Universidad Nacional Autónoma de México

FACULTAD DE CIENCIAS

"DEDUCCION DE UNA ECUACION DE MOVIMIENTO PARA UNA PARTICULA CARGADA CLASICA NO RELATIVISTA USANDO LA DESCOMPOSICION ESPECTRAL DEL CAMPO"

TESIS PROFESIONAL

Que para obtener el título de:

F I S I C O

P r e s e n t a :

JORGE GUSTAVO HIRSCH GANIEVICH

México, D. F. 1985

INTRODUCCION

Este trabajo, con el que finalizo la primera parte de mi formación como físico, tiene varios objetivos. El primero y evidente es cumplir los requisitos formales que exige la UNAM para acceder al título profesional. En este contexto, el desafío era realizar una tesis que justificara un año de trabajo, y que cumpliera el extraño rol de transformar a un todavía estudiante en un futuro investigador.

La elección del tema fue el primer motivo de inquietud. Quería que la física me explicara algo de lo que ocurre a nuestro alrededor, o quizás explicar algo con la física. Me resistía a realizar un largo trabajo de cálculo sobre situaciones de las que casi nada podría decir. Quería imaginarme el problema, escribir ecuaciones, volver a imaginarlo, y así. Aunque debo reconocer que recién al terminar el trabajo tuve una visión completa del problema que estudiaba. ¡Cada persona tiene su propia forma de empezar!

¿Por qué electrodinámica? Porque de las interacciones conocidas, la electromagnética es la más sencilla de describir, y tiene detrás una teoría muy desarrollada, sobre la cual se ha trabajado bastante. Y porque quedan aún muchas cosas por decir en esta área.

Decidí aprovechar la generosa oferta del Maestro José Luis Jiménez, y trabajar bajo su dirección en el análisis de la dinámica de una partícula cargada clásica cuando se toma en cuenta la interacción con el propio campo.

Los textos avanzados de electrodinámica (Jackson, 1975; Landau, 1970) plantean el problema mostrando diversas deducciones de la ecuación de Abraham-Lorentz, exhibiendo algunas de sus dificultades, y planteando como formulación algo más general un desarrollo en serie de las funciones retardadas alrededor del tiempo actual. En su tesis de licenciatura, Lorena Zogaib desarrolla esta posibilidad incluyendo términos no lineales en la velocidad y sus derivadas, muestra que la ecuación de Abraham-Lorentz no es consistente con un balance energético, y que desarrollar las series mencionadas sólo con términos lineales oculta información muy valiosa. Por otro lado, en varios artículos publicados en los últimos cinco años (L. de La Peña, J.L. Jiménez, R. Montemayor, etc.) se ha estudiado la dinámica de las partículas cargadas, deduciéndose una ecuación integrodiferencial de movimiento a partir de un manejo consistente de los desarrollos en serie con sólo términos lineales en la velocidad, pero considerando partículas con estructura.

La tarea que emprendimos nosotros fue la de mostrar que, usando la descomposición espectral del campo, se puede recuperar la ecuación de Abraham-Lorentz en el límite adecuado, en primer lugar. Luego exhibir que si dotamos de estructura a la partícula, llegamos a una ecuación integrodiferencial equivalente a la ya conocida. Esta es la empresa que llevamos adelante en los dos primeros capítulos. Al referirnos a la ecuación de Abraham-Lorentz incluimos una breve reseña de las críticas más importantes a ésta. Son dificultades inherentes a esa descripción, que esencialmente se concentran en la existencia de infinitos no eliminables, y en la aparición de un comportamiento acausal en el movimiento de las partículas puntuales. Al dotar de estructura a la partícula superamos todas esas dificultades, pero no podemos hacer el paso al límite hacia una partícula de radio nulo sin introducir severas inconsistencias en la teoría. Sin embargo, vemos que la existencia misma de un factor asociado a la distribución de carga es fundamental para que el movimiento sea causal y se eliminen las soluciones divergentes.

En el último capítulo reformulamos la ecuación de movimiento para partícula puntual introduciendo un factor de estructura con argumentos de origen físico, discutimos su significado y formulamos una ecuación dinámica totalmente general. Concluimos con una revisión de lo hecho, y comentando lo que nos resultó más importante del trabajo, que pone de manifiesto cuán poderosa y consistente es la formulación de la electrodinámica clásica.

En la redacción de estas páginas debimos buscar un compromiso entre una deducción completa de los resultados que se utilizan y un texto de lectura liviana. Lo más probable es que no hayamos conseguido ninguno de nuestros objetivos, pues difícilmente se pueda seguir el desarrollo de las fórmulas sin varias horas de papel y lápiz. Hay secciones particularmente áridas para la lectura que, sin embargo, nos sentimos en la necesidad de incluir, pues los resultados que obtenemos se apoyan en esas deducciones, y ésa es su fuerza. Pero a cada fórmula importante la acompaña una discusión de su significado tan amplia como nos permitió nuestro entendimiento, y creemos que hay muchas cosas interesantes que aquí se muestran.

Este es el plan de trabajo. Aún podemos pedirle un mérito adicional, el de ser útil a quienes lo lean. Esperamos que así sea.

CAPITULO I : LA ECUACION DE ABRAHAM-LORENTZ

1- INTRODUCCION

Existen diferentes ecuaciones que describen el movimiento de una partícula cargada en presencia del campo electromagnético, cada una de ellas con un cierto grado de aproximación y un dominio de validez.

La más popular y sencilla es la de Abraham-Lorentz, que se refiere a una partícula puntual en el caso no relativista, y se limita a agregar un término de 'fuerza radiativa' a la ley dinámica de Newton, tomando la conocida forma:

$$m\ddot{\bar{r}} = \bar{F} + \frac{2e^2}{3c^3}\dddot{\bar{r}} \quad . \tag{1}$$

Las consideraciones para deducir esta ecuación son de diversos tipos. La más elemental e intuitiva parte de la expresión de Larmor para la potencia radiada

$$P = \frac{2e^2}{3c^3}\ddot{\bar{r}}^{\,2} \quad . \tag{2}$$

Esta expresión sólo depende de la magnitud de la carga y no del signo, y se espera que ocurra lo mismo para la fuerza radiativa. Podemos ver que en un tiempo T suficientemente pequeño como para considerar la aceleración constante, la energía radiada es

$$E = \frac{2e^2}{3c^3}\ddot{r}^2 T \ .$$

Durante ese tiempo, si la partícula parte del reposo, ganará una energía cinética máxima del orden

$$(3) \qquad E = m\left(\ddot{r}T\right)^2 .$$

De estas dos expresiones podemos conocer el 'tiempo característico' T del proceso radiativo

$$(4) \qquad T = \frac{2e^2}{3mc^3} \ .$$

Es claro que el parámetro T es el único significativo que aparece en la energía radiada, y podemos esperar que sea el que esté presente en la fuerza radiativa.

Para encontrar el término buscado de fuerza radiativa proponemos que el trabajo realizado por esta fuerza en un lapso dado sea igual a la potencia radiada en ese lapso. Así

$$\int_{t_1}^{t_2} \bar{F}_{rad} \cdot \bar{v}\, dt = \frac{2e^2}{3c^3}\int_{t_1}^{t_2} \dot{\bar{v}} \cdot \dot{\bar{v}}\, dt$$

Integrando por partes el lado derecho, y haciendo la consideración de que el movimiento sea periódico (con el lapso de interés igual a un período), o en forma equivalente de que la velocidad y la aceleración son perpendiculares en los tiempos inicial y final, se llega directamente a

$$\int_{t_i}^{t_f} \left(\bar{F}_{rad} - \frac{2e^2}{3c^3}\,\dddot{v} \right) \cdot v \, dt = 0 \quad ,$$

de lo que se concluye, habitualmente sin vacilaciones, la ecuación de Abraham-Lorentz.

La deducción anterior es válida cuando los efectos radiativos son muy pequeños.Pueden verse otras deducciones más formales (Landau,1970;Jackson,1975;Zogaib,1984). Todas ellas parten de un desarrollo en serie de Taylor de las funciones retardadas, desprecian los términos no lineales en la velocidad (excepto Zogaib) y, al tomar el límite de partícula puntual, llegan a la ecuación de A-L, que se suele considerar como exacta para partícula puntual no relativista (Landau,1970).

2- CONSIDERACIONES CRITICAS SOBRE LA ECUACION DE ABRAHAM-LORENTZ

Si bien es la ecuación más empleada, existen ciertas dificultades intrínsecas que deben señalarse.

* El modelo es no relativista, lo que limita el conjunto de velocidades en que es aplicable. Más aún, la deducción de la ecuación está hecha en el sistema de referencia en el que la partícula está instantáneamente en reposo, o se mueve muy lentamente, y sólo será válida en esos sistemas, lo que nos limita a estudiar campos que varían suavemente en el tiempo.

* Aparece un factor 4/3 en el aporte electromagnético a la masa que da lugar a diversas interpretaciones, y puede reducirse a 3/3 si se consideran esfuerzos no electromagnéticos en el origen de la estructura de la carga, haciendo covariante al tensor de esfuerzos (Jackson,1962; J.L. Jiménez e I.Campos,1985).

* Al hacer tender a cero el radio a de la partícula, se eliminan los términos lineales en la velocidad que multiplican a las potencias de a en los desarrollos mencionados, pero al mismo tiempo la masa electromagnética, que es de orden 1/a , se vuelve infinita.

El solo hecho de asociar una tercera derivada a la fuerza radiativa introduce un grupo de dificultades particulares.

* Si la partícula se mueve con aceleración constante debe radiar de acuerdo a la fórmula de Larmor, pero la fuerza radiativa se anula.

* En ausencia de fuerzas externas, es posible tanto la solución con velocidad constante como una en la que la aceleración crece exponencialmente en el tiempo , de manera que la partícula gana energía sin límite del término habitualmente llamado de frenado.

* Debe añadirse una condición a la frontera para tener solución única a la ecuación diferencial. Esto podría verse como una ventaja, pues es una posibilidad abierta, pero las condiciones propuestas suelen conducir a comportamientos acausales que sus autores intentan achacar a la teoría, creando confusión sobre el alcance de la misma.

La introducción de la condición a la frontera adicional se hace según las siguientes líneas. Reescribimos la ecuación de Abraham_Lorentz

$$\bar{F} = m\ddot{x} - \frac{2e^2}{3c^3}\dddot{x} = m\left(\ddot{x} - T\dddot{x}\right) = -mT\, e^{t/T}\, \frac{d}{dt}\left(\ddot{x}\, e^{-t/T}\right),$$

donde se explicita que exp(-t/T) es un factor integrante para la fuerza, y así la ecuación dinámica queda

$$-m\, \frac{d}{dt}\left(\ddot{x}\, e^{-t/T}\right) = \frac{e^{-t/T}}{T}\, \bar{F} \qquad ,$$

que puede escribirse como una ecuación integral, quitando el signo negativo al cambiar los límites de integración, en la forma

$$(5) \qquad m\ddot{\pi}(t) = \frac{e^{t/T}}{T}\int_{t}^{t_0} e^{-t'/T}\,\overline{F}(t')\,dt' .$$

Esta expresión es la versión integral de la ecuación de A-L, para fuerzas que solo dependen del tiempo. Suele elegirse el límite superior de integración como más infinito, para exigir que la aceleración se anule a ese tiempo y así evitar las soluciones divergentes, de manera que la ecuación resulta

$$(6) \qquad m\ddot{\pi}(t) = \frac{e^{t/T}}{T}\int_{t}^{\infty} e^{-t'/T}\,\overline{F}(t')\,dt' .$$

Aquí es claro que la fuerza está evaluada en tiempos posteriores a t, y a éste fenómeno se llama ACAUSALIDAD. Como el término de amortiguamiento rápidamente anula las fuerzas a tiempos mucho mayores que T, y este tiempo característico es del orden del que le toma a la luz atravesar distancias del tamaño del radio clásico del electrón, se afirma que (6) es "acausal pero muy poquito". En el presente trabajo mostraremos que, al mismo nivel de aproximación (velocidades muy pequeñas, campos externos suaves) es posible sustituir (6) por su equivalente causal, a partir de un tratamiento consistente de la mecánica y electrodinámica clásicas.

Algunas de estas dificultades se resuelven al considerar la formulación covariante, pero el problema discutido previamente subsiste. Se han propuesto soluciones alternativas considerando la partícula como extensa (Luis de la Peña et al,1980;y referencias ahí citadas),pero se señala que no hay modelos consistentes de partícula con estructura para las partículas pequeñas que existen en la naturaleza (aunque el problema aquí planteado es académico, pues una descripción a ese nivel debería realizarse en términos de la mecánica cuántica).

También existen fructíferos desarrollos para describir el movimiento de la partícula puntual, abandonando la fortísima restricción de que la partícula se encuentre instantáneamente en reposo en el sistema de referencia en el que es descrita, con lo que se llega a una ecuación no lineal para partícula puntual (Zogaib,1984). En ésta se obtienen resultados muy interesantes, sobre todo en la vinculación con la formulación covariante y la ecuación de Lorentz - Dirac, pero en el límite de partícula puntual susbsiten algunas dificultades básicas,como la divergencia de la masa electromagnética, que en ese contexto sólo se resuelven dotando de estructura a la partícula.

3- EL CAMPO ELECTROMAGNETICO COMO SUPERPOSICION DE ONDAS PLANAS

Nosotros vamos a presentar nuestra propia deducción de la ecuación de A-L. Esto lo haremos esencialmente para introducir el tratamiento en función de las componentes de Fourier del campo (Heitler,1954), sobre el que basaremos los desarrollos posteriores.

La base de la descripción del campo electromagnético está en las ecuaciones de Maxwell, que nosotros aceptaremos como postulados fundamentales. De las dos ecuaciones independientes de las fuentes se sigue que

$$(7) \qquad \bar{H} = \nabla \times \bar{A} \quad , \quad \bar{E} = -\nabla \phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \bar{A}}{\partial t}$$

donde los potenciales $\bar{A}$ y ϕ deben satisfacer la condición de Lorentz

$$\nabla \cdot \bar{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$$

Con esto, las ecuaciones dependientes de las fuentes implican que los potenciales $\bar{A}$ y ϕ deben satisfacer las ecuaciones de onda

(8) $$\nabla^2\phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -4\pi\rho \quad , \quad \nabla^2\bar{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \bar{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c}\vec{J} \; ;$$

donde ρ y $\bar{J}$ son las densidades de carga y de corriente respectivamente. Por comodidad, en este caso nos situaremos en el sistema de referencia en el cual el potencial escalar no dependa del tiempo, con lo cual se cumplirá la norma estática o de Coulomb

(9) $$\nabla \cdot \bar{A} = 0 \quad .$$

Ahora estamos en condiciones de resolver la ecuación de onda para $\bar{A}$, a la que pediremos sea periódica en un volúmen cúbico de lado L, es decir que tanto $\bar{A}$ como sus derivadas tomen el mismo valor en planos opuestos. Usando la técnica de separación de variables, proponemos que una solución de la ecuación de onda sea el producto de una función del tiempo Qn(t) y una función vectorial de las coordenadas $\bar{A}$n(r), es decir

$$\bar{A}_n(\bar{r},t) = Q_n(t)\,\bar{A}_n(\bar{r}) \quad ,$$

y en general tendremos al potencial vectorial como una combinación lineal de las $\bar{A}$n(r,t):

(10) $$\bar{A}(\vec{r},t) = \sum_n Q_n(t)\,\bar{A}_n(\vec{r}) \,.$$

Las $\bar{A}n(r)$ deben ser periódicas en el volúmen y satisfacer

$$\nabla\cdot\bar{A}_n(\vec{r}) = 0 \,.$$

Para el campo de radiación, en la región donde no hay fuentes, se satisface la ecuación de onda homogénea. Dada la linealidad de ésta, e introduciendo la constante

$$K_n^2 = \omega_n^2/c^2$$

obtenemos las siguientes ecuaciones:

(11) $$\nabla^2\bar{A}_n + K_n^2\bar{A}_n = 0 \,,$$

(12) $$\ddot{Q}_n + \omega_n^2 Q_n = 0 \,.$$

Al ser soluciones de un problema de Sturm-Liouville, las diferentes soluciones $\bar{A}n(r)$ de (11) serán ortogonales. Expresamos esta condición, junto con una normalización cómoda, en la forma

$$\int_{L^3} \bar{A}_n\cdot\bar{A}_m \, d^3r = \frac{4\pi c^2}{L^3}\,\delta_{nm} \,.$$

Las $\bar{A}n(r)$ son funciones seno y coseno, del tipo

(13) $$\sqrt{\frac{8\pi c^2}{L^3}}\;\hat{e}_n \cos\bar{K}_n\cdot\vec{r} \;,\; \sqrt{\frac{8\pi c^2}{L^3}}\;\hat{e}_n \operatorname{sen}\bar{K}_n\cdot\vec{r} \;;$$

donde las $\bar{K}_n$ dan la dirección de propagación y $\hat{e}_n$ es el vector unitario en la dirección de polarización. De la norma de Coulomb es obvio que estos dos vectores son ortogonales. De esta manera los $\hat{e}_n$ están contenidos en un plano y solo hay dos linealmente independientes.

Las condiciones a la frontera imponen que

$$K_{ni} = \frac{2\pi}{L} N_{ni} \quad , \qquad i=x,y,z \quad , \tag{14}$$

donde las Nni son números enteros.

Como las $\bar{A}(r)$ son funciones dadas del espacio, el campo está caracterizado por las amplitudes Qn(t), cuya Hamiltoniana es la del oscilador armónico

$$H_n = \frac{1}{2}\left(P_n^2 + \omega_n^2 Q_n^2 \right) , \tag{15}$$

y cuyas ecuaciones canónicas definen Pn y conducen a (8). La Hamiltoniana total es

$$H_c = \sum_n H_n \; .$$

El campo es representado entonces como un sistema de osciladores armónicos independientes.

La energía total del campo de radiación es

$$U = \frac{1}{8\pi} \int (\bar{E}^2 + \bar{H}^2)\, d^3 r \quad .$$

Tomando $\phi = 0$, tenemos

$$\bar{E} = -\frac{1}{c}\dot{\bar{A}} = -\frac{1}{c}\sum_n \dot{Q}_n \bar{A}_n = -\frac{1}{c}\sum_n P_n \bar{A}_n \quad ,$$

$$\bar{H} = \nabla \times \bar{A} = \sum_n Q_n \nabla \times \bar{A}_n \quad .$$

Calculamos

$$\int \bar{E}^2 d^3 r = \frac{1}{c^2}\sum_{n,m} P_n P_m \int \bar{A}_n \cdot \bar{A}_m \, d^3 r = 4\pi \sum_n P_n^2 \quad ;$$

con algunos trucos del cálculo vectorial se muestra igualmente que

$$\int \bar{H}^2 d^3 r = \frac{1}{c^2}\sum_{n,m} Q_n Q_m \int (\nabla \times \bar{A}_n)\cdot(\nabla \times \bar{A}_m)\, d^3 r = 4\pi \sum_n \omega_n^2 Q_n^2 \, .$$

Finalmente es directo que

(16) $$U = \frac{1}{8\pi}\int (\bar{E}^2 + \bar{H}^2)\, d^3 r = \frac{1}{2}\sum_n (P_n^2 + \omega_n^2 Q_n^2) = H_c \, .$$

La energía del campo es igual a la suma de las energías de los osciladores.

Existen formulaciones equivalentes a ésta, en las que tomando combinaciones lineales de las amplitudes del campo y sus complejas conjugadas, se garantiza que el potencial vectorial quede definido como una cantidad real. Para esto proponemos

$$\bar{A}(\bar{r},t) = \sum_n \left(Q_n(t)\,\bar{A}_n(\bar{r}) + Q_n^*(t)\,\bar{A}_n^*(\bar{r}) \right) ,$$

con

$$\bar{A}_n(\bar{r}) = \hat{e}_n \sqrt{4\pi c^2}\, e^{i(\bar{K}_n \cdot \bar{r})} \quad , \quad Q_n(t) = |Q_n|\, e^{i w_n t} \quad .$$

Introducimos las variables canónicas reales

$$q_n \equiv Q_n + Q_n^* = |Q_n| \left(e^{-i w_n t} + e^{i w_n t} \right) ,$$

$$\dot{q}_n = -i w_n \left(Q_n - Q_n^* \right) \equiv p_n \quad .$$

La Hamiltoniana, expresada en función de estas nuevas variables es

$$H_r = \frac{1}{2} \sum_n \left(p_n^2 + w_n^2 q_n^2 \right) \quad ,$$

y las ecuaciones dinámicas son las del oscilador armónico para las qn. Sustituyendo en la expresión para $\bar{A}$, vemos que

$$\bar{A} = \sqrt{\frac{4\pi c^2}{L^3}} \sum_{n,\sigma} \left(\hat{e}_{n\sigma} q_{n\sigma} \cos \bar{K}_n \cdot \bar{r} + \hat{e}_{n\sigma} \frac{p_{n\sigma}}{w_n} \sin \bar{K}_n \cdot \bar{r} \right). \tag{17}$$

Por comodidad para el manejo futuro, desdoblamos el índice de la suma. Ahora la n caracteriza a cada frecuencia wn, y la σ a cada dirección de polarización $\hat{e}_{n\sigma}$. Las amplitudes del campo están asociadas a cada componente, y varían en general para cada frecuencia y cada dirección de polarización, y por ello llevan doble subíndice $a_{n\sigma}$, $p_{n\sigma}$.

Así como las ecuaciones de Maxwell son la base para nuestra descripción del campo, la interacción entre éste y las partículas viene dada por la fuerza de Lorentz

$$\bar{F} = e\left(\bar{E} + \frac{\bar{v}}{c} \times \bar{H}\right) . \tag{18}$$

La Hamiltoniana que conduce a una fuerza de interacción de este tipo para una partícula de carga e es

$$H_p = E = e\phi + \sqrt{m^2c^4 + (c\bar{p} - e\bar{A})^2} . \tag{19}$$

Si $|c\bar{p} - e\bar{A}| \ll mc^2$, podemos usar la aproximación

$$\sqrt{1+\epsilon} = 1 + \frac{1}{2}\epsilon + \cdots ,$$

de manera que (19) se transforma en

$$H_p = e\phi + \frac{1}{2m}\left(\bar{p} - \frac{e}{c}\bar{A}\right) + mc^2 ,$$

y como el último término es constante, lo desecharemos en esta aproximación no relativista. Así la Hamiltoniana para la partícula queda:

$$(20) \quad H_p = e\phi + \frac{1}{2m}\left(\bar{p} - \frac{e}{c}\bar{A}\right)^2 .$$

4- DEDUCCION DE LA ECUACION DE ABRAHAM-LORENTZ

De las expresiones (16) y (20) se sigue que la Hamiltoniana de una particula cargada puntual es

$$(21) \quad H = e\phi + \frac{1}{2m}\left(\bar{p} - \frac{e}{c}\bar{A}\right)^2 + \frac{1}{2}\sum_{n,\sigma}\left(p_{n\sigma}^2 + \omega_n^2 q_{n\sigma}^2\right) ,$$

donde el potencial vectorial magnético $\bar{A}$ se desarrolla en sus componentes de Fourier según (17) en la forma

$$(22) \quad \bar{A} = \sqrt{\frac{4\pi c^2}{L^3}} \sum_{n,\sigma} \hat{e}_{n\sigma}\left(q_{n\sigma}(t) \cos \bar{k}_n\cdot\bar{x} + p_{n\sigma}(t) \operatorname{sen} \bar{k}_n\cdot\bar{x}\right) .$$

Aquí $\bar{x},\bar{p}$ son la posición y el momento conjugados de la particula, y $q_{n\sigma}$ y $p_{n\sigma}$ son las variables canónicamente conjugadas del campo.

El problema que nos preocupa es encontrar la ecuación de movimiento de la particula. Vamos a calcular las ecuaciones de Hamilton tanto para la particula como para el campo, pues las amplitudes de este último nos son desconocidas también, y poder determinarlas necesariamente queda incluído dentro de nuestra tarea.

Para la partícula tenemos

$$\dot{\bar{x}} = \frac{\partial H}{\partial \bar{p}} = \frac{1}{m}\left(\bar{p} - \frac{e}{c}\bar{A}(\bar{x})\right) , \tag{23}$$

y para la derivada temporal del momento

$$\dot{\bar{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \bar{x}} = -e\nabla\phi - \frac{1}{m}\left(\bar{p} - \frac{e}{c}\bar{A}(\bar{x})\right)\left(-\frac{e}{c}\right)\cdot\frac{\partial \bar{A}}{\partial \bar{x}} ,$$

$$\dot{\bar{p}} = -e\nabla\phi + \frac{e}{c}\sqrt{\frac{4\pi c^2}{L^3}}\sum_{n,\sigma}(\dot{\bar{x}}\cdot\hat{e}_{n\sigma})\bar{K}_n\left(\frac{p_{n\sigma}}{\omega_n}\cos\bar{K}_n\cdot\bar{x} - q_{n\sigma}\,\mathrm{sen}\,\bar{K}_n\cdot\bar{x}\right); \tag{24}$$

donde $\partial\bar{A}/\partial\bar{x}$ es una diada, cuyo producto escalar con la velocidad no es conmutativo. Para aclarar este punto consideremos la componente x de la ecuación (24)

$$\dot{p}_x = -e\frac{\partial\phi}{\partial x} + \frac{e}{c}\dot{\bar{x}}\cdot\frac{\partial\bar{A}}{\partial x} , \quad \frac{\partial\bar{A}}{\partial x} = \sqrt{\frac{4\pi c^2}{L^3}}\sum_{n,\sigma}\hat{e}_{n\sigma}K_{nx}\left(-q_{n\sigma}\,\mathrm{sen}\,\bar{K}_n\cdot\bar{x} + \frac{p_{n\sigma}}{\omega_n}\cos\bar{K}_n\cdot\bar{x}\right),$$

$$\dot{p}_x = -e\frac{\partial\phi}{\partial x} + \frac{e}{c}\sqrt{\frac{4\pi c^2}{L^3}}\sum_{n,\sigma}\dot{\bar{x}}\cdot\hat{e}_{n\sigma}K_{nx}\left(\frac{p_{n\sigma}}{\omega_n}\cos\bar{K}_n\cdot\bar{x} - q_{n\sigma}\,\mathrm{sen}\,\bar{K}_n\cdot\bar{x}\right),$$

que ayuda a mostrar la validez de la expresión general obtenida.

Aquí y en lo sucesivo conservaremos el término $\nabla\phi$ por generalidad, pero al estar en la norma de Coulomb siempre podemos pensar en que $\phi = 0$.

Para las componentes del campo

$$
(25)\qquad
\begin{aligned}
\dot q_{n\sigma} &= \frac{\partial H}{\partial p_{n\sigma}} = -\frac{e}{c}\,\dot{\vec{x}}\cdot\frac{\partial \vec{A}}{\partial p_{n\sigma}} + p_{n\sigma} \,,\\
\dot q_{n\sigma} &= -\frac{e}{c}\sqrt{\frac{4\pi c^2}{L^3}}\;\frac{\dot{\vec{x}}}{\omega_n}\cdot\hat{e}_{n\sigma}\,\mathrm{sen}\,\vec{K}_n\cdot\vec{x} + p_{n\sigma} \,;
\end{aligned}
$$

y la ecuación que la acompaña

$$
(26)\qquad
\begin{aligned}
\dot p_{n\sigma} &= -\frac{\partial H}{\partial q_{n\sigma}} = \frac{e}{c}\,\dot{\vec{x}}\cdot\frac{\partial \vec{A}}{\partial q_{n\sigma}} - \omega_n^2\, q_{n\sigma} \,,\\
\dot p_{n\sigma} &= \frac{e}{c}\sqrt{\frac{4\pi c^2}{L^3}}\;\dot{\vec{x}}\cdot\hat{e}_{n\sigma}\cos\vec{K}_n\cdot\vec{x} - \omega_n^2\, q_{n\sigma} \,.
\end{aligned}
$$

En estas ecuaciones $\vec{x}$ y $\dot{\vec{x}}$ están asociadas a la posición y la velocidad de la partícula en cada instante. Así, las cuatro ecuaciones dinámicas se encuentran acopladas. Para encontrar las amplitudes del campo debemos conocer la trayectoria, y para conocer la trayectoria debemos conocer la forma explícita de las componentes del campo.

Vamos a usar una técnica conocida de la física para romper el acoplamiento. Resolveremos (25) y (26) suponiendo que posición y velocidad son funciones conocidas del espacio y el tiempo, y obtendremos explícitamente $q_{n\sigma}$ y $p_{n\sigma}$ como funciones de la trayectoria. Regresaremos con ellas a (23) y (24) y tendremos entonces un par de ecuaciones para la posición y la velocidad de la partícula con todos los parámetros conocidos. Esas son las ecuaciones de movimiento que buscamos.

Para esto, primero multiplicamos (25) por $i\omega_n$, y sumamos el par de ecuaciones obtenidas, resultando

$$(27)\quad \dot{p}_{n\sigma} + i\omega_n \dot{q}_{n\sigma} = \frac{e}{c}\sqrt{\frac{4\pi c^2}{L^3}}\ \dot{\bar{x}}\cdot\hat{e}_{n\sigma}\, e^{-i\bar{K}_n\cdot\bar{x}} + i\omega_n\left(p_{n\sigma} + i\omega_n q_{n\sigma}\right).$$

Si definimos la variable $\eta_n = p_{n\sigma} + i\omega_n q_{n\sigma}$ y sustituimos en (27), llegamos a la ecuación diferencial de una variable

$$(28)\quad \dot{\eta}_n - i\omega_n\eta_n = e\sqrt{\frac{4\pi}{L^3}}\ \dot{\bar{x}}\cdot\hat{e}_{n\sigma}\ e^{-i\bar{K}_n\cdot\bar{x}},$$

cuya solución es conocida (Boyce y DiPrima, 1981), y es

$$(29)\quad \eta_n(t) = e\sqrt{\frac{4\pi}{L^3}}\int_{t_0}^{t}\exp\left[i\omega_n(t-\tau) - i\bar{K}_n\cdot\bar{x}(\tau)\right]\hat{e}_{n\sigma}\cdot\dot{\bar{x}}(\tau)\,d\tau + c_n e^{i\omega_n t}.$$

Despejando las partes real e imaginaria, y comparando con la definición de η_n, llegamos a las expresiones para las amplitudes del campo

$$(30)\quad p_{n\sigma} = e\sqrt{\frac{4\pi}{L^3}}\int_{t_0}^{t}\cos\left[\omega_n(t-\tau) - \bar{K}_n\cdot\bar{x}(\tau)\right]\hat{e}_{n\sigma}\cdot\dot{\bar{x}}(\tau)\,d\tau + c_{1n}\cos\omega_n t - c_{2n}\operatorname{sen}\omega_n t,$$

$$(31)\quad q_{n\sigma} = \frac{e}{\omega_n}\sqrt{\frac{4\pi}{L^3}}\int_{t_0}^{t}\operatorname{sen}\left[\omega_n(t-\tau) - \bar{K}_n\cdot\bar{x}(\tau)\right]\hat{e}_{n\sigma}\cdot\dot{\bar{x}}(\tau)\,d\tau + \frac{c_{2n}}{\omega_n}\cos\omega_n t + c_{1n}\operatorname{sen}\omega_n t.$$

Las constantes que aparecen se pueden asociar con las amplitudes del campo en t=0, a las que pondremos un cero de subíndice, si consideramos que éste es el tiempo inicial, pues allí las integrales se anulan y es inmediato que

$$(32) \qquad c_{1n} = p_{n\sigma 0} \quad , \quad c_{2n} = \omega_n \, q_{n\sigma 0} \quad .$$

Ya hemos realizado la mitad del trabajo. Regresemos ahora a las ecuaciones de movimiento (23) y (24) de la partícula. Como buscamos la ecuación dinámica que involucre a la aceleración, derivamos (23) obteniendo

$$(33) \qquad m \ddot{x} = \dot{p} - \frac{e}{c} \dot{A} \quad .$$

Tenemos la forma explícita de la derivada del momento en (24). La derivada temporal del potencial vectorial es

$$(34) \qquad \dot{\bar{A}} = \frac{d\bar{A}}{dt} = \frac{\partial \bar{A}}{\partial \bar{x}} \cdot \dot{\bar{x}} + \sum_{n,\sigma} \frac{\partial \bar{A}}{\partial q_{n\sigma}} \dot{q}_{n\sigma} + \sum_{n,\sigma} \frac{\partial \bar{A}}{\partial p_{n\sigma}} \dot{p}_{n\sigma} \; .$$

Como hicimos antes, trataremos de visualizar el significado de esta ecuación vectorial escribiendo su primera componente

$$\dot{A}_x = \nabla A_x \cdot \dot{x} + \partial A_x / \partial t ,$$

$$\dot{A}_x = \sqrt{\frac{4\pi c^2}{L^3}} \sum_{n,\sigma} e_{n\sigma x} \bar{K}_n \cdot \dot{\bar{x}} \left(\frac{p_{n\sigma}}{\omega_n} \cos \bar{K}_n \cdot \bar{x} - q_{n\sigma} \operatorname{sen} \bar{K}_n \cdot \bar{x} \right) + \sum_{n,\sigma} \left(\frac{\partial A_x}{\partial q_{n\sigma}} \dot{q}_{n\sigma} + \frac{\partial A_x}{\partial p_{n\sigma}} \dot{p}_{n\sigma} \right) .$$

Introduciendo toda la información obtenida en (33), Junto con la expresión para las derivadas de las amplitudes del campo (ecuaciones (25) y (26)), llegamos a la expresión buscada

$$(35)\quad m\ddot{\bar{x}} = -e\nabla\phi + \frac{e}{c}\sqrt{\frac{4\pi c^2}{L^3}}\sum_{n,\sigma}\left(\frac{p_{n\sigma}}{\omega_n}\cos\bar{K}_n\cdot\bar{x} - q_{n\sigma}\,\mathrm{sen}\,\bar{K}_n\cdot\bar{x}\right)\left[\dot{\bar{x}}\cdot\bar{e}_{n\sigma}\bar{K}_n - \bar{e}_{n\sigma}\left(\bar{K}_n\cdot\dot{\bar{x}}+\omega_n\right)\right].$$

En esta expresión solo falta sustituir la forma explícita de las amplitudes del campo $q_{n\sigma}$ y $p_{n\sigma}$, y tendremos el resultado buscado.

Antes de esto, por completez, vamos a mostrar que el lado derecho en (35) es la fuerza de Lorentz, como debe ser, pues la función Hamiltoniana se construyó para que de ella se deduzca esta fuerza. Primero calculamos el campo magnético $\bar{H}$

$$(36)\quad \bar{H} = \nabla\times\bar{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\hat{\imath} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\hat{\jmath} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\hat{k},$$

cuyas componentes, usando la expresión (16) para $\bar{A}$, son

$$H_x = \sqrt{\frac{4\pi c^2}{L^3}}\sum_{n,\sigma}\left(e_{n\sigma z}K_{ny} - e_{n\sigma y}K_{nz}\right)\left(\frac{p_{n\sigma}}{\omega_n}\cos\bar{K}_n\cdot\bar{x} - q_{n\sigma}\,\mathrm{sen}\,\bar{K}_n\cdot\bar{x}\right),$$

$$(37)\quad H_y = \sqrt{\frac{4\pi c^2}{L^3}}\sum_{n\sigma}\left(e_{n\sigma x}K_{nz} - e_{n\sigma z}K_{nx}\right)\left(\frac{p_{n\sigma}}{\omega_n}\cos\bar{K}_n\cdot\bar{x} - q_{n\sigma}\,\mathrm{sen}\,\bar{K}_n\cdot\bar{x}\right),$$

$$H_z = \sqrt{\frac{4\pi c^2}{L^3}}\sum_{n,\sigma}\left(e_{n\sigma y}K_{nx} - e_{n\sigma x}K_{ny}\right)\left(\frac{p_{n\sigma}}{\omega_n}\cos\bar{K}_n\cdot\bar{x} - q_{n\sigma}\,\mathrm{sen}\,\bar{K}_n\cdot\bar{x}\right).$$

$$(35)\quad m\ddot{\vec{x}} = -e\nabla\varphi + \frac{e}{c}\sqrt{\frac{4\pi c^2}{L^3}}\sum_{n\sigma}\left(\frac{p_{n\sigma}}{\omega_n}\cos\vec{K}_n\cdot\vec{x} - q_{n\sigma}\operatorname{sen}\vec{K}_n\cdot\vec{x}\right)\left[\dot{\vec{x}}\cdot\hat{e}_{n\sigma}\vec{K}_n - \hat{e}_{n\sigma}(\vec{K}_n\cdot\dot{\vec{x}} + \omega_n)\right].$$

En esta expresión solo falta sustituir la forma explícita de las amplitudes del campo $q_{n\sigma}$ y $p_{n\sigma}$, y tendremos el resultado buscado.

Antes de esto, por completez, vamos a mostrar que el lado derecho en (35) es la fuerza de Lorentz, como debe ser, pues la función Hamiltoniana se construyó para que de ella se deduzca esta fuerza. Primero calculamos el campo magnético $\bar{H}$

$$(36)\quad \bar{H} = \nabla\times\bar{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\hat{x} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\hat{y} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\hat{z},$$

cuyas componentes, usando la expresión (16) para $\bar{A}$, son

$$H_x = \sqrt{\frac{4\pi c^2}{L^3}}\sum_{n,\sigma}\left(e_{n\sigma z}K_{ny} - e_{n\sigma y}K_{nz}\right)\left(\frac{p_{n\sigma}}{\omega_n}\cos\vec{K}_n\cdot\vec{x} - q_{n\sigma}\operatorname{sen}\vec{K}_n\cdot\vec{x}\right),$$

$$(37)\quad H_y = \sqrt{\frac{4\pi c^2}{L^3}}\sum_{n,\sigma}\left(e_{n\sigma x}K_{nz} - e_{n\sigma z}K_{nx}\right)\left(\frac{p_{n\sigma}}{\omega_n}\cos\vec{K}_n\cdot\vec{x} - q_{n\sigma}\operatorname{sen}\vec{K}_n\cdot\vec{x}\right),$$

$$H_z = \sqrt{\frac{4\pi c^2}{L^3}}\sum_{n,\sigma}\left(e_{n\sigma y}K_{nx} - e_{n\sigma x}K_{ny}\right)\left(\frac{p_{n\sigma}}{\omega_n}\cos\vec{K}_n\cdot\vec{x} - q_{n\sigma}\operatorname{sen}\vec{K}_n\cdot\vec{x}\right).$$

Ahora nos interesa el producto vectorial $\bar{v}\times\bar{H}$, cuya forma es

Ahora nos interesa el producto vectorial $\bar{v} \times \bar{H}$, cuyo forma es

$$(38) \quad \bar{v} \times \bar{H} = \left(\dot{y} H_z - \dot{z} H_y\right)\hat{i} + \left(\dot{z} H_x - \dot{x} H_z\right)\hat{j} + \left(\dot{x} H_y - \dot{y} H_x\right)\hat{k} .$$

Evaluemos explícitamente la componente x de (38)

$$(39) \quad (\bar{v} \times \bar{H})_x = \sqrt{\frac{4\pi c^2}{L^3}} \sum_{n,\sigma}' \left\{ (\dot{y}\, e_{n\sigma y} K_{nx} - e_{n\sigma x} K_{ny}\, \dot{y} - \dot{z}\, e_{n\sigma z} K_{nz} + e_{n\sigma z} K_{nx} \dot{z}) \left(\frac{p_{n\sigma}}{w_n} \cos \bar{K}_n \cdot \bar{x} - q_{n\sigma} \operatorname{sen} \bar{K}_n \cdot \bar{x} \right) \right\} ,$$

$$(\bar{v} \times \bar{H})_x = \sqrt{\frac{4\pi c^2}{L^3}} \sum_{n\sigma}' \left\{ \left[(\dot{\bar{x}} \cdot \hat{e}_{n\sigma}) \bar{K}_n - \hat{e}_{n\sigma} (\bar{K}_n \cdot \dot{\bar{x}}) \right]_x \left(\frac{p_{n\sigma}}{w_n} \cos \bar{K}_n \cdot \bar{x} - q_{n\sigma} \operatorname{sen} \bar{K}_n \cdot \bar{x} \right) \right\} .$$

Generalizando para las otras componentes, es claro que

$$(40) \quad \bar{v} \times \bar{H} = \sqrt{\frac{4\pi c^2}{L^3}}' \sum_{n,\sigma} \left(\frac{p_{n\sigma}}{w_n} \cos \bar{K}_n \cdot \bar{x} - q_{n\sigma} \operatorname{sen} \bar{K}_n \cdot \bar{x} \right) \left[\dot{\bar{x}} \cdot \hat{e}_{n\sigma} \bar{K}_n - \hat{e}_{n\sigma}\, \bar{K}_n \cdot \dot{\bar{x}} \right] .$$

El campo eléctrico se evalúa más fácilmente, pues es directo que

$$\bar{E} = -\nabla \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \bar{A}}{\partial t} = -\nabla \phi - \frac{1}{c} \sum_{n\sigma} \frac{\partial \bar{A}}{\partial q_{n\sigma}} \dot{q}_{n\sigma} - \frac{1}{c} \sum_{n,\sigma} \frac{\partial \bar{A}}{\partial p_{n\sigma}} \dot{p}_{n\sigma} ,$$

$$(41) \quad \bar{E} = -\nabla \phi - \frac{1}{c} \sqrt{\frac{4\pi c^2}{L^3}}' \sum_{n,\sigma} \hat{e}_{n\sigma} \left(p_{n\sigma} \cos \bar{K}_n \cdot \bar{x} - w_n q_{n\sigma} \operatorname{sen} \bar{K}_n \cdot \bar{x} \right) .$$

Uniendo (40) y (41) tenemos la expresión para la fuerza de Lorentz

$$\bar{F} = e\bar{E} + e\,\frac{\bar{v}}{c} \times \bar{H} ,$$

$$(42) \quad \bar{F} = -e\nabla \phi + \frac{e}{c} \sqrt{\frac{4\pi c^2}{L^3}} \sum_{n,\sigma} \left(\frac{p_{n\sigma}}{w_n} \cos \bar{K}_n \cdot \bar{x} - q_{n\sigma} \operatorname{sen} \bar{K}_n \cdot \bar{x} \right) \left[\dot{\bar{x}} \cdot \hat{e}_{n\sigma} \bar{K}_n - \hat{e}_{n\sigma} (\bar{K}_n \cdot \dot{\bar{x}} + w_n) \right] .$$

Recordemos este hecho: es equivalente encontrar la ecuación de movimiento de la partícula partiendo de las ecuaciones de Hamilton, como se hizo aquí, que usar la ley dinámica de Newton con la fuerza de Lorentz. En el futuro aprovecharemos esto para hacer los cálculos por el camino más sencillo.

Sustituyendo en (35) las expresiones para la amplitud del campo (30) y (31) y reagrupando términos, llegamos finalmente a la ecuación buscada para partícula puntual no relativista, con $\hat{k}_n = \vec{K}_n\, c/\omega_n$

$$m\ddot{\vec{x}} = -e\nabla\phi \, +$$

$$+\, e\sqrt{\frac{4\pi}{L^3}}\sum_{n,\sigma}\left\{c_{1n}\cos(\omega_n t+\vec{K}_n\cdot\vec{x}) - c_{2n}\,\mathrm{sen}(\omega_n t+\vec{K}_n\cdot\vec{x})\right\}\left[\frac{\dot{\vec{x}}}{c}\cdot\hat{e}_{n\sigma}\,\hat{k}_n-\hat{e}_{n\sigma}\left(\hat{k}_n\cdot\frac{\dot{\vec{x}}}{c}+1\right)\right]+ \tag{43}$$

$$+\, e^2\frac{4\pi}{L^3}\sum_{n,\sigma}\int_{t_0}^{t}\cos\left[\omega_n(t-\tau)+\vec{K}_n\cdot(\vec{x}(t)-\vec{x}(\tau))\right]\hat{e}_{n\sigma}\cdot\dot{\vec{x}}(\tau)\,d\tau\left[\frac{\dot{\vec{x}}}{c}\cdot\hat{e}_{n\sigma}\,\hat{k}_n-\hat{e}_{n\sigma}\left(\hat{k}_n\cdot\frac{\dot{\vec{x}}}{c}+1\right)\right].$$

En la forma en la que la hemos escrito, la primera parte depende de la posición y velocidad actuales de la partícula, y la segunda de la trayectoria previa, desde el tiempo inicial t_0.

Es importante destacar que esta ecuación, dentro de los límites señalados, es exacta y cerrada, en el sentido que no se ha hecho ninguna aproximación en su deducción, y es una consecuencia de las leyes que están en la base de la dinámica newtoniana y de la electrodinámica clásica. Contiene toda la información sobre el movimiento futuro de la partícula puntual cargada, y sólo deben especificarse los campos y la posición y velocidad de la partícula al tiempo inicial t_0.

El precio que debe pagarse por tantas bondades es su elevada complejidad matemática. La ecuación es integrodiferencial, y no lineal en la velocidad y la aceleración. Simplemente no pertenece al reducidísimo grupo de ecuaciones que podemos resolver mediante funciones analíticas.

Para obtener información física haremos, a partir de aquí, aproximaciones, que deberemos tener presentes para no acusar a esta ecuación de problemas con resultados debidos a excesos cometidos al aproximar. Consideremos el límite de onda larga en el campo. En este caso el número de onda Kn se hace muy pequeño, y así el producto escalar $\bar{K}n.\bar{R}$ es arbitrariamente pequeño. Esto equivale a suponer que en las regiones que va recorriendo la partícula, las variaciones del campo se deben fundamentalmente a cambios temporales y no espaciales. Adicionalmente consideraremos velocidades muy pequeñas, de modo que el cociente v/c sea muy pequeño. Aquí se verá la utilidad del tendencioso factor de normalización, pues la aparición de c en él permitirá que subsistan términos que de otro modo eliminaríamos.

Haciendo estas consideraciones es directo obtener la ecuación de movimiento aproximada

(44)
$$m\ddot{\bar{x}} = -e\nabla\phi + e\sqrt{\frac{4\pi}{L^3}}\sum_{n,\sigma}\hat{e}_{n\sigma}\left(c_{2n}\,\mathrm{sen}\,\omega_n t - c_{1n}\cos\omega_n t\right) - $$
$$- e^2\,\frac{4\pi}{L^3}\sum_{n,\sigma}\hat{e}_{n\sigma}\int_{t_0}^{t}\cos\omega_n(t-\tau)\;\hat{e}_{n\sigma}\cdot\dot{\bar{x}}(\tau)\,d\tau\,.$$

Los dos primeros términos son funciones establecidas del espacio y el tiempo, y corresponden al campo externo que existía al comenzar el estudio del movimiento. Están dadas y son independientes de la trayectoria de la partícula. Es lo que habitualmente se conoce como fuerza externa $\bar{F}ext$, cuando son incluídas en el último término las modificaciones al campo, y con ello a la fuerza de interacción, debidas al movimiento de la partícula. A este último término dedicaremos nuestra atención.

Vamos a intercambiar la suma con la integral. Ahora pasaremos al límite en que tenemos un contínuo de frecuencias, de modo que la serie de Fourier se transforma en una integral. El elemento de volúmen en el espacio de los vectores de onda $\bar{K}n$ lo obtenemos recordando la condición (14), que definía los números enteros Nni con $K_{ni} = \frac{2\pi}{L} N_{ni}$, i=x,y,z, de donde

(45)
$$d\bar{N} = \left(\frac{L}{2\pi}\right)^3 d^3K\,.$$

Por otro lado, notamos que el producto escalar es la proyección de la velocidad en la dirección de polarización, perpendicular a la de propagación $\hat{k}n$ por lo que la suma sobre el índice σ, que cubre ambas polarizaciones posibles, multiplicada por el vector unitario $\hat{e}_{n\sigma}$, nos da la componente transversal de la velocidad $\dot{x}_{\perp}$, que también podemos escribir como la velocidad menos su componente en la dirección de propagación $\dot{x}\cdot\hat{k}_n\,\hat{k}_n$, es decir

$$(46)\qquad \sum_{n\sigma} \hat{e}_{n\sigma}\cdot\dot{x}\;\hat{e}_{n\sigma} = \dot{x} - \sum_n \dot{x}\cdot\hat{k}_n\,\hat{k}_n \quad .$$

El elemento de volúmen del vector de onda lo escribimos en coordenadas polares esféricas $d^3K = K^2 dK \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$, con lo que el término analizado queda

$$(47)\qquad -e^2\,\frac{4\pi}{L^3}\,\frac{L^3}{8\pi^3}\int_{t_0}^{t} d\tau \int_0^{\infty} \cos w(t-\tau)\, K^2 dK \int_0^{\pi}\!\!\int_0^{2\pi} \left(\dot{x} - \dot{x}\cdot\hat{k}\,\hat{k}\right) \sin\theta\, d\theta\, d\varphi .$$

Ubicamos por comodidad a la velocidad en la dirección z, y por ello $\dot{x} = \dot{x}\,\hat{z}$. Al vector unitario en la dirección de propagación lo descomponemos en sus componentes cartesianas, usando que es el vector unitario radial

$$\hat{k} = \sin\theta\cos\varphi\,\hat{x} + \sin\theta\sin\varphi\,\hat{y} + \cos\theta\,\hat{z} \qquad ,$$

e integramos sobre las variables angulares. Como cos φ y sen φ al ser integradas sobre un período completo se anulan, solo queda la componente en la dirección de z, que puede integrarse directamente, resultando para la integral sobre los ángulos

$$(48)\qquad \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}(\dot{x} - \dot{x}\cdot\hat{k}\,\hat{k})\operatorname{sen}\theta\, d\theta\, d\varphi = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}(\dot{x} - \dot{x}\cos^2\theta\,\hat{z})\operatorname{sen}\theta\, d\theta\, d\varphi = \frac{8\pi}{3}\dot{x} .$$

Si sustituimos este resultado en (47), cambiamos la variable de integración de K a ω , usando $K = \omega/c$ y observamos que

$$\omega^2 \cos\omega(t-\tau) = -\frac{d^2}{d\tau^2}\cos\omega(t-\tau) \qquad ,$$

podremos reescribir (47) en la forma

$$(49)\qquad + \frac{4e^2}{3\pi c^3}\int_{t_0}^{t}\dot{x}(\tau)\,\frac{d^2}{d\tau^2}\left(\int_0^{\infty}\cos\omega(t-\tau)\,d\omega\right)d\tau .$$

Para efectuar esta integral haremos uso de las propiedades de la Delta de Dirac. En particular, consideremos la definición

$$(50)\qquad \delta(t-\tau) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\cos\omega(t-\tau)\,d\omega ,$$

y las propiedades de sus derivadas

$$\delta'(t-\tau) = -\frac{d\,\delta(t-\tau)}{d(t-\tau)} = \frac{\delta(t-\tau)}{t-\tau} \qquad ,$$

$$(51) \qquad \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\, \delta'(\lambda)\, d\lambda = -f'(0) \quad .$$

Adicionalmente usaremos la siguiente extensión 'razonable' de la propiedad de definición

$$(52) \qquad \int_{-\infty}^{0} f(x)\, \delta(x)\, dx = \frac{f(0)}{2} \quad .$$

Integrando por partes dos veces la ecuación (43), y con el uso de los resultados mencionados, se llega a .

$$(53) \qquad -\frac{4e^2}{3c^3}\left(\ddot{x}(t)\,\delta(0) - \dot{x}(t)\,\frac{\delta(0)}{0}\right) + \frac{2e^2}{3c^3}\,\dddot{x}(t) \; .$$

Las deltas de Dirac evaluadas en cero representan infinitos, y se las puede considerar simplemente como una forma simbólica de éstos. Sustituyendo el resultado obtenido en la ecuación de movimiento (44), ésta queda expresada en la forma

$$(54) \qquad m\ddot{x} = \bar{F}_{ext} + \frac{2e^2}{3c^3}\dddot{x} - \frac{4e^2}{3c^3}\delta(0)\,\ddot{x} + \frac{4e^2}{3c^3}\,\frac{\delta(0)}{0}\,\dot{x} \quad .$$

Uno de los infinitos multiplica a la aceleración, y podría ser considerado como un término adicional de masa, divergente como ocurre con la masa electromagnética de la partícula puntual. El otro infinito no tenemos donde ponerlo, y lo esconderemos debajo de la alfombra. Nos limitaremos a recordar que esta ecuación es divergente, que hay infinitos que no hemos podido eliminar, pero no los escribiremos, con lo que la ecuación (54) se reduce a

$$(55)\qquad m\ddot{x} = \bar{F}_{ext} + \frac{2e^2}{3c^3}\dddot{x} \quad ,$$

que es justamente la ecuación de Abraham-Lorentz.

En primer lugar, este resultado muestra un poderoso argumento a favor de la ecuación general de movimiento (38). Luego de hacer dos aproximaciones muy fuertes, obtenemos la misma ecuación dinámica que es aceptada como válida en la mayoría de los textos avanzados de electrodinámica clásica. El hecho desagradable representado por la presencia de los infinitos lo compartimos con todas las demás deducciones, de modo que no nos sentiremos personalmente afectados.

Analicemos el sentido físico de las aproximaciones realizadas. Ya comentamos en la crítica a la ecuación de A--L, que la mayoría de las deducciones formales consideran a la carga instantáneamente en reposo, o moviéndose con velocidad muy pequeña (Landau,1970; Jackson,1975). Al hacer que la velocidad de la partícula sea muy pequeña respecto de la de la luz (v/c→ 0), hemos efectuado una suposición del mismo tipo. Cabe resaltar que en el límite no relativista lo que se omite es el cuadrado del cociente de la velocidades, de manera que la nuestra es una restricción adicional, con la partícula moviéndose muy lentamente.

La aproximación de onda larga introdujo la hipótesis de que los campos externos varían muy lentamente. Puede demostrarse (Landau,1970, pg.273) que esto equivale a suponer que la fuerza externa es mucho mayor que la de frenado por radiación, y que las longitudes de onda para las cuales es válida esta ecuación deben satisfacer

$$\lambda \gg \frac{e^2}{mc^2} \tag{56}$$

donde el término derecho es el radio clásico del electrón. Ya volveremos sobre esto al considerar partículas con estructura.

Es muy importante que recalquemos que las limitaciones de la ecuación de Abraham-Lorentz habitualmente atribuídas a la electrodinámica, aquí van apareciendo como consecuencia directa de las limitaciones que nosotros impusimos al tratar de aproximar la ecuación general, y si bien aún no hemos mostrado que podemos superarlas, al menos queda claro el origen de algunas de las dificultades,y éstas no presentan relación alguna con la necesidad de recurrir a la mecánica cuántica que menciona, entre otros, Landau (Landau, 1970).

Un comentario adicional merece un aspecto de la propia aproximación de onda larga realizada por nosotros. En esta aproximación hay frecuencias muy altas que no deben considerarse permitidas al sistema físico, sin embargo, al pasar de la suma sobre las componentes de Fourier a una integral, extendimos los límites de cero a infinito, es decir que sumamos sobre términos no permitidos.

Una forma de excusar nuestro proceder es indicar el orden de magnitud de esos términos. El radio clásico del electrón, respecto del cual comparamos las longitudes de onda, es de unos 2.80 x 10E-13 cm, lo que está en la región lejana de los rayos gamma, en el límite de las radiaciones electromagnéticas conocidas.

De todos modos, desde un punto de vista de principios podemos corregir este inconveniente introduciendo una función de corte en la integral. Si proponemos una función $g(\omega)$ que se anule cuando ω tiende a infinito, en lugar de la ecuación (49) tendremos

$$(57)\qquad -\frac{4e^2}{3\pi c^3}\int_{t_0}^{t} d\sigma \int_0^{\infty} g(\omega)\, \cos\omega(t-\sigma)\, \dot{x}(\sigma)\, \omega^2\, d\omega\,,$$

que puede ser integrado dos veces por partes, dando como resultado:

$$(58)\qquad -\frac{4e^2}{3\pi c^3}\int_0^{\infty} g(\omega)\, d\omega \Big\{ \dot{x}(t_0)\,\omega\, \operatorname{sen}\omega(t-t_0) + \big[\ddot{x}(t) - \cos\omega(t-t_0)\big]\ddot{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \cos[\omega(t-\sigma)]\, \dddot{x}(\sigma)\, d\sigma \Big\}\,.$$

Un aspecto muy importante de este resultado es que para g(ω) bien comportadas desaparecen los infinitos.

Tomemos por ejemplo la forma más burda de g(ω)

$$(59)\qquad g(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega < \Omega \\ 0 & \text{si } \omega > \Omega \end{cases}$$

donde Ω es una cierta frecuencia límite. Sustituyendo en (51) llegamos a

$$(60)\qquad \frac{4e^2}{3\pi c^3}\Big\{ -\dot{x}(t_0)\,\frac{\operatorname{sen}\Omega(t-t_0)}{(t-t_0)^2} + \dot{x}(t_0)\,\frac{\cos\Omega(t-t_0)}{t-t_0} - \ddot{x}(t)\,\Omega + \frac{\operatorname{sen}\Omega(t-t_0)}{t-t_0}\,\ddot{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t}\frac{\operatorname{sen}\Omega(t-\sigma)}{t-\sigma}\,\dddot{x}(\sigma)\, d\sigma \Big\}\,.$$

Si recordamos la definición de la delta de Dirac como un límite

$$\delta(t-\tau) = \lim_{\Omega\to\infty}\frac{1}{\pi}\,\frac{\operatorname{sen}\Omega(t-\tau)}{t-\sigma}\,,$$

veremos que al hacer tender Ω a infinito recuperamos la expresión (53). Usaremos estos resultados al encontrar, en los siguientes capítulos, situaciones físicas en las que naturalmente se introduce un factor de corte.

Revisemos lo que hemos hecho.

Expresamos el campo electromagnético en sus componentes de onda plana. Luego encontramos la Hamiltoniana del sistema físico compuesto por una partícula cargada y el campo que la rodea. Calculamos las ecuaciones dinámicas de la partícula y el campo, resolviendo estas últimas en función de la trayectoria de la partícula, y así encontramos una ecuación de movimiento cerrada y exacta para la partícula puntual no relativista. Vimos que al hacer la aproximación de velocidades pequeñas y onda larga, se recupera la ecuación de Abraham-Lorentz, con todas sus dificultades, y mostramos que algunas de ellas provienen de las aproximaciones y no son intrínsecas a la teoría electromagnética.

Tenemos en nuestras manos una descripción teórica que, al introducir una función de corte a las frecuencias, al menos elimina las divergencias de la ecuación. Exploraremos esa posibilidad en los siguientes capítulos al obtener esa función de la estructura de la partícula, y al presentar una formulación más general.

Un último comentario: hemos dicho que $\bar{A}$ es el potencial vectorial del cual se deriva el campo electromagnético. Todas las modificaciones al campo producidas por el movimiento de la partícula están, entonces, contenidas en ese potencial, a través de los cambios en las amplitudes.

CAPITULO II : LA ECUACION INTEGRODIFERENCIAL (EIDAL) PARA PARTICULA CON ESTRUCTURA.

1- ALGUNOS COMENTARIOS PREVIOS

Hemos mostrado en el capítulo anterior que podemos usar la descomposición espectral del campo para obtener, luego de severas aproximaciones, la ecuación de Abraham - Lorentz, con todos los defectos que ya señalamos.

Ahora vamos a recorrer un camino planteado recientemente para superar algunas de esas dificultades: tomar en consideración la estructura de la partícula (de la Peña et al,1980; Zogaib, 1984). Haremos esto usando la misma técnica de descomposición del campo en sus componentes de Fourier con dos objetivos. El primero es mostrar cuán fructífera y directa es esta formulación, que permite recuperar resultados conocidos con facilidad, y dejando al desnudo las aproximaciones realizadas. Aprovecharemos para discutir la ecuación de movimiento resultante, sus similitudes y diferencias con la EIDAL ya estudiada, y analizar el problema de la causalidad.

El segundo objetivo es preparar todas las herramientas que en el siguiente capítulo nos permitirán plantear el problema en una forma más general.

2- DEDUCCION DE LA ECUACION DE MOVIMIENTO

En la deducción de la ecuación de movimiento usaremos la Hamiltoniana del campo (ecuación 1(16)), ya discutida anteriormente

$$H_c = \frac{1}{8\pi} \int \left(\bar{E}^2 + \bar{H}^2 \right) d^3r \quad , \tag{1}$$

y deberemos construir una expresión para la Hamiltoniana de la partícula extensa, con una distribución de carga dada $\rho(\bar{r},t)$, y una distribución de masa $\rho_m(\bar{r},t)$.

Generalizando los conceptos usados para partícula puntual, escribimos la energía cinética T y la potencial U en la forma

$$\begin{aligned} T &= \int \frac{1}{2} \rho_m(\bar{r},t)\, v^2(\bar{r},t)\, d^3r \quad , \\ U &= \int \left\{ \rho(\bar{r},t)\, \phi(\bar{r}) - \frac{\rho(\bar{r},t)}{c}\, \bar{A}(\bar{r},t) \cdot \bar{v}(\bar{r},t) \right\} d^3r \quad ; \end{aligned} \tag{2}$$

donde las integrales se extienden a todo el espacio.

La Lagrangiana, construída como T - U, queda entonces como

$$L = \frac{1}{2}\int \rho_m(\bar{r},t)\, v^2(\bar{r},t)\, d^3r - \int \rho(\bar{r},t)\, \varphi(\bar{r},t)\, d^3r + \frac{1}{c}\int \rho(\bar{r},t)\, \bar{A}(\bar{r},t)\cdot \bar{v}(t)\, d^3r \,, \tag{3}$$

que es la forma integral de la expresión para la lagrangiana de un sistema discreto de partículas (Goldstein, 1979). En ésta puede verse la dificultad del paso a una distribución continua de carga y masa. La posición de cada partícula debe considerarse como el parámetro de integración, y la velocidad deberá depender de ese parámetro. Deberíamos recurrir al formalismo de la mecánica de fluidos para tener claridad sobre las coordenadas generalizadas que se están utilizando.

Como los intereses de este estudio se dirigen en otra dirección, haremos unas restricciones muy importantes sobre el movimiento y las características de la partícula que nos darán una salida al problema. De aquí en adelante supondremos que las distribuciones de carga y masa son infinitamente rígidas, y poseen simetría esférica. De este modo al introducir la coordenada $\bar{R}(t)$ del centro de masa de la partícula, que coincidirá con la del centro de carga, describiremos el comportamiento traslacional de la partícula en su conjunto. Además supondremos que éstos son los únicos grados de libertad del sistema, de manera que la partícula NO rota. Para garantizarlo limitaremos nuestra descripción a campos que casi no varían en una distancia equivalente al radio de la partícula. Usando la condición de simetría esférica nos aseguramos que todos los momentos multipolares asociados a la distribución de carga son nulos, por lo que ningún campo uniforme puede aplicar torcas sobre la partícula.

Resumiendo: con las restricciones mencionadas, la distribución de carga tiene la forma $\rho(\bar{r}) = \rho(|\bar{x}-\bar{r}|)$, y todos los puntos del cuerpo comparten la misma velocidad $\bar{v} = d\bar{x}/dt = \dot{\bar{x}}$.

Podemos escribir la Lagrangiana restringida como

$$(4) \quad L = \frac{1}{2} m v^2 - \int \rho(\bar{r},t)\, \phi(\bar{r},t)\, d^3r + \frac{1}{c}\, \bar{v} \cdot \int \rho(\bar{r},t)\, \bar{A}(\bar{r},t)\, d^3r \, .$$

El momento canónico conjugado a la posición del centro de masa $\bar{x}$ es

$$(5) \quad \bar{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\bar{x}}} = m\bar{v} + \frac{1}{c} \int \rho(\bar{r},t)\, \bar{A}(\bar{r},t)\, d^3r \quad ,$$

de donde es directo que

$$(6) \quad \bar{v} = \frac{\bar{p}}{m} - \frac{1}{mc} \int \rho(\bar{r},t)\, \bar{A}(\bar{r},t)\, d^3r \quad .$$

La Hamiltoniana para la partícula la calculamos en la forma habitual

$$(7)\quad H = \bar{p}\cdot\bar{v} - L = \int \rho\,\phi\, d^3r + \frac{1}{2m}\left(\bar{p} - \frac{1}{c}\int \rho \bar{A}\, d^3r\right)^2 .$$

Para conocer la Hamiltoniana del sistema solo nos resta proponer la descomposición espectral del potencial vectorial, como en el capítulo I. Al igual que allí suponemos que las fronteras están constituidas por una caja cúbica de arista L, en cuyas caras el potencial vectorial es periódico, y trabajaremos en la norma de Coulomb.

Entonces, con

$$(8)\quad \bar{A} = \sqrt{\frac{4\pi c^2}{L^3}} \sum_{n,\sigma} \hat{e}_{n\sigma}\left(q_{n\sigma}(t)\cos \bar{K}_n\cdot\bar{r} + \frac{p_{n\sigma}(t)}{\omega_n}\,\mathrm{sen}\,\bar{K}_n\cdot\bar{r}\right) ,$$

y dado que expresamos al campo como un conjunto de osciladores armónicos individuales, la Hamiltoniana del sistema será

$$(9)\quad H = \int \rho(\bar{r})\,\phi(\bar{r})\, d^3r + \frac{1}{2m}\left(\bar{p} - \frac{1}{c}\int \rho(\bar{r})\,\bar{A}(\bar{r},t)\, d^3r\right)^2 + \sum_{n,\sigma}\frac{1}{2}\left(p_{n\sigma}^2 + \omega_n^2 q_{n\sigma}^2\right) .$$

Siguiendo los mismos pasos que para la partícula puntual, calculamos las ecuaciones de Hamilton para las amplitudes del campo, obteniendo

$$(10)\quad \dot{q}_{n\sigma} = \frac{\partial H}{\partial p_{n\sigma}} = -\sqrt{\frac{4\pi}{L^3}}\,\frac{1}{\omega_n}\,\frac{1}{\lambda}\cdot\hat{e}_{n\sigma}\int \rho(\bar{r})\,\mathrm{sen}\,\bar{K}_n\cdot\bar{r}\, d^3r + p_{n\sigma} ,$$

$$\text{(11)}\quad \dot{p}_{n\sigma} = \frac{-\partial \mathcal{H}}{\partial q_{n\sigma}} = \sqrt{\frac{4\pi}{L^3}}\; \dot{\bar{x}} \cdot \hat{e}_{n\sigma} \int \rho(\bar{r}) \cos \bar{k}_n \cdot \bar{r}\, d^3 r - \omega_n^2\, q_{n\sigma} \;,$$

que al resolver en función de la trayectoria de la partícula, tiene como soluciones las siguientes expresiones

$$\text{(12)}\quad p_{n\sigma} = \sqrt{\frac{4\pi}{L^3}} \int_{t_0}^{t} \int_V \dot{\bar{x}}(\tau) \cdot \hat{e}_{n\sigma}\, \rho(\bar{r},\tau) \cos[\omega_n (t-\tau) - \bar{k}_n \cdot \bar{r}]\, d^3 r\, d\tau \; + \\ + c_{1n} \cos \omega_n t - c_{2n} \operatorname{sen} \omega_n t \;,$$

$$\text{(13)}\quad q_{n\sigma} = \sqrt{\frac{4\pi}{L^3}} \int_{t_0}^{t} \int_V \dot{\bar{x}}(\tau) \cdot \frac{\hat{e}_{n\sigma}}{\omega_n}\, \rho(\bar{r},\tau) \operatorname{sen}[\omega_n (t-\tau) - \bar{k}_n \cdot \bar{r}]\, d^3 r\, d\tau \; + \\ + \frac{c_{1n}}{\omega_n} \operatorname{sen} \omega_n t + \frac{c_{2n}}{\omega_n} \cos \omega_n t \;;$$

donde si $t_0 = 0$, tendremos

$$\text{(14)}\quad c_{1n} = p_{n\sigma}(0) \;, \qquad c_{2n} = \omega_n\, q_{n\sigma}(0) \;.$$

Para construir las ecuaciones dinámicas sólo resta usar esta información. Por ser más directo usaremos la ley de fuerza de Lorentz, que para una partícula con estructura queda expresada como

$$\text{(15)}\quad \bar{F} = \int \left[\rho(\bar{r},t)\, \bar{E}(\bar{r},t) + \frac{1}{c}\, \rho(\bar{r},t)\; \dot{\bar{x}} \times \bar{H}(\bar{r},t) \right] d^3 r \;.$$

Ya mostramos (ecs.(I-35) y (I-36)) que, con $\bar{H} = \nabla \times \bar{A}$

$$\text{(16)}\quad \dot{\bar{x}} \times \bar{H} = \sqrt{\frac{4\pi c^2}{L^3}} \sum_{n,\sigma} \left(\frac{p_{n\sigma}}{\omega_n} \cos \bar{k}_n \cdot \bar{r} - q_{n\sigma} \operatorname{sen} \bar{k}_n \cdot \bar{r} \right) \left[\dot{\bar{x}} \cdot \hat{e}_{n\sigma}\, \bar{k}_n - \hat{e}_{n\sigma}\, \bar{k}_n \cdot \dot{\bar{x}} \right] ,$$

y que el campo eléctrico $\bar{E} = -\nabla\phi - \frac{1}{c}\partial\bar{A}/\partial t$, se puede expresar

$$\bar{E} = -\nabla\phi - \sqrt{\frac{4\pi}{L^3}} \sum_{n,\sigma} \left(p_{n\sigma} \cos \bar{K}_n \cdot \bar{r} - w_n q_{n\sigma} \operatorname{sen} \bar{K}_n \cdot \bar{r} \right) \hat{e}_{n\sigma} , \tag{17}$$

con esto y la segunda ley de Newton, obtenemos al sustituir

$$m\ddot{\bar{x}} = - \int \rho(\bar{r},t) \nabla\phi' \, d^3r \; +$$

$$+ \sqrt{\frac{4\pi}{L^3}} \int_V \sum_{n,\sigma} \left(\frac{p_{n\sigma}}{w_n} \cos \bar{K}_n \cdot \bar{r} - q_{n\sigma} \operatorname{sen} \bar{K}_n \cdot \bar{r} \right) \left[\dot{\bar{x}} \cdot \hat{e}_{n\sigma} \bar{K}_n - \hat{e}_{n\sigma} \left(\bar{K}_n \cdot \dot{\bar{x}} + w_n \right) \right] \rho(\bar{r},t) \, d^3r . \tag{18}$$

Introducimos en estas ecuaciones las expresiones obtenidas para $p_{n\sigma}$ y $q_{n\sigma}$ (ecs. (12) y (13)), y llegamos a la ecuación de movimiento para partícula con estructura, con movimiento puramente traslacional, buscada:

$$m\ddot{\bar{x}} = - \int \rho \nabla\phi' \, d^3r \; +$$

$$+ \sqrt{\frac{4\pi}{L^3}} \sum_{n,\sigma} \int_V \left[c_{1n} \cos(w_n t + \bar{K}_n \cdot \bar{r}) - c_{2n} \operatorname{sen}(w_n t + \bar{K}_n \cdot \bar{r}) \right] \left[\frac{\dot{\bar{x}}}{c} \cdot \hat{e}_{n\sigma} \hat{k}_n - \hat{e}_{n\sigma} \left(\hat{k}_n \cdot \frac{\dot{\bar{x}}}{c} + 1 \right) \right] \rho(\bar{r}) \, d^3r \; + \tag{19}$$

$$+ \frac{4\pi}{L^3} \sum_{n,\sigma} \int_{t_0}^{t} \int_V \int_{V'} \dot{\bar{x}}(\tau) \cdot \hat{e}_{n\sigma} \, \rho(\bar{r},t) \, \rho(\bar{r}',\tau) \cos\left[w_n(t-\tau) + \bar{K}_n \cdot (\bar{r}-\bar{r}') \right] \left[\frac{\dot{\bar{x}}}{c} \cdot \hat{e}_{n\sigma} \hat{k}_n - \hat{e}_{n\sigma} \left(\hat{k}_n \cdot \frac{\dot{\bar{x}}}{c} + 1 \right) \right] d^3r' \, d^3r \, d\tau .$$

Esta es la expresión que queríamos obtener. Sin embargo, su aspecto es oscuro y difícil de interpretar, pues solo el último término incluye una sumatoria y tres integraciones. Podemos observar, sin embargo, un primer resultado alentador: si la partícula es pequeña, podremos aproximar el argumento del coseno en el último término, en su parte espacial, por los valores de la posición del centro de masa, de modo que

$$(20)\quad \int_V\int_{V'} \rho(\bar{x}',t')\,\rho(\bar{x},t)\,\cos\left[\omega_n(t-t')+\bar{k}_n\cdot(\bar{x}-\bar{x}')\right] d^3x'\, d^3x = e^2\cos\left[\omega_n(t-t')+\bar{k}_n\cdot(\bar{x}(t)-\bar{x}(t'))\right].$$

Así, aproximando las argumentos de las funciones seno y coseno también en el segundo término por sus valores en el centro de masa, y recordando que la integral sobre todo el volúmen de la densidad de carga es la carga que hemos llamado e, la ecuación (19) se reduce a la (I-43), que es la ecuación general para partícula puntual.

De esta manera podemos tener bastante confianza en la expresión obtenida, dado que se reduce al caso puntual cuando la partícula es muy pequeña.

3- ANALISIS DE LA ECUACION DE MOVIMIENTO

Ya hemos comentado la dificultad para obtener información de la ecuación de movimiento tal como está planteada. Vamos a reescribirla para entenderla mejor.

El último término es el más complicado y lo analizaremos por separado. Para ello escribimos el coseno como la parte real de una exponencial compleja, y multiplicamos toda la expresión por la unidad escrita como

$$(21)\qquad 1 = e^{i\bar{K}_n\cdot(\bar{x}(\tau)-\bar{x}(t))}\, e^{-i\bar{K}_n\cdot(\bar{x}(\tau)-\bar{x}(t))} ,$$

con lo que llegamos a la siguiente expresión para este término

$$(22)\qquad \frac{4\pi}{L^3}\, Re\left\{\int_{t_0}^{t}\sum_{n,\sigma} \dot{\bar{x}}(\tau)\cdot\hat{e}_{n\sigma}\,\hat{e}_{n\sigma}\, e^{i\omega_n(t-\tau)+i\bar{K}_n\cdot(\bar{x}(t)-\bar{x}(\tau))} \ldots\right.$$

$$\left.\ldots \int_{V'}\rho(\bar{r}',\tau)\, e^{-i\bar{K}_n\cdot[\bar{r}'-\bar{x}(\tau)]}\, d^3r' \int_{V}\rho(\bar{r},t)\, e^{i\bar{K}_n\cdot[\bar{r}-\bar{x}(t)]}\, d^3r\, d\tau\right\} .$$

Ahora usaremos la condición de que la distribución de carga sea esféricamente simétrica, pues si definimos $\bar{s} = \bar{r} - \bar{x}(t)$, entonces

$$(23)\qquad \rho(\bar{r},t) = \rho(|\bar{r}-\bar{x}(t)|) = \rho(s) ,$$

y podemos introducir el factor de forma, conocido de la teoría de la dispersión, definido como

$$(24)\qquad \tilde{\rho}(K) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\,\frac{1}{e}\int_V \rho(s)\, e^{-i\bar{K}\cdot\bar{s}}\, d^3s$$

con lo que (22) resulta ser igual a

$$(25)\qquad \frac{4\pi}{L^3}(2\pi)^3 e^2\, Re\left\{\int_{t_0}^{t}\sum_{n,\sigma}\dot{\bar{x}}(\tau)\cdot\hat{e}_{n\sigma}\,\hat{e}_{n\sigma}\, e^{i\omega_n(t-\tau)+i\bar{K}_n\cdot(\bar{x}(t)-\bar{x}(\tau))}\,|\tilde{\rho}(K_n)|^2\, d\tau\right\} .$$

Volvamos a escribir la ecuación de movimiento completa, con el último término tal como aparece en (25). Esta es

$$m\ddot{\vec{x}} = -\int \rho(\vec{r},t)\,\nabla\phi\, d^3r \; +$$

$$(26)\quad + \sqrt{\frac{4\pi}{L^3}}\sum_{n,\sigma}\int_V \left[e_{1n}\cos(\omega_n t + \vec{k}_n\cdot\vec{r}) - c_{2n}\,\mathrm{sen}(\omega_n t + \vec{k}_n\cdot\vec{r})\right]\left[\frac{\dot{\vec{x}}}{c}\cdot\hat{e}_{n\sigma}\,\hat{k}_n - \hat{e}_{n\sigma}\left(\hat{k}_n\cdot\frac{\dot{\vec{x}}}{c}+1\right)\right]\rho(\vec{r},t)\,d^3r \; +$$

$$+ \frac{4\pi}{L^3}\,e^2(2\pi)^3\sum_{n,\sigma}\int_{t_0}^{t}\cos\left[\omega_n(t-\tau) + \vec{k}_n\cdot(\vec{x}(t)-\vec{x}(\tau))\right]\dot{\vec{x}}(\tau)\cdot\hat{e}_{n\sigma}\,|\tilde{\rho}(k_n)|^2\,d\tau\left[\frac{\dot{\vec{x}}}{c}\cdot\hat{e}_{n\sigma}\,\hat{k}_n - \hat{e}_{n\sigma}\left(\hat{k}_n\cdot\frac{\dot{\vec{x}}}{c}+1\right)\right].$$

Nuevamente tenemos una ecuación con la misma cara que la obtenida para partícula puntual, pero en este caso con un factor de corte adicional $(2\pi)^3|\tilde{\rho}(k_n)|^2$, que se introduce naturalmente mediante la distribución de carga.

Este hecho en sí mismo es muy importante, pues el origen de las divergencias en la ecuación de Abraham-Lorentz se encuentra, según se discutió en el capítulo anterior, en no tener una cota superior a las frecuencias del campo a las que responde la partícula. Aquí tenemos una función matemática que "cortará" a la integrales, y cuyo origen físico es **bien claro: la carga está extendida. Tengamos presente este descubrimiento, pues más adelante lo encontraremos en otro** contexto.

Siguiendo el camino trazado en el estudio de la partícula puntual, estudiaremos el límite de velocidades pequeñas y en la aproximación de onda larga para el campo. Así, despreciamos términos de orden $|v/c|$, y suponemos que las variaciones espaciales del campo son muy pequeñas comparadas con las temporales ($\bar{k}_n \cdot \bar{x} \ll \omega_n t$). Recordemos que al iniciar este capítulo impusimos que los gradientes del campo sean pequeños en distancias del orden del radio de la partícula. Esta condición es consistente con la aproximación actual.

Con estas consideraciones, pasando al límite continuo en la suma sobre las componentes espectrales, realizando las integraciones angulares y llamando "fuerza externa" $\bar{F}_{ext}$ a los términos que sólo dependen de la posición actual de la partícula, la ecuación de movimiento resulta ser

$$(27) \quad m\ddot{x} = \bar{F}_{ext} - (2\pi)^3 \frac{4e^2}{3\pi c^3} \int_{t_0}^{t} \int_0^{\infty} \cos \omega (t-\tau)\, \dot{x}(\tau) \left| \tilde{\rho}(\omega/c) \right|^2 \omega^2 \, d\omega \, d\tau \, .$$

Esta es justamente la ecuación estudiada en (I-57) y (I-58), salvo que ahora la función de corte $g(\omega) = (2\pi)^3 |\tilde{\rho}(\omega/c)|$ se introduce mediante argumentos físicos, y no *ad hoc* como en aquel caso.

Integrando dos veces por partes obtuvimos la ec. (I-

-57), que reproducimos con el factor de corte adecuado

$$(28)\quad m\ddot{\vec{x}} = \vec{F}_{ext} - (2\pi)^3 \frac{4e^2}{3\pi c^3}\int_0^\infty |\tilde{\rho}(\tfrac{\omega}{c})|^2 \Big\{ \dot{x}(t_0)\,\omega \operatorname{sen}\omega(t-t_0) + $$
$$ + \ddot{x}(t) - \cos\omega(t-t_0)\,\ddot{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t}\cos\omega(t-\tau)\,d\sigma \Big\}\, d\omega .$$

En esta expresión la aceleración $\ddot{x}(t)$ aparece a ambos lados del signo igual. Vamos a mostrar que el coeficiente que la acompaña en el lado derecho corresponde a la masa electromagnética (en la formulación no covariante).

Para esto será necesario evaluar la integral del factor de forma definido en (24) como

$$(29)\qquad \tilde{\rho}(K) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\,\frac{1}{e}\int_V \rho(r)\, e^{-i\vec{K}\cdot\vec{r}}\, d^3r .$$

La forma explícita podemos conocerla efectuando la integración sobre las variables angulares (usando coordenadas esféricas), y obtenemos

$$(30)\quad \tilde{\rho}(K) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}}\,\frac{1}{e}\int_0^\infty \rho(r)\, r^2 \int_0^\pi e^{-iKr\cos\theta} \operatorname{sen}\theta\, d\theta\, dr = \frac{2}{e(2\pi)^{1/2}}\int_0^\infty \rho(r)\, r\, \frac{\operatorname{sen} Kr}{K}\, dr .$$

Usando este resultado y el hecho de que

$$(31)\qquad \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} K r}{K}\, dK = \frac{\pi}{2} ,$$

es directo llegar al resultado buscado:

$$(32) \qquad \int_0^{\infty} \left|\tilde{\rho}(k)\right|^2 dk = \frac{\pi}{2e^2}\,\frac{1}{(2\pi)^3}\int_V\!\!\int_{V'} \frac{\rho(r)\,\rho(r')}{|\bar{r}-\bar{r}'|}\, d^3r'\, d^3r \,.$$

El coeficiente de la aceleración en (28) es entonces

$$(33) \qquad \frac{4e^2}{3\pi c^3}\,(2\pi)^3\int_0^{\infty}\left|\tilde{\rho}\left(\frac{\omega}{c}\right)\right|^2 d\omega = \frac{4}{3c^2}\,\frac{1}{2}\int_V\!\!\int_{V'} \frac{\rho(r)\,\rho(r')}{|\bar{r}-\bar{r}'|}\, d^3r'\, d^3r \,.$$

La energía electromagnética debida a la interacción de la carga consigo misma (autoenergía o energía propia) es

$$(34) \qquad U = \frac{1}{2}\int_V\!\!\int_{V'} \frac{\rho(r)\,\rho(r')}{|\bar{r}-\bar{r}'|}\, d^3r'\, d^3r = m_e c^2 \,,$$

donde m_e significa masa electromagnética, y se la asocia con la energía según el conocido resultado de la relatividad especial, que es parte integrante de la electrodinámica clásica.

Resumiendo los cálculos realizados, el coeficiente de la aceleración se relaciona con la masa electromagnética en la forma

$$(35) \qquad \frac{4e^2}{3\pi c^3}\,(2\pi)^3\int_0^{\infty}\left|\tilde{\rho}\left(\frac{\omega}{c}\right)\right|^2 d\omega = \frac{4}{3}\, m_e \,.$$

El factor 4/3 es propio de una formulación no covariante, y puede reducirse a 3/3, como ya se indicó en el primer capítulo, proponiendo un tensor de esfuerzos con términos no electromagnéticos (Jackson,1950; de la Peña et al, 1980). Puede apreciarse que en nuestro formalismo, la masa tiene dos términos que aportan a ella: el que no depende de la carga, introducido por la ley dinámica, y el debido a la energía potencial de la distribución de carga. Podría pensarse al primero como debido a las fuerzas que mantienen unida la carga, o simplemente como asociado a la energía no electromagnética de ésta.

Volviendo sobre la ecuación de movimiento (20), tiene algunas características francamente no newtonianas. Aparece la aceleración inicial, de manera que necesitaremos tres condiciones iniciales para resolverla. Sin embargo, la parte fuertemente heterodoxa aparece en el último término. Allí tenemos una dependencia en la tercera derivada de la posición, tal como en la ecuación de Abraham-Lorentz, pero ésta es para todos los valores que ha tenido a lo largo de la trayectoria, es decir que es una ecuación con memoria.

Vemos que al introducir la estructura de la partícula, la ecuación de movimiento nos da algunos resultados enriquecedores, como la aparición explícita de la masa electromagnética, pero en otros aspectos sigue siendo difícil de interpretar.

Vamos a escribirla en otra forma ligeramente distinta, que nos ofrecerá un nuevo punto de vista. Para esto regresamos a la ecuación (27), hacemos una sola integración por partes, y sustituimos $\omega = k\,c$ para llegar a

$$m\ddot{\vec{x}} = \vec{F}_{ext} - (2\pi)^3 \frac{4e^2}{3\pi c}\left\{ \dot{\vec{x}}(t_0)\int_0^\infty |\tilde{\rho}(k)|^2 \operatorname{sen} ck(t-t_0)\,dk + \int_{t_0}^{t} \ddot{\vec{x}}(\sigma)\int_0^\infty k \operatorname{sen} ck(t-\sigma)\,|\tilde{\rho}(k)|^2\,dk\,d\sigma \right\}. \tag{36}$$

Si definimos la función $g(r)$ como

$$g(r) = \int_0^\infty k\,|\tilde{\rho}(k)|^2 \operatorname{sen} kr\,dk\,, \tag{37}$$

llegamos a la ecuación

$$m\ddot{\vec{x}} = \vec{F}_{ext} - (2\pi)^3 \frac{4e^2}{3\pi c}\left\{ \dot{\vec{x}}(t_0)\,g\big(c(t-t_0)\big) + \int_{t_0}^{t} \ddot{\vec{x}}(\sigma)\,g\big(c(t-\sigma)\big)\,d\sigma \right\}. \tag{38}$$

Esta es una ecuación integral para la aceleración, integrodiferencial para la posición de la partícula. El primero y segundo términos del lado derecho sólo dependen de la posición y el tiempo actuales de la partícula. Nuevamente obtuvimos una ecuación con memoria, pero en este caso para la aceleración.

Ya anteriormente se ha llegado a un resultado similar (de la Peña et al, 1980; Jiménez y Montemayor, 1983; Zosaib, 1984) siguiendo un camino distinto, el de desarrollar en serie de Taylor las derivadas respecto al tiempo retardado. Este hecho es sumamente significativo, pues muestra la consistencia de la teoría, y da confianza en el camino que estamos transitando para generalizar la ecuación de movimiento.

Cabe señalar que también existen diferencias entre la (38) y aquella a la que hacemos mención. Estas son dos: a) El término que depende de la velocidad inicial no aparece. b) La integral está evaluada desde menos infinito (en lugar de t_0) hasta t. Para que ambas expresiones resultaran iguales, deberíamos considerar en nuestro estudio un tiempo inicial infinitamente lejano, y suponer que la partícula partió del reposo, lo que es una situación particular dentro de las múltiples que podrían plantearse. En este sentido, la ec. (38) es más general.

Otra virtud de la ecuación de movimiento obtenida es que en el tiempo inicial t_0 tanto $g(c(t-t_0))$ como la integral se anulan, y (38) se reduce a la forma "newtoniana"

$$m\ddot{x}(t_0) = \bar{F}_{ext}(t_0) \quad . \tag{39}$$

Esto muestra que toda la información respecto al movimiento de la partícula, anterior al tiempo de inicio del estudio, está contenida en el campo; y los dos últimos términos estarían describiendo las pertubaciones a este campo debidas al movimiento de la propia partícula.

Si en (38) hacemos $\vec{F}ext = 0$, es decir anulamos el campo externo, quedarán sólo dos términos. El segundo depende de los valores anteriores de la aceleración, y si no hubo fuerzas externas esperamos que sean siempre nulos. Si en tiempos anteriores hubo aceleraciones, la carga sentirá sus efectos através del campo.

El primer término depende de la velocidad inicial, y de una función dada del tiempo, que fue definida en relación con la distribución de carga de la partícula. Este término provoca aceleraciones al tiempo t, aunque para todos los tiempos anteriores la partícula haya tenido velocidad constante. Este resultado no es razonable. Se elimina si imponemos

$$\dot{\vec{x}}(t_0) = 0 \quad . \tag{40}$$

¿Qué significa esto? Que nuestra ecuación de movimiento sólo es válida en el sistema en que la partícula partió del reposo. Esto puede entenderse como una consecuencia de las aproximaciones usadas, pero es claro que no limita nuestra capacidad de describir la dinámica, sólo nos obliga a tomar precauciones al hacer la descripción. Es una restricción menos fuerte que la usada en relación con la deducción habitual de A-L, pues se suele referir al sistema en el cual la partícula está en reposo a cada instante, y nosotros lo requerimos sólo en el instante inicial.

Si se cumple (40), la ecuación de movimiento resultante es

$$(41) \quad m\ddot{\vec{x}} = \vec{F}_{ext} - (2\pi)^3 \frac{4e^2}{3\pi c} \int_{t_0}^{t} \dddot{\vec{x}}(\tau)\, g\big(c(t-\tau)\big)\, d\tau \ .$$

4- EL PROBLEMA DE LA CAUSALIDAD

Ya mencionamos en el capítulo anterior que, al resolver la ecuación de Abraham-Lorentz, suele proponerse una tercera condición a la frontera que lleva a soluciones acausales. Algunos autores interpretan este tipo de soluciones planteando que existe una inconsistencia intrínseca en la electrodinámica clásica, que sólo puede superarse introduciendo la descripción cuántica (Rohrlich,1965; Landau,1970).

Vamos a mostrar que, en condiciones adecuadas, la ecuación de movimiento que hemos obtenido conduce a soluciones totalmente causales, en total acuerdo con la teoría que le dio origen. Para lograr este objetivo resolveremos la ecuación integral para la aceleración, y mostraremos las condiciones para que esta solución exista. Por comodidad definimos la siguiente constante

$$\alpha = (2\hbar)^3 \frac{4e^2}{3\pi c} \quad . \tag{42}$$

Ahora vamos a suponer que el tiempo inicial t_0 es aquel en que ponemos en marcha nuestros relojes, es decir $t_0 = 0$. Esto siempre se puede hacer si t_0 es finito. El caso en que el tiempo inicial es menos infinito está ampliamente discutido en las referencias ya citadas (de La Peña et al, 1980, en particular).

Haciendo estas consideraciones, escribimos la ecuación de movimiento en la siguiente forma:

$$m\ddot{x} = \bar{F}_{ext} - \alpha \int_0^t \ddot{x}(t')\,\sigma\,\text{[illegible]} \, . \tag{43}$$

Usando el teorema de la convolución para transformadas de Laplace, la integral puede escribirse, con $a(t) = \ddot{x}(t)$

(44) $$\int_0^t g(t-\tau)\,\bar{a}(\tau)\,d\tau = \mathcal{L}^{-1}\left(G(s)\,\bar{A}(s)\right),$$

donde aquí y en lo que resta del capítulo las funciones cuyo argumento sea s, que serán en general mayúsculas, denotan la transformada de Laplace de las funciones denotadas con las respectivas minúsculas cuyo argumento es el tiempo, y $\mathcal{L}^{-1}$ indica la transformada inversa.

Tomando las transformadas de Laplace de todos los términos en (43), y sustituyendo la expresión (44), llegamos a la siguiente ecuación algebraica para las transformadas de Laplace :

(45) $$m\,\bar{A}(s) = \bar{F}(s) - \alpha\, G(s)\, \bar{A}(s),$$

de la cual es directo despejar la transformada de la aceleración

(46) $$\bar{A}(s) = \frac{\bar{F}(s)}{m + \alpha\, G(s)} = V(s)\,\bar{F}(s) .$$

Hemos introducido la función auxiliar

(47) $$V(s) = \frac{1}{m + \alpha\, G(s)},$$

con la que podemos escribir la aceleración como

$$\bar{a}(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(V(s)\,\bar{F}(s)\right) = \int_0^t v(t-\sigma)\,\bar{F}_{ext}(\sigma)\,d\sigma . \tag{48}$$

Para conocer v(t) deberemos evaluar la integral de Brommwich (Arfken,1981,pg. 823) en la forma

$$v(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{st}\,V(s)\,ds = \sum\left\{\mathrm{Res}\left(e^{st}V(s)\right) \,\middle|\, \mathrm{Re}(s) < \gamma\right\}. \tag{49}$$

De esta manera, la condición de existencia de la aceleración $\bar{a}(t)$ se convierte en una condición respecto a la analiticidad de la función $f(s) = e^{st}\,V(s)$. Para que $\bar{a}(t)$ esté definida, los polos de f(s) deberán ocurrir en el semiplano definido por $\mathrm{Re}(s) < \gamma$. Este tipo de análisis es bien conocido de la electrodinámica de medios continuos (Jackson, 1975,pg.306), pues se aplica para estudiar las relaciones de dispersión (de Kramers-Kronig) y la causalidad de la relación entre la llegada de una señal al medio y la respuesta de éste.

Para que haya una polo en f(s), el denominador en V(s) debe anularse, de modo que debemos estudiar la situación planteada para que

$$m + \alpha\, G(s) = 0 . \tag{50}$$

Dado que $G(s)$ es la transformada de $g(ct)$, definida por (37), podemos encontrar una expresión explícita, obteniendo el siguiente resultado

$$(51)\qquad G(s) = \int_0^\infty e^{-st} \int_0^\infty |\tilde{\rho}(K)|^2 K \,\mathrm{sen}\, cKt \, dK\, dt = \int_0^\infty \frac{c^2 K^2}{s^2 + c^2 K^2} |\tilde{\rho}(K)|^2 dK ,$$

que sólo es válido si la parte real de s es positiva.

Sustituyendo en (50), y expresando s explícitamente como número complejo en la forma $s = s_R + i\, s_I$, llegamos a

$$(52)\qquad m + \alpha \int_0^\infty \frac{c^2 K^2 \left(s_R^2 + c^2K^2 - s_I^2 - 2 i s_R s_I\right)}{\left(s_R^2 + c^2 K^2 - s_I^2\right)^2 + 4 s_R^2 s_I^2} \left|\tilde{\rho}(K)\right|^2 = 0 ,$$

cuya parte imaginaria escribimos a continuación:

$$(53)\qquad 2\alpha s_R s_I \int_0^\infty \frac{c^2 K^2 \,|\tilde{\rho}(K)|^2 \, dK}{\left(s_R^2 + c^2 K^2 - s_I^2\right)^2 + 4 s_R^2 s_I^2} = 0 .$$

Como la parte real de s debe ser positiva, las constantes son no nulas y la integral es definida positiva, debe cumplirse entonces que $s_I = 0$. Pero de (50) se sigue que

$$(54)\qquad G(s) = -\frac{m}{\alpha} = \text{constante} ,$$

por lo que $g(rt)$ deberá ser una delta de Dirac, pero esto sólo es posible si la distribución de carga es uniforme en todo el espacio, lo que físicamente es un absurdo.

Hemos mostrado que no puede haber polos de f(s) si la parte real de s es positiva, pues en ese caso es válido todo lo planteado en las líneas anteriores y llegamos a un absurdo, siempre que el factor de forma $\tilde{\rho}(k)$ no se anule para k positiva. Entonces, si los polos existen, deben tener la parte real de s menor que cero, con lo que si δ toma cualquier valor positivo se cumple la condición pedida en (49).

Para discutir la existencia de las singularidades deberíamos considerar algunos ejemplos específicos, pues hasta aquí sólo hemos mostrado donde NO pueden ocurrir. Nuestra preocupación va en otra dirección y nos limitaremos a un breve comentario sobre el cascarón esférico, bastándonos saber que hay casos conocidos en que efectivamente la aceleración puede calcularse (un ejemplo para una distribución de carga tipo Yukawa puede verse en de la Peña, Jiménez, Montemayor ,1980).

Con esta argumentación podemos afirmar que la acele ración queda expresada satisfactoriamente por

$$\bar{a}(t) = \int_0^t \bar{F}(\zeta) \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} \frac{e^{s(t-\zeta)}}{m + \alpha\, G(s)}\, ds\, d\zeta \ ,$$

(55)

$$\bar{a}(t) = \int_0^t \bar{F}(\zeta) \sum \mathrm{Res} \left(\frac{e^{s(t-\zeta)}}{m + \alpha\, G(s)} \right) d\zeta \ .$$

La ecuación (55) es la solución de la ecuación integral para $\bar{a}(t)$, y muestra explícitamente su dependencia en el tiempo para valores entre el inicial y el actual. Entonces es, sin lugar a dudas, CAUSAL. Sus limitaciones están referidas a distribuciones de carga cuyos factores de forma se anulen para k positiva.

¿Cuál es el significado físico de los polos s, solución de $m + \alpha\, G(s) = 0$ (50)? Analicemos la situación en ausencia de fuerzas externas, donde $\bar{F}(s) = 0$. De (45) se sigue que

$$(56) \qquad \left(m + \alpha\, G(s) \right) \bar{A}(s) = 0 \ .$$

Si s no es un valor que anule a (50), $\bar{A}(s) = 0$ y $\bar{a}(t) = 0$, que es el resultado esperado, pero para las s que anulan (50), $\bar{A}(s)$ está indeterminada. Además $s = s_R + i\, s_I$, de modo que tenemos ciertas frecuencias características s_I en las que el sistema es autooscilante, según se sigue de la ec. (55). Este resultado es característico de esta formulación, y predice la existencia de frecuencias a la que la partícula RESUENA, acelerándose sin necesidad de fuerzas y, a este nivel de aproximación, sin radiar. Es inevitable comentar que, como se ha exhibido, en la electrodinámica clásica existen frecuencias NO RADIATIVAS, lo que es sugerente, y hermoso.

Hagamos una breve digresión alrededor de un ejemplo, una distribución de carga tipo cascarón esférico de radio R. Proponemos

$$(57) \qquad \rho(s) = e\,\frac{\delta(s-R)}{4\pi s^2}, \quad \text{con} \quad \bar{s} = \vec{r} - \bar{r}(t),$$

y, usando las definiciones (24) y (37), obtenemos

$$(58) \qquad \tilde{\rho}(K) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\,\frac{\operatorname{sen} KR}{KR}$$

y

$$(59) \qquad g(r) = \frac{1}{(2\pi)^3 R^2}\begin{cases} \pi/4 & 0 < r < 2R \\ \pi/2 & r = 2R \\ 0 & r > 2R \end{cases}$$

De la ecuación de movimiento (43), con $t_o = 0$, y $t > 2R/c = \tau$, obtenemos directamente

$$(60) \qquad m\,\ddot{x}(t) = \bar{F}_{ext} - \frac{e^2}{3R^2c}\left(\dot{x}(t) - \dot{x}(t-\tau)\right) .$$

En el caso particular de ausencia de fuerzas externas, (60) se reduce a

$$(61) \qquad \dot{v}(t) = \frac{2e^2}{3mc^2}\,\frac{1}{R}\,\frac{v(t-\tau) - v(t)}{\tau} ,$$

pero justamente de la definición de aceleración

$$(62) \qquad \dot{v}(t) = \lim_{\delta\to 0}\frac{v(t+\delta) - v(t)}{\delta} = \lim_{\delta\to 0} - \frac{v(t-\delta) - v(t)}{\delta} .$$

Para que (61) y (62) sean consistentes deben ocurrir dos cosas:

a) Como (61) relaciona esencialmente una aceleración promedio con una instantánea, sus valores deben asemejarse conforme $\tau \longrightarrow 0$. Esto ocurre si $R > 2e^2/3mc^2 = \mathcal{R}$, pero si el radio del cascarón supera ese límite, conforme τ y con él R tiende a cero, la aceleración diverge. Esto sugiere que la formulación es consistente si

$$(63) \qquad R \geq \frac{2e^2}{3mc^2} ,$$

lo que impide acceder a una formulación libre de divergencias para partícula puntual a partir de tomar el límite de una cierta distribución de carga.

b) Dado que los signos de (61) y (62) son opuestos, y hemos exigido que el coeficiente en (61) permanezca finito, entonces $\dot{v}(t) = 0$, como era de esperarse dada la ausencia de fuerzas externas.

Si se trabaja con un tensor de esfuerzos covariante, de manera de tener 3/3 de la masa electromagnética, se obtiene la condición (63) como necesaria para que exista causalidad, y con R un parámetro con unidades de distancia definido para cualquier distribución de carga (L. de La Peña et al.,1980; J.L. Jiménez y R. Montemayor, 1983).

Para conocer la dinámica con más detalle deberemos encontrar las soluciones de (50) , y con ello calcular los residuos de $e^{s(t-6)}/(m+\alpha G(s))$ en (55). En nuestro caso

$$(64) \qquad G(s) = \int_0^\infty g(r)\, e^{-\frac{sr}{c}} \frac{dr}{c} = \frac{\pi}{4} \frac{1 - e^{-\frac{2Rs}{c}}}{(2\pi)^3 R^2 s} \quad ,$$

donde s es un número complejo $s = s_R + i s_I$. Sustituyendo el valor de α dado en (42) y usando que $s_R <$ 0, introducimos las siguientes variables

$$\frac{a}{R} = \frac{-2s_R}{c} \quad , \quad \frac{b}{R} = \frac{2s_I}{c} \quad , \quad \mathcal{R} = \frac{e^2}{m c^2} \quad , \quad r = \frac{K}{R} \quad ;$$

y obtenemos las ecuaciones

$$(65)\qquad \frac{\operatorname{sen} br}{br} = -\frac{3}{2}\, r\, e^{-ar} \,,$$

$$(66)\qquad e^{-ar} - \cos br + \frac{a}{b}\operatorname{sen} br = 0 \;;$$

que definen implícitamente a $s = c(-a + ib)/2R$ con $a > 0$.

Aquí detenemos este análisis, porque nos interesa más el estudio cualitativo de la dinámica de las partículas cargadas, que continuar buscando los detalles de este caso particular.

Resumiendo lo hecho en este capítulo, vemos lo siguiente:

A partir de la Hamiltoniana para una partícula extensa, siempre y cuando no consideremos rotaciones, dentro de un campo que no varía bruscamente en distancias en distancias del tamaño de la partícula, y usando la descomposición espectral del campo, encontramos la ecuación integrodiferencial de movimiento. Mostramos que se reduce a la ecuación para partícula puntual en el límite correspondiente, y que en general introduce en forma natural una función de corte para las frecuencias que esencialmente es el factor de forma asociado a la distribución de carga. En la aproxima ción de onda larga, a velocidades pequeñas, encontramos una ecuación que exhibe la masa electromagnética, y cuyas soluciones son causales. Todo esto lo usaremos en el próximo capítulo.

CAPITULO III : HACIA UNA ECUACION DE MOVIMIENTO CAUSAL PARA PARTICULA PUNTUAL

1- VOLVIENDO AL PRINCIPIO

En los capítulos anteriores hemos utilizado la descomposición espectral del campo electromagnético para obtener una ecuación de movimiento para partícula puntual que, en el límite de velocidades pequeñas y en la aproximación de onda larga se reduce a la de Abraham-Lorentz, con todos sus defectos. También hemos mostrado que el problema de la divergencia de la masa electromagnética, y quizás más importante desde un punto de vista de principios, el problema de la causalidad, pueden superarse dotando de estructura a la partícula. En este caso recuperamos y planteamos en una forma más general la EIUAL ya estudiada por L. de La Peña et al. , y reconocimos la imposibilidad de tomar el límite de partícula puntual conservando la formulación causal.

La pregunta que nos planteamos ahora es :¿ Puede encontrarse una forma alternativa , físicamente justificada, de introducir un factor de corte en la integración sobre las frecuencias, que juegue formalmente el mismo papel que el del factor de corte asociado a la estructura de la partícula, pero que permanezca aún en el límite de partícula puntual? De poderse hacer esto, tendríamos ante nosotros una formulación causal del movimiento de la partícula puntual y, al mismo tiempo , un modelo para su estudio.

Vayamos poco a poco. Empecemos por preguntarnos: ¿era la formulación del primer capítulo la más general para estudiar a la partícula sin estructura?

Si revisamos con cuidado, veremos que hay al menos una hipótesis que, si bien fue muy cómoda, no es imprescindible: al desarrollar el campo en sus componentes espectrales pedimos que éste sea periódico en una caja cúbica de arista L. Podemos decir en nuestro descargo que sin especificar las condiciones a la frontera en la ecuación de Helmholtz, ésta no puede resolverse, pues el problema estará planteado sólo parcialmente. Y sin un conjunto de soluciones, ¿cómo desarrollar el campo en sus componentes? El problema aparece en cualquier espacio vectorial: si queremos especificar un elemento de ese espacio, deberemos exhibir sus componentes respecto a alguna base.

Esto es así. Usando las componentes de Fourier pudimos hacer toda la discusión precedente. Pero ahora estamos más adelante. Ya conocemos las ecuaciones que aparecen, sabemos hacer aproximaciones, encontramos el punto donde aparecen las dificultades y conocemos algunos remedios particulares. Intentemos seguir avanzando.

Vamos a proponer un conjunto de funciones vectoriales tales que, para ciertas condiciones de frontera , que en cada caso deberán especificarse pero que para nosotros simplemente estarán allí, sean una base apropiada para hacer la descomposición espectral (en un sentido amplio) del campo electromagnético. Con tales funciones repetiremos todo el análisis previo y estudiaremos las ecuaciones obtenidas. Si bajo ciertas condiciones se comportan en forma matemáticamente equivalente al caso de partícula con estructura, tendremos la formulación que estamos buscando.

¿Allí acaba el problema? No. Allí recién empieza. Porque entonces deberemos preguntarnos qué significa la solución obtenida, y cómo se la usa en cada caso.

2- LA SOLUCION FORMAL

En la región del espacio donde no hay cargas ni corrientes, y expresado en la norma de Coulomb (ϕ = cte.) las ecuaciones de Maxwell se pueden expresar en forma equivalente para el potencial vectorial $\bar{A}$ como

$$(1) \qquad \nabla^2 \bar{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\bar{A} = 0 \quad , \quad \nabla\cdot\bar{A} = 0 \quad .$$

Introduzcamos ahora la hipótesis adicional bastante general de que existe un conjunto completo, numerable de funciones $\bar{M}n(r)$ que sólo dependen de la variable espacial $\bar{r}$, y satisfacen el conjunto de condiciones a la frontera dadas. Proponemos que el potencial vectorial puede escribirse en la forma

$$(2) \qquad \bar{A}(\bar{r},t) = \sum_n \left\{ Q_n(t)\,\bar{M}_n(\bar{r}) + Q_n^*(t)\,\bar{M}_n^*(\bar{r}) \right\} ,$$

donde las Qn son sólo funciones del tiempo. Como puede verse, simplemente pedimos que la solución sea separable. Dada la linealidad de (1) podemos pedir que cada término de la suma sea solución de (1), lo que al introducir la constante de separación $|\bar{K}_n|^2 = \omega_n^2 / c^2$, donde interpretamos en la forma usual a $\bar{K}n$ como el vector de onda y a ω_n como la frecuencia asociada a esa solución, nos conduce directamente a las siguientes ecuaciones

$$(3) \qquad \nabla^2 \bar{M}_n + K_n^2 \bar{M}_n = 0 \; ,$$

$$(4) \qquad \nabla\cdot\bar{M}_n = 0 \quad ,$$

$$\ddot{Q}_n + \omega_n^2 Q_n = 0 \quad . \tag{5}$$

Las ecuaciones (3) y (4) son ampliamente conocidas del estudio de la radiación electromagnética (justamente el problema que nos ocupa), en particular en los llamados desarrollos multipolares. Sus soluciones $\bar{M}n$ pueden expresarse en términos de funciones escalares $\Psi_n(\bar{r})$ llamadas potenciales de Debye (Jackson, 1962; Eyges, 1972), que sean solución de la ecuación de Helmholtz escalar

$$\left(\nabla^2 + K_n^2\right) \Psi_n(\bar{r}) = 0 \quad . \tag{6}$$

Para cada Kn, es decir para cada ecuación (3), hay sólo dos soluciones independientes que satisfacen (4), cada una asociada a una dirección de polarización perpendicular a la dirección de propagación $\bar{K}n$. Estas son

$$\bar{M}_{n1} = \left(\bar{r} \times \nabla\right) \Psi_n \quad , \quad \bar{M}_{n2} = \nabla \times \left(\bar{r} \times \nabla\right) \Psi_n \quad ; \tag{7}$$

donde $\bar{M}n1$ es perpendicular al vector posición $\bar{r}$, y $\bar{M}n2$ es ortogonal a la otra solución, además de ser ambos perpendiculares a la dirección de propagación de la onda. Cuando se resuelve la ecuación de onda para los campos, en lugar de para los potenciales como en este caso, se encuentran directamente de esta formulación los llamados usualmente modos transversal eléctrico y transversal magnético, según sea el campo eléctrico o el magnético el que juegue el papel aquí asignado a $\bar{M}_{n1}$.

Si se trabajara en coordenadas cartesianas, con condiciones a la frontera de caja cúbica reflectora, tendríamos

$$(8) \qquad \psi_n(\bar{r}) = e^{\pm i \bar{K}_n \cdot \bar{r}} \quad , \hat{e}_{1n} = \bar{r} \times \bar{K}_n \quad , \hat{e}_{2n} = \nabla \times (\bar{r} \times \bar{K}_n) \; ;$$

donde las $\hat{e}_{1n}$, $\hat{e}_{2n}$ son las direcciones de polarización usadas en el capítulo 1, pero sin normalizar.

En coordenadas polares esféricas se introducen los llamados armónicos esféricos vectoriales, en función de los armónicos esféricos Ylm, como

$$(9) \qquad \bar{Y}_{lm}(\theta,\varphi) = \frac{1}{\sqrt{l(l+1)}} \left(\bar{r} \times \nabla\right) Y_{lm}(\theta,\varphi) \, ,$$

y las soluciones de (3) y (4) tienen la forma

$$(10) \qquad \bar{M}_{n1} = f(K_n r)\, \bar{Y}_{lm}(\theta,\varphi) \quad , \bar{M}_{n2} = \nabla \times \bar{M}_{n1} \quad ,$$

donde a las funciones angulares se les pide las condiciones habituales de periodicidad y finitud, y las funciones radiales, de acuerdo a las condiciones a la frontera, serán funciones Bessel, Hankel o Neumann esféricas.

No es nuestro interés especificar un conjunto determinado de soluciones, y por eso detendremos aquí este análisis, limitándonos a señalar que las Mn son funciones dadas del espacio que satisfacen la condición de ortonormalidad

$$(11) \qquad \int \bar{M}_n \cdot \bar{M}_m \, d^3r = 4\pi c^2 \delta_{nm} \quad .$$

Por todo lo dicho anteriormente, el potencial vectorial queda caracterizado completamente por las amplitudes del campo Qn(t), que satisfacen la ecuación de onda (5), y la Hamiltoniana del campo será una superposición de Hamiltonianas de oscilador armónico de frecuencia ω_n , es decir

$$(12) \qquad H_{campo} = \sum_n \frac{1}{2}\left(p_n^2 + \omega_n^2 q_n^2\right) = \frac{1}{8\pi}\int\left(\bar{E}^2+\bar{H}^2\right) d^3r ,$$

donde hemos introducido las variables canónicas reales

$$(13) \qquad q_n = Q_n + Q_n^* \quad , \; p_n = -i\omega_n \left(Q_n - Q_n^*\right) ,$$

y si también definimos las funciones vectoriales reales

$$(14) \qquad \bar{C}_n = \frac{1}{2}\left(\bar{M}_n + \bar{M}_n^*\right) \; , \; \bar{S}_n = \frac{i}{2}\left(\bar{M}_n - \bar{M}_n^*\right) ,$$

el potencial vectorial quedará descrito por funciones reales en la forma

$$\text{(15)} \quad \bar{A}(\bar{r},t) = \sum_n \left\{ q_n(t)\, \bar{C}_n(\bar{r}) + \frac{p_n(t)}{\omega_n}\, \bar{S}_n(\bar{r}) \right\} .$$

Si ahora queremos que el sistema también incluya una partícula de carga e, con posición $\bar{x}(t)$ y momento $\bar{p}(t)$, la Hamiltoniana total será

$$\text{(16)} \quad H = e\,\phi(\bar{x}) + \frac{1}{2m}\left(\bar{p} - \frac{e}{c}\bar{A}(\bar{x})\right)^2 + \sum_n \frac{1}{2}\left(p_n^2 + \omega_n^2 q_n^2\right) .$$

Debe ser claro para el lector que estamos reproduciendo todos los pasos del capítulo 1, en la formulación general, y que las definiciones que se van usando tienen como finalidad permitir una comparación sencilla con los resultados anteriores. Ahora calcularemos las ecuaciones de Hamilton para la partícula y para el campo, resolveremos estas últimas en función de las primeras, y obtendremos la ecuación general de movimiento. Sobre esta ecuación haremos luego las aproximaciones habituales de onda larga y velocidades pequeñas. Las ecuaciones de movimiento para la partícula son:

$$\text{(17)} \quad \dot{\bar{x}} = \frac{\partial H}{\partial \bar{p}} = \frac{1}{m}\left(\bar{p} - \frac{e}{c}\bar{A}\right) ,$$

$$\text{(18)} \quad \dot{\bar{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \bar{x}} = -e\nabla\phi + \frac{e}{c}\sum_n \left(q_n\, \dot{\bar{x}} \cdot \frac{\partial \bar{C}_n}{\partial \bar{x}} + \frac{p_n}{\omega_n}\, \dot{\bar{x}} \cdot \frac{\partial \bar{S}_n}{\partial \bar{x}} \right) ;$$

donde en (18) se sustituyó la expresión (17).

Para las componentes del campo obtenemos las expresiones

$$(19) \qquad \dot{q}_n = \frac{\partial H}{\partial p_n} = -\frac{e}{c}\,\frac{1}{\omega_n}\,\dot{x}\cdot\bar{S}_n + p_n \quad ,$$

$$(20) \qquad \dot{p}_n = -\frac{\partial H}{\partial q_n} = \frac{e}{c}\,\dot{x}\cdot\bar{C}_n - \omega_n^2\, q_n \quad .$$

Estas dos últimas ecuaciones las resolvemos con la técnica habitual. Definimos la variable

$$(21) \qquad \eta_n = p_n + i\,\omega_n\, q_n \quad ,$$

y usando (14) obtenemos

$$(22) \qquad \dot{\eta}_n - i\,\omega_n\,\eta_n = \frac{e}{c}\,\dot{x}\cdot\bar{M}_n$$

Este tipo de ecuación diferencial ya la hemos resuelto antes. Haciendo algo de álgebra escribimos las soluciones en la forma

$$(23) \qquad p_n = \frac{e}{c}\int_{t_0}^{t}\Big[\cos\omega_n(t-\sigma)\,\dot{x}(\sigma)\cdot\bar{C}_n(\bar{x}(\sigma)) + \mathrm{sen}\,\omega_n(t-\sigma)\,\dot{x}(\sigma)\cdot\bar{S}_n(\bar{x}(\sigma))\Big]d\sigma + $$
$$+\, c_{1n}\cos\omega_n t - c_{2n}\,\mathrm{sen}\,\omega_n t \quad ,$$

$$(24)\quad q_n = \frac{e}{c\omega_n}\int_{t_0}^{t}\left[\operatorname{sen}\omega_n(t-\sigma)\,\dot{\bar{x}}(\sigma)\cdot\bar{C}_n(\bar{x}(\sigma)) - \cos\omega_n(t-\sigma)\,\dot{\bar{x}}(\sigma)\cdot\bar{S}_n(\bar{x}(\sigma))\right]d\sigma + \frac{c_{1n}}{\omega_n}\operatorname{sen}\omega_n t + \frac{c_{2n}}{\omega_n}\cos\omega_n t\,,$$

donde si elegimos el tiempo inicial como $t_0 = 0$, las constantes son

$$(25)\qquad c_{1n} = p_n(0)\quad,\quad c_{2n} = \omega_n q_n(0)\ .$$

Ya tenemos resueltas las ecuaciones del campo en función de la trayectoria de la partícula. Como ya hemos aprendido, lo que sigue es derivar la ecuación (17) para la velocidad de la partícula, sustituir (18) donde aparece la derivada del momento, e introducir los valores de las amplitudes del campo dados por (24) y (25). Usaremos también que la derivada del potencial vectorial es

$$(26)\quad \frac{d\bar{A}}{dt} = \frac{\partial\bar{A}}{\partial\bar{x}}\cdot\dot{\bar{x}} + \frac{\partial\bar{A}}{\partial t} = \sum_n\left\{q_n\frac{\partial\bar{C}_n}{\partial\bar{x}}\cdot\dot{\bar{x}} + \frac{p_n}{\omega_n}\frac{\partial\bar{S}_n}{\partial\bar{x}}\cdot\dot{\bar{x}} + \dot{q}_n\bar{C}_n + \frac{\dot{p}_n}{\omega_n}\bar{S}_n\right\}.$$

Haciendo lo indicado, la ecuación de movimiento para la partícula es

$$(27)\quad m\ddot{\bar{x}} = -e\nabla\phi - \frac{e}{c}\sum_n\left(p_n\bar{C}_n - \omega_n q_n\bar{S}_n\right) + \frac{e}{c}\sum_n\left\{q_n\left(\dot{\bar{x}}\cdot\frac{\partial\bar{C}_n}{\partial\bar{x}} - \frac{\partial\bar{C}_n}{\partial\bar{x}}\cdot\dot{\bar{x}}\right) + \frac{p_n}{\omega_n}\left(\dot{\bar{x}}\cdot\frac{\partial\bar{S}_n}{\partial\bar{x}} - \frac{\partial\bar{S}_n}{\partial\bar{x}}\cdot\dot{\bar{x}}\right) + \frac{e}{c\omega_n}\left(\dot{\bar{x}}\cdot\bar{S}_n\bar{C}_n - \dot{\bar{x}}\cdot\bar{C}_n\bar{S}_n\right)\right\}.$$

De la misma manera que en el capítulo I, evaluando $\bar{H} = \nabla\times\bar{A}$ y $\bar{E} = -\nabla\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial\bar{A}}{\partial t}$ puede mostrarse que el lado derecho de la ecuación corresponde exactamente a la fuerza de Lorentz. Además, ésta es la formulación general de las ecuaciones (I-42) y (II-18) que son las ecuaciones de movimiento para el desarrollo de Fourier del campo, en los casos de partícula puntual y con estructura, respectivamente.

Si bien podríamos seguir avanzando en esta formulación general, nuestro interés es encontrar una ecuación que, en las mismas condiciones que la de Abraham - Lorentz, supere sus falencias. Por eso, de aquí en más haremos las aproximaciones de onda larga y velocidades pequeñas, con lo que la ecuación de movimiento se reduce a

$$(28) \qquad m\ddot{\bar{x}} = -e\nabla\phi - \frac{e}{c}\sum_n \left(p_n \bar{C}_n - \omega_n q_n \bar{S}_n \right) .$$

Antes de sustituir los valores de las componentes del campo, observemos que

$$(29) \qquad p_n \bar{C}_n - \omega_n q_n \bar{S}_n = \mathrm{Re}\left(\eta_n \bar{M}_n^* \right) ,$$

donde, con $c_n = c_{1n} + i\, c_{2n}$

$$(30) \qquad \eta_n = p_n + i\,\omega_n q_n = \frac{e}{c}\int_{t_0}^{t} e^{i\omega_n(t-\tau)}\, \dot{\bar{x}}(\tau)\cdot \bar{M}_n(\bar{x}(\tau))\, d\tau + c_n e^{i\omega_n t} .$$

Ahora sí, escribimos la ecuación de movimiento para partícula puntual en la aproximación de onda larga y velocidades pequeñas, que resulta:

$$
(31)\qquad m\ddot{\vec{x}} = -e\nabla\phi - \frac{e}{c} R_e\left\{\sum_n c_n e^{i\omega_n t}\, \vec{M}_n^{*}(\vec{x}(t))\right\} - \\ - \frac{e^2}{c^2} R_e\left\{\sum_n \int_{t_0}^{t} e^{i\omega_n (t-\tau)}\, \dot{\vec{x}}(\tau)\cdot \vec{M}_n(\vec{x}(\tau))\, \vec{M}_n^{*}(\vec{x}(t))\, d\tau\right\}.
$$

Llamaremos "fuerza externa" $\vec{F}ext$ a aquellos términos de (31) que sólo dependen de la posición al tiempo actual, con lo que la ecuación dinámica puede escribirse en la forma

$$
(32)\qquad m\ddot{\vec{x}} = \vec{F}_{ext} - \frac{e^2}{c^2} R_e\left\{\sum_n \int_{t_0}^{t} e^{i\omega_n (t-\tau)}\, \dot{\vec{x}}(\tau)\cdot \vec{M}_n(\vec{x}(\tau))\, \vec{M}_n^{*}(\vec{x}(t))\, d\tau\right\}.
$$

Como ya sabemos, la causalidad depende de la existencia de ciertos factores en la ecuación de movimiento.¿Por qué decimos ésto? Porque todo nuestro análisis del comportamiento de la partícula con estructura partió de la ecuación de movimiento (II-26) que reproducimos a continuación

$$
(\text{II-26})\qquad m\ddot{\vec{x}} = \vec{F}_{ext} - \\ - (2\pi)^3 \frac{4\pi e^2}{L^3} R_e\left\{\sum_{n,\sigma} \int_{t_0}^{t} \dot{\vec{x}}(\tau)\cdot \hat{e}_{n\sigma}\, \hat{e}_{n\sigma}\, e^{i\omega_n (t-\tau)}\, e^{i\vec{k}_n\cdot(\vec{x}(t)-\vec{x}(\tau))}\, |f(\omega_n)|^2\, d\tau\right\},
$$

en la que, pasando de la suma a una integral, efectuando la integración angular y haciendo la aproximación de onda larga se llega a (II-27)

$$ \text{(II-27)} \quad m\ddot{\bar{x}} = \bar{F}_{ext} - (2\pi)^3 \frac{4e^2}{3\pi c^3} \int_{t_0}^{t} \int_0^{\infty} \cos\omega(t-\tau)\, \dot{\bar{x}}(\tau) \left| \tilde{\rho}\left(\frac{\omega}{c}\right)\right|^2 \omega^2 \, d\omega \, d\tau . $$

Buscamos una similitud formal entre (32) y (II-26). Sabemos que para partícula puntual una descomposición espectral con condiciones a la frontera periódicas en una caja cúbica nos lleva a la ecuación de Abraham-Lorentz. Por esto, las funciones $\bar{M}n$ deberán satisfacer otro tipo de condiciones a la frontera.

Para llevar adelante el paralelo con el caso de partícula con estructura, hacemos la siguiente identificación

$$ (33) \quad \bar{M}_n(\bar{x}(t)) \longleftrightarrow \sqrt{\frac{4\pi c^2}{L^3}}\, \hat{e}_{n\varepsilon}\, e^{-i\bar{K}_n\cdot\bar{x}(t)} (2\pi)^{3/2}\, \tilde{\rho}(K_n) \quad , $$

que sólo tiene sentido en cuanto nos orienta en las condiciones que pediremos sobre las $\bar{M}n$.

Propondremos que las funciones del espacio $\bar{M}n$ se puedan descomponer en una parte escalar Mn y una vectorial unitaria. Esta descomposición siempre es posible de realizar en una función vectorial. Así

$$ (34) \quad \bar{M}_n(\bar{x}) = M_n(\bar{x})\, \hat{m}_{n\varepsilon}(\bar{x}) . $$

Para repetir las aproximaciones realizadas en el caso de partícula con estructura, primero haremos el paso de la suma sobre las componentes a una integral, y la relación entre el índice discreto n y la variable vectorial continua $\bar{K}$ dependerá de las condiciones a la frontera, que nos definirán la constante a_0 en el paso formal

$$(35) \qquad \sum_n \rightarrow a_0 \int d^3K \ .$$

Hasta aquí no hay nada novedoso.

Pondremos ahora las restricciones que nos permitirán arribar a la meta buscada. Estas son:

i) En similitud a la aproximación de onda larga, pedimos que

$$(36) \qquad M_n(\bar{x}(\tau))\, M_n^*(\bar{x}(t)) \longrightarrow M_n(\bar{x}(t))\, M_n^*(\bar{x}(t)) = |f(K_n)|^2 \ .$$

ii) En base a los resultados conocidos de partícula puntual y partícula con estructura, pedimos también que al realizar la integración sobre las variables angulares el resultado sea proporcional a la velocidad, en el siguiente sentido:

$$(37) \qquad \sum_\sigma \iint \dot{\bar{x}}(\tau) \cdot \hat{m}_{n\sigma}(\bar{x}(\tau))\ \hat{m}_{n\sigma}(\bar{x}(t))\ d\Omega_K = b\, \dot{\bar{x}}(\tau) \ ,$$

donde b es una cierta constante que incluye a a_0 .

El sentido de la primer exigencia es bastante claro. Si $\bar{x}(t)$ muy semejante a $\bar{x}(\tau)$, y las funciones $\ddot{M}n(x)$ son suaves, en la aproximación de velocidades pequeñas el producto señalado será una función real positiva, y en algunos casos independiente de $\bar{x}$ (a estos casos nos referiremos en lo sucesivo).

De la segunda exigencia podemos decir que es similar a resultados ya obtenidos en las situaciones antes estudiadas, y que en principio resulta plausible que la única función vectorial relevante en la integral le dé contenido al resultado. En todo caso, para cada situación particular que se estudie será una condición que deberemos verificar.

Con estas aproximaciones sustituidas en (32), obtenemos

$$(38)\quad m\ddot{\bar{x}} = \bar{F}_{ut} - \frac{e^2}{c^2} b\int_{t_0}^{t}\int_0^{\infty} \cos\omega(t-\tau)\ \dot{\bar{x}}(\tau)\left|f(K)\right|^2\omega^2 d\omega\, d\tau \ ,$$

que es formalmente equivalente a (II-27). Si hacemos una integración por partes, y definimos la función

$$(39)\qquad g(r) = \int_0^{\infty}\left|f(K)\right|^2 K \operatorname{sen} Kr\ dK \ ,$$

llegamos a

$$(40) \quad m\ddot{\bar{x}} = \bar{F}_{ext} - e^2 b \left\{ \dot{\bar{x}}(t_0)\, g(c(t-t_0)) + \int_{t_0}^{t} g(c(t-\tau))\, \ddot{\bar{x}}(\tau)\, d\tau \right\}$$

que, salvo constantes, es MATEMATICAMENTE IDENTICA a la ecuación de movimiento (II-38), de la que partieron nuestros análisis de la causalidad.

3-¿QUE SIGNIFICA LA SOLUCION FORMAL ?

Habiendo llegado a la expresión (40) no necesitamos una sola fórmula más. Si para ciertas condiciones a la frontera, las soluciones $\bar{A}_n$ de la ecuación vectorial de Helmholtz cumplen las condiciones (36) y (37), entonces las soluciones de la ecuación de movimiento son totalmente causales, pues es válida toda la discusión de la parte final del capítulo anterior.

Esto significa que, en principio, hemos construído una ecuación alternativa a la de Abraham-Lorentz, que es causal. Sus limitaciones dependen de las condiciones a la frontera, y no toman en cuenta para nada el tamaño o la estructura de la partícula, por lo que ésta puede ser puntual sin que afecte los resultados.

¿Qué hay detrás de las condiciones a la frontera?

Como afirman en forma precisa Landau (Landau,1970) y Wheeler y Feynman en otro contexto (J.A.Wheeler & R.P.Feynman,1945), una partícula cargada sólo interactúa , en última instancia, con otras partículas cargadas. Estas son las que imponen las condiciones a la frontera.

Landau se limita a usar esta idea en la deducción de la ecuación de Abraham-Lorentz.

Wheeler y Feynman tienen una posición más radical: plantean que no hay emisión de radiación sin la existencia de un absorbedor, y que es la interacción de los potenciales avanzados en el tiempo del absorbedor con la partícula que radía lo que está en la base del fenómeno de la radiación, y lo que en forma cualitativa y cuantitativa explica la fuerza de reacción de radiación.

Nosotros tenemos en nuestra formulación del problema una visión alternativa. La existencia de las demás partículas cargadas del universo conforma las condiciones a la frontera de cada partícula cargada en movimiento. La posibilidad de escribir estas condiciones en forma tal que el problema tenga una solución calculable no nos importa por el momento. Nos alcanza con saber que existen. Cada partícula, en cada momento, se mueve de manera tal que interactúa con todos sus compañeros.

Basta tener presente este hecho para concluir que la ecuación de Abraham-Lorentz representa una primer aproximación, y que podemos hacer una descripción al mismo nivel, válida para campos que varían suavemente en el espacio y para partículas que se mueven lentamente (en el sistema de referencia en que se hace la descripción de la dinámica), que esté a salvo de soluciones acausales.

Este resultado no pretende dar una descripción acabada de la dinámica de las partículas cargadas. Queda por delante la descripción cuántica (Roa Neri,1985), que debe funcionar como una mejor aproximación al mundo físico, y la descripción relativista, en el dominio de la cual la ecuación de Lorentz-Dirac es usada con éxito.

Sí debe considerarse que lo expuesto en estas páginas muestra la consistencia de la electrodinámica clásica, expresada en forma compacta por las ecuaciones de Maxwell y la ley de fuerza de Lorentz, y exhibe que muchas de las críticas al formalismo de la teoría, en particular aquellas que señalan la predicción de un comportamiento acausal en una teoría por otro lado totalmente causal, deben asumirse como errores en las aproximaciones realizadas al obtener esos resultados.

CONCLUSIONES

A lo largo de estas páginas hemos reiterado una forma de estudio de la interacción de una partícula cargada con el campo electromagnético. Esta consistió esencialmente en hacer una descomposición espectral del potencial vectorial, considerando a éste como producido tanto por factores externos como por el movimiento de la propia partícula. Basándonos en una Hamiltoniana adecuada, que conduce a las ecuaciones de Maxwell para el campo, y a la fuerza de Lorentz para la interacción partícula-campo, planteamos y resolvimos las ecuaciones dinámicas para las componentes del campo, y usamos éstas para formular una ecuación integrodiferencial que gobierna la dinámica de la partícula.

Primero estudiamos la situación generada usando como condiciones a la frontera que las soluciones sean periódicas en los lados de una caja cúbica. Para partícula puntual obtuvimos la ecuación de Abraham-Lorentz, con todas las difultades que la acompañan. Dotando de estructura a la partícula superamos varios problemas, tanto de divergencias (en particular la debida a la masa electromagnética), como los de causalidad en la ecuación de movimiento. Sin embargo, exhibimos que no podemos pasar de un cierto radio mínimo, del orden del radio clásico del electrón, sin reencontrar las dificultades.

Variando nuestro enfoque, dándole generalidad al permitir que la formulación del problema admita cualquier condición a la frontera, mostramos que se recupera la causalidad y se eliminan las divergencias, inclusive en el límite de partícula puntual, si el universo actúa sobre la partícula en forma tal que la viste, la dota de estructura.

Si bien en las tres situaciones estudiadas formulamos una expresión general para la ecuación de movimiento, ésta era demasiado complicada en su estructura matemática, era una ecuación integrodiferencial no lineal en la velocidad. Fue al analizar el límite de velocidades pequeñas, y hacer la aproximación de onda larga en el campo, cuando obtuvimos resultados que eran más accesibles , tanto para su uso en un problema específico como para su interpretación. En este contexto aparecieron algunas características muy interesantes de la dinámica. Vimos el papel relevante que juega el factor de forma asociado a la distribución de carga, tanto para impedir divergencias como para conducir a una formulación causal. Sobre este idea guía fue que variamos las condiciones de frontera, exhibiendo que éstas podían comportarse en forma equivalente a la estructura, en lo que respecta a la dinámica de la partícula. También encontramos, asociadas a la estructura de la partícula, la existencia de frecuencias propias resonantes, otro de los elementos habitualmente referidos como ajenos a la electrodinámica clásica.

¿Cuál es el rango de validez de nuestros resultados?

La mayoría de ellos, como acabamos de comentar, se aplican al caso de velocidades pequeñas y campos que varían suavemente en el espacio. Esto es más de lo que puede decirse de la ecuación de Abraham-Lorentz, que está restringida a sistemas de referencia para los que la partícula está instantáneamente en reposo; y abarca un amplio espectro de interés.

Pero en general deberemos tener presente que son resultados aproximados. Incluso, como en la mayoría de los casos en que se hacen aproximaciones, hay elementos de arbitrariedad en los términos que se conservan y los que no. En nuestro trabajo, la equivalencia matemática entre la ecuación de movimiento para partícula con estructura, y la ecuación general para partícula puntual está sujeta a estas restricciones, y puede verse que el uso de un factor de normalización tendencioso permitió conservar ciertos términos en un caso y omitirlos en otro.

Reconocer las limitaciones del presente trabajo nos permite ver la riqueza del campo de estudio que se nos presenta. Queda por delante hacer un estudio de las ecuaciones de movimiento en los casos más generales, que aquí se evitaron. También queda abierto el camino para hacer una formulación que no se base en las leyes de la dinámica newtoniana, sino en la mecánica cuántica, por una lado, y en la relatividad espacial, por el otro. También está abierta la posibilidad de hacer compatible este enfoque con las formulaciones basadas en desarrollos en serie de las funciones retardadas, a las que hemos hecho reiteradas referencias.

Finalmente, queremos resaltar que consideramos el mayor mérito de este trabajo el haber rescatado dos conceptos básicos: el de causalidad y el de la estructura como resultado de la interacción partícula-universo (¿dónde termina una partícula y dónde empieza su campo?). Ambos no están al mismo nivel, pero forman parte de la posibilidad de pensar alrededor de un problema físico, arte que muchas veces nos vemos tentados a sustituir por la tecnología de los cálculos. Si hay causalidad, podemos intentar pensar los fenómenos físicos, y además la electrodinámica clásica resulta consistente, lo que nos alegra, y sigue colocando a esta parte de la física entre las más accesibles a nuestra (limitada) intuición.

Si la propia estructura de la partícula define a un sistema abierto, en interacción con el resto de las partículas cargadas, entonces debemos pensar en la infinita complejidad de los sistemas físicos.

¡Qué felicidad para los que estamos empezando!

¡Hay tanto por aprender, tanto para descubrir, y podemos tener la íntima ilusión de que nunca se dirá la última palabra!

BIBLIOGRAFIA

G. Arfken, 'Métodos Matemáticos para Físicos', Ed. Diana, México (1981)

W. E. Boyce y R.C. DiPrima, 'Ecuaciones diferenciales y problemas con valores a la frontera', 3ra. ed., LIMUSA, México (1981)

L. de La Peña, J.L. Jiménez y R. Montemayor, 'The Classical Motion of a Extended Charged Particle Revisited', Nuo.Ci.B, 69, p271 (1982). Preprint IFUNAM (1980)

L. Eyges, 'The Classical Electromagnetic Field', Addison Wesley P.Co.Inc (1972)

H. Goldstein, 'Mecánica Clásica', Aguilar Ed., Madrid (1979)

W. Heitler, 'Quantum Theory of Radiation', 3rd. ed., Oxford University Press, (1954)

J. D. Jackson, 'Classical Electrodynamics', John Wiley & Sons, Inc. (1962) y 2nd. edition (1975)

J. L. Jiménez y I. Campos, en preparación (1985)

J. L. Jiménez y R. Montemayor, 'The Spectral Distribution for a Nonrelativistic Gas of Particles with Structure',Nuo.Ci.B,73,p246 (1983)

L. Landau et E. Lifchitz, 'Physique Théorique',Tome II, 'Théorie des Champs', Ed. MIR, Moscou (1970)

J. A. E. Roa Neri, en preparación, (1985)

F. Rohrlich, 'Classical Charged Particles', Addison Wesley P. Co. Inc. (1965)

J. A. Wheeler & R. P. Feynman, 'Interaction with the Absorber as the Mechanism of Radiation',Rev. Mod. Phys., 17, p157 (1945)

J. A. Wheeler & R. P. Feynman, 'Classical Electrodynamics in Terms of Direct Interparticle Interaction', Rev. Mod. Phys., 21, p425 (1949)

M. L. Zodaib A.,'Sobre la Dinámica Clásica No Relativista de Partículas Cargadas', tesis, México D.F. (1984)

INDICE