=\tau}\iiint_{\xi^2+\eta^2+\zeta^2\le a} f(x+\xi,y+\eta,z+\zeta,t+\tau)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta\,d\vartheta."\quad ."[47]$$

Rosenfeld todavía en 1950, fecha de su prólogo a la primera edición de Theory of Electrons, utiliza esta misma definición de valor medio aun cuando, en la introducción al segundo capítulo dice: "Ahora presentaremos los fundamentos de la teoría de los electrones esencialmente como fueron establecidos por H.A.Lorentz (1895)."[48] Lorentz, sin embargo, utiliza como se verá más adelante, un promedio espacial en un instante. Probablemente la afirmación de Rosenfeld ha creado confusiones ulteriores: se dice en un artículo de 1953, "... Como es bien sabido Lorentz (1902) fue el primero en dar una derivación de las ecuaciones de Maxwell en cuerpos materiales, a partir de las ecuaciones fundamentales de su teoría de los electrones al promediar las cantidades de los campos microscópicos sobre regiones físicamente infinitesimales de espacio y de tiempo. Este procedimiento ha, con sólo pequeñas modificaciones, sido adoptado por varios autores. En su reciente monografía sobre la teoría de los electrones Rosenfeld ha dado una muy cuidadosa exposición de esta derivación, la que está basada de nuevo sobre el mismo tipo de procedimiento para promediar."[49] Sin embargo Lorentz, en el artículo a que se hace referencia de 1902,dice: "Sea P un punto cualquiera en el cuerpo y σ una superficie cerrada físicamente infinitamente pequeña de la cual P es el centro. Entonces definiremos el valor medio en el punto P de una cantidad escalar o vectorial A por la ecuación

$$\bar{A} = \frac{1}{S}\int A\, d\tau,$$

en la que la integración tiene que extenderse a todos los elementos del espacio S, encerrado por σ . Debe entenderse que, si deseamos calcular los valores medios para diferentes puntos P, P', los espacios correspondientes S, S' son tomados iguales, de la misma forma y en la misma posición relativa de P, P'. El resultado $\bar{A}$ dependerá de las coordenadas del punto considerado; sin embargo, los cambios rápidos mencionados antes, habrán desaparecido de ella; son solamente los cambios lentos de un punto a otro, que corresponden a los cambios perceptibles en el estado del cuerpo, los que habrán sido preservados en el valor medio."[50]

Las definiciones de Becker y de Lorentz pueden, sin embargo, considerarse equivalentes ya que conducen a idénticos resultados. En consecuencia, utilizaré aquí la siguiente definición de valor medio: si $\bar{F}(x, y, z, t)$ es una función definida en una región alrededor del punto (x, y, z), el valor medio de $\bar{F}$ en el instante $t= t_o$ está dado por la expresión

$$\langle \bar{F}(x,y,z,t) \rangle = \frac{1}{V} \int_V \bar{F}(x+\xi, y+\eta, z+\zeta, t_o)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta \qquad \ldots(63)$$

Una propiedad muy importante de la definición anterior es que la operación de promediar conmuta con la operación de derivar. Sea ∂_{x_i} la derivación parcial respecto de una variable independiente cualquiera; entonces:

$$\partial_{x_i} \langle \bar{F}(x,y,z,t) \rangle = \frac{1}{V} \partial_{x_i} \int_V \bar{F}(x+\xi, y+\eta, z+\zeta, t_o)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta.$$

Como los límites de la integral no dependen explícitamente de la variable x_i, pues están dados por ξ, η, ζ, entonces:

$$\partial_{x_i} \langle \bar{F}(x,y,z,t) \rangle = \frac{1}{V} \int \partial_{x_i} \bar{F}(x+\xi, y+\eta, z+\zeta, t_o)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta = \langle \partial_{x_i} \bar{F} \rangle \qquad \ldots(64)$$

3- Valores medios de las funciones que intervienen en las ecuaciones del campo electromagnético.

La ecuación de movimiento (33), y las definiciones de los campos y de las fuentes (34), (35), (36) y (37) definen totalmente al campo electromagnético en el vacío con cargas. Dentro de los cuerpos materiales deberemos considerar, siguiendo lo expresado por Lorentz, que las funciones $\bar{P}$ y $\bar{S}$ sufren grandes variaciones de un punto a otro. Así, serán estas funciones las que tendrán que promediarse. Los promedios de las componentes de la función $\bar{P}$ proporcionarán los valores macroscópicos de los campos. Para promediar la función $\bar{S}$ habrá que considerar todos los movimientos que es capaz de realizar, e identificarlos con las características conocidas en los cuerpos, como el momento dipolar, el magnético y la corriente.

Consecuentemente pueden definirse los campos macroscópicos de la siguiente manera:

$$\bar{E}_{macro} = \langle \bar{E}_{micro} \rangle = -\langle \frac{\partial^2 \bar{P}}{\partial t^2} \rangle \qquad \text{...(65)}$$

$$\bar{B}_{macro} = \langle \bar{B}_{micro} \rangle = \langle \nabla \times \frac{\partial \bar{P}}{\partial t} \rangle \qquad \text{...(66)}$$

Así es claro que los vectores macroscópicos $\bar{E}$ y $\bar{B}$ se originan exclusivamente en sus valores microscópicos.

Al tomar la divergencia de (66) y utilizando (64) se tiene:

$$\nabla \cdot \bar{B}_{macro} = \nabla \cdot \langle \nabla \times \frac{\partial \bar{P}}{\partial t} \rangle = \langle \nabla \cdot \nabla \times \frac{\partial \bar{P}}{\partial t} \rangle$$

$$\nabla \cdot \bar{B}_{macro} = 0 \qquad \text{...(67)}$$

Derivando (66) respecto del tiempo, y utilizando (64) se tiene:

$$\frac{\partial \bar{B}_{macro}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \langle \nabla \times \frac{\partial \bar{P}}{\partial t} \rangle = \langle \nabla \times \frac{\partial^2 \bar{P}}{\partial t^2} \rangle = \nabla \times \langle \frac{\partial^2 \bar{P}}{\partial t^2} \rangle$$

$$\frac{\partial \bar{B}_{macro}}{\partial t} = -\nabla \times \bar{E}_{macro} \qquad \text{...(68)}$$

Las ecuaciones (67) y (68) son dos de las ecuaciones macroscópicas del electromagnetismo para cuerpos en reposo. Han sido obtenidas exclusivamente de definiciones, sin la intervención de la ecuación del movimiento, o sea, sin la intervención del vector $\bar{S}$. Será entonces necesario obtener los valores promedio de los términos de la ecuación de movimiento:

$$\frac{1}{c^2}\left\langle \frac{\partial^2 \bar{P}}{\partial t^2} \right\rangle = -\langle \nabla\times\nabla\times\bar{P}\rangle + \mu_0 \langle \bar{S}\rangle \qquad \ldots(33)$$

El promedio del primer miembro es obtenido de la definición (65); el promedio del primer término del segundo miembro puede obtenerse de (66), haciendo uso de (64). Se reduce entonces el problema a obtener el valor medio del vector $\bar{S}$, para lo cual debe aplicarse la definición (63); tenemos:

$$\langle S_1(x,y,z,t_0)\rangle = \frac{1}{V}\int_V S_1(x+\xi, y+\eta, z+\zeta, t_0)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta$$

Como las coordenadas del punto interno del cuerpo en donde está colocado el centro del diferencial de volumen $d\xi\, d\eta\, d\zeta$ son mucho mayores que el radio de la esfera $\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}$, es factible hacer un desarrollo de Taylor de la función en torno al punto (x, y, z). Tendríamos para la primera componente, por ejemplo;

$$\langle S_1\rangle = \frac{1}{V}\int_V \left[S_1 + \xi\frac{\partial S_1}{\partial x} + \eta\frac{\partial S_1}{\partial y} + \zeta\frac{\partial S_1}{\partial z} + \cdots \right] d\xi\, d\eta\, d\zeta =$$

$$= \frac{1}{V}\int_V S_1\, d\xi\, d\eta\, d\zeta + \frac{1}{V}\int_V \frac{\partial S_1}{\partial x}\xi\, d\xi\, d\eta\, d\zeta + \frac{1}{V}\int_V \frac{\partial S_1}{\partial y}\eta\, d\xi\, d\eta\, d\zeta + \frac{1}{V}\int_V \frac{\partial S_1}{\partial z}\zeta\, d\xi\, d\eta\, d\zeta =$$

$$= S_1 + \frac{1}{2}V\xi^2\eta\zeta\frac{\partial S_1}{\partial x} + \frac{1}{2}V\xi\eta^2\zeta\frac{\partial S_1}{\partial y} + \frac{1}{2}V\xi\eta\zeta^2\frac{\partial S_1}{\partial z} + \cdots =$$

$$\langle S_1\rangle = S_1 + \frac{1}{2}\xi\frac{\partial S_1}{\partial x} + \frac{1}{2}\eta\frac{\partial S_1}{\partial y} + \frac{1}{2}\zeta\frac{\partial S_1}{\partial z} + \cdots$$

Y en forma similar,

$$\langle S_2\rangle = S_2 + \frac{1}{2}\xi\frac{\partial S_2}{\partial x} + \frac{1}{2}\eta\frac{\partial S_2}{\partial y} + \frac{1}{2}\zeta\frac{\partial S_2}{\partial z} + \cdots$$

$$\langle S_3\rangle = S_3 + \frac{1}{2}\xi\frac{\partial S_3}{\partial x} + \frac{1}{2}\eta\frac{\partial S_3}{\partial y} + \frac{1}{2}\zeta\frac{\partial S_3}{\partial z} + \cdots$$

Reagrupando términos, sumando y restando cantidades iguales, por ejemplo para S_1, $\frac{1}{4}\left(\frac{\partial S_2}{\partial x} + \frac{\partial S_2}{\partial x}\right)$, tendríamos:

$$\langle S_1\rangle = S_1 + \frac{1}{2}\xi\frac{\partial S_1}{\partial x} + \frac{1}{4}\left[\left(\frac{\partial S_1}{\partial y} - \frac{\partial S_2}{\partial x}\right)\eta + \left(\frac{\partial S_1}{\partial z} - \frac{\partial S_3}{\partial x}\right)\zeta\right] + \frac{1}{4}\left[\left(\frac{\partial S_1}{\partial y} + \frac{\partial S_2}{\partial x}\right)\eta + \left(\frac{\partial S_1}{\partial z} + \frac{\partial S_3}{\partial x}\right)\zeta\right]\cdots$$

$$\langle S_2\rangle = S_2 + \frac{1}{2}\eta\frac{\partial S_2}{\partial y} + \frac{1}{4}\left[\left(\frac{\partial S_2}{\partial x} - \frac{\partial S_1}{\partial y}\right)\xi + \left(\frac{\partial S_2}{\partial z} - \frac{\partial S_3}{\partial y}\right)\zeta\right] + \frac{1}{4}\left[\left(\frac{\partial S_2}{\partial x} + \frac{\partial S_1}{\partial y}\right)\xi + \left(\frac{\partial S_2}{\partial z} + \frac{\partial S_3}{\partial y}\right)\zeta\right]\cdots$$

$$\langle S_3\rangle = S_3 + \frac{1}{2}\zeta\frac{\partial S_3}{\partial z} + \frac{1}{4}\left[\left(\frac{\partial S_3}{\partial x} - \frac{\partial S_1}{\partial z}\right)\xi + \left(\frac{\partial S_3}{\partial y} - \frac{\partial S_2}{\partial z}\right)\eta\right] + \frac{1}{4}\left[\left(\frac{\partial S_3}{\partial x} + \frac{\partial S_1}{\partial z}\right)\xi + \left(\frac{\partial S_3}{\partial y} + \frac{\partial S_2}{\partial z}\right)\eta\right]\cdots \quad \ldots(69)$$

El segundo término en las tres expresiones anteriores debe identificarse con el momento dipolar de la unidad de volumen del cuerpo $\bar{\mathbb{P}}$, en atención a que la divergencia de $\bar{S}$ debe identificarse con la carga según la ecuación (34), por lo que nos encontramos en este término con un producto de carga por longitud, correspondiente a la definición de momento dipolar.

El tercer término corresponde a la expresión vectorial

$$(\nabla\times\bar{S})\times K, \qquad K = (\xi, \eta, \zeta)$$

En forma vectorial se tiene, entonces, el valor medio de la función $\bar{S}$ expresado, como:

$$\langle\bar{S}\rangle = \bar{S}_{macro} + \bar{\mathbb{P}}_{mac} + \frac{1}{4}(\nabla\times\bar{S}_{macro})\times\bar{K}. \qquad \ldots(70)$$

4- E c u a c i o n e s p a r a m e d i o s m a t e r i a l e s e n r e p o s o .

Dos de las ecuaciones de Maxwell-Hertz para el campo electromagnético para medios materiales en reposo, fueron obtenidas en la sección anterior, (67) y (68), a partir, exclusivamente, de las definiciones de los campos en función de $\bar{P}$ y de los valores macroscópicos como valores promedio de los campos $\bar{E}$ y $\bar{B}$. Para obtener las otras dos ecuaciones, hay que derivar parcialmente respecto del tiempo la ecuación:

$$\frac{1}{c^2}\left\langle \frac{\partial^2 \bar{P}}{\partial t^2}\right\rangle = -\langle \nabla\times\nabla\times\bar{P}\rangle + \mu_0\langle \bar{S}\rangle. \qquad \ldots(71)$$

Haciendo uso de (64), y de las definiciones (65) y (66), tenemos:

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial \bar{E}_{macro}}{\partial t} = +\nabla\times\bar{B}_{macro} - \mu_0\left\langle \frac{\partial \bar{S}}{\partial t}\right\rangle .$$

Finalmente hay que obtener la derivada temporal de la expresión (70):

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle \bar{S}\rangle = \frac{\partial \bar{S}_{macro}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\mathbb{P}}}{\partial t} + \frac{1}{4}\left(\nabla\times\frac{\partial \bar{S}_{macro}}{\partial t}\right)\times\bar{K}.$$

Como $\bar{k}$ es independiente del tiempo, por (35), e identificando el rotacional del momento magnético por unidad de volumen con el último término de la expresión anterior, finalmente se obtiene:

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial \bar{E}_{macro}}{\partial t} = \nabla\times\bar{B}_{macro} - \mu_0\left(\bar{j}_{macro} + \frac{\partial \bar{\mathbb{P}}}{\partial t} + \nabla\times\bar{M}\right) \qquad \ldots(72)$$

Como ya se ha visto en la introducción, mediante la definición de los vectores híbridos $\bar{D}$ y $\bar{H}$ puede simplificarse la expresión matemática, sin evitar complicar el contenido físico. Definiendo

$$\bar{D} = \varepsilon_0\bar{E}_{macro} + \bar{\mathbb{P}},$$

$$\bar{H} = \frac{1}{\mu_0}\bar{B}_{macro} - \bar{M}\cdot \qquad \ldots(73)$$

Para obtener finalmente la expresión

$$\frac{\partial \bar{D}}{\partial t} = \nabla\times\bar{H} - \bar{j} \qquad \ldots(74)$$

Para obtener la última ecuación hay que tomar la divergencia de la ecuación (65) y, consecuentemente de (71) y (70). Entonces:

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\bar{E}_{macro} &= \nabla\cdot\left\langle -\frac{\partial^2\bar{P}}{\partial t^2}\right\rangle = \nabla\cdot\left[c^2\langle\nabla\times\nabla\times\bar{P}\rangle - \mu_0 c^2\langle\bar{S}\rangle\right] \\ &= c^2\langle\nabla\cdot\nabla\times\nabla\times\bar{P}\rangle - \mu_0 c^2\langle\nabla\cdot\bar{S}\rangle \\ &= -\frac{1}{\varepsilon_0}\nabla\cdot\left[\bar{S}_{macro} + \bar{\mathbb{P}}_{macro} + \frac{1}{4}(\nabla\times S_{macro})\times K\right]\end{aligned}$$

por (34), finalmente tenemos:

$$\nabla\cdot\bar{E}_{macro} = \frac{1}{\varepsilon_0}\varsigma - \frac{1}{\varepsilon_0}\nabla\cdot\bar{\mathbb{P}}_{macro} \qquad \ldots(75)$$

Al utilizar la definición del vector $\bar{D}$ (73), se obtiene la expresión:

$$\nabla\cdot\bar{D} = \bar{\varsigma} \qquad \ldots(76)$$

Cuando se expresan las ecuaciones de Maxwell-Hertz utilizando los vectores $\bar{D}$ y $\bar{H}$, conviene señalar, y así lo hacen la mayoría de los textos, que el vector $\bar{j}$ y el escalar ς representan cargas y corrientes verdaderas,para distinguir la corriente de la "corriente de Maxwell" compuesta por la variación temporal del vector $\bar{D}$ y la corriente de convección real de electrones.

Las ecuaciones (67), (68), (72) y (75), o sus abreviaciones (74) y (76), son las llamadas ecuaciones de Maxwell-Hertz para medios materiales en reposo.

VII

U N I D A D E S

1- I n t r o d u c c i o n .

El tema que más claramente revela la accidentada historia del electromagnetismo es, quizá, el que se refiere a unidades de medida. Perduran en él conceptos que ya están en desuso en la teoría; se atribuyen dimensiones distintas a iguales conceptos en los diferentes sistemas de unidades. La homogeneidad dimensional de las ecuaciones expresadas en diferentes sistemas, obviamente, se conserva y con ella el contenido físico. No deja de ser, sin embargo, muy insatisfactorio encontrar tal diversidad de opiniones sobre el tema entre los físicos.[51] Shercliff dice: "... el curioso factor $4\pi\varepsilon_0$ y el aún más fantástico valor ε_0 (8.854 x 10^{-12}) deben ser considerados como el detritus de la colorida historia de las unidades en el electromagnetismo. Por sí mismo no tiene particular significación. Llamarla 'permitividad del espacio vacío' es perverso; ¡uno podría de igual forma hablar acerca del color de un vacío! El factor ($\mu_0/4\pi$) es también más detritus histórico, como ε_0 sin significado físico por sí mismo, aunque el producto $\mu_0\varepsilon_0$ es realmente muy significativo y está lejos de ser arbitrario... es a veces llamado vacuamente 'la permeabilidad del espacio vacío'."[52]

Sommerfeld añade interrogantes: "Existe también una relación entre los dos vectores magnéticos $\bar{H}$ y $\bar{B}$ que, como una primera aproximación, supondremos también que es lineal. Nos gustaría escribirla en la forma $\bar{H}=\mu'\bar{B}$, puesto que consideramos a $\bar{H}$ como análogo de $\bar{D}$ y a $\bar{B}$ como análogo de $\bar{E}$. Sin embargo, desafortunadamente estamos obligados a seguir el uso generalizado y elegir la forma $\bar{B}=\mu\bar{H}$."[53]

Parece ser que la posición de Planck respecto de unidades es una de las más controvertidas. Dice O'Rahilly: "... Es bastante incorrecto decir, como Planck, que 'uno puede ascribir al vacío un valor arbitrario cualquiera de la constante dieléctrica, como se indica por los diversos sistemas de unidades'. Las unidades eléctricas se varían al cambiar α, no al cambiar α_1 $\left[\text{en } f=\frac{qq'}{\alpha' r^2};\ \alpha'=\alpha_0\alpha\right]$."[54] También Sommerfeld critica a Planck: "... Nosotros no aceptamos la posición de Planck según la que la cuestión de las dimensiones reales de una entidad física no tiene sentido; Planck afirma en &7 de sus <u>Lectures on electrodynamics</u> que esta cuestión no tiene más significado que el del nombre 'real' de un objeto. Contrariamente nosotros derivamos de las ecuaciones básicas de Maxwell la distinción entre entidades de intensidad y entidades de cantidad, las que hasta ahora han sido aplicadas consistentemente en los excelentes libros de texto de G.Mie. $\bar{E}$ y $\bar{B}$ pertenecen a la primera clase, $\bar{D}$ y $\bar{H}$ a la segunda."[55] Esta distinción puede encontrarse también en Maxwell: "Las cantidades vectoriales físicas pueden ser divididas en dos clases, en una de las cuales la cantidad es definida con referencia a una línea, mientras que en la otra, la cantidad es definida con referencia a un área... En la ciencia eléctrica, la intensidad electromotiva y la intensidad magnética pertenecen a la primera clase, siendo definidas con respecto a líneas. Cuando queremos indicar este hecho, nos podremos referir a ellas como intensidades. Por la otra parte, la inducción eléctrica y la magnética, y las corrientes eléctricas, pertenecen a la segunda clase, estando definidas con referencia a áreas. Cuando queremos indicar este hecho, nos referimos a ellas como flujos."[56]

Las ecuaciones del campo electromagnético obtenidas en los capítulos II y III han resultado expresadas en el sistema M.K.S. racionalizado. Sin embargo, las dimensiones atribuidas por este sistema a ε_0 y μ_0 son distintas de las que, en forma natural, adquieren al considerarse nula la dimensión de las variables normales, partiendo de la transformación (3). Manteniendo las dimensiones originalmente atribuidas a a y b, de [inversos de] tiempo y de longitud respectivamente, y relacionándolas con ε_0 y μ_0 como se hizo en el capítulo II, y manteniendo además las dimensiones naturales que el potencial $\bar{P}$ obtiene al ser analizado, podría decirse que el esqueleto dimensional de las relaciones matemáticas que describen el campo electromagnético queda al descubierto.

2- A n á l i s i s d i m e n s i o n a l d e l a s e c u a c i o n e s d e c a m p o .

Como es usual se representará la dimensión de una función g, como $[g]$, y se utilizará T para representar a la dimensión del tiempo, L a la de la longitud, etc.

La transformación afín (3) relaciona a las variables naturales de espacio, con dimensión de longitud y de tiempo con dimensión T, con las variables normales que se han supuesto de dimensión nula. De las definiciones de a y b se tiene:

$$[a] = T \; ; \; [b] = L,$$

y de,

$$c^2 = \frac{b^2}{a^2} = \frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0}$$

es inmediato identificar a:

$$a^2 = \varepsilon_0 \quad y \quad b^2 = \frac{1}{\mu_0}$$

La dimensión de $\bar{P}$ es de longitud, luego de la ecuación (33)

$$\left[\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \bar{P}}{\partial t}\right] = \left[-\nabla\times\nabla\times\bar{P}\right] + \left[\frac{1}{b^2}\bar{S}\right]$$

se obtiene, por $[P] = L$, $[\partial/\partial t^2] = 1/T^2$, $\left[\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 P}{\partial t^2}\right] = (T^2/L^2)(L/T^2) = 1/L$; las dimensiones del primer término del segundo miembro que deben ser iguales, se obtienen de:

$$\left[\nabla\times\nabla\times\bar{P}\right] = [\nabla\times][\nabla\times][\bar{P}] = \frac{1}{L}\frac{1}{L}L = \frac{1}{L}$$

Y las del segundo término del segundo miembro deben ser:

$$\left[\frac{1}{b^2}\bar{S}\right] = \frac{1}{L^2}[\bar{S}]$$

De esta última expresión se deduce que las dimensiones de $\bar{S}$ son las de longitud, en concordancia con lo supuesto entre las funciones $\bar{S}$ y $\bar{P}$ sobre la igualdad entre acción y reacción.

De la ecuación (36), se obtiene:

$$[\bar{E}] = -\left[\frac{\partial^2 \bar{P}}{\partial t^2}\right] = \frac{L}{T^2}$$

Es decir que las dimensiones de $\bar{E}$ son las de una aceleración; por ello, es natural definir en términos de $\bar{E}$ fuerza por unidad de masa y de carga.

De la ecuación (37) obtenemos:

$$[\bar{B}] = [\nabla\times]\left[\frac{\partial \bar{P}}{\partial t}\right] = \frac{1}{L}\,\frac{L}{T} = \frac{1}{T}$$

Como las dimensiones naturales del vector $\bar{B}$ son las de inverso de tiempo, es consistente el considerar a $\bar{B}$ como un flujo.

Finalmente de la ecuación (34),

$$[\rho] = [\nabla]\cdot[\bar{S}] = \frac{1}{L}\,L = 0$$

Es decir, que las dimensiones naturales de la carga son nulas. En consecuencia la de $\bar{j}$ debe ser la de velocidad; en efecto, de (35):

$$[\bar{j}] = \left[\frac{\partial \bar{S}}{\partial t}\right] = \frac{L}{T}$$

Puede entonces concluirse que las dimensiones que corresponden naturalmente a ε_0 y a μ_0 son $\sqrt{T}$ y $1/\sqrt{L}$ respectivamente. Debe observarse que, al asignar arbitrariamente alguna dimensión a las cuatro coordenadas normales, pueden cambiarse las dimensiones de ε_0 y μ_0, siempre guardando la homogeneidad de la relación $c^2 = 1/\varepsilon_0\mu_0$.

También puede decirse que Sommerfeld tiene razón al querer utilizar el inverso de μ en vez de éste, pues es lo que se desprende lógicamente de la transformación afín (3) y de las relaciones mostradas de $\underline{a}$ y $\underline{b}$ con ε_0 y μ_0. También tiene razón al suponer a los vectores $\bar{B}$ y $\bar{E}$ en la misma jerarquía, ya que ambos vectores son de origen microscópico. Sin embargo el vector $\bar{B}$ tiene dimensiones naturales distintas de las del vector $\bar{E}$; a éste aplica perfectamente el nombre de <u>Intensidad de campo</u>

eléctrico, pues concuerda con la definición de Maxwell de que tales vectores están definidos respecto a una línea; no así $\bar{B}$, que efectivamente es definido respecto a un área y al que correctamente, según lo convenido por Maxwell, puede llamársele Inducción magnética, o Densidad de flujo magnético.

VIII

LA EXPRESION COVARIANTE DE LAS ECUACIONES DE LA ELECTRODINAMICA

1- La expresión basada en los potenciales $\bar{A}$ y φ .

Las ecuaciones que describen el campo electromagnético en el vacío con cargas son las más importantes. Como se ha visto, de ellas pueden deducirse las ecuaciones en medios materiales, cuando se conocen las relaciones empíricas entre $\bar{B}$ y $\bar{H}$, $\bar{E}$ y $\bar{D}$, $\bar{j}$ y $\bar{E}$, etc. Además comprenden, como caso especial, a las ecuaciones para el vacío sin cargas, cuando en ellas se anulan las expresiones que describen a las fuentes. En consecuencia, la expresión covariante que se obtenga estará basada en ellas.

A partir de las definiciones de los campos en función del potencial $\bar{P}$ (36) y (37), sustituyendo en ellas los valores de $\bar{A}$ y φ en términos de $\bar{P}_1$ y $\bar{P}_2$, se obtuvieron las siguientes expresiones para los campos;

$$\bar{E} = -\frac{\partial \bar{A}}{\partial t} - \nabla \varphi \qquad \ldots(54)$$

$$\bar{B} = \nabla \times \bar{A} \qquad \ldots(55)$$

Al considerar la transformación afín (3), se obtiene el tensor métrico:

$$g_{ij} = \begin{bmatrix} -\mu_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\mu_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mu_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\varepsilon_0} \end{bmatrix} \qquad \ldots(77)$$

Este tensor difiere del que generalmente se usa y que pertene a las llamadas coordenadas galileanas reducidas; en éstas, no puede cambiarse a x_4 por t, sino por ct, lo que lleva a resultados equivalentes a los que se van a desarrollar:

Si abreviamos $\frac{\partial}{\partial x_i}$ con ∂_{x_i}, analizando (54) y (55) componente a componente, se tiene:

$$B_1 = \partial_2 A_3 - \partial_3 A_2 \qquad E_1 = -\partial_4 A_1 - \partial_1 \varphi$$

$$B_2 = \partial_3 A_1 - \partial_1 A_3 \qquad E_2 = -\partial_4 A_2 - \partial_2 \varphi$$

$$B_3 = \partial_1 A_2 - \partial_2 A_1 \qquad E_3 = -\partial_4 A_3 - \partial_3 \varphi$$

La simetría que existe en las seis relaciones anteriores sugiere la definición de un vector de cuatro componentes, llamado vector del universo:[57]

$$\Phi_\mu = (A_1, A_2, A_3, -\varphi). \qquad \ldots(78)$$

Referidas a este vector, las seis componentes anteriores son:

$$B_1 = \partial_2 \Phi_3 - \partial_3 \Phi_2 = F_{23} \qquad E_1 = \partial_1 \Phi_4 - \partial_4 \Phi_1 = F_{14}$$

$$B_2 = \partial_3 \Phi_1 - \partial_1 \Phi_3 = F_{31} \qquad E_2 = \partial_2 \Phi_4 - \partial_4 \Phi_2 = F_{24}$$

$$B_3 = \partial_1 \Phi_2 - \partial_2 \Phi_1 = F_{12} \qquad E_3 = \partial_3 \Phi_4 - \partial_4 \Phi_3 = F_{34} \qquad \ldots(79)$$

Las $F_{\mu\nu}$ representan las componentes del tensor electromagnético de campo. Se trata de un tensor hemisimétrico ya que $F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}$, y que se puede deducir del vector del universo, obteniendo de éste, su rotacional:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu \Phi_\nu - \partial_\nu \Phi_\mu. \qquad \ldots(80)$$

Definido el tensor métrico g_{ij} por la expresión (77), puede encontrarse su inverso g^{ij}. Identificando el valor del determinante del primero como g, tenemos:

$$g = \| g_{ij} \| = -\mu_0 c^2.$$

Entonces basta encontrar la expresión para los menores de las entradas distintas de cero, obteniéndose:

$$g^{ij} = -\frac{1}{\mu_0 c^2}\begin{pmatrix} c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\mu_0} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\mu_0} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\mu_0} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon_0 \end{pmatrix} \qquad \ldots (81)$$

El tensor covariante del campo electromagnético está dado, según (79), por:

$$F_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & B_3 & -B_2 & E_1 \\ -B_3 & 0 & B_1 & E_2 \\ B_2 & -B_1 & 0 & E_3 \\ -E_1 & -E_2 & -E_3 & 0 \end{bmatrix}. \qquad \ldots (82)$$

El tensor contravariante del campo electromagnético tendrá entonces la forma:

$$F^{\mu\nu} = g^{\mu i} g^{\nu j} F_{ij} = \begin{bmatrix} g^{11}g^{11}F_{11} & g^{11}g^{22}F_{12} & g^{11}g^{33}F_{13} & g^{11}g^{44}F_{14} \\ g^{22}g^{11}F_{21} & g^{22}g^{22}F_{22} & g^{22}g^{33}F_{23} & g^{22}g^{44}F_{24} \\ g^{33}g^{11}F_{31} & g^{33}g^{22}F_{32} & g^{33}g^{33}F_{33} & g^{33}g^{44}F_{34} \\ g^{44}g^{11}F_{41} & g^{44}g^{22}F_{42} & g^{44}g^{33}F_{43} & g^{44}g^{44}F_{44} \end{bmatrix}$$

y por consiguiente, de las expresiones del tensor g^{ij}:

$$F^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\mu_0^2}B_3 & -\frac{1}{\mu_0^2}B_2 & -\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}E_1 \\ -\frac{1}{\mu_0^2}B_3 & 0 & \frac{1}{\mu_0^2}B_1 & -\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}E_2 \\ \frac{1}{\mu_0^2}B_2 & -\frac{1}{\mu_0^2}B_1 & 0 & -\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}E_3 \\ \frac{\varepsilon_0}{\mu_0}E_1 & \frac{\varepsilon_0}{\mu_0}E_2 & \frac{\varepsilon_0}{\mu_0}E_3 & 0 \end{bmatrix}. \qquad \ldots (83)$$

También se requiere representar a las cargas con un vector de cuatro componentes; de la observación de los segundos términos de las ecuaciones

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial \bar{E}}{\partial t} - \nabla \times \bar{B} = -\mu_0 \bar{j}, \qquad y \qquad \nabla \cdot \bar{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0},$$

se puede identificar a este vector como sigue:

$$j_\mu = (-\mu_0 j_1, -\mu_0 j_2, -\mu_0 j_3, \frac{\rho}{\varepsilon_0}) \qquad \ldots (84)$$

La forma contravariante de este vector es:

$$J^\mu = (j_1, j_2, j_3, \rho) \qquad \ldots (85)$$

Teniendo definidos al tensor $F^{\mu\nu}$ y a la corriente J^μ ya se pueden expresar las ecuaciones de campo en forma covariante. Analizando por componentes las ecuaciones:

$$\nabla \times \bar{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial \bar{E}}{\partial t} = \mu_0 \bar{j} \qquad \ldots (38)$$

$$\nabla \cdot \bar{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad \ldots (40)$$

y al dividir la primera por μ_0 :

$$\frac{1}{\mu_0}\partial_2 B_3 - \frac{1}{\mu_0}\partial_3 B_2 - \varepsilon_0 \partial_4 E_1 = j_1,$$

Al sustituir los componentes correspondientes del tensor F :

$$\mu_0 \partial_2 F^{12} + \mu_0 \partial_3 F^{13} + \mu_0 \partial_4 F^{14} = J^1, \text{ ó}$$

$$\partial_1 F^{11} + \partial_2 F^{12} + \partial_3 F^{13} + \partial_4 F^{14} = \frac{1}{\mu_0} J^1, \text{ etc.} \qquad \ldots (86)$$

Analizando la ecuación (40) por componentes, multiplicada por ε_0 :

$$\varepsilon_0 \partial_1 E_1 + \varepsilon_0 \partial_2 E_2 + \varepsilon_0 \partial_3 E_3 = \rho$$

Al sustituir los componentes correspondientes del tensor $F^{\mu\nu}$:

$$\mu_0 \partial_1 F^{41} + \mu_0 \partial_2 F^{42} + \mu_0 \partial_3 F^{43} + \mu_0 \partial_4 F^{44} = J^4, \text{ ó}$$

$$\partial_1 F^{41} + \partial_2 F^{42} + \partial_3 F^{43} + \partial_4 F^{44} = \frac{1}{\mu_0} J^4 \qquad \ldots (87)$$

Las ecuaciones (86) y (87), que son las expresiones covariantes de las ecuaciones (38) y (40), atendiendo a la convención de índices repetidos, se pueden expresar en forma única, como:

$$\partial_\lambda F^{\mu\lambda} = \frac{1}{\mu_0} J^\mu ; \qquad \lambda, \mu, = 1,2,3,4. \qquad \ldots(88)$$

Siguiendo un proceso similar con las otras dos ecuaciones de campo, se obtienen sus expresiones covariantes. De la ecuación:

$$\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} + \nabla \times \bar{E} = 0, \qquad \ldots(39)$$

analizándola por componentes:

$$\partial_2 E_3 - \partial_3 E_2 + \partial_4 B_1 = 0$$

y, en función de los componentes del tensor $F_{\mu\nu}$:

$$\partial_2 F_{34} + \partial_3 F_{42} + \partial_4 F_{23} = 0 \qquad \ldots(89)$$

Analizando por componentes la ecuación

$$\nabla \cdot \bar{B} = 0 \qquad \ldots(41)$$

se tiene:

$$\partial_1 B_1 + \partial_2 B_2 + \partial_3 B_3 = 0$$

y, en términos del tensor $F_{\mu\nu}$:

$$\partial_1 F_{23} + \partial_2 F_{31} + \partial_3 F_{12} = 0 \qquad \ldots(90)$$

Las ecuaciones (89) y (90) pueden expresarse en forma única:

$$\partial_\lambda F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\lambda} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} = 0; \quad \lambda \neq \mu \neq \nu = 1,2,3 \text{ ó } 4. \qquad \ldots(91)$$

La conservación de la carga puede expresarse como:

$$\partial_\mu J^\mu = 0 \qquad \ldots(92)$$

La condición de Lorentz (52), como:

$$\partial_\mu \Phi^\mu = 0 \qquad \ldots(93)$$

La ecuación (91) tiene una forma más breve si se utiliza al tensor adjunto del tensor de campo electromagnético. El tensor adjunto se define como:

$$\bar{F}^{\nu\rho} = \frac{1}{2} \eta^{\lambda\mu\nu\rho} F_{\lambda\mu}$$

ya que $g = -\mu_0 c^2 = -1/\varepsilon_0$, entonces $\eta^{\lambda\mu\nu\rho} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0}} \varepsilon^{\lambda,\mu\nu\rho}$

donde $\varepsilon^{\lambda\mu\nu\rho}$ es el indicador de permutación.[58]

Siguiendo la definición pueden obtenerse los componentes del tensor adjunto:

$$\bar{F}^{14} = F_{23} = B_1 \qquad \bar{F}^{23} = F_{14} = E_1$$

$$\bar{F}^{24} = F_{31} = B_2 \qquad \bar{F}^{31} = F_{24} = E_2$$

$$\bar{F}^{34} = F_{12} = B_3, \qquad \bar{F}^{12} = F_{34} = E_3 \qquad \ldots(94)$$

Las ecuaciones (39) y (41), por componentes:

$$\partial_2 E_3 - \partial_3 E_2 + \partial_4 B_1 = 0 \ , \ y$$

$$\partial_1 B_1 + \partial_2 B_2 + \partial_3 B_3 = 0.$$

En función de los componentes del tensor adjunto $\bar{F}^{\mu\nu}$:

$$\partial_2 \bar{F}^{12} + \partial_3 \bar{F}^{13} + \partial_4 \bar{F}^{14} = 0, \ y$$

$$-\partial_1 \bar{F}^{41} \mp \partial_2 \bar{F}^{42} - \partial_3 \bar{F}^{43} = 0.$$

Ambas pueden expresarse,

$$\partial_\mu \bar{F}^{i\mu} = 0 \ , \qquad i = 1,2,3,4. \qquad \ldots(95)$$

Así se obtiene una expresión covariante más sencilla para las cuatro ecuaciones de Maxwell:

$$\partial_\lambda F^{\mu\lambda} = \frac{1}{\mu_0} J^\mu \qquad \ldots(88)$$

$$\partial_\mu \bar{F}^{\lambda\mu} = 0. \qquad \ldots(95)$$

2- La expresión basada en las funciones $\bar{P}$ y $\bar{S}$.

En la segunda sección del capítulo III se probó que el campo electromagnético en el vacío con cargas, se puede expresar en forma totalmente equivalente a la de las ecuaciones de Maxwell-Hertz por medio de la ecuación de movimiento, que hemos llamado condición de Hertz-Righi,

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \bar{P}}{\partial t^2} = -\nabla\times\nabla\times\bar{P} + \mu_0 \bar{S}, \qquad \ldots(33)$$

y las definiciones de los campos $\bar{E}$ y $\bar{B}$ en términos de $\bar{P}$, y de las fuentes ρ y $\bar{j}$ en términos de $\bar{S}$:

$$\bar{E} = -\frac{\partial^2 \bar{P}}{\partial t^2} \quad \ldots(36) \qquad \rho = -\nabla\cdot\bar{S} \quad \ldots(34)$$

$$\bar{B} = \nabla\times\frac{\partial \bar{P}}{\partial t} \quad \ldots(37) \qquad \bar{j} = \frac{\partial \bar{S}}{\partial t} \quad \ldots(35)$$

Siguiendo un desarrollo análogo al de la sección anterior, de las ecuaciones (37) y (36) obtenemos:

$$B_1 = \partial_2\partial_4 P_3 - \partial_3\partial_4 P_2 = F_{23} \qquad -E_1 = \partial_4\partial_4 P_1 = F_{41}$$

$$B_2 = \partial_3\partial_4 P_1 - \partial_1\partial_4 P_3 = F_{31} \qquad -E_2 = \partial_4\partial_4 P_2 = F_{42}$$

$$B_3 = \partial_1\partial_4 P_2 - \partial_2\partial_4 P_1 = F_{12} \qquad -E_3 = \partial_4\partial_4 P_3 = F_{43} \qquad \ldots(96)$$

En cada caso se ha relacionado la expresión de la componente del campo con la componente correspondiente del tensor $F_{\mu\nu}$. Todas las expresiones anteriores contienen una derivada respecto de la cuarta coordenada, que corresponde, según la transformación afín (3), al tiempo. Resulta natural quitarla y componer un tensor que no la tenga. Y también por analogía con el desarrollo anterior se puede definir un vector del universo cuyos tres primeros componentes sean los componentes de la función $\bar{P}$, y cuyo cuarto componente, P_4 sea utilizado para representar al vector $\bar{S}$, es decir a las fuentes del campo en la forma que más adelante se definirá. Tal representación nos permitirá, en un sólo vector, tener representadas a las fuentes como a los campos, lo que nos conducirá a obtener una expresión sumamente sencilla y adecuada de la ecuación de movimiento. Diferenciando a este nuevo vector del universo del anterior por medio del signo que aparece en su cabeza v, lo definimos como sigue:

$$\check{\Phi}_\mu = (P_1, P_2, P_3, -P_4) \qquad \ldots (97)$$

En forma análoga también, se definirá el nuevo tensor electromagnético, diferenciado del anterior de la misma manera, como el rotacional del nuevo vector:

$$\check{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu \check{\Phi}_\nu - \partial_\nu \check{\Phi}_\mu . \qquad \ldots (98)$$

Es claro a partir de las relaciones (96), que la derivada del tensor $\check{F}_{\mu\nu}$ respecto de la coordenada cuarta proporcionará al anterior tensor electromagnético $F_{\mu\nu}$, salvo la adición del vector fuentes que representará la cuarta componente, cuya forma procedemos a investigar, y para ello será necesario exponer en forma matricial los componentes del nuevo tensor:

$$\check{F}_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & \partial_1 P_2 - \partial_2 P_1 & -(\partial_3 P_1 - \partial_1 P_3) & -(\partial_4 P_1 + \partial_1 P_4) \\ -(\partial_1 P_2 - \partial_2 P_1) & 0 & \partial_2 P_3 - \partial_3 P_2 & -(\partial_4 P_2 + \partial_2 P_4) \\ \partial_3 P_1 - \partial_1 P_3 & -(\partial_2 P_3 - \partial_3 P_2) & 0 & -(\partial_4 P_3 + \partial_3 P_4) \\ \partial_4 P_1 + \partial_1 P_4 & \partial_4 P_2 + \partial_2 P_4 & \partial_4 P_3 + \partial_3 P_4 & 0 \end{pmatrix} \qquad \ldots (99)$$

Comparando las expresiones (96) con los componentes del tensor anterior, se observa que

$$\begin{aligned} &\partial_4 \check{F}_{23} = B_1 = F_{23} && \partial_4 \check{F}_{41} = \partial_4\partial_4 P_1 + \partial_4 \partial_1 P_4 = -E_1 + \partial_4 \partial_1 P_4 = F_{41} + \partial_4 \partial_1 P_4 \\ &\partial_4 \check{F}_{31} = B_2 = F_{31} && \partial_4 \check{F}_{42} = \partial_4\partial_4 P_2 + \partial_4 \partial_2 P_4 = -E_2 + \partial_4 \partial_2 P_4 = F_{42} + \partial_4 \partial_2 P_4 \\ &\partial_4 \check{F}_{12} = B_3 = F_{12}, && \partial_4 \check{F}_{43} = \partial_4\partial_4 P_3 + \partial_4 \partial_3 P_4 = -E_3 + \partial_4 \partial_3 P_4 = F_{43} + \partial_4 \partial_3 P_4 \end{aligned} \qquad \ldots (100)$$

las últimas tres expresiones conducen a la identificación de la componente P_4 con $\bar{S}$ de la siguiente manera:

$$-\frac{1}{\varepsilon_0} S_1 = \partial_1 \partial_4 P_4,$$

$$-\frac{1}{\varepsilon_0} S_2 = \partial_2 \partial_4 P_4,$$

$$-\frac{1}{\varepsilon_0} S_3 = \partial_3 \partial_4 P_4. \qquad \ldots(101)$$

Tendremos también que utilizar una representación tensorial de las cargas para poder confrontar con los anteriores tensores el nuevo tensor, que contiene adicionalmente la expresión de las cargas y corrientes. Definimos entonces:

$$\check{S}_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\varepsilon_0} S_1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\varepsilon_0} S_2 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\varepsilon_0} S_3 \\ -\frac{1}{\varepsilon_0} S_1 & -\frac{1}{\varepsilon_0} S_2 & -\frac{1}{\varepsilon_0} S_3 & 0 \end{pmatrix} \qquad \ldots(102)$$

Con los tensores $\check{F}_{\mu\nu}^{\mu\nu}$, $\check{S}_{\mu\nu}$ y el vector $\check{\Phi}_{\mu}$, se tienen todos los elementos para expresar tensorialmente las ecuaciones de campo. Para que la forma sea covariante se requiere obtener las expresiones contravariantes de los elementos citados:

$$\check{F}^{\mu\nu} = g^{\mu i} g^{\nu j} \check{F}_{ij}$$

$$\check{S}^{\mu\nu} = g^{\mu i} g^{\nu j} \check{S}_{ij}$$

La forma matricial del primero será:

$$\check{F}^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & (1/\mu_0^2)(\partial_1 P_2 - \partial_2 P_1) & -(1/\mu_0^2)(\partial_3 P_1 - \partial_1 P_3) & \frac{\varepsilon_0}{\mu_0}(\partial_4 P_1 + \partial_1 P_4) \\ -(1/\mu_0^2)(\partial_1 P_2 - \partial_2 P_1) & 0 & (1/\mu_0^2)(\partial_2 P_3 - \partial_3 P_2) & \frac{\varepsilon_0}{\mu_0}(\partial_4 P_2 + \partial_2 P_4) \\ (1/\mu_0^2)(\partial_3 P_1 - \partial_1 P_3) & -(1/\mu_0^2)(\partial_2 P_3 - \partial_3 P_2) & 0 & \frac{\varepsilon_0}{\mu_0}(\partial_4 P_3 + \partial_3 P_4) \\ -(\varepsilon_0/\mu_0)(\partial_4 P_1 + \partial_1 P_4) & -(\varepsilon_0/\mu_0)(\partial_4 P_2 + \partial_2 P_4) & -(\varepsilon_0/\mu_0)(\partial_4 P_3 + \partial_3 P_4) & 0 \end{pmatrix} \qquad \ldots(103)$$

e igualmente para el tensor de las fuentes, se obtiene su expresión contravariante:

$$\check{S}^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -(1/\mu_0)S_1 \\ 0 & 0 & 0 & -(1/\mu_0)S_2 \\ 0 & 0 & 0 & -(1/\mu_0)S_3 \\ (1/\mu_0)S_1 & (1/\mu_0)S_2 & (1/\mu_0)S_3 & 0 \end{bmatrix}. \qquad \ldots(104)$$

Disponiendo ya de todos los elementos, hay que considerar la necesidad de expresar dos tipos de ecuaciones: las que son simplemente definiciones de campos y fuentes, que son las ecuaciones (36-39), y las otras que representan las características del movimiento del sistema $\bar{P}$-$\bar{S}$, dado por las ecuaciones (33) y (40). Las del primer tipo son como sigue:

Definición de los campos:

$$\partial_4 \check{F}^{\mu\nu} - \check{S}^{\mu\nu} = F^{\mu\nu} \qquad \ldots(105)$$

Definición de las fuentes:

$$\partial_\mu \check{S}^{\mu\nu} = \frac{1}{\mu_0} J^\nu \qquad \ldots(106)$$

Por último, ecuaciones del movimiento del sistema:

$$\partial_\nu \check{F}^{\mu\nu} = 0 \qquad \ldots(107)$$

Resta únicamente comprobar que el contenido de estas tres ecuaciones tensoriales es el que se buscaba, equivalente a la formulación del campo por medio de las ecuaciones de Maxwell-Hertz.

Analizando así la primera, para $\mu = 2$, $\nu = 1$:

$$\partial_4 \check{F}^{21} - \check{S}^{21} = F^{21}$$

por (103), (104) y (83),

$$-\frac{1}{\mu_0^2}\partial_4(\partial_1 P_2 - \partial_2 P_1) + 0 = -\frac{1}{\mu_0^2} B_3$$

en efecto, de la definición de $\bar{B}$ en (96):

$$B_3 = \partial_4(\partial_1 P_2 - \partial_2 P_1)$$

en la misma ecuación (103), para $\mu = 4$, $\nu = 1$: $\partial_4 \check{F}^{41} - \check{S}^{41} = F^{41}$, de (103), (104) y (83):

$$-\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}\partial_4(\partial_4 P_1 - \partial_1 P_4) + \frac{1}{\mu_0} S_1 = \frac{\varepsilon_0}{\mu_0} E_1$$

por la definición (101), queda,

$$-\partial_4\partial_4 P_1 = E_1$$

en coincidencia con la definición (96). Es claro entonces que esta primera ecuación (103), contiene las definiciones de los campos (36) y (37).

Procediendo al análisis de la ecuación (104), para $\nu = 1$,

$$\partial_1 S^{11} + \partial_2 S^{21} + \partial_3 S^{31} + \partial_4 S^{41} = \frac{1}{\mu_0} J_1$$

por (104) y (85),

$$\partial_4\left(\frac{1}{\mu_0} S_1\right) = \frac{1}{\mu_0} J_1 \text{, ó } \quad \partial_4 S_1 = J_1$$

lo que coincide con la definición (35).

En la misma ecuación, para $\nu = 4$,

$$\partial_1 S^{14} + \partial_2 S^{24} + \partial_3 S^{34} + \partial_4 S^{44} = \frac{1}{\mu_0} J^4$$

$$-\frac{1}{\mu_0}(\partial_1 S_1 + \partial_2 S_2 + \partial_3 S_3) = \frac{1}{\mu_0}\rho\,,$$

de acuerdo con la definición (34). Queda entonces probado que la ecuación (104) contiene las definiciones (34) y (35).

Finalmente, procediendo a analizar el contenido de la ecuación de movimiento (107), para $\mu = 1$,

$$\partial_1 \check{F}^{11} + \partial_2 \check{F}^{12} + \partial_3 \check{F}^{13} + \partial_4 \check{F}^{14} = 0$$

de (103),

$$\frac{1}{\mu_0}\partial_2(\partial_1 P_2 - \partial_2 P_1) - \frac{1}{\mu_0}\partial_3(\partial_3 P_1 - \partial_1 P_3) + \frac{\varepsilon_0}{\mu_0}\partial_4(\partial_4 P_1 + \partial_1 P_4) = 0$$

por (101),

$$(\nabla\times\nabla\times\bar{P})_1 + \frac{1}{c^2}\partial_4\partial_4\bar{P}_1 - \frac{1}{c^2}\frac{1}{\varepsilon_0} S_1 = 0$$

Añadiendo lo contenido en esta ecuación para $\mu = 2$ y $\mu = 3$, se tiene:

$$\frac{1}{c^2}\partial_4\partial_4\bar{P} = -\nabla\times\nabla\times\bar{P} + \mu_0\bar{S}.$$

Que es en efecto la ecuación (33).

Por último, para $\mu = 4$,

$$\partial_1 \check{F}^{41} + \partial_2 \check{F}^{42} + \partial_3 \check{F}^{43} + \partial_4 \check{F}^{44} = 0$$

por (103)

$$-\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}\left[\partial_1(\partial_4 P_1 + \partial_1 P_4) + \partial_2(\partial_4 P_2 + \partial_2 P_4) + \partial_3(\partial_4 P_3 + \partial_3 P_4)\right] = 0$$

o bién,

$$\partial_1\partial_4 P_1 + \partial_2\partial_4 P_2 + \partial_3\partial_4 P_3 = -(\partial_1\partial_1 P_4 + \partial_2\partial_2 P_4 + \partial_3\partial_3 P_4)$$

Al derivar respecto a la cuarta coordenada:

$$\partial_1(\partial_4\partial_4 P_1) + \partial_2(\partial_4\partial_4 P_2) + \partial_3(\partial_4\partial_4 P_3) = -\left[\partial_1(\partial_1\partial_4 P_4) + \partial_2(\partial_2\partial_4 P_4) + \partial_3(\partial_3\partial_4 P_4)\right],$$

por (96), (101) y (106),

$$-\nabla\cdot\bar{E} = -\left[-\frac{1}{\varepsilon_0}(\partial_1 S_1 + \partial_2 S_2 + \partial_3 S_3)\right] = -\left[-\frac{1}{\varepsilon_0}(-\rho)\right] = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho$$

Entonces la ecuación (107) expresa, como se ha visto, la relación entre campos y fuentes que determina las condiciones del movimiento.

IX

CONCLUSIONES

1- De los postulados a las ecuaciones del campo.

¿Puede concluirse que se han obtenido las ecuaciones del campo electromagnético en el vacío con cargas, a partir de los postulados A y B? Quizá algunos de los pasos tomados y algunas de las suposiciones hechas en el proceso seguido, pudiesen impedir una respuesta afirmativa; no obstante, este proceso ha conducido al planteamiento de las ecuaciones a partir de una función vectorial de cuatro componentes, el vector del universo de la sección anterior, desde el cual pudo llegarse a la obtención de las ecuaciones de campo. Aceptando entonces que la ecuación de Hertz-Righi (33) y las definiciones de los campos y fuentes (34-37), son en todo equivalentes a las ecuaciones de Maxwell-Hertz, bastará replantear los potenciales $\bar{P}$ y $\bar{S}$ en forma unificada, como componentes de un solo potencial que sirve para describir tanto a los campos como a las fuentes. Las restricciones impuestas por los postulados sobre la forma del espacio tetradimensional generado por el nuevo potencial, están expresadas matemáticamente de manera más directa.

El campo electromagnético en el vacío con cargas se puede representar mediante un espacio tetradimensional definido por cuatro funciones continuas y univaluadas, cuyo dominio es el espacio de coordenadas normales:

$$P_1 = P_1(x_1, x_2, x_3, x_4),$$
$$P_2 = P_2(x_1, x_2, x_3, x_4),$$
$$P_3 = P_3(x_1, x_2, x_3, x_4),$$
$$P_4 = P_4(x_1, x_2, x_3, x_4). \qquad \ldots(108)$$

Por una parte el postulado A impone la forma de la transición del espacio de coordenadas normales al espacio de coordenadas naturales, mediante la transformación afín (10); por otra anula los componentes no diagonales del tensor métrico del espacio generado por $\bar{P}$, y exige que el movimiento se realice a lo largo de las geodésicas de este espacio. Entonces, derivado de A, se tiene:

$$g_{ij} = 0 \quad si \quad i \neq j, \; i,j = 1,2,3,4 \qquad \ldots(109)$$

$$\delta \int ds^2 = 0 \; ; \quad ds^2 = g_{ii}\, dx_i\, dx_i \, . \qquad \ldots(110)$$

El postulado B, puede ahora expresarse en la forma más satisfactoria:

$$\int \left(\frac{\partial P_1}{\partial x_1} + \frac{\partial P_2}{\partial x_2} + \frac{\partial P_3}{\partial x_3} + \frac{\partial P_4}{\partial x_4} \right)^2 dx_1 dx_2 dx_3 dx_4 = cte. \qquad \ldots(111)$$

Una vez realizado el planteamiento, se requiere llegar a las ecuaciones. El integrando de la funcional que debe ser estacionaria, y que es equivalente al integrando (30), puede ahora expresarse sencillamente como:

$$\Omega = \left(\frac{\partial P_1}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial P_1}{\partial x_2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\partial P_4}{\partial x_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial P_4}{\partial x_4}\right)^2 - \left(\frac{\partial P_1}{\partial x_1} + \frac{\partial P_2}{\partial x_2} + \frac{\partial P_3}{\partial x_3} + \frac{\partial P_4}{\partial x_4} \right)^2 \qquad \ldots(112)$$

La aplicación a Ω de la ecuación de Euler proporciona las cuatro siguientes ecuaciones:

$$\frac{\partial^2 P_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 P_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 P_1}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 P_1}{\partial x_4^2} - \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial P_1}{\partial x_1} + \frac{\partial P_2}{\partial x_2} + \frac{\partial P_3}{\partial x_3} + \frac{\partial P_4}{\partial x_4} \right) = 0$$

$$\frac{\partial^2 P_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 P_2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 P_2}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 P_2}{\partial x_4^2} - \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial P_1}{\partial x_1} + \frac{\partial P_2}{\partial x_2} + \frac{\partial P_3}{\partial x_3} + \frac{\partial P_4}{\partial x_4} \right) = 0$$

$$\frac{\partial^2 P_3}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 P_3}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2 P_3}{\partial x_3^2}+\frac{\partial^2 P_3}{\partial x_4^2}-\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial P_1}{\partial x_1}+\frac{\partial P_2}{\partial x_2}+\frac{\partial P_3}{\partial x_3}+\frac{\partial P_4}{\partial x_4}\right)=0$$

$$\frac{\partial^2 P_4}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 P_4}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2 P_4}{\partial x_3^2}+\frac{\partial^2 P_4}{\partial x_4^2}-\frac{\partial}{\partial x_4}\left(\frac{\partial P_1}{\partial x_1}+\frac{\partial P_2}{\partial x_2}+\frac{\partial P_3}{\partial x_3}+\frac{\partial P_4}{\partial x_4}\right)=0 \qquad \ldots(113)$$

Aplicando la transformación afín (10) y haciendo uso de las relaciones (101), de las tres primeras ecuaciones se obtiene la ecuación (33):

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \bar{P}_{1-3}}{\partial t^2}=-\nabla\times\nabla\times\bar{P}_{1-3}+\mu_0 S \qquad \ldots(33)$$

La cuarta ecuación, cuando se cancelan en ella los dos términos iguales de signos contrarios que tiene, y se le aplica la transformación afín (10), conduce a:

$$\nabla^2 P_4=\frac{ia}{b}\frac{\partial}{\partial t}\nabla\cdot\bar{P}_{1-3}=\frac{i}{c}\frac{\partial}{\partial t}\nabla\cdot\bar{P}_{1-3} \qquad \ldots(114)$$

cuya solución es:

$$P_4=-\frac{1}{4\pi c}\frac{\partial}{\partial t}\int\frac{\nabla\cdot\bar{P}_{1-3}}{r}\,dx'dy'dz'. \qquad \ldots(115)$$

Esta ecuación representa la condición entre las tres primeras componentes del potencial $\bar{P}$, y la cuarta.[59]

De esta manera se llega a concluir que las restricciones impuestas por los postulados A y B a un espacio de cuatro dimensiones, conducen a las ecuaciones del campo electromagnético en el vacío con cargas.

N O T A S

1- Véase el examen histórico de W.Pauli en Electrodynamics, Pauli Lectures on Physics, vol. I, Charles P.Enz Ed., The MIT Press, Cambridge, 1981, p. 3.

2- J.A.Stratton, Electromagnetic theory, McGraw Hill Book Co,New York, 1941.

3- Ibid.,p. 2.

4- Ibid.,p. vii.

5- Véase P.A.M.Dirac, A new classical theory of electrons, Proceedings of the Royal Society, 209A, p. 291, 1951.

6- M.Planck, Theory of electricity and magnetism. Introduction to theoretical Physics, vol. III, The MacMillan Co., New York, 1949, p. 12 y sig.

7- G. Joos, Theoretical Physics, Hafner Pub. Co., New York, 1950, p. 343.

8- J. C. Maxwell, A dynamical theory of the electromagnetic field, Royal Society Transactions, vol. CLV, en The scientific papers of James Clerk Maxwell, W. D. Niven Ed., Dover Pub., Inc., New York, 1965, vol. I, p. 527.

9- Véase A. O'Rahilly, Electromagnetic theory, Dover Pub., Inc., New York, 1965, vol. I, p. 114.

10- T. Levi-Civita, Sulla riducibilita delle equazioni elettrodinamiche di Helmholtz alla forma Hertziana, Nuovo Cimento, Serie IV, vol. 6, 1897, pp. 93-108.

11- H. Poincaré, Electricité et optique. I-Les théories de Maxwell, Georges Carré, Editeur, Paris, 1890, p. i.

12- A. Sommerfeld, Electrodynamics. Lectures on theoretical Physics, vol. III, Academic Press, New York, 1952, p. 18.

13- Véase en Hierarchical structures, L. L. Whyte, A. G. Wilson y D. Wilson, Eds., Americal Elsevier Pub. Co., Inc., New York, 1969, el artículo de Mario Bunge donde define jerarquía, en la p. 17 y el de Marjorie Grene, en el que me apoyo para dar esta definición de estructura jerárquica, en la p. 56.

14- Véase I. S. Sokolnikoff, Tensor analysis, John Wiley & Son, New York, 1964, p. 203.

15- Véase I. M. Gelfand y S. V. Fomin, Calculus of variations, Prentice-Hall, Inc., New Jersey, 1963, p. 181.

16- Véase O'Rahilly, Op.cit., p. 22.

17- Véase A. Sommerfeld, Mechanics of deformable bodies. Lectures on theoretical Physics, vol. II, Academic Press, New York, 1950, p. 5.

18- Véase E. Cunningham, The principle of Relativity, Cambridge at the University Press, 1921, p. 100.

19- Véase W. K. H. Panofsky y M. Phillips, Classical electricity and

magnetism, Addison Wesley Pub. Co., Mass., 1962, p. 466.

20- Véase O'Rahilly, Op.cit., p. 22.

21- Véase Panofsky, Op.cit., p. 245, ó O. W. Richardson, The electron theory of matter, Cambridge at the University Press, 1916, p. 189.

22- La conmutatividad de los operadores gradiente y D'Alembertiano, puede verse también en O'Rahilly, Op.cit., p. 21. Véase además H. A. Lorentz, The theory of electrons, B. G. Teubner, Leipzig, 1909, p. 239.

23- H. Hertz, The forces of electric oscillations, treated according to Maxwell's theory, Wiedemann's Ann. 36, p. 1, 1889, en, Electric waves, Dover Publications, Inc., New York, 1962. La notación ha sido alterada.

24- A. Righi, Sui campi elettromagnetici e particolarmente su quelli creati da cariche elettriche o da poli magnetici in movimento, Il Nuovo Cimento, Serie V, T. II, 1901, pp. 104-121.

25- Stratton, Op.cit., p. 28.

26- Véase V. V. Batygin y I. N. Toptygin, Problems in electrodynamics, Academic Press, London, 1962, p. 154. La notación ha sido modificada.

27- E. Cassirer, Substance and function and Einstein's theory of Relativity, Dover Pub. Inc., New York, 1953, p. 406.

28- M. Born y E. Wolf, Principles of optics, Pergamon Press, Oxford, 1975, p. xxvi.

29- R. H. Dicke, The theoretical significance of experimental Relativity, Gordon and Breach, New York, 1968, p. 47.

30- Lo contenido entre paréntesis cuadrados ha sido añadido para precisar el texto.

31- F. Rohrlich, Classical charged particles, Addison-Wesley Pub. Co. Inc., Mass., 1965, p. 86. Además véase W. Yourgrau y S. Mandelstam, Variational principles in dynamics and Quantum theory, Dover Pub. Inc., New York, 1979, p. 79 y s.s.

32- Véase en The theory of action-at-a-distance in relativistic particle dynamics, E. H. Kerner, Ed., Gordon and Breach, New York, 1972, especialmente la reproducción del artículo de J. A. Wheeler y R. P. Feynman, Classical electrodynamics in terms of direct interparticle action, p. 27.

33- G. G. Stokes, On the theories of the internal friction of fluids in motion, and of the equilibrium and motion of elastic solids, Transactions of the Cambridge Philosophical Society, vol. VIII, p. 287, en Mathematical and physical papers. Johnson Reprint Corp., New York, 1966, p. 80.

34- P. Langevin, Les grains d'electricité et la dynamique électromagnétique, en Les idées modernes sur la constitution de la matiere, Gauthier-Villars, Paris, 1913, p. 61.

35- Véase I. S. Sokolnikoff, Advancedcalculus, McGraw-Hill Book Co., New York, 1939, p. 317.

36- Véase Sommerfeld, Mechanics..., Op.cit., p. 1.

37- Stokes, Op.cit., p. 83.

38- J. MacCullagh, An essay towards a dynamical theory of crystalline reflexion and refraction, transactions of the Royal Irish Academy, vol. XXI, 1840, en Collected works, Dublin, 1880.

39- J. Larmor, Aether and matter, Cambridge at the University Press, 1900, p. 84.

40- O'Rahilly, Op.cit., p. 22.

41- L. Poincaré, Die Moderne Physic..., Leipzig, 1908, en Cassirer, Op.cit., p. 251.

42- Dirac, Op.cit., p. 291

43- Rohrlich, Op.cit., p. 86, y Yourgrau, Op.cit., p. 82.

44- P. A. M. Dirac, Is there an Aether?, (Letters to the editor), Nature 168, 906, 1951.

45- H. A. Lorentz, The fundamental equations for electromagnetic phenomena in ponderable bodies, deduced from the theory of electrons, Proceedings of the Academy of Amsterdam, 5, 254, 1902, en Collected papers, vol. III, Martinus Nijhoff, The Hague, 1935, pp. 117-131.

46- R. Becker, Théorie des electrons, L. Felix Alcan, Paris, 1938.

47- Ibid., p. 122.

48- L. Rosenfeld, Theory of electrons, Dover Pub. Inc., New York, 1965, p. 13.

49- P. Mazur y B. R. A. Nijboer, On the statistical mechanics of matter in an electromagnetic field. I-Derivation of the Maxwell equations from electron theory, Physica, XIX, 1953, pp. 971-986.

50- Lorentz, Op.cit., en Coll. works, p. 119.

51- J. A. Shercliff, Vector fields, Cambridge University Press, London,

1977, p. 38.

52- Ibid., p.41.

53- Sommerfeld, Electrodynamics, Op.cit., p.21

54- O'Rahilly, Op.cit., p. 80.

55- Sommerfeld, Electrodynamics, Op.cit., p. vi.

56- J. C. Maxwell, A treatise on electricity and magnetism, Dover Pub., Inc., New York, 1954, vol. I, p. 11.

57- Estoy siguiendo la exposición y nomenclatura que se encuentra en A. Lichnerowicz, Élements de calcul tensoriel, Lib. Armand Colin, Paris, 1958, p. 192, a excepción hecha del uso de coordenadas reducidas.

58- Ibid., p. 73.

59- Recuérdese que la definición de la función $\bar{S}$ en términos de P_4 expresada por las ecuaciones (101), fue obtenida usando la métrica dada por el tensor (77). Esta métrica no corresponde exactamente a la métrica del espacio de Minkowski, y fue empleada para conservar separadas a las constantes ϵ_0 y μ_0 en los desarrollos. Pueden utilizarse unas coordenadas definidas en forma parecida a como se definen las coordenadas galileanas reducidas, y que también conservan separadas a las constantes, pero con las que puede trabajarse en relación a una métrica con coeficientes constantes y signos dados por $(-,-,-,+)$; estas coordenadas x^1, x^2, x^3, x^4, están relacionadas con las naturales por las relaciones:

$$x^1 = \sqrt{\mu_0}\, x$$
$$x^2 = \sqrt{\mu_0}\, y$$
$$x^3 = \sqrt{\mu_0}\, z$$
$$x^4 = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0}}\, t,$$

El elemento de arco estaría expresado como:

$$ds^2 = -dx^2 - dy^2 - dz^2 + c^2dt^2 = -1/\mu_0\left[(dx^1)^2 + (dx^1)^2 + (dx^3)^2\right] + \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_0\mu_0}(dx^4)^2 =$$

$$= \frac{1}{\mu_0}\left[-(dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 + (dx^4)^2\right].$$

En estas coordenadas puede definirse al vector del universo, o vector potencial como:

$$\check{\Phi}_\mu = (-P_1, -P_2, -P_3, \frac{1}{c}P_4).$$

El tensor electromagnético sería entonces:

$$\check{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu \check{\Phi}_\nu - \partial_\nu \check{\Phi}_\mu.$$

La ecuación de movimiento (33):

$$\partial_\nu \check{F}^{\mu\nu} = 0.$$

En estas coordenadas la función $\bar{S}$ está definida por:

$$\bar{S} = -\frac{1}{c}\nabla \partial_4 P_4$$

Esta función definida en coordenadas normales sería:

$$\bar{S} = +\nabla \partial_4 P_4$$

y, en coordenadas naturales:

$$\bar{S} = +i\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\,\nabla \frac{\partial P_4}{\partial t}.$$

Al ser derivada respecto al tiempo la ecuación (114), y utilizando la definición anterior, se llega a la ecuación:

$$\nabla \cdot \bar{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}.$$

B I B L I O G R A F I A

L i b r o s

Batygin, V. V. y I. N. Toptygin, Problems in electrodynamics, Academic Press, London, 1962.

Becker, R., Théorie des electrons, L. Felix Alcan, Paris, 1938.

Born, M. y E. Wolf, Principles of optics, Pergamon Press, Oxford, 1975.

Cassirer, E., Substance and function and Einstein's theory of Relativity, Dover Pub. Inc., New York, 1953.

Cunningham, E., The principle of Relativity, Cambridge at the University Press, 1921.

Dicke, R. H., The theoretical significance of experimental Relativity, Gordon and Breach, New York, 1968.

Gelfand, I. M. y S. V. Fomin, Calculus of variations, Prentice-Hall, Inc., New Jersey, 1963.

Hertz, H., Electric waves, Dover Publications, Inc., New York, 1962.

Idées modernes sur la constitution de la matiere, les, Collection de mémoires relatifs a la physique, Gauthier-Villars, Paris, 1913.

Joos, G., Theoretical Physics, Hafner Pub. Co., New York, 1950.

Kerner, E. H., Ed., The theory of action-at-a-distance in relativistic particle dynamics, Gordon and Breach, New York, 1972.

Larmor, J., Aether and matter, Cambridge at the University Press, 1900.

Lichnerowicz, A., Elements de calcul tensoriel, Lib. Armand Colin, Paris, 1958.

Lorentz, H. A., Collected papers, Martinus Nijhoff, The Hague, 1935.

-------------, The theory of electrons, B. G. Teubner, Leipzig, 1909.

MacCullagh, J., Collected works, Dublin, 1880. (También; McCullagh, J.)

Maxwell, J. C., The scientific papers of James Clerk Maxwell, W. D. Niven Ed., Dover Pub., Inc., New York, 1965.

-------------, A treatise on electricity and magnetism, Dover Pub., Inc., New York, 1954.

Niven, W. D., véase; Maxwell, J. C., The scientific...

O'Rahilly, A., Electromagnetic theory, Dover Pub., Inc., New York, 1965.

Panofsky, W. K. H. y M. Phillips, Classical electricity and magnetism, Addison Wesley Pub. Co., Mass., 1962.

Pauli, W., Electrodynamics, Pauli Lectures on Physics, The MIT Press, Cambridge, 1981.

Planck, M., Theory of electricity and magnetism. Introduction to theoretical Physics, vol. III, The MacMillan Co., New York, 1949.

Poincaré, H., Electricité et optique. I-Les théories de Maxwell, Georges Carré, Editeur, Paris, 1890.

Richardson, W., The electron theory of matter, Cambridge at the University Press, 1916.

Rohrlich, F., Classical charged particles, Addison-Wesley Pub. Co. Inc., Mass., 1965.

Rosenfeld, L., Theory of electrons, Dover Pub. Inc., New York, 1965.

Shercliff, J. A., Vector fields, Cambridge University Press, London, 1977.

Sokolnikoff, I. S., Advanced calculus, McGraw-Hill Book Co., New York, 1939.

—————————, Tensor analysis, John Wiley & Son, New York, 1964.

Sommerfeld, A., Electrodynamics. Lectures on theoretical Physics, vol. III, Academic Press, New York, 1952.

—————————, Mechanics of deformable bodies. Lectures on theoretical Physics, vol. II, Academic Press, New York, 1950.

Stokes, G. G., Mathematical and physical papers, Johson Reprint Corp., New York, 1966.

Stratton, J. A., Electromagnetic theory, McGraw Hill Book Co., New York, 1941.

Yourgrau, W. y S. Mandelstam, Variational principles in dynamics and

Quantum theory, Dover Pub. Inc., New York, 1979.

Artículos

Dirac, P. A. M., Is there an Aether?, (Letters to the editor), Nature 168, 906, 1951.

————————, A new classical theory of electrons, Proceedings of the Royal Society, 209A, p. 291, 1951.

Finzi, B., Sul principio della minima azione e sulle equazione elettromagnetiche che se ne deducono. Lincei-Rend. Sc. fis. mat. e nat., XII, 378, 1952.

Frisch, D. H. y L. Wilets, Development of the Maxwell-Lorentz Equations from Special Relativity and Gauss's Law, Americal Journal of Physics, 24, 574, 1956.

Hertz, H., The forces of electric oscillations, treated according to Maxwell's theory, Wiedemann's Ann. 36, p. 1, 1889.

Levi-Civita, T., Sulla riducibilita delle equazioni elettrodinamiche di Helmholtz alla forma Hertziana, Nuovo Cimento, Serie IV, vol. 6, 1897.

Lorentz, H. A., The fundamental equations for electromagnetic phenomena in ponderable bodies, deduced from the theory of electrons, Proceedings of Academy of Amsterdam, 5, 254, 1902.

McCullagh, J., An essay towards a dynamical theory of crystalline reflexion and refraction, Transactions of the Royal Irish Academy, XXI, 1840.

Maxwell, J. C., A dynamical theory of electromagnetic field, Royal Society Transactions, CLV, 1864.

Mazur, P. y B. R. A. Nijboer, On the statistical mechanics of matter in an electromagnetic field. I-Derivation of the Maxwell equations from electron theory, Physica, XIX, 1953.

Righi, A., Sui campi elettromagnetici e particolarmente su quelli creati da cariche elettriche o da poli magnetici in movimento, Il Nuovo Cimento, Serie V, T. II, 1901.

Stokes, G. G., On the theories of the internal friction of fluids in motion, and of the equilibrium and motion of elastic solids, Transactions of the Cambridge Philosophical Society, VIII, p.287, 1845.

Swann, W. F. G., New deductions of the electromagnetic equations, Physical Review, XXVIII, p. 531, 1926.

Tessman, J. R., Maxwell-Out of Newton, Coulomb, and Einstein, Americal Journal of Physics, 34, p. 1048, 1966.

Wheeler, J. A. y R. P. Feynman, Classical electrodynamics in terms of direct interparticle action, Reviews of Modern Physics, 21, p. 425, 1949.