

Universidad Nacional Autónoma de México

FACULTAD DE CIENCIAS



CONDUCCION ELECTRICA EN ROCAS SEDIMENTARIAS QUE ESTAN TOTAL O PARCIALMENTE SATURADAS CON AGUA

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

F I S I C O

P R E S E N T A

GUSTAVO MENDOZA ROMERO

MEXICO, D. F.

1985



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

R E S U M E N

Se presenta un estudio sobre la conducción de la electricidad en rocas que están total o parcialmente saturadas con agua. Este es un tema de interés económico para la industria petrolera, sobre todo en relación con el cálculo del volumen de hidrocarburos almacenado en un yacimiento petrolífero.

Tradicionalmente, en el cálculo del volumen de hidrocarburos se hace uso de las llamadas ecuaciones generalizadas de Archie. Sin embargo, estas expresiones son relaciones empíricas que no tienen un fundamento teórico sólido, y que fallan en sus valores extremos.

En este trabajo se propone una nueva alternativa que se apoya en algunas ideas de J.C. Maxwell y C. Pérez-Rosales. Las formulaciones resultantes eliminan las limitaciones de las ecuaciones generalizadas de Archie, a la vez que simplifican los procedimientos para el cálculo del volumen de hidrocarburos.

Con objeto de que el trabajo sea autocontenido, se presentan definiciones de conceptos básicos, desarrollos matemáticos completos, comprobaciones experimentales y aplicaciones a casos de campo.

C O N T E N I D O

página

1.	INTRODUCCION.....	1
	1.1 Rocas Naturales.....	1
	1.2 Clasificación de las rocas sedimentarias.....	3
	1.3 Consideraciones generales.....	5
2.	CONCEPTOS BASICOS.....	9
	2.1 Porosidad.....	10
	2.2 Indices de saturación.....	14
	2.3 Resistividad.....	17
	2.4 Factor de formación.....	20
	2.5 Indice de resistividad.....	23
3.	ANTECEDENTES.....	25
	3.1 Trabajos experimentales.....	26
	3.2 Trabajos teóricos.....	36
4.	LA ECUACION DE MAXWELL.....	39
	4.1 Importancia de la expresión para F_R y \emptyset , basada en las ideas y desarrollos de Maxwell.....	40
	4.2 Establecimiento de la ecuación diferencial que describe el fenómeno bajo estudio.....	42
	4.3 Solución a la ecuación de Laplace.....	47
	4.4 Determinación del potencial eléctrico dentro y fuera de una esfera de resistividad R_i sumergida en un medio de resistividad R_w	52
	4.5 Determinación de la resistividad equivalente de un sistema esférico constituido por N esferas iguales de resistividad R_i sumergidas en un electrolito de resistividad R_w	55
	4.6 Obtención de la Ecuación de Maxwell.....	60
	4.7 Determinación de la resistividad equivalente de un modelo teórico de doble porosidad.....	63
	4.8 Obtención de la ecuación modificada de Maxwell.....	66

5.	GENERALIZACION DE LA ECUACION DE MAXWELL.....	68
5.1	La Ecuación de Fricke.....	69
5.2	La Ecuación de Maxwell-Fricke.....	72
5.3	La Ecuación General de Pérez-Rosales.....	73
5.4	La Relación General entre factor de formación y las porosidades primaria y secundaria.....	79
5.5	Acerca de los parámetros m y G	83
5.6	Algo sobre el significado físico de m y G	86
5.7	Importancia de los valores de m y G	87
5.8	Evaluación de los parámetros m y G a partir de datos de laboratorio.....	89
5.9	Pruebas de validez.....	91
5.10	Determinación del exponente m a partir de datos de registro.....	97
5.11	Un acercamiento a la relación existente entre el coeficiente G y el exponente m	102
5.12	Algunas implicaciones de la presente teoría.....	105
6.	RELACION GENERAL ENTRE EL INDICE DE RESISTIVIDAD Y EL INDICE DE SATURACION DE AGUA.....	110
6.1	Consideraciones teóricas.....	112
6.2	Deducción de la relación entre el índice de resistividad y el índice de saturación de agua.....	118
7.	APLICACION A UN CASO DE CAMPO.....	122
	CONCLUSIONES.....	136
	NOMENCLATURA.....	141
	REFERENCIAS.....	146
	APENDICES.....	152

CAPITULO 1

INTRODUCCION

1.1 Rocas Naturales

Una descripción, aunque sea breve, de las características básicas de las rocas naturales es fundamental en la evaluación de una formación geológica que contiene cantidades comerciales de hidrocarburos.

De acuerdo a su origen, las rocas naturales se dividen en tres grandes grupos: ígneas, sedimentarias y metamórficas¹. Se considera que las formaciones sedimentarias son las más abundantes en superficie, ya que ocupan casi el 75% de una "delgada" capa de aproximadamente 12 kms situada en la litosfera, la cual por limitaciones tecnológicas ha resultado imposible de atravesar. Esto es, la gran mayoría de pozos tan sólo alcanzan profundidades comprendidas dentro de los 6 primeros kms de la corteza terrestre. En consecuencia, las rocas sedimentarias constituyen los sistemas de interés primordial en el presente trabajo, por ser éstas las generadoras y almacenadoras de petróleo.

En general, éstas rocas son el producto litológico de materia (orgánica o inorgánica) sólida y natural; es decir, son el resultado litificado de sedimentos derivados de rocas preexistentes que han sido afectadas por diferentes fenómenos como: el intemperismo (físico, químico y biológico), la erosión (transporte de materia por viento, agua, animales), la sedimentación (acción de la gravedad) y la diagénesis (compactación, cementación y cristalización).

De lo anterior se desprende que estas rocas tienen en común su formación a partir de fragmentos de rocas más antiguas, el desplazamiento de sus lugares originales, la generación y almacenamiento de hidrocarburos, etc. Varían en composición mineralógica, textura, densidad, color, etc. y su gran importancia radica en suministrar los materiales y energéticos que han hecho posible la civilización.

Por otra parte, a pesar de la inmensa aglomeración de sedimentos y de los diversos fenómenos que se presentan en el proceso de litificación, o de producción de las rocas, es posible la subsistencia de oquedades o espacios vacíos entre sus estructuras granulares que les confieren, en términos generales, todas las propiedades de un sistema poroso bien establecido.

Los poros de estos sistemas se encuentran distribuidos de una manera aleatoria y se manifiestan en forma de oquedades comunicadas o huecos entrampados, como se puede constatar en la fig. 1.1.

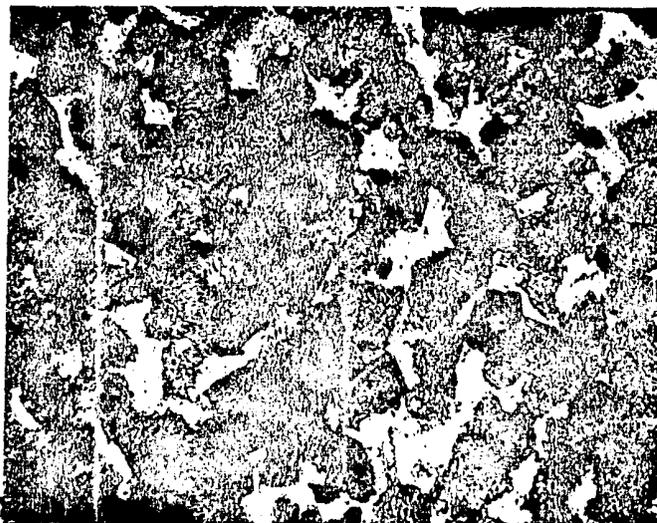
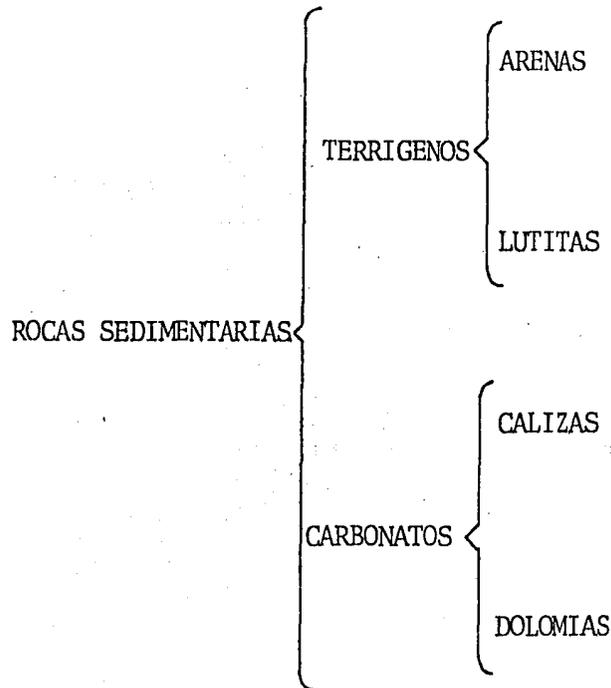


Fig. 1.1 Microfotografía (50X) de una sección de roca sedimentaria. Las zonas claras constituyen los poros y las regiones oscuras los granos de la roca. (I. M. P., 1975)

1.2 Clasificación elemental de las rocas sedimentarias

Para nuestro propósito, y de acuerdo con la proporción en que existan sus diferentes componentes elementales, las rocas sedimentarias pueden dividirse en dos grandes grupos: TERRIGENOS Y CARBONATOS², esto es:



Una clasificación más detallada¹⁻² queda fuera del alcance de este trabajo.

TERRIGENOS:

Los componentes terrígenos son sustancias que se derivan de la erosión de una masa continental, situada al exterior de una cuenca marina de depósito y que son transportadas a dicha cuenca en forma sólida en donde se depositan junto con fragmentos de origen orgánico. Esta depositación generalmente se lleva a cabo en capas sucesivas.

Las sustancias antes mencionadas pueden ser muy diferentes entre sí, separándose en función de la naturaleza mineralógica o petrográfica de los elementos, su tamaño y su forma, su colocación relativa, su compactación y de la abundancia y naturaleza del cemento que posean.

Desde el punto de vista mineralógico, el elemento predominante en las rocas terrígenas es, por lo general, el cuarzo, el cual representa más de los 2/3 del volumen total de roca. La mayoría de las veces se encuentra acompañado, en proporción variable, de otros elementos denominados fragmentarios como feldespatos, micas, minerales arcillosos, trozos de roca cristalina o volcánica, minerales pesados, guijarros de pedernal o de caliza derivados de la erosión de rocas más antiguas o también de arcillas, glauconita, piritita, etc.

Los Terrígenos productivos son principalmente arenas o sílice de grano fino cuyas partículas llegan a medir entre 1 mm y 1/16 mm.

CARBONATOS:

Dentro de este grupo, se encuentran incluidas las rocas sedimentarias, constituidas en su mayor parte por minerales a base de carbonatos, entre los cuales los principales son la calcita y la dolomita,

La matriz o cemento de estas rocas se deposita directamente del agua marina o es extraída de ella por los organismos vivientes. A menudo se encuentran fósiles de estos organismos en la matriz.

El aspecto, composición y textura de estas rocas son muy variables, ya que existen todos los términos de transición entre la caliza y la dolomita, lo que hace difícil poder establecer alguna subdivisión. Lo anterior procede del hecho de que la formación de estas rocas es el resultado de acciones variadas, susceptibles de superponerse

unas a otras. Dichas acciones o procesos químicos son la precipitación, la dolomitización, disolución, etc. que pueden alterarlas o reestructurarlas.

Puesto que en México los yacimientos de mayor producción están formados por calizas con porcentajes variables de dolomía y un contenido generalmente bajo de arcillas, la clasificación de las rocas sedimentarias que se ha presentado será de gran utilidad más adelante, en el Capítulo 7 de este trabajo.

1.3 Consideraciones Generales

Brevemente, se puede decir que un cuerpo de roca porosa, permeable, impregnada con hidrocarburos y limitada casi siempre por una capa de roca impermeable y un acuífero, genera un yacimiento de petróleo, el cual puede ser considerado como un lugar privilegiado donde se han efectuado eventos favorables, repartidos en el tiempo y ligados a la historia geológica de una cuenca sedimentaria. En la fig. 1.2 se muestran las partes principales de un yacimiento de hidrocarburos.

Desde el punto de vista económico, la parte más importante es la zona de aceite. Esta zona está constituida por tres componentes básicos que son: la roca porosa almacenante, los hidrocarburos que la impregnan y el agua congénita que invariablemente ocupa una parte de los poros donde residen los hidrocarburos.

Cuando se perforan los primeros pozos y se descubre un yacimiento (fig. 1.3) se plantea el problema de evaluar la cantidad de hidrocarburos contenidos en los espacios porosos de la roca almacenante, para ver si el yacimiento es comercialmente explotable. Puesto que no es posible tener acceso directo a estos sistemas, es necesario determinar sus características por medios indirectos tales como los registros de pozo.

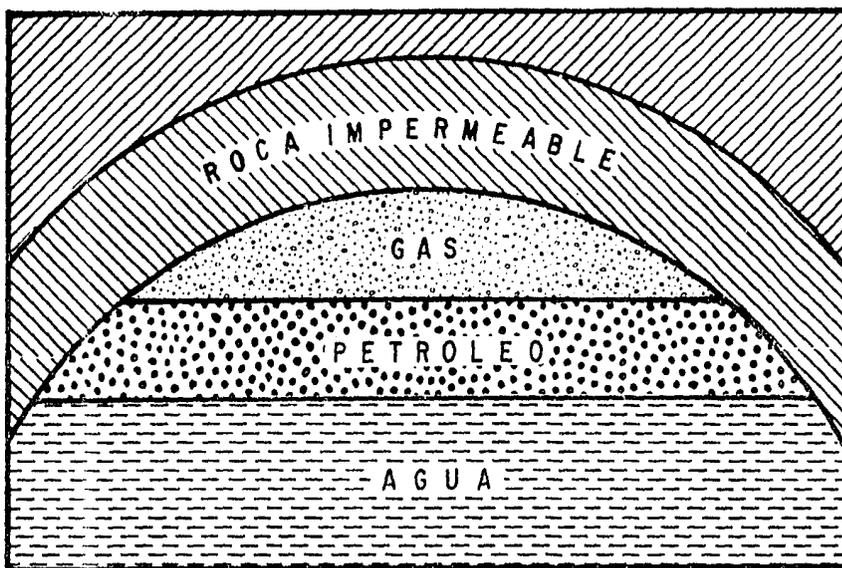


FIG. 1.2.- REPRESENTACION ESQUEMATICA DE UN YACIMIENTO DE HIDROCARBUROS.

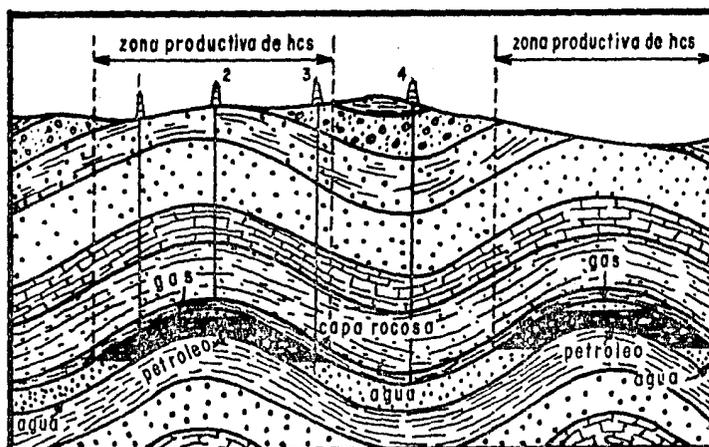


FIG. 1.3.- ASPECTO GENERAL DE LA EXPLOTACION DE UN YACIMIENTO EN UN CAMPO PETROLERO .
 EL POZO 1 ES UN POZO DE PETROLEO
 EL POZO 2 ES UN POZO DE GAS
 EL POZO 3 PRODUCE TANTO PETROLEO COMO AGUA
 EL POZO 4 ES UN POZO DE AGUA

Un registro geofísico de pozo es una respuesta, obtenida en forma gráfica, de alguna propiedad particular de las formaciones geológicas atravesadas por un pozo en función de la profundidad (fig. 1.4). Los registros se obtienen al introducir una sonda mediante un cable conductor aislado a través del cual se reciben las señales en un equipo registrador situado en la superficie.

Aquí sólo serán consideradas aquellas sondas que tienen como característica fundamental el envío de una señal a través de la formación y la medición del nivel de energía, después de haber recorrido alguna distancia: registros acústicos, resistivos, radiactivos, etc. La información suministrada por estos dispositivos ha permitido establecer diversas técnicas como herramientas de análisis en la determinación del potencial productivo de un yacimiento de petróleo.

Los objetivos fundamentales de este trabajo son:

- a. La deducción teórica de las relaciones existentes entre el factor de formación y la porosidad total; entre el factor de formación y las porosidades primaria y secundaria; y entre el índice de resistividad y el índice de saturación de agua. Estas expresiones son básicas en el análisis de registros eléctricos, y
- b. El desarrollo y aplicación de nuevos procedimientos que faciliten la determinación de algunos parámetros petrofísicos de interés para la evaluación de un yacimiento petrolífero.

Estos problemas no han sido resueltos en su totalidad. Aún subsisten diversos puntos débiles que hacen que tanto los desarrollos teóricos como las técnicas convencionales de cálculo no sean del todo confiables.

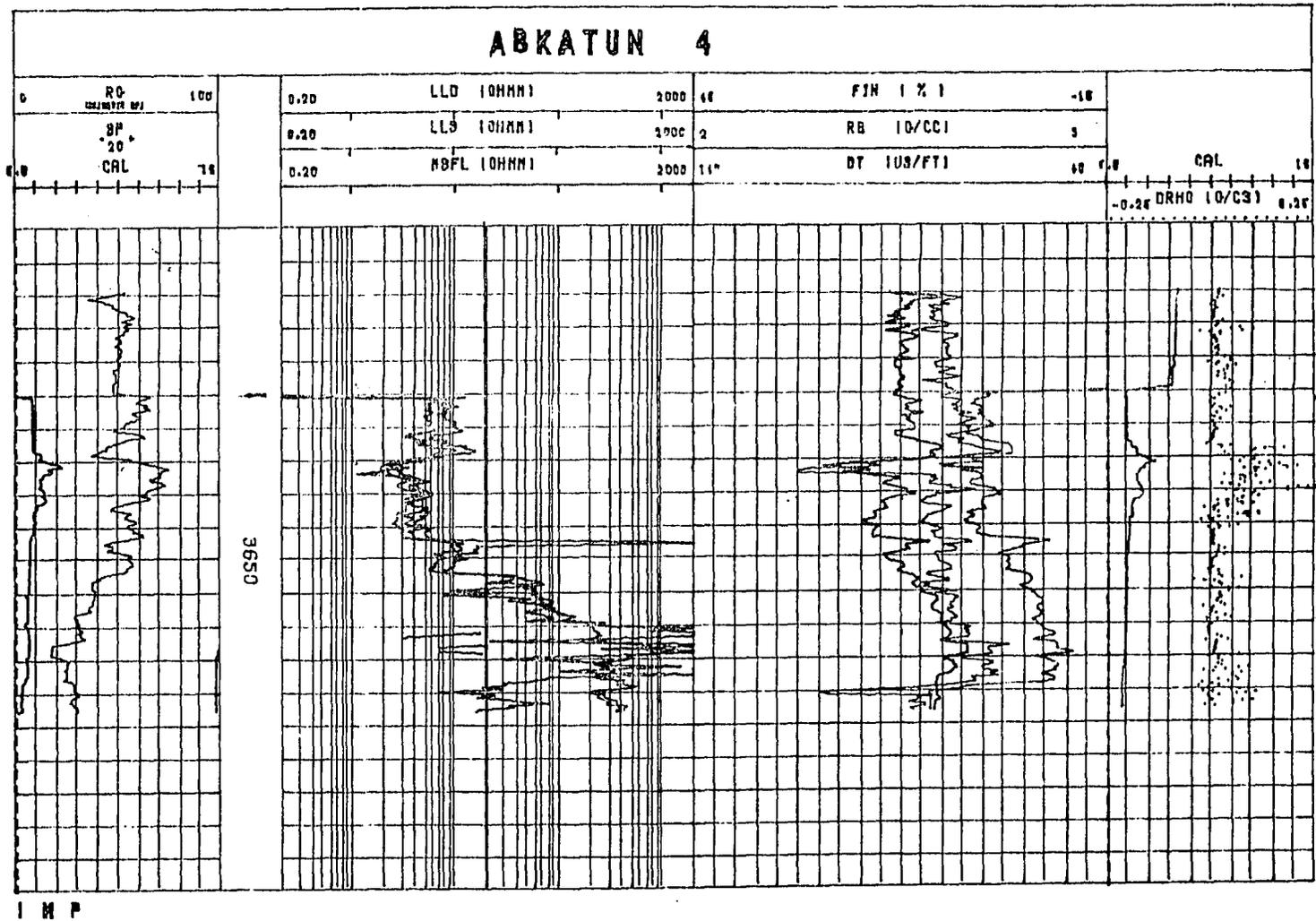


FIG. 1.4 EJEMPLO DE UN REGISTRO COMBINADO COMPLETO

CAPITULO 2

CONCEPTOS BASICOS

Antes de entrar de lleno en el desarrollo del tema, es conveniente presentar algunas definiciones de conceptos básicos, describiendo brevemente la manera en que se pueden evaluar los parámetros que relacionan, esto es, las diferentes variables que permiten establecer tales definiciones.

En términos generales, se puede decir que las propiedades de las rocas quedan resumidas en cuatro grandes grupos: petrofísicas, eléctricas, mecánicas y superficiales. Para este trabajo serán consideradas únicamente las propiedades más representativas de los dos primeros grupos, tales como: porosidad, índices de saturación de fluidos, resistividad, factor de formación e índice de resistividad. Además se establece la importancia que representa, para la industria petrolera, la evaluación de cada uno de estos parámetros.

2.1 Porosidad

La porosidad es un concepto que indica la medida del espacio intergranular "vacío", disponible para acumular fluidos.

Supóngase que se tiene una muestra de roca de volumen total geométrico (sólidos + poros) V_t . Si el espacio poroso ocupa un volumen V_p y los sólidos un volumen V_s , entonces la porosidad \emptyset está dada por:

$$\emptyset = \frac{V_p}{V_t} = \frac{V_p}{V_s + V_p} \quad (2.1)$$

De esta expresión se puede observar que mientras mayor es el volumen del espacio poroso mayor es la capacidad de almacenamiento del sistema considerado. Además, \emptyset es una fracción adimensional menor o igual que la unidad y en la práctica es común expresarla como un porcentaje. Generalmente, en yacimientos de interés comercial los valores de porosidad caen dentro del intervalo de 1.0% a 30%³.

Geológicamente, la porosidad \emptyset es dividida en porosidad primaria \emptyset_1 y porosidad secundaria \emptyset_2 , dependiendo de los procesos sedimentarios, diagenéticos y estructurales que intervienen en la formación de una roca³.

Porosidad Primaria, \emptyset_1

La porosidad primaria u original \emptyset_1 es aquella que se genera o que ha estado presente entre y/o dentro de las partículas sedimentarias durante el proceso de depositación de los sedimentos³.

Porosidad Secundaria, \emptyset_2

La porosidad secundaria \emptyset_2 también conocida como porosidad inducida³ es aquella que se desarrolla con posterioridad al proceso de depositación de los sedimentos y puede ser debida a fracturas, fisuras, cavernas, etc., que resultan de procesos como la disolución de calizas y/o dolomías, la dolomitización, la cementación, etc. ó de otras características como el tipo de roca, posición estructural, presión de sobrecarga, etc. En forma general se puede afirmar que la porosidad secundaria mejora considerablemente la capacidad de flujo de los fluidos que están presentes en una formación geológica.

La relación entre estos dos tipos de porosidad varía según los yacimientos. En nuestro país, las areniscas del Terciario manifiestan principalmente porosidad primaria, en cambio los yacimientos carbonatados, que son los comercialmente más importantes presentan con bastante frecuencia porosidad secundaria, pero baja porosidad primaria.

Porosidad de Flujo, \emptyset_f y Porosidad de Estancamiento, \emptyset_s

Desde el punto de vista de la conducción eléctrica en medios porosos se distinguen dos tipos más de porosidad⁴, una asociada a regiones de flujo, \emptyset_f , y otra a zonas de estancamiento, \emptyset_s , según se verá más adelante, en el capítulo 5 de este trabajo.

Algunas Características de la Porosidad

Experimentalmente se ha encontrado que la porosidad varía con el tamaño, forma, arreglo y distribución de los elementos sólidos que constituyen una muestra porosa. Otros factores que influyen en la porosidad son: la compactación y la cementación.

Para ilustrar este punto, se presentan los siguientes ejemplos: en la fig. 2.1 aparece un arreglo cúbico de granos esféricos del mismo tamaño cuya porosidad es 47.6%. En la fig. 2.2 se presenta un arreglo romboédrico de granos esféricos de igual tamaño que proporciona una porosidad $\emptyset \cong 26\%$. Y en la fig. 2.3 se tiene un arreglo cúbico de granos esféricos de dos diferentes tamaños en el cual la porosidad es 12.6%, aproximadamente.

Evaluación de la Porosidad

Existe un gran número de maneras de determinar la porosidad en el laboratorio⁵, sin embargo, se considera que el mejor método consiste en saturar una muestra limpia y seca con un fluido de densidad conocida, y determinar el volumen del espacio poroso a partir del aumento en el peso de la muestra. Antes de iniciar la saturación, es necesario hacer el vacío dentro de la muestra.

En un yacimiento, se puede obtener un índice de su porosidad directamente de la lectura de algunos registros geofísicos⁶ como el registro neutron compensado, CNL, el registro de densidad compensada, FDC, el registro sónico, BHC, etc. Por otra parte, en formaciones de litología compleja la porosidad se determina mediante el procesamiento simultáneo de los datos de los registros anteriores utilizando técnicas convencionales⁶.

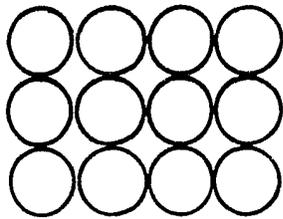


FIG. 2.1.- EMPACAMIENTO CUBICO
(GRANOS DE IGUAL TAMAÑO) $\phi = 47.6\%$

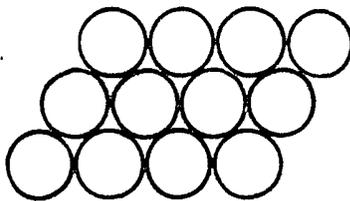


FIG. 2.2.- EMPACAMIENTO ROMBOEDRICO
(GRANOS DE IGUAL TAMAÑO) $\phi \approx 26\%$

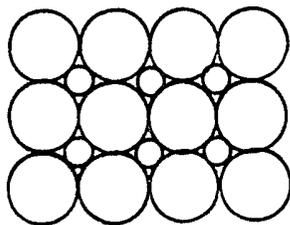


FIG. 2.3.- EMPACAMIENTO CUBICO
(GRANOS DE DOS TAMAÑOS DIFERENTES) $\phi \approx 12.6\%$

2.2 Indices de Saturación

El concepto de índice de saturación indica la fracción de la porosidad ocupada por agua, aceite, gas o combinaciones de estos fluidos, y debe ser utilizado en lugar del término "saturación", que identifica el caso particular de una roca cuando ésta almacena a toda su capacidad un sólo tipo de fluido.

Ya que los poros de las formaciones de un yacimiento están por lo general impregnados parcialmente con aceite, parcialmente con gas y parcialmente con agua, se puede hablar, con toda propiedad de una porosidad asociada al aceite, ϕ_o , una porosidad asociada al gas, ϕ_g , y una porosidad asociada al agua, ϕ_w , las cuales deben satisfacer la relación:

$$\phi = \phi_o + \phi_g + \phi_w \quad (2.2)$$

Luego, para indicar en qué proporción existen dichos fluidos dentro de los poros, se han definido los términos índice de saturación de aceite, índice de saturación de gas e índice de saturación de agua, en la forma siguiente:

$$S_o = \frac{\phi_o}{\phi} \quad (2.3)$$

$$S_g = \frac{\phi_g}{\phi} \quad (2.4)$$

$$S_w = \frac{\phi_w}{\phi} \quad (2.5)$$

Como se puede observar, los índices de saturación son fracciones adimensionales cuya suma es igual a la unidad, es decir:

$$S_o + S_g + S_w = 1 \quad (2.6)$$

Evaluación de los Índices de Saturación

De todos los métodos desarrollados para evaluar el índice de saturación de agua, gas o aceite, el de "balance volumétrico"⁷ es de los más utilizados en el laboratorio.

Este método considera que si se determina la porosidad de una muestra de roca seca (al vacío) y luego se inyecta en el material un volumen de cualquier fluido, V_f , el índice de saturación del fluido, S_f , puede ser calculado directamente por conservación de volumen, a través de la relación:

$$S_f = \frac{V_f}{\phi V_t} \quad (2.7)$$

donde, V_f es el volumen del fluido saturante, \emptyset es la porosidad de la muestra de roca y V_t es el volumen total geométrico.

En un yacimiento, el índice de saturación de agua, y en consecuencia el de hidrocarburos, se determina por medios indirectos a través de técnicas establecidas que hacen uso de datos de registro y de modelos matemáticos que no satisfacen las condiciones de frontera correctas⁸⁻⁹. De aquí la importancia de desarrollar teorías que permitan mejorar la interpretación de registros.

Finalmente, cabe señalar que la evaluación del índice de saturación de agua es de importancia primordial para:

- a) La determinación del contacto agua-hidrocarburos como límite inferior de un yacimiento,
- b) La definición del intervalo a explotar,
- c) El cálculo del volumen original de hidrocarburos.

2.3 Resistividad

La resistividad, R , es una característica de todo material que consiste en la oposición que presenta al paso de la corriente eléctrica, y se determina a través de la siguiente ecuación:

$$R = r \frac{A}{L} \quad (2.8)$$

donde, R es la resistividad del material, r la resistencia, A el área transversal del conductor y L la longitud del conductor.

En mediciones realizadas con electrolitos, R , es reportada comunmente en ohm-cm., r es expresada en ohm, A en cm^2 y la L en cm. Sin embargo, en el estudio de las propiedades eléctricas de suelos y rocas, se ha encontrado que la resistividad queda más convenientemente expresada en ohm-metro.

En la práctica, la resistividad en ohm-metro se representa frecuentemente por el símbolo R y un subíndice que indica el tipo de sistema considerado. Así, por ejemplo, la resistividad del agua de una formación geológica se puede expresar por R_w y la resistividad de un sistema constituido de una roca que está saturada con agua se puede representar por R_o . Esta es la nomenclatura que se utilizará en este trabajo, cuando se haga referencia a la resistividad de un fluido o a la de un sistema roca-fluido.

Evaluación de la Resistividad

Para medir la resistividad de un sistema roca-fluido, se hace uso de un arreglo como el mostrado esquemáticamente en la fig. 2.4 . Este arreglo es conocido como el método de 4 electrodos¹⁰⁻¹¹. De acuerdo con la figura, la resistividad del sistema es:

$$R_o = \frac{Ar}{L} \quad (2.9)$$

Donde r es la resistencia del tramo de longitud L comprendido entre las líneas punteadas y A es el área de la sección transversal de la muestra. Haciendo uso de la Ley de Ohm, se encuentra que:

$$R_o = \frac{A V}{L I} \quad (2.10)$$

La resistividad del electrolito se mide en una celda especial, en forma similar a la del sistema roca-fluido.

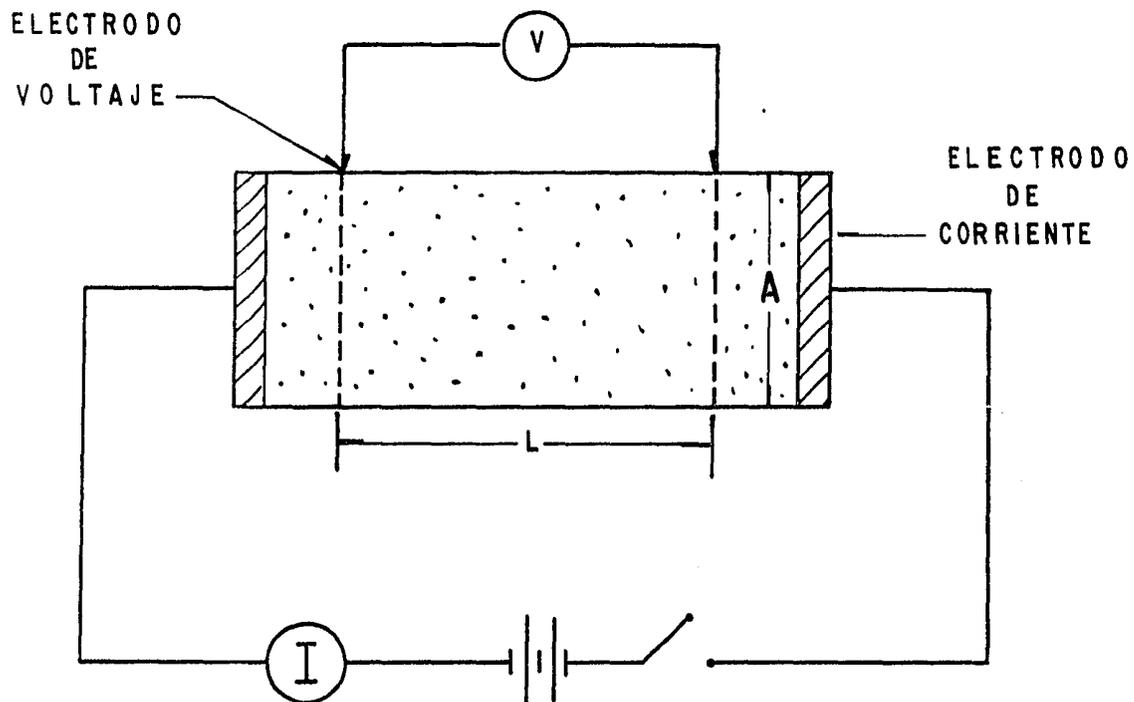


FIG.2.4 - ARREGLO PARA DETERMINAR LA RESISTIVIDAD DE ROCAS SATURADAS CON ELECTROLITOS .

2.4 Factor de Formación

El factor de resistividad de la formación, F_R , es conocido comúnmente como factor de formación y representa una medida del grado de complejidad geométrica del espacio poroso de la roca.

Supóngase que se tiene una muestra de roca de material aislante y un electrolito de resistividad, R_w , como los que existen en un yacimiento de petróleo. Cuando la muestra se satura con el electrolito, la resistividad total resultante del sistema roca-fluido es R_o . Se ha establecido experimentalmente¹² que la resistividad R_o de la roca saturada con un electrolito es directamente proporcional a la resistividad R_w del electrolito saturante; es decir, $R_o = F_R R_w$, donde F_R , que es la constante de proporcionalidad, se ha denominado factor de resistividad de la formación y está dado por:

$$F_R = \frac{R_o}{R_w} \quad (2.11)$$

Esto es, el factor de formación de una muestra porosa es la razón de la resistividad de la muestra saturada con un electrolito, a la resistividad de éste último.

De la expresión 2.11 se puede observar que el factor de resistividad es una cantidad adimensional mayor que la unidad, que depende de las características litológicas de la roca y más exactamente de la forma de los canales constituidos por los poros intercomunicados de la muestra, como se verá en el Capítulo 5 de este trabajo.

Evaluación del Factor de Formación

En el laboratorio, la evaluación del factor de formación no representa ningún problema ya que, para una muestra porosa cualquiera, los parámetros R_o y R_w pueden ser determinados, con bastante precisión, en la forma descrita en la sección precedente.

En una formación geológica saturada con agua, la resistividad R_w de esta última puede ser calculada a partir de⁶:

- a) la curva del registro SP (potencial espontáneo),
- b) medida directamente de muestras de agua recuperadas durante la perforación de los pozos ó
- c) determinada mediante análisis químico.

La resistividad R_o de dicha formación es determinada en base a registros de resistividad. Los registros eléctricos utilizados para este fin son⁶: el microlog o el microlaterolog, dependiendo del tipo de formación analizada, esto es:

- i) Los microregistros son utilizados en formaciones suaves o de baja densidad y,
- ii) Los microregistros laterales son empleados en formaciones compactas.

Con estos registros puede determinarse la resistividad de una zona de la formación que se localiza cerca del pozo, la cual está saturada con agua del lodo de perforación, esto es, generalmente se supone que la salmuera congénita de la formación ha sido reemplazada por el filtrado de lodo utilizado en la perforación del pozo. Como la resistividad del filtrado de lodo es conocida, entonces se puede llegar

a evaluar el factor de formación a través de la siguiente expresión:

$$F_R = \frac{R_{xO}}{R_{mf}} \quad (2.12)$$

donde, R_{xO} es la resistividad de la formación saturada con el filtrado de lodo y R_{mf} es la resistividad del filtrado de lodo saturante, la cual es medida de las muestras extraídas durante la perforación de un pozo.

2.5 Indice de Resistividad

El índice de resistividad, I_R , es un indicador de las propiedades eléctricas y de la cantidad existente de cada uno de los diferentes fluidos que saturan una muestra porosa. Esto es, I_R es un parámetro que permite distinguir los fluidos que saturan, en un momento determinado, un sistema poroso.

Si se supone que la resistividad de una muestra porosa saturada con agua es R_0 y cuando sus poros están parcialmente ocupados por agua su resistividad es R_t . Entonces el índice de resistividad se define como:

$$I_R = \frac{R_t}{R_0} \quad (2.13)$$

En otras palabras, la ecuación 2.13 establece que el índice de resistividad I_R de una muestra porosa está definido como la razón de la resistividad R_t de dicha muestra cuando está saturada con varios fluidos (agua, aceite y gas) a la resistividad R_0 de la misma muestra saturada con agua solamente.

De lo anterior se deduce que, al igual que el factor de formación, el índice de resistividad es una cantidad adimensional mayor o igual a la unidad. Esta condición puede visualizarse más claramente, en términos de los índices de saturación.

Supóngase que en una muestra porosa cualquiera, los índices de saturación de aceite y gas son mayores que el índice de saturación de agua, entonces se debe cumplir que: $R_t \gg R_o$, de donde $I_R \gg 1$ ya que el aceite y el gas tienen resistividades del orden de la matriz litológica, bastante más altas que la del agua.

Por otra parte, es obvio que, conforme los índices de saturación de aceite y gas, S_o y S_g , disminuyen, el valor del índice de saturación de agua S_w , crece, de modo que en el límite: $S_o + S_g = 0$ y $S_w = 1$, debe cumplirse que: $R_t = R_o$, de donde $I_R = 1$.

De las condiciones anteriores se desprende que el mínimo valor físicamente posible para el índice de resistividad es la unidad. Este valor se alcanza únicamente en el caso de que una muestra porosa esté saturada con agua.

CAPITULO 3

ANTECEDENTES

La literatura existente respecto al tema de la conducción eléctrica a través de medios porosos revela que diversos investigadores han considerado el problema de encontrar un modelo matemático general para el factor de formación de una muestra porosa en función de su porosidad, así como para el índice de resistividad en términos del índice de saturación de agua.

Numerosas son las fórmulas que han sido propuestas hasta la fecha y , sin embargo, existe evidencia de que ninguna de ellas es suficientemente exacta y universal. Todas las ecuaciones propuestas sólo son válidas en intervalos particulares de la porosidad y del índice de saturación de agua.

En este Capítulo se presentan únicamente los resultados, tanto de tipo experimental como teórico, de algunas investigaciones que se han efectuado sobre el tema^{4,6,8,9,12,16-33,37-40}

3.1 Trabajos Experimentales

Dentro de este grupo quedan comprendidos los trabajos cuyo objetivo primordial consiste en proponer relaciones entre parámetros que permiten caracterizar una muestra porosa, a partir de datos obtenidos en el laboratorio o en el campo.

La técnica de evaluación de estos parámetros en el laboratorio constituye también el principio en el que están basados casi todos los registros de pozo y , como ya se mencionó con anterioridad, consiste en enviar una señal a través de la muestra en estudio y medir la respuesta después de haber recorrido una distancia.

En el análisis de registros geofísicos, las relaciones que mayor énfasis han recibido son aquéllas que permiten evaluar la resistividad de una roca, total o parcialmente saturada con agua, en términos de la porosidad, el índice de saturación de agua y otros parámetros que reflejan la geometría y la textura de la roca. Asimismo, se puede observar que las ecuaciones que modelan dichas relaciones son obtenidas a partir de métodos gráficos^{12,14,16-20,22,26,39-40}

A continuación se presentan los resultados de algunas investigaciones experimentales consideradas como base del análisis de registros eléctricos.

Antecedentes sobre el establecimiento de la relación entre F_R y \emptyset

Sundberg¹⁴ propuso, por vez primera, relacionar el volumen poroso de una roca con la razón de la resistividad del sistema roca-fluido a la resistividad del fluido saturante.

Posteriormente, en un artículo publicado en 1937, Jakosky y Hooper¹⁵ determinaron experimentalmente que la resistividad eléctrica de cualquier tipo de roca es función del porcentaje de agua contenida en sus poros, concluyendo que la relación entre estas variables petrofísicas presenta la forma de una hipérbola general.

Sin embargo, las relaciones antes mencionadas son conocidas como Leyes de Archie, en la actualidad, porque Archie¹² definió los conceptos de factor de formación, índice de resistividad e índice de saturación de agua y también fue el primero en reconocer que si se transportaban los valores experimentales de dichos parámetros a una escala logarítmica, las curvas obtenidas podían ser expresadas mediante fórmulas simples.

De esta manera, al correlacionar datos del factor de formación en función de la porosidad, para el caso de arenas naturales, este investigador llegó a establecer la siguiente ecuación:

$$F_R = \emptyset^{-m} \quad (3.1)$$

donde a m lo denominó exponente de cementación después de observar que, en términos generales, este parámetro variaba de 1.8 a 2.0 para el caso de areniscas consolidadas. En cambio, para arenas no consolidadas el valor de m era aproximadamente 1.3.

Para el caso particular de areniscas, Winsauer et al¹⁶ encontraron que la relación:

$$F_R = 0.65 \phi^{-2.15} \quad (3.2)$$

ajustaba mucho mejor sus datos que la relación de Archie. La expresión 3.2 es ampliamente utilizada en la actualidad y es conocida como ecuación de Humble.

De esta forma, Winsauer et al¹⁶ llegaron a la conclusión de que la Ec. 3.1 es fundamentalmente incorrecta y que, por lo tanto, sólo puede dar resultados aproximados. Estos autores propusieron que una fórmula más general, que se ajustaba mejor a la realidad era:

$$F_R = G \phi^{-m} \quad (3.3)$$

donde G y m son constantes.

Por otra parte, de investigaciones realizadas con medios porosos no compactados, así como con sistemas cementados artificialmente, constituidos por partículas de geometría sencilla: esferas, cilindros, prismas y arenas naturales, Wyllie y Gregory¹⁷ confirmaron la validez de la Ec. 3.3 y concluyeron que ésta contiene a la relación de Archie como caso particular.

Debido a que el factor de formación es función de la porosidad y de algunos otros efectos relacionados con la geometría interna de las rocas, que hasta la fecha no han sido bien determinados, se ha sugerido que las constantes m y G sean evaluadas para cada una de las formaciones geológicas en estudio, con el fin de obtener resultados más consistentes con la realidad. Como consecuencia de esto, se ha reportado en la literatura una gran diversidad de relaciones análogas a la ecuación de Winsauer et al.

La compañía petrolera Schlumberger, a través del trabajo experimental de sus investigadores, estableció en una de sus publicaciones⁶ que, para el caso de arenas, la expresión:

$$F_R = 0.81 \phi^{-2} \quad (3.4)$$

correlacionaba bastante bien los valores de F_R y ϕ .

Timur et al¹⁸ realizaron mediciones del factor de formación y de la porosidad en 1833 muestras de areniscas y llegaron a establecer la siguiente expresión:

$$F_R = 1.13 \emptyset^{-1.73} \quad (3.5)$$

Según estos autores, la ecuación anterior es más confiable que otras relaciones propuestas ya que, aún bajo diversas condiciones, proporciona valores del factor de formación más reales.

Tomando como base las mediciones realizadas en muestras de areniscas Bunter, recopiladas en el norte de Yorkshire, Inglaterra, Zaafran¹⁹ encontró que el factor de formación puede relacionarse con la porosidad a través de:

$$F_R = 1.48 \emptyset^{-1.66} \quad (3.6)$$

con un coeficiente de correlación mayor del 90% .

De todo lo anterior se puede concluir que la relación entre el factor de formación y la porosidad, deducida del trabajo experimental y aceptada como "ecuación general" presenta la forma: $F_R = G \emptyset^{-m}$. Cabe señalar que esta ecuación no satisface la condición física de que $F_R = 1$ cuando $\emptyset = 1$.

Otro problema que es importante señalar es que en la mayoría de trabajos realizados con la finalidad de generalizar la relación entre el factor de formación y la porosidad, únicamente se ha considerado como variable independiente a la porosidad total, dejando a un lado el análisis sobre la relación, $F_R (\phi_1, \phi_2)$, que resultaría de tomar en cuenta la porosidad primaria y la porosidad secundaria como variables independientes. En otras palabras, son pocos los estudios que se han llevado a cabo para investigar el efecto que ejerce la porosidad secundaria sobre el factor de resistividad.

Aquí únicamente se mencionará como antecedente de este tipo de relaciones un trabajo debido a Aguilera⁹, el cual es utilizado con frecuencia para el análisis de yacimientos naturalmente fracturados, esto es, yacimientos que presentan la propiedad denominada de "doble porosidad".

Fundamentándose en un modelo teórico constituido por cubos²⁰ y en los resultados obtenidos por Pirson²¹ para la determinación de la resistividad equivalente de un sistema de doble-porosidad conectado en paralelo, Aguilera⁹ llegó a establecer la siguiente relación:

$$F_t = \frac{1}{v \phi + (1 - v) / F_R} \quad (3.7)$$

donde F_t representa el factor de formación del sistema de doble porosidad y v es el coeficiente de partición definido como²¹:

$$v = \frac{\phi - \phi_1}{\phi (1 - \phi_1)} \quad (3.8)$$

La Ec. 3.7 falla cuando la porosidad secundaria es igual a cero, ya que no aparece ϕ_1 como variable independiente. Esto es, al sustituir valores ($\phi = \phi_1 + \phi_2$ con $\phi_2 = 0$ y $v = 0$) en la ecuación 3.7 se llega a que $F_t = F_R$, sin indicar la relación funcional que guardan F_t y ϕ_1 .

En el Capítulo 4 de este trabajo se propone un modelo teórico que toma en cuenta la presencia de la porosidad primaria y secundaria, presentándose por vez primera un desarrollo teórico que permite analizar el efecto que ejercen ambas porosidades sobre el factor de formación y la relación que guardan estos parámetros.

Antecedentes sobre el establecimiento de la relación entre I_R y S_W

Se han desarrollado diversos estudios en los que no solamente se trata el caso de una roca saturada con agua, sino que también se considera la posibilidad de que el agua pueda ser reemplazada por un fluido no conductor.

De esta forma, cuando una determinada cantidad de aceite moja la superficie de los granos de una roca la resistividad puede ser hasta 10 veces más grande que si una misma cantidad de agua mojara la superficie del mineral o minerales que constituyen la roca en cuestión.

Las tres características más importantes que afectan la resistividad de una roca: contenido, salinidad y distribución de agua, no tienen igual grado de importancia^{6,22}.

El contenido de agua es la más importante, pues la resistividad de las rocas varía en mayor proporción. Para diversos tipos de roca se han determinado proporciones hasta de 1000 a 1.

La salinidad del agua contenida en los poros de una roca es segunda en importancia; las variaciones en la salinidad pueden originar cambios en la resistividad total del sistema roca-fluidos en una proporción de 500 a 1.

La distribución del agua en la estructura de los poros es el factor menos importante, ya que origina una variación en la resistividad total en una proporción menor de 20 a 1.

Al correlacionar los datos experimentales obtenidos por Jakosky-Hopper¹⁵, Wickoff-Botset²³ y Leverett²⁴ en arenas limpias (sin contenido de arcilla), Archie¹² llegó a establecer una relación entre el índice de resistividad y el índice de saturación de agua que presenta la siguiente forma:

$$I_R = S_W^{-n} \quad (3.9)$$

donde n es el llamado exponente de saturación. Este exponente fué evaluado por Archie en forma análoga al factor de cementación, m , encontrando que para el caso de arenas naturales $n = 2$.

Bailey et al²⁵ determinaron que aún en el caso de arenas limpias el valor de n varía considerablemente entre 2.0 y 4.3. Además, estos autores consideran que valores de n menores de 2.0 son representativos de las formaciones lutíticas o arcillosas.

Von Gonten y Osoba²⁶ demostraron que el exponente de saturación n está influenciado tanto por la resistividad del agua saturante, como por la permeabilidad del sistema y que, en consecuencia, sus valores deben poseer un amplio intervalo de variación.

Posteriormente, otros investigadores²⁷⁻²⁸, fundamentándose en modelos idealizados de los sistemas porosos, concluyeron que la Ec. 3.9 era básicamente incorrecta, y establecieron que una expresión más general debía ser:

$$I_R = C' S_W^{-n} \quad (3.10)$$

donde C' y n son constantes.

De esta última expresión se desprende que se puede generar una gran cantidad de fórmulas (una para cada C' y n particulares); sin embargo, la Ec. 3.9 no satisface la condición física que exige que:

$$I_R = 1 \quad \text{cuando} \quad S_W = 1.$$

3.2 Trabajos Teóricos

En seguida se mencionan algunas de las investigaciones llevadas a cabo con el objetivo primordial de proporcionar solidez o soporte teórico a las expresiones de tipo experimental.

El primer trabajo de este tipo, presentado por Fricke en 1924,²⁹ se basó en las ideas de Maxwell³⁰, quien desarrolló y presentó la solución al problema de la conducción eléctrica a través de medios heterogéneos con dos fases de conducción, en un tratado de electricidad y magnetismo escrito a fines del siglo pasado. De los resultados obtenidos para el caso de sistemas constituidos por esferas iguales dispersas en un medio infinito, se puede demostrar que el factor de formación, F_R , en función de la porosidad, \emptyset , debe expresarse como:

$$F_R = \frac{3 - \emptyset}{2 \emptyset} \quad (3.11)$$

esta relación es conocida como ecuación de Maxwell, dentro de la industria petrolera.

Lord Rayleigh³¹ prosiguió los análisis teóricos de Maxwell considerando, además de esferas, sistemas de cilindros, y analizando los efectos de interacción entre los elementos. Sin embargo, las expresiones propuestas por este autor son sumamente complejas por lo que no han sido utilizadas en la práctica.

En un intento por generalizar la ecuación de Maxwell, y considerando un sistema de elipsoides dispersos en un medio infinito, Fricke^{29,32} logró demostrar que:

$$F_R = \frac{(X + 1) - \emptyset}{X \emptyset} \quad (3.12)$$

donde X es un parámetro geométrico que es función de la relación entre los semiejes de los elipsoides y de las conductividades del sistema, y cuyo valor es menor que 2. Cuando $X = 2$, la ecuación anterior se reduce a la ecuación de Maxwell.

Slawinski³³ derivó teóricamente otra expresión basada en modelos de esferas no consolidadas. Este investigador establece que, para esferas en contacto, el factor de formación en función de la porosidad puede ser determinado mediante la relación:

$$F_R = \frac{(1.3219 - 0.3219 \emptyset)}{\emptyset} \quad (3.13)$$

Aunque existe un acuerdo razonable entre valores experimentales y valores calculados mediante la Ec. 3.13, se considera que esta relación no es de trascendencia, debido a lo burdo de las aproximaciones empleadas en su deducción.

De todos los trabajos citados en este Capítulo, el de mayor trascendencia es el de Maxwell, debido a que tiene un fundamento teórico sólido y por ser el punto de partida para la deducción de una relación general que contiene a las fórmulas comunmente usadas en la práctica como casos particulares. Por estas razones, en el Capítulo que sigue se presenta el desarrollo completo de la llamada ecuación de Maxwell.

CAPITULO 4

ECUACION DE MAXWELL

En este Capítulo se presenta el desarrollo completo de la relación para F_R y \emptyset , la cual es conocida en la industria petrolera como ecuación de Maxwell. Debido a la importancia de algunos de sus aspectos teóricos, y con el fin de proporcionar mayor claridad, la deducción mencionada ha sido dividida en ocho partes que a continuación se enumeran:

- 4.1 Importancia de la expresión para $F_R(\emptyset)$, basada en las ideas y desarrollos de Maxwell.
- 4.2 Establecimiento de la ecuación diferencial que describe el fenómeno bajo estudio.
- 4.3 Solución a la ecuación de Laplace.
- 4.4 Determinación del potencial eléctrico dentro y fuera de una esfera de resistividad R_i sumergida en un medio de resistividad R_w .
- 4.5 Determinación de la resistividad equivalente de un sistema esférico constituido por N esferas iguales de resistividad R_i sumergidas en un electrolito de resistividad R_w .
- 4.6 Obtención de la ecuación de Maxwell para sistemas que poseen únicamente porosidad primaria.
- 4.7 Determinación de la resistividad equivalente de un modelo teórico de doble porosidad.
- 4.8 Obtención de la ecuación modificada de Maxwell para sistemas con porosidad primaria y secundaria.

4.1 Importancia de la expresión para F_R y \emptyset , basada en las ideas y desarrollos de Maxwell

La llamada ecuación de Maxwell es aplicable, como ya se mencionó, a sistemas constituidos por partículas esféricas sólidas dispersas y suspendidas en un electrolito, donde la interferencia eléctrica entre los elementos es despreciable.

Este tipo de idealizaciones son empleadas como una primera aproximación a la solución del problema que implica determinar la conductividad eléctrica en sistemas que presentan dos fases de conducción. De esta forma, en diversas áreas del Electromagnetismo, se han llegado a establecer diferentes expresiones teóricas como:

Fórmula de Poisson (dentro del estudio de la Inducción Magnética), Ecuación de Clausius-Mossotti (en la determinación de la constante dieléctrica) o bien, Relación de Lorentz-Lorentz (en el análisis del índice de refracción).

Por lo que respecta al campo de la conducción eléctrica a través de medios porosos la llamada expresión de Maxwell constituye uno de sus pilares más importantes, pero en la práctica se le ha puesto muy poca atención, principalmente porque su aplicación está limitada a

sistemas idealizados; sin embargo, en contraste con otras expresiones empíricas frecuentemente utilizadas, ésta tiene la ventaja de poseer una deducción teórica rigurosa, que sirve de base para la obtención de un modelo general de aplicación práctica, como se verá más adelante.

Con la finalidad de avanzar un poco más en el análisis teórico y sin perder de vista que la utilidad final de los resultados obtenidos en esta forma debe ser del todo práctica, se propone un modelo teórico adicional basado en el modelo de Maxwell, pero con la ventaja de que el primero considera la coexistencia de dos tipos de porosidad, una asociada a la matriz y otra a las fracturas. De esta forma pueden llegar a conocerse, para el caso del modelo teórico propuesto, el efecto que ejercen estas porosidades sobre el factor de formación y la relación que guardan estos parámetros.

La generalización de la ecuación de Maxwell y de la ecuación modificada de Maxwell, con el propósito de hacerlas aplicables a casos prácticos de campo, será el tema tratado en el capítulo 5.

4.2 Establecimiento de la ecuación diferencial que describe el fenómeno bajo estudio

En esta sección se describe el modelo físico teórico elemental que se utiliza para representar y estudiar el fenómeno de tipo eléctrico que ocurriría en una porción muy pequeña de una roca sedimentaria. Asimismo, se demuestra la analogía que existe entre un sistema electrostático y un sistema que conduce una corriente estacionaria y finalmente se establece la ecuación diferencial que describe el fenómeno, antes señalado, bajo estudio.

Como es bien sabido, una forma sencilla de explorar el interior de las rocas y sacar conclusiones acerca de sus características internas, consiste en saturar las rocas con electrolito y hacer pasar por ellas una corriente eléctrica. Esta técnica es la utilizada por diversos investigadores^{4-7,10-12,14-19} en sus estudios realizados sobre el análisis y caracterización de las rocas sedimentarias.

Ahora bien, supóngase que únicamente se considera, para su estudio, una partícula del sistema roca-fluido sometido a un campo eléctrico.

El problema básico que se plantea es: Determinar cómo se modifica el campo una vez que éste se aplica al sistema partícula-electrolito y evaluar el potencial eléctrico dentro y fuera de dicha partícula, con la idea de generalizar posteriormente este análisis a N partículas.

Para facilitar el desarrollo, como punto de partida, supóngase que la partícula antes mencionada posee una geometría esférica, esto es, considérese una esfera de radio a y resistividad R_i sumergida en un medio conductor (electrolito) de resistividad R_w supóngase además que el sistema esfera-electrolito está en presencia de un campo eléctrico uniforme, E_0 , cuyas líneas de fuerza son paralelas al eje X , en condiciones de conducción estable (de estado estacionario o de régimen de flujo constante), lineal, isotrópico, homogéneo y sin fuentes internas de fuerza electromotriz (Fem).

Una vez seleccionada una dirección, las líneas de flujo en todo campo eléctrico uniforme son paralelas entre si, pero la presencia de un objeto (en este caso la esfera) altera el campo en la vecindad del objeto, haciendo que sus líneas de flujo se desvíen de su trayectoria original⁴ (Fig. 4.1).

En este caso, y puesto que el sistema considerado (esfera-electrolito) se encuentra bajo la acción de un campo eléctrico, debe esperarse una corriente eléctrica como respuesta a dicho campo; es decir, se deben considerar cargas en movimiento. Esto implica que en principio el problema considerado aquí no es electrostático.

En consecuencia, si este es el caso, la ecuación de continuidad debe ser utilizada. Esta relación presenta la siguiente forma³⁴ :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \bar{J} = 0 \quad (4.1)$$

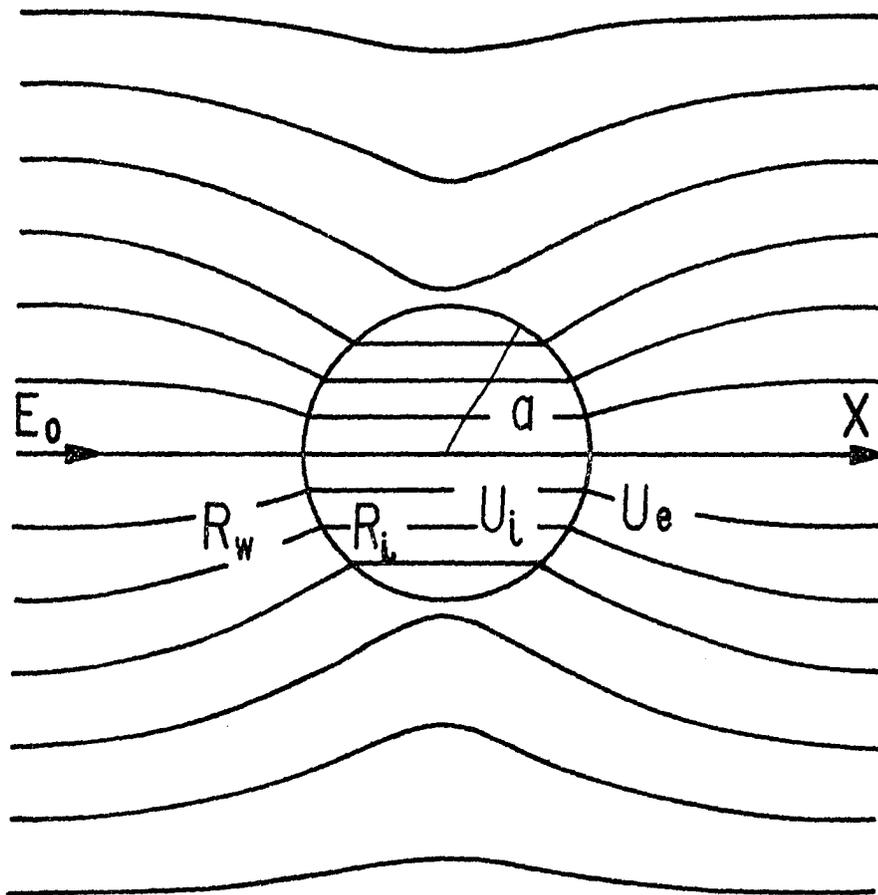


FIG. 4.1.- LINEAS DE FLUJO ELECTRICO PARA EL CASO DE UNA ESFERA COLOCADA DENTRO DE UN MEDIO CONDUCTOR - QUE ESTA EN PRESENCIA DE UN CAMPO ELECTRICO.

En estas circunstancias, surge la siguiente pregunta:

¿ Qué ecuación permite resolver el problema planteado, la Ec. de Laplace o la Ec. de Poisson ? . Para contestar esta pregunta, tómesese en cuenta las suposiciones antes señaladas.

De esta forma, como se está considerando una conducción bajo estado estacionario ó regimen de flujo constante, la densidad de carga local $\rho (x, y, z)$ se encuentra en equilibrio, es decir, $\partial \rho / \partial t = 0$ para todo punto del medio.

En consecuencia, la ecuación de continuidad se reduce a la siguiente expresión:

$$\operatorname{div} \bar{J} = 0 \quad (4.2)$$

que es representativa de sistemas que poseen corrientes estacionarias.

Por otra parte, utilizando la suposición de que el sistema esfera-electrolito es lineal, entonces puede recurrirse a la Ley de Ohm ($\bar{J} = \sigma \bar{E}$). Esta última expresión en combinación con la Ec. 4.2 permite afirmar que:

$$\operatorname{div} \sigma \bar{E} = 0 \quad (4.3)$$

donde σ es la conductividad del medio.

Además, como el sistema estudiado es isotrópico y homogéneo, la Ec. 4.3 puede reescribirse en la siguiente forma:

$$\operatorname{div} \bar{E} = 0 \quad (4.4)$$

Finalmente, como no existen fuentes de Fem en el sistema en cuestión, esto es, no se están considerando las cargas que generan el campo eléctrico \bar{E} , entonces este campo es conservativo, es decir, $\operatorname{rot} \bar{E} = 0$ con lo que el campo $\bar{E} = \bar{E}_e$ es derivable de un potencial escalar. Así

$$\bar{E}_e = \bar{E} = - \operatorname{grad} U \quad (4.5)$$

donde \bar{E}_e es el campo electrostático.

La combinación de las dos últimas ecuaciones conduce a la ecuación de Laplace:

$$\nabla^2 U = 0 \quad (4.6)$$

donde U es el potencial eléctrico (la selección del sistema de coordenadas al que estará referido el operador ∇^2 es totalmente arbitrario).

4.3 Solución a la Ecuación de Laplace

En la sección anterior quedó demostrado que un problema de conducción de estado estacionario, como el que se planteó ahí, puede resolverse en la misma forma que los problemas electrostáticos, utilizando la Ec. de Laplace. A continuación se presenta una solución a la ecuación de Laplace.

Por simplicidad, en el presente problema se eligen las coordenadas esféricas (r, θ, w) y se considera que el centro de la esfera sumergida en el medio conductor es el origen de dichas coordenadas. Entonces, debido a la simetría presente en el problema, cualquier punto del campo queda descrito únicamente por las coordenadas r y θ (la tercera coordenada w no es necesaria, dado que, en estas circunstancias, el campo es independiente del ángulo azimutal).

En términos de las coordenadas esféricas r y θ , la ecuación de Laplace se reduce a la siguiente expresión:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial U}{\partial \theta} \right) = 0 \quad (4.7)$$

Esta ecuación diferencial parcial se resuelve por la técnica conocida como "separación de variables"³⁵.

En este caso, para separar variables se puede hacer:

$$U(r, \theta) = Q(r) \cdot T(\theta) \quad (4.8)$$

De esta última ecuación, se observa que:

$$\frac{\partial U}{\partial r} = T \frac{dQ}{dr} \quad (4.9)$$

$$\frac{\partial U}{\partial \theta} = Q \frac{dT}{d\theta} \quad (4.10)$$

Luego, al sustituir las expresiones 4.9 y 4.10 en la Ec. 4.7, se encuentra que:

$$\frac{T}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dQ}{dr} \right) + \frac{Q}{r^2 \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dT}{d\theta} \right) = 0 \quad (4.11)$$

Al multiplicar la Ec, 4.11 por r^2/QT se obtiene la siguiente expresión:

$$\frac{1}{Q} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dQ}{dr} \right) + \frac{1}{T \operatorname{sen} \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\operatorname{sen} \theta \frac{dT}{d\theta} \right) = 0 \quad (4.12)$$

Esta ecuación es válida para todos los valores de r y θ , sólo cuando sus dos términos sean individualmente iguales a más y menos una misma "constante de separación", ya que se trata de funciones de variables diferentes.

Sea H , el valor de esta constante. En consecuencia, se tiene que:

$$\frac{d}{d\theta} \left(\operatorname{sen} \theta \frac{dT}{d\theta} \right) + H T \operatorname{sen} \theta = 0 \quad (4.13)$$

y

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dQ}{dr} \right) - H Q = 0 \quad (4.14)$$

Puede mostrarse (apéndice A) que la primera expresión tiene la forma de la ecuación de Legendre³⁶:

$$(1 - u^2) P_n''(u) - 2u P_n'(u) + n(n+1) P_n(u) = 0 \quad (4.15)$$

donde, $u = \cos \theta$ y $n(n+1) = H$.

Las soluciones de esta ecuación son funciones polinomiales en términos del $\cos \theta$ que generalmente se denominan polinomios de Legendre. La forma explícita de estos polinomios viene dada por la fórmula de Rodrigues³⁶:

$$P_n(\cos \theta) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{d(\cos \theta)^n} \left[(\cos \theta)^2 - 1 \right]^n \quad (4.16)$$

Por otra parte, la expresión 4.14 puede ser reducida (apéndice B) a la siguiente ecuación diferencial de segundo orden con coeficientes constantes:

$$\frac{d^2 Q}{dt^2} + \frac{dQ}{dt} - n(n+1) Q = 0 \quad (4.17)$$

donde $t = \ln r$ y cuya solución general viene dada por:

$$Q(r) = A_n r^n + B_n r^{-(n+1)} \quad (4.18)$$

donde A_n y B_n son constantes arbitrarias.

De esta forma, al integrar los resultados aportados por las expresiones 4.16 y 4.18 en la solución general, se obtiene que:

$$U = \sum_{n=0}^{\infty} (A_n r^n + B_n r^{-n-1}) P_n(u) \quad (4.19)$$

4.4 Determinación del Potencial Eléctrico dentro y fuera de una esfera de Resistividad R_i sumergida en un electrolito de Resistividad R_w .

Una vez que se conoce la forma que debe tener la solución general de la ecuación de Laplace, se procede a evaluar el potencial eléctrico U dentro y fuera de la esfera situada dentro de un campo eléctrico E_0 inicialmente uniforme.

Por inspección de la Ec. 4.19 y teniendo presente que el potencial eléctrico U debe ser finito cuando r tiende a cero y, además, que el potencial debe valer: $U = -E_0 x = -E_0 r \cos \theta$ cuando r tiende a infinito, se concluye que:

$$U_i = \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n P_n(\cos \theta) \quad (4.20)$$

para el potencial dentro de la esfera; es decir, cuando $r < a$ y :

$$U_e = \sum_{n=0}^{\infty} B_n r^{-n-1} P_n(\cos \theta) - E_0 r P_1(\cos \theta) \quad (4.21)$$

para el potencial fuera de la esfera, esto es, cuando $r > a$.

Las condiciones que se deben cumplir, en toda frontera que separa dos medios heterogéneos permiten evaluar las constantes arbitrarias A_n y B_n de las Ecs. 4.20 y 4.21. Para el presente problema, dichas "condiciones de frontera" pueden expresarse como³⁴:

$$(U_i)_{r=a} = (U_e)_{r=a} \quad (4.22)$$

$$\left(\frac{1}{R_i} \frac{\partial U_i}{\partial r} \right)_{r=a} = \left(\frac{1}{R_w} \frac{\partial U_e}{\partial r} \right)_{r=a} \quad (4.23)$$

que exigen respectivamente la continuidad del potencial y de la corriente eléctrica en la superficie de separación existente entre la esfera y el medio conductor que la rodea.

Al tomar en cuenta las condiciones de frontera y realizar las operaciones convenientes, se encuentran los siguientes valores para las constantes A_n y B_n (ver apéndice C) :

$$A_n = B_n = 0 \quad \text{para } n \neq 1 \quad (4.24)$$

$$A_1 = - \frac{3 E_0 R_i}{2 R_i + R_w} \quad (4.25)$$

$$B_1 = - \frac{a^3 E_0 (R_i - R_w)}{2 R_i + R_w} \quad (4.26)$$

Sustituyendo estos valores en las ecuaciones 4.20 y 4.21 , se obtiene :

$$U_i = - \frac{3 E_0 R_i r \cos \theta}{2 R_i + R_w} \quad (4.27)$$

y

$$U_e = - \frac{E_0 a^3 (R_i - R_w) \cos \theta}{(2 R_i + R_w) r^2} - E_0 r \cos \theta \quad (4.28)$$

Estas dos últimas expresiones constituyen la solución formal de la Ec. 4.19 con las condiciones de frontera dadas por 4.22 y 4.23 .

4.5 Determinación de la Resistividad Equivalente de un sistema esférico constituido por N esferas iguales de Resistividad R_i sumergidas en un electrolito de Resistividad R_w .

En esta parte del desarrollo, se supone que en lugar de una sola esfera, se tiene un conjunto de N esferas iguales de radio a y resistividad R_i , sumergidas en el electrolito de resistividad R_w ³⁰.

Las esferas deben estar distribuidas de tal forma que la interferencia entre ellas sea despreciable y, además, se supone que forman una esfera más grande de radio a_N , según se muestra en la fig. 4.2.

Luego, de acuerdo a la Ec. 4.28, y al principio de superposición que afirma que si U_1, U_2, \dots, U_n son todas soluciones de la ecuación de Laplace, entonces:

$$U = K_1 U_1 + K_2 U_2 + \dots + K_n U_n \quad (4.29)$$

donde las K_i son constantes arbitrarias, también es una solución.

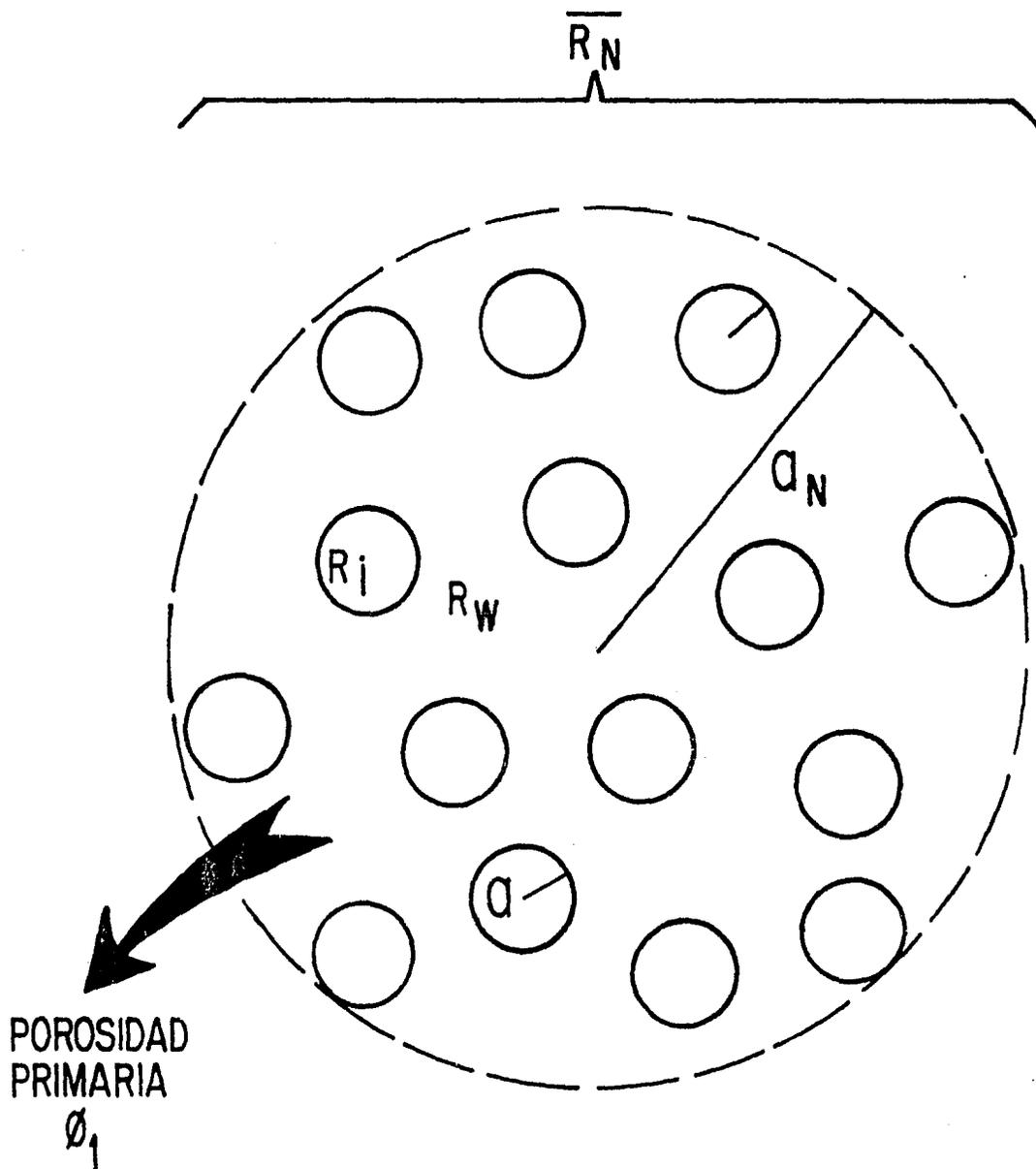


FIG.4.2-MODELO TEORICO DE MAXWELL

El potencial eléctrico fuera de la esfera de radio a_N , esto es, el potencial debido a la presencia de los N elementos esféricos está dado por:

$$U_e = - \frac{N a^3 E_0 (R_i - R_W) \cos \theta}{(2 R_i + R_W) r^2} - E_0 r \cos \theta \quad (4.30)$$

La razón de que no se vea alterado el término $E_0 r \cos \theta$ en la expresión 4.30 se debe al hecho de que las N esferas de radio a están bajo la acción de un mismo campo eléctrico de magnitud E_0 , que es independiente, a grandes distancias, del número de esferas.

Por otra parte, si \bar{R}_N representa la resistividad equivalente de la esfera de radio a_N , entonces el potencial exterior también puede ser expresado como:

$$U_e = - \frac{a_N^3 E_0 (\bar{R}_N - R_W) \cos \theta}{(2 \bar{R}_N + R_W) r^2} - E_0 r \cos \theta \quad (4.31)$$

Igualando las Ecs. 4.30 y 4.31, se obtiene que:

$$\frac{N a^3 (R_i - R_W)}{2 R_i + R_W} = \frac{a_N^3 (\bar{R}_N - R_W)}{2 \bar{R}_N + R_W} \quad (4.32)$$

luego,

$$N a^3 (R_i - R_W) (2 \bar{R}_N + R_W) = a_N^3 (\bar{R}_N - R_W) (2 R_i + R_W)$$

$$N a^3 (R_i - R_W) 2 \bar{R}_N + N a^3 (R_i - R_W) R_W =$$

$$a_N^3 \bar{R}_N (2 R_i + R_W) - a_N^3 R_W (2 R_i + R_W)$$

entonces,

$$N a^3 (R_i - R_W) 2 \bar{R}_N - a_N^3 \bar{R}_N (2 R_i + R_W) =$$

$$- N a^3 (R_i - R_W) - a_N^3 R_W (2 R_i + R_W)$$

por lo tanto,

$$\bar{R}_N \left[2 N a^3 (R_i - R_W) - a_N^3 (2 R_i + R_W) \right] =$$

$$R_W \left[- N a^3 (R_i - R_W) - a_N^3 (2 R_i + R_W) \right]$$

De esta forma, la resistividad equivalente de la esfera de radio a_N , se determina a través de la siguiente expresión:

$$\bar{R}_N = \frac{R_W \left[a_N^3 (2 R_i + R_W) + N a^3 (R_i - R_W) \right]}{a_N^3 (2 R_i + R_W) - 2 N a^3 (R_i - R_W)} \quad (4.33)$$

4.6 Obtención de la ecuación de Maxwell

Para llegar a la forma usual de la Ec. de Maxwell, basta hacer las siguientes consideraciones:

a) Introducir el concepto de porosidad (espacio libre de elementos por unidad de volumen total), esto es:

$$\emptyset = \frac{a_N^3 - N a^3}{a_N^3} \quad (4.34)$$

De esta última expresión, se tiene que:

$$N a^3 = a_N^3 (1 - \emptyset) \quad (4.35)$$

En consecuencia, al sustituir 4.35 en 4.33, se encuentra lo siguiente:

$$\bar{R}_N = \frac{R_W \left[2 a_N^3 R_i + a_N^3 R_W + (a_N^3 - a_N^3 \emptyset) (R_i - R_W) \right]}{2 a_N^3 R_i + a_N^3 R_W - (2 a_N^3 - 2 a_N^3 \emptyset) (R_i - R_W)} \quad (4.36)$$

luego,

$$\bar{R}_N = \frac{R_W \left[3 a_N^3 R_i - a_N^3 \varnothing (R_i - R_W) \right]}{3 a_N^3 R_W + 2 a_N^3 \varnothing (R_i - R_W)} \quad (4.37)$$

De esta forma, de la Ec. 4.37 se tiene que:

$$\bar{R}_N = \frac{R_W \left[3 R_i - \varnothing (R_i - R_W) \right]}{3 R_W + 2 \varnothing (R_i - R_W)} \quad (4.38)$$

Al dividir entre R_i el numerador y el denominador de la Ec. 4.38, se obtiene:

$$\bar{R}_N = \frac{R_W (3 - \varnothing + R_W/R_i \varnothing)}{3 R_W/R_i + 2 \varnothing - 2 \varnothing R_W/R_i} \quad (4.39)$$

Si se supone que la resistividad de las N esferas iguales que integran la esfera de radio a_N es mucho mayor que la resistividad del electrolito, es decir: $R_i \gg R_W$

entonces, los términos R_W/R_i de la Ec. 4.39 tienden a cero, con lo que:

$$\bar{R}_N = \frac{R_W (3 - \emptyset)}{2 \emptyset} \quad (4.40)$$

Finalmente, al emplear la definición del factor de resistividad, F_R , se concluye que:

$$F_R = \frac{\bar{R}_N}{R_W} = \frac{3 - \emptyset}{2 \emptyset} \quad (4.41)$$

que es la ecuación de Maxwell.

4.7 Determinación de la Resistividad Equivalente de un modelo teórico de Doble Porosidad

Como se mencionó al principio de este capítulo, el objetivo de proponer un modelo que considere dos tipos de porosidad es el de satisfacer dos finalidades:

1. Extender el análisis teórico a este tipo de sistemas, con el objeto de que las relaciones encontradas posean la misma base teórica y,
2. Ya que en algunos de los más importantes yacimientos de México la roca almacenante se encuentra en estado fracturado; es decir, que presenta porosidad primaria (matriz) y secundaria (fracturas), resulta interesante poder contar con relaciones que describan de manera más consistente este tipo de sistemas.

De lo anterior puede deducirse la importancia que representa el estudio de los sistemas que tienen o manifiestan doble porosidad. A continuación se presenta un desarrollo relativo a ellos.

Como punto de partida, se considera que en lugar de un solo sistema esférico constituido por un conjunto de N esferas iguales de radio a , resistividad R_1 y sumergidos en un electrolito de resistividad R_w , como el mostrado en la figura 4.2, se tiene un conjunto de M de estos sistemas esféricos iguales de radio a_N y resistividad \bar{R}_N , también sumergidos en el electrolito de resistividad R_w .

En esta parte nuevamente se supone que los sistemas esféricos deben estar distribuidos de tal forma que la interferencia entre ellos sea despreciable y además forman una esfera más grande de radio a_M y resistividad \bar{R}_M , según se muestra en la figura 4.3 .

Luego, de acuerdo a las Ecs. 4.28 a 4.31 reescritas en términos de los nuevos parámetros utilizados en la fig. 4.3 y realizando las mismas consideraciones que en la sección 4.5 se concluye que la resistividad equivalente \bar{R}_M esta dada por:

$$\bar{R}_M = \frac{R_w \left[a_M^3 (2 R_i + R_w) + M N a^3 (R_i - R_w) \right]}{a_M^3 (2 R_i + R_w) - 2 M N a^3 (R_i - R_w)} \quad (4.42)$$

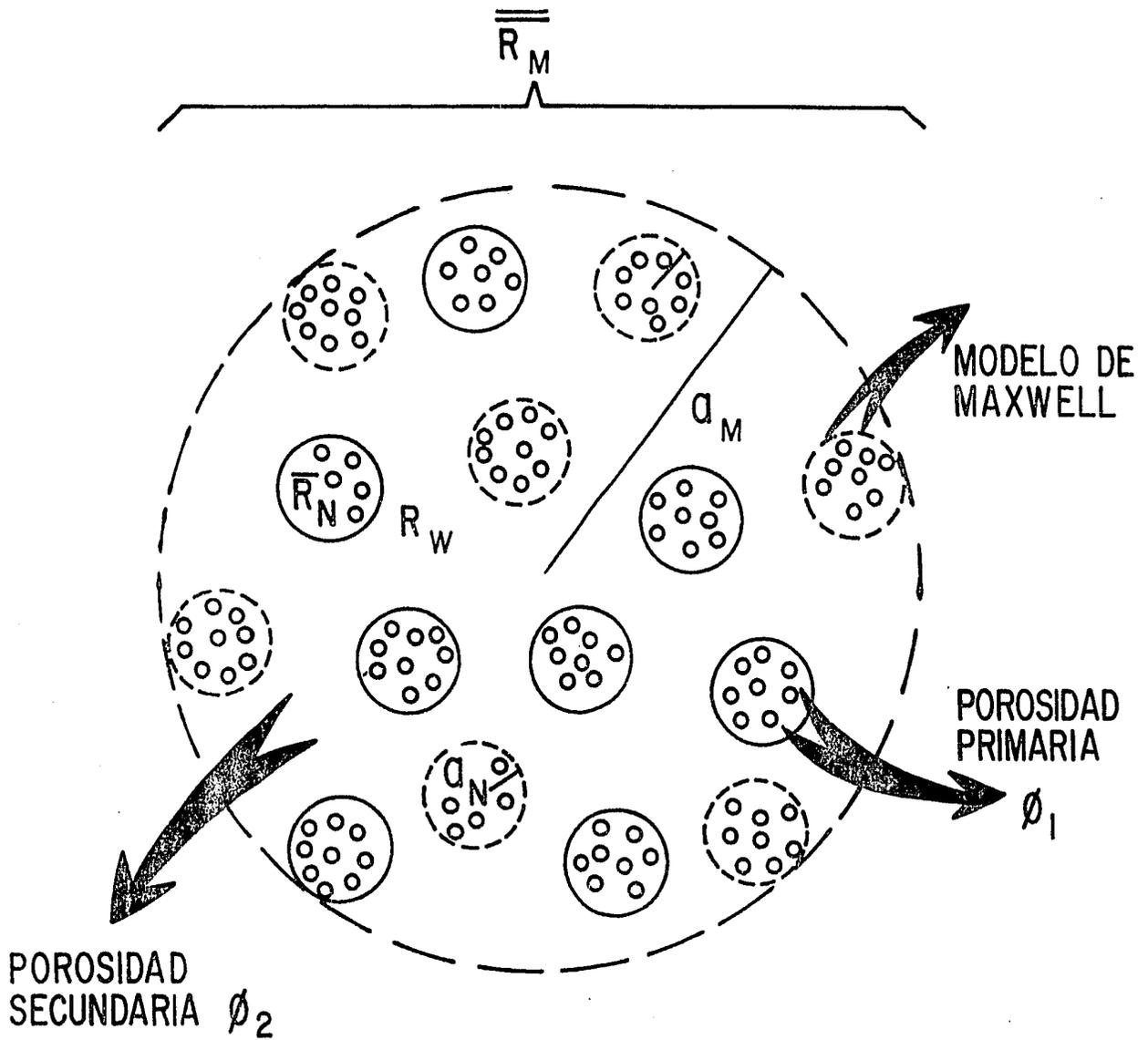


FIG.4.3- MODELO TEORICO DE DOBLE -POROSIDAD .

4.8 Obtención de la Ecuación Modificada de Maxwell

Para obtener la ecuación modificada de Maxwell se puede tomar como punto de partida la definición usual de porosidad total (porosidad primaria más porosidad secundaria) que, de acuerdo con la fig. 4.3, se puede expresar como:

$$\emptyset = \emptyset_1 + \emptyset_2 = \frac{Ma_N^3 - MNa^3}{Ma_N^3} + \frac{a_M^3 - Ma_N^3}{a_M^3} \quad (4.43)$$

De la misma figura 4.3 puede observarse que: $a_M^3 = Ma_N^3 + a_M^3 \emptyset_2$, de aquí que:

$$MN a^3 = a_M^3 - a_M^3 \emptyset_1 - a_M^3 \emptyset_2 + a_M^3 \emptyset_1 \emptyset_2 \quad (4.44)$$

En consecuencia, al sustituir 4.44 en 4.42 se llega a:

$$\frac{-}{\bar{R}_M} = \frac{R_W \left[a_M^3 2R_i + a_M^3 R_W + (a_M^3 - a_M^3 \emptyset_1 - a_M^3 \emptyset_2 + a_M^3 \emptyset_1 \emptyset_2) (R_i - R_W) \right]}{a_M^3 2R_i + a_M^3 R_W - 2 (a_M^3 - a_M^3 \emptyset_1 - a_M^3 \emptyset_2 + a_M^3 \emptyset_1 \emptyset_2) (R_i - R_W)}$$

(4.45)

Entonces, si se realizan las mismas consideraciones que en la sección 4.6 , se llega a que:

$$\bar{R}_M = \frac{R_W [3 - (\phi_1 + \phi_2 - \phi_1 \phi_2)]}{2 - (\phi_1 + \phi_2 - \phi_1 \phi_2)} \quad (4.46)$$

Finalmente, al emplear la definición del factor de resistividad y sustituir ϕ por $\phi_1 + \phi_2$, se obtiene la relación buscada; esto es:

$$F_R = \frac{\bar{R}_M}{R_W} = \frac{3 - (\phi - \phi_1 \phi_2)}{2 (\phi - \phi_1 \phi_2)} \quad (4.47)$$

esta es la ecuación modificada de Maxwell, ya que si $\bar{\phi} = \phi - \phi_1 \phi_2$, entonces la expresión anterior toma la forma de la Ec. de Maxwell, es decir:

$$F_R = \frac{\bar{R}_M}{R_W} = \frac{3 - \bar{\phi}}{2 \bar{\phi}} \quad (4.48)$$

CAPITULO 5

GENERALIZACION DE LA ECUACION DE MAXWELL

Como quedó establecido, la ecuación de Maxwell se aplica a sistemas relativamente simples, consistentes en conjuntos de esferas dieléctricas suspendidas en un medio conductor. Un sistema con estas características es de gran importancia teórica, pero de escaso interés práctico, de ahí que algunos investigadores hayan intentado generalizar la ecuación de Maxwell para hacerla aplicable a casos más complejos.

Dos de las contribuciones más importantes realizadas en este sentido, son debidas a Fricke^{29,32} y Pérez-Rosales^{4,37} quienes atacaron el problema teóricamente.

A continuación se describen, en forma breve, los desarrollos propuestos por estos autores, cuyos resultados han conducido al establecimiento de las relaciones generalizadas entre el factor de resistividad, F_R y la porosidad total, así como entre F_R y las porosidades primaria y secundaria.

5.1 La Ecuación de Fricke

Como una base para sus investigaciones experimentales sobre la determinación de la conductividad y capacidad eléctricas de coloides y suspensiones de células biológicas como la sangre, Fricke^{29,32} presentó un desarrollo teórico sumamente elaborado, tomando como base las ideas fundamentales de Maxwell y aplicándolas al caso de un sistema constituido por elipsoides homogéneos dispersos en lugar de esferas. Fricke llegó a demostrar que para este tipo de sistemas es válida la siguiente relación:

$$\frac{\frac{\sigma_0}{\sigma_1} - 1}{\frac{\sigma_0}{\sigma_1} + X} = C^* \frac{\frac{\sigma_2}{\sigma_1} - 1}{\frac{\sigma_2}{\sigma_1} + X} \quad (5,1)$$

donde, σ_0 es la conductividad de la suspensión o sistema elipsoides dispersos-electrolito, σ_1 es la conductividad del medio conductor o electrolito dentro del cual se encuentran los elipsoides, σ_2 es la conductividad de los elipsoides, C^* es la concentración volumétrica de los elipsoides y X es un parámetro que depende de la relación axial en los elipsoides y de la relación de la conductividad de éstos a la del electrolito que los contiene.

La relación 5.1 es conocida como ecuación de Fricke y presenta una forma diferente cuando se toman en cuenta las siguientes consideraciones:

La concentración volumétrica del medio suspendido en función de la porosidad puede ser expresada como:

$$C^* = 1 - \phi \quad (5.2)$$

La conductividad es el inverso de la resistividad y, por lo tanto, el Factor de Resistividad en función de conductividades se define como:

$$F_R = \frac{\sigma_1}{\sigma_0} \quad (5.3)$$

Si se supone que las partículas o material suspendido no es conductor, entonces $\sigma'_2 = 0$. De esta forma al sustituir las expresiones 5.2 y 5.3 en la ecuación 5.1, se obtiene que:

$$F_R = \frac{(X + 1) - \phi}{X \phi} \quad (5.4)$$

Esta expresión es la forma más conocida de la ecuación de Fricke y en ella el valor de X es menor que 2, Cuando $X = 2$, la relación 5.4 se transforma en la ecuación de Maxwell, indicando que ésta última es un caso particular de la ecuación de Fricke.

Fricke confirmó la expresión 5.4 empleando datos experimentales sobre la conductividad de la sangre de diversos animales. Para lograr tal propósito, este autor consideró los glóbulos rojos como elipsoides oblatos y prolados dispersos en un medio conductor (suero), los cuales se comportan, debido a efectos de polarización, como aisladores perfectos para corriente directa o de baja frecuencia. La interferencia eléctrica entre los glóbulos rojos se consideró despreciable.

Además de que Fricke visualiza la opción de que su método puede encontrar aplicación práctica en el análisis de las rocas, concluye que la realización del estudio experimental sobre la conductividad de una suspensión puede ser de utilidad como:

- a) Un medio para la evaluación de las conductividades de las partículas dispersas en un electrolito.
- b) La obtención de un método práctico que permita determinar la concentración volumétrica de las partículas dispersas, cuando se conocen la conductividad específica de dichas partículas y del medio que las contiene.
- c) La determinación de factores geométricos de las partículas dispersas, puesto que para una concentración volumétrica constante la conductividad de una suspensión es dependiente de la forma (no del tamaño) de las partículas dispersas. Esto es válido especialmente cuando dichas partículas no son conductoras, como es el caso de los sistemas de interés práctico.

5.2 La Ecuación de Maxwell-Fricke

Es interesante hacer notar que la fórmula de Maxwell para esferas y la ecuación de Fricke para elipsoides homogéneos son hipérbolas equiláteras que pueden ser escritas como⁴:

$$F_R = 1 + \frac{P(1 - \phi)}{\phi} \quad (5.5)$$

donde P es un parámetro que depende de la geometría interna del medio poroso, cuyo valor aumenta conforme la esfericidad de las partículas aumenta.

En adelante, la expresión 5.5 será referida como relación de Maxwell-Fricke, ya que puede ser reducida a la Ec. de Maxwell si $P = 1.5$ o transformada en la expresión de Fricke si $P = (1 + X) / X$.

Aunque en un principio, la relación 5.5 es más general que la de Maxwell y la de Fricke, no es aplicable, por las suposiciones hechas en su deducción, a casos prácticos de campo donde los elementos que constituyen la matriz del sistema poroso están en contacto (sistemas compactos) o presentan formas geométricas irregulares. En consecuencia, la ecuación de Maxwell-Fricke debe ser reconsiderada y modificada para hacerla aplicable a sistemas que ocurren con más frecuencia en la práctica.

5.3 La Ecuación General de Pérez-Rosales

Mediante el desarrollo de una teoría que se apoya en tres postulados, y cuya validez ha sido confirmada experimentalmente, Pérez-Rosales³⁷ llegó a establecer la relación general $F_R (\emptyset)$, entre el factor de formación y la porosidad. Esta formulación matemática generalizada unifica los trabajos teóricos presentados con los experimentales debidos a G.E. Archie, y es aplicable tanto a empacamientos como a suspensiones de partículas, denominados sistemas porosos compactos y no compactos, respectivamente.

La idea básica que permitió extender el análisis teórico sistemático presentado en el Capítulo 4, efectuado sobre modelos constituidos por partículas de geometría sencilla, al caso de rocas sedimentarias fué la introducción del concepto de porosidad de flujo⁴.

Para entender este concepto considérese una porción de muestra porosa como la que aparece en la fig. 5.1. Si se supone que dicha muestra está saturada con un electrolito y que una diferencia de potencial se aplica a través de ella, entonces una corriente eléctrica debe fluir por la muestra. En primera instancia se esperaría que el flujo eléctrico cubriera completamente el medio conductor. Sin embargo, como las paredes de los poros son extremadamente irregulares, entonces resulta obvio considerar a la región (T') de la muestra porosa, fig. 5.1, como una porción que no participa activamente en el flujo de corriente eléctrica y que es generadora de regiones de entrampamiento. Esta consideración esta apoyada por pruebas de laboratorio³⁸, donde se muestra que dichas regiones entrampadas se presentan aún en el caso de partículas de geometría sencilla, debido a cambios bruscos en la dirección de las líneas de corriente (turbulencia).

La formación de estas regiones de estancamiento es equivalente a un incremento en la parte no conductora, o sea a una disminución virtual de la porosidad física. En consecuencia, la porosidad resultante que contribuye al flujo neto de corriente eléctrica, es la porosidad de flujo, ϕ_f .

De esta forma puede establecerse que, desde el punto de vista de la conducción eléctrica, el espacio poroso está constituido por canales y trampas, como se muestra esquemáticamente en la fig. 5.1. Siendo los canales (C) aquellas porciones que conducen la corriente eléctrica, mientras que las trampas (T') son zonas de estancamiento, que no necesariamente están formadas por poros cerrados en uno de sus extremos, como los de la fig. 5.1, sino que también pueden consistir en espacios abiertos, pero que por razones de simetría generan regiones de estancamiento, como se ilustra en la fig. 5.2.

De estas observaciones surge el primer postulado que establece que la porosidad total, ϕ , se puede dividir en dos partes: una porosidad de flujo, ϕ_f , asociada con los canales, y una porosidad de estancamiento, ϕ_s , asociada con las trampas; es decir,

$$\phi = \phi_f + \phi_s \quad (5.6)$$

Debido a la complejidad geométrica del interior de las rocas, esta división es obvia. Sin embargo, sus implicaciones no han sido aprovechadas en ingeniería de yacimientos, quizá por desconocimiento de la relación que guardan ambas porosidades.

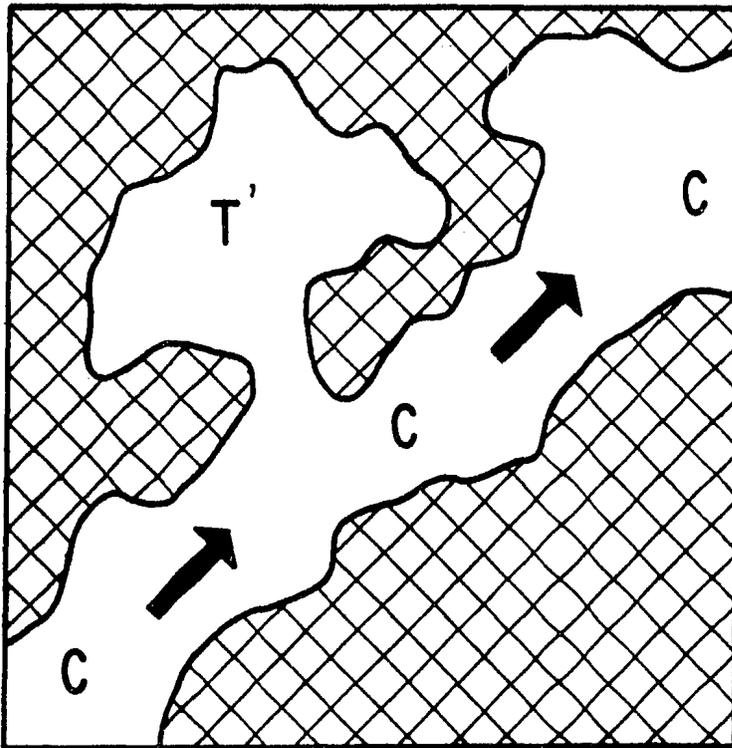


FIG.5.1.- MODELO UTILIZADO EN LA DEDUCCION DE LA ECUACION GENERAL.

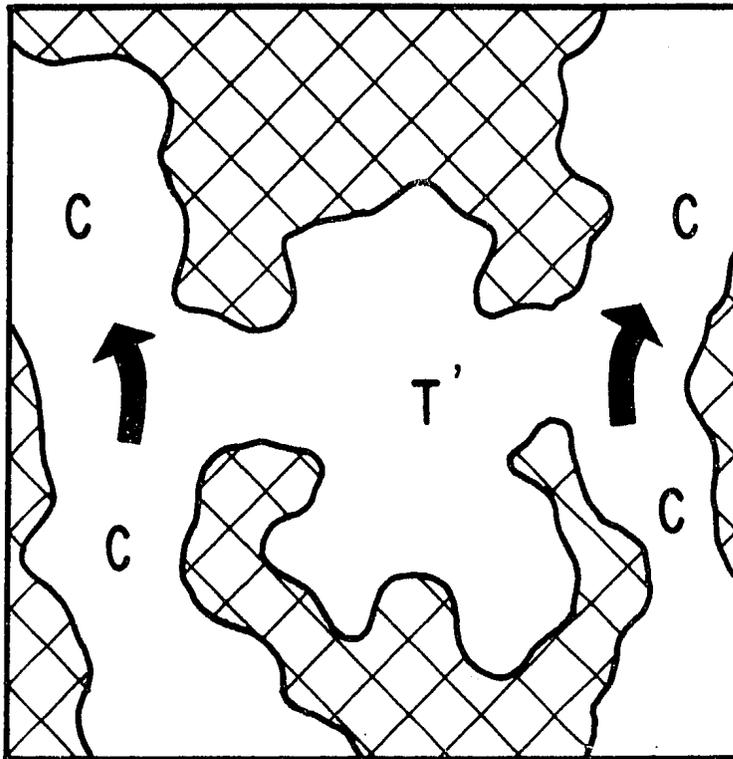


FIG.5.2.- REPRESENTACION ESQUEMATICA DE UNA TRAMPA ABIERTA O SIMETRICA.

Con la idea de poder determinar la proporción en que coexisten las porosidades ϕ_f y ϕ_s , se establece el segundo postulado que relaciona la porosidad de flujo con la porosidad total, a través de la siguiente ecuación:

$$\phi_f = \phi^m, \quad m \geq 1 \quad (5.7)$$

esta relación expresa que, bajo ninguna circunstancia, la porosidad de flujo puede ser mayor que la porosidad total, ya que aquélla es una parte de ésta. Además, la Ec. 5.7 es válida en el intervalo de definición de la porosidad ($0 \leq \phi \leq 1$) y satisface la condición física que exige que la porosidad de flujo debe ser igual a la porosidad total cuando ésta toma sus valores extremos, $\phi = 0$ y $\phi = 1$, ya que en estos valores límite no es posible la existencia de trampas.

El tercer postulado establece que al relacionar el factor de resistividad con la porosidad, independientemente de la geometría que posean las partículas que constituyen un sistema poroso, siempre se encontrará una relación hiperbólica del tipo de Maxwell-Fricke entre ambos parámetros. La expresión analítica que resume este postulado se obtuvo gracias al descubrimiento de que la ecuación de Maxwell-Fricke se podía generalizar fácilmente, para hacerla aplicable a suspensiones o empacamientos de partículas y a rocas naturales, mediante una pequeña modificación consistente en sustituir la porosidad total por la porosidad de flujo, encontrándose que:

$$F_R = 1 + \frac{G(1 - \phi_f)}{\phi_f} \quad (5.8)$$

donde G es una forma generalizada del parámetro geométrico P que aparece en la Ec. 5.5 .

Combinando las Ecs. 5.7 y 5.8 , se llega a la interesante relación generalizada entre el factor de resistividad y la porosidad, la cual presenta la siguiente forma:

$$F_R (\emptyset) = 1 + G (\emptyset^{-m} - 1) \quad (5.9)$$

Esta es una fórmula que permite poner a prueba la teoría desarrollada, ya que tanto F_R como \emptyset se pueden medir con precisión en el laboratorio.

5.4 La Relación General, $F_R (\phi_1, \phi_2)$, Entre el Factor de Formación y las Porosidades Primaria y Secundaria.

La coexistencia de la porosidad primaria (matriz) y de la porosidad secundaria (fracturas) es una característica que poseen los yacimientos petrolíferos del tipo "naturalmente fracturados", que son los más importantes de México.

Antes de proceder al establecimiento de la relación $F_R (\phi_1, \phi_2)$, entre el factor de formación y las porosidades primaria y secundaria, se hace una breve descripción de las características físicas del sistema en estudio.

Conceptualmente, un yacimiento fracturado se puede visualizar como un conjunto de bloques irregulares de matriz de roca, separados entre sí por una red de fracturas, como se muestra en la fig. 5.3 . La función principal de los bloques es almacenar fluídos, en tanto que las fracturas actúan como canales de flujo.

Por otra parte, en la sección 4.7 de este trabajo se presentó el desarrollo teórico de la ecuación modificada de Maxwell, para un sistema de doble porosidad, la cual presenta la siguiente forma:

$$F_R (\phi_1, \phi_2) = \frac{3 - (\phi - \phi_1 \phi_2)}{2 (\phi - \phi_1 \phi_2)} \quad (5.10)$$

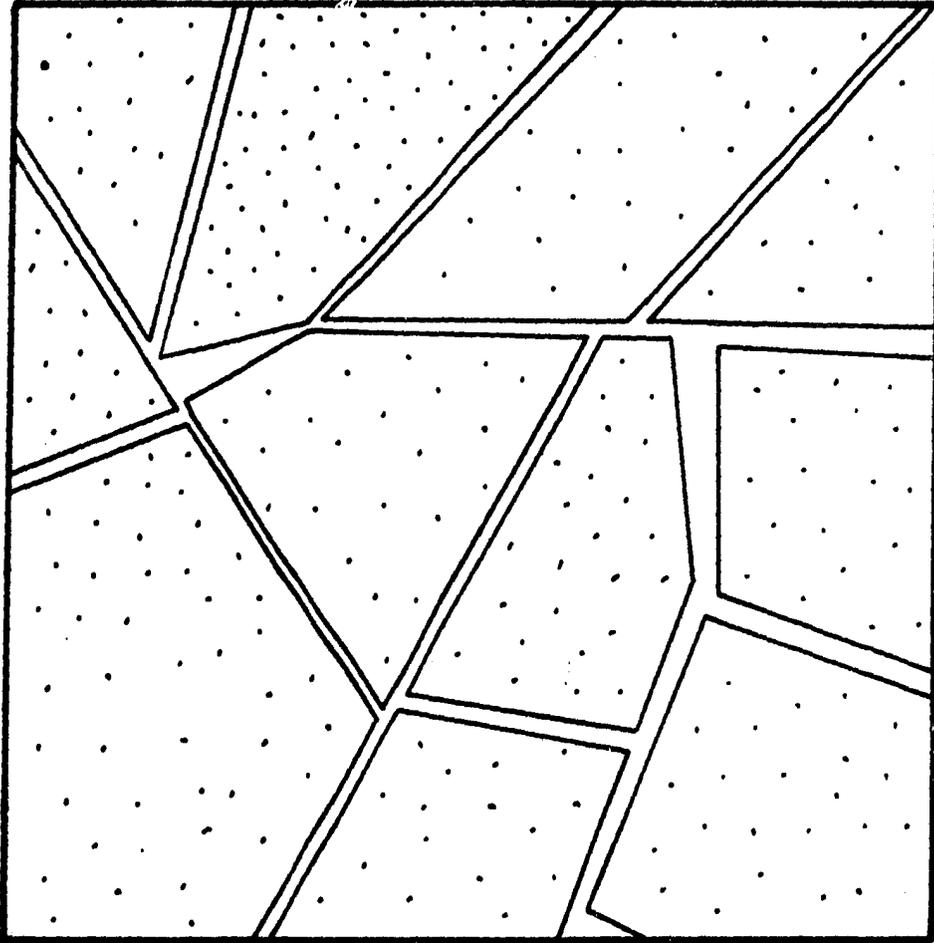


FIG 5.3.— SISTEMA DE BLOQUES Y FRACTURAS

cabe señalar que esta expresión se reduce a la ecuación de Maxwell si $\phi_1 = 0$ ó $\phi_2 = 0$.

De esta forma, si se hicieran consideraciones similares a las realizadas para llegar a la ecuación generalizada de Maxwell-Fricke se tendría que:

$$F_R (\phi_1, \phi_2) = 1 + \frac{P (1 - \bar{\phi})}{\bar{\phi}} \quad (5.11)$$

donde, $\bar{\phi} =$ porosidad equivalente $= \phi - \phi_1 \phi_2$.

Finalmente, al tomar en cuenta los tres postulados de la teoría discutida en la sección 5.3, se encuentra que para una roca que exhibe doble porosidad:

$$F_R (\phi_1, \phi_2) = 1 + G (\bar{\phi}^{-m} - 1) \quad (5.12)$$

o bien,

$$F_R (\phi_1, \phi_2) = 1 + G \left[(\phi - \phi_1 \phi_2)^{-m} - 1 \right] \quad (5.13)$$

De la Ec. 5.13 puede observarse que la introducción de una porosidad secundaria tiene el efecto de una disminución virtual de la porosidad total, que puede explicarse teniendo presente que la porosidad secundaria se originó con posterioridad al proceso de depositación de los sedimentos y, en consecuencia, abarcó zonas de porosidad primaria.

5.5 Acerca de los parámetros m y G

La enorme complejidad de la estructura interna de las rocas ha impedido que los parámetros m y G , que aparecen en la Ecs. 5.9 y 5.13, reciban un tratamiento teórico que conduzca al establecimiento formal de su definición. En consecuencia, el único tratamiento que han recibido es empírico e indirecto, generalmente a partir del análisis de datos de porosidad y factor de formación y ha sido realizado por diversos investigadores sobre muestras o modelos de diferentes tipos de roca. Estos autores han encontrado, en forma gráfica, numerosos valores para el coeficiente G y el exponente m . Como resultado de estos estudios se ha intentado relacionar los valores de m y G con diversas características petrofísicas tales como: grado de cementación¹², tortuosidad^{16,17}, tipo de porosidad⁹, permeabilidad³⁹, etc.

En algunos casos se ha observado que la variaciones en los valores de m y G coinciden con el comportamiento de alguna de las características petrofísicas antes señaladas y, en consecuencia, éstas han sido motivo de análisis más detallados. Sin embargo, con la información y datos disponibles hasta la fecha ha resultado imposible llegar a establecer las definiciones formales de m y G .

Dado que los yacimientos petrolíferos son en realidad sistemas muy heterogéneos, generalmente combinaciones complejas de varios tipos de roca y porosidades, es de esperarse, en primera instancia, que los valores de m y G representativos de una formación geológica estén en función de los valores m y G representativos de cada uno de los componentes litológicos y de porosidad.

Con la idea de poder evaluar, en forma consistente, los parámetros m y G que aparecen en las Ecs. 5.9 y 5.13 se propuso un procedimiento estadístico, descrito en la sección 5.8 de este trabajo, que hace uso de datos experimentales de F_R y \emptyset .

Los datos experimentales de F_R y \emptyset de que se dispuso correspondieron a ocho sistemas porosos diferentes, tres modelos físicos, o hechizos, de laboratorio y cinco sistemas correspondientes a rocas naturales (TABLA I).

Los modelos físicos están representados por un sistema de esferas, un sistema de elipsoides y un sistema de cubos. Dentro de los sistemas de rocas naturales se encuentran el de sedimentos marinos no consolidados, el de Areniscas, el de Calizas, el de Calizas Dolomitizadas y el de Dolomías.

Al observar la Tabla I se encuentra que de los ocho sistemas antes señalados el constituido por Dolomitas fué el que manifestó el máximo valor de m y el mínimo valor de G . Pero es probable que lleguen a encontrarse otros sistemas porosos con m mayores de 2.2 y G menores que 0.65, por lo que el intervalo de variación para los valores de m y G es relativamente grande.

Ademas, al comparar las Ecs. 4.41 y 4.47 con las Ecs. 5.9 y 5.13, se establece que el mínimo valor de m , físicamente posible, debe ser 1.0, el cual corresponde a un sistema poroso libre de regiones de entrapamiento, según la Ec. 5.7. Este es el valor teórico tanto para un sistema de esferas dispersas con un sólo tipo de porosidad como para un sistema de esferas dispersas de doble porosidad. Un valor aproximado se obtiene experimentalmente para suspensiones o empacamientos de esferas (TABLA I).

PROCEDIMIENTO PARAMETRO SISTEMA	SUPONIENDO m DESPEJANDO G		SUPONIENDO G DESPEJANDO m	
	m	G	m	G
ESFERAS	1.092	1.497	1.088	1.550
ESFEROIDES	1.120	1.692	1.121	1.690
CUBOS	1.261	1.388	1.269	1.370
SEDIMENTOS MARINOS NO CONSOLIDADOS	1.450	1.300	1.450	1.300
ARENISCAS	1.732	1.030	1.757	0.995
CALIZAS	1.872	1.120	1.912	1.050
CALIZAS DOLOMITIZADAS	2.000	0.885	2.068	0.790
DOLOMIAS	2.208	0.657	2.150	0.730

TABLA I - VALORES REPRESENTATIVOS DE LOS PARAMETROS "m" Y "G"
PARA DIFERENTES SISTEMAS POROSOS

5.6 Algo sobre el significado físico de m y G

De las ideas presentadas en este Capítulo, la Ec. 5.7 aporta información acerca del significado físico del exponente m . Esta ecuación establece que m es la potencia a la cual debe elevarse la porosidad total para obtener la porosidad de flujo.

Por consiguiente, lo único que puede asegurarse del parámetro m es que representa una ayuda en la determinación del volumen poroso que participa activamente en el flujo de la corriente eléctrica y, en consecuencia, es una herramienta útil para el cálculo del volumen poroso que corresponde a las regiones de entrapamiento.

Respecto al coeficiente G , puede observarse que, al igual que el exponente m , está relacionado con la geometría interna de los medios porosos. Su máximo valor parece ser 1.69, que corresponde a un sistema de elipsoides dispersos. Conforme la geometría de un sistema poroso llega a ser más compleja, el valor de G decrece. Aunque esta afirmación parece ser general no debe tomarse como una ley ya que existe una contradicción cuando se analiza el caso de sistemas de esferas dispersas, para el cual se obtiene que $G = 1.5$, siendo este un sistema geométricamente menos complejo que el de elipsoides.

5.7 Importancia de los valores de m y G

En primera instancia, las Ecs. 5.9 y 5.13 pueden ser utilizadas en la determinación de las porosidades primaria, secundaria o total a partir de datos de resistividad de los registros eléctricos. Sin embargo, el advenimiento de los registros de pozo denominados de porosidad, tales como el sónico de porosidad, el de densidad y el de neutrón⁶, ha permitido llegar a establecer algunas técnicas de interpretación⁶ a través de las cuales se evalúan los diferentes tipos y fracciones de porosidades existentes en una formación de interés. A partir del conocimiento de estos valores se determina indirectamente el valor del factor de formación utilizando alguna de las relaciones 3.1 a 3.8 presentadas en el Capítulo 3 de este trabajo.

Si además se conoce el valor de R_w o de R_{mf} , se puede conocer R_o o R_{xo} de las Ecs. 2.11 o 2.12, valores que son determinantes en el cálculo del índice de saturación de agua congénita. En consecuencia, si las constantes m y G no son las adecuadas para el tipo de formación que se está analizando, se pueden cometer grandes errores en la evaluación del índice de saturación de agua S_w y por ende en la cuantificación del volumen original de hidrocarburos.

5.8 Evaluación de los parámetros m y G a partir de datos de laboratorio.

Con el objeto de determinar los valores de los parámetros m y G que aparecen en la Ec. 5.9, se utilizaron, para cada uno de los ocho sistemas considerados en este trabajo, datos experimentales correspondientes a mediciones del factor de formación y de la porosidad obtenidas por diversos investigadores.

Despejando G de la Ec. 5.9, se tiene:

$$G = \frac{F_R - 1}{\phi^{-m} - 1} \quad (5.14)$$

En esta ecuación, los valores de F_R y ϕ son conocidos, ya que se determinan experimentalmente, mientras que G y m son desconocidos. Para la determinación de éstos últimos, se puede proceder como sigue: para un sistema poroso particular, se asigna valores arbitrarios a m y ϕ , mediante la Ec. 5.14, se obtienen los correspondientes valores de G . Para que el análisis sea sistemático, se empieza con un valor pequeño de m , por ejemplo 0.1, y luego su valor se incrementa uniformemente en pequeños intervalos, digamos 0.1 unidades, hasta alcanzar un valor tan alto como se desee. Así, para cada valor de m se obtienen tantos valores de G como parejas (ϕ, F_R) haya.

A partir de estos valores de G , se determina su valor promedio, \bar{G} , la desviación standard, S , y la desviación standard normalizada S/\bar{G} . De todos los valores analizados, se selecciona aquella pareja (m, G) que conduzca a una S/\bar{G} mínima.

Siguiendo este procedimiento, se obtuvieron los valores que aparecen en la segunda y tercera columnas de la TABLA I.

Con el único propósito de comprobar que el método estadístico aplicado en la evaluación de los parámetros m y G es confiable, se invirtió el procedimiento.

Despejando m de la Ec. 5.14, se tiene:

$$m = \frac{\log G - \log (F_R - 1 + G)}{\log \emptyset} \quad (5.15)$$

Si ahora se suponen valores para G , se pueden obtener valores para m . Utilizando el esquema del párrafo anterior, se llegó a los resultados mostrados en la cuarta y quinta columnas de la TABLA I.

Los resultados obtenidos, en las dos formas, confirman que el método estadístico aplicado es confiable, y en consecuencia uno de los más apropiados para evaluar nuevas parejas (m, G) representativas de otros sistemas porosos de interés.

Los valores de m y G , obtenidos con los dos procedimientos de cálculo antes señalados, caen dentro de la desviación standard porque únicamente se empleó una expresión $F_R(\emptyset)$ y porque el manejo de las variables m y G se realizó, para cada uno de los ocho sistemas estudiados, a partir del mismo conjunto de datos experimentales F_R y \emptyset . En otras palabras, si se hubiesen obtenido diferentes resultados con ambos métodos entonces, se hubiera demostrado que el procedimiento estadístico de análisis no era el más conveniente para efectuar la evaluación de m y G .

Por otra parte, de los diferentes tipos de sistemas porosos considerados en este trabajo, el único que puede ser analizado teóricamente es el de esferas, cuyos valores teóricos de m y G son 1.0 y 1.50, respectivamente. Los valores experimentales de estos parámetros, para el mismo caso de esferas, aparecen en la TABLA I y son 1.09 y 1.49. Esto demuestra una buena concordancia entre teoría y experimento. Cabe señalar que las ocho parejas de valores (m , G) fueron obtenidas de los datos experimentales correspondientes a medios porosos reportados en la literatura como sistemas de un sólo tipo de porosidad.

En la sección 5.10 se sugiere un procedimiento de cálculo, que permite analizar, como una primera aproximación, sistemas de doble porosidad tomando como base los resultados de la TABLA I.

5.9 Pruebas de validez

Una parte de las pruebas experimentales que dan validez a la Ec. 5.9 se da en la referencia 37, y en este trabajo se complementan. En primera instancia, dichas pruebas de validez consisten en una comparación de la curva teórica con respecto a los datos experimentales, realizada sobre gráficas de F_R contra \emptyset , para los ocho sistemas porosos que aparecen en la TABLA I.

En las figs. 5.4 a 5.6 se reproducen algunas de las gráficas antes señaladas, donde se puede apreciar que la concordancia entre teoría y experimento para el caso de esferas y cubos es excelente. Sin embargo, en el caso de rocas naturales se observa una cierta dispersión de los puntos experimentales, que se explica teniendo en cuenta que la geometría de las partículas que constituyen la matriz de dichas rocas no es la misma en todos los casos. Es decir, desde el punto de vista de su geometría interna se están relacionado propiedades de diferentes sistemas.

Una prueba adicional la constituye el hecho de que, bajo ciertas condiciones, la Ec. 5.9 se reduce a las ecuaciones más frecuentemente utilizadas en la práctica, como se verá a continuación.

Para el caso de rocas naturales, se ha encontrado que el coeficiente G posee un valor próximo a la unidad^{5-6, 16-19}, de modo que si $G = 1$, la Ec. 5.9 se reduce a la relación de Archie¹²:

$$F_R = \emptyset^{-m} \quad (5.16)$$

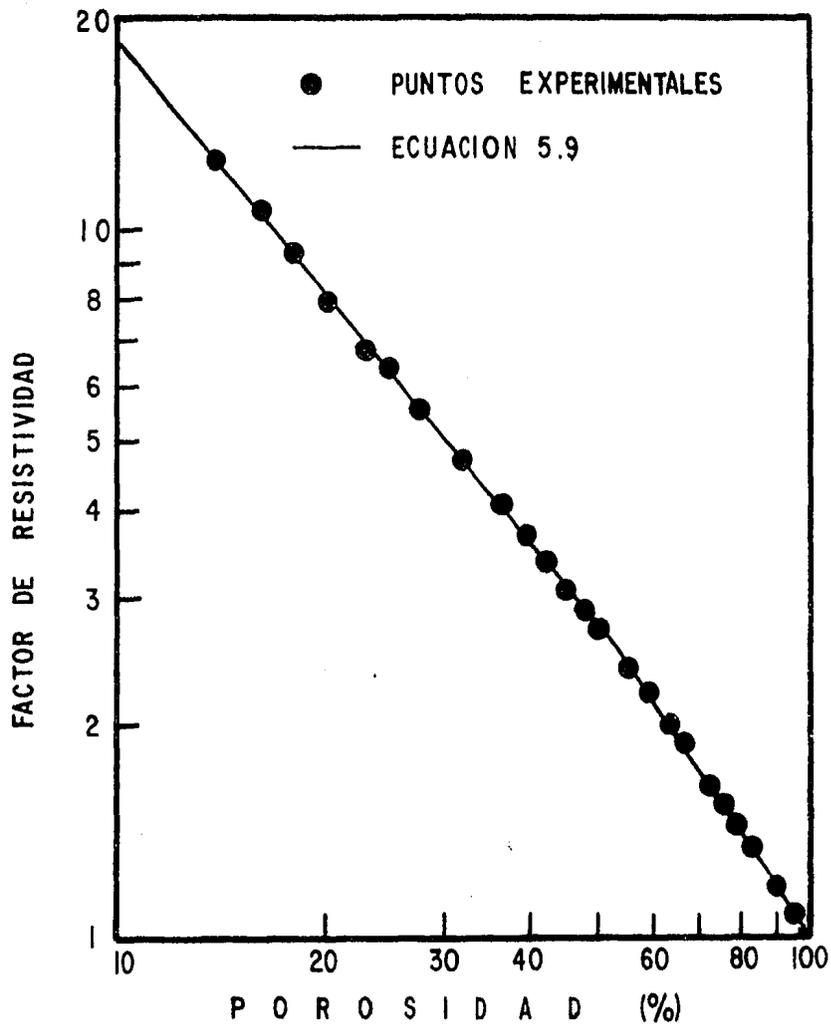


FIG.5.4.—COMPARACION ENTRE VALORES TEORICOS Y EXPERIMENTALES PARA EMPACAMIENTOS Y SUSPENSIONES DE ESFERAS.

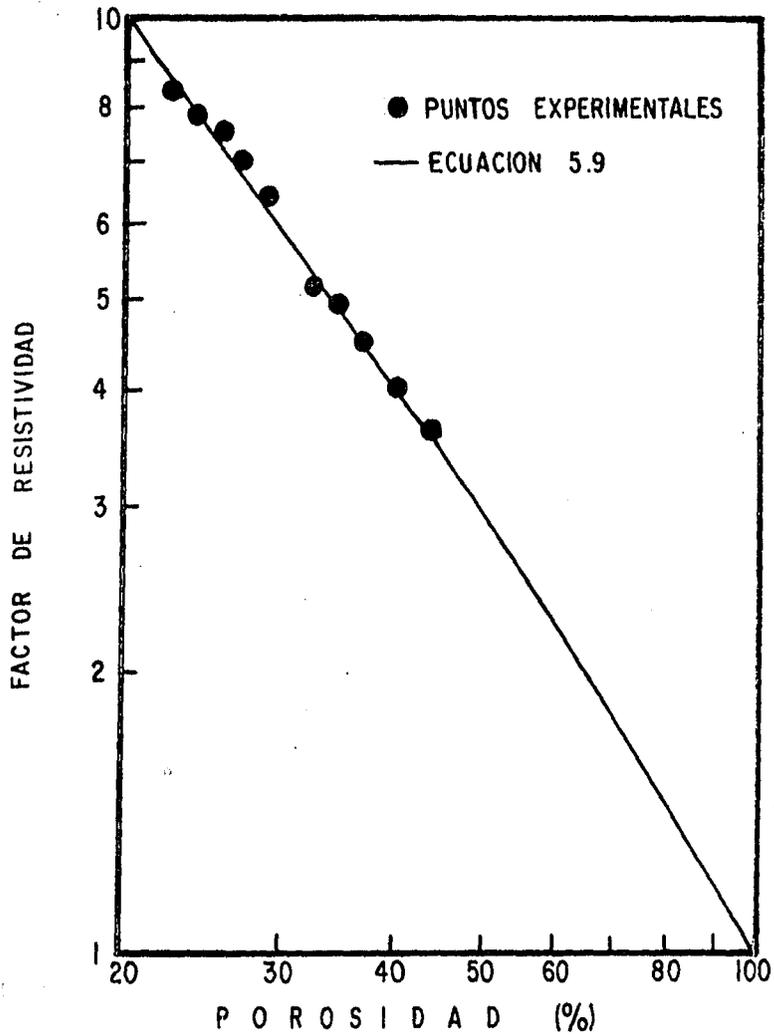


FIG.5.5.—COMPARACION ENTRE VALORES TEORICOS Y EXPERIMENTALES PARA EMPACAMIENTOS DE CUBOS.

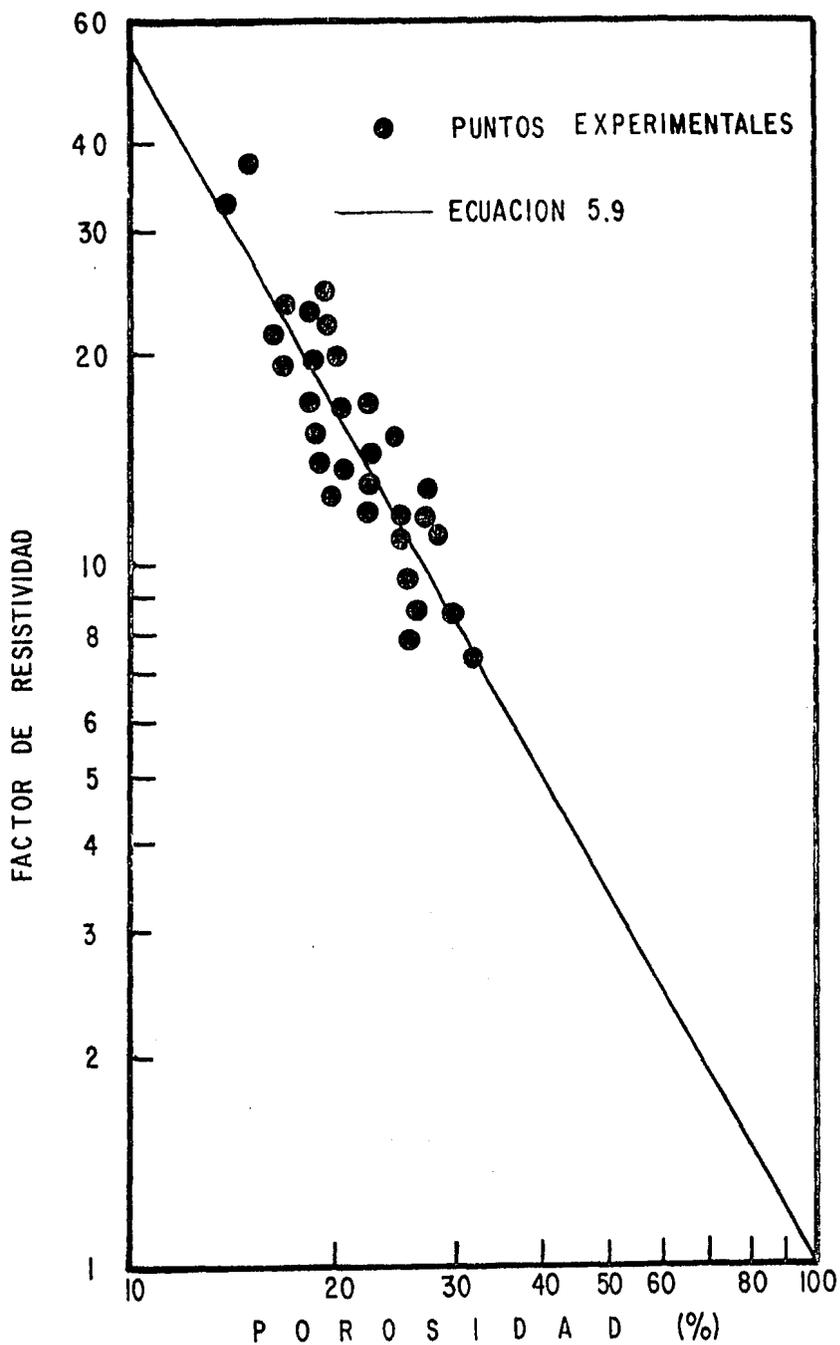


FIG.5.6.—COMPARACION ENTRE VALORES TEORICOS Y EXPERIMENTALES PARA ROCAS NATURALES

Además, si se reescribe la Ec. 5.9 en la forma siguiente:

$$F_R = G \emptyset^{-m} - (G - 1) \quad (5.17)$$

y puesto que G tiene un valor cercano a la unidad, entonces, $G \emptyset^{-m} \gg (1 - G)$. Por lo tanto, una forma aproximada de la Ec. 5.9 es:

$$F_R = G \emptyset^{-m} \quad (5.18)$$

Esta última expresión, conocida como ecuación generalizada de Archie, es la más frecuentemente usada en la práctica, a pesar de que es fundamentalmente incorrecta, ya que no satisface la condición física que exige que $F_R = 1$ cuando $\emptyset = 1$. Esta limitación se elimina con la Ec. 5.9.

Finalmente, para valores grandes de \emptyset , \emptyset^m es aproximadamente igual a \emptyset , en este caso la Ec. 5.9 se puede expresar como:

$$F_R = 1 + \frac{G(1 - \emptyset)}{\emptyset} \quad (5.19)$$

Esta es la fórmula de Fricke aplicable a sistemas constituidos de elipsoides, de la cual la ecuación de Maxwell es un caso particular.

Las consideraciones anteriores representan algunas de las propiedades más importantes que posee la Ec. 5.9 y proporcionan un gran apoyo a los principios en que se basa la teoría aquí descrita, siendo el argumento más sólido el hecho de que la Ec. 5.9 unifica las fórmulas de Maxwell, Fricke y Archie, así como los trabajos de todos los investigadores posteriores que han postulado la validez de la Ec. 5.18 .

5.10 Determinación del exponente m a partir de datos de registro

La mayoría de las veces, durante el proceso de evaluación de las reservas de un yacimiento petrolífero, los parámetros m y G se determinan de manera subjetiva, mediante el uso de gráficas de apoyo. En otros casos, los valores de ambos parámetros se asignan de acuerdo a la "experiencia" y/o al "conocimiento" que el analista de registros tiene del área estudiada. Esto trae como consecuencia que los resultados obtenidos no sean confiables.

Numerosas son las fórmulas y técnicas de evaluación que han sido propuestas y, sin embargo, el problema de la determinación de las variables m y G , a partir de datos de registros de pozo, no ha sido resuelto en su totalidad; sólo se han encontrado:

- a) Soluciones aplicables únicamente a casos muy particulares^{5,12}
- b) Pseudo-soluciones planteadas fuera de un marco de realidad física^{8-9,13,40}

En este trabajo se propone un procedimiento de cálculo que permite evaluar m en forma práctica. Es importante señalar que dicho procedimiento representa un primer intento de solución general al problema que implica la determinación de m y G , a partir del análisis de datos derivados de los registros de pozo. El procedimiento toma en cuenta todas las implicaciones o exigencias de la teoría antes descrita, así como los datos contenidos en la TABLA I y una hipótesis bastante socorrida en diferentes áreas de Ingeniería Aplicada^{3,6}, como se verá a continuación.

En un trabajo previo⁶ se propuso una técnica para determinar el tipo de roca y de porosidad existentes en una formación geológica bajo estudio. Esta técnica hace uso de datos de registros y supone que, como una primera aproximación, el valor de un parámetro físico representativo de una mezcla de n componentes, se puede determinar mediante una combinación lineal de los valores individuales de dicho parámetro obtenidos en la matriz de cada uno de los n componentes minerales multiplicados por la fracción volumétrica en que existe cada uno de éstos.

En este caso, haciendo uso de la hipótesis anterior, el valor de m de un sistema con n componentes mineralógicas puede ser expresado como:

$$m = \sum_{i=1}^n m_i f_i \quad (5.20)$$

donde, las m_i representan los valores individuales de m y las f_i son las fracciones volumétricas de cada uno de los diferentes tipos de minerales y/o rocas existentes, con la condición de que:

$$1.0 = \sum_{i=1}^n f_i \quad (5.21)$$

Con estas consideraciones y los valores de las parejas m , G reportadas en la TABLA I, se establece la siguiente relación:

$$m = 2.2 f_{DM} + 1.87 f_{CM} + 1.73 f_{TM} + 1.26 (f_{DF} + f_{CF} + f_{TF}) \quad (5.22)$$

donde, el primer índice de las f 's se refiere al tipo de componente principal de las rocas que constituyen la formación geológica bajo estudio (D = Dolomita, C = Caliza, T = Terrígenos) y el segundo índice indica el tipo de porosidad existente (M = Matriz, F = Fracturas), esto es:

$$f_{DM} = f_D - f_{DF} = f_D - v f_D \quad (5.23)$$

$$f_{CM} = f_C - f_{CF} = f_C - v f_C \quad (5.24)$$

$$f_{TM} = f_T - f_{TF} = f_T - v f_T \quad (5.25)$$

donde v es el llamado coeficiente de partición, que ha sido definido como²¹:

$$v = \frac{\phi - \phi_1}{\phi (1 - \phi_1)} \quad (5.26)$$

Los valores de los coeficientes que aparecen en la Ec. 5.22 son precisamente los valores m representativos de cuatro de los sistemas mostrados en la Tabla I . La evaluación de cada m se llevó a cabo empleando el procedimiento estadístico descrito en la sección 5.8 de este trabajo.

En términos generales, se ha observado^{3,9,20,21} que las rocas sedimentarias tienden a fracturarse en bloques de paredes planas y formas irregulares. Sin embargo, desde el punto de vista del flujo de fluidos, una buena aproximación a este tipo de rocas es considerarlas como constituidas por un conjunto de cubos orientados al azar, cuyo valor de m es 1.26 (TABLA I). Esta consideración explica el uso de este valor como el coeficiente de las fracciones de roca fracturadas, en la ecuación 5.22 .

Otro coeficiente que justifica su presencia en la Ec. 5.22 es el representativo de rocas terrígenas sin fracturas. Este coeficiente fué evaluado de diferentes maneras^{8,13,18} y también resultó ser igual a 1.73 .

El coeficiente representativo de dolomías con porosidad primaria fué igual a 2.2 . Este valor es muy semejante a los valores entre 2.15 y 2.4 que han reportado en la literatura otros investigadores^{22,40} que han realizado una recopilación de datos experimentales concernientes a este tipo de sistemas.

Finalmente, resulta interesante observar de la Tabla I que el valor de m representativo de las calizas dolomitizadas resultó ser igual a 2.0 . Si se supone que estas rocas están constituídas por igual cantidad de caliza y de dolomía, entonces, con este dato se obtiene un valor semejante a partir de la Ec. 5.22 .

5.11 Un acercamiento a la relación $G(m)$, existente entre el coeficiente G y el exponente m de la ecuación general $F_R(\emptyset)$.

De los valores que aparecen en la TABLA I puede observarse que, en términos generales, mientras G crece m decrece o viceversa. Este hecho hace pensar en la existencia de una probable relación entre ambos parámetros, pero debe tenerse presente que, desde el punto de vista teórico, y con la información y resultados disponibles hasta la fecha, no es posible deducir teóricamente dicha relación, ya que esto implicaría establecer la definición precisa de ambos parámetros.

Sin embargo, el uso de las ocho parejas de datos (m, G) , que aparecen en la TABLA I, permitió seleccionar la expresión analítica que mejor se ajusta a los datos experimentales, es decir, la que manifiesta mínimo error. Esta ecuación posee la forma:

$$G(m) = -0.96m^3 + 4.66m^2 - 8.07m + 6.11 \quad (5.27)$$

En la fig. 5.7 se muestra una gráfica de la Ec. 5.27, y también se indican los puntos experimentales de la TABLA I. Y en la TABLA II se hace una comparación entre valores experimentales y calculados. Como se puede ver, se obtuvo un error promedio del 4.8 %.

En este trabajo se propone el uso de la Ec. 5.27 en casos prácticos de campo, ya que, entre otras cosas evita mantener constante e igual a uno el coeficiente G , como es el caso en otros procedimientos⁸⁻⁹.

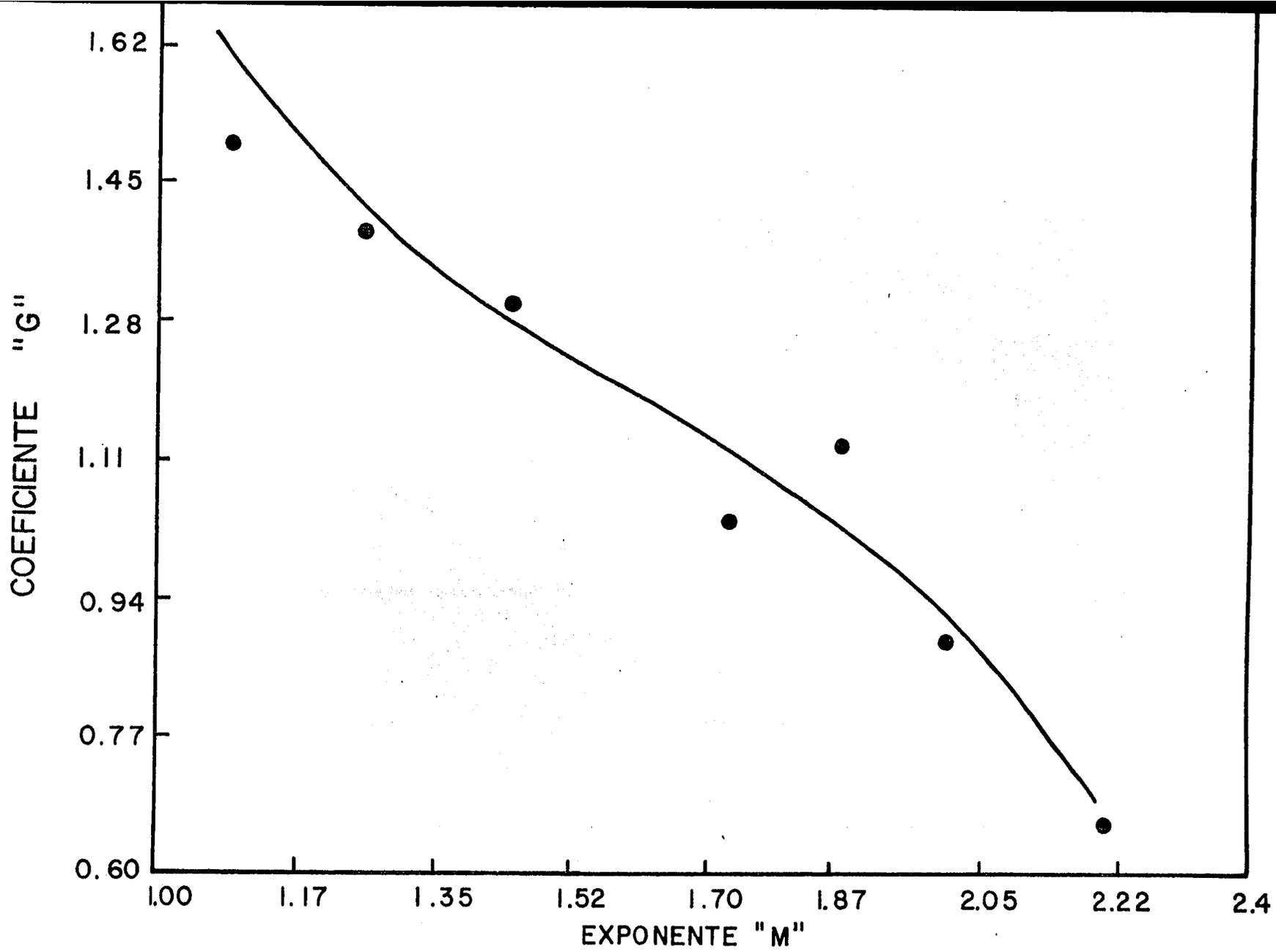


FIG. 5.7 - RELACION G (M)

POLINOMIO DE AJUSTE

$$G(m) = - 0.96m^3 + 4.66m^2 - 8.07m + 6.11$$

m	G	G(m)	% ERROR
1.09	1.49	1,60	- 6.95
1,12	1.69	1.57	7.47
1.26	1.38	1,41	- 1.96
1.45	1.30	1.28	1.96
1.73	1.03	1,11	- 8.47
1.87	1,12	1.03	8.42
2,00	0.88	0.91	- 0,44
2.20	0.65	0,66	- 2.80

ERROR PROMEDIO = 4.8

TABLA II - COMPARACION DE VALORES EXPERIMENTALES, G,
CON VALORES ESTIMADOS, G(m), GENERADOS
POR EL POLINOMIO DE AJUSTE.

5.12 Algunas implicaciones de la presente teoría

La teoría que se acaba de presentar es una herramienta valiosa en el campo de la caracterización de medios porosos y, en consecuencia, tiene implicaciones de importancia en relación con la explotación de yacimientos de hidrocarburos, ya que mientras mejor se conozca la geometría interna de una roca almacenante, mejor se pueden planificar las operaciones de recuperación de los mismos.

Para ilustrar lo anterior, considérese el siguiente ejemplo: Al hacer mediciones de laboratorio en una arenisca típica, se encontró que:

$$F_R = 17.7 \quad \text{y} \quad \phi = 0.190$$

En el caso de una roca natural, la ecuación de Archie es una buena aproximación a la realidad, de modo que sustituyendo los valores anteriores en la Ec. 5.16 se obtiene:

$$m = 1.73$$

Con este valor, y mediante el uso de la Ec. 5.7 se encuentra para la porosidad de conducción o de flujo:

$$\phi_f = 0.190^{1.73} = 0.0565$$

Por lo tanto, la porosidad de estancamiento es, de acuerdo con la Ec. 5.6.

$$\phi_s = 0.190 - 0.0565 = 0.134$$

Esto quiere decir que el 70% del volumen poroso corresponde a trampas y solamente el 30% a canales.

Considerando el mismo valor para m , o sea 1.73, pero una porosidad total del 5%, se tendría $\phi_f = 0.00561$ y $\phi_s = 0.0444$. O sea que, en este caso el 89% del volumen poroso corresponde a trampas y solamente el 11% a canales. Aproximadamente una relación de 8 a 1.

Esto implica que de acuerdo con la idea que se tiene normalmente de una roca porosa, los resultados anteriores son, hasta cierto punto, inesperados. Dicho de otra forma, la teoría que se ha desarrollado conduce a una nueva imagen de las rocas sedimentarias, de acuerdo con la cual las regiones de entrampamiento predominan sobre los canales, como se ha ilustrado en el ejemplo anterior, el cual es un caso real.

Ahora bien, ¿Cómo afectan estas ideas a la política de explotación de yacimientos? Veamos: Bajo un régimen de recuperación primaria, parte de los fluidos dentro de las trampas fluyen hacia los canales por efecto de la caída de presión que ocurre en los canales, y con el tiempo esos fluidos pueden llegar a ser extraídos. Esta situación se ilustra esquemáticamente en la fig. 5.8. Esto quiere decir que, desde el punto de vista de la explotación primaria, las trampas no presentan problemas especiales para la recuperación de hidrocarburos.

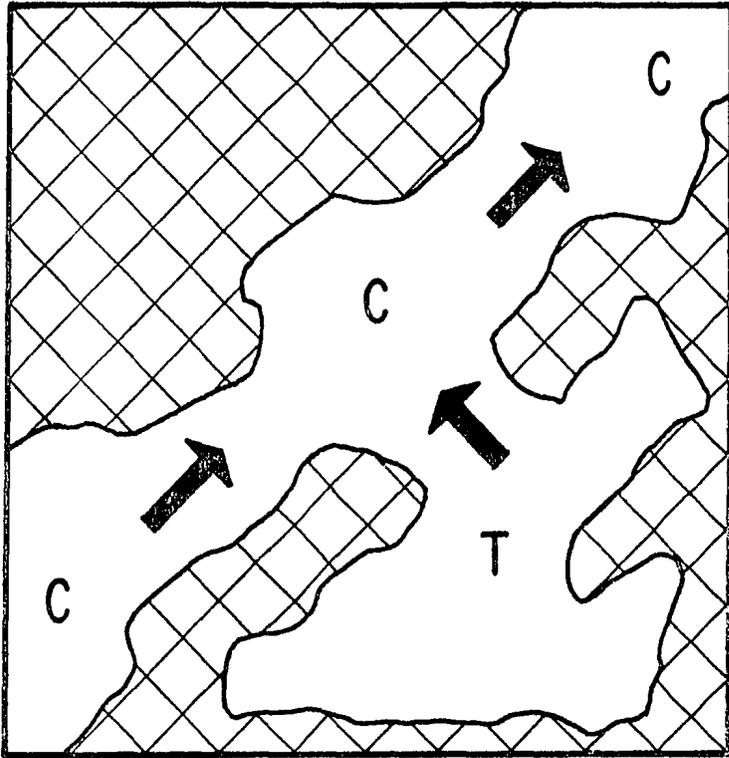


FIG. 5.8 .- FLUJO DE FLUIDOS DE UNA TRAMPA HACIA UN CANAL DURANTE UN PROCESO DE RECUPERACION PRIMARIA.

Sin embargo, el panorama cambia radicalmente desde el punto de vista de la recuperación secundaria. Considérese, por ejemplo, el caso de la inyección de agua, que es el proceso más frecuentemente utilizado en la práctica. Al inyectar agua al yacimiento, los fluidos dentro de las trampas son represionadas y no tienen oportunidad de salir. En consecuencia, se puede decir que, en términos generales, es buena política explotar un yacimiento por recuperación primaria la mayor parte del tiempo que sea compatible con los otros aspectos de la producción, antes de iniciar la inyección de agua.

Por otra parte, la existencia de trampas en grandes proporciones sugiere que la recuperación de hidrocarburos, por inyección de agua, se puede mejorar sustancialmente si el proceso se hace en forma cíclica; es decir, siguiendo un patrón de represionamiento y depresionamiento. En esta forma, se puede "lavar" poco a poco el interior de las trampas. El mejoramiento de la recuperación por inyección cíclica no es una utopía. Esto ha sido probado a nivel de laboratorio y en operaciones de campo por algunos investigadores⁴¹⁻⁴³.

Resumiendo, se puede decir que, a través del estudio de la geometría interna de las rocas sedimentarias, se ha podido inferir que gran parte del volumen poroso está constituido por regiones de estancamiento que no participan activamente en la conducción de fluidos. Este hecho ha permitido deducir dos reglas generales para el mejoramiento de la recuperación de hidrocarburos; éstas son:

1. Antes de iniciar un proceso de inyección de agua, es conveniente producir hidrocarburos por recuperación primaria, tanto tiempo como lo permitan los otros aspectos de la explotación.

2. Durante el proceso de inyección de agua, conviene hacer variar la presión de inyección en forma cíclica. Los cambios alternos de la presión favorecen la recuperación de hidrocarburos.

CAPITULO 6

RELACION GENERAL ENTRE EL INDICE DE RESISTIVIDAD
Y EL INDICE DE SATURACION DE AGUA

De acuerdo con uno de los objetivos fundamentales planteados al inicio de este trabajo, en este capítulo se hace un análisis sobre la conducción eléctrica en rocas que están parcialmente saturadas con agua.

El índice de resistividad y el índice de saturación de agua son dos parámetros básicos y de gran utilidad para la evaluación del volumen original de hidrocarburos, a partir del análisis y/o el procesamiento de datos obtenidos de los registros eléctricos. Aunque en realidad el índice de saturación de hidrocarburos es el valor de importancia primordial, generalmente la evaluación de este parámetro se lleva a cabo a partir del conocimiento del índice de saturación de agua.

La relación más utilizada entre los factores mencionados es conocida como ley generalizada de Archie¹⁶; sin embargo, según se mencionó en el capítulo 3, esta ley ha sido derivada empíricamente a partir de una serie de observaciones realizadas en muestras de laboratorio y campo y no satisface la condición física de que $I_R = 1$ cuando $S_W = 1$.

Por otra parte, durante muchos años, la evaluación in situ de este parámetro se ha venido efectuando de acuerdo a las primeras técnicas que sobre el tema desarrollaron los pioneros del análisis de registros geofísicos de pozo.

En la actualidad, dichas técnicas ya no son confiables puesto que han sido establecidas a partir de ecuaciones que no satisfacen condiciones de frontera ó a través de consideraciones que van desde el hecho de mantener constantes los valores de parámetros que aparecen en las ecuaciones antes señaladas, Ecs. 3.3 y 3.10, hasta el extremo de llegar, simplemente, a suponerlos.

En base a lo anteriormente expuesto se infiere que la evaluación del índice de saturación de agua se ha venido efectuando en base a métodos que, debido a las diversas limitaciones antes señaladas, ya no son del todo confiables.

A continuación se presenta el desarrollo teórico de una expresión general entre I_R y S_W , a partir de relaciones fundamentales. El planteamiento de este desarrollo se realiza con la idea de poder llegar a implementar un nuevo procedimiento de cálculo y de satisfacer, en consecuencia, la necesidad que tiene la industria petrolera de contar con un método de cálculo que sea versátil, práctico, consistente con la realidad física de los yacimientos petrolíferos y que pueda servir según el caso, como complemento ó sustituto de las técnicas convencionales.

Con esta idea en mente, se presentan las siguientes consideraciones teóricas sobre la relación entre I_R y S_W que no han sido tomadas en cuenta con anterioridad en la literatura existente sobre el tema.

6.1 Consideraciones Teóricas

Es probable que para obtener una solución general se requiera de un análisis sistemático y riguroso basado en nuevas consideraciones. A este respecto se propone, como un primer intento, un enfoque un tanto diferente, el cual comprende básicamente los dos puntos siguientes:

1. Visualizar a la porosidad y a los índices de saturación de fluidos (agua, aceite, gas) como parámetros físicos de todo sistema poroso que, en la naturaleza, siempre constituyen una unidad física inseparable (inherente) y que, en consecuencia, siempre pueden interrelacionarse y,
2. Desde el punto de vista eléctrico, los hidrocarburos pueden ser considerados como una parte integrante de la matriz de roca ya que ellos son altamente resistivos. Aquí se supone que las rocas bajo estudio son dieléctricas.

La primera idea surge del análisis de las siguientes propiedades o principios físicos, que aquí serán bautizadas como:

- A) PRINCIPIO DE UNIFICACION ,
- B) PRINCIPIO DE ADAPTACION Y
- C) PRINCIPIO DE SUPERPOSICION.

PRINCIPIO DE UNIFICACION

De manera natural, en todo sistema poroso siempre existe, por lo menos, un fluido (agua, aceite, gas) que lo satura y éste se establece como sistema saturante siempre que exista, al menos, una porción porosa almacenante que lo admita. Es decir, la existencia de la porosidad implica la presencia de algún índice de saturación de fluido y viceversa.

PRINCIPIO DE ADAPTACION

La porosidad o capacidad de almacenamiento así como la fisonomía de los poros o estructura geométrica interna de un sistema roca-poros-fluidos, no sufren cambios cuando dicho sistema se satura con algún fluido como el agua, el aceite y/o el gas. Esto es, de acuerdo a sus propiedades físicas, éstos fluidos sólo ocupan los poros del sistema roca, adaptándose a la forma de los mismos.

PRINCIPIO DE SUPERPOSICION

Si S_W , S_O y S_G son todos diferentes índices de saturación de cualquier sistema poroso, entonces: $S_T = S_W + S_O + S_G$, es la saturación total del sistema referido. Donde S_W es el índice de saturación de agua, S_O el índice de saturación de aceite y S_G el índice de saturación de gas. Los valores que asuman estos índices dependen de las condiciones que, en un momento determinado, prevalecen en un yacimiento.

Por lo que respecta a la segunda idea y para aclarar más detalladamente del porqué los hidrocarburos pueden visualizarse como parte integrante de la matriz de roca, considérese, como primera instancia, una porción de roca sedimentaria saturada con agua, la cual posee una geometría 1 con un cierto grado de complejidad, Fig. 6.1 . En este caso, el sistema analizado está en terminos de dos fases de conducción (roca-agua) y una medida de la complejidad geométrica interna de la roca puede obtenerse a través del factor de formación, F_R , el cual ha sido definido como la razón de la resistividad de una muestra porosa cuando está saturada con fluido conductor a la resistividad del fluido saturante¹², esto es; $F_R = R_O / R_W$.

Ahora bien, si de alguna forma se satura la porción de roca antes mencionada, parcialmente con agua y parcialmente con aceite o gas, Fig. 6.2, entonces, se llega a estar en presencia de un sistema físicamente diferente que posee tres fases de conducción (roca-agua-aceite) y una medida de la nueva geometría interna puede obtenerse a través de un factor de formación "modificado", $F_{R_W} = R_t / R_W$, donde $R_t \neq R_O$ es el valor de resistividad equivalente en la muestra porosa donde coexisten, por lo menos, dos fluidos saturantes. En otras palabras $\lim R_t = R_O$.

$$S_W \longrightarrow 1$$

El resultado anterior era de esperarse ya que, desde el punto de vista eléctrico, los hidrocarburos poseen una resistividad bastante más alta que la del agua, quedando éste fluido como único medio conductor del sistema roca-agua-hidrocarburos considerado y los hidrocarburos como parte integrante de la matriz de las rocas.

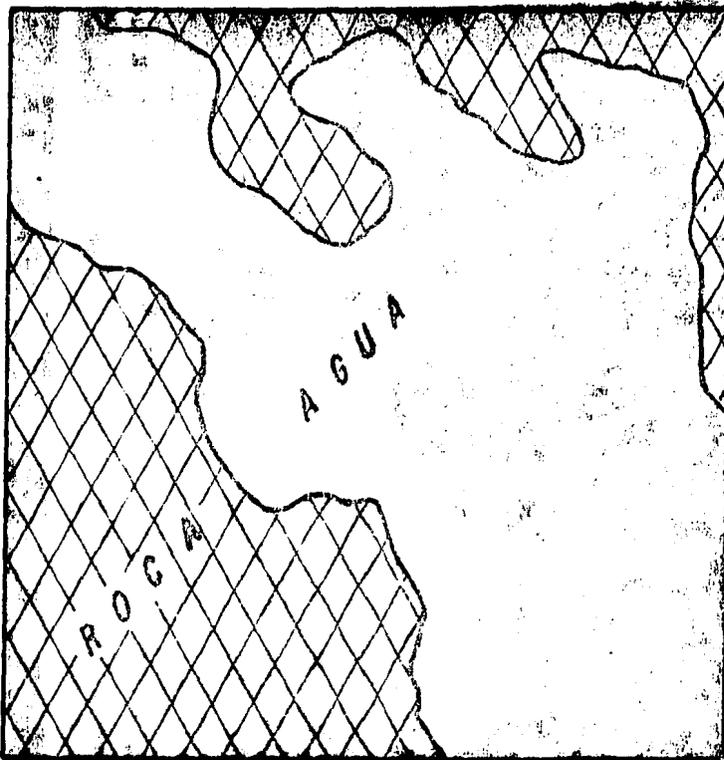


FIG. 6.1.-REPRESENTACION ESQUEMATICA DE UNA PORCION DE
ROCA SATURADA CON AGUA. GEOMETRIA 1

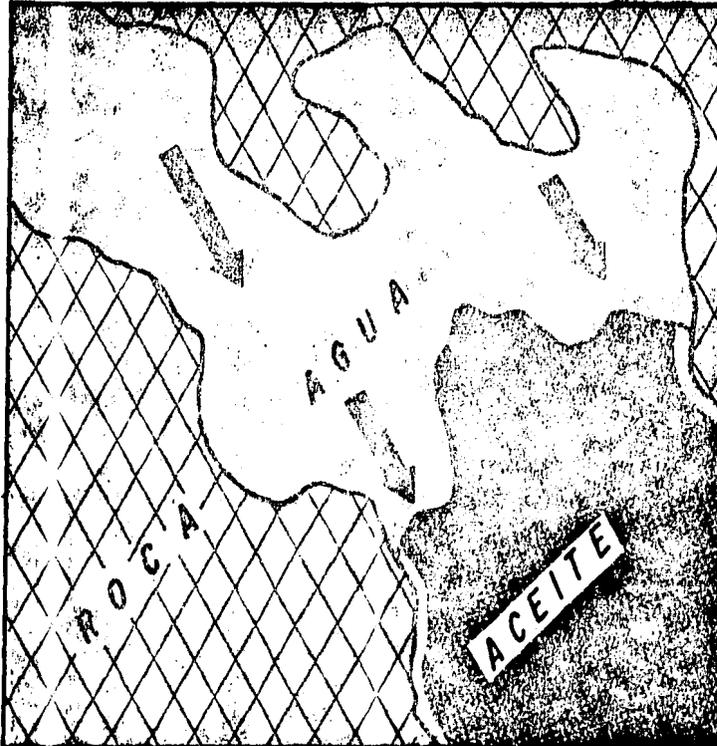


FIG. 6.2.- REPRESENTACION ESQUEMATICA DE UNA PORCION DE ROCA PARCIALMENTE SATURADA CON AGUA. GEOMETRIA. 2

Desde este marco de referencia, resulta obvio asumir que el problema planteado en este trabajo, sobre el comportamiento eléctrico de las rocas parcialmente saturadas con agua, es del mismo grado de dificultad que el del problema analizado en la referencia 37, es decir, el presente sistema que implica tres fases de conducción (roca-agua-hcs.) se transforma en un sistema de dos fases de conducción (roca-agua), donde el problema a resolver es en gran parte geométrico. Esto es, la geometría interna 1 de una muestra porosa inicialmente saturada con agua se modifica en una geometría 2, cuando dicha muestra se satura parcialmente con aceite y/o gas. En ambas situaciones se supone que el grado de complejidad geométrica es el mismo.

De aquí que pueda afirmarse, sin lugar a dudas, que una muestra porosa, en la que físicamente coexisten agua e Hidrocarburos, se comporta desde el punto de vista eléctrico y práctico, como un medio poroso saturado sólo con agua, con la condición adicional de que en su estructura geométrica interna ocurren cambios que la hacen un tanto diferente a la fisonomía geométrica de la misma muestra porosa saturada únicamente con agua.

Así, independientemente del grado de saturación de hidrocarburos presente en un medio poroso y tomando en cuenta que siempre existirá un índice de saturación de agua, denominado residual, todos los sistemas porosos parcialmente saturados con agua pueden visualizarse, suponerse o aceptarse como sistemas físicos saturados con agua solamente. En consecuencia, es en este sentido general en el que puede decirse que el llamado exponente de cementación m , es igual al denominado exponente de saturación n . Pero hablando estrictamente, cada uno de los dos parámetros anteriores representa una propiedad o situación física muy particular, que no necesariamente debe ser la misma.

6.2 Deducción de la Relación, $I_R - S_W$, Entre
Indice de Resistividad e Indice de Saturación de Agua

Considérese, como punto de partida, que cuando los poros de una roca están saturados con agua salada, el factor de resistividad se define como:

$$F_R = \frac{R_o}{R_w} \quad (6.1)$$

y cuando los poros están ocupados por agua e hidrocarburos, el índice de resistividad está dado por:

$$I_R = \frac{R_t}{R_o} \quad (6.2)$$

sustituyendo la Ec. 6.1 en la expresión 6.2, se tiene que:

$$I_R = \frac{R_t}{F_R R_w} \quad (6.3)$$

Los hidrocarburos tienen una resistividad muy alta en comparación con la del agua, de modo que, cuando coexisten las dos fases dentro de los poros, solamente la parte ocupada por agua puede conducir corriente eléctrica. Esta parte se puede expresar como:

$$\phi_W = \phi S_W \quad (6.4)$$

Por otra parte, se ha demostrado que la relación general existente entre el factor de formación y la porosidad total posee la siguiente forma³⁷:

$$F_R = 1 + G (\phi^{-m} - 1) \quad (6.5)$$

Quando el agua ocupa sólo parcialmente el espacio poroso, de acuerdo a las propiedades de Unificación, Adaptación y Superposición analizadas en la sección precedente y debido al hecho de que la resistividad de los hidrocarburos es bastante más alta que la del agua, se está en presencia de un sistema físico cuya porosidad o capacidad de almacenamiento se ve reducida ya que la existencia de los hidrocarburos se puede considerar, desde el punto de vista eléctrico, como un incremento de la matriz de roca en este caso. Siendo así, la Ec. 6.5 toma la forma:

$$F_{R_W} = 1 + G (\phi_W^{-m} - 1) = 1 + G (\phi^{-m} S_W^{-m} - 1) \quad (6.6)$$

y la relación 6.1 se transforma en la siguiente:

$$F_{R_W} = \frac{R_t}{R_W} \quad (6.7)$$

Igualando los segundos miembros de las Ecs. 6.6 y 6.7, se obtiene:

$$R_t = R_W (1 + G (\phi^{-m} S_W^{-m} - 1)) \quad (6.8)$$

y sustituyendo la Ec. 6.8 en la Ec. 6.3, se llega a:

$$I_R = \frac{1 + G (\phi^{-m} S_W^{-m} - 1)}{1 + G (\phi^{-m} - 1)} \quad (6.9)$$

Observése que la relación 6.9 sí satisface la condición física que exige que: $I_R = 1$ cuando $S_W = 1$, además, si $G = 1$, dicha expresión se reduce a la ecuación experimental de Archie¹², esto es:

$$I_R = \frac{\emptyset^{-m} S_W}{\emptyset^{-m}} = S_W^{-m} \quad (6.10)$$

Finalmente, despejando S_W de la expresión 6.8, se obtiene:

$$S_W = \left[\frac{R_t/R_W + G - 1}{G} \right]^{-1/m} \frac{1}{\emptyset} \quad (6.11)$$

que es la relación general para el caso de rocas sedimentarias limpias (sin contenido de arcilla). Se propone utilizar la Ec. 6.11 en casos prácticos de campo ya que elimina el uso de gráficas y tiene la ventaja adicional de que las variables m , G , R_t , R_W y \emptyset pueden ser determinados a partir de datos de registros geofísicos de pozo y/o de mediciones de laboratorio.

CAPITULO 7

APLICACION A UN CASO DE CAMPO

La secuencia en que se manejan las expresiones, teóricas y empíricas, propuestas en el Capítulo 5 de este trabajo y el tipo de resultados que se derivan de su aplicación, se ilustran con un caso de campo.

En esta sección se presenta el análisis del pozo Abkatún 4 perteneciente a la zona marina conocida como Sonda de Campeche, localizada en el Sureste de la República Mexicana. Es importante señalar que el pozo Abkatún 4 se eligió para ilustrar la funcionalidad de las relaciones antes mencionadas porque sus características son similares a las de otros pozos (como es el caso del Jujo 25) en los que, en principio, es aplicable la técnica de Aguilera⁹. Sin embargo, la aplicación de esta técnica estadística conduce a resultados contradictorios con respecto a los reportes de campo.

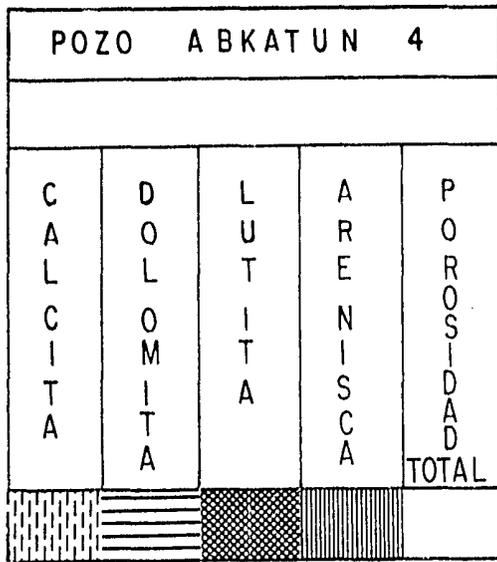
En la fig. 7.1 se ilustra la variación del tipo de roca y de las diferentes porosidades existentes en dicho pozo, en la fig. 7.2 se muestra la distribución de sus fluidos almacenados (agua e hidrocarburos) y en el listado 1 se presentan los valores de todos y cada uno de los parámetros antes mencionados. Estos valores se encuentran divididos a intervalos de tres pies cada uno, del espesor total analizado.

En las primeras ocho columnas del listado 1 aparecen los valores de profundidad, las fracciones de minerales y los diferentes tipos de porosidad existentes (primaria, secundaria, total y efectiva). Por otra parte, en las columnas 9 a 12 aparecen los valores del exponente m , del coeficiente G , del factor de formación y del índice de saturación de agua.

Los valores correspondientes a las fracciones de los diferentes tipos de roca así como los de las porosidades primaria, secundaria y total (columnas 2 a 7) fueron determinados a través de la técnica denominada "Litoporosidad"⁶. La porosidad efectiva fué cuantificada mediante la relación 5.7 y las variables m , G , F_R y S_W (columnas 9 a 12) se determinaron usando las Ecs. 5.22, 5.27, 5.9 ó 5.13 y 6.11, respectivamente.

En la hoja 2 del listado 1 se muestran los valores promedio, del intervalo total analizado, representativos de cada mineral identificado, de cada tipo de porosidad evaluada, del exponente m y del coeficiente G .

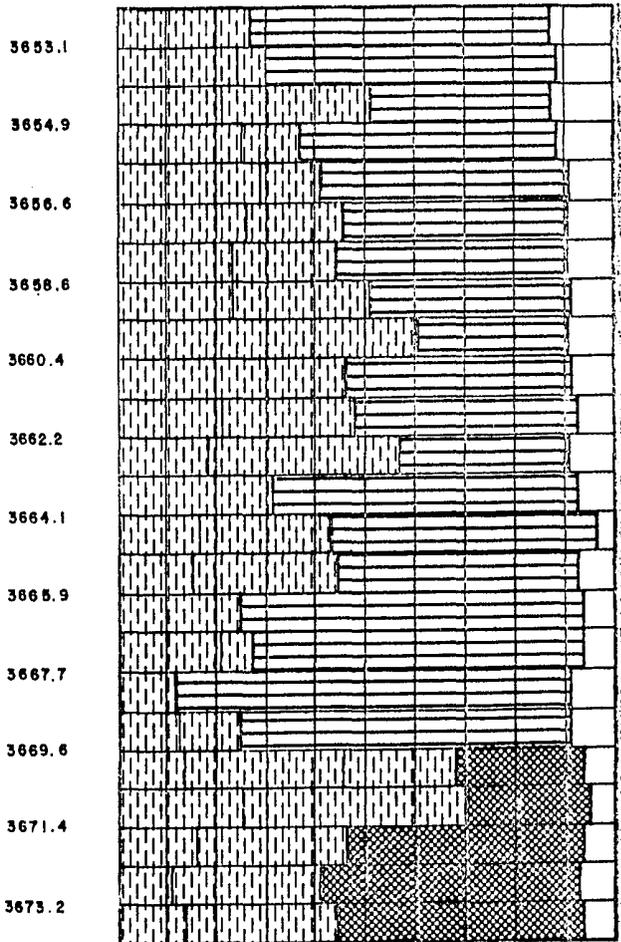
Por último, en la TABLA III y en la fig. 7.3 se presenta una comparación de valores S_W obtenidos a través de la técnica de Aguilera⁹ y mediante el empleo de la Ec. 6.11



(%)

0 10 20 30 40 50 60 70 80 90 100

PROFUNDIDAD (metros)



▲ INTERVALO PRODUCTOR DE HIDROCARBUROS

FIG. 7.1 - VARIACION DE LITOLOGIA Y POROSIDAD

POZO ABKATUN- 4

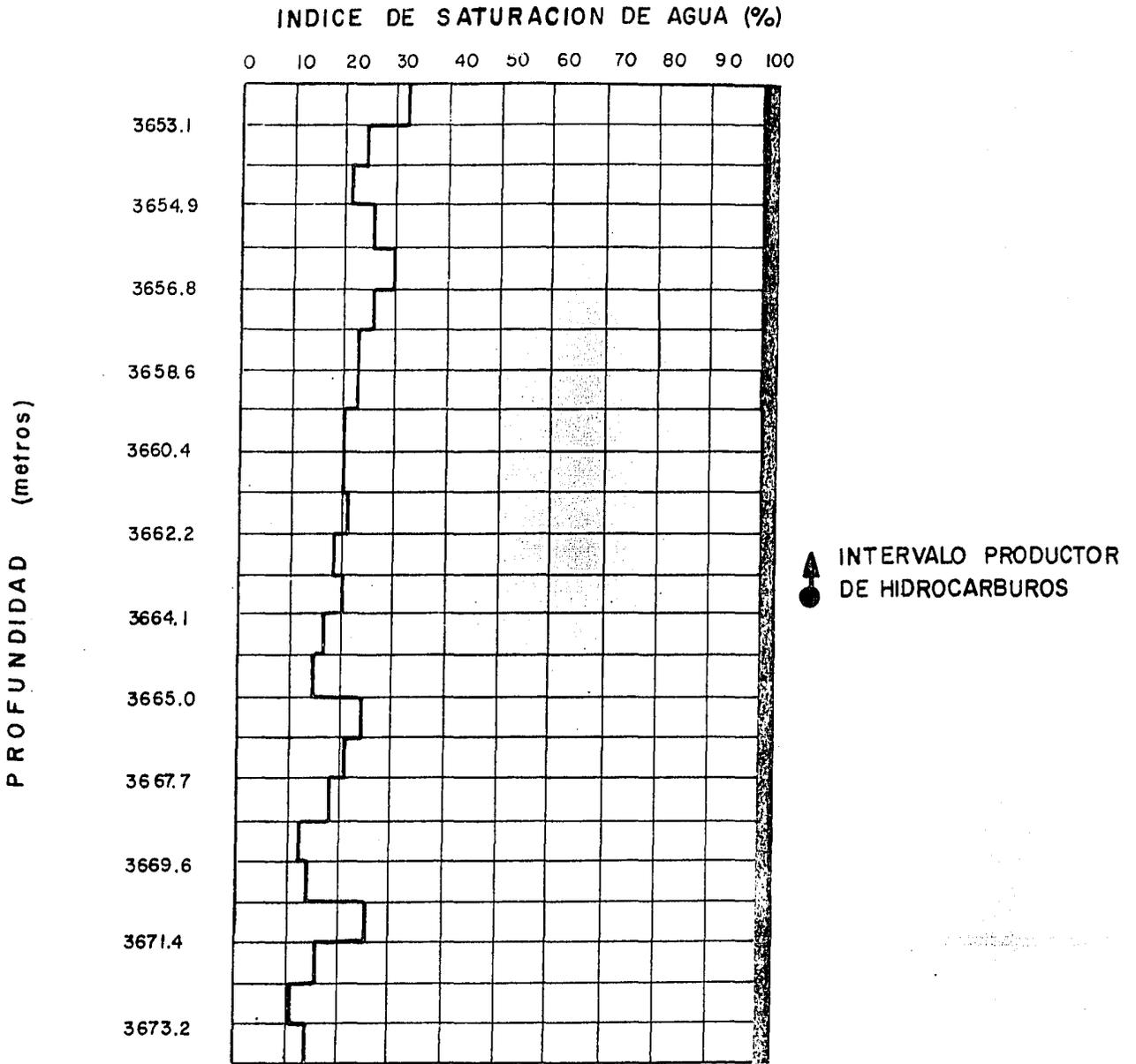


FIG. 7.2 - VARIACION DEL INDICE DE SATURACION DE AGUA

— VALORES OBTENIDOS CON LA EC.6.II

INSTITUTO MEXICANO DEL PETRÓLEO

LISTADO 1.- DETERMINACION DE LITOLOGIA, POROSIDAD E INDICE DE SATURACION DE AGUA. POZO ABKATUN NO.4 HOJA 1

PROFUNDIDAD P	FRACCIONES DE MINERALIS C D L				POROSIDAD PRIMARIA	POROSIDAD SECUNDARIA	POROSIDAD TOTAL	POROSIDAD EFECTIVA	EXPONENTE M	COEFICIENTE G	FACTOR DE FORMACION	INDICE DE SATURACION DE AGUA
3652.2	CAL= .31	DOL= .69			.1182	.0158	.1340	.0120	2.1654	.6946	58.225	.324
3653.1	CAL= .34	DOL= .66			.0911	.0243	.1153	.0067	2.1777	.7060	81.530	.245
3654.0	CAL= .58	DOL= .42			.0952	.0294	.1246	.0103	2.1730	.7128	69.420	.213
3654.9	CAL= .41	DOL= .59			.0913	.0182	.1096	.0077	2.1632	.6979	90.415	.252
3655.8	CAL= .46	DOL= .54			.0768	.0135	.0902	.0051	2.1876	.6914	137.107	.291
3656.8	CAL= .51	DOL= .49			.0668	.0253	.0921	.0053	2.1767	.7073	132.713	.265
3657.7	CAL= .50	DOL= .50			.0755	.0194	.0950	.0057	2.1821	.6995	123.532	.234
3658.6	CAL= .57	DOL= .43			.0690	.0150	.0840	.0043	2.1862	.6935	160.306	.233
3659.5	CAL= .67	DOL= .33			.0762	.0098	.0860	.0045	2.1910	.6863	151.463	.205
3660.4	CAL= .51	DOL= .49			.0766	.0043	.0749	.0033	2.1961	.6787	203.377	.206
3661.3	CAL= .52	DOL= .48			.0546	.0135	.0681	.0027	2.1876	.6914	253.252	.212
3662.2	CAL= .62	DOL= .38			.0659	.0141	.0800	.0039	2.1870	.6922	178.169	.187
3663.2	CAL= .34	DOL= .65	LUT= .01		.0439	.0000	.0439	.0011	2.1933	.6829	649.112	.205
3664.1	CAL= .46	DOL= .54			.0351	.0075	.0426	.0010	2.1931	.6832	700.923	.169
3665.0	CAL= .49	DOL= .51			.0626	.0069	.0695	.0029	2.1937	.6823	240.204	.151
3665.9	CAL= .27	DOL= .73	LUT= .00		.0580	.0000	.0580	.0019	2.2009	.6727	353.242	.248
3666.8	CAL= .50	DOL= .70			.0515	.0083	.0598	.0021	2.1924	.6843	334.061	.208
3667.7	CAL= .13	DOL= .87			.0709	.0039	.0749	.0033	2.1964	.6782	203.267	.185
3668.6	CAL= .28	DOL= .72			.0608	.0240	.0849	.0045	2.1779	.7056	158.118	.128
3669.6	CAL= .75	DOL= .00	LUT= .25		.0695	.0000	.0695	.0038	2.0880	.8238	215.761	.134
3670.5	CAL= .74	DOL= .00	LUT= .26		.0480	.0000	.0480	.0018	2.0844	.8281	464.496	.257
3671.4	CAL= .50	DOL= .50	LUT= .50		.0546	.0000	.0546	.0032	1.9751	.9415	204.127	.163
3672.3	CAL= .45	DOL= .55	LUT= .55		.0644	.0000	.0644	.0047	1.9508	.9631	202.884	.118
3673.2	CAL= .46	DOL= .54	LUT= .52		.0604	.0000	.0604	.0040	1.9656	.9500	236.862	.134

LISTADO 1. HOJA 2 POZO ABKATUN 4

VALORES PONDERADOS DEL INTERVALO TOTAL ANALIZADO

PROMEDIO TOTAL DE CALIZA = .4659

PROMEDIO TOTAL DE DOLOMIA = .4468

PROMEDIO TOTAL DE LUTITA = .0873

PROMEDIO TOTAL DE POR. PRIM = .0680

PROMEDIO TOTAL DE POR. SEC. = .0106

PROMEDIO DE POROSIDAD TOTAL = .0785

PROMEDIO TOTAL DE POR. EFEC. = .0045

PROMEDIO DEL EXPONENTE M = 2,1514

PROMEDIO DEL COEFICIENTE G = .7430

PROFUNDIDAD	INDICE DE SAT. DE AGUA *	INDICE DE SAT. DE AGUA **
m	%	%
3652.2	32.40	100.00
3653.1	24.50	85.27
3654.0	21.30	73.76
3654.9	25.20	87.09
3655.8	29.10	99.34
3656.8	26.50	90.36
3657.7	23.40	78.13
3658.6	23.30	76.19
3659.5	20.50	65.69
3660.4	20.60	64.25
3661.3	21.20	66.13
3662.2	18.70	58.65
3663.2	20.50	59.14
3664.1	16.90	47.03
3665.0	15.10	44.65
3665.9	24.80	76.51
3666.8	20.80	63.22
3667.7	18.50	56.86
3668.6	12.80	38.76
3669.6	13.40	45.80
3670.5	25.70	90.33
3671.4	16.30	68.36
3672.3	11.80	51.53
3673.2	13.40	56.87

TABLA III.- COMPARACION DE VALORES S_w . POZO ABKATUN No. 4

* VALORES OBTENIDOS CON LA EC. 6.11

** VALORES OBTENIDOS CON LA TECNICA DE AGUILERA⁹.

COMPARACION DE RESULTADOS

Una inspección de los valores S_w obtenidos con la Ec. 6.11 y con la técnica de Aguilera⁹, para el caso del pozo Abkatún 4, demuestra que, en términos generales, los resultados difieren. En consecuencia, la pregunta obligada es: ¿Cuál de los dos procedimientos de cálculo es el más representativo de las condiciones reales que prevalecen en el pozo bajo estudio ?

Antes de responder a ésta pregunta debe tenerse presente que el pozo Abkatún 4 únicamente posee 24 datos de registro. Este hecho representa un probable obstáculo para la técnica de Aguilera, ya que dada su naturaleza estadística requiere de un número "mínimo" de datos a procesar y quizás, en este caso, no se cuente con ese "mínimo" requerido. Un inconveniente más que se presenta si se desea aplicar la técnica de Aguilera a este caso de campo es que el intervalo o formación geológica bajo estudio constituye precisamente la zona reportada por PEMEX como productora de hidrocarburos. Lo que quiere decir que en este caso no es posible disponer de un valor de corte, P, que separe las zonas saturadas con agua de las zonas parcialmente saturadas con agua⁹. Estas limitaciones no se presentan con el manejo de la Ec. 6.11 .

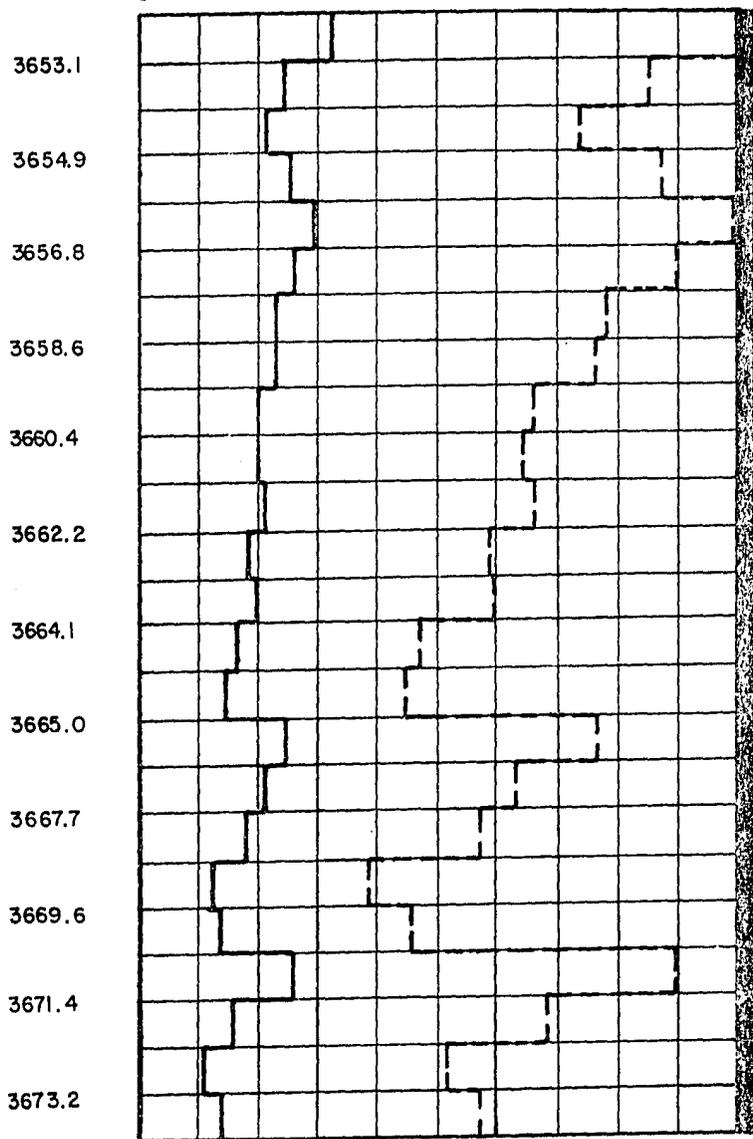
Bajo esta perspectiva, la técnica de Aguilera parece ser la menos representativa de las condiciones físicas del pozo bajo estudio. Una confirmación de este resultado se obtiene cuando se suponen como base de comparación los reportes de campo. Estos reportes de campo permiten concluir que los resultados generados con la Ec. 6.11 son más representativos de las condiciones existentes en el pozo Abkatún 4 ya que éstos se correlacionan mejor con aquéllos, según se muestra en la fig. 7.3 .

POZO ABKATUN - 4

INDICE DE SATURACION DE AGUA (%)

0 10 20 30 40 50 60 70 80 90 100

PROFUNDIDAD (metros)



▲ INTERVALO PRODUCTOR DE HIDROCARBUROS

FIG. 7.3 - COMPARACION DE VALORES

—— VALORES OBTENIDOS CON LA EC. 6.11

--- VALORES OBTENIDOS CON LA TECNICA DE AGUILERA⁹

En esta última figura, se ilustra la comparación de valores S_w , obtenidos por los dos procedimientos de cálculo antes mencionados, y también se indica con una línea gruesa que la zona bajo estudio es productora de hidrocarburos según lo establecen los reportes de PEMEX.

Por otra parte, conviene aclarar que hasta el mes de Abril de 1985, el pozo Abkatún 4 se reportaba como invadido de agua. Pero el análisis que se presenta en este trabajo está basado en los datos del registro combinado completo tomado en Marzo-Julio de 1981, cuando el pozo Abkatún 4 era todavía productor de hidrocarburos. Este pozo fué terminado el 20 de Julio de 1981 y su producción inicial era la siguiente:

ACEITE	29953	b/d
GAS	761900	m ³ /d
RAZON G/A	160	m ³ /m ³

Dicho pozo fué cerrado el 26 de Diciembre de 1983 cuando el intervalo o formación geológica a agujero descubierto abarcaba un espesor de: 3652 m a 3684 m, estaba en producción una sola rama de 1/4" y manifestaba un 4% de agua con una salinidad de 133000 ppm.

Otro caso que resulta interesante analizar es el del pozo Jujo 25 perteneciente a la zona terrestre localizada, también, en el Sureste de la República Mexicana y conocida como Area Reforma-Chiapas. En principio, este pozo cumple todas las condiciones que exige la técnica de Aguilera⁹ para su aplicación (un número de datos relativamente grande, coexisten zonas total y parcialmente saturadas con agua, etc.). Sin embargo, los resultados generados con dicha técnica estadística son menos

representativos de los reportes de campo que los resultados obtenidos con la Ec. 6.11 , según se muestra en la fig. 7.4 . Finalmente, cabe mencionar que hasta Julio de 1984 el pozo Jujo 25 se reportaba como productor de hidrocarburos en el intervalo: 5820 a 5870 metros, con una producción de:

ACEITE	8862	b/d
GAS.	8.87	mmp ³ /d
RAZON G/A	178	m ³ /m ³

L I M I T A C I O N E S

Un inconveniente serio y quizá el más importante para la utilización del procedimiento presentado en este trabajo es áquel relacionado con la influencia que podría ejercer la presencia de hidrocarburos en la evaluación del llamado exponente de cementación m ya que éste está en función de la litología, que a su vez debe ser corregida por la presencia de aceite y/o gas. Respecto a este punto se están llevando a cabo algunos análisis de intervalos productores de hidrocarburos, en pozos que cuentan con información litológica confiable. Pero hasta la fecha no se ha logrado establecer una solución a este problema.

Otra limitación que es importante señalar es aquella que tiene que ver con la exigencia del método de "Litoporosidad"⁶, en el sentido de que, para lograr la evaluación de la litología y de la porosidad total (primaria + secundaria), es necesario que existan por lo menos tres registros de porosidad (CNL, FDC, BHC).

POZO JUJO - 25

INDICE DE SATURACION DE AGUA (%)
 0 10 20 30 40 50 60 70 80 90 100

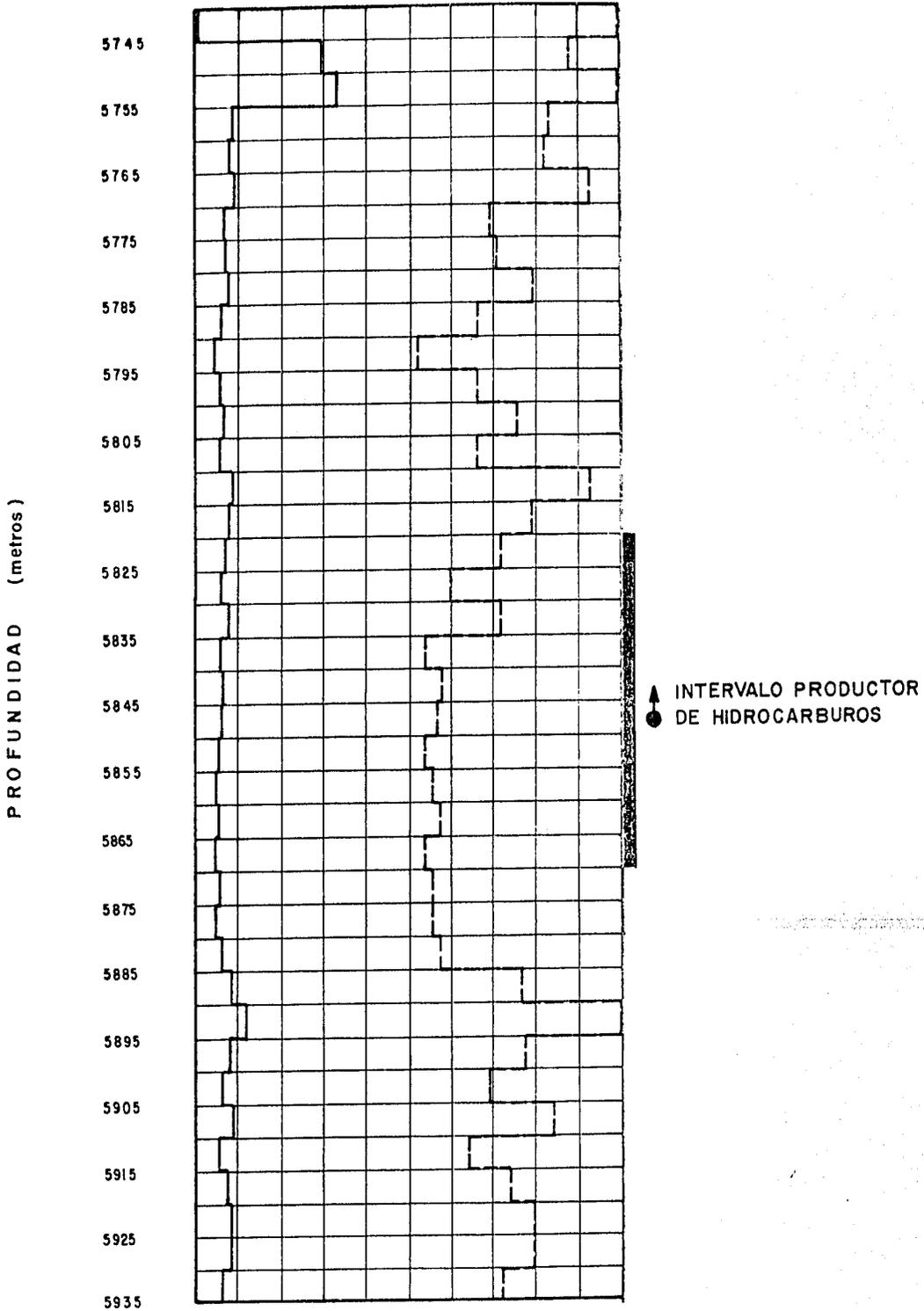


FIG.7.4 - COMPARACION DE VALORES SW

—— VALORES OBTENIDOS CON LA EC. 6.11

----- VALORES OBTENIDOS CON LA TECNICA DE AGUILERA⁹

COMENTARIOS FINALES

Como se mencionó en el Capítulo 2 , la evaluación del índice de saturación de agua es de importancia primordial para:

- a- la determinación del contacto agua-hidrocarburos, como límite inferior de un yacimiento,
- b- la definición del intervalo a explotar y
- c- el cálculo del volumen original de hidrocarburos.

Desde este punto de vista, la utilidad e importancia de la Ec. 6.11 , como una herramienta práctica y económica para la obtención de S_w , es evidente.

De esta forma, la técnica de Aguilera⁹, comparada con el procedimiento de cálculo presentado en este trabajo, resulta menos conveniente; después de que sus ecuaciones básicas no poseen un desarrollo teórico, fallan para valores altos de porosidad e índice de saturación de agua, se tienen que mantener constantes, en todo el intervalo o formación bajo estudio, los valores de los parámetros B , G , I_R , R_w y m entre otros, es necesario el procesamiento, en serie, de todo un paquete de programas, para llegar a evaluar, una a una, las variables m , P representativa de cada zona, P representativa de zonas saturadas con agua, etc.⁹ y además, se exige que la formación geológica bajo estudio posea un número "mínimo" de datos a procesar y en donde es necesario que coexistan zonas total como parcialmente saturadas con agua, porque de lo contrario resulta imposible determinar los valores del índice de resistividad y, por ende, los valores del índice de saturación de agua.

El presente trabajo representa un esfuerzo más en la búsqueda de soluciones a los problemas antes señalados y aunque aún quedan diversos puntos por esclarecer acerca del significado físico de algunas de las variables, como m y G , que aparecen en la relación $I_R - S_W$ propuesta, su estado actual de desarrollo permite, como un primer intento, su aplicación a casos prácticos de campo con los resultados mostrados en las figuras y listados antes mencionados.

C O N C L U S I O N E S

CONCLUSIONES

Existe una urgente necesidad de desarrollar técnicas que permitan evaluar, a partir de datos de registros geofísicos de pozo, el volumen original de hidrocarburos en forma práctica, económica y precisa. Esto se debe al hecho de que muchos de los procedimientos de cálculo, utilizados en la actualidad, poseen diversos puntos débiles que hacen que sus resultados tengan intervalos de incertidumbre grandes.

En este trabajo se propone un método de cálculo que ha resultado ser más versátil, por su economía, sencillez y eficiencia, que las técnicas convencionales de uso común. Las bases del nuevo procedimiento son:

- a) las ideas y desarrollos de Maxwell sobre la conducción eléctrica en medios heterógeneos,
- b) la teoría de Pérez-Rosales aplicable al caso de rocas naturales saturadas con agua,
- c) los datos experimentales del factor de formación y de porosidad correspondientes a ocho diferentes medios porosos (tres hechizos de laboratorio y cinco sistemas constituidos por rocas naturales).
- d) las ocho diferentes parejas de valores m , G representativas de los ocho sistemas porosos antes mencionados,
- e) una técnica que permita determinar los componentes litológicos y de porosidad (en este trabajo se utilizó el método denominado de "Lito-porosidad"⁶),
- f) seis principios físicos que permiten caracterizar, de una manera más consistente con la realidad, la geometría interna y la distribución de fluidos saturantes de los medios porosos. Dos principios relacionan la porosidad total con la porosidad de flujo, uno

relaciona ésta última porosidad con el factor de formación y los tres principios restantes permiten visualizar a la porosidad y a los diferentes índices de saturación como variables físicas inherentes.

- g) un nuevo modelo teórico que permite estudiar el efecto que ejercen las porosidades primaria y secundaria sobre el factor de formación, así como la relación que guardan entre sí estos parámetros (ecuación modificada de Maxwell).

A partir de las ideas, desarrollos y resultados presentados en este trabajo, se pueden derivar las siguientes conclusiones y algunas sugerencias que podrían ser aplicables a futuras investigaciones.

1. Se generalizaron los modelos teóricos y los resultados de la teoría de Pérez-Rosales para hacerlos aplicables tanto a rocas naturalmente fracturadas como a rocas parcialmente saturadas con agua.
2. Para el caso de rocas sedimentarias, la teoría generalizada sobre F_R y \emptyset contempla como casos particulares las ecuaciones empíricas del tipo de Archie, las expresiones teóricas de Maxwell, Fricke y Pérez-Rosales y proporciona un acercamiento al significado físico del exponente m y del coeficiente G .
3. Las relaciones generales, deducidas en este trabajo, entre el factor de formación y la porosidad total; entre el factor de formación y las porosidades primaria y secundaria, así como entre el índice de resistividad e índice de saturación de agua se caracterizan por tener un fundamento teórico sólido y satisfacen condiciones físicas en sus valores extremos de porosidad e índice de saturación de agua.

4. Las expresiones empíricas propuestas para determinar exponentes m y coeficientes G satisfacen condiciones de frontera, eliminan el uso de gráficas y son más consistentes con la realidad física de cada zona bajo estudio. Esto último, se debe al hecho de que las relaciones antes mencionadas están en función de los minerales y porosidades existentes en un pozo.
5. La determinación de las variables m y G está libre de subjetividad y resulta más práctica y económica que el procedimiento seguido con otras técnicas convencionales.
6. Se confirma que el exponente m debe ser física y numéricamente distinto al exponente de saturación n . En términos generales, un incremento en la cantidad de hidrocarburos (valor de m) implica una disminución del índice de saturación de agua (valor de n).
7. El método de cálculo propuesto en este trabajo es aplicable a Carbonatos y Arenas limpias (sin contenido de arcilla). Sin embargo, puede llegar a establecerse una técnica similar que sea aplicable al caso de rocas naturales arcillosas.
8. Los ejemplos de pozos con litología compleja y con diferentes tipos de porosidad que fueron procesados en este estudio verifican la funcionalidad del procedimiento de cálculo propuesto.
9. El estudio llevado a cabo en este trabajo está dirigido a sistemas porosos cuya matriz está constituida básicamente de material aislante. Sería de gran interés llegar a establecer, en el futuro, relaciones generales teórico-experimentales aplicables al caso de rocas naturales con contenido de arcilla (material conductor). Maxwell en su trabajo

original ya toma en cuenta el hecho de que las partículas bajo estudio sean conductoras, lo que significa que sus desarrollos llegarían a ser, una vez más, de gran utilidad en el campo de la física aplicada a la industria petrolera.

10. Se propone realizar un estudio sistemático acerca de los parámetros m y G . Para este fin se replantea el uso de modelos físicos bidimensionales como un medio de llegar a establecer las leyes que rigen los modelos tridimensionales. Los modelos bidimensionales serían especialmente útiles en:
 - a. la verificación de relaciones $G(m)$ propuestas, como en el caso de las expresiones 5.22 y 5.27,
 - b. la obtención de nuevas correlaciones entre m y G ,
 - c. la comprobación experimental de probables desarrollos teóricos realizados acerca de este tipo de relaciones $G(m)$.

N O M E N C L A T U R A

NOMENCLATURA

A	área transversal
a	radio de cada una de las esferas de un modelo de Maxwell
A_n	constantes arbitrarias
a_N	radio de un modelo de Maxwell
a_M	radio de un modelo de doble porosidad
B_n	constantes arbitrarias
C'	constante en la Ec. 3.10
C^*	concentración volumétrica (1 - \emptyset)
C	canales o zonas de flujo
E	campo eléctrico
E_e	campo electrostático
E_o	campo eléctrico inicialmente uniforme
f_{CF}	fracción de caliza fracturada
f_{CM}	fracción de caliza compacta
f_{DF}	fracción de dolomía fracturada
f_{DM}	fracción de dolomía compacta
F_{em}	fuerza electromotriz
f_i	fracción volumétrica de la i-ésima componente
F_R	factor de formación

F_{RW}	factor de formación modificado
F_t	factor de formación total
f_{TF}	fracción de terrígenos fracturados
f_{TM}	fracción de terrígenos compactos
G	parámetro geométrico
\bar{G}	valor promedio del parámetro G
H	constante de separación
I	corriente eléctrica
I_R	índice de resistividad
J	densidad de corriente eléctrica
k_i	constantes arbitrarias, $i = 1, n$
L	longitud
M	número de modelos de Maxwell
m	exponente en las Ecs. 3.1, 3.3, 5.7, 5.12-13, 5.16-18
N	número de esferas en un modelo de Maxwell
n	exponente en las Ecs. 3.9 y 3.10
n^*	constante arbitraria
P	parámetro geométrico, Ecs. 5.5 y 5.11
P_n	polinomios de Legendre
Q	función de r
r	resistencia eléctrica
R	resistividad
R_i	resistividad de cada una de las esferas en un modelo de Maxwell

\bar{R}_M	resistividad equivalente del modelo de doble porosidad
R_{mf}	resistividad del filtrado de lodo
\bar{R}_N	resistividad equivalente de un modelo de Maxwell
R_O	resistividad de una muestra saturada con agua
R_t	resistividad de un sistema parcialmente saturado con agua
R_W	resistividad del electrolito en el modelo de Maxwell
R_{XO}	resistividad de la zona lavada
s	coeficiente de dispersión
s/\bar{G}	parámetro estadístico
S_F	índice de saturación de fluidos
S_G	índice de saturación de gas
S_O	índice de saturación de aceite
S_T	saturación de fluidos
S_W	índice de saturación de agua
T	función de θ
T'	trampas o zonas de estancamiento
U	potencial eléctrico
U_e	potencial eléctrico externo
U_i	potencial eléctrico interno
V	voltaje
V_f	volumen de un fluido cualquiera
V_p	volumen total de poros

V_s	volumen total de sólidos
V_t	volumen total geométrico
X	parámetro geométrico en la Ec. 5.1
\emptyset	porosidad total
\emptyset	porosidad equivalente
\emptyset_f	porosidad de flujo
\emptyset_g	porosidad asociada al gas
\emptyset_o	porosidad asociada al aceite
\emptyset_s	porosidad de estancamiento
\emptyset_w	porosidad asociada al agua
\emptyset_1	porosidad primaria
\emptyset_2	porosidad secundaria
v	coeficiente de partición
ρ	densidad de carga
σ	conductividad
σ_0	conductividad del sistema elipsoides dispersos-electrolito
σ_1	conductividad del electrolito
σ_2	conductividad de los elipsoides

R E F E R E N C I A S

R E F E R E N C I A S

1. Pettijohn, F.J.: " Sedimentary Rocks ", Harper and Brothers, New York, 1949.
2. Wells, L.E., Sanyal, S.K. y Mathews, M.A.: " Matrix and Response Characteristics for Sonic, Density and Neutron ", SPWLA, Twentieth Annual Logging Symposium, June 3-6, 1979.
3. Schlumberger Offshore Services y Petróleos Mexicanos: " Evaluación de Formaciones en México ", Documento WEC México, Septiembre 1984, Edición para conferencia.
4. Pérez-Rosales, C.: " Generalization of Maxwell Equation for Formation Resistivity Factors ", J. Pet. Tech. July, 1976, pp. 819-824.
5. Monicard, R.P.: " Properties of Reservoir Rocks: Core Analysis ", Gulf Publishing Company, Houston, Texas, 1980.
6. Schlumberger Well Surveying Corporation: " Log Interpretation Principles ", Houston Texas, 1969.
7. Collins, R.E.: " Flow of Fluids Through Porous Materials ", Reinhold Publishing Corporation, New York, 1961, pp. 22-23.
8. Porter, C.R., Pickett, G.R. y Whitman, W.W.: " A Statistical Method for Determination of Water Saturation From Logs ", SPWLA, Tenth Annual Logging Symposium, May 25-28, 1969.

9. Aguilera, R.: " Analysis of Naturally Fractured Reservoirs From Convencional Well Logs ", J. Pet. Tech., July, 1976.
10. Martínez de la Rosa, J.J.: " Aplicación del Método Potenciométrico a la Medición de Resistividad de Rocas Porosas Saturadas ", Revista del I.M.P., 1972, Vol. IV, No. 3, pp. 43-47.
11. Martínez de la Rosa, J.J.: " Método Potenciométrico Directo para la Determinación de Factores de Resistividad ", Revista del I.M.P., Julio 1975, pp. 64-66.
12. Archie, G.E.: " The Electrical Resistivity Log as an Aid in Determining Some Reservoir Characteristics ", Trans., AIME, 1942, Vol. 146, pp. 54-67.
13. Pickett, G.R.: " A Review of Current Techniques for Determination of Water Saturation From Logs ", J. Pet. Tech. (Nov. 1966), pp. 1425-1433.
14. Sundberg, K.: " Effect of Impregnating Waters on Electrical Conductivity of Soils and Rocks ", A.I.M.E. Geophysical Prospecting, pp. 367-391, 1932.
15. Jakosky, J.J. y Hopper, R.H.: " The Effect of Moisture on the Direct Current Resistivities of Oil Sand Rocks ", Geophysics, Vol. 2, No. 1, January 1937.
16. Winsauer, W.O., Shearin, H.M., Jr., Masson, P.H. y Williams, M.: " Resistivity of Brine-Saturated Sands in Relation to Pore Geometry ", Bull., AAPG, 1952, 36, No. 2, pp. 253-277.

17. Wyllie, M.R.J. y Gregory, A.R.: " Formation Factors of Unconsolidated Porous Media: Influence of Particle Shape and Effect of Cementation ", Trans., AIME, 1953, Vol. 198, pp. 103-110.
18. Timur, A., Hemkins, W.B. y Worthington, A.E.: " Porosity and Pressure Dependence of Formation Resistivity Factor for Sandstones ", Proc., Fourth Formation Evaluation Symposium, Canadian Well Logging Society, Calgary, May 9-10, 1972.
19. Zaafran, Z.M.: " The Use of a New Resistivity Space Display Technique in Ground Water Investigation ", Geoexploration, 18, 1981, pp. 247-258.
20. Towle, G.H.: " An Analysis of the Formation Resistivity Factor-Porosity Relationship of Some Assumed Pore Geometries ", paper presented at the Third Annual Logging Symposium, SPWLA, May 17-18, 1962.
21. Pirson, S.J.: " Log Interpretation in Rocks With Multiple Porosity Types-Water or Oil Wet ", World Oil (June 1957) 196.
22. Parkhomenko, E.I.: " Electrical Properties of Rocks ", Plenum Press, New York, 1967.
23. Wyckoff, R.S. y Botset, H.G.: " The Flow of Gas-Liquid Mixtures Through Unconsolidated Sands ", Physics 7 (9), 325-345, Sept. 1936.
24. Leverett, M.C.: "Flow of Oil-Water Mixtures Through Unconsolidated Sands ", Trans., A.I.M.E., 132, 381-401, 1939.
25. Bailey, C.R., Bil Hartz, H.L., Dunlap, H.F. y Shuler, E.: " The Relation Between Electrical Resistivity and Brine Saturation in Reservoir Rocks ", Journal of Petroleum Technology, Oct. 1949.

26. Von Gonten, W.D. y Osoba, J.S.: " A Method of Predicting Saturation Exponents in Logging ", paper prepared for the 44th Annual Fall Meeting of the Society of Petroleum Engineers of A.I.M.E. was hold in Denver, Colorado, Sept. 28-Oct. 1, 1969.
27. Cornell, D. y Katz, D.L.: Ind. Eng. Chem., Vol. 45, 1953.
28. Wyllie, M.R.J. y Gardner, G.H.F.: " The Generalized Kozeny-Carman Equation ", World Oil, March and April, 1958.
29. Fricke, H.: " A Mathematical Treatment of the Electric Conductivity and Capacity of Disperse Systems ", Phys. Rev., 1924. 24, pp. 575-587.
30. Maxwell, J.C.: " A Treatise on Electricity and Magnetism ", Dover Publications, Inc., New York, 1954, Vol. 1.
31. Rayleigh, Lord.: " On the Influence of Obstacles Arranged in Rectangular Order Upon the Properties of a Medium ", Philosophical Magazine, 1892, Vol. 34, pp. 481-502.
32. Fricke, H.: " The Electric Conductivity and Capacity of Disperse Systems ", Physics, Aug., 1931. 1, pp. 106-115.
33. Slawinski, A.: " Conductivilité d'un Electrolyte Contenant des Spheres Dielectriques ", J. Chim. Phys., 23, 710-727.
34. Reitz, J.R. y Milford, F.J.: " Fundamentos de la Teoría Electro-magnética ", UTHEA, México, 1972, pp. 132-146.
35. Nielsen, K.L.: " Differential Equations ", Barnes and Noble, Inc. College Outline Series, Second Edition, 1966, pp. 32-35.

36. Churchill, R.V.: " Fourier Series and Boundary Value Problems ", Mc. Graw-Hill Book Company, Inc., First Edition, 1941, pp. 175-201.
37. Pérez-Rosales, C.: " On the Relationship Between Formation Resistivity Factor and Porosity ", Soc. Pet. Eng. J., Aug., 1982.
38. Pérez-Rosales, C. y Martínez de la Rosa, J.J.: " Teoría, Diseño y Construcción de un Modelo Potenciométrico Experimental ", Revista del I.M.P., (1969) Vol. I, Num. 1, Enero 1969.
39. Raiga-Clemenceau, J.: " The Cementation Exponent in the Formation Factor-Porosity Relation: The Effect of Permeability ", SPWLA Eighteenth Annual Logging Symposium, June 5-8, 1977.
40. Gómez-Rivero, O.: " A Practical Method for Determining Cementation Exponents and Some Others Parameters as an Aid in Well Log Analysis ", The Log Analyst, Sept.- Oct., 1976.
41. Elkins, L.F. y Skov, A.M.: " Cyclic Water-Flooding the Spraberry Utilizes "End Effects" to Increase Oil Production Rate ", Journal of Petroleum Technology (August 1963), pp. 877-883.
42. Owens, W.W y Archer, D.L.: " Waterflood Pressure Pulsing for Fractured Reservoirs ", Journal of Petroleum Technology (June 1966), pp. 745-752.
43. Craig, F.F., Jr.: " The Reservoir Engineering Aspects of Water-flooding ", Monograph Series, Society of Petroleum Engineers of AIME, Dallas, Texas, (1971) Vol. 3.

A P E N D I C E S

A P E N D I C E A

En este apéndice se demuestra que la ecuación de Legendre:

$$(1 - u^2) P_n''(u) - 2u P_n'(u) + n(n+1) P_n(u) = 0 \quad (\text{A-1})$$

puede ser reducida a la siguiente expresión:

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dT}{d\theta} \right) + H T = 0 \quad (\text{A-2})$$

donde, $H = n(n+1)$

Como punto de partida, supóngase que: $n(n+1) P_n(\cos \theta) = H^*$
 y ya que: $H = n(n+1)$ y $(1 - \cos^2 \theta) = \sin^2 \theta$, la Ec. A-1
 puede ser reescrita como:

$$\sin^2 \theta \frac{d^2 P_n(\cos \theta)}{d \cos^2 \theta} - 2 \cos \theta \frac{d P_n(\cos \theta)}{d \cos \theta} + H^* = 0 \quad (\text{A-3})$$

o bien,

$$\operatorname{sen}^2 \theta \frac{d}{d \cos \theta} \frac{d P_n(\cos \theta)}{d \cos \theta} - 2 \cos \theta \frac{d P_n(\cos \theta)}{d \cos \theta} + H^* = 0$$

(A-4)

Si se multiplica la expresión A-4 por $1 = \frac{d \cos \theta}{d \theta} \cdot \frac{d \theta}{d \cos \theta}$, se obtiene:

$$\operatorname{sen} \theta \frac{d}{d \theta} \left(\frac{1}{\operatorname{sen} \theta} \frac{d P_n(\cos \theta)}{d \theta} + \frac{2 \cos \theta}{\operatorname{sen} \theta} \frac{d P_n(\cos \theta)}{d \theta} \right) + H^* = 0$$

(A-5)

Por otra parte, si se determina la derivada del primer sumando de la Ec. A-5 y se utilizan las identidades trigonométricas:

$1 / \operatorname{sen} \theta = \operatorname{csc} \theta$ y $\cos \theta / \operatorname{sen} \theta = \cot \theta$, se encuentra que:

$$\operatorname{sen} \theta \left(\frac{1}{\operatorname{sen} \theta} \frac{d^2 P_n(\cos \theta)}{d \theta^2} - \frac{d P_n(\cos \theta)}{d \theta} \operatorname{csc} \theta \cot \theta \right) +$$

$$+ 2 \cot \theta \frac{d P_n(\cos \theta)}{d \theta} + H^* = 0$$

(A-6)

esto es,

$$\frac{d^2 P_n(\cos \theta)}{d\theta^2} + \cot \theta \frac{d P_n(\cos \theta)}{d\theta} + H^* = 0 \quad (\text{A-7})$$

Finalmente, la Ec. A-7 puede ser escrita en la siguiente forma:

$$\frac{d}{d\theta} (AB) + H^* = 0 \quad (\text{A-8})$$

donde si $A = \sin \theta$ y $B = \frac{d P_n(\cos \theta)}{d\theta}$, se concluye que:

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d P_n(\cos \theta)}{d\theta} \right) + H P_n(\cos \theta) = 0 \quad (\text{A-9})$$

si se asume que $P_n(\cos \theta) = T(\theta)$, entonces se puede concluir que la Ec. A-9 tiene la forma de la expresión A-2 y por lo tanto queda demostrado que las relaciones A-1 y A-2 son equivalentes.

A P E N D I C E B

En el desarrollo de la Ec. de Maxwell se presentó el problema de resolver la siguiente ecuación:

$$\frac{1}{Q} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dQ}{dr} \right) = H \quad (B-1)$$

donde, $H = n (n + 1)$.

La expresión anterior puede ser reescrita como:

$$r^2 \frac{d^2Q}{dr^2} + 2 r \frac{dQ}{dr} - n (n + 1) Q = 0 \quad (B-2)$$

Esta es una ecuación diferencial lineal de segundo orden con coeficientes variables.

Para encontrar la solución de B-2 se puede, como primer paso, simplificarla a una ecuación diferencial lineal de segundo orden con coeficientes constantes.

Para lograr lo anterior se realiza el siguiente cambio de variable:

$$r = e^t \quad \text{entonces} \quad dr = e^t dt = r dt$$

Al aplicar la regla de la cadena, se tiene:

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{dQ}{dr} \frac{dr}{dt} = \frac{dQ}{dr} (e^t) = \frac{dQ}{dr} r \quad (B-3)$$

luego,

$$\frac{dQ}{dr} = \frac{dQ}{dt} \frac{1}{r} \quad (B-4)$$

por lo que,

$$\frac{d^2Q}{dr^2} = \frac{d}{dr} \left(\frac{dQ}{dt} \frac{1}{r} \right) = \frac{d^2Q}{rdt^2} - \frac{1}{r^2} \frac{dQ}{dt}$$

$$\frac{d^2Q}{dr^2} = \frac{d^2Q}{rdt \cdot dt} - \frac{1}{r^2} \frac{dQ}{dt}$$

de donde,

$$\frac{d^2Q}{dr^2} = \frac{1}{r^2} \frac{d^2Q}{dt^2} - \frac{1}{r^2} \frac{dQ}{dt} \quad (\text{B-5})$$

Al sustituir B-4 y B-5 en la expresión B-2, se obtiene:

$$r^2 \left(\frac{1}{r^2} \frac{d^2Q}{dt^2} - \frac{1}{r^2} \frac{dQ}{dt} \right) + 2r \left(\frac{dQ}{dt} \frac{1}{r} \right) - n(n+1)Q = 0 \quad (\text{B-6})$$

$$\frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{dQ}{dt} - n(n+1)Q = 0 \quad (\text{B-7})$$

Esta es una ecuación diferencial lineal de segundo orden con coeficientes constantes, que puede ser escrita en notación operacional como:

$$D^2 + D - n(n+1)Q = 0 \quad (\text{B-8})$$

entonces,

$$(D - n) D + (n + 1) Q = 0 \quad (B-9)$$

de donde,

$$D = n \quad \text{y} \quad D = -(n + 1) \quad (B-10)$$

Por la estructura que tiene la Ec. B-7 , se propone una solución del siguiente tipo:

$$Q(r) = A e^{nt} + B e^{-(n-1)t} \quad (B-11)$$

Como $r = e^t$, la solución general puede expresarse en la siguiente forma:

$$Q(r) = A_n r^n + B_n r^{-(n+1)} \quad (B-12)$$

Con esto queda demostrado que la Ec. 4.14 puede ser reducida a la Ec. B-7 , cuya solución está dada por la expresión B-12.

APENDICE C

En esta sección se realizan las operaciones analíticas que permiten evaluar las constantes A_n y B_n de las Ecs. 4.20 y 4.21 .

Las condiciones de frontera, que exigen la continuidad del potencial y de la corriente eléctrica en la superficie de separación existente entre la esfera y el medio conductor que la rodea, son:

$$(U_i)_{r=a} = (U_e)_{r=a} \quad (C-1)$$

$$\left(\frac{1}{R_i} \frac{\partial U_i}{\partial r} \right)_{r=a} = \left(\frac{1}{R_w} \frac{\partial U_e}{\partial r} \right)_{r=a} \quad (C-2)$$

Al tomar en cuenta las expresiones 4.20 y 4.21 en C-1 y C-2 , se obtienen las siguientes relaciones:

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n a^n P_n(\cos \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n / a^{n+1} P_n(\cos \theta) - E_0 a P_1(\cos \theta)$$

(C-3)

$$\frac{1}{R_i} \left[\sum_{n=0}^{\infty} A_n n a^{n-1} P_n(\cos \theta) \right] = \frac{1}{R_w} \left[\sum_{n=0}^{\infty} -(n+1) \frac{B_n}{a^{n+2}} P_n(\cos \theta) - E_0 P_1(\cos \theta) \right]$$

(C-4)

Si $\sum_{n=0}^{\infty}$ se refiere a la sumatoria que excluye el término

para el cual $n = 1$, entonces, las condiciones de frontera quedan expresadas como:

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n a^n P_n(\cos \theta) + A_1 a P_1(\cos \theta) =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n / a^{n+1} P_n(\cos \theta) + P_1(\cos \theta) (B_1 / a^2 - E_0 a)$$

(C-5)

$$\frac{1}{R_i} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \Lambda_n n a^{n-1} P_n(\cos \theta) + A_1 P_1(\cos \theta) \right] =$$

$$\frac{1}{R_w} \left[\sum_{n=0}^{\infty} - (n+1) B_n / a^{n+2} P_n(\cos \theta) + P_1(\cos \theta) (-2 B_1 / a^3 - E_o) \right]$$

(C-6)

Para que C-5 y C-6 se cumplan, deben ser iguales término a término los dos miembros en cada ecuación, esto es, deben ser iguales los coeficientes de las respectivas $P_n(\cos \theta)$ en ambos lados de cada una de las dos relaciones anteriores.

Si $n = 1$, entonces se genera el siguiente par de ecuaciones que cumplen con las condiciones de frontera:

$$a A_1 - a^{-2} B_1 = -E_o a \quad (C-7)$$

$$\frac{A_1}{R_i} + \left(\frac{2}{R_w} a^{-3} \right) B_1 = -E_o / R_w \quad (C-8)$$

De aquí, fácilmente se pueden evaluar el discriminante del sistema y los valores de las constantes A_1 y B_1 , esto es:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & -a^{-2} \\ \frac{1}{R_i} & \frac{2a^{-3}}{R_w} \end{vmatrix} = a^{-2} (2R_i + R_w / R_i R_w) \quad (\text{C-9})$$

$$A_1 = \frac{\begin{vmatrix} -E_o a & -a^{-2} \\ -\frac{E_o}{R_w} & \frac{2a^{-3}}{R_w} \end{vmatrix}}{\Delta} = -\frac{3E_o R_i}{2R_i + R_w} \quad (\text{C-10})$$

$$B_1 = \frac{\begin{vmatrix} a & -E_o a \\ \frac{1}{R_i} & -\frac{E_o}{R_w} \end{vmatrix}}{\Delta} = -\frac{a^3 E_o (R_i - R_w)}{2R_i + R_w} \quad (\text{C-11})$$

Repetiendo el esquema anterior, para el caso en que $n \neq 1$, se tiene que:

$$a^n A_n - 1/a^{n+1} (B_n) = 0 \quad (\text{C-12})$$

$$\left[\frac{1}{R_i} n a^{n-1} \right] A_n + \left[\frac{1}{R_w} \frac{(n+1)}{a^{n+2}} \right] B_n = 0 \quad (\text{C-13})$$

luego,

$$\Delta = \begin{vmatrix} a^n & -a^{-(n+1)} \\ \frac{n}{R_i} a^{n-1} & \frac{(n+1)}{R_w} a^{-(n+2)} \end{vmatrix} = \frac{(n+1) a^{-2}}{R_w} + \frac{n a^{-2}}{R_i} \neq 0$$

(C-14)

Puesto que, $\Delta \neq 0$, entonces, la única solución posible es la trivial. De aquí que:

$$A_n = B_n = 0 \quad \text{para} \quad n \neq 1 \quad (\text{C-15})$$

De esta forma quedan evaluadas todas las constantes arbitrarias A_n y B_n que aparecen en las Ecs. 4.20 y 4.21 .