



# Universidad Nacional Autónoma de México

---

FACULTAD DE CIENCIAS

CODIGO PARA LA INTEGRACION  
DE LAS ECUACIONES MAGNETOHIDRODINAMICAS  
EN UNA DIMENSION

## Tesis Profesional

Que para obtener el título de

F I S I C O

P r e s e n t a

VICENCIO LEON CRUZ

México, D. F.

1985



Universidad Nacional  
Autónoma de México



## **UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso**

### **DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

# I N D I E

I.	INTRODUCCION . . . . .	1
II.	ECUACIONES MHD Y SU LIMITE DE VALIDEZ . . . . .	4
	1. Modelo Cinético . . . . .	4
	2. Modelo de un Fluido . . . . .	5
	3. Ecuaciones MHD para un Fluido . . . . .	12
	4. Forma Conservativa de las Ecuaciones MHD . . . . .	17
III.	SOLUCION NUMERICA DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES . . . . .	20
	1. Representación Discreta de una Variable Conti- nua . . . . .	21
	2. Método de Diferencias Finitas para Derivadas - en el Espacio . . . . .	23
	3. Problema con Valores Iniciales . . . . .	24
	4. Condiciones de una Solución por Diferencias Fi- nitas para un Problema de Valores Iniciales . . . . .	25
	5. Procesos Físicos y Relación de Dispersión . . . . .	27
	6. Estabilidad de las Soluciones de Ecuaciones Di- ferenciales por el Método de Diferencias Finitas . . . . .	27
	7. Algunos Ejemplos del Método de Diferencias Fi- nitas . . . . .	29
	8. El Método de Lax-Wendroff . . . . .	32
	9. Las Ecuaciones MHD y su Solución . . . . .	33
IV.	CODIGO DE COMPUTO PARA LA INTEGRACION DE LAS ECUA- CIONES MHD EN UNA DIMENSION . . . . .	39
	1. El Término de Difusión Magnética . . . . .	39
	2. Código para la Solución de las Ecuaciones en - una Dimensión . . . . .	42
	3. Subrutinas del Código BZ1D . . . . .	45
	4. Resultados . . . . .	72

V. CONCLUSIONES Y COMENTARIOS . . . . .	81
APENDICE	
A. Ortogonalidad de los Modos de Fourier . . . . .	83
B. Solución a la Ecuación de Difusión . . . . .	84
BIBLIOGRAFIA	

## CAPITULO I

### INTRODUCCION

Como se sabe la vida humana depende de los combustibles fósiles -- tales como el petróleo, el carbón y el gas natural. Sin embargo es -- evidente que en el futuro se deberán emplear fuentes alternas de -- energía debido a que, las reservas de combustibles fósiles se verán agotadas dentro de los proximos siglos

Uno de los problemas más importantes planteados en investigación científica durante el último cuarto de siglo es el de obtener ener-- gía a partir de la fusión nuclear controlada. El propósito consiste en confinar un plasma durante un tiempo suficientemente largo y a la temperatura necesaria para que la energía obtenida a partir de las -- reacciones de fusión sea mayor que la invertida en crear el sistema.

Diseñar un dispositivo que consiga resolver el problema a un costo razonable ha sido uno de los mayores retos a la ciencia y la tecnología de la civilización actual.

Una de las teorías fundamentales en el estudio de la física de -- plasmas es la magnetohidrodinámica (MHD), que permite estimar ciertas propiedades globales de equilibrio y estabilidad del plasma. Tra-- tándose de una teoría aproximada, es importante comprender sus limitaciones, y el alcance de los resultados que con ella se puedan obtener. Por otra parte, las ecuaciones que la describen son no lineales en general, y su solución puede obtenerse analíticamente y en forma cerrada unicamente para ciertos problemas y geometrías particulares. Por ello es indispensable contar con códigos que permitan resolver-- las numéricamente.

El propósito de este trabajo es, en primer lugar, deducir las -- ecuaciones MHD a partir de un modelo cinético para el plasma, pasando por el modelo de dos fluidos. Aunque esto aparece en varios li--- bros de texto, se muestra claramente aquí, de modo que la presente-- ción sea autocontenida en este aspecto, y las limitaciones del mode-

lo MHD puedan ser apreciadas claramente. Así pues, se presentan las ecuaciones MHD en su forma conservativa, la cual es más apropiada para resolverlas numéricamente.

Ahora bien, la solución general en tres dimensiones de este problema es sumamente complejo y no se ha realizado, excepto para geometrías con simetrías que permiten reducirlo a un problema en una o dos dimensiones.

En este trabajo se presenta un código en una dimensión basado en el método de Lax-Wendroff, originalmente desarrollado por el Dr. David Woodal de la universidad de Nuevo México, y modificado en algunos aspectos.

Se presenta la documentación completa del código, de modo que pueda ser comprendido y empleado por cualquier persona, aún cuando no tenga experiencia previa en el análisis numérico.

La subrutina de graficación se incluye por completér. Esta fue desarrollada por el Instituto Goddard de Estudios Espaciales de la NASA en Nueva York.

En otras palabras, si bien no se trata de un trabajo original, este pretende ser un trabajo didáctico que podría emplearse como parte de un curso de física de plasmas.

También es necesario aclarar que no se trata de un trabajo completo. El código mostrado aquí puede ser modificado aún, y debe considerarse más bien como el esqueleto de un código, que para propósitos particulares puede ser perfeccionado al agregar otros efectos.

La estructura de la representación es la siguiente: En el capítulo II se deducen las ecuaciones MHD y se presenta en su forma conservativa. En el capítulo III se presenta el método de Lax-Wendroff y se realiza la discretización de las ecuaciones en una dimensión. En el capítulo IV se da la documentación del código junto con un listado completo de este. Así mismo se presenta un ejemplo en el cual se estudia como se difunde un campo magnético en un plasma y se presentan los resultados obtenidos con el código.

Otras aplicaciones del código quedan como un trabajo para continuar a partir de este. El capítulo V presenta las conclusiones y sugerencias sobre su continuación y posible generalización.

## CAPITULO II

### ECUACIONES MHD Y SUS LIMITES DE VALIDEZ

En este capítulo se muestra como las ecuaciones magnetohidrodinámicas (MHD) se obtienen a partir del modelo cinético pasando por el de los fluidos. El propósito es comprender en detalle las aproximaciones involucradas y así aplicarlas apropiadamente dentro de sus límites de validez. Finalmente se muestra como se pasa a su formulación conservativa, que es especialmente apropiada para realizar la integración numérica, y en particular al caso de una dimensión, que es el que interesa en este trabajo.

#### 2.1 MODELO CINETICO

Considerese un gas en equilibrio estacionario. Bajo el punto de vista cinético se le puede describir mediante una función de distribución  $f(\vec{r}, \vec{v}, t)$ , que representa el número de partículas que se encuentran en la posición  $\vec{r}$  con velocidad  $\vec{v}$  al tiempo  $t$ . La suposición de que se encuentra en equilibrio estacionario se puede escribir como:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla_{\vec{r}} f + \vec{a} \cdot \nabla_{\vec{v}} f = 0, \quad (2.1)$$

en donde  $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$ ,  $\nabla_{\vec{v}} = (\frac{\partial}{\partial v_x}, \frac{\partial}{\partial v_y}, \frac{\partial}{\partial v_z})$  y  $\vec{a}$  es la aceleración  $d\vec{v}/dt$ . El término  $df/dt$  es la derivada convectiva en el espacio fase y se puede interpretar como la razón de cambio de las partículas visto desde un sistema que se mueve con ellas.

Si este gas se encuentra ligeramente fuera del estado de equilibrio o interactúa con otros gases, tenderá al equilibrio mediante colisiones entre las partículas. Usando la segunda ley de Newton la ec. (2.1) tendrá la forma

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla_{\vec{r}} f + \frac{\vec{F}}{m} \cdot \nabla_{\vec{v}} f = \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{col}. \quad (2.2)$$

en donde  $\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{col}$  describe el cambio en la función de distribución debido a dichas colisiones. La ec. (2.2) se llama ecuación de Boltzman, en la cual las fuerzas internas, las debidas a colisiones, están en el miembro derecho y las fuerzas externas, las debidas a los campos, están en el miembro izquierdo.



Sea  $\lambda_c$  la distancia promedio que una partícula recorre entre deflecciones apreciables y  $L_c$  la distancia característica sobre la cual varían los campos macroscópicos, entonces si  $\lambda_c \ll L_c$  el término de colisiones se puede despreciar.

Si se supone que las fuerzas son enteramente electromagnéticas la ec. (2.2) toma la forma especial,

$$\frac{d\mathbf{f}}{dt} + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{f}} f + \frac{q}{m} (\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B}) \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = \left( \frac{df}{dt} \right)_{col} \quad (2.3)$$

A la ec. (2.3) se le llama ecuación de Vlasov.

En un plasma en el cual existen diversas especies, tales como electrones y distintos tipos de iones se tendrán varias ecuaciones como la (2.3) acopladas, una para cada especie. Donde en general los campos eléctrico y magnético deben ser obtenidos de las ecuaciones de Maxwell. El término de colisiones toma en cuenta tanto colisiones entre partículas de la misma especie, como de distintas especies.

## 2.2 MODELO DE UN FLUIDO

Si  $\lambda_D$  es la longitud de Debye,  $L$  el tamaño del sistema y  $\lambda_D \ll L$ , entonces al plasma se le puede considerar como un fluido, por lo tanto se debe tratar mediante un modelo continuo. En lo que sigue se obtendrán las ecuaciones de un fluido como momentos a partir de la ecuación de Boltzman. Para ello considérese una función  $g(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ . El promedio de la función  $g(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$  se define como:

$$\langle g(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \rangle = \frac{\int g(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v}}{\int f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v}} \quad (2.4)$$

El número de partículas por centímetro está dado por,

$$n(\mathbf{r}, t) = \int f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v}, \quad (2.5)$$

de tal manera que la ec. (2.4) se puede escribir como:

$$\langle g(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \rangle n(\mathbf{r}, t) = \int g(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v} \quad (2.6)$$

Por comodidad en lo que sigue, se escribirá  $f$  en vez de  $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ ,  $g$  en vez de  $g(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$  y  $n$  en vez de  $n(\mathbf{r}, t)$ .

Multiplicando por  $g$  e integrando con respecto a  $\mathbf{v}$  sobre todo el espacio a la ec. (2.3) se tendrá

$$\int g \frac{\partial f}{\partial t} d\vec{v} + \int g \vec{v} \cdot \nabla f d\vec{v} + \int g \frac{\vec{v}}{m} \cdot \nabla f d\vec{v} = \int g \left( \frac{\partial f}{\partial t} \right)_{\text{col.}} d\vec{v}. \quad (2.7)$$

Se integra término a término la ec. (2.7). El primero del miembro izquierdo queda

$$\int g \frac{\partial f}{\partial t} d\vec{v} = \frac{\partial}{\partial t} (n \langle g \rangle) - n \left\langle \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle. \quad (2.8)$$

El segundo término del miembro izquierdo se obtiene de

$$\nabla \cdot (g \vec{v} f) = g \vec{v} \cdot \nabla f + (\nabla \cdot (g \vec{v})),$$

que reacomodando e integrando produce

$$\int g \vec{v} \cdot \nabla f d\vec{v} = \nabla \cdot (n \langle g \vec{v} \rangle) - n \langle \nabla \cdot (g \vec{v}) \rangle. \quad (2.9)$$

Análogamente para el tercer término del miembro izquierdo de la -- ec. (2.7),

$$\int g \frac{\vec{v}}{m} \cdot \nabla f d\vec{v} = \int \nabla \cdot (g \frac{\vec{v}}{m} f) d\vec{v} - \int (\nabla \cdot (g \frac{\vec{v}}{m})) d\vec{v},$$

usando el teorema de la divergencia se tiene

$$\int \nabla \cdot (g \frac{\vec{v}}{m} f) d\vec{v} = \int \alpha \vec{r} \cdot \vec{v} d\alpha = 0,$$

donde  $\alpha = gf/m$ . Esta integral es cero debido a que en el límite cuando la superficie de integración tiende al infinito  $\alpha \rightarrow 0$ . Por lo tanto,

$$\int g \frac{\vec{v}}{m} \cdot \nabla f d\vec{v} = -n \langle \nabla \cdot (g \frac{\vec{v}}{m}) \rangle.$$

Supongase que  $\vec{F}$  es la fuerza de Lorentz  $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$ . Ahora bien, -- el campo eléctrico no depende de  $\vec{v}$  y  $\nabla \cdot (\vec{v} \times \vec{B}) = 0$ , de donde  $\nabla \cdot \vec{F} = 0$ . Así que,

$$\int g \frac{\vec{v}}{m} \cdot \nabla f d\vec{v} = -\frac{q}{m} \langle \vec{v} \cdot \nabla f \rangle. \quad (2.10)$$

Sustituyendo las ecs. (2.8), (2.9) y (2.10) en la ec. (2.7)

$$\frac{\partial}{\partial t} (n \langle g \rangle) - n \left\langle \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle + \nabla \cdot (n \langle g \vec{v} \rangle) - n \langle \nabla \cdot (g \vec{v}) \rangle - \frac{q}{m} \langle \vec{v} \cdot \nabla f \rangle = \int g \left( \frac{\partial f}{\partial t} \right)_{\text{col.}} d\vec{v}. \quad (2.11)$$

Los distintos momentos pueden ahora obtenerse sustituyendo la ex-- presión apropiada para la función de peso  $g(\vec{r}, \vec{v}, t)$ .

a). Momento de Orden Cero.

Si  $g = 1$ , de la ec. (2.11) se tendrá:

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot (n \langle \vec{v} \rangle) - n \langle \nabla \cdot \vec{v} \rangle = \int \left( \frac{\partial f}{\partial t} \right)_{\text{col.}} d\vec{v}$$

dado que  $\vec{v}$  es una variable independiente de  $\vec{r}$ ,  $n \langle \nabla \cdot \vec{v} \rangle = 0$ , y por lo tanto,

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot (n \langle \vec{v} \rangle) = \int \left( \frac{\partial f}{\partial t} \right)_{\text{col.}} d\vec{v} \quad (2.12)$$

Que es la ecuación de continuidad.

b). Primer Momento.

Si  $g = m\vec{v}$ , de acuerdo a la ec. (2.11) se tiene,

$$\frac{d}{dt} \langle nm \langle \vec{v} \rangle \rangle - nm \langle \frac{d\vec{v}}{dt} \rangle + \nabla_p \cdot (n \langle \vec{v} m \vec{v} \rangle) - n \langle \nabla_p \cdot m \vec{v} \vec{v} \rangle - \frac{d}{dt} \langle \vec{F} \cdot \nabla_p m \vec{v} \rangle = \int m \vec{v} \left( \frac{d\vec{v}}{dt} \right)_{col} d\vec{v}.$$

Pero  $nm \langle \frac{d\vec{v}}{dt} \rangle = 0$  y  $n \langle \nabla_p \cdot m \vec{v} \vec{v} \rangle = 0$  debido a que  $\vec{v}$  es una variable independiente de  $\vec{r}$  y  $t$ , mientras que  $\vec{F} \cdot \nabla_p \vec{v} = \vec{F}$ . De donde,

$$\frac{d}{dt} \langle nm \langle \vec{v} \rangle \rangle + \nabla_p \cdot (nm \langle \vec{v} \vec{v} \rangle) - n \langle \vec{v} \rangle = \int m \vec{v} \left( \frac{d\vec{v}}{dt} \right)_{col} d\vec{v}. \quad (2.13)$$

Esta ecuación es comunmente conocida como la ecuación de conservación de momento. El primer término del miembro izquierdo representa la razón de cambio de la densidad de momento en un punto  $\vec{r}$  del espacio, el segundo término representa la razón neta a la cual el momento es transportado a través de las fronteras de la superficie en un elemento de volúmen en el punto de interés, el tercer término indica el cambio en la densidad de momento debido a la fuerza de Lorentz. El -- término del miembro derecho representa el momento total ganado por unidad de tiempo, como resultado de colisiones.

A continuación la ec. (2.13) se llevará a una ecuación convectiva. Sea  $\vec{v}$  la velocidad aleatoria de las partículas del plasma, entonces

$$\vec{v} = \langle \vec{v} \rangle + (\vec{v} - \langle \vec{v} \rangle) = \langle \vec{v} \rangle + \vec{v}', \quad (2.14)$$

Por definición de  $\vec{v}'$ , su promedio es cero,  $\langle \vec{v}' \rangle = 0$ . Nótese que de la ec. (2.14),  $\langle \vec{v} \vec{v} \rangle = \langle \vec{v} \rangle \langle \vec{v} \rangle + \langle \vec{v}' \vec{v}' \rangle$ , por lo tanto  $nm \langle \vec{v} \vec{v} \rangle = nm \langle \vec{v} \rangle \langle \vec{v} \rangle + nm \langle \vec{v}' \vec{v}' \rangle$ . Así pues,

$$\nabla_p \cdot (nm \langle \vec{v} \vec{v} \rangle) = nm \langle \vec{v} \rangle \nabla_p \cdot \langle \vec{v} \rangle + nm \langle \vec{v}' \rangle \nabla_p \cdot \langle \vec{v}' \rangle + \nabla_p \cdot (nm \langle \vec{v}' \vec{v}' \rangle). \quad (2.15)$$

Por otro lado, multiplicando la ec. (2.12) por  $m \langle \vec{v} \rangle$  se tendrá,

$$m \langle \vec{v} \rangle \frac{d}{dt} \langle \vec{v} \rangle + m \langle \vec{v} \rangle \nabla_p \cdot (n \langle \vec{v} \rangle) = m \langle \vec{v} \rangle \int \left( \frac{d\vec{v}}{dt} \right)_{col} d\vec{v},$$

de donde,

$$m \frac{d}{dt} \langle n \langle \vec{v} \rangle \rangle = nm \frac{d}{dt} \langle \vec{v} \rangle - m \langle \vec{v} \rangle \nabla_p \cdot (n \langle \vec{v} \rangle) + m \langle \vec{v} \rangle \int \left( \frac{d\vec{v}}{dt} \right)_{col} d\vec{v} \quad (2.16)$$

Sustituyendo las ecs. (2.15) y (2.16) en la ec. (2.13) y cancelando términos se tendrá

$$nm \frac{d}{dt} \langle \vec{v} \rangle + nm \langle \vec{v}' \rangle \nabla_p \cdot \langle \vec{v}' \rangle + \nabla_p \cdot (nm \langle \vec{v}' \vec{v}' \rangle) = n \langle \vec{v} \rangle + (n \vec{v} - m \langle \vec{v} \rangle) \int \left( \frac{d\vec{v}}{dt} \right)_{col} d\vec{v}$$

Se define el tensor de esfuerzos  $\vec{P}$  como sigue

$$\vec{P} = nm \langle \vec{v}' \vec{v}' \rangle = m \int \vec{v}' \vec{v}' f d\vec{v} \quad (2.17)$$

Su interpretación física se dará mas adelante. Recordando que  $\vec{v} = \langle \vec{v} \rangle + \vec{v}'$ , se define el término de colisiones como sigue:

$$\vec{R} = \int m n \vec{v}' \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \right)_{col} d\vec{v}. \quad (2.18)$$

Donde  $\vec{R}$  representa la ganancia de momento debido a colisiones, por lo tanto,

$$m n \left( \frac{\partial \langle \vec{v} \rangle}{\partial t} \right) \cdot \vec{v}' \langle \vec{v} \rangle = n \langle \vec{v}' \rangle + \vec{R} - \vec{v}' \cdot \vec{F}. \quad (2.19)$$

La interpretación de la ec. (2.19) es la siguiente: Hay dos coordenadas mediante las cuales se puede describir la evolución del sistema estos son: a). Coordenadas lagrangianas, en las cuales el observador - viaja con las partículas del plasma a una velocidad  $\langle \vec{v} \rangle$ , y b). Coordenadas eulerianas, donde el marco de referencia es el sistema del laboratorio. Así que el término  $m n \left( \frac{\partial \langle \vec{v} \rangle}{\partial t} \right) \cdot \vec{v}' \langle \vec{v} \rangle = m n \frac{d}{dt} \langle \vec{v} \rangle$  representa la masa de todas las partículas por unidad de volumen por su aceleración, vista desde el marco de referencia del laboratorio. El primer término del miembro derecho de la ec. (2.19) se refiere, a la razón de cambio del momento de las partículas por unidad de volumen causado por fuerzas de gran alcance, mientras que el segundo término de acuerdo a la ec. (2.18) se refiere al cambio de momento entre partículas debido a colisiones.

El tensor de esfuerzos  $P_{ij}(\vec{r}, t)$  se puede interpretar de la manera siguiente:  $f d\vec{v}$  es el número total de partículas en un elemento de volumen  $d\vec{v}$  alrededor de  $\vec{v}$  en el espacio de velocidades,  $f m v_x d\vec{v}$  es el momento aleatorio en la dirección  $x$  de todas las partículas en un elemento de volumen  $d\vec{v}$  en el espacio de velocidades y localizadas en una unidad de volumen del espacio  $\vec{r}$ . Por lo tanto  $(f m v_x) v_y d\vec{v}$  corresponderá a la razón a la cual el momento es transportado en la dirección  $y$ , por unidad de área para todas las partículas en  $d\vec{v}$  localizadas en  $(\vec{r}, \vec{v})$ . El tensor de esfuerzos se puede escribir como sigue:

$$\vec{P} = n m \left\langle \left( \begin{array}{ccc} \sigma_x \sigma_x & \sigma_x \sigma_y & \sigma_x \sigma_z \\ \sigma_y \sigma_x & \sigma_y \sigma_y & \sigma_y \sigma_z \\ \sigma_z \sigma_x & \sigma_z \sigma_y & \sigma_z \sigma_z \end{array} \right) \right\rangle \quad (2.20)$$

Si se considera una función de distribución isotrópica,  $\langle v_i v_j \rangle = 0$  con  $i \neq j$ . Los términos de la diagonal serán  $\langle v_i^2 \rangle = \langle v_j^2 \rangle = \langle v^2 \rangle = \frac{1}{3} \langle v^2 \rangle$ , donde  $\langle v^2 \rangle$  es la velocidad térmica al cuadrado. Por lo tanto en el caso de una distribución Maxwelliana,  $P_{ij} = nm \langle v_i v_j \rangle \delta_{ij} / N = p \delta_{ij}$ , donde  $p = nkT$  y  $N$  se refiere al número de grados de libertad que en nuestro caso es tres. En general la función de distribución puede no ser isotrópica, en cuyo caso el tensor de esfuerzos se puede escribir como la suma de dos partes, una que se refiere a la isotrópica y otra a la anisotrópica. Para esto se define un tensor de viscosidad como sigue:

$$\Pi_{ij} = nm \langle v_i v_j \rangle - \left( \frac{\langle v^2 \rangle}{3} \right) \delta_{ij} = \mathcal{P}_{ij} - p \delta_{ij}, \quad (2.21)$$

si se supone isotropía, el tensor de viscosidad será cero.

Sustituyendo la ec. (2.21) en la ec. (2.19) se tendrá,

$$nm \left( \frac{d}{dt} + \langle \vec{v} \rangle \cdot \nabla \right) \langle \vec{v} \rangle = n \langle \vec{F} \rangle - \nabla p - \nabla \cdot \vec{\Pi} + \vec{F}, \quad (2.22)$$

que es la ecuación convectiva para la densidad del momento.

c). Segundo Momento.

Si  $g = \frac{1}{2} m \vec{v}^2$ , al sustituir en la ec. (2.11) se tendrá

$$\frac{d}{dt} \langle n \langle \frac{1}{2} m v^2 \rangle \rangle - n \langle \frac{d}{dt} \langle \frac{1}{2} m v^2 \rangle \rangle + \nabla \cdot (n \langle \vec{v} \langle \frac{1}{2} m v^2 \rangle \rangle) - n \langle \vec{v} \rangle \cdot \nabla \langle \frac{1}{2} m v^2 \rangle - \frac{d}{dt} \langle \vec{F} \cdot \nabla \langle \frac{1}{2} m v^2 \rangle \rangle = \int \frac{1}{2} m v^2 \left( \frac{d}{dt} \right)_{\text{col}} d^3 \vec{v}, \quad (2.23)$$

como  $\vec{v} \times \vec{B} \cdot \nabla \langle \frac{1}{2} m v^2 \rangle = 0$ ,  $\frac{d}{dt} \langle \vec{F} \cdot \nabla \langle \frac{1}{2} m v^2 \rangle \rangle = n q \vec{E} \cdot \langle \vec{v} \rangle$ . El segundo y cuarto términos de la ec. (2.23) son cero, debido a que las variables  $\vec{F}$ ,  $\vec{v}$  y  $t$  son independientes. Así que la ec. (2.23) tendrá la forma:

$$\frac{d}{dt} \langle \frac{1}{2} m \langle v^2 \rangle \rangle + \nabla \cdot ( \frac{1}{2} m \langle \vec{v} \langle v^2 \rangle \rangle ) = n q \vec{E} \cdot \langle \vec{v} \rangle + \int \frac{1}{2} m v^2 \left( \frac{d}{dt} \right)_{\text{col}} d^3 \vec{v}, \quad (2.24)$$

que es la ecuación de transporte de energía. El primer término del miembro izquierdo es la razón de cambio de la densidad de energía en el tiempo, y el segundo término es la pérdida de energía a través de las fronteras de una determinada superficie. El primer término del miembro derecho de la ec. (2.24) es el trabajo hecho sobre las partículas por el campo eléctrico por unidad de tiempo, y el segundo término es la transferencia de energía por unidad de tiempo debido a las colisiones. Si hay partículas de diferentes especies en el sistema, habrá una ecuación de transporte de energía para cada especie y las integra-

les debido a las colisiones individuales serán diferentes de cero. - sin embargo la suma total será cero a menos que la energía interna de las partículas sea alterada. El hecho de que  $\vec{v}_2 \times \vec{B} \cdot \nabla_2 \vec{v}^2 = 0$ , significa - que la inducción magnética no hace trabajo sobre las partículas carga das debido a que  $\vec{v}_2 \times \vec{B}$ , es perpendicular a la dirección del movimiento de las partículas.

A continuación se partirá de la ec. (2.24) transformandola en una ecuación convectiva para la energía.

Recordando la ec. (2.14), se tiene  $\langle \vec{v} \cdot \vec{v} \rangle = \langle \vec{v}^2 \rangle + \langle v_r^2 \rangle = \langle \vec{v} \rangle^2 + \frac{np}{nm}$ , por lo tanto,

$$\langle \vec{v} v^2 \rangle = \langle \vec{v}^2 \rangle \langle \vec{v} \rangle + \langle v_r^2 \rangle \langle \vec{v} \rangle + 2 \langle \vec{v} \rangle \cdot \langle \vec{v}_r \vec{v}_r \rangle + \langle \vec{v}_r \vec{v}_r \rangle.$$

De acuerdo a la ec. (2.21)

$$2 \langle \vec{v} \rangle \cdot \langle \vec{v}_r \vec{v}_r \rangle = \frac{2}{nm} \langle \vec{v} \rangle \cdot \rho \bar{I} + \frac{2}{nm} \langle \vec{v} \rangle \cdot \bar{\Pi},$$

donde  $\bar{I}$  es el tensor unitario, consecuentemente,

$$\langle \vec{v} v^2 \rangle = (\langle v^2 \rangle + (n+2) \frac{p}{nm}) \langle \vec{v} \rangle + \frac{2}{nm} \langle \vec{v} \rangle \cdot \bar{\Pi} + \langle v_r^2 \vec{v}_r \rangle.$$

La ecuación de transporte de energía se convierte en:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{np}{2} \langle \vec{v}^2 \rangle + \frac{1}{2} p \right] + \nabla \cdot \left[ \left( \frac{np}{2} \langle \vec{v}^2 \rangle + \frac{1}{2} p \right) \langle \vec{v} \rangle + \langle \vec{v} \rangle \cdot \bar{\Pi} + \vec{q} \right] = -nq \vec{E} \cdot \langle \vec{v} \rangle + \int \frac{1}{2} m v^2 \left( \frac{\partial f}{\partial t} \right)_{col} d\vec{v} \quad (2.25)$$

donde  $q(\vec{r}, t) = \int \frac{1}{2} m v^2 \vec{v} f d\vec{v}$ , es la densidad de flujo de energía debido al movimiento aleatorio,  $nm \langle v^2 \rangle / 2$  es la densidad de energía cinética,  $-Np/2$  es la energía interna,  $\langle \vec{v} \rangle \cdot \bar{\Pi}$  es el transporte de energía debido a la viscosidad,  $qn \langle \vec{v} \rangle$  es la densidad de corriente eléctrica neta, - por lo tanto  $qn \langle \vec{v} \rangle \cdot \vec{E}$  será el término de calentamiento Joule.

Haciendo uso de las ecuaciones de continuidad (2.12) y de transporte de momento (2.22), se puede eliminar el término que corresponde a la densidad de energía cinética en la ec. (2.25). Para ello nótese que,

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{np}{2} \langle \vec{v}^2 \rangle + \frac{1}{2} p \right) = nm \langle \vec{v} \rangle \cdot \frac{\partial \langle \vec{v} \rangle}{\partial t} + \frac{np}{2} \langle \vec{v}^2 \rangle \nabla \cdot \langle \vec{v} \rangle + \frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial t}, \quad (2.26)$$

y por otra parte

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \left[ \left( \frac{np}{2} \langle \vec{v}^2 \rangle + \frac{1}{2} p \right) \langle \vec{v} \rangle \right] &= \frac{np}{2} \langle \vec{v}^2 \rangle \nabla \cdot (n \langle \vec{v} \rangle) + \frac{np}{2} \langle \vec{v} \rangle \cdot \nabla \langle \vec{v}^2 \rangle \\ &+ \frac{(n+1)}{2} \langle \vec{v} \rangle \cdot \nabla p + \frac{(n+1)}{2} p \nabla \cdot \langle \vec{v} \rangle. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Combinando el segundo término del miembro derecho de la ec. (2.26) con el primer término del miembro derecho de la ec. (2.27) y haciendo uso de la ecuación de continuidad (2.12), la ec. (2.25) se puede escribir como

$$nm\langle\vec{v}\rangle\cdot\frac{\partial\langle\vec{v}\rangle}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{1}{2}n\langle\vec{v}\rangle\cdot\nabla\langle\vec{v}\rangle^2 + \frac{m\langle\vec{v}\rangle}{2}\langle\vec{v}\rangle\cdot\nabla\varphi + \frac{m\langle\vec{v}\rangle}{2}\varphi\nabla\cdot\langle\vec{v}\rangle + \frac{1}{2}n\langle\vec{v}\rangle^2\left[\left(\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}\right)_{col}\cdot d\vec{v} + \nabla\cdot\langle\vec{v}\rangle\cdot\vec{n}\right] + \nabla\cdot\vec{q} = qn\vec{E}\cdot\langle\vec{v}\rangle + \int\frac{m\langle\vec{v}\rangle^2}{2}\left(\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}\right)_{col}\cdot d\vec{v}. \quad (2.28)$$

Multiplicando la ecuación de transferencia de momento (2.22) por  $\langle\vec{v}\rangle$ , se tendrá

$$nm\langle\vec{v}\rangle\cdot\frac{\partial\langle\vec{v}\rangle}{\partial t} + nm\langle\vec{v}\rangle\cdot\langle\vec{v}\rangle\cdot\nabla\langle\vec{v}\rangle = n\langle\vec{v}\rangle\cdot\langle\vec{F}\rangle - \langle\vec{v}\rangle\cdot\nabla\varphi - \langle\vec{v}\rangle\cdot(\nabla\cdot\vec{n}) + \langle\vec{v}\rangle\cdot\vec{E}. \quad (2.29)$$

El primer término del miembro derecho será  $n\langle\vec{v}\rangle\cdot\langle\vec{F}\rangle = qn\langle\vec{v}\rangle\cdot\vec{E}$ , y el segundo término del miembro izquierdo se puede escribir como  $\frac{1}{2}\langle\vec{v}\rangle\cdot\nabla\langle\vec{v}\rangle^2$ , mientras que el tercer término del miembro derecho será igual a  $\langle\vec{v}\rangle\cdot(\nabla\cdot\vec{n}) = \nabla\cdot(\langle\vec{v}\rangle\cdot\vec{n}) - \vec{n}\cdot\nabla\langle\vec{v}\rangle$ . De donde la ec. (2.29) se transforma en

$$nm\langle\vec{v}\rangle\cdot\frac{\partial\langle\vec{v}\rangle}{\partial t} + \frac{1}{2}n\nabla\cdot(\langle\vec{v}\rangle\langle\vec{v}\rangle^2) = qn\langle\vec{v}\rangle\cdot\vec{E} - \langle\vec{v}\rangle\cdot\nabla\varphi - \nabla\cdot(\langle\vec{v}\rangle\cdot\vec{n}) + \vec{n}\cdot\nabla\langle\vec{v}\rangle + \langle\vec{v}\rangle\cdot\vec{E}. \quad (2.30)$$

Restando la ec. (2.30) de la (2.28), se eliminará el término que corresponde a la densidad de energía cinética, quedando el resultado en término de la energía interna. Si además se usa la identidad

$$-\frac{1}{2}n\langle\vec{v}\rangle^2\left[\left(\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}\right)_{col}\cdot d\vec{v} - \langle\vec{v}\rangle\cdot\vec{E}\right] + \int\frac{m\langle\vec{v}\rangle^2}{2}\left(\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}\right)_{col}\cdot d\vec{v} = \int\frac{m\langle\vec{v}\rangle^2}{2}\left(\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}\right)_{col}\cdot d\vec{v} = Q$$

se tendrá

$$\frac{1}{2}\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{1}{2}\nabla\cdot(\varphi\langle\vec{v}\rangle) + \frac{1}{2}\varphi\nabla\cdot\langle\vec{v}\rangle + \vec{n}\cdot\nabla\langle\vec{v}\rangle + \nabla\cdot\vec{q} = Q \quad (2.31)$$

Donde  $Q$  se interpreta como el calor producido debido a las colisiones.

Resumiendo, para un plasma completamente ionizado, con una sola especie de iones, las ecuaciones de continuidad, transporte de momento y de energía ignorando término de colisiones, se pueden escribir como sigue (la notación será  $\langle v_i \rangle = v$  y  $\langle v_i \rangle = v_i$ ):

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} + \nabla\cdot(n_i v_i) = 0, \quad (2.32)$$

$$\frac{\partial p_i}{\partial t} + \nabla\cdot(n_i v_i) = 0. \quad (2.33)$$

$$m_e n_e \frac{d\vec{v}_e}{dt} = -\nabla \phi_e - \nabla \cdot \vec{\Pi}_e - q_e n_e (\vec{E} + \frac{\vec{v}_e}{c} \times \vec{B}) + \vec{F}_e, \quad (2.34)$$

$$m_i n_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = -\nabla \phi_i - \nabla \cdot \vec{\Pi}_i - q_i n_i (\vec{E} + \frac{\vec{v}_i}{c} \times \vec{B}) + \vec{F}_i, \quad (2.35)$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla \cdot (\rho_i \vec{v}_i) + \rho_i \nabla \cdot \vec{v}_i = \rho_i - \vec{\Pi}_i : \nabla \vec{v}_i - \nabla \cdot \vec{q}_i, \quad (2.36)$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial \phi_i}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla \cdot (\phi_i \vec{v}_i) + \phi_i \nabla \cdot \vec{v}_i = \phi_i - \vec{\Pi}_i : \nabla \vec{v}_i - \nabla \cdot \vec{q}_i. \quad (2.37)$$

Resumiendo, el movimiento de un número grande de partículas en un campo electromagnético, se puede describir por una función de distribución que obedece la ecuación de Vlasov,

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla_{\vec{v}} f + \frac{q}{m} (\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B}) \cdot \nabla_{\vec{v}} f = \left( \frac{\partial f}{\partial t} \right)_{col}$$

donde el lado derecho se refiere a la razón de cambio en el tiempo de la función de distribución debido a las colisiones.

Los momentos de la ecuación de Boltzmann en el espacio de velocidades, llevaron a ecuaciones donde las variables solo dependen del espacio y el tiempo. La primera de estas es la de continuidad y se refiere a la conservación de partículas, la segunda es la transporte de momento y la tercera es la de transporte de energía. Estas ecuaciones de fluido, no forman un conjunto cerrado, pues el número de variables desconocidas excede el número de ecuaciones. Sin embargo al considerar las ecuaciones de Maxwell, tampoco constituyen un conjunto cerrado puesto que  $\vec{\Pi}$ , el tensor de viscosidad y  $\vec{q}$ , vector de conducción térmica no están especificados. Es posible encontrar ecuaciones para  $\vec{\Pi}$  y  $\vec{q}$  en forma análoga a las anteriores, pero esto genera un conjunto infinito de ecuaciones puesto que aparecerán nuevos términos que no estarán especificados. Es necesario pues, introducir en algún momento modelos para  $\vec{\Pi}$  y  $\vec{q}$ , y así poder cerrar este conjunto de ecuaciones.

### 2.3 ECUACIONES MHD PARA UN PLASMA

Las ecuaciones macroscópicas para un fluido de electrones o iones fueron deducidas en la sección previa, es decir, se consideraron partículas de una sola especie. La teoría se puede extender fácilmente para un fluido compuesto por dos o mas especies de partículas. En este trabajo, solo se considerarán dos especies.



Imagínese un plasma completamente ionizado, compuesto por iones y electrones. De acuerdo a la sección anterior, su comportamiento se rige por el modelo de dos fluidos expresado por las ecs. (2.32) a (2.37). Se define la densidad de masa total  $\rho_m$ , velocidad de centro de masa del fluido  $\vec{V}$ , densidad de carga  $\rho$  y densidad de corriente  $\vec{J}$  como:

$$\rho_m = n_e m_e + n_i m_i, \quad (2.38)$$

$$\vec{V} = (n_e m_e \vec{V}_e + n_i m_i \vec{V}_i) / \rho_m, \quad (2.39)$$

$$\rho = -en_e + en_i = e(-n_i + zn_i), \quad (2.40)$$

$$\vec{J} = e(zn_i \vec{V}_i - n_e \vec{V}_e) = -en_e (\vec{V}_e - z \frac{m_i}{m_e} \vec{V}_i). \quad (2.41)$$

En lo que sigue, se obtendrán las ecuaciones de un fluido compuesto de iones y electrones.

De las ecs. (2.32) y (2.33), al multiplicar por  $m_e$  y  $m_i$  respectivamente, sumando, y haciendo uso de las ecs. (2.38) y (2.39) se tiene,

$$\frac{d\rho_m}{dt} + \nabla \cdot (\vec{V} \rho_m) = 0. \quad (2.42)$$

La ec. (2.42) expresa la conservación de masa en un plasma compuesto de iones y electrones.

También se puede encontrar una ecuación para la conservación de carga al multiplicar por  $-e$  y  $ze$  a las ecs. (2.32) y (2.33) respectivamente, y usando las ecs. (2.40) y (2.41),

$$\frac{d\rho}{dt} + \nabla \cdot \vec{J} = 0. \quad (2.43)$$

A continuación se obtendrá una ecuación para el transporte de momento del plasma, para ello se suman las ecs. (2.34) y (2.35),

$$m_e n_e \frac{d\vec{V}_e}{dt} + m_i n_i \frac{d\vec{V}_i}{dt} = -\nabla \cdot (\vec{P}_e + \vec{P}_i) - \nabla \cdot (\vec{P}_e + \vec{P}_i) - en_e (\vec{E} + \vec{V}_e \times \vec{B}) + ezn_i (\vec{E} + \vec{V}_i \times \vec{B}) \quad (2.44)$$

En la aproximación magnetohidrodinámica (MHD) se supone que el plasma es cuasineutro:  $n_e \approx n_i$ . Dado que para todo caso práctico  $m_e/m_i \ll 1$  las ecs. (2.38) a (2.41) se pueden expresar como

$$\rho_m \approx n(m_e + m_i), \quad (2.45)$$

$$\vec{V} \approx (m_e \vec{V}_e + m_i \vec{V}_i) / (m_e + m_i), \quad (2.46)$$

$$\rho \approx -e\Delta n, \quad (2.47)$$

$$\vec{J} \approx -ne(\vec{V}_e - \vec{V}_i). \quad (2.48)$$

donde se ha considerado  $z = 1$ .

Bajo estas aproximaciones, los dos términos del miembro izquierdo de la ec. (2.44) se pueden escribir como  $m_e n_e \frac{d\vec{v}_e}{dt} + m_e n_e \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \rho_m \frac{d\vec{v}}{dt} = \rho_m \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho_m \vec{v} \cdot \nabla \vec{v}$ , mientras que, el tercero y cuarto términos del miembro derecho serán  $-\nabla \cdot (\vec{\pi}_e + \vec{\pi}_i) = -\nabla \cdot \vec{\pi} + \nabla(\rho_m v_i)$ , donde  $\vec{\pi}$  es el tensor de esfuerzos total. Por último, el quinto y sexto términos del miembro derecho serán  $-en_e(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B}) + en_i(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B}) = \rho E + \frac{\rho}{c} \times \vec{B}$ . Se concluye que la ec. (2.44) toma la forma,

$$\rho_m \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho_m (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = -\nabla \cdot \vec{\pi} + \rho \vec{E} - \frac{\rho}{c} \times \vec{B} \quad (2.44)$$

Esta ecuación se le conoce como la segunda ley de Newton, pues esencialmente es una ecuación de fuerzas.

Se puede derivar una ecuación para la razón de cambio de densidad de corriente  $\vec{j}$ . Para lograrlo considérese las ecs. (2.34) y (2.35), - las cuales se multiplican por  $e/m_e$  y  $-e/m_i$  respectivamente y se suman,

$$en_e \frac{d\vec{v}_e}{dt} - en_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = -\frac{e}{m_e} \nabla p_e + \frac{e}{m_i} \nabla p_i - \frac{e}{m_e} \nabla \cdot \vec{\pi}_e + \frac{e}{m_i} \nabla \cdot \vec{\pi}_i - e n_e (\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B}) - e n_i (\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B}) + \frac{e}{m_e} \vec{R}_e + \frac{e}{m_i} \vec{R}_i \quad (2.50)$$

Si se supone que el plasma tiene una distribución isotrópica  $\vec{\pi}_e = \vec{\pi}_i = 0$ . Además, nótese que  $en_e \frac{d\vec{v}_e}{dt} - en_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} - \nabla \cdot \vec{v} \vec{j} + en_e \vec{v}_e \cdot \nabla \vec{v}_e - en_i \vec{v}_i \cdot \nabla \vec{v}_i = \frac{\partial \vec{j}}{\partial t}$ , si se consideran solo términos de orden lineal. Por lo tanto,

$$\frac{\partial \vec{j}}{\partial t} = -\frac{e}{m_e} \nabla p_e + \frac{e}{m_i} \nabla p_i - e n_e (\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B}) - e n_i (\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B}) + \frac{e}{m_e} \vec{R}_e - \frac{e}{m_i} \vec{R}_i$$

Multiplicando por  $m_e$  y tomando en cuenta que  $m_e/m_i \ll 1$ , se tiene,

$$\vec{j} + \frac{\vec{j}}{c} \times \vec{B} + \frac{1}{en_e} \nabla p_e - \frac{\vec{R}_e}{en_e} = \frac{m_e}{en_e} \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} \quad (2.51)$$

De la ec. (2.46) y (2.48),  $\vec{v}_e = \vec{v} - \frac{\vec{R}_e}{en_e}$ . Así que la ec. (2.51) se puede escribir de la siguiente forma

$$\vec{j} + \frac{1}{c} (\vec{v} - \frac{\vec{R}_e}{en_e}) \times \vec{B} + \frac{1}{en_e} \nabla p_e - \frac{\vec{R}_e}{en_e} = \frac{m_e}{en_e} \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} \quad (2.52)$$

Recuérdese que el término  $\vec{R}$  representa la ganancia de momento del fluido debido a las colisiones de iones con electrones. Como los dos términos representan la fricción entre los dos fluidos, por conservación de momento se requiere que  $\vec{R}_e = -\vec{R}_i$ .  $\vec{R}$  se puede escribir en función de la velocidad relativa ( $\vec{v}_i - \vec{v}_e$ ) como sigue

$$\vec{R}_e = -m_e \nu_{ei} n_e (\vec{v}_i - \vec{v}_e) = m_e \frac{\vec{j}}{c} \nu_{ei} \quad (2.53)$$

donde  $\nu_{ei}$  es la frecuencia de colisión.

Por otro lado, dado que las colisiones son esencialmente Coulombianas [3],

$$\vec{R}_e = -\eta e^2 n^2 (\vec{v}_e - \vec{v}_i) = \eta e n \vec{J}, \quad (2.54)$$

siendo  $\eta$  la resistividad. De las ecs. (2.53) y (2.54) se concluye que

$$\vec{v}_e = \frac{e^2 n}{m} \eta \vec{J}, \quad (2.55)$$

de donde  $-\vec{R}_e / en_e = -\eta \vec{J}$ , y la ec. (2.52) toma la siguiente forma,

$$\vec{E} + \frac{1}{c} (\vec{v} + \frac{\vec{J}}{en}) \times \vec{B} + \frac{1}{en} \nabla p_e - \eta \vec{J} = \frac{en_e}{c} \frac{\partial \vec{J}}{\partial t}. \quad (2.56)$$

La ec. (2.56) se llama ley generalizada de Ohm y describe las propiedades eléctricas del fluido. Esta ecuación se puede reducir bajo las siguientes consideraciones.

Si  $\vec{J}$  no cambia apreciablemente en el tiempo comparado con el tiempo promedio de colisiones, el término del lado derecho de la ec. (2.56) se puede despreciar, mientras que a bajas temperaturas ( $|\frac{\nabla p_e}{n}| \approx |\nabla T_e| \ll |e \vec{E}|$ ), el término  $\nabla p_e$  se puede despreciar, en cuyo caso la ec. (2.56) se reduce a:

$$\vec{E} + \frac{\vec{J}}{c} \times \vec{B} - \frac{\vec{J} \times \vec{B}}{c en} = \eta \vec{J}. \quad (2.57)$$

El término  $\vec{J} \times \vec{B}$  se llama corriente de Hall y se puede despreciar si se suponen corrientes pequeñas comparadas con  $\vec{v} \times \vec{B}$ , es decir,  $\frac{1}{c} (\vec{J} \times \vec{B}) \ll \frac{en}{c} \vec{v} \times \vec{B}$ , entonces la ley de Ohm se reduce a,

$$\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B} = \eta \vec{J}. \quad (2.58)$$

Cuando la frecuencia de colisión es muy pequeña, la conductividad se vuelve infinita, lo cual ocurre por ejemplo, cuando la temperatura es muy alta, ya que [12]  $\eta \approx T^{-3/2}$ . En tal caso,

$$\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B} = 0$$

Cuando  $\eta = 0$  se dice que se trabaja en la aproximación de la magnetohidrodinámica ideal.

Hasta éste momento, se han obtenido las ecuaciones de continuidad de masa y carga, segunda ley de Newton y la ley de Ohm en el modelo de un fluido. También se puede obtener una ecuación para la densidad de energía. Para esto, se suman las ecs. (2.36) y (2.37),

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\rho_e + \rho_i) = & - (\rho_e \nabla \cdot \vec{v}_e + \rho_i \nabla \cdot \vec{v}_i) - \nabla \cdot [(\rho_e \vec{v}_e + \rho_i \vec{v}_i) \frac{1}{2} + \\ & + (\vec{v}_e + \vec{v}_i)] - (\vec{\pi}_e : \nabla \vec{v}_e + \vec{\pi}_i : \nabla \vec{v}_i) + (Q_e + Q_i). \end{aligned} \quad (2.69)$$

Si se supone que  $p_e \approx p_i = p/2$ ,  $\bar{q}_e \approx \bar{q}_i = \bar{q}/2$  y  $\bar{n}_e \approx \bar{n}_i = \bar{n}/2$ , el primer término del miembro derecho de la ec. (2.59) se puede escribir -- como,  $(p_e \nabla \cdot \bar{V}_e + p_i \nabla \cdot \bar{V}_i) = \frac{p}{2} (\nabla \cdot \bar{V}_e + \nabla \cdot \bar{V}_i) \approx \frac{p}{2} (\nabla \cdot \bar{V} - \nabla \cdot (\frac{\bar{J}}{en}) + \nabla \cdot \bar{V}) = p \nabla \cdot \bar{V} - \frac{p}{2} \nabla \cdot (\frac{\bar{J}}{en})$ . El segundo y tercer términos se pueden escribir como,  $\nabla \cdot (p_e \bar{V}_e + p_i \bar{V}_i) = \nabla \cdot [\frac{p}{2} (\bar{V} - \frac{\bar{J}}{en} + \bar{V})] = \nabla \cdot (p \bar{V}) - \nabla \cdot (\frac{p \bar{J}}{2en})$ ,  $\bar{n}_e \nabla \cdot \bar{V}_e + \bar{n}_i \nabla \cdot \bar{V}_i \approx \frac{\bar{n}}{2} (\nabla \cdot \bar{V} - \nabla \cdot (\frac{\bar{J}}{en}) + \nabla \cdot \bar{V}) = \bar{n} \nabla \cdot \bar{V} - \frac{\bar{n}}{2} \nabla \cdot (\frac{\bar{J}}{en})$ .

El cuarto término del miembro derecho de la ec. (2.59) se puede -- arreglar como sigue; Considérese colisiones entre iones y electrones despreciando el efecto de ionización y recombinación. Si las colisiones son elásticas, el momento y energía se conservan, lo cual significa que,

$$\int m_e \bar{V}_e \cdot (\frac{\partial \bar{f}_{e1}}{\partial t})_{col} d\bar{V} + \int m_i \bar{V}_i \cdot (\frac{\partial \bar{f}_{i1}}{\partial t})_{col} d\bar{V} = 0,$$

$$\int m_e v^2 (\frac{\partial \bar{f}_{e1}}{\partial t})_{col} d\bar{V} + \int m_i v^2 (\frac{\partial \bar{f}_{i1}}{\partial t})_{col} d\bar{V} = 0.$$

Recordando las definiciones de  $\bar{R}$  y  $Q$  (ecs. (2.17) y (2.31), se tiene que  $\bar{R}_{e1} = -\bar{R}_{i1}$  y  $Q = Q_{e1} + Q_{i1} = -(\bar{R}_{e1} \cdot \bar{V}_e + \bar{R}_{i1} \cdot \bar{V}_i) = -\bar{R}_{e1} \cdot (\bar{V}_e - \bar{V}_i)$ . Haciendo uso de las ecs. (2.53) y (2.54), se tiene que  $\bar{R}_{e1} = en_e \eta \bar{J}$  y  $-\bar{U} = (\bar{V}_e - \bar{V}_i) = -\bar{J}/en$ , de donde  $Q = \eta J^2$ . Finalmente se concluye que -- la ec. (2.59) se puede escribir como:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial \bar{J}^2}{\partial t} = -\nabla \cdot (p \bar{V} + \bar{q}) + \eta J^2 - \bar{n} \nabla \cdot \bar{V}. \quad (2.60)$$

Las ecs. (2.42), (2.43), (2.49), (2.56) y (2.60) junto con las -- ecuaciones de Maxwell describen el comportamiento de un plasma compuesto de iones y electrones. Si la velocidad de Alfvén  $V_A = B/\sqrt{\mu_0 \rho}$  es mucho menor que la velocidad de la luz, la ley de Ampere se puede --

escribir como  $c \nabla \times \bar{B} = 4\pi \bar{J}$ . Si además no se desea saber el comportamiento de la densidad de carga, y debido a la cuasineutralidad las ecuaciones MHD serán (se escribirá  $\rho$  en vez de  $\bar{n}$ ),

$$\rho \frac{\partial \bar{V}}{\partial t} = -\rho (\bar{V} \cdot \nabla) \bar{V} - \nabla p + \frac{\bar{J} \times \bar{B}}{c} - \nabla \cdot \bar{\Pi}, \quad (2.61)$$

$$\bar{J} = \frac{c}{4\pi} \nabla \times \bar{B}, \quad (2.62)$$

$$\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} = -c \nabla \times \bar{B}, \quad (2.63)$$

$$\bar{E} = \eta \bar{J} - \frac{1}{c} \bar{V} \times \bar{B}, \quad (2.64)$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial \bar{J}^2}{\partial t} = -\nabla \cdot (p \bar{V} + \bar{q}) - \eta J^2 - \bar{n} \nabla \cdot \bar{V}, \quad (2.65)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho \bar{V}). \quad (2.66)$$

Las ecs. (2.61) a (2.66) forman un conjunto de catorce ecuaciones escalares con catorce variables desconocidas ( $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$ ,  $\vec{J}$ ,  $\vec{q}$ ,  $p$ ,  $\vec{V}$ ), por consiguiente, es un sistema cerrado. Como ya se explicó en la sección 2.2, para el tensor de viscosidad  $\bar{\eta}$  y el vector de conducción de calor  $\vec{q}$  se tienen que dar modelos independientes para poder cerrar el sistema. El estado del plasma en cualquier punto del espacio y tiempo está dado por las ecs. (2.61) a (2.66).

La ec. (2.61) representa la aceleración del fluido en respuesta a fuerzas locales. La ec. (2.62) es la ley de Ampere para un caso particular, mientras que la evolución del campo magnético en el tiempo lo dará la ley de Faraday, ec. (2.63). Una forma especial de la ley de Ohm es la ec. (2.64). El movimiento del plasma altera el campo magnético a través de la ley de Faraday y la ley de Ohm, mientras el campo magnético actúa en el movimiento del plasma a través de la ecuación de movimiento (2.61).

El movimiento del plasma altera la presión y densidad de masa a través de las ecs. (2.65) y (2.66). Los términos  $V \cdot \nabla p$  y  $V \cdot \nabla \rho$  de estas ecuaciones representan el efecto de convección. Los términos  $p \nabla \cdot \vec{V}$  y  $\rho \nabla \cdot \vec{V}$  representan los efectos de compresión y expansión.

#### 2.4 FORMA CONSERVATIVA DE LAS ECUACIONES MHD

Se dice que una ecuación está en forma conservativa, cuando se escribe como la razón de cambio en el tiempo de un conjunto de cantidades igualado a la divergencia de un flujo. Lo que se hará a continuación, es escribir las ecuaciones MHD en forma conservativa.

##### 2.4a Ecuación de Observación de Masa.

De acuerdo a la ec. (2.65), es claro que cumple con la definición de arriba, por lo tanto, será la ecuación de conservación para la densidad de masa.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V}) = 0$$

(2.66)

##### 2.4b Ecuación de Conservación para el Momento.

Multiplicando por  $\vec{V}$  a la ec. (2.66) y sumandola con la ec. (2.61) se tendrá:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\vec{V}) = -\nabla \cdot (\rho\vec{V}\vec{V}) - \nabla p + \frac{\partial}{\partial t}(\vec{E} \times \vec{B}) - \nabla \cdot \vec{H}. \quad (2.67)$$

El tercer término se puede escribir como,  $\frac{1}{c} \vec{J} \times \vec{B} = \nabla \cdot (\vec{B}\vec{B} - \frac{1}{2} B^2 \vec{I})/4\pi$ , donde  $\vec{I}$  es el tensor unitario. Consecuentemente la ec. (2.67) en su forma conservativa será,

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\vec{V}) = -\nabla \cdot [\rho\vec{V}\vec{V} + (p + \frac{\rho}{N})\vec{I} + \frac{\vec{B}\vec{B}}{4\pi} + \vec{H}]. \quad (2.68)$$

#### 2.4c Ecuación de Conservación de Inducción Magnética.

Usando las ecs. (2.63) y (2.64) se obtiene,

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -c\eta \nabla \times \vec{J} + \nabla \times (\vec{V} \times \vec{B}),$$

pero,  $\nabla \times (\vec{V} \times \vec{B}) = -\nabla \cdot (\vec{V}\vec{B} - \vec{B}\vec{V})$ , y usando la ec. (2.62) se tendrá  $-c\eta \nabla \times \vec{J} = c\eta \nabla \cdot (\nabla \vec{B})/4\pi$ . De donde se concluye,

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\nabla \cdot [(\vec{V}\vec{B} - \vec{B}\vec{V}) - \frac{c\eta}{4\pi} \nabla \vec{B}], \quad (2.69a)$$

o bien

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \nabla \times (\vec{V} \times \vec{B} - \frac{c\eta}{4\pi} \nabla \vec{B}). \quad (2.69b)$$

Las ecs. (2.69a) y (2.69b) representan la conservación de la inducción magnética.

#### 2.4d Ecuación de Conservación de Energía.

Al desarrollar la ec. (2.65), se llega a,

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\rho}{2} \vec{V} \cdot \vec{V} = -(\rho + \frac{\rho}{N}) \nabla \cdot \vec{V} - \frac{\rho}{2} \vec{V} \cdot \nabla \rho - \nabla \cdot \vec{q} + \eta J^2 - \vec{H} \cdot \nabla \vec{V}.$$

Multiplicando por  $2/N$ , sustituyendo  $\rho = (N+2)/N$ , dividiendo entre  $\rho - 1$ , y arreglando se tendrá:

$$\frac{1}{\rho-1} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\rho}{2} \vec{V} \cdot \vec{V} = -\nabla \cdot \vec{V} - \frac{1}{\rho-1} \nabla \cdot (\rho\vec{V}) - \nabla \cdot \vec{q} + \eta J^2 - \vec{H} \cdot \nabla \vec{V}. \quad (2.70)$$

De la ec. (2.61) se despeja  $\vec{q}$ , y se multiplica por  $\vec{V}$ , dando

$$\vec{V} \cdot \nabla \rho = -\rho \vec{V} \cdot \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{V} \cdot (\frac{\partial}{\partial t} \vec{E} \times \vec{B}) - \rho \vec{V} \cdot (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} - \nabla \cdot (\rho \vec{H}) \quad (2.71)$$

El tercer término del miembro derecho de la ec. (2.71) se puede escribir como  $\vec{V} \cdot (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} = -(\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V}^2$ . Así que el primero y el tercero se escriben,

$$-\rho \vec{V} \cdot \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} - \frac{\rho}{2} (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V}^2 = -\frac{\partial}{\partial t} (\frac{\rho}{2} \vec{V}^2) - \nabla \cdot (\frac{\rho}{2} \vec{V} \vec{V}).$$

Con ayuda de las ecs. (2.62) y (2.64), el segundo término de la ec. (2.71) se desarrolla como sigue,

$$\vec{V} \cdot (\frac{\partial}{\partial t} \vec{E} \times \vec{B}) = -\eta J^2 + \frac{c}{4\pi} (\nabla \times \vec{B}) \cdot \vec{E},$$

el término  $\vec{E} \cdot (\nabla \times \vec{B})$  aún se puede reescribir y utilizar la ec. (2.63), dando como resultado

$$\vec{E} \cdot (\nabla \times \vec{B}) = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} - \nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{B}),$$

de donde

$$\nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{B}) = -\eta J^2 - \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} - \frac{1}{4\pi} \nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{B}).$$

Con todos estos resultados, la ec. (2.71) toma la forma

$$\nabla \cdot \mathcal{P} = -\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \rho v^2 \right) - \nabla \cdot \left( \frac{1}{2} \rho v v \right) - \eta J^2 - \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} - \frac{1}{4\pi} \nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{B}) - \nabla \cdot (\mathcal{P} \cdot \vec{n}).$$

Así pues, finalmente la ec. (2.70) se escribe,

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \rho v^2 + \frac{1}{2} \rho v^2 + \frac{\mathcal{E}}{4\pi} \right) = -\nabla \cdot \left[ \left( \frac{1}{2} \rho v v^2 + \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho v \right) \vec{v} + \frac{1}{4\pi} (\vec{E} \times \vec{B}) + \vec{n} \cdot \vec{v} + \vec{q} \right], \quad (2.72)$$

que tiene la forma  $\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} = -\nabla \cdot \vec{q}$ , en donde

$$\vec{q} = \left( \frac{1}{2} \rho v^2 + \frac{1}{2} \rho v^2 + \frac{\mathcal{E}}{4\pi} \right) \vec{v}, \quad (2.72b)$$

$$\vec{q} = \left[ \left( \frac{1}{2} \rho v^2 + \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho v \right) \vec{v} + \frac{1}{4\pi} (\vec{E} \times \vec{B}) + \vec{n} \cdot \vec{v} + \vec{q} \right]. \quad (2.72c)$$

La ec. (2.72) representa la conservación de la energía.

Resumiendo, las ecuaciones MHD en forma conservativa serán:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho \vec{v}), \quad (2.73)$$

$$\frac{\partial (\rho v)}{\partial t} = -\nabla \cdot \left\{ \rho v v + (\rho + \frac{1}{4\pi}) \vec{v} + \frac{1}{4\pi} \vec{v} + \vec{n} \right\}, \quad (2.74)$$

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} = \nabla \times (\vec{v} \times \vec{B}) - \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} \nabla \times \vec{B} = -\nabla \cdot (\vec{v} \vec{B} - \vec{B} v - \frac{1}{4\pi} \nabla \mathcal{E}), \quad (2.75)$$

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} = -\nabla \cdot \vec{q} \quad (2.76)$$

en donde  $\vec{v}$  y  $\vec{q}$  están dadas por (2.72b) y (2.72c).

Este conjunto de ecuaciones (2.73) a (2.76) representan la evolución de la densidad de masa, momento, inducción magnética y energía total, en cualquier punto del espacio y tiempo. Integrando cada una de las ecuaciones sobre un volumen fijo y usando el teorema de Gauss, se puede ver que el miembro derecho de cada ecuación representa el flujo a través de las fronteras del volumen.

### CAPITULO III

#### SOLUCION NUMERICA DE ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES

En este capítulo se propone un método numérico para encontrar la solución aproximada de las ecuaciones magnetohidrodinámicas. Un método comúnmente empleado en la solución de ecuaciones diferenciales parciales, es el de diferencias finitas, por medio del cual la región de variación continua del dominio (por ejemplo  $x, t$ ) se sustituye por un conjunto finito (discreto) de puntos llamado malla. Las derivadas que aparezcan en la ecuación diferencial se aproximan mediante los cocientes respectivos de diferencias, es decir, combinaciones lineales de valores de la función en la malla. Entonces la ecuación diferencial se aproxima por un sistema de ecuaciones algebraicas (ecuaciones en diferencias). Las condiciones iniciales y de frontera se sustituyen en las ecuaciones de diferencias.

#### 3.1 REPRESENTACION DISCRETA DE UNA VARIABLE CONTINUA

Considérese una variable continua  $x$  en el dominio de una función  $f$  de tal manera que  $X = (X_1, X_2)$  con  $X_1 \leq x \leq X_2$ . El continuo se aproxima mediante una malla de puntos, dividiendo el dominio  $X$  en un conjunto de intervalos  $J-1$  de longitud  $\Delta x_j$ . Se construye un vector  $\{x_j\}$  de dimensión finita  $J$ , definiendo las variables  $x_j$  solo en los puntos  $j$  -- donde  $1 \leq j \leq J$ . Así pues, (ver figura 3.1)

$$x_j = X_1 + \sum_{i=1}^{j-1} \Delta x_i$$

Por lo tanto, la función  $f(x)$  se puede aproximar definiendo un vector correspondiente  $\{f_j\}$  en función de la malla  $\{x_j\}$  como  $f_j = f(x_j)$ .

Como  $f(x)$  es continua para toda  $x$ , se concluye que la representación  $\{f_j\}$  es una descripción incompleta de  $f(x)$ . Sin embargo la función  $f$  puede ser aproximada mejor a partir de  $\{f_j\}$  en cualquier punto  $x'$  donde  $x_j \leq x' \leq x_{j+1}$ . Por interpolación entre puntos  $f_j$  y  $f_{j+1}$  se tendrá

$$\frac{f' - f_j}{x' - x_j} = \frac{f_{j+1} - f_j}{x_{j+1} - x_j}$$



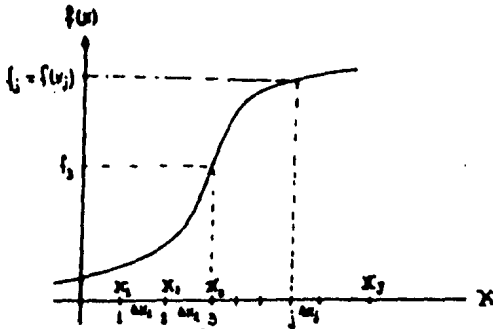


FIGURA 3.1.- Una malla definida en el espacio para reemplazar la variable continua  $x$ . Los puntos  $j$  están separados por espacios  $\Delta x_j$ .

Si  $\epsilon = (x' - x_j)/(x_{j+1} - x_j)$ , a primer orden de interpolación se tendrá,

$$f^0 = \epsilon f_{j+1} + (1 - \epsilon) f_j, \quad (3.1)$$

y  $f^0$  aproxima a  $f$ . Esta aproximación es buena cuando se describen propiedades de una función continua cuya longitud de onda es mucho mayor que  $\Delta x_j$ . Si  $f$  cambia bruscamente en el intervalo  $\Delta x_j$ ,  $f^0$  será una mala aproximación a  $f$ , es decir, no se pueden describir longitudes de onda menores que  $\Delta x_j$ .

Para cuantificar estas ideas de una buena o mala aproximación, -- cuando se aplica el método de diferencias finitas, es útil emplear técnicas de análisis de Fourier, por medio de las cuales se pueden escribir funciones como una superposición de modos de Fourier u ondas. Por simplicidad se supone que la función  $f$  es periódica en el dominio  $x$ , es decir, fuera de  $x$  existe una repetición periódica de la función  $f$ . Entonces  $f$  se puede desarrollar mediante una serie de Fourier infinita de la siguiente manera:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{g}_n e^{in\pi x/K}, \quad (3.2)$$

en donde

$$\hat{g}(n) = \frac{1}{K} \int f(x) e^{-in\pi x/K} dx. \quad (3.3)$$

Esta expresión establece que si  $f$  es bien comportada, se puede analizar mediante un conjunto infinito de modos de Fourier donde  $\hat{g}_n$  es -

la amplitud del modo con longitud de onda  $\lambda/k$ . La utilidad de este procedimiento es que la aproximación discreta  $\{f_j\}$  para la función  $f$  se puede desarrollar de una manera análoga y se puede comparar la representación de  $f$  con la equivalente de  $\{f_j\}$ . Dado que las componentes  $f_j$  forman un vector de dimensión finita  $J$ , se sigue que la representación discreta  $\{f_j\}$  se puede escribir como la suma de un conjunto finito de  $J$  funciones ortogonales.

Si cada elemento de malla  $\Delta x_j$ , para cada  $j$ , es una constante que se llamará  $\Delta$ , y la función  $f$  junto con la representación discreta  $f_j$  son periódicas,  $f_j$  se puede escribir como una serie de Fourier

$$f_j = \sum_{n=-1}^J g_n e^{i2n\pi k j / J} \quad (3.4)$$

en donde la amplitud  $\hat{g}_n$  es,

$$\hat{g}_n = \frac{1}{J} \sum_{j=1}^J f_j e^{-i2n\pi k j / J} \quad (3.5)$$

Este desarrollo es consistente con la serie infinita de Fourier, - ecs. (3.2) y (3.3), para el caso de una función  $f(x)$  definida en el continuo, dado que  $J\Delta$  ha reemplazado a  $X$  y  $j\Delta$  a  $x$ . Debido a que longitudes de onda menores que  $\Delta$  no se pueden definir en la malla, la serie infinita se convierte en finita. Sin embargo, se puede probar que las amplitudes  $\hat{g}_n$  en una serie finita de Fourier en la ec. (3.4), -- está definida por la relación dada en la ec. (3.5). Como los modos de Fourier forman un conjunto ortogonal se tendrá (Apendice A),

$$\sum_{j=1}^J e^{i2n\pi k j / J} e^{-i2m\pi k j / J} = J \delta_{nm} \quad (3.6)$$

Este resultado se puede usar para verificar las ecs. (3.4) y (3.5) lo cual demuestra que la representación discreta  $\{f_j\}$  se puede desarrollar como una serie finita de Fourier. Del desarrollo en la ec. (3.4) se puede demostrar que la amplitud debe satisfacer la relación en la ec. (3.5), pues de las componentes  $f_j$  del vector se forma la suma,

$$\sum_{j=1}^J f_j e^{-i2n\pi k j / J} = \sum_{m=-1}^J g_m \sum_{j=1}^J e^{i2m\pi k j / J} e^{-i2n\pi k j / J}$$

Usando la ortogonalidad, ec. (3.6)

$$\sum_{j=1}^J f_j e^{-i2n\pi k j / J} = \sum_{m=-1}^J g_m J \delta_{nm}$$

de donde

$$\hat{g}_n = \frac{1}{J} \sum_{j=1}^J f_j e^{-i2n\pi k j / J}$$

que es el resultado de la ec. (3.5).

### 3.2 METODO DE DIFERENCIAS PARA DERIVADAS EN EL ESPACIO

En la sección anterior se estudió la representación de una función continua en una malla. Ahora se analizará la aproximación por diferencias a la derivada en el espacio. Una derivada da información respecto a la variación local de la función en el espacio y consecuentemente la diferencia para la derivada acopla dos puntos cercanos ( $J-1$ ,  $J+1$ ) de una malla. La aproximación obvia para la primera derivada en el espacio de un punto  $j$  de la malla,  $1 \leq j \leq J$  es (ver figura 3.2a):

$$\Delta_x f_j = (f_{j+1} - f_{j-1}) / 2\Delta, \quad 3.7$$

donde  $\Delta$  es la longitud del espacio en la malla, y nuevamente una buena aproximación a la derivada  $df/dx$  será si  $f$  no varía bruscamente en el intervalo de longitud  $\Delta$ .

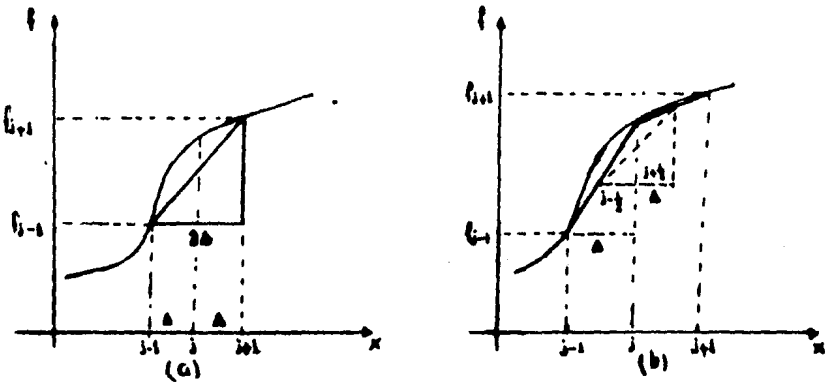


FIGURA 3.2.-Representación gráfica de una aproximación a: (a) La primera derivada, (b) La segunda derivada en el espacio.

Para la segunda derivada, una buena y simple aproximación a la malla  $1 \leq j \leq J$  será <sup>[13]</sup> (ver figura 3.2b)

$$\Delta_n^* f_j = \frac{f_{j+1} - 2f_j + f_{j-1}}{\Delta^2} \quad (3.8)$$

### 3.3 PROBLEMA CON VALORES INICIALES

Considerese un sistema definido por el estado del vector  $\vec{u}(r, t)$  en el espacio, de forma que cuando  $t = 0$ ,  $\vec{u} = \vec{u}_0$ , y  $\vec{u}$  está definido en la superficie  $s$  para todo  $t$ , entonces se desea conocer la evolución de  $\vec{u}$  al tiempo  $t$ . El estado del sistema se puede obtener para todo tiempo como una solución de la ecuación con valores iniciales,

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = L\vec{u} \quad (3.9)$$

En general,  $L$  es un operador no lineal algebraico para ecuaciones diferenciales. Aquí se considerará el caso cuando sea lineal.

Se integra la ec. (3.9) en una malla de pasos en el tiempo. Para esto, se divide el dominio de  $t$  en intervalos como se muestra en la figura (3.3).



FIGURA 3.3.- Representación esquemática de una malla en el tiempo.

Entonces,

$$t^n = \sum_{j=1}^n \Delta t_j$$

Para distinguir una malla en el espacio y en el tiempo se pondrá un subíndice y un supraíndice respectivamente. Al integrar la ec. (3.9) sobre pasos en el tiempo, el estado del vector  $\vec{u}^{n+1}$  y  $\vec{u}^n$  del sistema en puntos adyacentes  $t^{n+1}$  y  $t^n$  será

$$\vec{u}^{n+1} = \vec{u}^n + \int_{t^n}^{t^{n+1}} L\vec{u}(t') dt' \quad (3.10)$$

Es claro que la integral del lado derecho de la ec. (3.10) no se puede evaluar exactamente, debido a que el vector  $\vec{u}(t')$  no se conoce al tiempo  $t'$  en el intervalo  $t^n \leq t' \leq t^{n+1}$ . A continuación se resuelve -

este problema; El integrando de la ec. (3.10) se puede desarrollar en forma aproximada mediante una serie finita de Taylor,

$$\bar{u}^{n+1} = \bar{u}^n + \int_{t^n}^{t^{n+1}} \left\{ \sum_{r=0}^p \left[ \frac{d^r}{dt^r} (L\bar{u}) \right] \frac{(\Delta t)^r}{r!} + O(\Delta t^p) \right\} dt, \quad (3.11)$$

en donde p es el orden de precisión en el paso de tiempo  $\Delta t$ .

Después de integrar el lado derecho de la ec. (3.11),

$$\bar{u}^{n+1} = \bar{u}^n + \sum_{r=1}^p \left[ \frac{d^r}{dt^r} (L\bar{u}) \right]_{t^n} \frac{(\Delta t)^r}{r!} + O(\Delta t^{p+1}).$$

Considerando términos hasta de segundo orden únicamente

$$\bar{u}^{n+1} = \bar{u}^n + L\bar{u}^n \Delta t + \frac{1}{2} \left[ \frac{d}{dt} (L\bar{u}) \right]_{t^n} \epsilon \Delta t^2, \quad \epsilon = \frac{1}{2}$$

$$\frac{d}{dt} (L\bar{u}) \Big|_{t^n} = (L\bar{u}^{n+1} - L\bar{u}^n) / \Delta t,$$

por lo tanto,

$$\bar{u}^{n+1} = \bar{u}^n + L\bar{u}^n (1 - \epsilon) \Delta t + L\bar{u}^{n+1} \epsilon \Delta t. \quad (3.12)$$

Aquí  $\epsilon$  se podría interpretar como un parámetro de interpolación. - Si  $\epsilon = 1/2$  se tendrá precisión hasta segundo orden. Si  $\epsilon = 0$  el nuevo estado  $\bar{u}^{n+1}$  está definido explícitamente por el estado conocido  $\bar{u}^n$  en el paso previo,

$$\bar{u}^{n+1} = (I + \Delta t L) \bar{u}^n. \quad (3.13)$$

Cuando esto sucede se dice que el método es explícito, mientras -- que si  $\epsilon = 0$  se dice que el método es implícito, en cuyo caso,

$$(1 - \epsilon \Delta t L) \bar{u}^{n+1} = [I + (1 - \epsilon) \Delta t L] \bar{u}^n \quad (3.14)$$

Suponiendo que el operador del miembro izquierdo de la ec. (3.14) no sea singular, será necesario en cada paso de tiempo resolver la -- ec. (3.14) para el nuevo estado  $\bar{u}^{n+1}$

$$\begin{aligned} \bar{u}^{n+1} &= (1 - \epsilon \Delta t L)^{-1} [I + (1 - \epsilon) \Delta t L] \bar{u}^n \\ \bar{u}^{n+1} &= T(\Delta t, \Delta) \bar{u}^n. \end{aligned} \quad (3.15)$$

El operador T es el que relaciona los estados de un sistema en puntos subsecuentes de la malla temporal.

#### 3.4 CONDICIONES DE UNA SOLUCION POR DIFERENCIAS FINITAS PARA UN PROBLEMA DE VALORES INICIALES.

Al integrar sobre pasos en el tiempo, el problema de valor inicial se reduce a obtener una sucesión de soluciones definidas en puntos -- temporales discretos, donde el estado de un punto temporal está relacionado al estado del punto temporal previo (ver ec. (3.15)) por un operador de integración  $T(\Delta t, \Delta)$ . Esta formulación se aplica igualmente a un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias y mas generalmente a un sistema de ecuaciones diferenciales parciales.

Al aplicar el método de diferencias finitas, se debe tener cuidado en lo siguiente: La discretización debe ser consistente, es decir en el limite continuo, las ecuaciones de diferencias deben tender a la ecuación diferencial original. Debe haber precisión en la aproximación, es decir la solución de la ecuación numérica tiene que ser la mas exacta posible, respecto a la solución de la ecuación original. Debe haber estabilidad en el método, es decir cualquier error en la solución debe ser lo menos acumulativo posible, ya que de lo contrario puede suceder que el error se acumule tanto que al final corresponda a otra solución y no a la buscada. Las operaciones lógicas y matemáticas deben de hacerse y almacenarse en la computadora eficientemente.

Para formular el concepto de estabilidad cualitativamente, considérese una ecuación diferencial ordinaria. Supóngase que  $\epsilon^n$  es el error que ocurre en el paso  $n$ . Se desea saber la amplificación de este error en el paso  $(n + 1)$ , por lo tanto, si  $\epsilon^{n+1}$  es el error en este paso,

$$\epsilon^{n+1} = g \epsilon^n, \quad (3.16)$$

donde  $g$  es el factor de amplificación y está relacionado con el operador  $T$  (ver ec.(3.15)). La estabilidad numérica requiere que

$$|\epsilon^{n+1}| \leq |\epsilon^n|,$$

y usando la definición del factor de amplificación ec. (3.16),

$$|g \epsilon^n| \leq |\epsilon^n|,$$

así que la estabilidad numérica se consigue si se satisface la condición,

$$|g| \leq 1.$$

Es necesario cuantificar estas condiciones para problemas que lleven a soluciones crecientes.

### 3.5 PROCESOS FISICOS Y RELACION DE DISPERSION

Considerese una variable dependiente  $\vec{u}(x, t)$  donde,

$$\vec{u}(x, t) = \hat{u} e^{i(\omega t - kx)}, \quad (3.17)$$

siendo  $\omega$  la frecuencia de onda y  $k$  el número de onda relacionado con la longitud de onda  $\lambda$  ( $k = 2\pi/\lambda$ ).

Sustituyendo este modo (ecuación (3.17)) en la ecuación de interés se obtendrá una relación de la forma:

$$\omega = \omega(k) \quad (3.18)$$

La ec. (3.18) se llama relación de dispersión y da el comportamiento de la escala de tiempo con la frecuencia característica en una longitud de onda para el fenómeno físico descrito por la ecuación diferencial parcial. Cuando la frecuencia  $\omega$  es real se tiene oscilación, y cuando es imaginaria se tendrá inestabilidad.

En un problema de valores iniciales, el cual es resuelto por el método de diferencias finitas, interesan las escalas de tiempo del problema y la dependencia de ellas con las amplitudes de onda para diferentes procesos físicos. La relación de dispersión proporciona esta información

### 3.6 ESTABILIDAD DE LAS SOLUCIONES DE ECUACIONES DIFERENCIALES POR EL METODO DE DIFERENCIAS FINITAS.

Supóngase que el estado de un sistema de interés en el tiempo satisface la ecuación,

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = L\vec{u}, \quad (3.19)$$

donde  $L$  es un operador diferencial parcial. En forma de diferencias, el problema de valores iniciales se puede transformar como sucesiones de soluciones en puntos temporales  $t^n$  (ver ec. (3.15))

$$\vec{u}_j^{n+1} = T(\Delta t, \Delta) \vec{u}_j^n. \quad (3.20)$$

Si se supone que la integración del operador  $T(\Delta t, \Delta)$  es constante

(en caso contrario se aplicará una aproximación lineal), los modos de Fourier en la malla son independientes. Por lo tanto para el propósito del estudio de estabilidad, basta tomar un modo de Fourier,

$$\vec{u}_j^n = \hat{u}^n e^{ikx_j} \quad (3.21)$$

Sustituyendo en la ec. (3.20), las amplitudes del modo de Fourier estarán relacionadas como,

$$\hat{u}^{n+1} = G(\Delta t, \Delta, h) \hat{u}^n, \quad G(\Delta t, \Delta, h) = \tau(\Delta t, \Delta) e^{ik(\lambda_j - \lambda_j^*)}, \quad (3.22)$$

siendo  $G$  la matriz de amplificación en el esquema de diferencias para el particular modo de Fourier de número de onda  $k$ . Pero la estabilidad necesita que la amplitud de un modo esté limitado, y si su amplitud es finita en  $t = 0$ , entonces debe permanecer finita para todo paso de tiempo  $n$ .

Para aplicar esta condición se puede escribir la amplitud del vector del modo de Fourier de interés, en términos de los eigenvectores  $\vec{S}^{(\mu)}$  de la matriz de amplificación  $G$ . Si  $\hat{u}_\mu^0$  es la amplitud del vector del modo de Fourier a lo largo del eigenvector  $\vec{S}^{(\mu)}$  en el paso cero,

$$\hat{u}^0 = \sum \hat{u}_\mu^0 \vec{S}^{(\mu)} \quad (3.23)$$

Al aplicar la matriz de amplificación, ec. (3.22), la amplitud del vector del modo de Fourier en  $n$  pasos es

$$\hat{u}^n = G^n \hat{u}^0 = G^n \sum \hat{u}_\mu^0 \vec{S}^{(\mu)}, \quad (3.24)$$

dado que  $\vec{S}^{(\mu)}$  es el eigenvector de la matriz  $G$  con eigenvalor  $g_\mu$ ,

$$G \vec{S}^{(\mu)} = g_\mu \vec{S}^{(\mu)}.$$

Por lo tanto, al sustituir en la ec. (3.24),

$$\hat{u}^n = G^n \sum \hat{u}_\mu^0 \vec{S}^{(\mu)} = \sum \hat{u}_\mu^0 g_\mu^n \vec{S}^{(\mu)}.$$

Para satisfacer la condición de estabilidad se necesita,

$$|g_\mu^n| < k |\hat{u}_\mu^0|$$

donde  $k$  es un número finito y positivo. Esta condición debe ser satisfecha para cada modo de Fourier  $k$  y cada eigenvector  $\mu$  de  $G$ ,

$$|g_\mu^n| < k \quad \text{o bien} \quad |g_\mu| < k^{1/n}.$$

Esta condición impone un requisito a cada uno de los eigenvalores  $g_\mu$  para todos los pasos de tiempo  $n$ , por lo tanto, para  $n$  grandes - -



$K \rightarrow 1$ . La condición de estabilidad será

$$|g_\mu| \leq 1 \quad (3.25)$$

Si los eigenvalores  $g_\mu$  son complejos y  $|g_\mu|$  está definido como la amplitud del eigenvalor en el plano complejo,

$$|g_\mu| = \sqrt{g_\mu^* g_\mu} \quad (3.26)$$

donde  $g_\mu^*$  es el complejo conjugado de  $g_\mu$ .

En las ecuaciones diferenciales parciales de interés, el operador de integración  $T$  puede no ser lineal y consecuentemente después de haberse linealizado, el modo de Fourier en la matriz de amplificación - no puede ser constante, por lo tanto,  $G$  puede variar en la malla espacial y temporal. En consecuencia, la condición de estabilidad se reduce a una condición local.

Von Newman tomó en cuenta el posible suceso de un crecimiento local en un sistema de ecuaciones diferenciales y demostró una condición necesaria y suficiente para la estabilidad:

$$|G_\mu| \leq 1 + O(\Delta t). \quad (3.27)$$

### 3.7 ALCUNOS EJEMPLOS DEL METODO DE DIFERENCIAS FINITAS

Como un ejemplo, considérese la integración explícita de primer orden de una ecuación convectiva en una dimensión,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + v \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \quad (3.28)$$

De acuerdo a la ec. (3.7) e integrando solamente a primer orden en el paso de tiempo  $\Delta t$  se tendrá:

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{v \Delta t}{\Delta x} (u_j^n - u_{j-1}^n). \quad (3.29)$$

Como se discutió previamente, hay errores asociados con pasos de tiempo  $\Delta t$  y pasos en el espacio  $\Delta x$ . Además se estudió el criterio de estabilidad. La representación espacial y temporal de una malla en dos dimensiones está hecha esquemáticamente en la figura 3.4. La estabilidad se analiza mediante la amplificación de un modo de Fourier,  $\hat{u} = \hat{u} e^{ikx}$ , en el espacio. Aplicando esta forma funcional al algoritmo de la ec. (3.29) se tendrá,

$$\hat{u}^{n+1} e^{ikx_j} = \hat{u}^n e^{ikx_j} - \frac{v \Delta t}{\Delta x} \hat{u}^n (e^{ikx_j} - e^{ikx_{j-1}}),$$

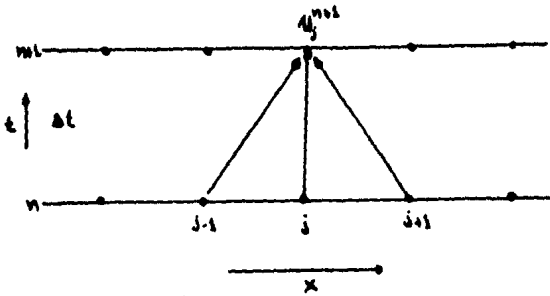


FIGURA 3.4.- Diagrama esquemático de la ec. (3.29). La derivada temporal está evaluada entre los puntos --  $(n+1, j)$  y  $(n, j)$ , mientras que la derivada espacial está evaluada entre los puntos  $(n, j+1)$  y  $(n, j-1)$ .

como  $x_{j+1} = x_j + \Delta$  y  $x_{j-1} = x_j - \Delta$ , se tendrá

$$u_j^{n+1} = [1 - i \frac{v \Delta t}{\Delta} \sin(k \Delta)] u_j^n, \quad (3.30)$$

dado que el problema es en una dimensión y solamente hay una ecuación diferencial, el modo de Fourier está acoplado por un factor de amplificación  $g$ , no por una matriz. Como se puede ver de la ec. (3.30) el factor de amplificación  $g(\Delta t, \Delta, k)$  es complejo,

$$g(\Delta t, \Delta, k) = 1 - i \alpha,$$

donde  $\alpha = \frac{v \Delta t}{\Delta} \sin(k \Delta)$ . Por lo tanto, para satisfacer el criterio de -- Von Neumann debe suceder que  $|g(\Delta t, \Delta, k)| \leq 1$ , pero  $g$  es compleja, consecuentemente se debe tomar en cuenta la magnitud del factor de amplificación en el plano complejo:

$$|g(\Delta t, \Delta, k)|^2 = g g^* = 1 + \alpha^2 \quad (3.31)$$

Para este caso la magnitud es siempre mayor que la unidad y la condición de Von Neumann para la estabilidad no se satisface para cualquier valor distinto de cero de  $\alpha$  y cualquier paso en el tiempo  $\Delta t$ , -- de donde se muestra que el esquema no es útil en general.

Se puede encontrar estabilidad en un esquema de primer orden para ecuaciones convectivas, al reemplazar  $u_j^n$  en el algoritmo de la ec. (3.29) por un promedio espacial,

$$u_j^{n+1} = \frac{1}{2} (u_{j+1}^n + u_{j-1}^n) - \frac{v \Delta t}{2 \Delta} (u_{j+1}^n - u_{j-1}^n). \quad (3.32)$$

Este algoritmo es aplicable a ecuaciones de tipo hiperbólico y se llama método de Lax. Analicemos su estabilidad determinando la ampli-ficación de un modo de Fourier,

$$\hat{u}^{n+1} e^{ikx_j} = \frac{1}{2} (\hat{u}^n e^{ikx_{j+1}} + \hat{u}^n e^{ikx_{j-1}}) + \frac{v \Delta t}{2\Delta} (\hat{u}^n e^{ikx_{j+1}} - \hat{u}^n e^{ikx_{j-1}}),$$

de donde

$$\hat{u}^{n+1} = [\cos(ka) - \frac{iv \Delta t}{\Delta} \sin(ka)] \hat{u}^n, \quad (3.33)$$

por lo tanto el factor de ampliación será:

$$g(\Delta t, \Delta, k) = \cos(ka) - \frac{iv \Delta t}{\Delta} \sin(ka).$$

La magnitud de este factor en el plano complejo es

$$|g(\Delta t, \Delta, k)| = 1 - \sin^2(ka) \left[ 1 - \left( \frac{v \Delta t}{\Delta} \right)^2 \right].$$

La condición de Von Neumann para la estabilidad se satisface para cualquier número de onda  $k$  si

$$\left| \frac{v \Delta t}{\Delta} \right| \leq 1 \quad \text{o} \quad \Delta t \leq \frac{\Delta}{|v|}. \quad (3.34)$$

Esta es llamada condición de estabilidad de Courant-Friedrichs-Lewy y es aplicable a ecuaciones hiperbólicas. El resultado de la ec. - (3.34) quiere decir que se deben escoger pasos en el tiempo menores - que los tiempos característicos físicos en el problema. En una ecuación convectiva, sería el tiempo en el que un flujo lleva una velocidad en una distancia  $\Delta$ . La condición de Courant-Friedrichs-Lewy asegura que la velocidad física  $v$ , es menor que la malla  $\Delta/\Delta t$ .

En forma general, se puede decir que la forma conservativa de las ecuaciones hiperbólicas en una dimensión es,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} = 0, \quad (3.35)$$

y la condición de estabilidad es la de Courant-Friedrichs-Lewy impuesta en pasos de tiempo  $\Delta t$ ,

$$\Delta t \leq \Delta/|v|,$$

donde  $v$  es la velocidad de propagación en la malla.

Usando el método de Lax, el algoritmo para la ec. (3.35) está dado por:

$$\hat{u}_j^{n+1} = \frac{1}{2} (\hat{u}_{j+1}^n + \hat{u}_{j-1}^n) - \frac{\Delta t}{2\Delta} (F_{j+1}^n - F_{j-1}^n), \quad (3.36)$$

de donde se ve que para el caso de la ecuación convectiva  $\vec{F} = v\vec{u}$ , si-

endo  $v$  la velocidad en la malla y nuevamente la condición de estabilidad es  $\Delta t \leq \frac{\Delta x}{|v|}$ . La ecuación convectiva es un ejemplo simple que tiene una amplia aplicación.

### 3.8 EL METODO DE LAX-WENDROFF

Es posible obtener precisión a segundo orden en pasos de tiempo -- evitando una gran difusión numérica mediante el método de Lax-Wendroff. Este consiste en lo siguiente: Primero se utiliza el método de Lax como primer paso o un cálculo auxiliar en cada paso de tiempo,

$$\text{Paso 1: } \bar{u}_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} = \frac{1}{2} (\bar{u}_j^n + \bar{u}_{j+1}^n) - \frac{\Delta t}{2\Delta x} (\bar{F}_{j+\frac{1}{2}}^n - \bar{F}_j^n). \quad (3.37)$$

Estas variables se usan para definir los flujos en tiempos intermedios y puntos espaciales,

$$\bar{F}_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} = F(u_{j+\frac{1}{2}}^{n+1}). \quad (3.38)$$

Consecuentemente en el segundo paso se obtendrá la fórmula para la integración en espacios y tiempos centrados como se muestra en la figura 3.5,

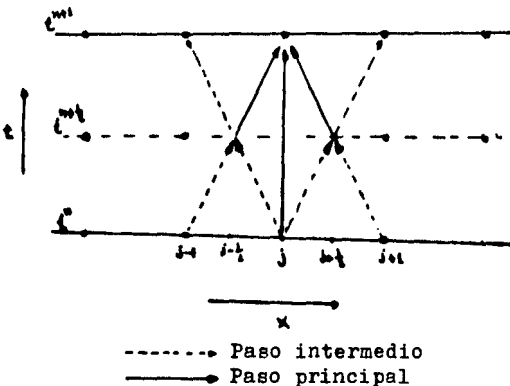


FIGURA 3.5.- El método de dos pasos de Lax-Wendroff representado en una malla del plano  $x-t$ .

$$\text{Paso 2: } \bar{u}_{j,t}^{n+1} = \bar{u}_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\bar{F}_{j,t}^{n+1/2} - \bar{F}_{j-1/2}^{n+1/2}), \quad (3.39)$$

después de haber hecho el segundo paso, los vectores intermedios de las variables  $\bar{u}_{j,t}^{n+1/2}$  se desechan, y no formando parte de la solución.

La estabilidad de este método se puede examinar refiriéndose a la ecuación convectiva donde  $\bar{F} = \bar{v}\bar{u}$ , por lo tanto,

$$\text{Paso 1: } \bar{u}_{j,t}^{n+1/2} = \frac{1}{2}(\bar{u}_j^n + \bar{u}_{j,n}^n) - \frac{\Delta t v}{2\Delta x} (\bar{u}_{j,n}^n - \bar{u}_j^n),$$

$$\text{Paso 2: } \bar{u}_j^{n+1} = \bar{u}_j^n - \frac{\Delta t v}{\Delta x} (\bar{u}_{j,t}^{n+1/2} - \bar{u}_{j-1/2}^{n+1/2}),$$

que al aplicarles un modo de Fourier  $\bar{u}_j = \bar{u} e^{ikh_j}$  se tendrá,

$$\bar{u}^{n+1/2} e^{ikh_{j,t}} = \frac{1}{2}(\bar{u}^n e^{ikh_j} + \bar{u}^n e^{ikh_{j,n}}) - \frac{\Delta t v}{2\Delta x} (\bar{u}^n e^{ikh_{j,n}} - \bar{u}^n e^{ikh_j}),$$

$$\bar{u}^{n+1} e^{ikh_j} = \bar{u}^n e^{ikh_j} - \frac{\Delta t v}{\Delta x} (\bar{u}^{n+1/2} e^{ikh_{j,t}} - \bar{u}^{n+1/2} e^{ikh_{j-1/2}}),$$

y al desarrollar el álgebra se llega a:

$$\bar{u}^{n+1} e^{ikh_j} = (1 - \frac{\Delta t v}{\Delta x} [i \sin(k\Delta x) - \frac{\Delta t v}{\Delta x} [\cos(k\Delta x) - 1]]) \bar{u}^n e^{ikh_j}$$

Por lo tanto,

$$g = 1 - \alpha [i \sin(k\Delta x) - \alpha [\cos(k\Delta x) - 1]], \quad (3.40)$$

donde  $\alpha = \Delta t v / \Delta x$ . De la ec. (3.40) se ve que el factor de amplificación  $g$  es complejo, y por lo tanto, se toma su amplitud en el plano complejo,

$$|g(\alpha t, \Delta x, k)|^2 = 1 - \alpha^2 (1 - \alpha^2) [1 - \cos(k\Delta x)] \quad (3.41)$$

Se concluye que el factor de amplificación en el método de Lax-Wendroff será tan pequeño o igual a la unidad, que la condición de estabilidad de Von Neumann será satisfecha para todo número de onda  $k$  si,

$$\alpha^2 \leq 1 \quad \text{o} \quad \alpha t \leq \Delta x / |v|,$$

que es la condición de Courant-Friedrichs-Lewy.

En general, el método de Lax-Wendroff conduce a un factor de amplificación menor que la unidad (excepto para el caso  $\alpha = 1$ ), por lo tanto hay un amortiguamiento de los modos de Fourier en la malla.

### 3.9 LAS ECUACIONES MHD Y SU SOLUCION

Las ecuaciones MHD forman un conjunto cerrado de acuerdo a lo discutido en el capítulo II. En el espacio de tres dimensiones, hay ocho ecuaciones acopladas con ocho variables desconocidas. Si se consideran los términos de viscosidad, resistividad y conducción de calor, - las ecuaciones MHD serán hiperbólicas, en caso contrario serán parabólicas. Para ecuaciones hiperbólicas, los procesos fundamentales que se pueden describir son, ondas de sonido y ondas de Alfvén.

Para ilustrar la forma de los términos de transporte en las ecuaciones MHD de un fluido ideal, considerese los coeficientes de transporte; viscosidad  $\mu$ , conducción del calor  $K$  y resistividad  $\eta$ . Los términos de, viscosidad en el flujo de momento, resistividad en el flujo magnético y conducción de calor serán, respectivamente

$$\begin{aligned} \mu \nabla^2 \vec{v} - \frac{1}{3} \mu \nabla (\nabla \cdot \vec{v}), \\ K \nabla^2 T, \\ \frac{1}{4\pi} \nabla^2 \vec{B}. \end{aligned}$$

Estos serán los términos que llevan la difusión de momento, flujo magnético y flujo de energía.

La solución completa de las ecuaciones MHD dependen de las escalas de tiempo en los procesos que se están tratando, es decir, dependen - por un lado, de la convección, ondas de sonido y ondas de Alfvén que corresponderían a ecuaciones hiperbólicas y por otro lado a la difusión por viscosidad, resistividad y conducción del calor. Por lo tanto se puede establecer un orden de magnitud entre procesos convectivos y difusivos, esto se logra definiendo números adimensionales llamados números de Reynolds, los cuales miden el dominio de comparación entre convección y difusión. Si  $v$  es la velocidad típica del fluido - sobre una escala de longitud  $L$ , los números de Reynolds para la viscosidad  $R_v$ , conductividad  $R_K$ , y resistividad  $R_\eta$  se definen como <sup>[10]</sup>:

$$R_v = vL\rho/\mu, \quad (3.41)$$

$$R_K = vL\rho/K, \quad (3.42)$$

$$R_\eta = 4\pi vL/\eta. \quad (3.43)$$

Si se está interesado en el efecto de difusión, los números de Rey

nolds serán muy grandes. En caso contrario, tomando números de Reynold pequeños se tendrá el efecto de convección. Es decir, para que ocurra difusión de campo magnético en el plasma se toman escalas,

$$l \ll R_{\eta} \ll R_v, R_k,$$

y las soluciones de las ecuaciones MHD serán sin el término de resistividad.

A continuación se escribirán las ecuaciones MHD en una dimensión - en coordenadas cilíndricas y cartesianas que corresponden a los casos  $\theta$ -pinch ( $B_z, J_z^{\text{ext}}, J_z^{\text{int}}, P_z$ ) y Z-pinich ( $B_z, J_z^{\text{ext}}, P_z$ ) respectivamente. Nótese que para pasar de un sistema de coordenadas a otro se hace mediante la transformación  $\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} [\dots] \rightarrow \frac{\partial}{\partial x} [\dots]$ .

### 3.9a VERSION O-PINCH.

En una dimensión y usando coordenadas cilíndricas se obtiene lo siguiente:

Como  $\nabla \cdot \vec{v} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv)$  y  $\nabla \times \vec{B} = -\frac{\partial}{\partial z} B_z \hat{e}_\theta$ , las ecs. (2.73) a (2.76) se pueden escribir respectivamente como

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv), \quad (3.45)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} (rv) = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} v (rv^2 + r + B_z^2), \quad (3.46)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} B_z = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} v (rv_0 - \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial r} B_z), \quad (3.47)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} u = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} v \left[ \left( \frac{1}{2} rv^2 + r\epsilon + \frac{B_z^2}{4\pi} + r \right) v \right] \quad (3.48)$$

Las ecs. (3.45) a (3.48) están en coordenadas cilíndricas en una dimensión y se pueden escribir en forma conservativa de la siguiente manera,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv) \right) \quad (3.49)$$

en donde

$$u = \left\{ r, rv, B_z, \left( \frac{1}{2} rv^2, \frac{r}{2}, \frac{B_z^2}{4\pi} \right) \right\} \quad (3.50)$$

$$F = \left\{ rv, (rv^2 + r + \frac{B_z^2}{4\pi}), rv_0, \left( \frac{1}{2} rv^2 + \frac{r}{2} + \frac{B_z^2}{4\pi} \right) v \right\} \quad (3.51)$$

Según sea el caso de interés, las ecs. (3.49), (3.50) y (3.51) se normalizan. En este trabajo, sea  $x' = x/x_0$ ,  $r' = r/r_0$  y el campo magnético se puede normalizar a la velocidad de Alfvén  $V_A^2 = B_z^2/4\pi\rho$ . Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
 L' &= L/L_0, \\
 V' &= v/v_0, \\
 t' &= t/(L_0/v_0), \\
 \rho' &= \rho/(v_0^2/v_0), \\
 B' &= B/B_0, \\
 S' &= S/(v_0^2/4\pi v_0^2), \\
 U' &= U/(v_0^2/v_0).
 \end{aligned}$$

El tiempo de normalización será aquel en el cual la onda de Alfvén cruza la region de interés. Así pues, las ecuaciones MHD ya normalizadas serán,

$$\frac{\partial u'}{\partial t'} = -\frac{\partial F'}{\partial x'} \quad \text{o} \quad \frac{\partial u'}{\partial t'} = -\frac{1}{V} \frac{\partial}{\partial x'} (VF') \quad (3.52)$$

en donde,

$$u' = \{s', s'v', \theta', (s'v'^2 + \frac{1}{2}\theta'^2 + \theta')\}, \quad (3.53)$$

$$F' = \{s'v', [s'v'^2 + \frac{1}{2}(\theta' + \theta'^2)], v'\theta', (s'v'^2 + \frac{1}{2}\theta'^2 + \theta')v'\}. \quad (3.54)$$

### 3.9b VERSION Z-PINCH.

En una dimensión y utilizando coordenadas cartesianas, las ecs. -- (2.73) a (2.76) se pueden escribir respectivamente como ( $B_z$ ,  $J_z$ ,  $p$ ):

$$\frac{\partial B_z}{\partial t} = -v \frac{\partial B_z}{\partial x} - S \frac{\partial J_z}{\partial x}, \quad (3.55)$$

$$\frac{\partial J_z}{\partial t} = -v \frac{\partial J_z}{\partial x} - \frac{1}{4\pi} \frac{\partial B_z}{\partial x} - \frac{1}{4\pi} \frac{\partial B_z}{\partial x}, \quad (3.56)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -v \frac{\partial p}{\partial x} - \theta \frac{\partial J_z}{\partial x}, \quad (3.57)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = -v \frac{\partial \theta}{\partial x} - \theta \frac{\partial J_z}{\partial x}. \quad (3.58)$$

donde se ha despreciado el término de difusión en la ec. (2.75), y -- los términos de conducción de calor, viscosidad y campo eléctrico en la ec. (2.76)

A continuación se estudiará la estabilidad de las ecs. (3.55) a -- (3.58). Para ello tómesese una malla espacial en el intervalo  $l \leq j \leq J$ , -- con la cual se pueden obtener nuevas variables en el paso de tiempo --  $n+1$  al aplicar el método de Lax-Wendrff.

Densidad,

$$\rho_j^{n+1} = \frac{1}{2} (\rho_{j+1}^n + \rho_{j-1}^n) - v_j^n \frac{\Delta t}{2\Delta} (\rho_{j+1}^n - \rho_{j-1}^n) - S_j^n \frac{\Delta t}{2\Delta} (v_{j+1}^n - v_{j-1}^n).$$

Velocidad,

$$v_j^{n+1} = \frac{1}{2} (v_{j+1}^n + v_{j-1}^n) - v_j^n \frac{\Delta t}{2\Delta} (v_{j+1}^n - v_{j-1}^n) - \frac{1}{4\pi} \frac{\Delta t}{2\Delta} (\theta_{j+1}^n - \theta_{j-1}^n) - \frac{S_j^n}{4\pi S_j^n} \frac{\Delta t}{2\Delta} (\theta_{j+1}^n - \theta_{j-1}^n).$$



Campo magnético,

$$B_j^n = \frac{1}{2}(B_{j+1}^n + B_{j-1}^n) - V_j^n \frac{\Delta t}{2\Delta} (B_{j+1}^n - B_{j-1}^n) - B_j^n \frac{\Delta t}{2\Delta} (V_{j+1}^n - V_{j-1}^n).$$

Presión,

$$P_j^n = \frac{1}{2}(P_{j+1}^n + P_{j-1}^n) - V_j^n \frac{\Delta t}{2\Delta} (P_{j+1}^n - P_{j-1}^n) - P_j^n \frac{\Delta t}{2\Delta} (V_{j+1}^n - V_{j-1}^n),$$

donde las ecuaciones de arriba están linealizadas, haciendo una aproximación local constante de las derivadas espaciales. Esta aproximación es factible cuando se considera un pequeño crecimiento de error en un modo de Fourier.

En este caso la matriz de amplificación será:

$$G(\Delta t, \Delta) = \begin{bmatrix} (\beta - i\alpha V_j^n) & -i\alpha V_j^n & 0 & \dots \\ 0 & (\beta - i\alpha V_j^n) & -i\alpha V_j^n / 4\alpha V_j^n & \dots \\ 0 & -i\alpha V_j^n & (\beta - i\alpha V_j^n) & \dots \\ 0 & -i\alpha V_j^n & 0 & (\beta - i\alpha V_j^n) \end{bmatrix},$$

en donde  $\beta = \cos(k\Delta)$  y  $\alpha = \{\Delta t \sin(k\Delta)\} / \Delta$ . Los eigenvalores de la matriz  $G$  son,

$$\det [G(\Delta t, \Delta) - I \lambda] = 0,$$

que al desarrollar se llega a,

$$- [(\beta - i\alpha V_j^n) - \lambda]^2 \{ - [(\beta - i\alpha V_j^n) - \lambda]^2 - \alpha^2 V_j^n \frac{V_j^n}{\beta_j^n} + \alpha^2 \frac{(V_j^n)^2}{4\alpha \beta_j^n} \} = 0,$$

por lo tanto,

$$\begin{aligned} [(\beta - i\alpha V_j^n) - \lambda]^2 &= 0, \\ - [(\beta - i\alpha V_j^n) - \lambda]^2 + \alpha^2 V_j^n \frac{V_j^n}{\beta_j^n} + \alpha^2 \frac{(V_j^n)^2}{4\alpha \beta_j^n} &= 0, \end{aligned}$$

de donde se concluye que:

$$\lambda_{1,2} = \beta - i\alpha V_j^n, \quad (3.54)$$

$$\lambda_{3,4} = \beta - i\alpha \left\{ V_j^n \pm \sqrt{\frac{\alpha V_j^n}{\beta_j^n} + \frac{(V_j^n)^2}{4\alpha \beta_j^n}} \right\}. \quad (3.60)$$

El eigenvalor mayor es  $\lambda_3$  o  $\lambda_4$  dependiendo del signo de la velocidad convectiva  $V_j^n$ , así que para satisfacer la condición de Von Neumann, los pasos en el tiempo deben de ser limitados de acuerdo al criterio de Courant-Friedrichs-Lewy:

$$\Delta t \leq \frac{\Delta}{|V_j^n| + \sqrt{\frac{\alpha V_j^n}{\beta_j^n} + \frac{(V_j^n)^2}{4\alpha \beta_j^n}}}, \quad (3.61)$$

donde  $V_j^n$  es la velocidad del centro de masa del plasma y la velocidad magnetostática es  $V_m = \sqrt{V_s^2 + V_A^2}$ ,  $V_s$  es la velocidad del sonido y  $V_A$  es la velocidad de Alfvén.

Si se toman las ecuaciones ya normalizadas, la condición de Courant-Friedrichs-Lewy será de la forma,

$$\Delta t' \leq \frac{\delta'}{10_j^n + \sqrt{\frac{10_j^n}{2g_j^n} + \frac{(10_j^n)^2}{f_j^n}}} \quad (3-62)$$

## CAPITULO IV

### CODIGO DE COMPUTO PARA LA INTEGRACION DE LAS ECUACIONES MHD EN UNA DIMENSION

Una vez establecidas las ecuaciones magnetohidrodinámicas en su forma conservativa y haber estudiado el método de diferencias finitas (en particular el método de Lax-Wendroff) se está en condiciones de implementar un código para resolver las ecuaciones MHD en una dimensión espacial.

#### 4.1 EL TERMINO DE DIFUSION MAGNETICA

La ecuación que relaciona al flujo magnético está dada por,

$$\frac{\partial B}{\partial t} = \nabla \times (\vec{V} \times \vec{B} - \frac{c^2}{4\pi} \nabla \times \vec{b}),$$

o bien, al escribirla en coordenadas cilíndricas según la ec. (3.47),

$$\frac{\partial B}{\partial t} = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ r (V_B - \frac{c^2}{4\pi} \eta \frac{\partial B}{\partial r}) \right]. \quad (4.1)$$

Si se desarrolla el segundo término del miembro derecho de la ec.

(4.1) se llega a

$$\frac{\partial B}{\partial t} = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} [r(V_B)] + \left( \frac{\eta}{r} + \frac{\partial \eta}{\partial r} \right) \frac{c^2}{4\pi} \frac{\partial B}{\partial r} - \frac{c^2}{4\pi} \eta \frac{\partial^2 B}{\partial r^2},$$

por lo cual, la ec. (4.1) se puede escribir como

$$\frac{\partial B}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial r} \left( R \frac{\partial B}{\partial r} \right) = S \quad (4.2)$$

donde S representa los términos restantes y  $R = c^2 \eta / 4\pi$ .

La ec. (4.2) es una ecuación de difusión y se clasifica como hiperbólica que se puede resolver por varios métodos, aquí solo se enunciarán dos.

#### 4.1a Método Implícito de Crank-Nicholson.

En este método la estabilidad está asegurada para el caso en cuestión y el algoritmo es (ver apéndice B),

$$u^{n+1} - \frac{\Delta t}{2\Delta x} \left( \bar{K} \frac{\partial u^{n+1}}{\partial x} \right) = u^n + \frac{\Delta t}{2\Delta x} \left( \bar{K} \frac{\partial u^n}{\partial x} \right) + \int S dt. \quad (4.3)$$

Los términos  $u^n$  y  $\int S dt$  son conocidos, además  $\bar{K} = \frac{1}{2}K(u^n) + \frac{1}{2}K(u^{n+1})$ . Aquí las nuevas variables  $u^{n+1}$  no están definidas explícitamente, por lo tanto, se necesita resolver una matriz para cada paso en el tiempo.

#### 4.1b Método Explícito

Aquí hay que encontrar la condición de estabilidad. El algoritmo - es (ver apéndice B),

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \frac{K \Delta t}{\delta^2} [u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n] \quad (4.4)$$

y la condición de estabilidad requiere que,

$$\frac{2K \Delta t}{\delta^2} \leq 1 \quad \text{o} \quad \Delta t \leq \frac{\delta^2}{K} \quad (4.5)$$

En este caso se utilizará el método explícito.

De la ec. (4.2), al aplicar el algoritmo (4.4) se tiene,

$$B_j^{n+1} \approx B_j^n + \left(\frac{e^2 n}{4\pi}\right) \frac{\Delta t}{\delta^2} [B_{j+1}^n - 2B_j^n + B_{j-1}^n], \quad K = \frac{e^2 n}{4\pi} \quad (4.6)$$

donde se ha despreciado el término S. Para efectos de difusión se ignorará el flujo del plasma.

A continuación se normalizará la constante K, para ello se recuerda que en el capítulo III se normalizaron las variables de la siguiente forma:

$$B' = B/B_0, \quad (4.7a)$$

$$t' = t/(x_0/V_A), \quad (4.7b)$$

$$x' = x/x_0, \quad (4.7c)$$

$$f' = f/(B_0^2/4\pi V_A^2), \quad (4.7d)$$

$$P' = P/(B_0^2/8\pi), \quad (4.7e)$$

$$v' = v/(B_0^2/8\pi). \quad (4.7f)$$

De acuerdo a la ec. (4.2), al ignorar el término S,

$$\frac{\partial B}{\partial t} \approx -\frac{\partial}{\partial x} \left( K \frac{\partial B}{\partial x} \right),$$

al sustituir las relaciones que se muestran en las ecs. (4.7) se tendrá,

$$\frac{\partial B'}{\partial t'} \approx -\frac{\partial}{\partial x'} \left( K' \frac{\partial B'}{\partial x'} \right)$$

en donde  $K' = K/XV_A$  y esta será la condición de normalización para K. Como condiciones de frontera, para poder integrar la ec. (4.6) se tomará para  $j = 1$ ,  $B_1^{n+1} = B_1^n$  y para  $j = N$ ,  $B_{N+1} = B_N^{n+1}$ . Además se necesita conocer los valores de la resistividad. Cuando se toma en cuenta la - reacción de los iones en cada colisión y se promedia sobre la distribución de los electrones, se encuentra que [3], [8]

$$\eta_{ii} = 7.3 \times 10^{-9} \frac{Z |n_A|}{T^{3/2} (k)} = 5.8 \times 10^{-15} \frac{Z |n_A|}{T^{3/2} (ev)}, \quad (4.8)$$

donde  $Z$  es la carga del ion y  $\ln \Lambda$  es el logaritmo de Coulomb ( $\Lambda = \lambda_D / r_0$ ), ( $r_0 = e^2 / mV^2$ ). El subíndice  $\parallel$  significa que el valor de  $\eta$  se usa para movimientos paralelos a  $\vec{B}$  y para movimientos perpendiculares se usará el subíndice  $\perp$ .

En el movimiento perpendicular a  $\vec{B}$  (electrones lentos), el radio de Larmor es pequeño y contribuye más a la resistividad que en movimientos paralelos. Se usará la convención <sup>[3]</sup>,

$$\eta_{\parallel} \text{ si } \Omega \tau_e < 1, \quad (4.9a)$$

$$\frac{\eta_{\perp}}{1 + (\Omega \tau)^2} \text{ si } \Omega \tau_e > 1. \quad (4.9b)$$

A continuación se normalizan las ecuaciones de estado, difusión -- magnética, resistividad y conductividad térmica, de acuerdo a las relaciones (4.7).

De la ecuación de estado, se tiene  $p = n_e k T_e + n_i k T_i$ . Para un gas completamente ionizado  $n_e \approx n_i = n$  y  $T_e \approx T_i = T$ , por lo tanto  $p = 2nkT$ .

La presión está dada en erg/cm, la densidad en número de partículas por centímetro cúbico,  $kT$  en erg/atm. Se sabe que  $\epsilon = p / (\beta - 1)$ , poniendo la masa del protón  $\beta = nm = n \times 1.67 \times 10^{-24}$  gr y  $p = 2\beta kT / 1.67 \times 10^{-24}$  de donde,  $\epsilon = 2(kT) \text{ erg} / [(\beta - 1) \times 1.67 \times 10^{-24} \text{ gr}]$  o bien  $kT(\text{erg}) = (\beta - 1) \times 0.84 \times 10^{-24}$  (erg).

Normalizando a la ecuación de estado,

$$\epsilon = \frac{r(\rho^2 / \beta n)}{(\beta - 1) \beta' (\beta^2 / 4\pi v_0^2)} = \epsilon' \left( \frac{v_0^2}{\beta} \right),$$

por lo cual,

$$kT(\text{erg}) = \left( \frac{v_0^2}{\beta} \right) \left( \frac{\beta}{\beta'} \right) \times 0.84 \times 10^{-24} \quad (4.10)$$

Ahora se normaliza la resistividad. En el ejemplo que se estudiará  $\ln \Lambda = 10.0$ , por lo tanto, de la ec. (4.8),

$$\eta_{\parallel} = \frac{5.8 \times 10^{-18} \times 10.0}{\left\{ kT(\text{erg}) \left[ 1 / (1.6 \times 10^{-24} \frac{m}{g}) \right] \right\}^{3/2}} = 4.319 \times 10^8 \left( \frac{\beta}{\beta'} \right)^{3/2} \frac{1}{v_0^2} \quad (4.11)$$

y para la conductividad, de la ec. (4.6),

$$k_H = \frac{c^2}{4\pi} \eta_{\parallel} = 3.009 \times 10^{25} \left( \frac{\beta}{\beta'} \right) \frac{1}{v_0^2}. \quad (4.12)$$

Normalización de  $\alpha r$ . Se sabe que la frecuencia de ciclotrón<sup>[13]</sup>  $\tau = qB/m_e c$  y que la frecuencia de colisión está dada como<sup>[3]</sup>  $\nu_i = n_e^2 \eta_{ii}/m_e = n_e^2 \eta_{ii}/4\pi = 1/\tau_i$ , de donde,  $\alpha_e \tau_i = B/nce \eta_{ii}$ . Nótese que,  $\frac{n}{4\pi} = 2.8 \times 10^6$  (Hz)  $\times B$  (Gauss),  $\frac{\alpha_e \tau_i}{2\pi} = 900$  (Hz)  $\times \sqrt{n_e (\frac{1}{c})}$ .

De donde,

$$\alpha_e \tau_i = 1.24 |v_i|^2 \left(\frac{p'}{p}\right) \left(\frac{V_A}{c}\right)^2 \tau^{1/2} \text{ cm}$$

usando la ec. (4.10)

$$\alpha_e \tau_i = 3.378 \times 10^{-30} \frac{p'}{r} \left(\frac{p'}{p}\right)^{3/2} \frac{V_A^5}{c} \quad (4.13)$$

Considerando el caso de interés los datos serán: Frecuentemente  $kT \approx 5 \text{ ev}$ ,  $n_e \approx 1 \times 10^{16} / \text{cm}^3$  y  $B_{max} \approx 2000$  Gauss. Así que  $n_e kT_e \approx 5 \times 1.67 \times 10^{-12} \text{ erg/cm}^3$ ,  $\rho = n_e m = n \times 1.67 \times 10^{-24} \text{ gr} = 1.67 \times 10^{-8} \text{ gr/cm}^3$ ,  $V_A = B/\sqrt{4\pi \rho} = 4.4 \times 10^6 \text{ cm/seg}$ ,  $L/V_A = 2.5 \text{ cm}/4.4 \times 10^6 \text{ (cm/seg)} = 5.7 \times 10^{-7} \text{ seg}$ ,  $\alpha t = \alpha t/(L/V_A) = 10^{-5} \text{ seg}/5.7 \times 10^{-7} \text{ seg} = 17.6$ ,  $g' = \rho/B_e^2 (4\pi V_A^2) \approx 1.0$ ,  $p' = p/(B_e^2/8\pi) = 1.5 \times 10^5 / 1.6 \times 10^5 = 1.0$ ,  $B_e^2/8\pi \approx 1.6 \times 10^5 \text{ erg/cm}^3$ .

De la ec. (4.11),

$$\eta_{ii} = 4.314 \times 10^5 \left(\frac{p'}{p}\right)^{3/2} \frac{1}{v_i^2 (\text{cm/seg}) \times 10^4} \quad (4.14)$$

De la ec. (4.12) y usando el hecho de que  $K' = K/V_A X_0$ .

$$K' = 30.89 [1/\sqrt{g'} (\frac{p'}{p})^{3/2}] \left(\frac{p'}{p}\right)^{3/2} \quad (4.15)$$

De la ec. (4.13),

$$\alpha_e \tau_i = 2.785 \quad (4.16)$$

y con estos resultados numéricos se está en condiciones de dar el código.

#### 4.2 CODIGO DE COMPUTO PARA LA SOLUCION DE LAS ECUACIONES MHD EN --

##### UNA DIMENSION

El programa que resuelve las ecuaciones MHD se titulará "BZ1D". Es un código en el cual se considera un campo magnético axial y se pueden resolver problemas en coordenadas cilíndricas o cartesianas en una dimensión, según sea la geometría del problema

En el capítulo III se vió que las ecuaciones MHD en forma conservativa, ya normalizadas, se pueden escribir como:

$$\frac{\partial K'}{\partial t} = -\nabla \cdot F'$$

en donde,

$$u' = \left\{ \varphi', \varphi'V', \vartheta', \left( \varphi'V'^2 + \frac{1}{\vartheta'-1} \varphi' + \vartheta' \right) \right\},$$

$$V' = \left\{ \varphi'V', \left[ \varphi'V'^2 + \frac{1}{\vartheta'+1} (\varphi' + \vartheta') \right], V'\vartheta', \left( \varphi'V'^2 + \frac{2}{\vartheta'-1} \varphi' + \vartheta'^2 \right) V' \right\}.$$

Se utiliza el método de dos pasos de Lax-Wendroff para su solución. Según se vió en el capítulo III,

$$\text{Paso 1: } u_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} (u_{j+\frac{1}{2}}^n + u_j^n) - (F_{j+\frac{1}{2}}^n - F_j^n) \frac{\Delta t}{2\Delta}, \quad (4.18)$$

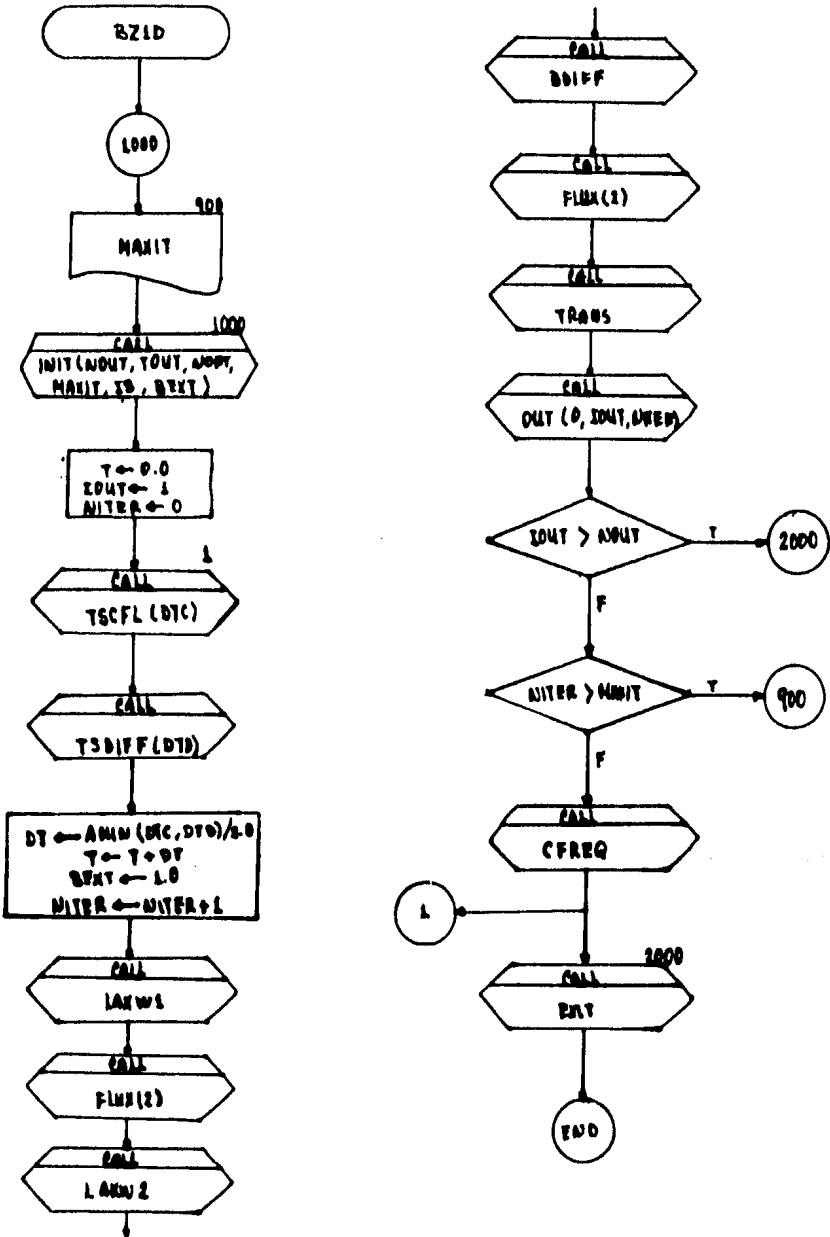
$$\text{Paso 2: } u_j^{n+1} = u_j^{n+\frac{1}{2}} - (F_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - F_{j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}) \frac{\Delta t}{\Delta}. \quad (4.19)$$

donde el criterio de estabilidad está dado por la condición de Courant-Friedrichs-Lewy,

$$\Delta t \leq \Delta / \left[ |u_j^n| + \sqrt{\frac{\rho_j^n}{2j_j^n} + \left( \frac{u_j^n}{j_j^n} \right)^2} \right]. \quad (4.20)$$

La estructura del código "BZLD" se da a continuación y posteriormente se mostrarán las subrutinas.

FIGURA 4.1.- Programa principal





### 4.3 SUBROUTINAS EN EL CODIGO BZ1D

En el diagrama de flujo que se muestra en la figura 4.1, se utilizan 10 subrutinas las cuales tienen cada una su tarea específica a desarrollar que a continuación se detallan.

INIT. Es una subrutina que inicializa el programa. Los parámetros a usar son: IGEO-Determina la geometría (0-lineal, 1-radial). TMAX-Máximo de iteraciones. ITINT-Va a ser N en la subrutina OUT, NOUT en el programa principal e ITINT en la subrutina de entrada y significa el número de iteraciones que se desean. IOPT-Opción para fijar valores para RHOMIN, MAX, VA, BO y XO (0-tal como están los datos en el programa, ≠ 0 permite dar otros valores).

Además lee datos iniciales a partir de la subrutina CODI, estos son, NINT-Número de puntos en la malla. RHOI-Densidad mínima. VI-Velocidad inicial. PI-Presión inicial. BI-Campo magnético inicial. Todos estos valores están normalizados a la unidad.

Los datos del problema son, RHOMIN-Densidad mínima. MAX-Número máximo de iteraciones permitidas. VCONST-Parámetro de viscosidad artificial. VA-Velocidad de Alfvén en cm/seg. BO-Campo magnético en Kgauss. XO-Distancia máxima en cm.

CODI. Esta subrutina sirve para escribir las condiciones iniciales para la presión, densidad, velocidad y campo magnético en los puntos de la malla espacial. En este programa, como condición inicial se da un perfil en forma de distribución de Fermi para cada variable, excepto para la velocidad.

La distribución de Fermi es de la forma:

$$f(x) = K / (1 + e^{(x-a)/a}),$$

donde "a" es la anchura tal como se muestra en la figura 4.2.

Se quiere que en  $x = 0$ ,  $f(x) = 1$ , por lo tanto  $f(x) = (1 + e^{-x/a}) / (1 + e^{-1/a})$ , y además que en  $x = 1/2$ ,  $f(x) = 1/2$ , lo cual se cumple cuando  $x = a \ln(e^{1/2a} - 2)$ . Pero esto tie

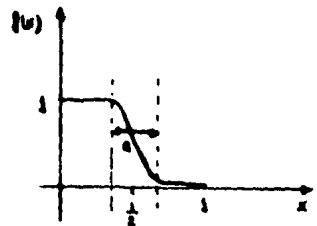
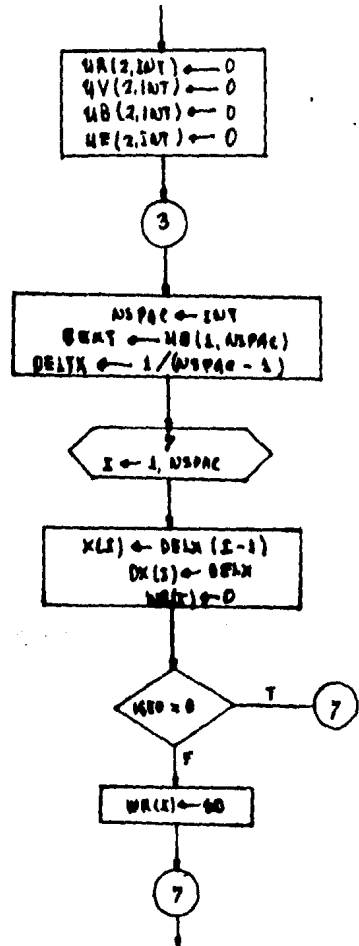
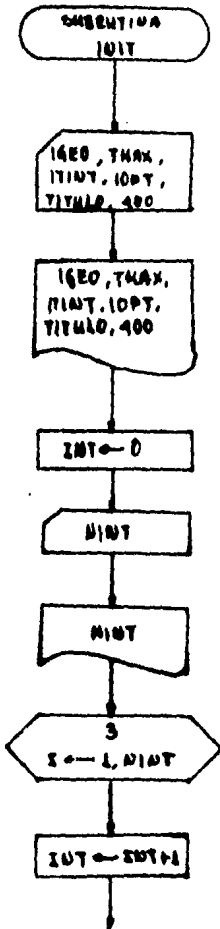


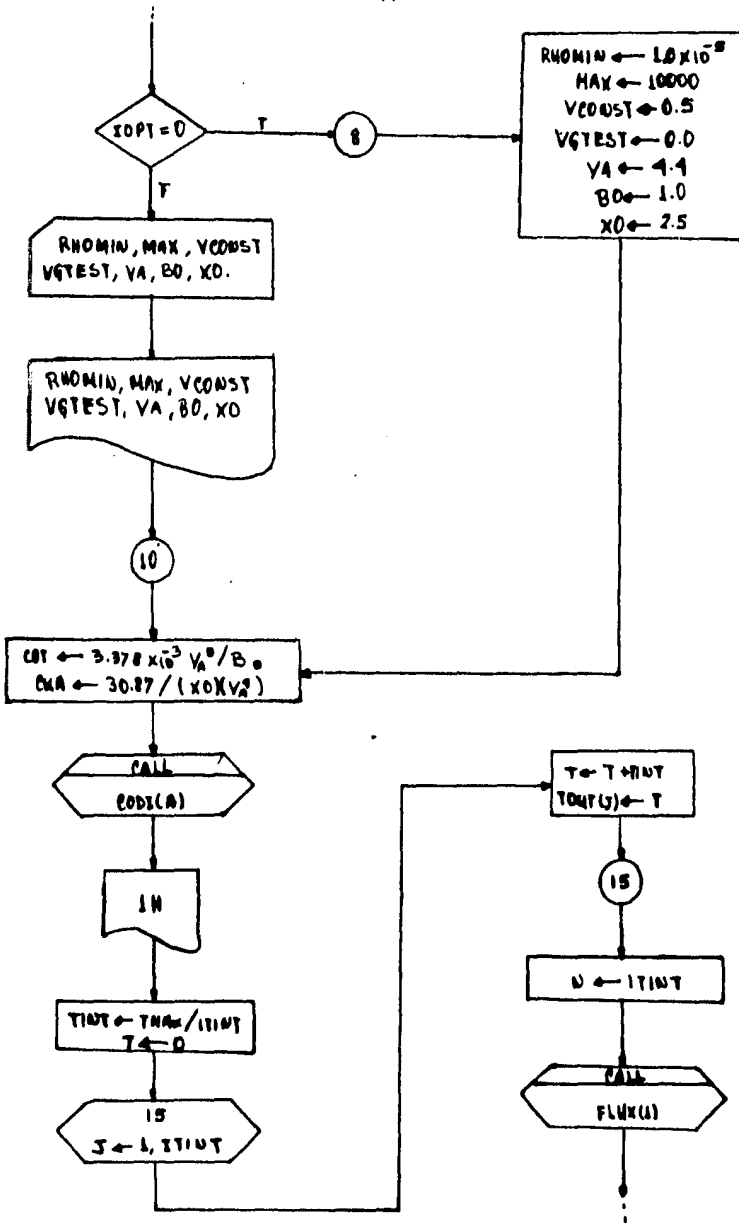
FIGURA 4.2.-Distribución de Fermi.

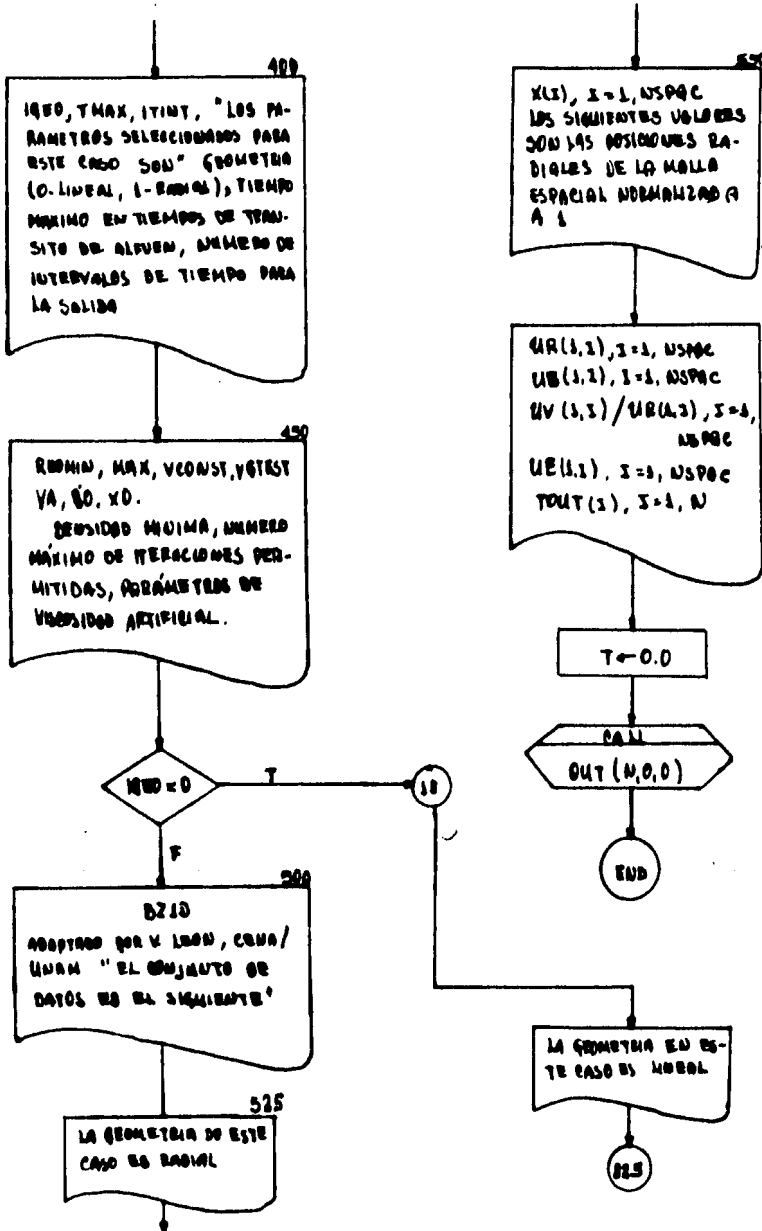
ne sentido si  $a < 0.4551$ . Consecuentemente la función de distribución que se utilizará es de la forma:

$$f(x) = (1 + e^{-x/a}) / (1 + e^{(N-x)/a}), \quad a < 0.4551. \quad (4.21)$$

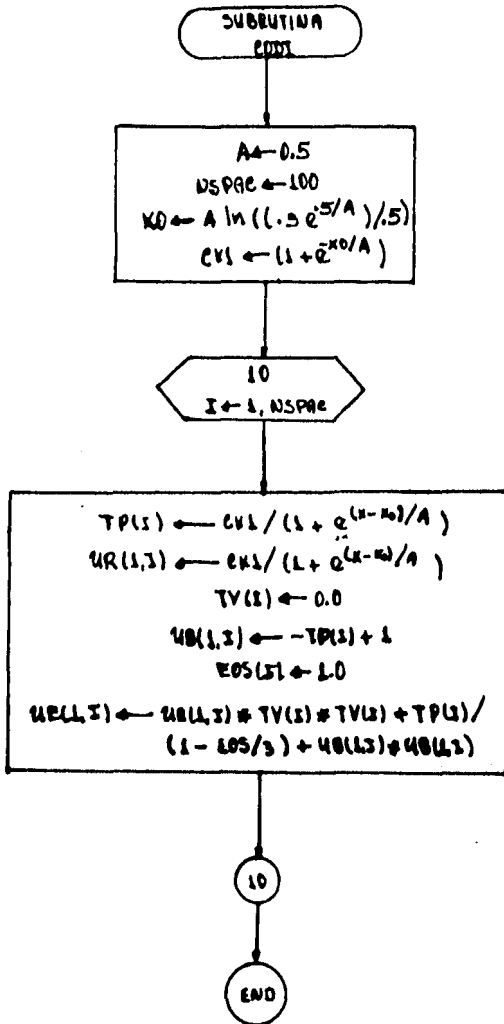
Los diagramas de flujo para las subrutinas INIT y CODI son:





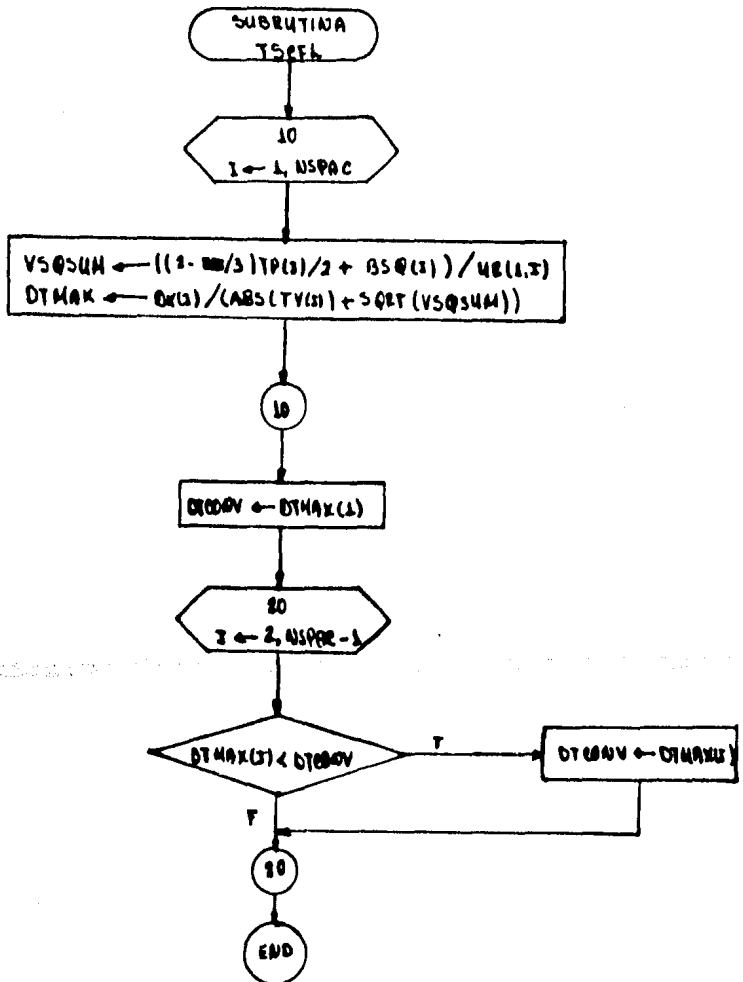


De acuerdo a la ec. (4.21), la subrutina CODI será:

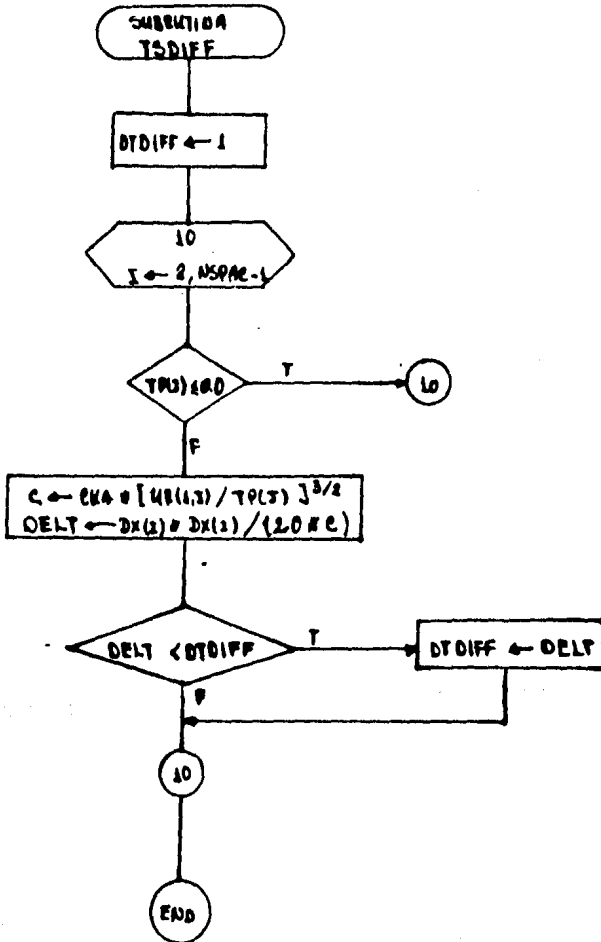


TSCFL. Calcula el tiempo de estabilidad permitido por el problema de convección.

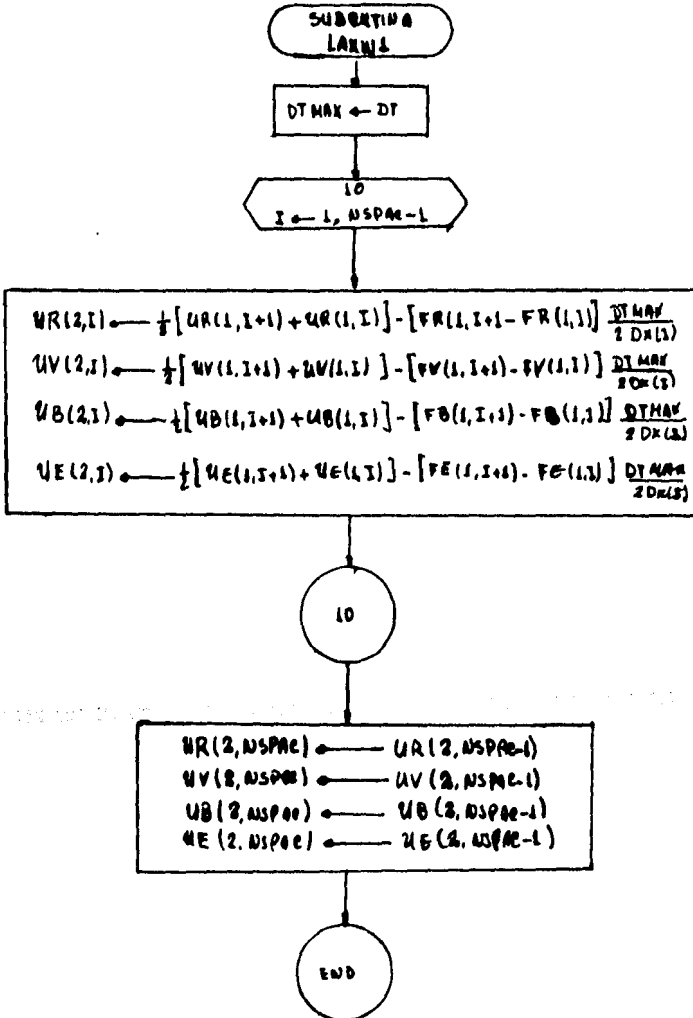
Se emplea la condición de COURANT-FRIEDRICHS-LEWY, pidiendo que el paso en el tiempo sea mas corto que el tiempo de la señal mas rápida sobre cualquier intervalo (ec. (3.62)). Aquí EOS = 1, TP-Presión, UR-Densidad de masa, BSQ-Campo magnético al cuadrado.



TSDIFF. Calcula el tiempo de estabilidad permitido por el problema de difusión. Recordando la ec. (4.15) se tendrá:



LAXW1. Ejecuta el primer paso de Lax-Wendroff de dos pasos para las ecuaciones diferenciales convectivas (hiperbólicas). Apartir de  $U_j^n$ ,  $F_j^n$  calcular  $F_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}$  y guardarlo en  $U(2,N)$ . De acuerdo a la ecs. (4.18) y (4.19) se tendrá:





### VISCOSIDAD ARTIFICIAL

Al integrar las ecuaciones MHD mediante diferencias finitas ocurren discontinuidades o choques debido a la ausencia de viscosidad, este problema es muy dificultoso dado que no hay longitudes de onda pequeñas en este caso comparadas con la longitud  $\Delta$  en la malla para poder ser descritas en las diferencias de la malla. Consecuentemente los choques en una solución por diferencias de las ecuaciones MHD aparecen induciendo grandes oscilaciones entre las variables adyacentes de los puntos en la malla. Tales efectos numéricos llevan relaciones de procesos físicos, por lo tanto pueden alterar la solución numérica sobre grandes longitudes de onda. Para que esto no ocurra Von Neumann y Richtmyer (1950) introdujeron un parámetro de viscosidad puramente artificial para transformar la energía de las oscilaciones en la malla en energía térmica del fluido. El término de viscosidad artificial debe tener el efecto de ensanchamiento por difusión de cualquier discontinuidad para extenderse sobre grandes longitudes de los pasos espaciales en la malla, pero esto se debe conseguir sin falsear la solución sobre grandes longitudes de onda en comparación a los intervalos de la malla.

De las ecs. (2.73), (2.74) y (2.76) al considerar el término de viscosidad se tendrá:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) &= 0, \\ \frac{\partial (\rho \vec{v})}{\partial t} &= -\nabla \cdot [\rho \vec{v} \vec{v} + (\rho + \frac{1}{\mu}) \vec{i} \vec{i} + \vec{\pi}], \\ \frac{\partial \rho e}{\partial t} &= -\rho \nabla \cdot \vec{v} - \nabla \cdot (\rho e \vec{v} + \vec{q} + \nu \nabla \cdot \vec{v}). \end{aligned}$$

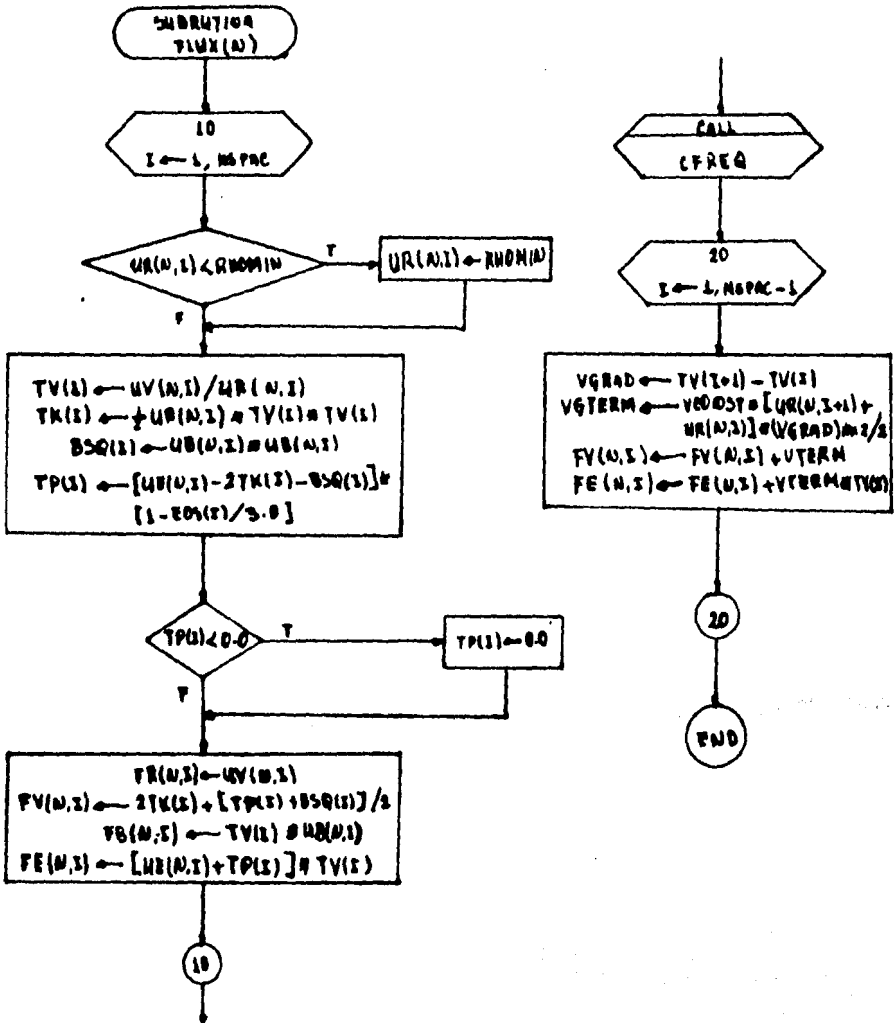
Para el caso de una dimensión, tomando la componente en la dirección  $x$ ,

$$\begin{aligned} \rho \frac{d \rho}{d t} &= -\frac{\partial}{\partial x} (\rho + \nu), \\ \rho \frac{d v}{d t} &= -\rho \frac{\partial v}{\partial x} - \pi \frac{\partial v}{\partial x}, \end{aligned}$$

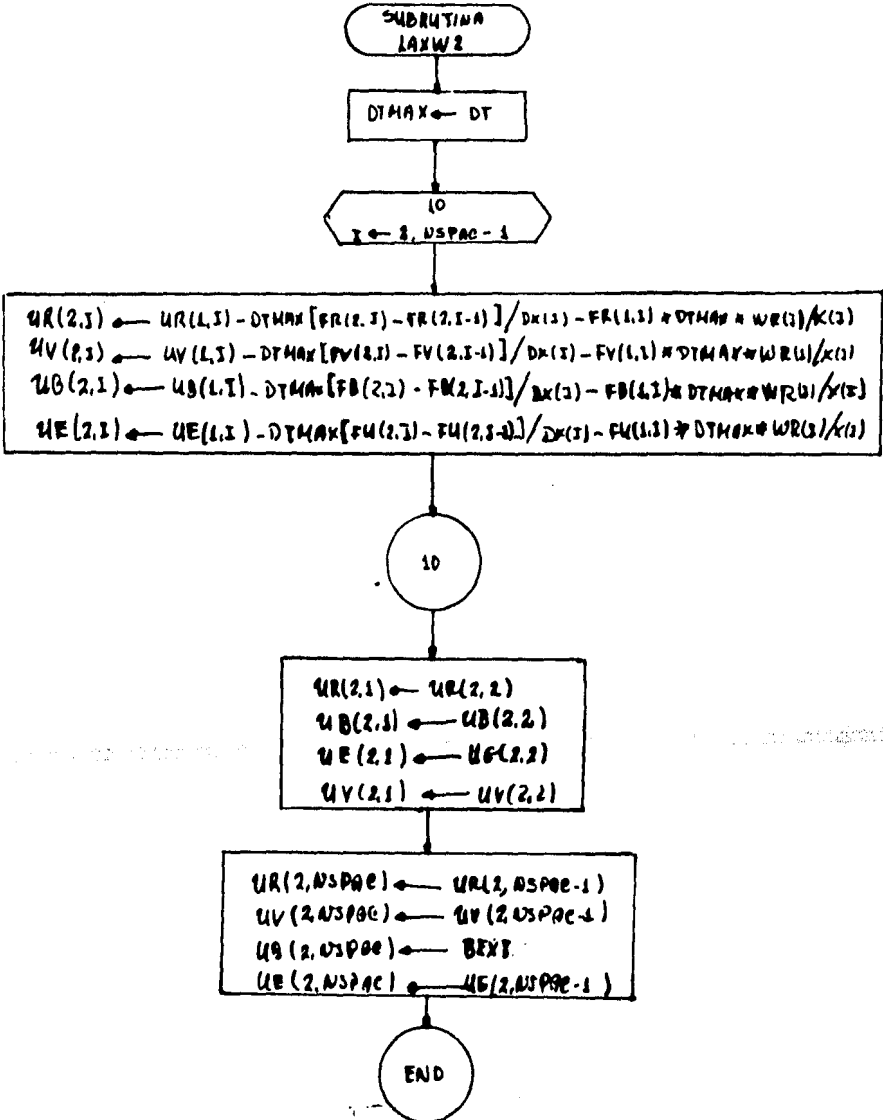
de donde la viscosidad artificial está dada por (Von Neumann y Richtmyer (1950)).

$$\pi = -c \rho \Delta^2 \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2, \quad 0.05 < c < 2.00. \quad (4.22)$$

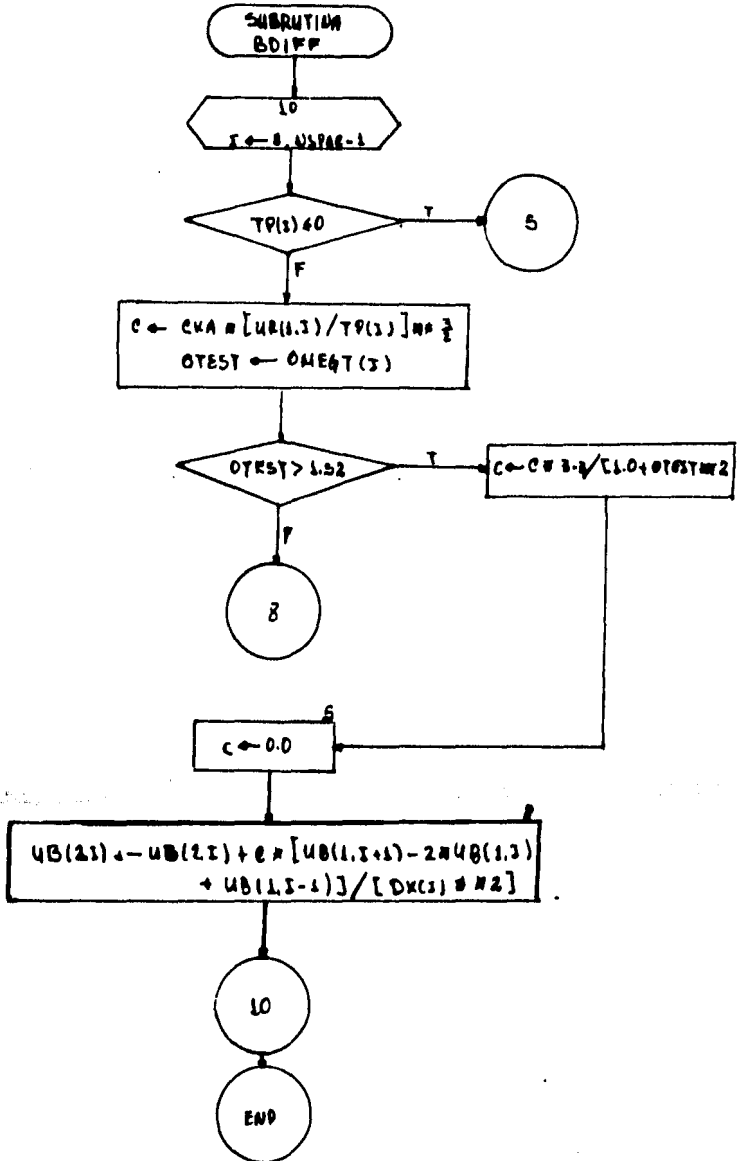
FLUX(N). Evalúa los términos de flujo a partir de los valores funcionales. Calcula  $F_{j,t}^{n+1}$  a partir de  $U_{j,t}^{n+1}$  y lo guarda en  $F(2,N)$ , ver -- ecs. (4.18) y (4.19). Además se incluye el término de viscosidad artificial, ec. (4.22).



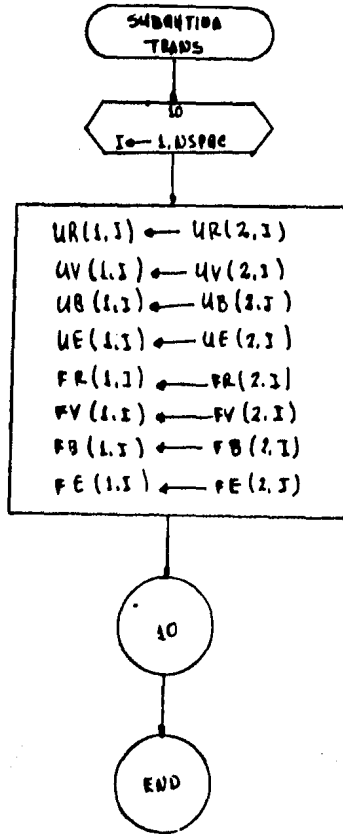
LAXW2. Ejecuta el siguiente paso de dos pasos de Lax-Wendroff para la solución de las ecuaciones diferenciales convectivas (hiperbólicas). Calcula  $U_j^{n+1}$  a partir de  $U_j^n$ ,  $F_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}$  y guardarlo en  $U(2,N)$ , ver ec. (4.19).



BDIFF. Calcula los valores de ecuaciones de diferencias para la difusión del campo magnético por un método explícito, de acuerdo a las ecs. (4.6) y (4.12).

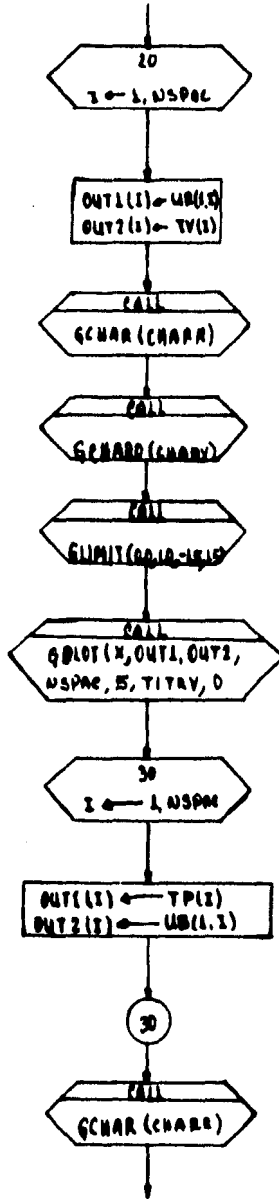
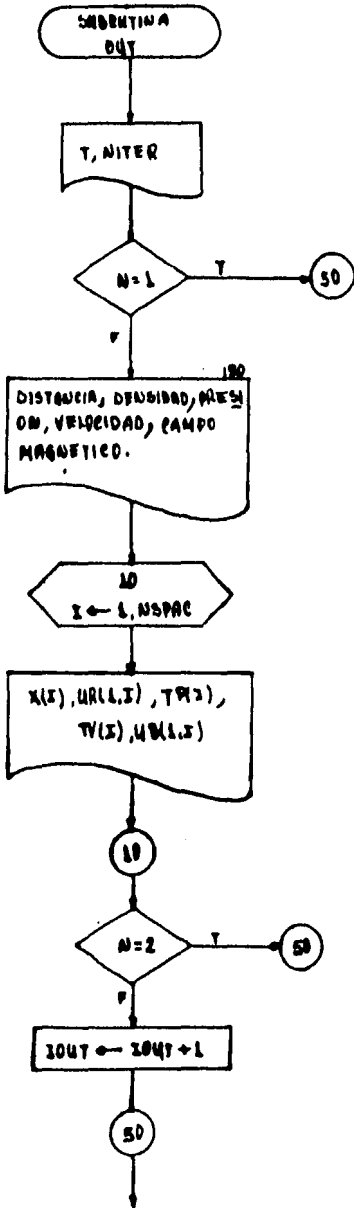


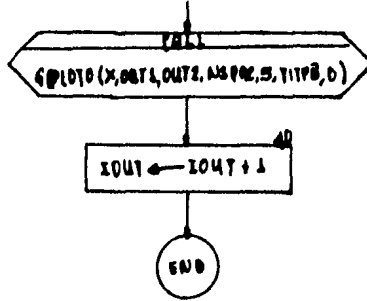
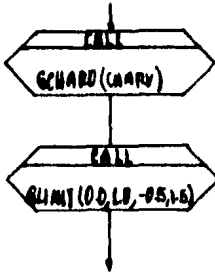
TRANS. Mueve los valores  $U(2,I)$  y  $F(2,I)$  a  $U(1,I)$  y  $F(1,I)$  respectivamente. De este modo cambia los datos de los registros a los primeros.



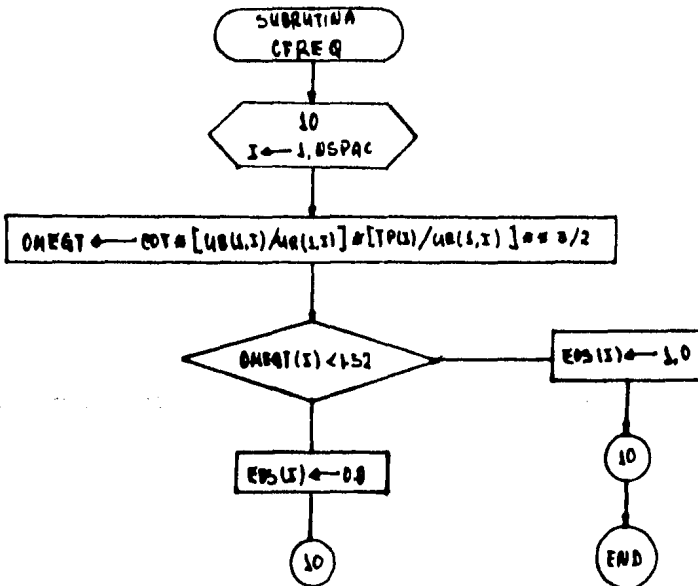
OUT. Maneja los resultados de salida. Los parámetros a usar son: N- Decide si se imprimen tablas o gráficas (cualquier número distinto de 1 y 2 imprime tablas, 1-gráficas, 2-tablas y gráficas); IOU- Un contador, es decir, cuenta el número de veces que se ha ejecutado la subrutina; NITER- Número de iteraciones que se llevan en ese momento

Además se establecen los límites de las gráficas, recordando que todos los resultados están normalizados ( $X_{min}$ ,  $X_{max}$ ,  $Y_{min}$ ,  $Y_{max}$ ).





CFREQ. Calcula la frecuencia de colisión (electron-ion) y la de ci clotrón de los electrones, el cociente se guarda en el arreglo OMEGT y la ecuación de estado a usar se indica mediante el valor del arreglo EOS. Según la ec. (4.13) se tendrá:



A continuación se muestra un listado del código "BZ1D" en lenguaje fortran. Recuerdese que para cambiar de geometría basta poner cero o uno en el parámetro IGEO, según sea el caso de interés.

```

BRESET FREE
FILE 5=VIC/MHD/IN DAT,UNIT=DISK,RECORD=14,BLOCKING=30
FILE 7=VIC/MHD/OUT)AT,UNIT=DISK,RECORD=14,BLOCKING=30

```

```

C EL PROGRAMA BZID ES UN CODIGO MHD PARA UN CAMPO MAGNETICO AXIAL
V COORDENADAS CILINDRICAS O CARTESIANAS EN UNA DIMENSION

```

```

C
DIMENSION TOUT(40)
DIMENSION JR(2,100),UV(2,100),UR(2,100),UE(2,100),FR(2,100),
KXV(2,100),FV(2,100),FE(2,100),K(100),DX(100),TV(100),
NKX(100),F(100),E(100),OMEG(100),S(100),MH(100),WR(100)
COMMON GR,UZ,UI,UR,FR,FV,FE,FX,DX,TV,TK,IF,EOS,OMEST,BSS,T,DT
COMMON NS,SAC,NID,IZN,PAZN,WH,WR,VEONST,UGTEST,COT,CKA
GO TO 1000
900 WR(100)=MAXIT
999 FORMAT(99)
X="VALIA AL PROXIMO PASO"
1000 CALL INIT(TOUT,TOUT,NOPT,MAXIT,IB,BEXT)
IB=0
IOUT=1
NITER=0
1 CALL TRCF(LDTC)
CALL TRCF(OTD)
BY=AMIN(LDTC,OTD)/2.0
Y=T*DT
C CONDICION A LA FRONTERA PARA B
SEIT=0
NITER=NITER+1
CALL LAMY
CALL FLUX(2)
CALL LAMY(3EXT)
CALL JDIFF
CALL FLUX(2)
CALL TRAFS
CALL OUT(0,IOUT,NITER)
IF (IOUT.GT.NOPT) GO TO 2000
IF (NITER.GT.MAXIT) GO TO 900
CALL CFRES
GO TO 1
2000 CALL EXIT
END

```

```

SUBROUTINA PARA TERMINAR EL PROGRAMA

```

```

SUBROUTINE DONE
CALL EXIT
RETURN
END

```

```

LA FUNCION *AMIN* DETERMINA EL VALOR MINIMO

```

```

FUNCION AMIN(A,B)
IF (A.LE.B) GO TO 10
AMIN=B
RETURN
10 AMIN=A
RETURN
END

```









```

KVF(2,100),FR(2,100),FOS(100),FEST(100),X(100),DX(100),TV(100),
N(100),UV(100),FOS(100),FEST(100),X(100),DX(100),TV(100),WH(100),WR(100),
COMMON OR,UV,US,FR,FW,FB,FE,X,DX,TV,TK,TP,EOS,ORFST,SSG,T,DT
COMMON NSPAC,N10,IN,PRIN,WH,WR,VECONST,VGTEST,COT,CKA
DTMAX=DT
DO 10 I=1,NSPAC-1
UR(2,I)=UR(1,I)+UR(1,I)-(FR(1,I+1)-FR(1,I))*DTMAX/
N(2,0.5)*N(1,I)
UV(2,I)=UV(1,I)+UV(1,I)-(FV(1,I+1)-FV(1,I))*DTMAX/
N(2,0.5)*N(1,I)
US(2,I)=US(1,I)+US(1,I)-(FB(1,I+1)-FB(1,I))*DTMAX/
X(2,I)=X(1,I)+X(1,I)-(FE(1,I+1)-FE(1,I))*DTMAX/
N(2,0.5)*N(1,I)
10 CONTINUE
UR(2,NSPAC)=UR(2,NSPAC-1)
UV(2,NSPAC)=UV(2,NSPAC-1)
US(2,NSPAC)=US(2,NSPAC-1)
X(2,NSPAC)=X(2,NSPAC-1)
RETURN
END

```

LA SUBROUTINA \*LAX2\* EJECUTA EL SEGUNDO PASO DEL METODO DE LAX-MEDROFF PARA LA SOLUCION DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES CONVECTIVAS (HIPERBOLICAS)

```

SUBROUTINE LAX2(NEXT)
DIMENSION UR(2,100),UV(2,100),US(2,100),FR(2,100),
N(100),UV(100),FOS(100),FEST(100),X(100),DX(100),TV(100),
N(100),UV(100),FOS(100),FEST(100),X(100),DX(100),TV(100),WH(100),WR(100),
COMMON OR,UV,US,FR,FW,FB,FE,X,DX,TV,TK,TP,EOS,ORFST,SSG,T,DT
COMMON NSPAC,N10,IN,PRIN,WH,WR,VECONST,VGTEST,COT,CKA
DTMAX=DT
DO 10 I=2,NSPAC-1
UR(2,I)=UR(1,I)+DTMAX*(FR(2,I)-FR(2,I-1))/DX(I)
X(2,I)=X(1,I)+DTMAX*(FV(2,I)-FV(2,I-1))/DX(I)
X(2,I)=X(1,I)+DTMAX*(FV(2,I)-FV(2,I-1))/DX(I)
X(2,I)=X(1,I)+DTMAX*(FB(2,I)-FB(2,I-1))/DX(I)
X(2,I)=X(1,I)+DTMAX*(FE(2,I)-FE(2,I-1))/DX(I)
N(2,I)=N(1,I)+DTMAX*(FR(2,I)-FR(2,I-1))/DX(I)
10 CONTINUE

```

LA SIGUIENTE CONDICION DE FRONTERA IZQUIERDA ES UN CERO DE FRONTERA DEL GRADIENTE

```

UR(2,1)=UR(2,2)
UV(2,1)=UV(2,2)
US(2,1)=US(2,2)
X(2,1)=X(2,2)

```

LA SIGUIENTE ES UNA CONDICION A LA FRONTERA DERECHA

```

UR(2,NSPAC)=UR(2,NSPAC-1)
UV(2,NSPAC)=UV(2,NSPAC-1)
US(2,NSPAC)=US(2,NSPAC-1)
X(2,NSPAC)=X(2,NSPAC-1)

```

LA SUBROUTINA \*FLUXO\* REALIZA LA EVALUACION DE LOS TERMINOS DE FLUJO A PARTIR DE LOS VALORES FUNCIONALES

```

SUBROUTINE FLUXO(N)
DIMENSION UR(2,100),UV(2,100),US(2,100),UR(2,100),FR(2,100),

```

```

NFV(2,100), F(2,100), FE(2,100), X(100), DXT(100), TV(100),
TK(100), TP(100), EOS(100), OMEG(100), BSG(100), WM(100),
COMMON OR UV, UR, PR, PV, FB, FE, V, DX, TV, TK, TP, EOS, OMEG, BSG, T, DT
COMMON NSPAC, RHO, IONZ, PAIR, MH, MR, VCONST, VGTEST, CO, CKA
DO 10 I=1, NSPAC

```

NO SE PERMITE EL VALOR DE RHO CAER POR ABAJO DEL MINIMO

```

TV(I)=UV(N,I)/UR(N,I)
TK(I)=D3=UR(I,1)+UR(I,2)+UR(I,3)+UR(I,4)+UR(I,5)+UR(I,6)+UR(I,7)+UR(I,8)+UR(I,9)+UR(I,10)+UR(I,11)+UR(I,12)+UR(I,13)+UR(I,14)+UR(I,15)+UR(I,16)+UR(I,17)+UR(I,18)+UR(I,19)+UR(I,20)+UR(I,21)+UR(I,22)+UR(I,23)+UR(I,24)+UR(I,25)+UR(I,26)+UR(I,27)+UR(I,28)+UR(I,29)+UR(I,30)+UR(I,31)+UR(I,32)+UR(I,33)+UR(I,34)+UR(I,35)+UR(I,36)+UR(I,37)+UR(I,38)+UR(I,39)+UR(I,40)+UR(I,41)+UR(I,42)+UR(I,43)+UR(I,44)+UR(I,45)+UR(I,46)+UR(I,47)+UR(I,48)+UR(I,49)+UR(I,50)+UR(I,51)+UR(I,52)+UR(I,53)+UR(I,54)+UR(I,55)+UR(I,56)+UR(I,57)+UR(I,58)+UR(I,59)+UR(I,60)+UR(I,61)+UR(I,62)+UR(I,63)+UR(I,64)+UR(I,65)+UR(I,66)+UR(I,67)+UR(I,68)+UR(I,69)+UR(I,70)+UR(I,71)+UR(I,72)+UR(I,73)+UR(I,74)+UR(I,75)+UR(I,76)+UR(I,77)+UR(I,78)+UR(I,79)+UR(I,80)+UR(I,81)+UR(I,82)+UR(I,83)+UR(I,84)+UR(I,85)+UR(I,86)+UR(I,87)+UR(I,88)+UR(I,89)+UR(I,90)+UR(I,91)+UR(I,92)+UR(I,93)+UR(I,94)+UR(I,95)+UR(I,96)+UR(I,97)+UR(I,98)+UR(I,99)+UR(I,100)
TP(I)=UB(2,I)-2.0*TK(I)-BSQ(I)*(1.0-EOS(I))/3.0)

```

NO SE PERMITE CAER A LA PRESION DEBAJO DE CERO Y SE FIJA ARBITRARIAMENTE A CERO

```

IF (TP(I) LT 0.0) TP(I)=0.0
5 TV(N,I)=UV(N,I)/UR(N,I)
TV(I)=D3=UR(I,1)+UR(I,2)+UR(I,3)+UR(I,4)+UR(I,5)+UR(I,6)+UR(I,7)+UR(I,8)+UR(I,9)+UR(I,10)+UR(I,11)+UR(I,12)+UR(I,13)+UR(I,14)+UR(I,15)+UR(I,16)+UR(I,17)+UR(I,18)+UR(I,19)+UR(I,20)+UR(I,21)+UR(I,22)+UR(I,23)+UR(I,24)+UR(I,25)+UR(I,26)+UR(I,27)+UR(I,28)+UR(I,29)+UR(I,30)+UR(I,31)+UR(I,32)+UR(I,33)+UR(I,34)+UR(I,35)+UR(I,36)+UR(I,37)+UR(I,38)+UR(I,39)+UR(I,40)+UR(I,41)+UR(I,42)+UR(I,43)+UR(I,44)+UR(I,45)+UR(I,46)+UR(I,47)+UR(I,48)+UR(I,49)+UR(I,50)+UR(I,51)+UR(I,52)+UR(I,53)+UR(I,54)+UR(I,55)+UR(I,56)+UR(I,57)+UR(I,58)+UR(I,59)+UR(I,60)+UR(I,61)+UR(I,62)+UR(I,63)+UR(I,64)+UR(I,65)+UR(I,66)+UR(I,67)+UR(I,68)+UR(I,69)+UR(I,70)+UR(I,71)+UR(I,72)+UR(I,73)+UR(I,74)+UR(I,75)+UR(I,76)+UR(I,77)+UR(I,78)+UR(I,79)+UR(I,80)+UR(I,81)+UR(I,82)+UR(I,83)+UR(I,84)+UR(I,85)+UR(I,86)+UR(I,87)+UR(I,88)+UR(I,89)+UR(I,90)+UR(I,91)+UR(I,92)+UR(I,93)+UR(I,94)+UR(I,95)+UR(I,96)+UR(I,97)+UR(I,98)+UR(I,99)+UR(I,100)
TP(I)=UB(2,I)-2.0*TK(I)-BSQ(I)*(1.0-EOS(I))/3.0)
10 CONTINUE
CALL CFREQ

```

TERMINOS DE VISCOSIDAD ARTIFICIAL; SE USAN PARA CASOS DE COMPRESION PARA REDUCIR SOLAMENTE EFECTIVAS PARA LONGITUDES DE ONDA CORTA, CORRECCIONES AFLUJO DE MOMENTO Y DE ENERGIA

EL MULTIPLICADOR PARA EL TERMINO DE VISCOSIDAD ES 'VCONST'  
 EL TERMINO DE VISCOSIDAD SLO ES APLICADO A TERMINOS DE COMPRESION EN ESE CASO PARA EL GRADIENTE DE VELOCIDAD MAYOR QUE 'VGTEST'

```

DO 20 I=1, NSPAC-1
VGRAB=(TV(I,1)+TV(I,2)+TV(I,3)+TV(I,4)+TV(I,5)+TV(I,6)+TV(I,7)+TV(I,8)+TV(I,9)+TV(I,10)+TV(I,11)+TV(I,12)+TV(I,13)+TV(I,14)+TV(I,15)+TV(I,16)+TV(I,17)+TV(I,18)+TV(I,19)+TV(I,20)+TV(I,21)+TV(I,22)+TV(I,23)+TV(I,24)+TV(I,25)+TV(I,26)+TV(I,27)+TV(I,28)+TV(I,29)+TV(I,30)+TV(I,31)+TV(I,32)+TV(I,33)+TV(I,34)+TV(I,35)+TV(I,36)+TV(I,37)+TV(I,38)+TV(I,39)+TV(I,40)+TV(I,41)+TV(I,42)+TV(I,43)+TV(I,44)+TV(I,45)+TV(I,46)+TV(I,47)+TV(I,48)+TV(I,49)+TV(I,50)+TV(I,51)+TV(I,52)+TV(I,53)+TV(I,54)+TV(I,55)+TV(I,56)+TV(I,57)+TV(I,58)+TV(I,59)+TV(I,60)+TV(I,61)+TV(I,62)+TV(I,63)+TV(I,64)+TV(I,65)+TV(I,66)+TV(I,67)+TV(I,68)+TV(I,69)+TV(I,70)+TV(I,71)+TV(I,72)+TV(I,73)+TV(I,74)+TV(I,75)+TV(I,76)+TV(I,77)+TV(I,78)+TV(I,79)+TV(I,80)+TV(I,81)+TV(I,82)+TV(I,83)+TV(I,84)+TV(I,85)+TV(I,86)+TV(I,87)+TV(I,88)+TV(I,89)+TV(I,90)+TV(I,91)+TV(I,92)+TV(I,93)+TV(I,94)+TV(I,95)+TV(I,96)+TV(I,97)+TV(I,98)+TV(I,99)+TV(I,100)
VTERM=VCONST*(UR(I,1)+UR(I,2)+UR(I,3)+UR(I,4)+UR(I,5)+UR(I,6)+UR(I,7)+UR(I,8)+UR(I,9)+UR(I,10)+UR(I,11)+UR(I,12)+UR(I,13)+UR(I,14)+UR(I,15)+UR(I,16)+UR(I,17)+UR(I,18)+UR(I,19)+UR(I,20)+UR(I,21)+UR(I,22)+UR(I,23)+UR(I,24)+UR(I,25)+UR(I,26)+UR(I,27)+UR(I,28)+UR(I,29)+UR(I,30)+UR(I,31)+UR(I,32)+UR(I,33)+UR(I,34)+UR(I,35)+UR(I,36)+UR(I,37)+UR(I,38)+UR(I,39)+UR(I,40)+UR(I,41)+UR(I,42)+UR(I,43)+UR(I,44)+UR(I,45)+UR(I,46)+UR(I,47)+UR(I,48)+UR(I,49)+UR(I,50)+UR(I,51)+UR(I,52)+UR(I,53)+UR(I,54)+UR(I,55)+UR(I,56)+UR(I,57)+UR(I,58)+UR(I,59)+UR(I,60)+UR(I,61)+UR(I,62)+UR(I,63)+UR(I,64)+UR(I,65)+UR(I,66)+UR(I,67)+UR(I,68)+UR(I,69)+UR(I,70)+UR(I,71)+UR(I,72)+UR(I,73)+UR(I,74)+UR(I,75)+UR(I,76)+UR(I,77)+UR(I,78)+UR(I,79)+UR(I,80)+UR(I,81)+UR(I,82)+UR(I,83)+UR(I,84)+UR(I,85)+UR(I,86)+UR(I,87)+UR(I,88)+UR(I,89)+UR(I,90)+UR(I,91)+UR(I,92)+UR(I,93)+UR(I,94)+UR(I,95)+UR(I,96)+UR(I,97)+UR(I,98)+UR(I,99)+UR(I,100)
V(N,I)=V(V,1)+VTERM
FE(N,I)=FE(I,1)+VTERM*TV(I)
20 CONTINUE
RETURN
END

```

LA SUBROUTINA \*DIEFF\* CALCULA LOS VALORES DE ECUACIONES DE DIFERENCIAS PARA LA DIFUSION DEL CAMPO MAGNETICO POR UN METODO EXPLICITO

```

SUBROUTINE DIEFF
DIMENSION U(2,100), UV(2,100), UR(2,100), V(2,100), F(2,100),
H(2,100), TP(100), EOS(100), OMEG(100), BSG(100), WM(100), MR(100),
COMMON OR UV, UR, PR, PV, FB, FE, V, DX, TV, TK, TP, EOS, OMEG, BSG, T, DT
COMMON NSPAC, RHO, IONZ, PAIR, MH, MR, VCONST, VGTEST, CO, CKA
DO 10 I=1, NSPAC-1
IF (TP(I) LE 0.0) GO TO 5
C=CRA*(UR(I,1)+UR(I,2)+UR(I,3)+UR(I,4)+UR(I,5)+UR(I,6)+UR(I,7)+UR(I,8)+UR(I,9)+UR(I,10)+UR(I,11)+UR(I,12)+UR(I,13)+UR(I,14)+UR(I,15)+UR(I,16)+UR(I,17)+UR(I,18)+UR(I,19)+UR(I,20)+UR(I,21)+UR(I,22)+UR(I,23)+UR(I,24)+UR(I,25)+UR(I,26)+UR(I,27)+UR(I,28)+UR(I,29)+UR(I,30)+UR(I,31)+UR(I,32)+UR(I,33)+UR(I,34)+UR(I,35)+UR(I,36)+UR(I,37)+UR(I,38)+UR(I,39)+UR(I,40)+UR(I,41)+UR(I,42)+UR(I,43)+UR(I,44)+UR(I,45)+UR(I,46)+UR(I,47)+UR(I,48)+UR(I,49)+UR(I,50)+UR(I,51)+UR(I,52)+UR(I,53)+UR(I,54)+UR(I,55)+UR(I,56)+UR(I,57)+UR(I,58)+UR(I,59)+UR(I,60)+UR(I,61)+UR(I,62)+UR(I,63)+UR(I,64)+UR(I,65)+UR(I,66)+UR(I,67)+UR(I,68)+UR(I,69)+UR(I,70)+UR(I,71)+UR(I,72)+UR(I,73)+UR(I,74)+UR(I,75)+UR(I,76)+UR(I,77)+UR(I,78)+UR(I,79)+UR(I,80)+UR(I,81)+UR(I,82)+UR(I,83)+UR(I,84)+UR(I,85)+UR(I,86)+UR(I,87)+UR(I,88)+UR(I,89)+UR(I,90)+UR(I,91)+UR(I,92)+UR(I,93)+UR(I,94)+UR(I,95)+UR(I,96)+UR(I,97)+UR(I,98)+UR(I,99)+UR(I,100)
OTEST=OMEG(I)
VGTEST=DT*(1.52) C=C*3.3/(1.0+OTEST*OTEST)
GO TO 3
5 C=0
UR(2,I)=UB(2,2)+C*(UB(1,I+1)-2.0*UB(1,I)+UB(1,I-1))/(DX(I)+DX(I+1))
10 CONTINUE
RETURN
END

```

LA SUBROUTINA \*TRANS\* HUEVE LOS VALORES U(2) Y F(2) A U(1) Y F(1)

```

C RESPECTIVAMENTE, DE ESTE MODO CAMBIA LOS DATOS DE LOS SEGUNDOS
RESUBROUTINE CREFR
DIMENSION UR(2,100), UV(2,100), UN(2,100), UL(2,100), FR(2,100),
X(100), Y(100), F(100), F2(2,100), X1(100), BK(100), TV(100),
XK(100), YK(100), EOG(100), OMEG(100), ESB(100), UN(100), WR(100)
COMMON OR UV, IS, DC, FR, FV, F2, FE, X, X1, TV, TK, TP, EOG, OMEG, ESB, Y, DT
COMMON NSPAC, R104IN, PRIN, WH, WR, VCONST, OGTEST, COT, CKA
DO 10 I=1,100
  UR(1,I)=UR(1,I)
  UV(1,I)=UV(1,I)
  UN(1,I)=UN(1,I)
  UL(1,I)=UL(1,I)
  FR(1,I)=FR(1,I)
  X(I)=X(I)
  Y(I)=Y(I)
  F(I)=F(I)
  F2(1,I)=F2(1,I)
  X1(I)=X1(I)
  BK(I)=BK(I)
  TV(I)=TV(I)
  XK(I)=XK(I)
  YK(I)=YK(I)
  EOG(I)=EOG(I)
  OMEG(I)=OMEG(I)
  ESB(I)=ESB(I)
  UN(I)=UN(I)
  WR(I)=WR(I)
10 CONTINUE
RETURN
END

```

LA SUBROUTINA \*CFREQ\* CALCULA LA FRECUENCIA DE COLISION (ELEC-ION) Y LA FRECUENCIA DE CI-CLOTION DE LOS ELECTRONES, EL COCIENTE SE GUARDA EN EL ARRREGLO OMEG Y LA ECUACION DE ESTADO A USAR SE INDICA MEDIANTE EL VALOR DEL ARRREGLO EOG

```

SUBROUTINE CFREQ
DIMENSION UR(2,100), UV(2,100), UN(2,100), UL(2,100), FR(2,100),
X(100), Y(100), F(100), F2(2,100), X1(100), BK(100), TV(100),
XK(100), YK(100), EOG(100), OMEG(100), ESB(100), UN(100), WR(100)
COMMON OR UV, IS, DC, FR, FV, F2, FE, X, X1, TV, TK, TP, EOG, OMEG, ESB, Y, DT
COMMON NSPAC, R104IN, PRIN, WH, WR, VCONST, OGTEST, COT, CKA
EOG = 1.0 CORRESPONDE A GAMA = 5/3, EOG = 0.0 CORRESPONDE
A GAMA = 2.0 POR LO TANTO GAMA = 2.0 - EOG
DO 10 I=1,100
  OMEG(I)=F(I)*UR(1,I)/UR(1,I)+(TP(I)/UR(1,I))*0.5
  IF OMEG(I).LT.0.5 GO TO 5
  OMEG(I)=0
5 CONTINUE
RETURN
END

```

LA SUBROUTINA \*STCPL\* CALCULA EL TIEMPO DE ESTABILIDAD POR EL PROBLEMA DE CONVECCION SE EMPLEA LA CONDICION COURANT-FRIEDRICH-LEVY PIDIENDO QUE EL PASO EN EL TIEMPO SEA MAS CORTO QUE EL TIEMPO DE LA SENAL DE TRANSITO MAS RAPIDO SOBRE CUALQUIER INTERVALO

```

SUBROUTINE STCPL(COTCONV)
DIMENSION UR(2,100), UV(2,100), UN(2,100), UL(2,100), FR(2,100),
X(100), Y(100), F(100), F2(2,100), X1(100), BK(100), TV(100),
XK(100), YK(100), EOG(100), OMEG(100), ESB(100), UN(100), WR(100)
COMMON OR UV, IS, DC, FR, FV, F2, FE, X, X1, TV, TK, TP, EOG, OMEG, ESB, Y, DT
COMMON NSPAC, R104IN, PRIN, WH, WR, VCONST, OGTEST, COT, CKA
DO 10 I=1,100
  VSQSUM=(2.0+OMEG(I)/3.0)*TP(I)/2.0+ESB(I)/UR(1,I)
  DYNM=(1.0-BK(I))/(ABS(TV(I))+SQRT(VSQSUM))
  GO TO 10
10 CONTINUE
RETURN
END

```







```

9--- INITIALIZE BOX (& BOXA) FOR A 2 D ARRAY OF PLOT (& OVER LAY).
DO 10 I=1,42
BOXA(I,1)=HEXX(1)
10 BOX(I,1)=0
C--- INITIALIZE 2 D ARRAY FOR STATISTICS + OVER LAY STATISTICS.
DO 15 I=1,10
DO 15 J=1,10
ST(I,J)=0
15 STA(I,J)=0
NUM=(NMAX-NMIN)/50
DINY=49/(NMAX-NMIN)
DIRX=99/(NMAX-NMIN)
C--- CREATE EACH BOX POINT FROM CORRESPONDING DATA POINTS; ADD
C STATISTICS TO ST ARRAY; AND FIND THE POSITION WITH RESPECT
C TO THE LIMITS. IGNORE ALL POINTS OUTSIDE THE LIMITS.
DO 20 I=1,NINY
N=DINY*(I-1)+1
INTX=INT(X)/DIX+1
Y=INPUTY(I)-DINY*DINY*MINY
INYY=49-INT(Y)
K=2
L=2
IF ((INTX-GE-100) K=3
IF ((INTX-LE-2) L=1
IF ((INTX-LE-0) K=1
IF ((INTX-GE-10) L=3
IF ((INTX-LE-10) K=L+1
IF ((K-NE-2) OR (L-NE-2)) GO TO 20
BOX(I,INTX)=BOX(INTX,INTY)+1
INTX=INTX/10+1
INTY=INTY/5+1
ST(INTX,INTY)=ST(INTX,INTY)+1
STATAL=TOTAL+1
20 CONTINUE
C--- REPEAT FOR OVER LAY PLOT
C--- FIND BOXA
IF (NOT GOVER) GO TO 40
DO 30 I=1,NINY
N=DINY*(I-1)+1
INTX=INT(X)/DIX+1
INTY=INT(Y)/DINY+1
IF ((INTX-GE-10) OR (INTX-LE-1)) GO TO 30
IF ((INTY-GE-10) OR (INTY-LE-1)) GO TO 30
BOXA(I,INTX)=BOXA(INTX,INTY)+1
30 CONTINUE
C--- DRAW THE GRAPH
40-- WRITE(6,303) NINY
40-- GO TO 100
C--- SCATTER PLOT
200-- N=20
NUN=NAX-NOM=(I-1)
IF ((TEMP=0) OR (I-NE-1)) WRITE(6,320) NUM
LETTER=LETX
IF ((TEMP=0) OR (I-NE-1)) LETTER=LETY
DO 210 J=1,99
IF (NUN=LETX) GO TO 210
IF (NUN=LETY) GO TO 210
LINE(J)=HEXX(TEMP)
210 CONTINUE
210 WRITE(6,304) (LETTER (LINE(J),J=1,99), LETTER)
220 IF (NOVER) WRITE(6,319) (BOXA(J,I),J=1,99)

```

```

GO TO 500
DO 100 J=1,40
NUM=MAX(1,NO.4-(J-1))
IF (TEMP2=9.0.AND.I.NE.1) WRITE(6,320) NUM
IF (TEMP2=9.0.AND.I.EQ.0.AND.I.NE.1) WRITE(6,325)
TEMP=MOD(TEMP,5)
IF (TEMP=0) LETTER=LETX
DO 100 J=1,40
LINE(J)=HEX(J)
WRITE(6,300) J,LINE(J),J=1,99,LETTER)
IF (TEMP=9.0) WRITE(6,319) (HORA(J),J=1,99)
300 NUM1=MAX(1,NO.4-(J-1))
NUM2=MAX(1,NO.4-(J-1))
NUM3=MAX(1,NO.4-(J-1))
NUM4=MAX(1,NO.4-(J-1))
NUM5=MAX(1,NO.4-(J-1))
WRITE(6,305) NUM1,NUM2,NUM3,NUM4,MAXX
IF (TEMP=9.0) WRITE(6,309) FACT5
NUM1=(MAX1-NO.4-(J-1))
NUM2=(MAX2-NO.4-(J-1))
WRITE(6,307) NUM1,NUM2
C... WRITE(6,307)
500 NCHARS=GT
IF (NCHARS=GT) WRITE(6,307) ((HEXX(I),I=1,N),(TITLE(I),I=1,
SCHARS))
C... STAT OR GSTATA
IF (STAT) GO TO 500
WRITE(6,308)
NSTAT
IF (NSTAT) GO TO 520
WRITE(6,308)
NSTAT
((L,L=1,10),(M,M=1,10))
510 ((I,(ST(J,I),J=1,10),(STACK,K,I),K=1,10))
GO TO 500
520 ((L,L=1,10)
530 ((I,(ST(J,I),J=1,10))
500 POSITIONS WITH RESPECT TO THE LIMITS.
WRITE(6,308)
((TYT(I,1),I=1,3)
500 ((TYT(I,2),I=1,3)
500 ((TYT(I,3),I=1,3)
500
C... SET INITIAL VALUES
STAT=.FALSE.
GOVERN=.FALSE.
CHARA=.LETT.
CONS=.TRUE.
CRAN=.CRYS.
DO 600 J=1,3
TTT(J)=0
NCHARS=0
AUTOLM=.FALSE.
RETURN
C... ENTRY GTITLE(GCHAR,GTIT)
IF (GCHAR.LE.J.OR.GNCHAR.GT.120) GO TO 610

```

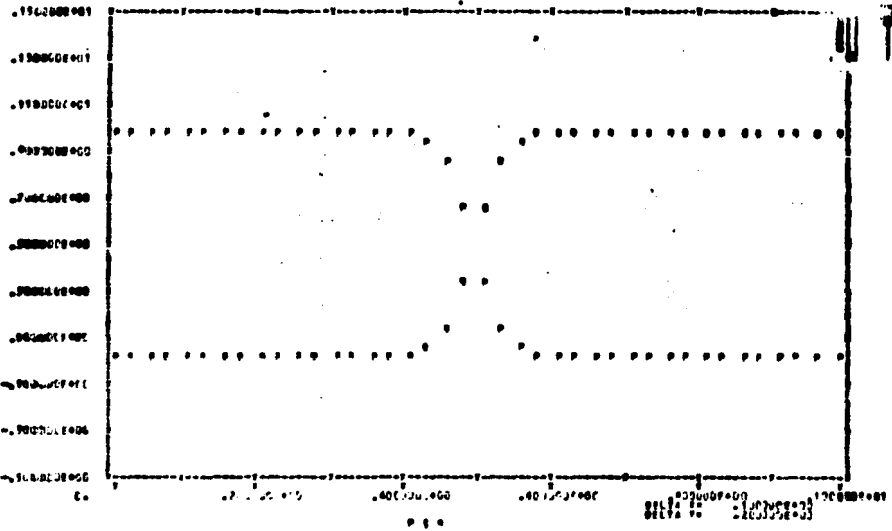
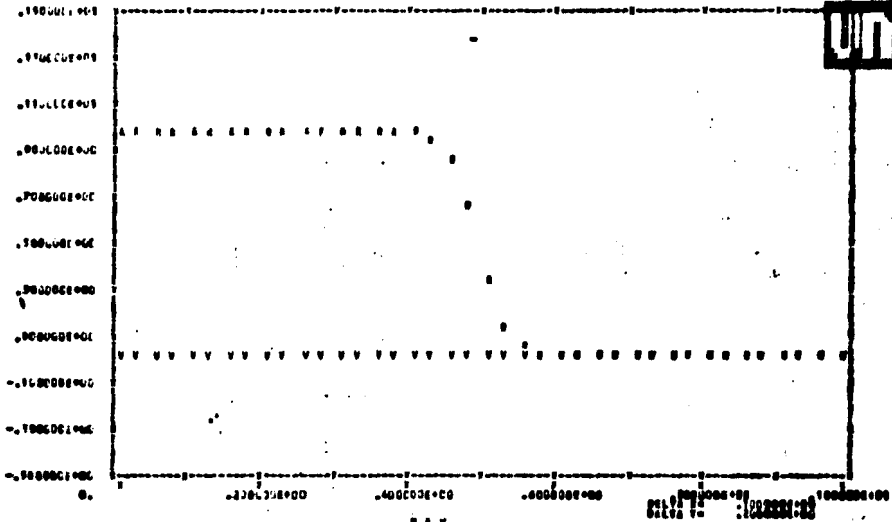








UNAM



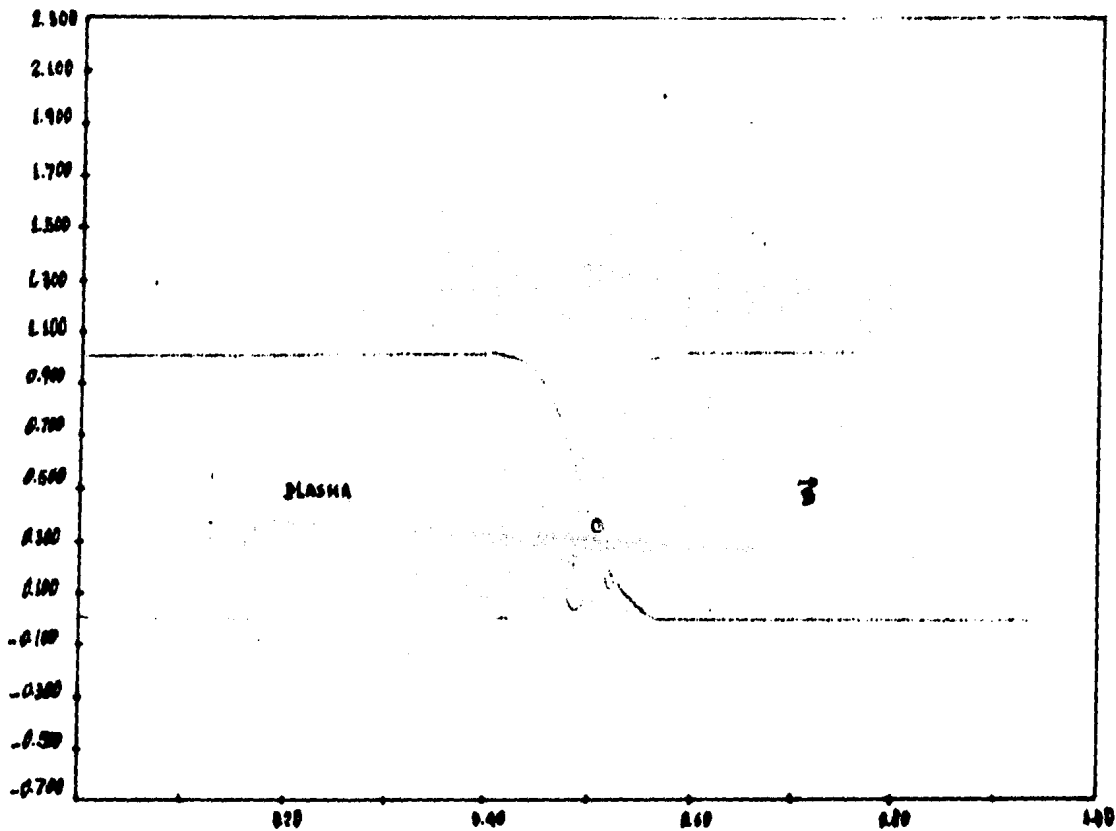


FIGURA 4.4.- Iteracion de orden cinco en  $t = 0$ .



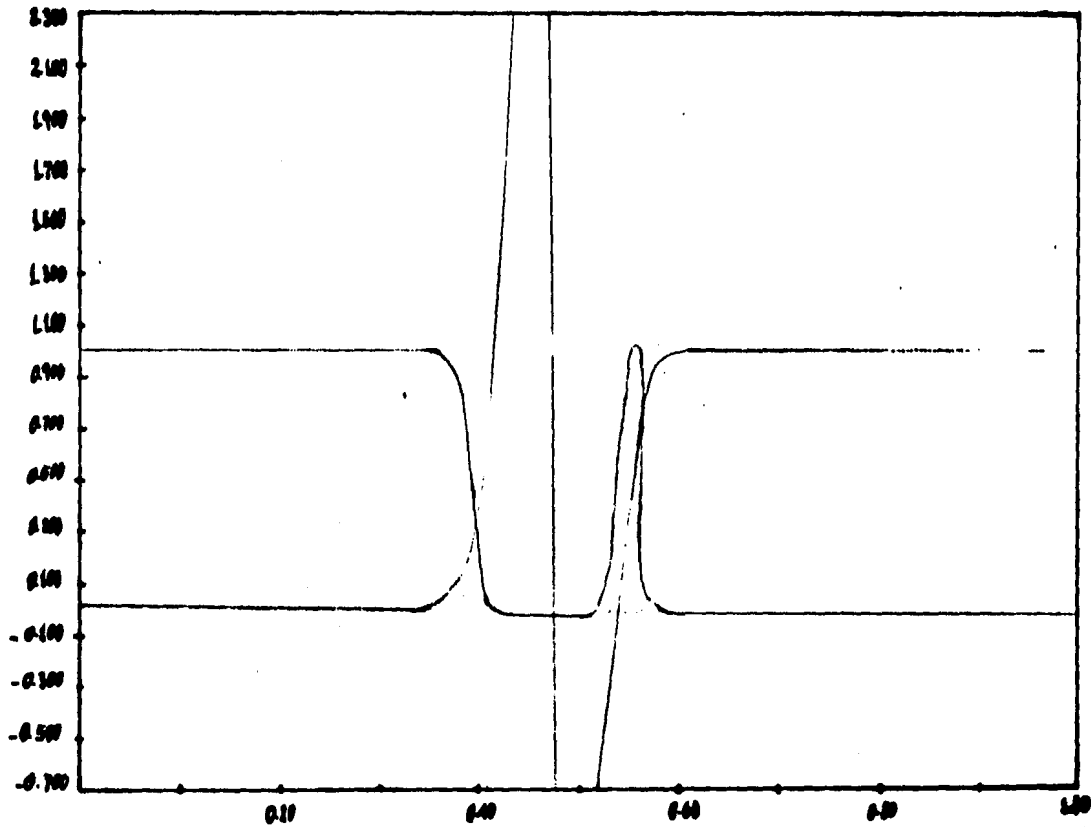


FIGURA 45.- Evolución iterativa en  $t = 0.970210^2$

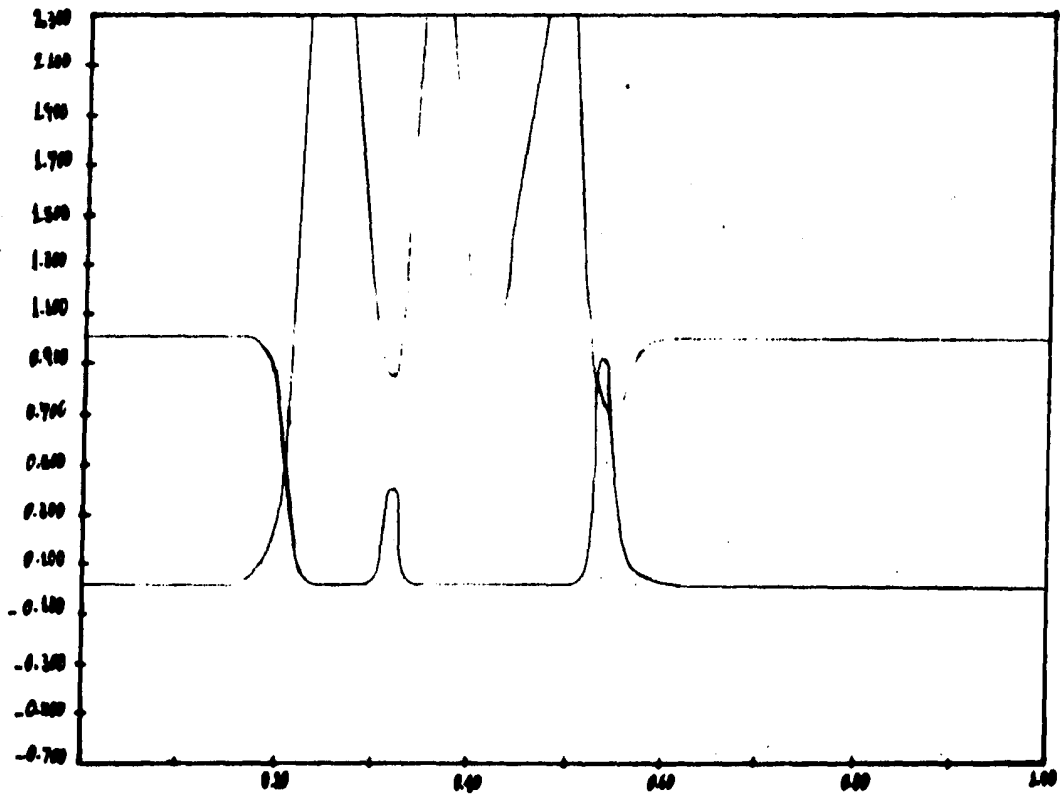


FIGURE 4.6.- Torsion strength on  $t = .372 \text{ in}^3$

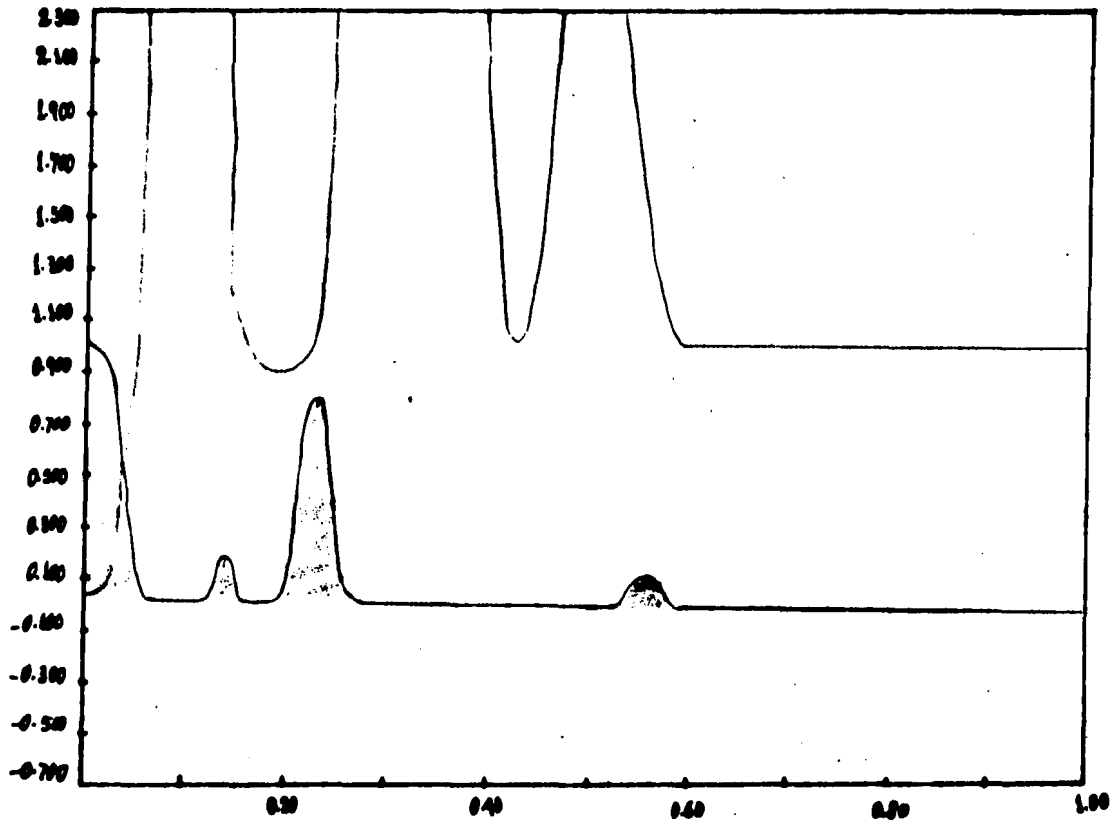


FIGURA 47.- Gráfica tomada en 12-953500

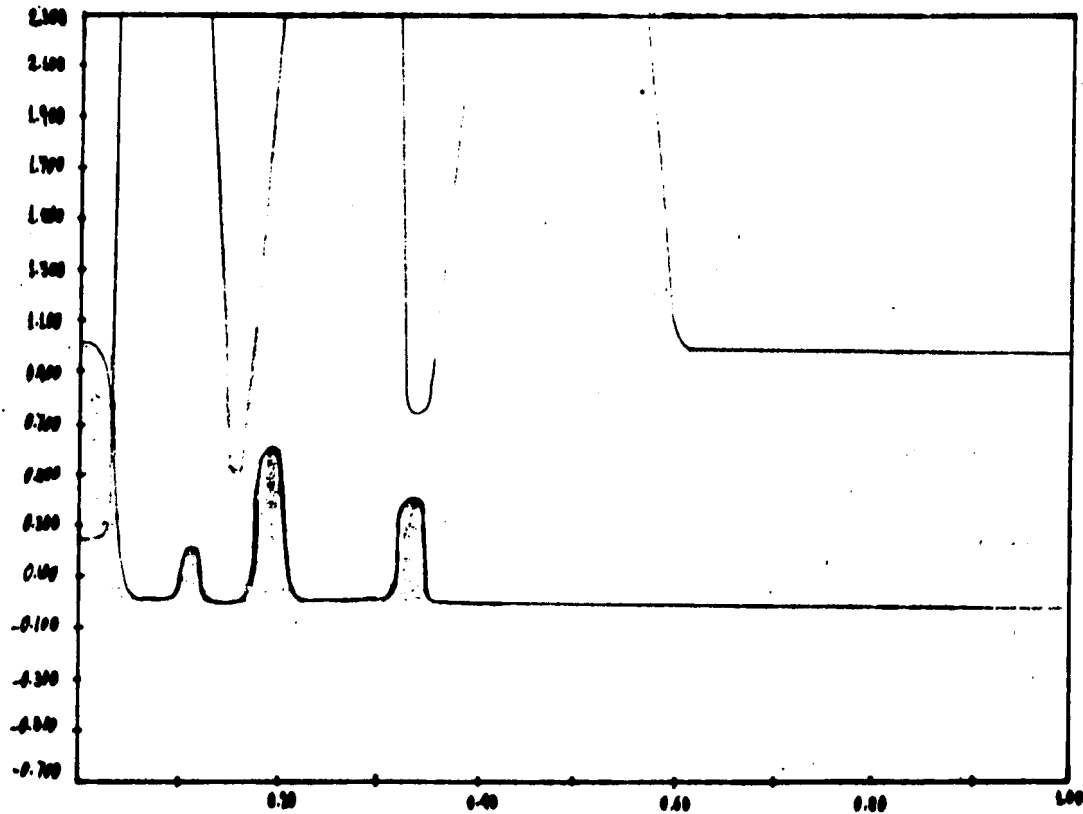


FIGURA 4.3.- Decima iteración en  $(-0.0070 \times 10^6)$

## CAPITULO V

### CONCLUSIONES Y COMENTARIOS

Se ha revisado la derivación de las ecuaciones MHD exponiendo las aproximaciones que se realizan en este modelo. Se mostró como se pueden escribir en forma conservativa, y para el problema unidimensional se les ha discretizado de acuerdo con el método de Lax-Wendroff, con objeto de integrarlas numéricamente.

En base a dicha discretización, se ha analizado, modificado en algunos aspectos y documentado en detalle un código escrito por el Dr. David Woodall.

Un ejemplo que se ha mostrado es el de difusión de un campo magnético que inicialmente tiene una distribución de Fermi tal como se muestra en la figura 4.4. En la iteración de orden cero se muestran gráficamente las ecuaciones iniciales para la presión y el campo magnético. En la primera iteración, figura 4.5, se observa que el campo se empieza a difundir en forma de pulsos en el plasma, haciendo disminuir la presión en donde el pulso es mas intenso y provocando un desplazamiento del plasma. En la figura 4.6, se muestra la tercera iteración y se observa que el campo continua difundiendo sobre el plasma en forma de pulsos mas intensos que los anteriores mientras que la presión disminuye a cero en donde se ha difundido el campo. En las figuras 4.7 y 4.8 se representan la quinta y décima iteraciones respectivamente y se observa que el campo casi se ha difundido mientras que la presión ha caído a cero. A partir de la décima y hasta la vigésima iteración prácticamente el campo se ha difundido, es por esto que no se incluyen gráficas para estas iteraciones.

Las gráficas aqui mostradas corresponden a cuarenta puntos en la malla y veinte iteraciones. Al poner una malla mas densa, 10 puntos por ejemplo, se observó que el campo se difunde de la misma manera que el caso anterior. Poniendo una malla mas fina, 80 puntos por ejem

plo, el campo penetra de la misma manera, es decir, en forma de pulsos.

En este trabajo se utilizó como condición inicial una distribución de Fermi, pero en general se puede utilizar cualquier otra distribución, sin embargo al considerar un escalón se observó que el método - imposibilita estudiar el comportamiento de tales perfiles ya que se producen oscilaciones muy grandes y no conducen a ningún resultado. - Esto no es sorprendente, pues en el capítulo III se mostró que el método de diferencias finitas es bueno cuando la función no cambia bruscamente entre el intervalo de la malla. Aunque estas pueden ser amortiguadas en cierta medida al agregar una viscosidad artificial, el comportamiento del resultado parece poco confiable. Por esta razón se optó por estudiar el ejemplo de una distribución de Fermi.

Como trabajo futuro se propone estudiar el caso de MHD ideal, para el cual las ecuaciones son hiperbólicas, y agregan los efectos de transporte gradualmente a la geometría cilíndrica, comprobando así el papel que estos pueden jugar. Estos resultados pueden ser de interés para ciertas fases en la evolución de un Z-pinch.

Tras la experiencia aquí adquirida conviene pasar a métodos más elaborados, y avocarse a la elaboración de un código en dos dimensiones con el que se pueda modelar la formación y avance de lámina de corriente de un plasma focus, como el que existe en el centro de Estudios Nucleares UNAM.

APENDICE A

ORTOGONALIDAD DE LOS MODOS DE FOURIER.

De la ec. (3.4),

$$S = \sum_{j=1}^J e^{i2\pi j k / J} e^{-i2\pi j k' / J}, \quad (\text{A.1})$$

haciendo el algebra se obtiene,

$$S = e^{i2\pi(k-k')/J} + e^{i2\pi(k-k')/J} + \dots + e^{i2\pi(k-k')/J},$$

o bien

$$S = e^{i2\pi(k-k')/J} \sum_{j=0}^{J-1} \{ e^{i2\pi(k-k')/J} \}^j$$

pero,

$$\sum_{n=0}^M x^n = \frac{1-x^{M+1}}{1-x} \quad \text{o} \quad \sum_{j=0}^{J-1} \{ e^{i2\pi(k-k')/J} \}^j = \frac{1 - e^{i2\pi(k-k')/J}}{1 - e^{i2\pi(k-k')/J}}$$

Por lo tanto la suma S se puede escribir como:

$$S = e^{i2\pi(k-k')/J} \left\{ \frac{-e^{i\pi(k-k')} [e^{i\pi(k-k')} - e^{-i\pi(k-k')}]}{-e^{i\pi(k-k')} [e^{i\pi(k-k')/J} - e^{-i\pi(k-k')/J}]} \right\},$$

multiplicando y dividiendo por 2 y la unidad compleja,

$$S = e^{[i2\pi(k-k')/J + i\pi(k-k')/J - i\pi(k-k')/J] / J} \left\{ \frac{\text{Sen}[2\pi(k-k')/J]}{\text{Sen}[2\pi(k-k')/J]} \right\},$$

así que,

$$S = e^{i\pi(k-k')(2J-1)/J} \left\{ \frac{\text{Sen}[2\pi(k-k')/J]}{\text{Sen}[2\pi(k-k')/J]} \right\}.$$

De donde finalmente se concluye

$$S = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq k' \\ J & \text{si } k = k' \end{cases}, \quad (\text{A.2})$$

que es lo que se afirma en la ec. (3.6), lo cual demuestra que los modos de Fourier forman un conjunto ortogonal.

## APENDICE B

### SOLUCION A LA ECUACION DE DIFUSION

La ecuación de difusión en una dimensión es de la forma

$$\frac{\partial u}{\partial t} - K \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad (B.1)$$

donde K es la conductividad y en general puede depender de u. Aquí se supondrá constante.

En el esquema de diferencias finitas hay muchos métodos para resolver la ec. (B.1), aquí solo se enuncian dos. Método explícito de primer orden y Método implícito de Crank-Nicholson.

#### 1.B Método Explícito.

El operador  $\partial^2/\partial x^2$  fué definido en el capítulo III, por lo tanto,  $u_j^{n+1} = u(t^{n+1}, x_j)$  está dado como,

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \frac{K\Delta t}{\Delta x^2} (u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n). \quad (B.2)$$

Una gráfica en dos dimensiones se muestra en la figura B.1. Para -

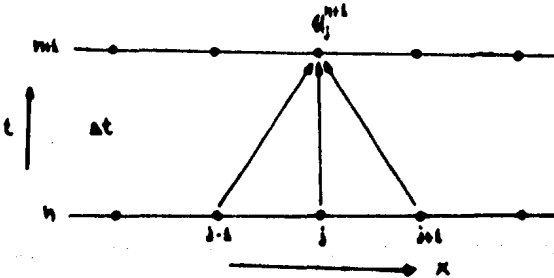


FIGURA B.1.- Ilustración de una malla espacio-tiempo para integrar la ecuación de difusión.

investigar la estabilidad del algoritmo B.2, considerese un modo de Fourier  $u = \hat{u}(t)e^{ikx}$ ; al aplicarlo en la ec.(B.2) se tiene,

$$\hat{u}_j^{n+1} e^{ikx_j} = \hat{u}_j^n e^{ikx_j} + \frac{K\Delta t}{\Delta x^2} \hat{u}_j^n (e^{ikx_{j+1}} - 2e^{ikx_j} + e^{ikx_{j-1}}),$$

como  $\cos(k\Delta x) = (e^{ik\Delta x} + e^{-ik\Delta x})/2$ , el factor de amplificación g será:

$$g = 1 + 2 \frac{K\Delta t}{\Delta x^2} \{ \cos(k\Delta x) - 1 \} = 1 - 4 \frac{K\Delta t}{\Delta x^2} \text{Sen}^2 \left( \frac{k\Delta x}{2} \right).$$

Para satisfacer el criterio de estabilidad de Von Neumann se necesita que



$$|g(\Delta t, \Delta x, k)| = |1 - 4 \frac{K \Delta t}{\Delta x^2} \text{Sen}^2(\frac{k \Delta x}{2})| \leq 1,$$

de donde,

$$-4 \frac{K \Delta t}{\Delta x^2} \geq -2 \quad \circ \quad \Delta t \leq 0.5 \frac{\Delta x^2}{K}. \quad (B.3)$$

Nótese que la estabilidad en la solución numérica está condicionada por la ec. (B.3).

## 2.B Método de Crank-Nicholson.

En este método se promedia el integrando entre los puntos  $t^n$  y  $t^{n+1}$  (ver Figura B.2).

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \left\{ f(u_i^n, t^n) + f(u_i^{n+1}, t^{n+1}) \right\} \frac{\Delta t}{2}.$$

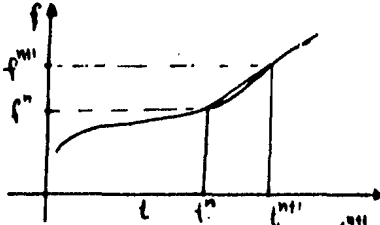


FIGURA B.2.- Aproximación a  $\int_{t^n}^{t^{n+1}} f(u(t), t) dt$ .

Por lo tanto la ec. (B.1) se puede aproximar como,

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \frac{K \Delta t}{\Delta x^2} (u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}) + \frac{K \Delta t}{\Delta x^2} (u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n),$$

y al analizar la estabilidad mediante un modo de Fourier se obtiene,

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{K \Delta t}{\Delta x^2} \{1 - \cos(k \Delta x)\} \bar{u}^{n+1} - \frac{K \Delta t}{\Delta x^2} \{1 - \cos(k \Delta x)\} \bar{u}^n,$$

cuyo factor de amplificación será:

$$g = 1 - \frac{K \Delta t}{\Delta x^2} \{1 - \cos(k \Delta x)\} g - \frac{K \Delta t}{\Delta x^2} \{1 - \cos(k \Delta x)\},$$

$$g = \left\{ 1 - 2 \frac{K \Delta t}{\Delta x^2} \text{Sen}^2\left(\frac{k \Delta x}{2}\right) \right\} / \left\{ 1 + 2 \frac{K \Delta t}{\Delta x^2} \text{Sen}^2\left(\frac{k \Delta x}{2}\right) \right\},$$

$g$  es un número real, y para todo número de onda y para todo tiempo, - la magnitud de  $g$  es menor que la unidad, por lo tanto la densidad siempre está asegurada.

## BIBLIOGRAFIA

1. Arfken, G., "Mathematical Methods for Physicists", 2nd ed., Academic Press, New York, 1970.
2. Bateman, G., "MHD Instabilities", M. I. T. Press, Cambridge/Massachusetts, 1978.
3. Chen, F. F., "Introduction to Plasma Physics", Plenum Press, New York, 1974.
4. Dougherty, J. P., "Plasma Theory", "Plasma Physics", ed. Keen, B. E., The Institute of Physics, London, 1974.
5. Golant, V. E., Zhilinsky, A. P. and Sakharov, I. E., "Fundamentals of Plasma Physics", John Wiley and Sons, New York, 1977.
6. Jackson, J. D., "Classical Electrodynamics", 2nd ed., John Wiley and Sons, New York, 1975.
7. Krall, N. A., and Trivelpiece A. W., "Principles of Plasma Physics", McGraw-Hill Inc., New York, 1973.
8. Miyamoto, K., "Plasma Physics for Nuclear Fusion", M. I. T. Press Massachusetts, 1980.
9. Nicholson, D. R., "Introduction to Plasma Theory", John Wiley and Sons, New York, 1983.
10. Potter, D., "Computational Physics", John Wiley and Sons, New York, 1973.
11. Rose, D. J., and Clark, M., "Plasmas and Controlled Fusion", M. I. T. Press, Massachusetts, 1965.
12. Schmit, G., "Physics of High Temperature Plasmas", Academic Press, New York, 1979.
13. Tjonov, A. N., y Samarsky, A. A., "Ecuaciones de la Física Matemática", MIR, Moscú, 1972.
14. Von Neuman, J., and Richtmyer, R. D., "A Method for the Numerical Calculation of Hydrodynamic Shocks", J. Appl. Phys., 21, 232, 1950.