



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO**

**FACULTAD DE CIENCIAS**

**"LA SISTEMATICA DE LAS MASAS NUCLEARES  
Y EL MODELO DE LA GOTA DE LIQUIDO"**

**T E S I S**

**QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:  
LICENCIADO EN FISICA**

**P R E S E N T A:  
ABELARDO CESAR GUTIERREZ ORTIZ**

**MEXICO, D. F.**

**1985.**



Universidad Nacional  
Autónoma de México



## **UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso**

### **DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## INDICE

	pág.
Introducción	1
CAPITULO I.-EL NUCLEO ATOMICO	
1.1)Constitución del núcleo	2
1.2)Fuerzas nucleares	4
1.3)Dimensiones y densidad	5
1.4)Energía de enlace	8
1.5)Línea de estabilidad y la distribución - de las frecuencias observadas de los núcleos estables	10
Referencias del capítulo I	15
CAPITULO II.-LA FORMULA DE BETHE-WEISZACKER	
2.1)El modelo de la gota de líquido	16
2.2)Estimación de los coeficientes $a_v$ , $a_s$ y $a_c$	21
2.3)La línea de estabilidad de los núcleos - dada por (2.18) , y su discrepancia con la ex perimental	27
2.4)Energía de asimetría	32
2.5)Nueva línea de estabilidad y discrepan - cias con el experimento	35
2.6)Energía de apareamiento	39
2.7)Resumen	43
Referencias del capítulo II	46

### CAPITULO III.-EXTENSION DE LA FORMULA DE BETHE-WEISZACKER

	pág.
3.1)Radio de curvatura	48
3.2)Líneas de goteo	63
3.3)Las energías de curvatura y torsión	70
3.4)Consecuencias de los términos de curva - tura y torsión sobre las predicciones de la- fórmula de Bethe-Weiszacker	73
3.5)Energía de asimetría de superficie	80
3.6)Consecuencias del término de asimetría - de superficie sobre las distintas prediccio- nes de la fórmula de Bethe-Weiszäcker	84
3.7)Resumen	100
Referencias del capítulo III	106
Resumen general y conclusiones	107
<b>APENDICES</b>	
1.-Forma cuántica del término de asimetría	109
2.-Cálculo de la energía de enlace de los - nucleones en el interior del núcleo	112
3.-Cálculo del volumen que ocupan los nu - cleones que contribuyen al término de - curvatura	116
Referencias de los apéndices	119

## Introducción

El estudio de la masa nuclear está basado en distintos modelos del núcleo. A partir de ellos se han desarrollado fórmulas para las masas nucleares conteniendo distintos números de parámetros que se ajustan de acuerdo con los valores de las masas experimentales.

En esta tesis, se revisa en forma lógica la obtención de una fórmula bien conocida para las masas nucleares a partir de un modelo clásico del núcleo. Este modelo, llamado "de la gota de líquido" nos dá los términos que forman la fórmula de Bethe-Weiszäcker, incluyendo entre ellos el término de asimetría que generalmente se refiere como un término cuántico.

Después, a partir del mismo modelo se obtienen también nuevos términos, como son los llamados de curvatura y torsión basados en refinamientos de los términos que forman la fórmula de Bethe-Weiszäcker.

Además se estudiarán las consecuencias de la inclusión de estos en las predicciones de la fórmula de Bethe-Weiszäcker sobre la estabilidad de los núcleos, utilizando para ello dos conceptos importantes para su estudio, que son el radio de curvatura y las líneas de goteo.

Finalmente, para la mejor comprensión de esta tesis se incluye un capítulo de revisión de las características del núcleo y tres apéndices.

## CAPITULO PRIMERO

### EL NUCLEO ATOMICO

Antes de estudiar la fórmula de masas de Bethe-Weis-zäcker (B.W.) y sus consecuencias, conviene revisar varias características del núcleo (como la dimensión, la densidad, la energía de enlace, etc.) de las que haremos uso a lo largo del trabajo.

En esta revisión se mostrarán las evidencias experimentales que motivan diversos modelos nucleares, así como una serie de comportamientos sistemáticos que debe reproducir la fórmula de masas. Esto mismo nos servirá para establecer la notación que se usará en adelante.

#### 1.1 Constitución del Núcleo.

Los núcleos son agregados de dos tipos de partículas, protones y neutrones, a los cuales conjuntamente se les llama nucleones. Estos nucleones están ligados por las fuerzas nucleares, que caen dentro de la categoría de las interacciones fuertes, de las cuales hablaremos en la siguiente sección.

Este sistema es relativamente poco ligado (con respecto a la energía intrínseca que posee un nucleón), pues se sabe que la energía de enlace de un nucleón es del orden de

(1) 8 Mev, y su energía cinética promedio de 50 Mev, mientras -  
 su masa en reposo es del orden de 940 Mev. (2) Debido a esto se  
 puede considerar, como una primera aproximación, que los nu-  
 cleones son unidades bien definidas en el núcleo y con ca-  
 racterísticas semejantes a las que tendrían cuando están li-  
 bres. El que esto no es enteramente cierto se manifiesta en  
 el hecho de que la suma de las masas de los nucleones li-  
 bres, es diferente de la masa del núcleo como mostraremos  
 más adelante. Los protones tienen carga positiva igual en -  
 magnitud absoluta a la carga del electrón; los neutrones -  
 son eléctricamente neutros. Tanto neutrones como protones -  
 tienen un momento de spin (de valor 1/2, por lo cual son -  
 fermiones) y un momento dipolar magnético.

El número de protones que tiene el núcleo se llama nú-  
 mero de carga y se denota por  $Z$ ; el número de carga es -  
 igual al número atómico del elemento químico correspondien-  
 te en el sistema periódico de Mendeleev. El número de neu-  
 trones que hay en un núcleo se designa por la letra  $N$ . Pa-  
 ra casi todos los núcleos  $N \geq Z$  (a excepción de algunos  
 núcleos con déficit neutrónico como,  $^1_1\text{H}$ ,  $^3_2\text{He}$ , eTc). (4) El  
 número total de nucleones que tiene un núcleo atómico es -  
 $A = N + Z$  y se llama número másico. A los núcleos que -  
 tienen igual  $Z$  para diferentes  $A$  se les llama isótopos.  
 A los núcleos que tienen igual  $N$  pero diferente  $A$  se -  
 les llama isótonos. A los núcleos que tienen igual  $A$  pero  
 diferente  $Z$  se les llama isóbaros.

♦ NOTA:

Las referencias de las definiciones, datos, gráficas o ta-  
 blas usadas en esta tesis serán indicadas con un pequeño nú-  
 mero entre parentesis y podrán ser localizadas ordenadamen-  
 te al final de cada capítulo.

1.2 Fuerzas Nucleares.

Si comparamos la fuerza eléctrica que repele a dos protones con la fuerza gravitacional que los atrae, nos damos cuenta de que la primera es mayor a la segunda en un orden de magnitud de  $10^{36}$ . Para que los protones puedan formar un estado ligado deben existir, por lo tanto, fuerzas atractivas más intensas entre ellos. Estas son las llamadas - fuerzas nucleares.

La información sobre las fuerzas nucleares se obtiene primordialmente de estudiar la interacción entre dos nucleones, y las propiedades globales de sistemas de más cuerpos, debido a que el problema detallado de éstos no se ha podido resolver.

De la evidencia experimental se deducen las siguientes propiedades.

a) Las fuerzas nucleares son de corto alcance. La energía de enlace por nucleón es prácticamente constante. De esta propiedad se concluye que las fuerzas nucleares son de - corto alcance y que un nucleón sólo interacciona con un número limitado de nucleones vecinos (fenómeno llamado saturación). Lo anterior implica que el alcance de las fuerzas nucleares es comparable con las dimensiones de los propios nucleones ( $R \sim 2 \times 10^{-13} \text{ cm} = 2 \text{ Fermi (f)}^{(5)}$ ). Si las fuerzas nucleares fueran de largo alcance como es en el caso de las fuerzas electromagnéticas, un nucleón interactuaría con todos los demás, por lo que la energía de enla



ce por nucleón tendría que ser proporcional al número total de nucleones.

b) Las fuerzas nucleares son esencialmente atractivas pero poseen un carozo repulsivo (a distancias menores de  $0.4 f^{(6)}$ ) que explica que el núcleo no se colapse.

c) Las fuerzas nucleares dependen de la orientación de los espines. Una de estas evidencias es que el único sistema ligado de dos nucleones en la naturaleza es el deuterón que es el sistema protón-neutrón con espines paralelos.

d) Independencia con respecto a la carga. Dentro de la precisión de la teoría y el experimento se encuentra que las fuerzas entre todos los pares de nucleones con espines antiparalelos son iguales.

e) Las fuerzas nucleares no tienen carácter central y su potencial carece de simetría esférica. Esto se concluye de la existencia de un pequeño momento cuadrupolar eléctrico y del momento magnético anómalo del deuterón, los cuales no pueden ser explicados por un potencial de simetría esférica.

### 1.3 Dimensiones y Densidad.

No hay modo de medir directamente las dimensiones del núcleo, por lo que las dimensiones dependen de los métodos experimentales a los que pertenecen los diferentes tipos de experimentos.

Los métodos experimentales que se usan para la determinación de los radios de los núcleos se dividen en métodos nucleares y en métodos electromagnéticos. El radio del núcleo obtenido por los métodos nucleares es llamado el radio nuclear y está definido como la distancia desde el centro del núcleo a la cual una partícula llega antes de sentir la influencia de las fuerzas nucleares de manera apreciable. El radio del núcleo obtenido por los métodos electromagnéticos es llamado el radio electromagnético y está definido como la distancia desde el centro del núcleo en la cual la densidad nuclear de carga desciende a la mitad de su valor central.

De los experimentos realizados por los métodos nucleares y por los métodos electromagnéticos se ha deducido, que el radio es proporcional a  $A^{1/3}$ , por lo cual escribimos:  $R = r_0 A^{1/3}$  donde  $r_0$  es la constante de proporcionalidad. El valor de  $r_0$  obtenido por los métodos electromagnéticos oscila alrededor de 1.4 Fermi, mientras que el valor obtenido por los métodos nucleares es aproximadamente de 1.2 Fermi.

De la forma de la dependencia de  $R$  como función de  $A$ , se puede deducir que la densidad nuclear es aproximadamente constante. Esto se puede demostrar, si se supone que el núcleo tiene forma esférica y por tanto ocupa un volumen  $V = \frac{4}{3} \pi R^3$ , donde  $R = r_0 A^{1/3}$ ; y que la masa nuclear ( $M_{\text{nuc}}$ ) es aproximadamente  $A$  veces la masa de un neutrón ( $m_n$ ), ya que la energía de enlace total de los nucleones en el núcleo ( $B$ ) es mucho menor que  $A$  veces la masa de un neutrón. La densidad está dada por:

$$\rho = \frac{M_{\text{nuc}}}{V} \approx \frac{A m_n}{\frac{4}{3} \pi r_0^3 A} = \frac{3 m_n}{4 \pi r_0^3} = \text{cte}$$

Para obtener alguna idea del valor numérico y ver como este es prácticamente constante para todos los núcleos, se calcula la densidad nuclear para algunos núcleos representativos.

Para esto es conveniente escribir la fórmula para  $\rho$  en términos del déficit de masa  $\Delta M$ , el cual se define como la diferencia entre la masa del núcleo y el número másico dados en unidades de masa atómica (u. m. a.)\*

\* NOTA:

Un sistema conveniente de unidades para expresar magnitudes de masas nucleares es la unidad de masa atómica (u. m. a.), definida como la masa correspondiente a un doceavo de la masa del átomo del isótopo del  $^{12}\text{C}$ . Una u. m. a. es equivalente a  $1.66 \times 10^{-27} \text{ kg}$  o  $931.501 \text{ Mev}$  en unidades de energía a  $191 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^2$ .

La fórmula que se emplea es la siguiente:

$$\rho = \frac{M_{\text{nucl}}}{\frac{4}{3}\pi r_0^3 A} = \frac{M_{\text{nucl}} - A + A}{\frac{4}{3}\pi r_0^3 A} = \frac{\Delta M + A}{\frac{4}{3}\pi r_0^3 A}$$

donde  $\Delta M$  es el déficit de masa y la  $A$  del dividendo está dada en u.m.a. Los valores del  $\Delta M$  se obtuvieron de las tablas de datos de A. H. Mapstra y N. B. Gove<sup>(10)</sup> (Ver ref.), - y  $r_0$  se tomó igual a 1.35 f .

Los valores de  $\rho$  para algunos núcleos, se muestran - en la Tabla 1.1

#### 1.4 Energía de enlace.

La energía de enlace se define como la energía que se necesita para disociar el núcleo en los nucleones que lo -- constituyen, o sea

$$B = \{ Z m_p + (A - Z) m_n - M_{\text{nucl}} \} c^2 \quad (1.1)$$

donde la  $M_{\text{nucl}}$  es la masa del núcleo, y  $m_p$  y  $m_n$  son - las masas respectivas del protón y del neutrón. De aquí - que una energía de enlace positiva indica que el núcleo es - estable y negativa que es inestable.

TABLA 1.1

DENSIDAD DE ALGUNOS ELEMENTOS REPRESENTATIVOS DEL SISTEMA -  
PERIODICO DE MENDELEEV.

ELEMENTO	$\rho \left( 10^{15} \frac{\text{gr}}{\text{cm}^3} \right)$	ELEMENTO	$\rho \left( 10^{15} \frac{\text{gr}}{\text{cm}^3} \right)$
12 C	0.1610	58 Ni	0.1608
14 C	0.1610	120 Sn	0.1608
16 C	0.1612	206 Pb	0.1610
16 O	0.1610	208 Pb	0.1610
20 O	0.1610	232 Th	0.1610
20 Ne	0.1608	235 U	0.1610
40 Ca	0.1608	238 U	0.1610

Se da el nombre de energía específica de enlace del núcleo a la magnitud  $\frac{B}{A}$ , que es la energía media de enlace por nucleón. Si se grafica  $\frac{B}{A}$  vs  $A$  se tiene una gráfica como la de la fig. 1.1. Se puede observar de esta figura que  $\frac{B}{A}$  es casi constante e igual a unos 8.7 Mev por nucleón en el intervalo  $30 < A \leq 100$  mientras que fuera de ese intervalo el valor de  $\frac{B}{A}$  decrece (a excepción del  $\text{He}^4$ ). Debido a que el comportamiento de  $\frac{B}{A}$  vs  $A$  es igual a una constante en el intervalo  $30 < A \leq 100$  y a que  $R = r_0 A^{1/3}$ , se puede considerar al núcleo como un medio incompresible en ese intervalo.

Es conveniente escribir  $B$  en términos de la masa del átomo de hidrógeno ( $M_H^{(1)} = 1.007940$  u.m.a), la masa del neutrón ( $m_n^{(1)} = 1.008664$  u.m.a) y la masa del átomo neutro ( $M(Z, A)$ ), esto es:

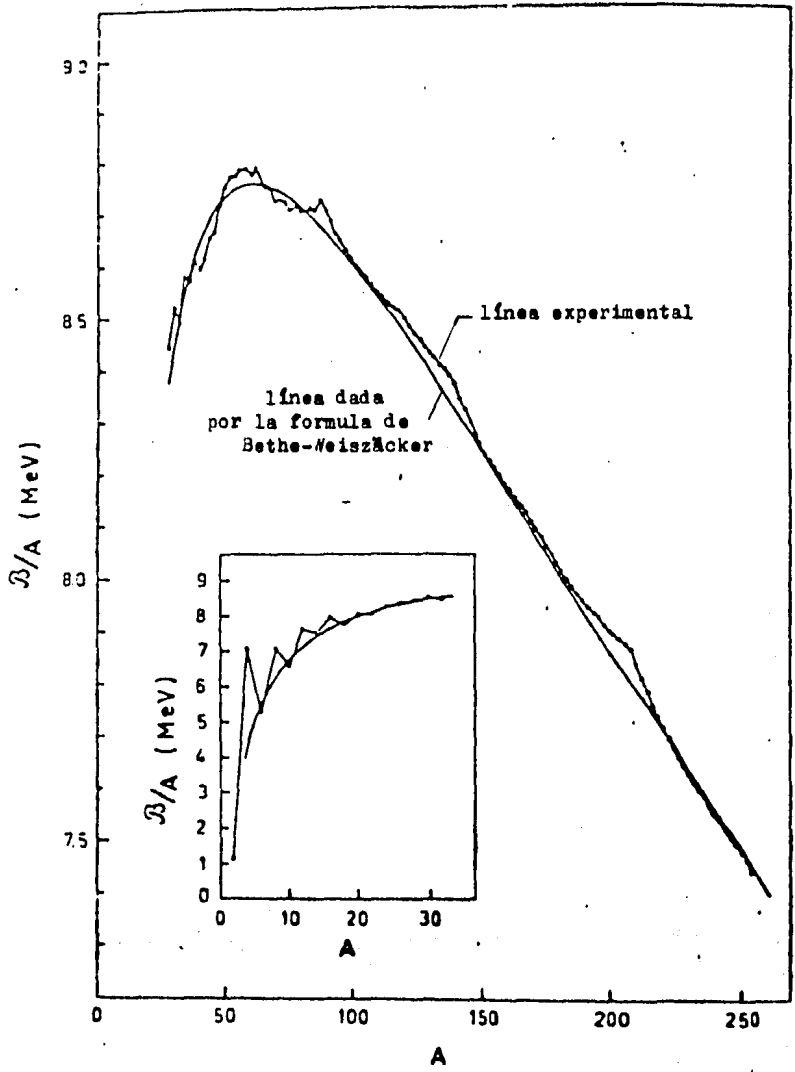
$$B = \{ Z M_H + (A - Z) m_n - M(Z, A) \} c^2$$

6

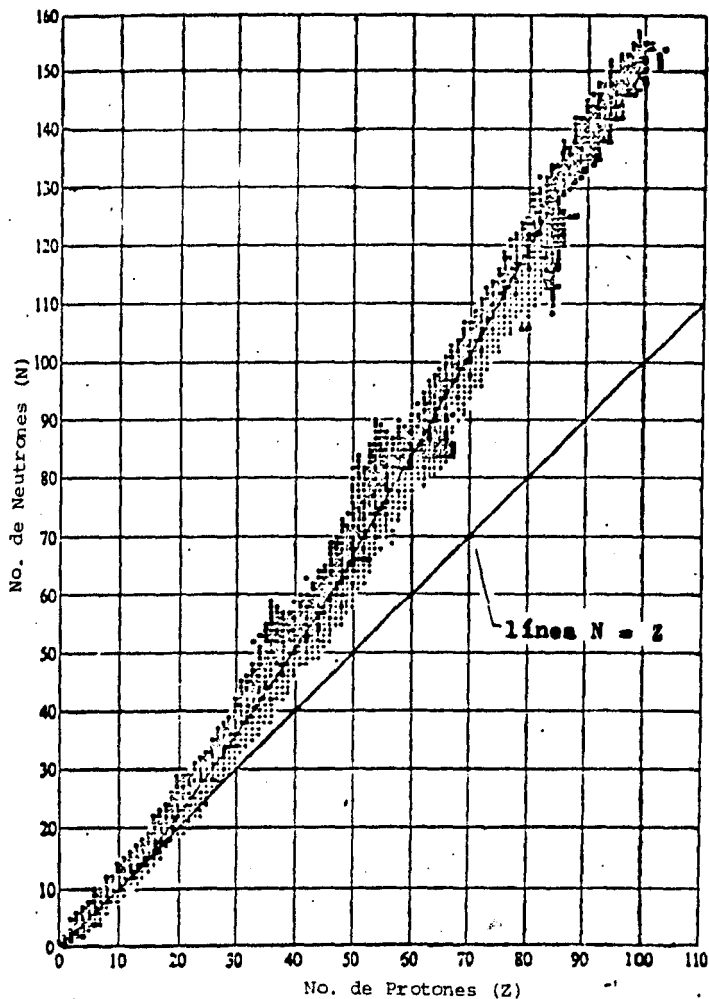
$$B = 931.501 \{ 1.007940 Z + 1.008664 (A - Z) - M(Z, A) \}$$

### 1.5 Línea de Estabilidad y la Distribución de las Frecuencias Observadas de los Nucleos Estables.

En la naturaleza existen 274 nucleos estables. Estos nucleos estables se encuentran en una región estrecha en un diagrama  $N$  vs  $Z$ , como se muestra en la fig. 1.2.



(73)  
Fig. 1.1.-Gráfica en la que se compara la energía de enlace promedio por nucleón dada por la fórmula de B.W. y la dada experimentalmente.



(14)

Fig.1.2.-Gráfica de N vs Z para todos los núcleos conocidos. Los núcleos estables se indican por rectángulos sólidos. A través de esta región se hace pasar una línea que indica la posición de los isótopos más estables. Para núcleos ligeros, ubicados en la línea de estabilidad  $N = Z$ , mientras que para núcleos pesados ubicados en la misma  $N \approx 1.5 Z$ .



A través de esta región se puede hacer pasar una línea, que tienda a indicar la posición de los isóbaros más estables. Esta línea recibe el nombre de línea de estabilidad, y está dada aproximadamente por:

$$N_0 = 0,0060 A^{5/3} + Z_0$$

Los núcleos estables en la naturaleza tienen una distinta frecuencia en su distribución, dependiendo del carácter par o impar de  $A$ ,  $Z$  y  $N$ , como se muestra en la tabla 1.2.

(16)

TABLA 1.2.

DISTRIBUCION DE LAS FRECUENCIAS OBSERVADAS DE LOS NUCLEOS ESTABLES:

de acuerdo con el carácter par o impar de A, Z y N. - (La abundancia de los núcleos estables se señala por medio de líneas debajo de los números de frecuencia, siendo los de mayor abundancia los que tienen mayor número de líneas)

A	Z	N	Número total de núcleos estables.	Número de núcleos con igual Z pero diferente N (Isótopos), para un valor particular de Z.	Número de núcleos con igual N pero diferente Z (Isótonos), para un valor particular de N.	Número de núcleos con igual A pero diferente Z (Isóbaros), para un valor particular de A.
Impar	Impar	Par	50	0, 1, 2 = = =	0, 1, 2 = = =	1, 2 = = =
Impar	Par	Impar	55	0, 1, 2, 3 = = =	0, 1, 2 = = =	1, 2 = = =
Par	Impar	Impar	4	0, 1 = = =	0, 1 = = =	
Par	Par	Par	165	1, 2, 3, ..., 7 = = =	1, 2, 3, 4, 5 = = =	1, 2, 3 = = =

## REFERENCIAS

- 1.- B.M.Yaborski y A.A.Detlaf, Prontuario de Física, Ed. Mir.- Moscú, pág.622(1983).
- 2.- K.Gladkov, Pequeña enciclopedia de la energía nuclear, - Ed. Mir. Moscú, pág.156(1979)
- 3.- B.M.Yaborski y A.A.Detlaf, Prontuario de Física, Ed. Mir.- Moscú, pág.682(1983).
- 4.- B.M.Yaborski y A.A.Detlaf, Prontuario de Física, Ed. Mir.- Moscú, pág.618(1983).
- 5.- Sitenko and Tartakovskii, Lectures on the theory of the nucleus, Ed. Pergamon Press Ltd, pág.3(1975).
- 6.- Sitenko and Tartakovskii, Lectures on the theory of the nucleus, Ed. Pergamon Press Ltd, pág.3(1975).
- 7.- Robert E.Chrien, Enfoque sobre física nuclear, Ed. - G.E.C.S.A., pág.51(1979).
- 8.- A.H.Wapstra and K.Bos, Atomic Data and Nuclear Data Tables 19, pág.179(1977).
- 9.- A.H.Wapstra and K.Bos, Atomic Data and Nuclear Data Tables 19, pág.179(1977).
- 10.- A.H.Wapstra and N.B.Gove, Nuclear Data Tables 9, - pág.265(1971).
- 11.- Paul De Bièvre and Marc Gallet, Journal of Physical and Chemical Reference Data 13.3, pág.809(1984).

- 12.- A.H.Wapstra and K.Bos, Atomic Data and Nuclear Data Tables 19, pág.186(1977).
- 13.- James Rainwater, Background for the Spheroidal nuclear - model proposal.Rev.Mod.Phys.48.3, July 1976.
- 14.- Atam P.Arya, Fundamentals of Nuclear Physics, pág.128 - (1966).
- 15.- Evans R.Duglison, The Atomic Nucleus, Mc.Graw Hill N.Y., - pág.292(1955)
- 16.- Evans R.Duglison, The Atomic Nucleus, Mc.Graw Hill N.Y., - pág.291(1955).

## CAPITULO SEGUNDO

## EL MODELO DE LA GOTA DE LIQUIDO Y LA FORMULA DE BETHE-WEISZACKER.

El propósito de este capítulo es obtener una fórmula de masas usando el modelo de la gota de líquido de forma análoga a como lo hizo Bethe-Weiszäcker. Para ello se explicará los motivos que conducen a la aparición de los diferentes términos en la fórmula y se hará una descripción detallada de cada término, teniendo en cuenta la fundamentación semi empírica de estos. Además se analizarán los aciertos y las deficiencias de esta fórmula cuando se compara con datos experimentales.

## 2.1 El Modelo de la Gota de Líquido.

Las observaciones experimentales de la densidad de los núcleos medios y pesados sugirieron que el núcleo se puede considerar como una gota de líquido. En base a esta suposición se desarrolló una fórmula de masas nucleares, en la que los términos más importantes se obtienen por analogía con una gota de líquido, y los detalles más finos considerando la naturaleza cuántica del núcleo. Esta fórmula de masas nucleares se llama de Bethe-Weiszäcker, y es:

$$M = ZM_H + Nm_n - B \quad (2.1)$$

$$\text{con } B = a_v A - a_s A^{2/3} - a_c \frac{Z^2}{A^{1/3}} - a_a \frac{(A-2Z)^2}{A} + \delta \quad (2.2)$$

donde  $M$  es la masa de un átomo neutro cuyo núcleo contiene  $Z$  protones y  $N$  neutrones,  $M_H$  la masa del átomo de hidrógeno,  $M_n$  la masa de un neutrón y  $B$  la energía de enlace total de los nucleones en el núcleo. La energía de enlace total está dada por una suma de términos, los cuales se denominan energía de volumen ( $a_v A$ ), energía de superficie ( $a_s A^{2/3}$ ), energía Coulombiana ( $a_c \frac{Z^2}{A^{1/3}}$ ), energía de asimetría ( $a_a \frac{(A-2Z)^2}{A}$ ), y energía de apareamiento ( $\delta$ ).

Esta fórmula de masas se dice que es semiempírica, por que para el cálculo de los valores de las masas experimentales se usan los valores de los coeficientes ajustados por mínimos cuadrados en vez de los valores estimados.

Algunos de los valores de los coeficientes de la fórmula de Bethe-Weizsäcker, que han sido ajustados a las masas experimentales se muestran en la tabla 2.1. En los cálculos de la presente tesis se usarán sistemáticamente los valores correspondientes al último renglon de la tabla.

La forma en que se obtuvieron los términos debidos a la analogía entre el núcleo y una gota de líquido (energía de volumen, energía de superficie, energía Coulombiana) se dará a continuación:

a).- Energía de Volumen ( $B_V$ ). Si se considera que las fuerzas nucleares son de corto alcance, que son las mismas para todo par de nucleones (ignorando la dependen-

(1)

TABLA 2.1

VALORES DE LOS COEFICIENTES DE LA FORMULA DE BETHE-WEISZK -  
CKER, OBTENIDOS POR DISTINTOS INVESTIGADORES, BASANDOSE EN-  
EL METODO DE AJUSTE POR MINIMOS CUADRADOS A VALORES EXPERI-  
MENTALES DE LAS MASAS.

	Volumen	Superfi	Coulomb	Asime-	Aparea-
	$a_v$	$a_s$	$a_c$	tría.	miento
				$a_a$	$\delta$
* 1936 Bethe y Ba - cher.....	13.86	13.2	0.58	19.5	
1945 Fermi.....	14.0	13.0	0.583	19.3	33.5/A
1950 Metropolis y Reitwiesner.	14.0	13.0	0.583	19.3	33.5/A
1949 Friedlander- y Kennedy...	14.1	13.1	0.585	18.1	132/A
* 1947 Fowler.....	15.3	16.7	0.69	22.6	
* 1954 Green.....	15.75	17.8	0.71	23.7	
* 1974 De Shalit y- Feschbach...	15.68	18.56	0.717	28.1	

\* La energía de apareamiento no fue incluida en el ajuste.

cia del spin) y que la densidad nuclear es constante, cada nucleón en el interior del núcleo interactúa con un número definido de nucleones (los contenidos en un volumen fijo - alrededor de él) y no con todos los nucleones del núcleo.- Esto resulta en que la energía de enlace total de los nucleones del núcleo será proporcional al número de nucleones  $A$ , y no al número de pares  $\frac{A(A-1)}{2} \approx \frac{A^2}{2}$ . Entonces tenemos que, en primera aproximación

$$B_v \approx a_v A \quad (2.3)$$

donde  $a_v$  es una constante de proporcionalidad.

b).- Energía de Superficie ( $B_s$ ). El término anterior no toma en cuenta que los nucleones que pueden considerarse localizados en la superficie no tienen tantos vecinos como los que están en el interior. Por lo tanto se ha sobreestimado la contribución de los nucleones superficiales. El número de nucleones superficiales puede estimarse en la forma siguiente:

Si se considera el núcleo como una esfera de radio  $R = r_0 A^{1/3}$  el área de la superficie está dada por  $4\pi r_0^2 A^{2/3}$ . Indicando el radio del nucleón por  $r_n$ , el área transversal de un nucleón es  $\pi r_n^2$ . Entonces el número de nucleones sobre la superficie ( $n_s$ ) puede estimarse aproximadamente como:

$$n_s = \frac{4\pi r_0^2 A^{2/3}}{\pi r_n^2} = \frac{\text{Área superficial del núcleo}}{\text{Área transversal de un nucleón}} = cte A^{2/3} \quad (2.4)$$



si  $r_n \approx r_0$  se tiene que la constante en ( 2.4 ) es igual a 4 y la fracción de los nucleones los cuales están en contacto con la superficie es del orden:

$$\frac{4 A^{2/3}}{A} = \frac{4}{A^{1/3}} \quad (2.5)$$

De este modo por medio de cálculos numéricos se tiene que para núcleos ligeros aproximadamente todos los nucleones están en la superficie mientras que para nucleos pesados aproximadamente dos tercios de los nucleones están en la superficie.

Ahora se introduce una corrección negativa representando la pérdida de la energía de enlace por los nucleones en la superficie

$$B_5 = -a_5 A^{2/3} \quad (2.6)$$

donde  $a_5$  es una constante.

c).- Energía Coulombiana (  $B_c$  ). Los protones son partículas cargadas positivamente y por consiguiente existe una energía de interacción debida a la fuerza de Coulomb. Como esta es de largo alcance, todos los protones interactúan entre sí y la energía será proporcional al número de pares  $\frac{Z(Z-1)}{2} \approx \frac{Z^2}{2}$ . Por otra parte la interacción entre dos cargas es inversamente proporcional a la distancia entre ellas.

Tomando como distancia promedio entre dos protones el radio nuclear  $r_0 A^{1/3}$ , se estima que la interacción Coulombiana produce una corrección negativa a la energía de enlace de la forma.

$$B_c = -a_c \frac{Z^2}{A^{1/3}} \quad (2.7)$$

Resumiendo, se tiene hasta ahora

$$M = Z M_H + (A - Z) m_n - \left[ a_v A - a_s A^{2/3} - a_c \frac{Z^2}{A^{1/3}} \right] \quad (2.8)$$

## 2.2 Estimación de los coeficientes $a_v$ , $a_s$ y $a_c$ .

Ahora trataremos de deducir y evaluar los coeficientes  $a_v$ ,  $a_s$  y  $a_c$ . Para ello partiremos de las consideraciones del modelo de la gota de líquido y de la suposición de que el núcleo se puede considerar que tiene densidad constante.

Empezaremos suponiendo que la energía de enlace asociada con cada partícula en una pareja nucleón-nucleón tiene un valor  $U$ . Entonces la energía total asociada con los  $A$  nucleones del núcleo estará dada por

$$B_v = U A \quad (2.9)$$

donde  $\eta$  es el número de nucleones en una vecindad de volumen  $V$  alrededor de cada nucleón. En términos de la densidad  $\rho_A = \frac{A}{V}$  de nucleones en el núcleo, se tiene que  $\eta = A \frac{V}{V}$  y por consiguiente

$$B_V = U \frac{V}{V} A^2 \quad (2.9 a)$$

Si  $r_V$  es el radio de la vecindad y  $V = \frac{4}{3} \pi r_0^3 A$  se tiene

$$B_V = U \left( \frac{r_V}{r_0} \right)^3 A \quad (2.9 b)$$

Si tomamos como  $U$ , la energía de enlace por partícula del deuterón  $U_0 = 1.1 \text{ Mev}$ ,  $r_V = 2.0 \text{ f}$ , el alcance de las fuerzas nucleares y  $r_0 = 1.2 \text{ f}$ , el coeficiente de la expresión es igual a  $5.1 \text{ Mev}$ . Para que sea del orden de  $15.7 \text{ Mev}$ , se requiere que  $U$  sea del orden de  $3.39 \text{ Mev}$ , bastante mayor que  $1.1 \text{ Mev}$  por partícula para el deuterón. Sin embargo la distancia media entre dos nucleones en un núcleo es  $1.15 \text{ f}$  y por lo tanto menor que la distancia protón-neutrón en el deuterón, que es un poco mayor que el alcance de las fuerzas nucleares o sea mayor de  $2 \text{ Fermi}$ , por lo que es más próximo al mínimo del potencial nuclear  $(35 \text{ Mev})$ . En consecuencia es de esperarse que la interacción nucleón-nucleón dentro de un núcleo sea mayor que la interacción de los nucleones del deuterón.

Los nucleones que están en la superficie a diferencia de los que están en el volumen nuclear, están descubiertos-parcialmente, por lo que los nucleones superficiales contribuyen con menos energía, que aquellos que están dentro del volumen nuclear. Entonces la energía que se sobreestimó, - para los  $m_s$  nucleones superficiales, está dada por:

$$B_s = \sum \eta' m_s \quad (2.10)$$

donde  $\eta'$  es el número de nucleones que se sobreestimaron - en cada vecindad de volumen  $V$  alrededor de cada nucleón y se puede escribir como  $\alpha \eta$  con  $\alpha \leq 1$ . En términos de la - densidad  $\rho_A = \frac{A}{V}$  de nucleones en el núcleo, se tiene que -  $\eta' = \alpha A \frac{V}{V}$  y debido a que  $m_s = 4 A^{2/3}$  como se vio en la sección anterior, tenemos por consiguiente que:

$$B_s = \alpha \sum \frac{V}{V} A (4 A^{2/3}) \quad (2.10 a)$$

lo cual, si se toma otra vez  $r_v$  como el radio de la vecindad y  $V = \frac{4}{3} \pi r_v^3 A$  se tiene

$$B_s = \alpha \sum \left( \frac{r_v}{r_0} \right)^3 (4 A^{2/3}) \quad (2.10 b)$$

en función de  $a_v$ , (2.10 b) nos queda

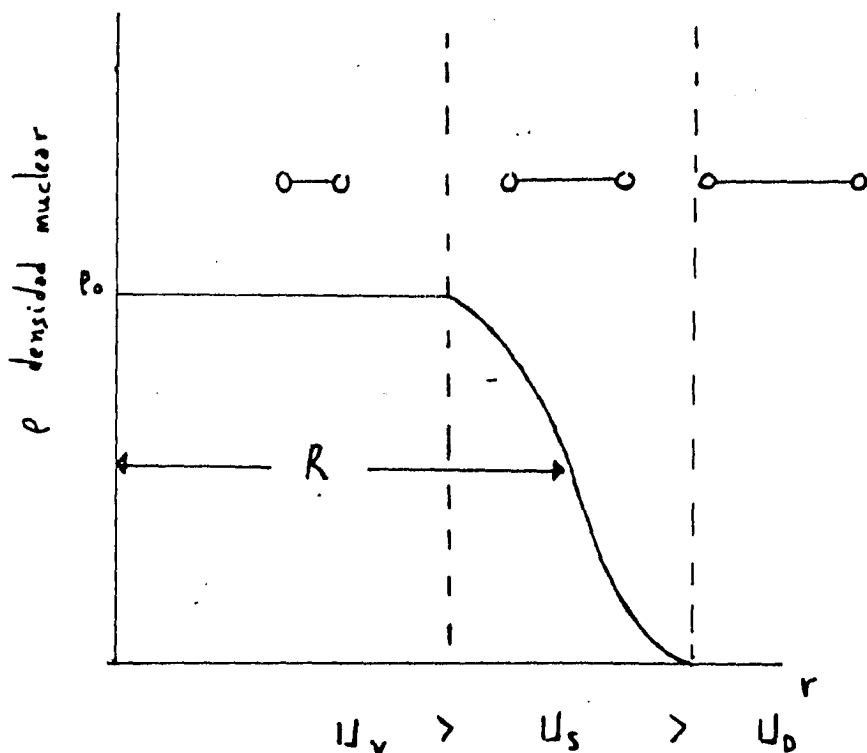
$$B_s = 4 \alpha a_v A^{2/3} \quad (2.11)$$

Así,  $a_s = 4 \alpha a_v$ . Si  $\alpha = \frac{1}{2}$  (que corresponde a una curvatura infinita del núcleo),  $a_v = 15.7 \text{ Mev}$  se tiene que  $a_s = 31.4 \text{ Mev}$ , lo cual no corresponde a los valores de  $a_s$  conocidos. Para que  $a_s$  sea igual a  $18.6 \text{ Mev}$ , se requiere que  $\alpha$  sea igual a  $0.3$ , lo cual no es razonable. Por lo tanto, la energía de enlace correspondiente al término de superficie no puede corresponder a la energía de enlace del término de volumen.

En efecto, se sabe que la densidad de los nucleones en la superficie es menor que en el interior del volumen (ver Fig. 2.1), por lo cual se espera, que los nucleones superficiales estén menos ligados, que aquellos nucleones, que se encuentran en el interior del volumen.

Tomando  $a_s = 18.6 \text{ Mev}$ ,  $\alpha = \frac{1}{2}$ ,  $r_v = 2.0 \text{ f}$  y  $r_o = 1.2 \text{ f}$ , se tiene una estimación de la energía superficial  $U_s = 2.0 \text{ Mev}$ . El resultado anterior corresponde a lo esperado, o sea, que la energía de enlace superficial sea menor que la energía de enlace en el interior del volumen.

Para estimar la energía de Coulomb se considera al núcleo como una distribución uniforme de carga, esto es



(6)

Figura 2.1.- Densidad nuclear en función de  $r$ . Para  $r < R$ , la densidad nuclear es cte. e igual a  $\rho_0$ . Para esta región, 2 nucleones tienen una energía de enlace  $U_V$ . Para  $r \approx R$ , la densidad nuclear es menor que  $\rho_0$  por lo que la energía de enlace de 2 nucleones en esta región  $U_S$  será menor que  $U_V$ . Para  $r > R$  se tiene el caso del deuterón y la energía de enlace  $U_D$  será menor que en los otros dos casos.

$$\rho(r) = \frac{Ze}{V} = \frac{Ze}{\frac{4}{3}\pi R^3} \quad 0 \leq r \leq R \quad (2.12)$$

$$= 0 \quad r > R \quad (2.13)$$

El campo eléctrico que produce esta distribución se --  
obtiene usando la Ley de Gauss ( $\nabla \cdot E = 4\pi \rho$ ), y puede ver-  
se que corresponde a un potencial:

$$\varphi(r) = \frac{Ze}{2R^3} [3R^2 - r^2] \quad 0 \leq r \leq R \quad (2.14)$$

$$= \frac{Ze}{r} \quad r > R \quad (2.15)$$

Finalmente la energía total (auto energía), es

$$E_c = \frac{1}{2} \int \rho(r) \varphi(r) dv = \frac{4\pi}{2} \int_0^R \rho(r) \varphi(r) r^2 dr$$

$$= \frac{3}{5} \frac{(Ze)^2}{R} \quad (2.16)$$

Si  $R = r_0 A^{1/3}$ , se tiene  $E_c = a_c \frac{Z^2}{A^{1/3}}$  con

$$a_c = \frac{3}{5} \frac{e^2}{r_0}$$

Para  $r_0 = 1.2 \text{ f}$

$$a_c = 0.719 \text{ Mev} \quad (2.17)$$

De todo lo visto hasta ahora se tiene que

$$M(Z, A) = Z M_H + N m_n - a_v A + a_s A^{2/3} + a_c \frac{Z^2}{A^{1/3}} \quad (2.18)$$

A continuación se va a comparar la predicción del modelo para la llamada línea de estabilidad que se obtiene de (2.18) con la línea de estabilidad experimental. (Ver Secc. 1.5).

2.3 La línea de estabilidad de los Núcleos dada por (2.18), y su discrepancia con la experimental.

Si se substituye  $N$  por  $A - Z$  en la ecuación (2.18) se tiene que ésta se puede expresar también de la siguiente forma:

$$M(Z, A) = \alpha(A) A + \beta Z + \gamma(A) Z^2$$

donde

$$\alpha(A) = m_n - a_v + \frac{a_s}{A^{1/3}}, \quad \beta = M_H - m_n, \quad \gamma(A) = \frac{a_c}{A^{1/3}} \quad (2.19)$$

Para  $A = \text{cte}$ , (2.19) es la ecuación de una parábola en un diagrama de  $M$  vs  $Z$ . Entonces para un valor de  $A$



dado, el mínimo de  $M$  vs  $Z$  como función de  $Z$  debe corresponder al isóbaro más estable; así pues el número atómico  $Z_0$  del isóbaro más estable se obtiene de la condición:

$$\left( \frac{\partial M}{\partial Z} \right)_{A=\text{cte}} = \beta + 2\gamma Z_0 = 0$$

o sea

$$Z_0 = - \frac{\beta}{2\gamma} \quad (2.20)$$

Si en (2.20) sustituimos los valores de  $\beta = M_H - m_n$  y  $\gamma = \frac{a_c}{A^{2/3}}$  se sigue que:

$$Z_0(A) = \frac{m_n - M_H}{2a_c} A^{1/3} \quad (2.21)$$

Introduciendo ahora  $N_0(A) = A - Z_0(A)$ , la ecuación (2.21) se reescribe como

$$N_0(A) = \left\{ \frac{2a_c}{m_n - M_H} A^{2/3} - 1 \right\} Z_0(A) \quad (2.22)$$

que representado en una gráfica de  $N$  vs  $Z$  nos da la predicción del modelo para la llamada línea de estabilidad.

Usando  $m_n - M_H = 0.78 \text{ Mev}$  y el valor estimado  $a_c = 0.719 \text{ Mev}$  se obtiene

$$Z_0(A) = 0.54 A^{1/3} \quad (2.23)$$

o bien

$$N_0(A) = \left\{ 1.84 A^{2/3} - 1 \right\} Z_0(A) \quad (2.24)$$

En la fig. 2.2 se muestra la línea de máxima estabilidad de los isóbaros dada por (2.24), así como la línea de máxima estabilidad a la que se apegan los núcleos estables-existentes y que está dada aproximadamente por:

$$N_0 = 0.0060 A^{5/3} + Z_0$$

Como se ve de la fig. 2.2, las líneas de máxima estabilidad 1 y 2 que son la obtenida de (2.24) y la obtenida de (1.5) respectivamente difieren considerablemente.

Si queremos salvar el modelo suponiendo que éste es adecuado queda por ver si alguno de los parámetros del que depende (2.24) puede ser variado de tal modo que la curva dada por esta ecuación, se ajusta a la curva experimental obtenida.

De acuerdo con el modelo:

$$N_0 = \left\{ \frac{2a_c}{m_n - m_H} A^{2/3} - 1 \right\} Z_0$$

Experimentalmente sabemos que para  $A$  pequeño  $N_0 \approx Z_0$

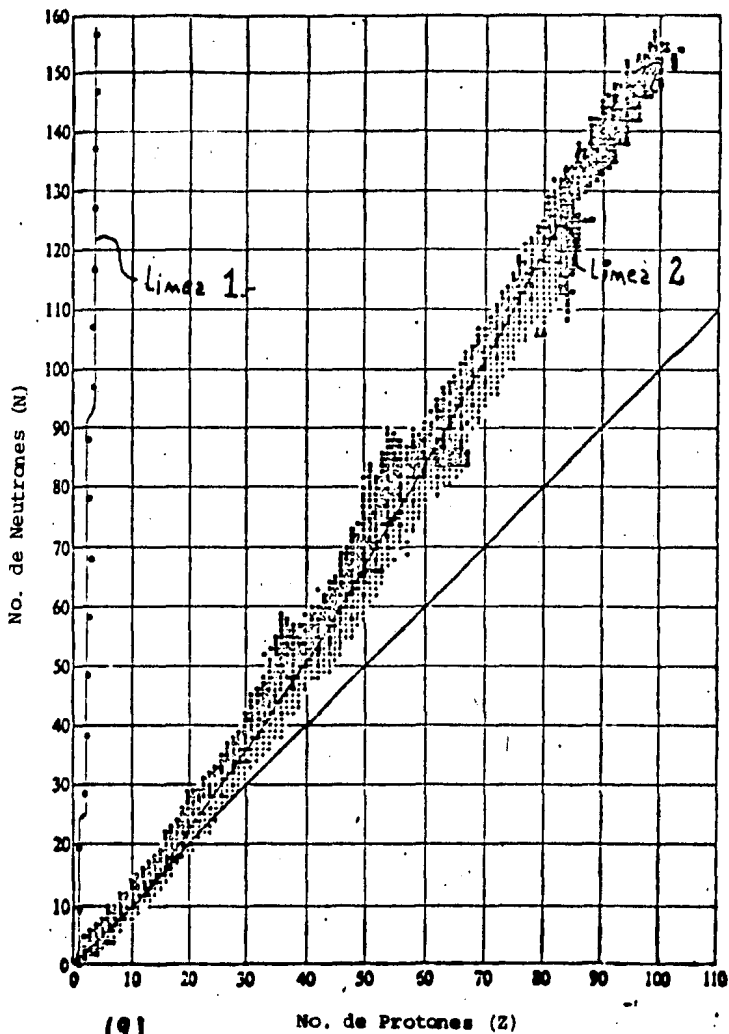


Fig. 2.2.-Gráfica de  $N$  vs  $Z$  en la que se muestra la línea de máxima estabilidad dada por la ec. 2.24 (línea 1) y la línea de máxima estabilidad a la que se apegan los núcleos estables existentes en la naturaleza (línea 2).

lo cual requiere que:

$$\frac{2a_c}{m_n - M_H} A^{2/3} - 1 \approx 1$$

o sea

$$a_c \approx (m_n - M_H) A^{1/3} = 0.78 A^{1/3} \text{ Mev}$$

Esto predice valores de  $a_c$  muy pequeños comparados con el de 0.719 Mev basado en un radio  $R = 1.2 A^{1/3}$  de la distribución de carga y que solo podría obtenerse con distribuciones de carga mucho más extendidas, lo cual no es razonable. Una conclusión parecida se obtendrá para núcleos pesados usando el hecho experimental que en este caso  $N_0 \approx 1.5 Z_0$  (ver Secc. 1.5).

De todo lo dicho anteriormente se entiende que la fórmula de masas con los términos de energía de volumen, de energía de superficie y de energía coulombiana inspirados en el modelo de la gota de líquido no se apega a los resultados experimentales. Por lo tanto, quedan dos caminos a seguir, o se desecha la fórmula y se construye una nueva, o se tiene confianza en el modelo y se agregan nuevos términos que traten de superar las discrepancias hasta ahora insalvables entre los datos experimentales y los previstos por la fórmula.

Nosotros seguiremos el segundo camino, introduciendo - los llamados términos cuánticos.

#### 2.4 Energía de Asimetría

Esta corrección a la energía de enlace, generalmente - se refiere como una corrección cuántica siguiendo argumen - tos cuya exposición presentaremos en el apéndice I. Sin em - bargo en esta sección demostraremos que se puede obtener -- dentro del esquema de los razonamientos de tipo clásico que se han seguido hasta ahora.

En la estimación de la energía de volumen hecha ante - riormente, se supuso que un nucleón dado interacciona igual - mente con todo nucleón en una vecindad dada. Esto ignora la dependencia de espín de las fuerzas nucleares cuyo resulta - do es que sólo el sistema neutrón-protón con espines para - lelos forma un estado ligado en la naturaleza. Si ahora su - ponemos que esencialmente ocurre lo mismo dentro de un nú - cleo, o sea que un nucleón de un tipo interacciona con una - energía de enlace  $U$  con otro nucleón de diferente tipo y - con una energía de enlace  $U'$  con un nucleón del mismo ti - po, la derivación de la energía de volumen se modifica en - la forma siguiente.

Para los  $N$  neutrones del núcleo, la energía total - estara dada por:

$$B_N = U \eta_p N + U' \eta_N N \quad (2.25)$$

donde  $\eta_P$  es el número de protones en una vecindad de volumen  $V$  alrededor de cada neutrón y  $\eta_N$  es el número de neutrones en la misma vecindad. En términos de las densidades de protones y neutrones en el núcleo, se tiene que

$$\eta_P = Z \left( \frac{v}{V} \right) \text{ y } \eta_N = N \left( \frac{v}{V} \right) \text{ y por consiguiente}$$

$$B_N = U \left( \frac{v}{V} \right) Z N + U' \left( \frac{v}{V} \right) N^2 \quad (2.26)$$

En forma enteramente análoga, se obtiene que la energía total asociada con los protones está dada por

$$B_P = U \left( \frac{v}{V} \right) Z N + U' \left( \frac{v}{V} \right) Z^2 \quad (2.27)$$

La energía total de enlace es ahora

$$B_T = B_N + B_P = 2U \left( \frac{v}{V} \right) Z N + U' \left( \frac{v}{V} \right) [N^2 + Z^2] \quad (2.28)$$

Si  $r_v$  es el radio de la vecindad  $v$  y  $V = \frac{4}{3} \pi r_0^3 A$  se tiene

$$B_T = 2U \left( \frac{r_v}{r_0} \right)^3 \frac{ZN}{A} + U' \left( \frac{r_v}{r_0} \right)^3 \frac{[N^2 + Z^2]}{A} \quad (2.29)$$

Puesto que  $N^2 + Z^2 = A^2 - 2NZ$ , (2.29) se convierte en

$$B_T = 2U \left( \frac{r_v}{r_0} \right)^3 \frac{ZN}{A} + U' \left( \frac{r_v}{r_0} \right)^3 \frac{[A^2 - 2NZ]}{A} \quad (2.29a)$$

o bien

$$B_T = 2(U-U') \left( \frac{r_v}{r_0} \right)^3 \frac{ZN}{A} + U' \left( \frac{r_v}{r_0} \right)^3 A \quad (2.29 b)$$

Usando la identidad

$$NZ = \frac{1}{4} [A^2 - (N-Z)^2]$$

tenemos finalmente

$$B_T = \frac{1}{2} (U-U') \left( \frac{r_v}{r_0} \right)^3 \left[ A - \frac{[N-Z]^2}{A} \right] + U' \left( \frac{r_v}{r_0} \right)^3 A$$

que se puede escribir en la forma siguiente

$$B_T = \frac{1}{2} (U+U') \left( \frac{r_v}{r_0} \right)^3 A - \frac{1}{2} (U-U') \left( \frac{r_v}{r_0} \right)^3 \frac{[A-2Z]^2}{A} \quad (2.30)$$

En esta forma se ha obtenido no solo un término proporcional a  $A$ , la energía de volumen, sino también una corrección que depende de la diferencia entre el número de protones y de neutrones, y que recibe el nombre de energía de asimetría. Esta corrección siendo negativa, favorece sistemas con el mismo número de protones y neutrones, y por consiguiente mejora la predicción de la línea de estabilidad, como veremos más adelante.

Una estimación de  $U$  y de  $U'$ , se puede obtener identificando  $\frac{1}{2}(U+U')$   $\left(\frac{r_v}{r_0}\right)^3$  con  $Q_v$  y  $\frac{1}{2}(U-U')$   $\left(\frac{r_v}{r_0}\right)^3$  con  $Q_a$  (el coeficiente del término de asimetría). Si se toma  $r_v = 2.0 f$ , el alcance de las fuerzas nucleares,  $r_0 = 1.2 f$ ,  $Q_v = 15.7 \text{ Mev}$  y  $Q_a = 28.1 \text{ Mev}$ , se tiene que  $U = 9.46 \text{ Mev}$  y  $U' = -2.68 \text{ Mev}$ . El signo menos nos indica que la energía de enlace  $U'$  es disruptiva, lo cual concuerda con el hecho de que las fuerzas nucleares no pueden ligar un sistema de neutrones (protones sin carga eléctrica) a la densidad nuclear - materia neutronica (protónica) <sup>(10)</sup> -, esencialmente debido al principio de exclusión de Pauli. Si se promedian la  $U$  y la  $U'$  se obtiene una  $\bar{U} = 3.39 \text{ Mev}$ , que concuerda con la energía de enlace para el término de volumen ( $U_v$ ) vista anteriormente.

Por último, hacemos notar que la derivación, a lo largo de las mismas líneas, de la corrección de superficie llega en forma natural a un término de "Asimetría de Superficie", esto es, proporcional a  $\left(\frac{N-Z}{A}\right)^2 \cdot A^{2/3}$ . Esta corrección será discutida en el capítulo III.

## 2.5 Nueva Línea de estabilidad y discrepancias con el experimento

Anteriormente en la Secc. 2.3 habíamos visto que la -



fórmula de masas con los términos derivados de el modelo -- clásico de la Gota de Líquido nos predecían una línea de -- máxima estabilidad muy discrepante con la línea de máxima -- estabilidad de los nucleos existentes en la naturaleza.

En esta sección veremos que con él término de asime -- tría sumado a los otros términos, la fórmula de masas nos -- predice una línea de máxima estabilidad a groso modo coinci -- dente con la línea de máxima estabilidad experimental.

Tenemos que la fórmula de masas con el término de asi -- metría es:

$$M(Z, A) = Z M_H + N m_n - a_v A + a_s A + a_c \frac{Z^2}{A^{1/3}} + a_a \frac{(N-Z)^2}{A} \quad (2.31)$$

Si en la fórmula de masas anterior sustituímos  $N$  por  $A - Z$  tenemos:

$$M(Z, A) = Z M_H + (A - Z) m_n - a_v A + a_s A + a_c \frac{Z^2}{A^{1/3}} + a_a \frac{(A - 2Z)^2}{A} \quad \dots (2.32)$$

desarrollando  $(A - 2Z)^2$ , y acomodando los términos teng -- mos:

$$M(Z, A) = m_n A - a_v A + a_s A + a_a A + [(M_H - m_n) - 1/2 a_c] Z + \left[ \frac{a_c}{A^{1/3}} + \frac{4a_a}{A} \right] Z^2 \quad \dots (2.33)$$

Esta última ecuación la podemos escribir como:

$$M(Z, A) = \alpha(A)A + \beta Z + \gamma(A)Z^2$$

donde

$$\alpha(A) = m_n - (a_v - a_a - \frac{a_s}{A^{1/3}})$$

$$\beta = -4a_a - (m_n - M_H)$$

$$\gamma(A) = \left( \frac{4a_a}{A} + \frac{a_c}{A^{2/3}} \right) = \frac{4a_a}{A} \left( 1 + \frac{A^{2/3}}{4 \frac{a_c}{a_a}} \right) \quad (2.34)$$

La ec. (2.34) para  $A = \text{cte}$ , es la ecuación de una parábola en un diagrama de  $M$  vs  $Z$ . El mínimo de esta parábola corresponde al isóbaro más estable, y se obtiene de la condición:

$$\left( \frac{\partial M}{\partial Z} \right)_{A=\text{cte}} = \beta + 2\gamma Z_0 = 0$$

y

$$Z_0 = -\frac{\beta}{2\gamma} \quad (2.35)$$

donde  $Z_0$  es el número atómico del isóbaro más estable.

\* NOTA: De aquí en adelante se indicaran por  $\alpha$  y  $\gamma$  a  $\alpha(A)$  y  $\gamma(A)$ .

Si en  $Z_0 = -\frac{\beta}{2r}$  sustituimos las expresiones (2.34) tenemos que (2.35) se convierte en:

$$Z_0 = \frac{A}{2} \left[ \frac{1 + \frac{m_n - M_H}{4a_a}}{1 + \left(\frac{a_c}{4a_a}\right) A^{2/3}} \right] \quad (2.35 a)$$

Vemos que si  $a_a \gg a_c$  y  $a_a \gg (m_n - M_H)$ , para  $A$  pequeño  $Z_0 = \frac{A}{2}$  lo cual concuerda con la situación en núcleos ligeros.

Introduciendo  $N_0(A) = A - Z_0(A)$ , la línea de estabilidad en el plano  $N$  vs  $Z$  queda dada por:

$$N_0(A) = \frac{A}{2} \left[ 2 - \left[ \frac{1 + \frac{(m_n - M_H)}{4a_a}}{1 + \left(\frac{a_c}{4a_a}\right) A^{2/3}} \right] \right] \quad (2.36)$$

Si utilizamos los valores fenomenológicos

$$a_c = 0.717 \text{ Mev}, \quad a_a = 28.1 \text{ Mev} \quad \text{y} \quad m_n - M_H = 0.78 \text{ Mev}$$

se tiene:

$$Z_0 = \frac{A}{1.99 + 0.01270 A^{2/3}} \quad (2.37)$$

o bien

$$N_0 = (0.99 + 0.0127 A^{2/3}) Z_0 \quad (2.38)$$

(ii)

En la fig. 2.3 se compara esta predicción con la línea experimental.

## 2.6 Energía de Apareamiento.

Hasta ahora la fórmula obtenida predice que todos los nucleos isobáricos se pueden ubicar sobre una parábola en un diagrama de  $M$  vs  $Z$ . Esto no está de acuerdo con los resultados experimentales a saber. <sup>(12)</sup>

1.- En un diagrama de  $M$  vs  $Z$ , se tiene 4 parábolas distintas, cada una correspondiente a los distintos tipos de nucleos (par-par, par-impar, impar-par, impar-impar), lo que significa que cada sección isobárica consiste en realidad de dos parábolas (ver fig. 2.4).

2.- Para  $A$  par, la separación promedio de las 2 parábolas es alrededor de 2 - 3 Mev, siendo la parábola impar - impar siempre más alta.

3.- Para  $A$  impar, la separación promedio es aproximadamente de 200 - 300 Kev, con las curvas  $N$  impar y  $Z$  impar intercambiando su posición relativa de una región de capas a la siguiente. Esta alternación es gobernada por la regla empírica de Suess Jensen, <sup>(13)</sup> que nos dice que cuando un número mágico es cruzado, la parábola superior de la correspondiente clase impar de nucleones, se convierte en la más baja.

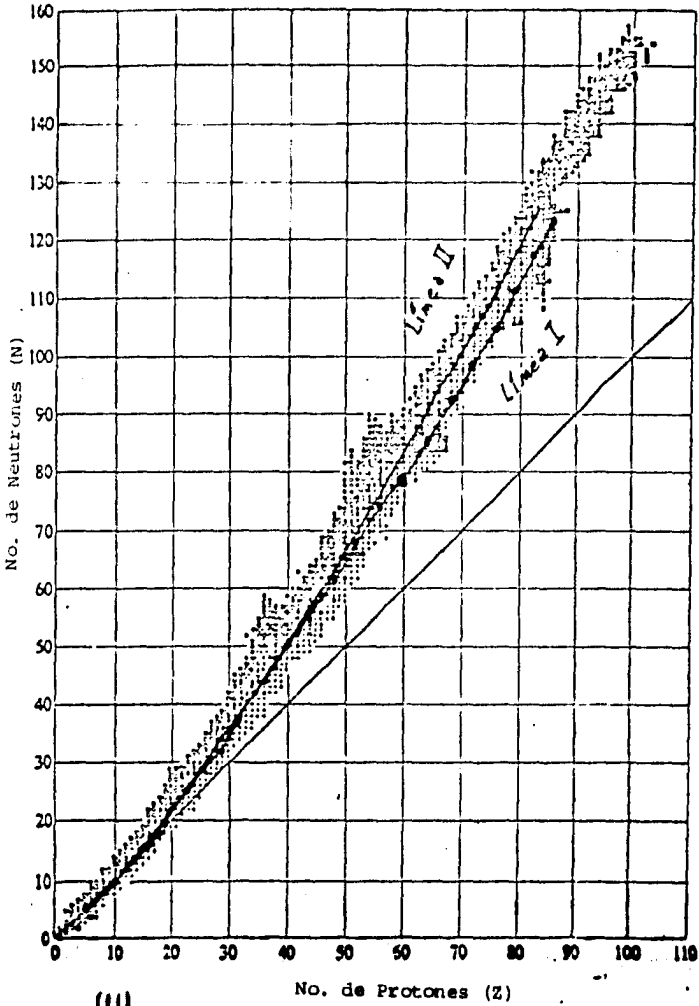


Fig. 2.3.- Gráfica de  $N$  vs  $Z$ , en la que se compara la línea de máxima estabilidad obtenida de la ec. 2.36 (línea I), — con la línea de máxima estabilidad a la que se apegan los núcleos estables existentes en la naturaleza (línea II).

4.- Las parábolas con  $A$  impar, siempre están colocadas entre las de  $A$  par, en forma aproximadamente equidistante.

(15)

Para tomar en cuenta este hecho, Fermi en 1945 (aunque desde 1936, Bethe y Bacher ya habían hablado de este término) introdujo un término corrector a la fórmula de masas de B.W. (la cual comprende todos los términos de energía anteriores) el cual se le llama energía de apareamiento.

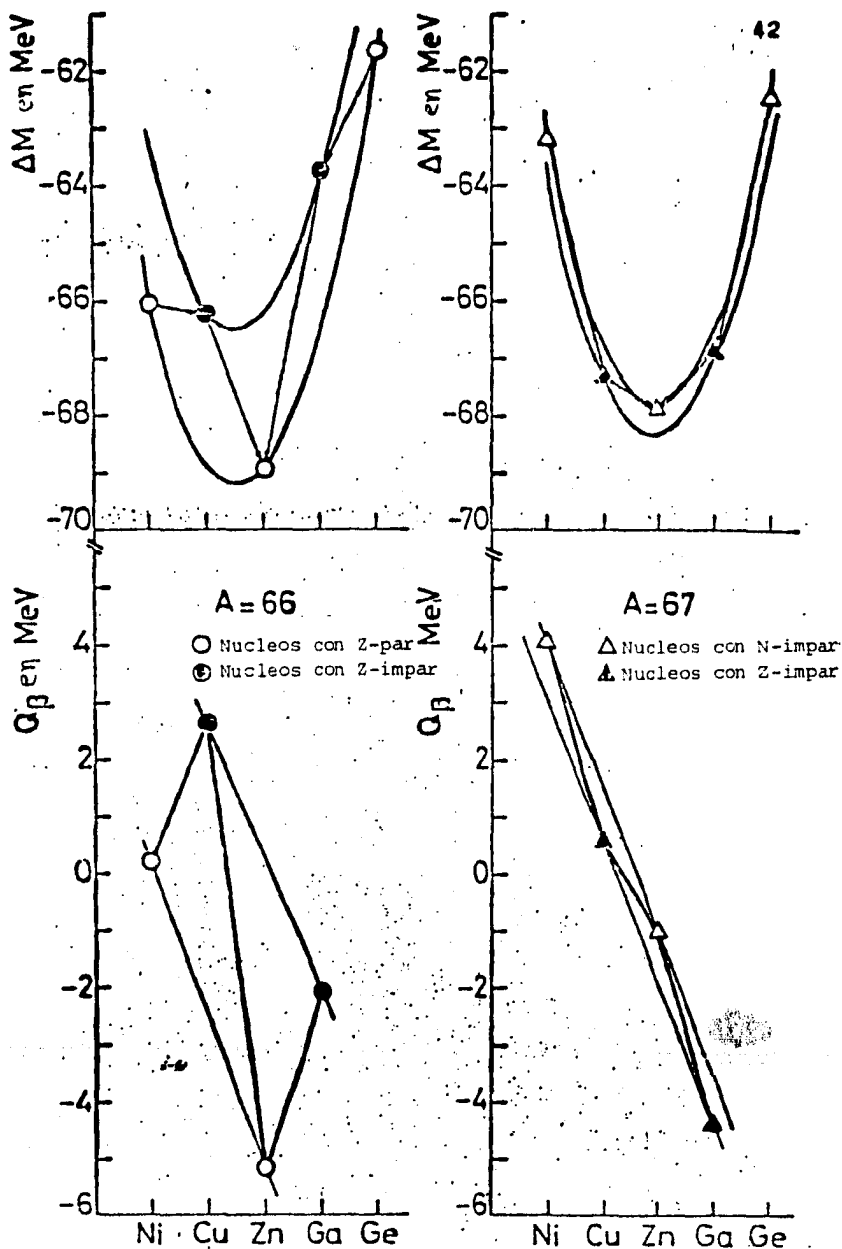
Es de notarse que de acuerdo con la fig. 2.4, que el número de nucleos estables dependerá de la curvatura de las parábolas, ya que si la curvatura es muy chica (o sea el radio de curvatura muy grande), es posible que los nucleos que estén cerca de  $Z_0$  y en la parábola de abajo tengan un estado vecino en la parábola de arriba a la que pudieran de caer. Como después se verá en la sección 3.1.

Debido a que originalmente no se había detectado la diferencia entre las dos parábolas correspondientes a  $A$  impar, la corrección empírica adoptada fué:

$$\delta(A, Z) = \begin{cases} \delta(A) & \text{impar - impar} \\ 0 & \text{A impar} \\ -\delta(A) & \text{par - par} \end{cases}$$

donde  $\delta(A)$  es la energía de separación de las parábolas.

El origen de esta corrección puede asociarse con las interacciones nucleón - nucleón en estado singlete que to-



(14)

Fig. 2.4.- Parábolas empíricas para las secciones isobaricas correspondientes a  $A=66$  y  $A=67$ , y las correspondientes energías de los decaimientos  $\beta$  de los nucleos que se encuentran en cada una de estas secciones.

todavía no se han tomado en cuenta por considerarse más débiles que la del estado triplete neutrón-protón. Dentro del núcleo estas interacciones favorecen estados de espines antiparalelos para dos nucleones idénticos, o sea de espín total cero. Se habla entonces de la existencia de fuerzas de apareamiento. Su contribución a la energía de amarre no puede estimarse en la forma clásica empleada hasta ahora, esto es, por ejemplo, considerando la interacción de un neutrón con los neutrones en una vecindad y análogamente para los protones. En efecto, aquí entra en juego un fenómeno netamente cuántico, de tipo colectivo, análogo al fenómeno de la superconductividad o la superfluidez. El análisis de este fenómeno da lugar en efecto a una corrección de la forma

$$\begin{array}{l}
 \text{ma} \\
 (16)
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 \delta(A, Z) = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{núcleo par-par} \\ \Delta(N) & \text{" N impar - Z par} \\ \Delta(Z) & \text{" N par - Z impar} \\ \Delta(N) + \Delta(Z) & \text{" impar - impar} \end{array} \right.
 \end{array}$$

donde las  $\Delta$  son las brechas en los espectros de energía (energy gap) de las partículas en el núcleo. Para una discusión detallada véase la referencia.

## 2.7 Resumen

De los argumentos clásicos, derivados de la analogía del núcleo con una gota de líquido, e introduciendo unas co



correcciones fundamentadas en fenómenos cuánticos, hemos deducido la siguiente fórmula de masas:

$$M = Z M_H + N m_n - B$$

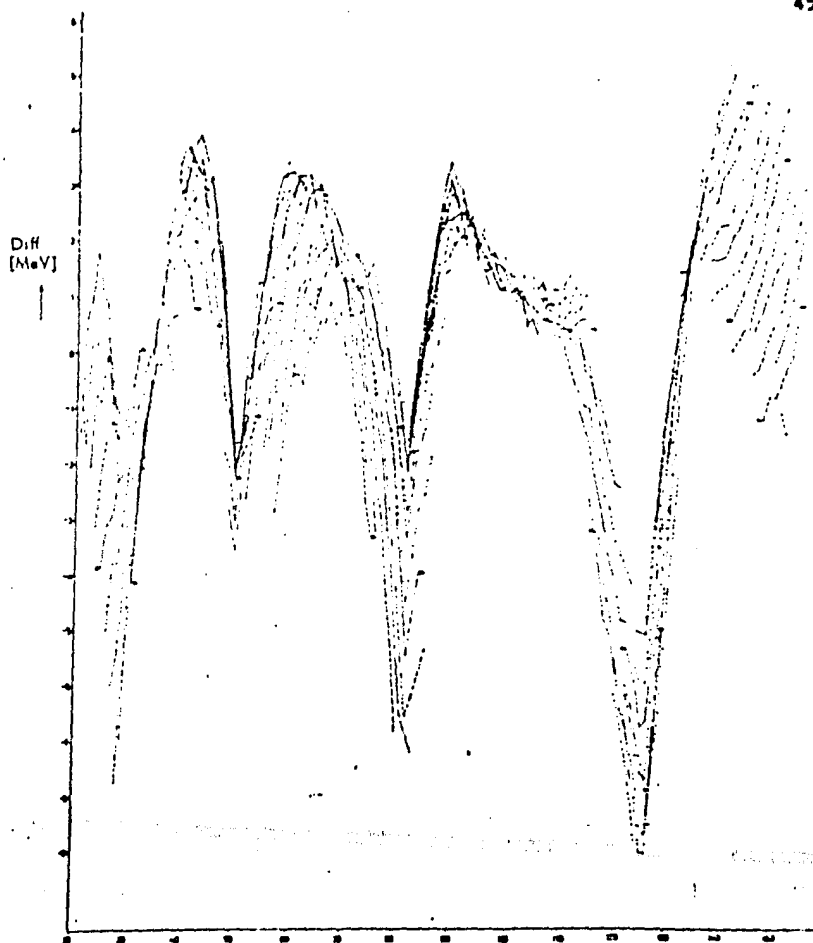
con

$$B = a_v A - a_s A^{2/3} - a_c \frac{Z^2}{A^{1/3}} - a_u \frac{(A-2Z)^2}{A} + \delta$$

la cual recibe el nombre de fórmula de Bethe-Weiszäcker.

La precisión con la que se reproducen las masas experimentales con la fórmula de Bethe-Weiszäcker, puede verse en la fig. 2.5, donde se compara las masas obtenidas de la fórmula de Bethe-Weiszäcker ( usando los valores de los coeficientes dados por Kummel <sup>(17)</sup> ) con las masas experimentales. De esta figura se ve que la diferencia máxima entre la energía de enlace teórica y experimental en valor absoluto es de 10 Mev, la cual se encuentra donde están los núcleos con  $A$  aproximadamente igual a 200. Como la energía de enlace promedio por nucleón es aproximadamente de 8 Mev, se tiene que la energía de enlace total de un núcleo con  $A=200$ , es de 1600 Mev, lo que significa que el error máximo es del orden del uno por ciento de la energía de enlace total.

Un punto importante que se ve en la fig. 2.5 es que existen desviaciones sistemáticas. En efecto, las energías de enlace experimental son más grandes que las predichas, cuando el número de neutrones o protones es 2, 8, 20, 28, 50, 82, o 126 ( los cuales reciben el nombre de números mágicos ). Es



(18)

Fig. 2.5.- Diferencia entre las masas experimentales y las dadas por la fórmula de Bethe-Weizsäcker.

to es una evidencia de una estructura de capas semejante a la de los electrones en el átomo. En esta tesis no se van a tratar los refinamientos a la fórmula de Bethe-Weiszäcker - debidos a la estructura de capas del núcleo ni tampoco los refinamientos debidos a la deformación de los núcleos dado el grado de dificultad que presentan, y ya que no proporcionan en esencia nada nuevo.

#### REFERENCIAS

- 1.- Evans, The Atomic Nucleus, Mc.Graw Hill N.Y., pág.383 - (1955) y Amos de Shalit and Herman Feschbach, Theoretical Nuclear Physics. Volume I. Nuclear Structure, Wiley and Sons N.Y., pág.126(1974).
- 2.- A.H.Wapstra and K.Bos, Atomic Data and Nuclear Data Tables 19, No.3, pág.186(1977).
- 3.- M.G.Bowler, Nuclear Physics, Pergamon Press Ltd, pág.26 -- (1973).
- 4.- Sitenko and Tartakovskii, Lectures on the theory of the nucleus, Pergamon Press Ltd, pág.6(1975).
- 5.- Sitenko and Tartakovskii, Lectures on the theory of the nucleus, Pergamon Press Ltd, pág.7(1975).
- 6.- B.Hahn, D.G.Ravenhall y R.Hofstadter, Phys.Rev., 101, - pág.1131(1956)
- 7.- B.M.Yaborski y A.A.Detlaf, Manual de Física, Ed.Mir Moscú, pág.828(1972)

- 8.- Amos de Shalit and Herman Feschbach, Theoretical Nuclear Physics. Volume I. Nuclear Structure, Wiley and Sons N.Y., pág.126(1974).
- 9.- Atam P.Arya, Fundamentals of Nuclear Physics, Allyn and Bacon, pág.128(1966).
- 10.- B.Behera and R.K.Satpathy, Energy per particle, effective mass and magnetic susceptibility in neutron matter. J. - Phys. G: Nucl. Phys., Vol.5, No.8, 1979.-V.Canuto, Equation of state at ultra high densities. Reprinted from Annual Review of Astronomy and Astrophysics. Vol.12, pág.186(1974)
- 11.- Atam P.Arya, Fundamentals of Nuclear Physics, Allyn and Bacon Inc., pág.128(1966)
- 12.- N.Zeldes, Proc. of the Int. Conf. on Nuclear Masses, Mc. Master University, pág.150(1960).
- 13.- Suess-Jensen, Arkiv Fysik 3, pág.577(1951-1952)
- 14.- N.Zeldes and S.Liran, Pairing, pair breaking and neutron-proton correlation effects in nuclear masses and deformations. Apuntes del Simposio científico Mexicano-Israelita del 9 al 11 de abril de 1973 en la Cd. de México.
- 15.- E.Fermi: LADC-255, 1946.-E.Fermi; Nuclear Physics, A course given at the University. Chicago, University Press, pág.6-(1950).
- 16.- M.Bauer, V.Canuto, Physics Letters 7, pág.261(1963)
- 17.- A.H.Wapstra, Canadian Journal. Volume 13, No.6, Sept.1971.
- 18.- A.H.Wapstra, Canadian Journal. Volume 13, No.6, Sept.1971.

## CAPITULO TERCERO

## EXTENSION DE LA FORMULA DE BETHE-WEISZACKER

El propósito de este capítulo es analizar las modificaciones que sufren las predicciones de la fórmula de Bethe-Weiszäcker sobre la estabilidad de los nucleos, al introducirle nuevos términos basados en refinamientos de los términos que constituyen esta fórmula.

Para ello se analizarán dos conceptos interesantes para la estabilidad de los nucleos, que son el radio de curvatura de la parábola  $M$  vs  $Z$  y las líneas de goteo que se definirán en la sección 3.2.

## 3.1. Radio de curvatura de la parábola

Una predicción de la fórmula de masas son las condiciones sobre los parámetros de la curva que se requieren para tener 1, 2, 3 ó  $N$  isóbaros estables. Uno de los elementos más importantes que nos puede dar condiciones sobre el número de nucleos estables (estabilidad con respecto al decaimiento  $\beta$ ) es el radio de curvatura ( $R$ ). Esto se debe principalmente al hecho de que las condiciones que se necesitan para que exista un decaimiento  $\beta$  depende de la curvatura ( $t = \frac{1}{R}$ ) de la parábola, como se vió en la sección 2.6.

El radio de curvatura de una función  $Y(x)$  está definido como el radio del círculo tangente a la curva en el punto que se está evaluando, y se expresa matemáticamente, por la siguiente fórmula:

$$R = \frac{\left[ 1 + \left( \frac{dY}{dx} \right)^2 \right]^{3/2}}{\frac{d^2Y}{dx^2}} \quad (3.1)$$

Para la parábola, dada por:

$$M = \alpha(A) A + \beta Z + \gamma(A) Z^2$$

con  $A = \text{cte}$ , el radio de curvatura para cualquier  $Z$  es:

$$R(Z) = \frac{\left[ 1 + \left( \frac{\partial M}{\partial Z} \right) \Big|_{A=\text{cte}} \right]^{3/2}}{\frac{\partial^2 M}{\partial Z^2} \Big|_{A=\text{cte}}} \quad (3.2)$$

o, explícitamente

$$R(Z) = \frac{\left[ 1 + (2\gamma(A)Z + \beta)^2 \right]^{3/2}}{2\gamma(A)} \quad (3.3)$$

En particular para la  $Z$  del isóbaro más estable de la parábola, el cual está dado por  $Z_0 = -\frac{\beta}{2\gamma(A)}$  (como ya se demostró en la sección 2.3), tenemos que (3.3) se convierte en:

$$R\Big|_{Z=Z_0} = \frac{1}{2\gamma(A)} \quad (3.4)$$

Por lo tanto, las condiciones sobre el radio de curvatura deben estar dadas sobre la  $\gamma(A)$ . Lo que plantea la pregunta de cuáles son los requisitos sobre la  $\gamma(A)$  para tener 1, 2 ó  $N$  núcleos estables. Para ello veremos -- la  $Q$  de la reacción para la emisión beta menos de un núcleo. O sea, si  ${}_Z X^A$  es un núcleo con  $Z$  protones y  $A$  nucleones, y este decae por la emisión beta menos, la reacción correspondiente es:



donde  $\bar{\nu}$  es un antineutrino, que debido a su masa y a la energía que se lleva no será tratado en la presente tesis.

Entonces de acuerdo con la conservación de la energía se tendrá:

$$Q_{\beta^-} = M(Z, A) - M(Z+1, A) \quad (3.6)$$

dadas las masas en Mev. Sumando y restando  $M(Z_0, A)$ , y usando la fórmula (2.33 a) de Bethe-Weiszäcker para las masas nucleares, (3.6) se convierte en:

$$Q_{\beta^-} = 2\gamma \left[ (Z_0 - Z) - \frac{1}{2} \right] + \begin{cases} 2\delta & \text{para } A_{\text{par}} - Z_{\text{impar}} \\ 2\epsilon & \text{" } A_{\text{impar}} - Z_{\text{impar}} \\ -2\epsilon & \text{" } A_{\text{impar}} - Z_{\text{par}} \\ -2\delta & \text{" } A_{\text{par}} - Z_{\text{par}} \end{cases} \quad (3.7)$$

donde  $\epsilon$  es la energía de separación de las parábolas para  $A$  impar, y la  $\delta$  fue definida en la sección 2.6.

Por un procedimiento similar, la  $Q$  de la reacción - para la emisión beta mas es:

$$Q_{\beta^+} = 2\gamma \left[ -(Z_0 - Z) - \frac{1}{2} \right] - 2m_e + \begin{cases} 2\delta & \text{para } A_{\text{par}} - Z_{\text{impar}} \\ 2\epsilon & \text{" } A_{\text{impar}} - Z_{\text{impar}} \\ -2\epsilon & \text{" } A_{\text{impar}} - Z_{\text{par}} \\ -2\delta & \text{" } A_{\text{par}} - Z_{\text{par}} \end{cases} \quad (3.8)$$

y para la captura electrónica:

$$Q_{ce} = 2\gamma \left[ -(Z_0 - Z) - \frac{1}{2} \right] + \begin{cases} 2\delta & \text{para } A_{\text{par}} - Z_{\text{impar}} \\ 2\epsilon & \text{" } A_{\text{impar}} - Z_{\text{impar}} \\ -2\epsilon & \text{" } A_{\text{impar}} - Z_{\text{par}} \\ -2\delta & \text{" } A_{\text{par}} - Z_{\text{par}} \end{cases} \quad (3.9)$$



Para simplificar el análisis sólo se va a discutir la  $Q_{\beta}$  del decaimiento  $\beta$  y la  $Q_{ce}$  correspondiente a la captura electrónica.

Entonces, para isóbaros con  $A$  par, de (3.7 y (3.9) se ve que hay 4 formas diferentes para decaimiento  $\beta$ , - las cuales se muestran en la fig. 3.1.

A continuación se analizarán para dos casos especiales de la  $Z_0$  de la parábola, las condiciones que se requieren sobre el radio de curvatura para la estabilidad con respecto al decaimiento  $\beta$  de los isóbaros con  $A$  par, y después se comentará el caso general.

a).- Si se considera el mínimo de las parábolas (considerando las parábolas con un mismo eje), coincidiendo con un valor de  $Z$  entero par, vemos que sólo podemos tener números impares de isóbaros estables (ver fig. 3.1). De acuerdo con esto las condiciones para un determinado número de isóbaros estables nos llevarán a las condiciones sobre los radios de curvatura correspondientes, como veremos a continuación:

Para que exista sólo un isóbaro estable, de acuerdo con la fig. 3.1, se requiere que:

$$M(Z_0 - 2, A) > M(Z_0 - 1, A) \quad (3.10)$$

$$M(Z_0 + 2, A) > M(Z_0 + 1, A) \quad (3.11)$$

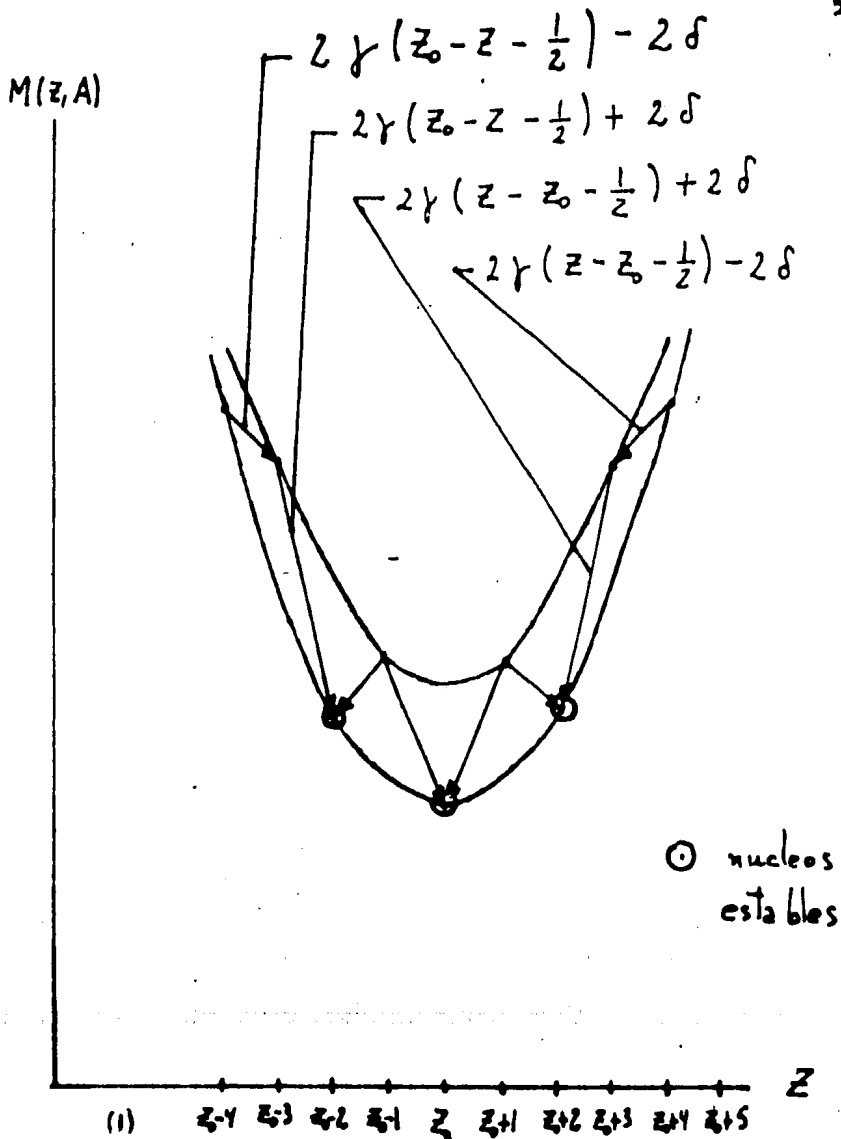


Fig.3.1.- Gráfica donde se muestran los distintos tipos de decaimiento  $\beta$  para  $A$  par y  $Z_0$  par, de acuerdo con las ecuaciones (3.7) y (3.9). Con círculos se indican los nucleos estables.

las cuales, para las parábolas con su eje común paralelo al eje de las masas (como se considerará para todos los casos que siguen), debido a la simetría de las parábolas con respecto a su eje se reducen a una sola condición.

Entonces, de (3.10), se tiene:

$$\begin{aligned} Q_{\beta-} &= M(z_0-2, A) - M(z_0-1, A) \\ &= 2\gamma \left[ z_0 - (z_0-2) - \frac{1}{2} \right] - 2\delta \\ &= 3\gamma - 2\delta > 0 \end{aligned}$$

y  $\gamma > \frac{2\delta}{3}$  por lo que la condición correspondiente sobre el radio de curvatura  $R$  es:

$$R < \frac{3}{4\delta(A)} \quad (3.12)$$

Para que existan sólo 3 isóbaros estables, las condiciones que se requieren de acuerdo con la fig. 3.1 son:

$$M(z_0-4, A) > M(z_0-3, A) \quad (3.13)$$

$$M(z_0-2, A) < M(z_0-1, A) \quad (3.14)$$

De la condición (3.13) tenemos:

$$\begin{aligned}
 Q_{\beta^-} &= M(z_0-4, A) - M(z_0-3, A) \\
 &= 2\gamma [z_0 - (z_0-4) - \frac{1}{2}] - 2\delta \\
 &= 7\gamma - 2\delta > 0 \quad \therefore \gamma(A) > \frac{2\delta(A)}{7}
 \end{aligned}$$

y

$$R(A) < \frac{7}{4\delta(A)} \quad (3.15)$$

De la condición (3.14) tenemos:

$$\begin{aligned}
 Q_{\beta^-} &= M(z_0-2, A) - M(z_0-1, A) \\
 &= 2\gamma [z_0 - (z_0-2) - \frac{1}{2}] - 2\delta \\
 &= 3\gamma - 2\delta > 0 \quad \therefore \gamma(A) < \frac{2\delta(A)}{3}
 \end{aligned}$$

y

$$R(A) > \frac{3}{4\delta(A)} \quad (3.16)$$

De las condiciones (3.15) y (3.16) se ve que el radio de curvatura para tener 3 núcleos estables, queda así:

$$\frac{7}{4\delta(A)} > R > \frac{3}{4\delta(A)} \quad (3.17)$$

De acuerdo con la fig. 3.1 las condiciones sobre las masas para tener 5 isóbaros estables, son:

$$M(Z_0 - 6, A) > M(Z_0 - 5, A) \quad (3.18)$$

y

$$M(Z_0 - 4, A) < M(Z_0 - 3, A) \quad (3.19)$$

lo cual, repitiendo lo anterior, nos conduce a un radio de curvatura comprendido entre:

$$\frac{11}{4\delta(A)} > R > \frac{7}{4\delta(A)} \quad (3.20)$$

Generalizando lo anterior, se tiene que para  $2n+1$  isóbaros estables, donde  $n=1, 2, 3, \dots$  las siguientes condiciones sobre las masas:

$$M(Z = Z_0 - (2n+2), A) > M(Z = Z_0 - (2n+1), A) \quad (3.21)$$

y

$$M(Z = Z_0 - 2n, A) < M(Z = Z_0 - (2n-1), A) \quad (3.22)$$

las cuales nos conducirán a radios de curvatura comprendidos entre los valores:

$$\frac{2[(2n+2) - \frac{1}{2}]}{4\delta(A)} \rightarrow R > \frac{2[(2n+2) - \frac{1}{2}] - 4}{4\delta(A)} \quad (3.23)$$

b).- Si ahora nos vamos al caso extremo de considerar el mínimo de la parábola coincidiendo con un valor de  $Z$  entero impar, vemos que esto nos conduce a números pares de isóbaros estables. (ver fig. 3.2)

Por lo tanto, para 2 isóbaros estables de acuerdo con la fig. 3.2, se tiene que:

$$M(Z_0-3, A) > M(Z_0-2, A) \quad (3.23 a)$$

o

$$Q_B = M(Z_0-3, A) - M(Z_0-2, A)$$

$$= 2\gamma [Z_0 - (Z_0-3) - \frac{1}{2}] - 2\delta$$

$$= 5\gamma - 2\delta > 0$$

lo que implica que  $\gamma > \frac{2\delta}{5}$  (3.23 b)

y la correspondiente condición sobre el radio de curvatura-

R es:

$$R < \frac{5}{4\delta(A)} \quad (3.23 c)$$

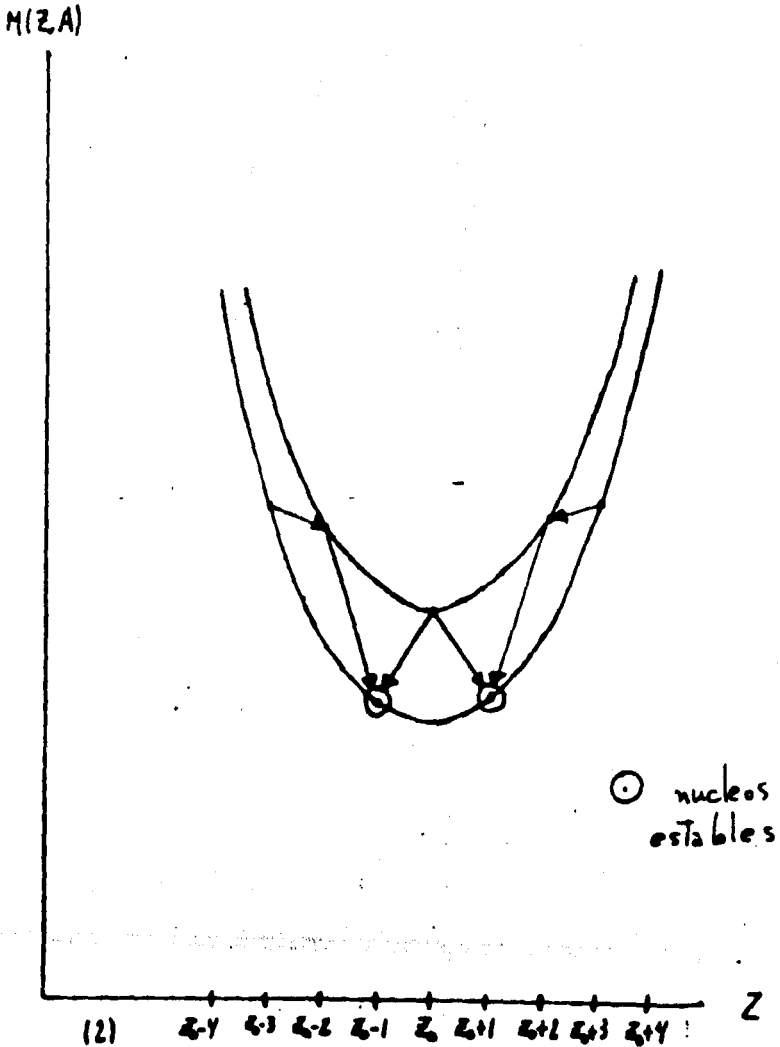


Fig.3.2.- Gráfica que representa la posición de los nucleos estables (indicados con círculos), si el mínimo de las parábolas coincide con un valor de  $Z$  entero impar. Es de notarse - que bajo esta condición solo se tendrán números pares de isóbaros estables.

Para 4 isóbaros estables, las condiciones que se requieren de acuerdo con la fig. 3.2 son

$$M(Z_0 - 5, A) > M(Z_0 - 4, A) \quad (3.23 d)$$

y

$$M(Z_0 - 3, A) < M(Z_0 - 2, A) \quad (3.23 e)$$

De la condición (3.23 d) tenemos

$$\begin{aligned} Q_{\beta} &= M(Z_0 - 5, A) - M(Z_0 - 4, A) \\ &= 2\gamma \left[ Z_0 - (Z_0 - 5) - \frac{1}{2} \right] - 2\delta \\ &= 9\gamma - 2\delta > 0 \end{aligned}$$

δ

$$\gamma(A) > \frac{2\delta(A)}{9}$$

y

$$R(A) < \frac{9}{4\delta(A)} \quad (3.23 f)$$



De la condición (3.23 e) tenemos

$$\begin{aligned} Q_{\beta^-} &= M(Z_0-3, A) - M(Z_0-2, A) \\ &= 2\gamma \left[ Z_0 - (Z_0-3) - \frac{1}{2} \right] - 2\delta \\ &= 5\gamma - 2\delta > 0 \end{aligned}$$

δ

$$\gamma(A) < \frac{2\delta(A)}{5}$$

γ

$$R(A) > \frac{5}{4\delta(A)} \quad (3.23 g)$$

De las condiciones (3.23 f) y (3.23 g) se ve que el --  
radio de curvatura para tener 4 núcleos estables, queda --  
así:

$$\frac{9}{4\delta(A)} > R > \frac{5}{4\delta(A)} \quad (3.23 h)$$

Para 6 isóbaros estables el radio de curvatura queda comprendido entre

$$\frac{13}{4\delta(A)} > R > \frac{9}{4\delta(A)} \quad (3.23 i)$$

Y otra vez, generalizando lo anterior, se tiene que para  $2n$  isóbaros estables, donde:  $n=1, 2, 3, \dots$ , que las condiciones sobre las masas son:

$$M(Z = Z_0 - (2n+1), A) > M(Z = Z_0 - 2n, A) \quad (3.23 j)$$

y

$$M(Z = Z_0 - (2n-1), A) > M(Z = Z_0 - (2n-2), A) \quad (3.23 k)$$

los cuales nos conducirán a radios de curvatura comprendidos entre

$$\frac{2[(2n+1) - \frac{1}{2}]}{4\delta(A)} > R > \frac{2[(2n+1) - \frac{1}{2}] - 4}{4\delta(A)} \quad (3.23 l)$$

En general la  $Z_0$  del mínimo de la parábola no coincide con un número entero (ver fig. 2.4) por lo que una situación más realista de las condiciones en las que se encuentra el radio de curvatura de las parábolas, estarán en-

un caso intermedio a estos 2 casos extremos.

Para  $A$  impar el problema es prácticamente el mismo que para  $A$  par. Así, por un procedimiento igual al hecho anteriormente para cada uno de los 2 casos especiales se obtienen las mismas condiciones sobre el radio de curvatura para la estabilidad con respecto al decaimiento  $\beta$  que las que se obtuvieron para el caso  $A$  par, con la diferencia que ahora en vez de  $\delta$  tenemos  $\epsilon$ .

Es de notarse que para  $A$  par sólo se tiene 1, 2 ó 3 isóbaros estables en la naturaleza, los que se encuentran principalmente formando parejas (existen 57 parejas de isóbaros estables, 5 triadas ( $A = 50, 96, 124, 130$  y  $136$ ) - de un total de 165 isóbaros estables), mientras que para  $A$  impar, siempre se tiene un sólo isóbaro estable (a excepción de  $A = 113, 123$ ). De aquí, que los radios de curvatura para 2 núcleos estables se encuentran más frecuentemente para  $A$  par, mientras que para  $A$  impar sólo exigen prácticamente los radios de curvatura para un isóbaro estable. Esto último se debe a que  $\epsilon$  es diez veces menor que  $\delta$ , y por consecuencia los radios de curvatura serán 10 veces mayores.  $-\frac{1}{2}$  (4)

Si tomamos  $\delta = 12 A$ , para  $A = 10$ , se tiene que para más de un isóbaro estable  $R > \frac{3}{4 \delta(A)/10} = 1.97$  para  $A$  impar. Para  $A = 100$  se tiene que  $R > 6.25$  y para  $A > 100$  se tienen  $R$  todavía mayores.

Como los radios de curvatura experimentales se pueden-

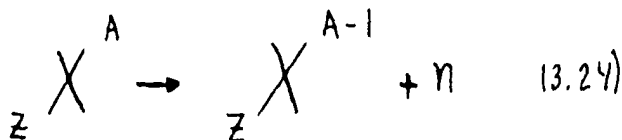
estimar conociendo los valores fenomenológicos de los coeficientes de la fórmula de B.W. se tiene entonces, para los valores dados por Bohr y Motelson <sup>(5)</sup>, que estos nos conducen a radios de curvatura comprendidos entre  $R=0.19$  y  $R=0.91$ , para núcleos entre  $A=20$  hasta  $A=240$  los cuales son muy menores que los que se requieren para tener más de un isóbaro estable para  $A$  impar.

## 2 Líneas de goteo.

Como se dijo anteriormente un concepto interesante para la estabilidad del núcleo son las líneas de goteo que se encuentran en un diagrama de  $N$  vs  $Z$ . Estas nos dan para una  $N$  dada (ó  $Z$  dada) el número de protones (ó neutrones) que se pueden añadir al núcleo sin que este decaiga por emisión de un protón (ó un neutrón). La línea de goteo que se debe a la adición de neutrones (ó protones) para un número de protones dado (ó neutrones dado) se llama línea de goteo de los neutrones (ó de los protones). La línea de goteo de los neutrones (ó de los protones) queda definida por la condición de que la energía de separación de un neutrón (ó de un protón) sea igual a cero.

a).- Línea de goteo de los neutrones. Como se dijo esta se establece cuando la energía de separación de un neu -

trón ( $S_n$ ) es igual a cero. Esta energía de separación, se define como la energía que se requiere para separar un neutrón del núcleo. O sea, si  ${}_Z X^A$ , es el núcleo con  $Z$  protones y  $A$  nucleones, la reacción que se considera es:



De acuerdo con la conservación de la energía, se tendrá:

$$Q = [M(Z, A) - M(Z, A-1) - m_n] \quad (3.25)$$

siendo  $Q$  la energía faltante o sobrante de la reacción. Como  $S_n = -Q$  tenemos que:

$$S_n = [M(Z, A-1) - M(Z, A) + m_n] \quad (3.26)$$

y usando la fórmula de B.W. dada por (2.32) (omitiedo el término de apareamiento, debido a su pequeñez), la ec. (3.26) nos queda:

$$S_n = a_v - a_s \left( A^{2/3} - (A-1)^{2/3} \right) - a_c \left[ \frac{Z^2}{A^{1/3}} - \frac{Z^2}{(A-1)^{1/3}} \right] - a_a \left[ \frac{(A-2Z)^2}{A} - \frac{[(A-1)-2Z]^2}{A-1} \right] \quad (3.27)$$

Desarrollando los cuadrados, usando la serie de Taylor hasta 2o. orden, y simplificando otra vez, se puede ver que (3.27) se convierte en:

$$S_n \approx a_v - \frac{2}{3} a_s A^{-\frac{1}{3}} + \frac{1}{3} a_c Z^2 A^{-\frac{4}{3}} - a_a \left[ 1 - \frac{4Z^2}{A^2} \right] \quad (3.28)$$

Igualando  $S_n$  a cero, y multiplicándola por  $A^2$  a ambos lados tenemos:

$$a_v A^2 - \frac{2}{3} a_s A^{\frac{5}{3}} + \frac{1}{3} a_c Z^2 A^{\frac{2}{3}} - a_a [A^2 - 4Z^2] = 0$$

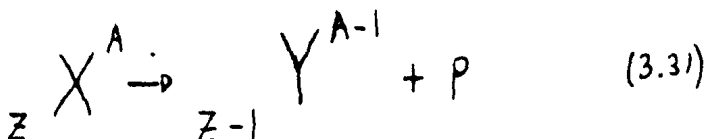
$$Z = \left[ \frac{3[a_a - a_v] A^2 + 2a_s A^{\frac{5}{3}}}{a_c A^{\frac{2}{3}} + 12a_a} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.29)$$

Usando la identidad  $Z = A - N$ , (3.29) se puede escribir como:

$$N = A \left\{ 1 - \left[ \frac{3[a_a - a_v] + 2a_s A^{-\frac{1}{3}}}{12a_a + a_c A^{\frac{2}{3}}} \right]^{\frac{1}{2}} \right\} \quad (3.30)$$

Las ecuaciones (3.29) y (3.30) nos dan la línea de goteo para los neutrones en un diagrama  $N$  vs  $Z$ . En la fig. 3.3 se puede comparar la línea de goteo dada por las ecuaciones anteriores (tomando los valores fenomenológicos de De Shalit y Feschbach dados en la tabla 2.1) con una línea de goteo de los neutrones obtenida con mayor precisión.

b) Línea de goteo de los protones. Esta se establece cuando la energía de separación de un protón ( $S_p$ ) es igual a cero. La  $S_p$  se define como la energía que se requiere para separar un protón del núcleo. O sea, si  ${}_Z X^A$  es el núcleo con  $Z$  protones y  $A$  nucleones en este caso, la reacción que se considera es:



De acuerdo con la conservación de la energía, se tendrá:

$$Q = [M(Z, A) - M(Z-1, A-1) + m_p + m_e] \quad (3.32)$$

siendo  $Q$ , la energía faltante o sobrante de la reacción. Como  $S_p = -Q$  tenemos que:

$$S_p = [M(Z-1, A-1) - M(Z, A) - m_p - m_e] \quad (3.33)$$

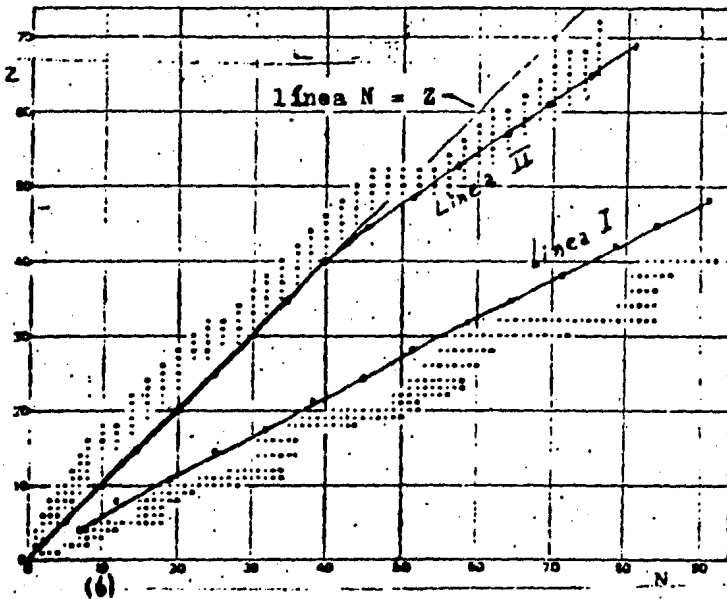


Fig. 3.3.- Gráfica de  $N$  vs  $Z$ , donde se compara la estructura de las líneas de goteo de los nucleones para núcleos esféricos medios y ligeros (obtenida por medio de la aproximación-microscópica auto-consistente) con las líneas de goteo de los nucleones dadas por las ecuaciones (3.29), (3.30) y (3.37), - (3.41). La línea I corresponde a la línea de goteo de los neutrones y la línea II corresponde a la línea de goteo de los protones.



Usando la fórmula de B.W. dada por (2.32) (omitiendo — el término de apareamiento), (3.33) nos queda:

$$S_p = a_v - a_s \left( A^{\frac{2}{3}} - (A-1)^{\frac{2}{3}} \right) - a_c \left[ \frac{Z^2}{A^{\frac{1}{3}}} - \frac{(Z-1)^2}{(A-1)^{\frac{1}{3}}} \right] - a_a \left[ \frac{(A-2Z)^2}{A} - \frac{[(A-1) - 2(Z-1)]^2}{A-1} \right] \quad (3.34)$$

Desarrollando los cuadrados, usando la serie de Taylor hasta 2o. orden, y de nuevo simplificando, se puede ver que se convierte en:

$$S_p = a_v - \frac{2}{3} a_s A^{-\frac{1}{3}} - a_c \left( 2ZA^{-\frac{1}{3}} - \frac{1}{3} Z^2 A^{-\frac{4}{3}} + \frac{2}{3} ZA^{-\frac{4}{3}} \right) - a_a \left( -3 - 4Z^2 A^{-2} + 8ZA^{-1} + 8ZA^{-2} \right) \quad (3.35)$$

Igualando  $S_p$  a cero y reordenando sus términos se tiene

$$a_v - \frac{2}{3} a_s A^{-\frac{1}{3}} + 3a_a + \left( -2a_c A^{-\frac{1}{3}} - \frac{2}{3} a_c A^{-\frac{4}{3}} - 8a_a A^{-1} - 8a_a A^{-2} \right) Z + \left( \frac{1}{3} a_c A^{-\frac{4}{3}} + 4a_a A^{-2} \right) Z^2 = 0 \quad (3.36)$$

y por consiguiente  $Z$  en función de  $A$ , será:

$$Z = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (3.37)$$

con

$$a = \frac{1}{3} a_c A^{-\frac{4}{3}} + 4a_a A^{-2} \quad (3.38)$$

$$b = -2a_c A^{-\frac{1}{3}} - \frac{2}{3} a_c A^{-\frac{4}{3}} - 8a_a A^{-1} - 8a_a A^{-2} \quad (3.39)$$

$$c = a_v - \frac{2}{3} a_s A^{-\frac{1}{3}} + 3a_a \quad (3.40)$$

(se toma el signo menos de la raíz, porque el signo más nos conduce a  $Z > A$ ).

Usando la identidad  $Z = A - N$ , (3.37) se convierte en:

$$N = A - \frac{b(A) - \sqrt{b^2(A) - 4a(A)c(A)}}{2a(A)} \quad (3.41)$$

con  $a(A)$ ,  $b(A)$  y  $c(A)$  dados respectivamente por las ecuaciones (3.38), (3.39) y (3.40).

Las ecuaciones (3.39) y (3.41) nos dan la línea de goteo de los protones en un diagrama de  $N$  vs  $Z$ . En la fig. 3.3 referida anteriormente también se puede comparar la línea de goteo dada para los protones (tomando los valores fenomenológicos de De Shalit y Feschbach dados en la tabla 2.1) con una línea de goteo de los protones obtenida con mayor precisión.

A continuación veremos los nuevos términos que se introducen a la fórmula de Bethe-Weizsäcker para mejorar el cálculo de los valores de las masas que se encuentran lejos de la línea de estabilidad.

### 3.3 Las energías de curvatura y torsión.

Al estimar la energía de superficie se supuso que el volumen que ocupan los nucleones con los que interacciona un nucleón superficial es la mitad del volumen que ocupan los nucleones con los que interacciona un nucleón sumergido profundamente dentro del volumen nuclear. Esto nos conduce

a un déficit en la energía de enlace total, ya que los nucleones superficiales se habían incluido originalmente en la cuenta de la energía de volumen.

Este déficit a la energía de enlace total consiste en restar a la energía de volumen, la energía de los nucleones que se han sobrestimado y que se encuentran arriba del plano tangente a la superficie nuclear, que esta en la vecindad de cada nucleón superficial.

El cálculo anterior considera que la superficie tiene una curvatura infinita. Pero debido a que esto no es cierto hay que introducir un nuevo término que tome en cuenta el déficit de energía que dan los nucleones que todavía se han sobrestimado.

Este término se llama el término de curvatura y su expresión se obtendrá a continuación:

El déficit a la energía de enlace de los  $4A^{2/3}$  nucleones superficiales, debido a la curvatura de la superficie es:

$$B_{\text{curv}} = U \eta 4A^{2/3} \quad (3.47)$$

donde  $U$  es la energía de enlace de los nucleones en la superficie y  $\eta$  es el número de nucleones que se sobrestimaron y que ocupan un volumen  $V'$  dentro de una vecindad de volumen  $V$  alrededor de un nucleón superficial. En función de la densidad nuclear  $\rho_N = \frac{A}{V}$  se tiene que --

$\eta = \frac{A}{V} v^1$  y por consiguiente:

$$B_{\text{curv}} = 4 \mu \left( \frac{v^1}{V} \right) A^{5/3} \quad (3.48)$$

Para  $V = \frac{4}{3} \pi r_0^3 A$  y  $v^1 = \frac{1}{8} \pi r_v^4 r_0^{-1} A^{-1/3}$  (ver el apéndice 3) se tiene que (3.48) se puede expresar así:

$$B_{\text{curv}} = \frac{3}{8} \mu \left( \frac{r_v}{r_0} \right)^4 A^{1/3} = a_{\text{curv}} A^{1/3} \quad (3.49)$$

Finalmente se estimará el valor del coeficiente. Si  $r_v = 2.0 f$  el alcance de las fuerzas nucleares,  $r_0 = 1.2 f$  y  $\mu = 2.0 \text{ Mev}$  la energía de enlace de los nucleones en la superficie (ver cap. 2, secc. 4), se encuentra que el coeficiente de la expresión es 5.79 Mev.

Hasta ahora todos los términos debidos a las propiedades del modelo geométrico del núcleo son:

$$a_v A - a_s A^{2/3} - a_c A^{1/3}$$

los cuales, para que estén en consistencia con un desarrollo decreciente en serie de potencias de  $A^{1/3}$ , requieren de un término constante, el cual le llamaremos de torsión - para mantener la continuidad en la nomenclatura usada.

Entonces  $B_{\text{torsión}}$ , se puede escribir así:

$$B_{\text{torsión}} = a_t A^0$$

Los coeficientes de curvatura y torsión están actualmente en discusión. Los signos, así como sus valores numéricos dependen del modelo teórico que se utilice ó de los ajustes experimentales, los cuales no siempre están de acuerdo. A continuación haremos una discusión cualitativa de los efectos que tienen estos términos, sobre la línea de estabilidad, el radio de curvatura y las líneas de goteo.

### 3.4 Consecuencias de los términos de curvatura y torsión sobre las predicciones de la fórmula de Bethe-Weiszäcker.

a).- La línea de estabilidad. Hasta ahora se tiene - que:

$$M = Z M_H + N m_n - B_{BW} + B_{CURV + TORSION}$$

donde  $B_{BW}$  es la energía de enlace de acuerdo con los términos dados por Bethe-Weiszäcker y  $B_{CURV + TORSION}$  es la energía de enlace de los nuevos términos.

Para analizar la línea de estabilidad, debemos obtener la  $\left. \frac{\partial M}{\partial Z} \right|_{A=cte}$  o sea

$$\left. \frac{\partial M}{\partial Z} \right|_{A=cte} = \left. \frac{\partial (Z M_H + N m_n - B_{BW})}{\partial Z} \right|_{A=cte} + \left. \frac{\partial (B_{CURV + TORSION})}{\partial Z} \right|_{A=cte} \quad (3.50)$$

pero como  $B_{\text{curv} + \text{torsión}} = a_{\text{curv}} A + a_t A^{\frac{1}{3}}$ , tenemos que

$$\left. \frac{\partial B_{\text{curv} + \text{torsión}}}{\partial Z} \right|_{A=\text{cte}} = 0$$

y

$$\left. \frac{\partial M}{\partial Z} \right|_{A=\text{cte}} = \left. \frac{\partial (ZM_H + N(Z)m_n - B_{RW}(Z))}{\partial Z} \right|_{A=\text{cte}} = \left. \frac{\partial M_{BW}}{\partial Z} \right|_{A=\text{cte}}$$

o sea, tanto el término de curvatura como el término de torsión no nos varían la línea de estabilidad.

b).- Radio de curvatura de las parábolas en un diagrama  $M$  vs  $Z$ . Para analizar el radio de curvatura se debe obtener:

$$R = \frac{\left[ 1 + \left( \frac{\partial M}{\partial Z} \right)^2 \right]^{3/2}}{\left. \frac{\partial}{\partial Z} \left( \frac{\partial M}{\partial Z} \right) \right|_{A=\text{cte}}}$$

pero como  $\left. \frac{\partial M}{\partial Z} \right|_{A=\text{cte}} = \left. \frac{\partial M_{BW}}{\partial Z} \right|_{A=\text{cte}}$ , los términos de curvatura y torsión no afectan el radio de curvatura de la parábola.

Ahora analizaré las líneas de goteo, tomando los términos de curvatura y torsión independientemente para facilitar el análisis.

c).- Las líneas de goteo. Para obtener las líneas de goteo de los neutrones en un diagrama  $Z$  vs  $A$ , de la-

ec.

$$S_n = \left. \frac{\partial B}{\partial A} \right|_{z=cte} = 0 \quad (3.52)$$

se despeja  $Z$  en función de  $A$ . Para obtener la línea de goteo de los protones en el mismo diagrama, de la ec.:

$$S_p = \left. \frac{\partial B}{\partial A} \right|_{N=cte} = 0 \quad (3.53)$$

se despeja también  $Z$  en función de  $A$ .

Como  $B_{\text{torsión}} = a_t A^0 = cte$ , tenemos que su derivada con respecto a  $A$  es cero, y este término no influye en el análisis de las líneas de goteo.

Para  $B_{\text{curv}}$ , la nueva  $B$  nos queda así:

$$B = B_{BW} + B_{\text{curv}}$$

ó explícitamente (despreciando el término de apareamiento)

$$B = a_v A - a_s A^{2/3} + a_{\text{curv}} A^{1/3} - a_c \frac{Z^2}{A^{1/3}} - a_a \frac{(A-2Z)^2}{A} \quad (3.54)$$

Utilizando (3.54) en  $S_n$  se tiene que (3.52) nos queda

$$a_v - \frac{2}{3} a_s A^{-1/3} + \frac{1}{3} a_{\text{curv}} A^{-2/3} + \frac{1}{3} a_c Z^2 A^{-4/3} - a_a \left[ 1 - \frac{4Z^2}{A^2} \right] = 0$$



y despejando  $Z$  en función de  $A$ , se tiene finalmente

$$Z = \sqrt{\frac{-a_v + \frac{2}{3} a_s A^{-1/3} + a_a + \frac{1}{3} a_{curv} A^{-2/3}}{\frac{1}{3} a_c A^{-1/3} + \frac{4}{A^2} a_a}} \quad (3.55)$$

Por otro lado, si se toma  $B$  sin el término de curvatura, se tiene por un procedimiento similar que la  $Z$  correspondiente es:

$$Z = \sqrt{\frac{-a_v + \frac{2}{3} a_s A^{-1/3} + a_c}{\frac{1}{3} a_c A^{-1/3} + \frac{4}{A^2} a_a}} \quad (3.56)$$

A continuación analizaremos si la  $Z$  dada por (3.55) es mayor o menor que la  $Z$  que se obtiene sin el término de curvatura. Para ello a la  $Z$  de la ec. (3.55) la distinguiremos con una tilde encima de la letra  $Z$ .

Si dividimos  $\tilde{Z}$  entre  $Z$ , se tiene:

$$\frac{\tilde{Z}}{Z} = \frac{\sqrt{-a_v + \frac{2}{3} a_s A^{-1/3} + a_a + \frac{1}{3} a_{curv} A^{-2/3}}}{\sqrt{-a_v + \frac{2}{3} a_s A^{-1/3} + a_a}}$$

que se puede expresar de la siguiente forma:

$$\frac{\bar{Z}}{Z} = \sqrt{1 + \frac{\frac{1}{3} a_{\text{curv}} A^{-2/3}}{-a_v + \frac{2}{3} a_s A^{-1/3} + a_a}} \quad (3.57)$$

como

$$-a_v + \frac{2}{3} a_s A^{-1/3} + a_a > 0$$

se tiene que para  $a_{\text{curv}} > 0$  ,  $\frac{\bar{Z}}{Z} > 1$

y para  $a_{\text{curv}} < 0$  ,  $\frac{\bar{Z}}{Z} < 1$

Por lo tanto, para  $a_{\text{curv}} > 0$  , se tiene que  $\bar{Z}$  es mayor que  $Z$  y para  $a_{\text{curv}} < 0$  se tiene que  $Z$  es mayor que  $\bar{Z}$  .

De acuerdo con la fig. 3.3, para mejorar la línea de goteo de los neutrones dada por la fórmula de Bethe-Weizsäcker se requiere que sea menor la nueva línea de goteo de los neutrones, lo que corresponde a un valor de  $a_{\text{curv}} < 0$  .

Para obtener una estimación del valor de  $a_{\text{curv}}$  , se despeja  $a_{\text{curv}}$  de la ecuación (3.55) y se substituyen en ella los valores de  $Z$  y  $A$  correspondientes a la línea de goteo de los neutrones dada por la fig. 3.3. Tomando  $v_2$

lores de  $Z$  y  $A$  a lo largo de toda la línea de goteo de los neutrones, por medio de cálculos numéricos se obtuvo un intervalo de valores de  $a_{curv}$  comprendido entre  $-7$  y  $-9$ . La estimación del valor de  $a_{curv}$  que mejora la línea de goteo de los neutrones se da tomando el promedio de los valores extremos del intervalo, y es igual a  $-8$ .

Ahora utilizando (3.54) en  $S_p$ , se tiene que (3.53) nos queda.

$$a_v - \frac{2}{3} a_s A^{-\frac{1}{3}} + \frac{1}{3} a_{curv} A^{-\frac{2}{3}} - a_c \left( 2Z A^{-\frac{1}{3}} - \frac{1}{3} Z^2 A^{-\frac{2}{3}} \right) - a_c (-3 - 4Z^2 A^{-2} + 8Z A^{-1}) = 0 \quad (3.58)$$

y por consiguiente  $Z$  en función de  $A$ , es:

$$Z = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (3.59)$$

con

$$a = \frac{1}{3} a_c A^{-\frac{4}{3}} + 4a_c A^{-2}$$

$$b = -2a_c A^{-\frac{1}{3}} - \frac{2}{3} a_c A^{-\frac{4}{3}} - 8a_c A^{-1} - 8a_c A^{-2}$$

$$c = a_v - \frac{2}{3} a_s A^{-\frac{1}{3}} + 3a_c + \frac{1}{3} a_{curv} A^{-\frac{2}{3}} \quad (3.60)$$

(se toma el signo menos en la raíz, porque como se vió en la sección 3.2, el signo mas nos conduce a una solución no-física).

De nuevo si se toma  $B$  sin el término de curvatura, se tiene que la  $Z$  correspondiente es:

$$Z = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac'}}{2a}$$

con  $a$  y  $b$  igual que en (3.60) y

$$c' = a_v - \frac{2}{3} a_s \bar{A}^{-1/3} + 3a_a \quad (3.60a)$$

Ahora se analizará si la  $Z$  de la línea de goteo de los protones dada por (3.59) es mayor o menor que la  $Z$  que se obtiene sin el término de curvatura. Para ello a la  $Z$  de la ec. (3.59) se distinguirá con una tilde encima de la  $Z$ .

La diferencia  $\bar{Z}$  menos  $Z$  :

$$\bar{Z} - Z = -\frac{1}{2a} \left( \sqrt{b^2 - 4ac} - \sqrt{b^2 - 4ac'} \right) \quad (3.61)$$

Como  $a, b^2, c' > 0$  (de (3.60) y (3.60a)). Para  $c > c'$  se tiene que  $\bar{Z} - Z > 0$ . Para  $c < c'$  se tiene que  $\bar{Z} - Z < 0$ . Por otro lado, si  $c > c'$  se tiene que  $a_{curv} > 0$  y viceversa. Por lo tanto para  $a_{curv} > 0$ , se tiene que  $\bar{Z} > Z$  y para  $a_{curv} < 0$ , se tiene que  $\bar{Z} < Z$ .

Para mejorar la línea de goteo de los protones dada por la fórmula de Bethe-Weiszäcker, se requiere de acuerdo con la fig. 3.3 que sea mayor la nueva línea de goteo de los protones, lo que corresponde a un valor de  $a_{curv} > 0$ .

Para obtener una estimación del valor de  $a_{curv}$ , se despeja  $a_{curv}$  de la ecuación (3.59) y se sustituyen en ella los valores de  $Z$  y  $A$  correspondientes a la línea de goteo de los protones dada por la fig. 3.3. Tomando valores de  $Z$  y  $A$  a lo largo de toda la línea de goteo de los protones, por medio de cálculos numéricos se obtuvo un intervalo de valores de  $a_{curv}$  comprendido entre 50 y 130. La estimación del valor de  $a_{curv}$  que mejora la línea de goteo de los protones se da tomando el promedio de los 2 valores extremos del intervalo, que es igual a 90.

### 3.5 Energía de asimetría de superficie.

Al estimar el déficit a la energía de volumen, debido a la energía de superficie, se consideró que cada nucleón superficial interaccionaba con todos los nucleones sobre estimados que se encontraban en su vecindad. Esto ignora la dependencia de espín de las fuerzas nucleares cuyo resultado es que sólo el sistema neutrón-protón con espines paralelos (deuterón) forma un estado ligado en la naturaleza. Si ahora se supone que esencialmente ocurre lo mismo dentro del núcleo, o sea que un nucleón de un tipo interacciona con una energía de enlace  $U_{a5}$  con otro nucleón de diferente tipo y con una energía de enlace  $U'_{a5}$  con un nucleón del mismo tipo, la derivación de la energía correspondiente al término de superficie se modifica en la forma siguiente.

Para los  $N'$  neutrones de la superficie del núcleo, - la energía total estará dada por:

$$B_{N'} = U_{as} \rho_{ps} N' + U'_{as} \rho_{Ns} N' \quad (3.62)$$

donde  $\rho_{ps}$  es el número de protones en una vecindad de volumen  $v_s = \frac{v}{2}$  alrededor de cada neutrón de la superficie y -  $\rho_{Ns}$  el número de neutrones en la misma vecindad. En términos de las densidades de protones y neutrones en el núcleo, se tiene que:

$$\rho_{ps} = \frac{Z}{V} \left( \frac{1}{2} v \right) \quad \text{y} \quad \rho_{Ns} = \frac{N}{V} \left( \frac{1}{2} v \right)$$

y por consiguiente

$$B_{N'} = \frac{1}{2} U_{as} \left( \frac{v}{V} \right) Z N' + \frac{1}{2} U'_{as} \left( \frac{v}{V} \right) N N' \quad (3.62 a)$$

Se sabe que el número de nucleones en la superficie está dado por  $4A^{2/3}$ , por lo que la fracción del total de los nucleones que están en la superficie será entonces  $\frac{4A^{2/3}}{A}$ . Así, el número de neutrones que está en la superficie es  $\frac{4A^{2/3}}{A} N$ , y se tiene que:

$$B_{N'} = \frac{1}{2} U_{as} \left( \frac{v}{V} \right) \frac{4A^{2/3}}{A} N Z + \frac{1}{2} U'_{as} \left( \frac{v}{V} \right) \left( \frac{4A^{2/3}}{A} \right)^2 N^2$$

..... (3.62 b)

En forma enteramente análoga se obtiene que la energía de superficie debida a los  $Z'$  protones superficiales está dada por

$$B_{Z'} = \frac{1}{2} U_{as} \left( \frac{v}{V} \right) \frac{4A^{2/3}}{A} NZ + \frac{1}{2} U_{as}' \left( \frac{v}{V} \right) \left( \frac{4A^{2/3}}{A} \right) Z^2 \quad (3.62 c)$$

La energía total de enlace será entonces:

$$B_T = B_{N'} + B_{Z'} = U_{as} \left( \frac{v}{V} \right) \left( \frac{4A^{2/3}}{A} \right) NZ + \frac{1}{2} U_{as}' \left( \frac{v}{V} \right) \left( \frac{4A^{2/3}}{A} \right) [N^2 + Z^2] \quad \dots (3.62 d)$$

Si  $r_v$  es el radio de la vecindad  $v$  y  $v = \frac{4}{3}\pi r_o^3 A$  se tiene

$$B_T = U_{as} \left( \frac{r_v}{r_o} \right)^3 \left( \frac{4A^{2/3}}{A^2} \right) NZ + U_{as}' \left( \frac{r_v}{r_o} \right)^3 \left( \frac{4A^{2/3}}{A^2} \right) [N^2 + Z^2] \quad \dots (3.62 e)$$

Puesto que  $N^2 + Z^2 = A^2 - 2NZ$ , (3.62 e) se convierte

en

$$B_T = U_{as} \left( \frac{r_v}{r_o} \right)^3 \left( \frac{4A^{2/3}}{A^2} \right) NZ + U_{as}' \left( \frac{r_v}{r_o} \right)^3 \left( \frac{4A^{2/3}}{A^2} \right) [A^2 - 2NZ]$$

o bien

$$B_T = (U_{as} - 2U_{as}') \left( \frac{r_v}{r_o} \right)^3 \left( \frac{4A^{2/3}}{A^2} \right) NZ + 4U_{as}' \left( \frac{r_v}{r_o} \right)^3 A^{2/3} \quad (3.62 f)$$

Usando la identidad

$$NZ = \frac{1}{4} [A^2 - (N-Z)^2]$$

tenemos finalmente

$$B_T = (U_{as} - 2U'_{as}) \left( \frac{r_v}{r_0} \right)^3 \left( A^{2/3} - \frac{[N-Z]^2}{A^2} A^{2/3} \right) + 4U'_{as} \left( \frac{r_v}{r_0} \right)^3 A^{2/3}$$

... (3.62 g)

que se puede escribir en la forma siguiente

$$B_T = (U_{as} + 2U'_{as}) \left( \frac{r_v}{r_0} \right)^3 A^{2/3} - (U_{as} - 2U'_{as}) \left( \frac{r_v}{r_0} \right)^3 \frac{[N-Z]^2}{A^2} A^{2/3}$$

En esta forma se ha obtenido además de la energía de superficie (proporcional a  $A^{2/3}$ ) un nuevo término el cual depende de la diferencia entre el número de protones y de neutrones, y que recibe el nombre de energía de asimetría de superficie. El análisis de este término se verá en la sección siguiente.

Una estimación de  $U_{as}$  y  $U'_{as}$ , se puede obtener identificando  $(U_{as} + 2U'_{as}) \left( \frac{r_v}{r_0} \right)^3$  con  $a_5$  y  $(U_{as} - 2U'_{as}) \left( \frac{r_v}{r_0} \right)^3$



con  $a_{as}$  (el coeficiente del término de asimetría de su -  
 perficie). Si se toma  $r_0 = 2.0f$ , el alcance de las fuer-  
 zas nucleares,  $r_0 = 1.2f$ ,  $a_s = 18.6 \text{ Mev}$  y como  $a_{as}$  el  
 valor fenomenológico dado por P. Möller de  $48.6 \text{ Mev}$ , se tiene  
 que  $U_{as} = 7.26 \text{ Mev}$  y  $U'_{as} = -1.62 \text{ Mev}$ . Los valores ante -  
 riores de  $U_{as}$  y  $U'_{as}$  son menores que los que se obtuvie-  
 ron en el término de asimetría de volumen debido a que los-  
 nucleones en la superficie se encuentran menos ligados que-  
 aquellos que están en el interior del volumen (ver capítu-  
 lo II, sección 2). En lo que respecta al signo menos este-  
 resulta de las consideraciones hechas en el capítulo II, -  
 sección 4.

Es de notarse que el procedimiento con el que se obtu-  
 vieron el término de asimetría y el término de asimetría de  
 superficie, nos permite obtener para el término de curvatu-  
 ra un término de asimetría de curvatura, y así sucesivamen-  
 te. A continuación veremos las modificaciones sobre las -  
 distintas predicciones de la fórmula de Bethe-Weisszäcker al  
 cambiar el signo del término de asimetría de superficie.

### 3.6 Consecuencias del término de asimetría de superficie sobre- las distintas predicciones de la fórmula de Bethe-Weisszä - cker.

a).- La línea de estabilidad. Tenemos que la masa con  
 el término de asimetría de superficie es:

$$\begin{aligned}
 M &= Z M_H + (A-Z) m_n - a_v A + a_s A^{2/3} + a_c \frac{Z^2}{A^{1/3}} \\
 &\quad + a_a \frac{(A-2Z)^2}{A} + a_{as} \frac{(A-2Z)^2}{A^2} A^{2/3} \\
 &= \alpha(A) + \beta(A) Z + \gamma(A) Z^2 \quad (3.63)
 \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
 \alpha(A) &= (m_n - a_v + (a_s + a_{as}) A^{-1/3} + a_c A^{-1}) A \\
 \beta(A) &= -4a_a - \frac{4a_{as} A^{2/3}}{A} - (m_n - M_H) \\
 \gamma(A) &= \left( \frac{4a_a}{A} + \frac{4a_{as} A^{2/3}}{A^2} + \frac{a_c}{A^{1/3}} \right) \quad (3.64)
 \end{aligned}$$

entonces para encontrar la línea de estabilidad en un diagrama de  $Z$  vs  $A$ , de la ecuación:

$$\left. \frac{\partial M}{\partial Z} \right|_{A=\text{cte.}} = 0 \quad (3.65)$$

se despeja  $Z$ , en función de  $A$ .

Entonces usando (3.63) en (3.65) tenemos

$$\beta(A) + 2 \gamma(A) Z = 0$$

y despejando  $Z$  y sustituyendo los valores dados por (3.64), se tiene que  $Z$  se puede expresar así:

$$Z = \frac{A}{2} \left[ \frac{4 \left( a_a + \frac{a_{as}}{A^{1/3}} \right) + m_n - M_H}{4 \left( a_a + \frac{a_{as}}{A^{1/3}} \right) + a_c A^{2/3}} \right] \quad (3.66)$$

Ahora se analizará si la  $Z$  de la línea de estabilidad dada por (3.66) es mayor o menor que la  $Z$  que se obtiene sin el término de asimetría de superficie (2.35a) del 2o. capítulo).

Para ello a la  $Z$  de la ecuación (3.66) se distinguirá con una tilde encima de la letra  $Z$ .

La razón  $\frac{\tilde{Z}}{Z}$  es:

$$\frac{\tilde{Z}}{Z} = \frac{\frac{A}{2} \left[ \frac{4 \left( a_a + \frac{a_{as}}{A^{1/3}} \right) + m_n - M_H}{4 \left( a_a + \frac{a_{as}}{A^{1/3}} \right) + a_c A^{2/3}} \right]}{\frac{A}{2} \left[ \frac{4 a_a + m_n - M_H}{4 a_a + a_c A^{2/3}} \right]} \quad (3.67)$$

esta ecuación por una serie de pasos algebraicos se puede -  
convertir en lo siguiente:

$$\frac{\bar{Z}}{Z} = \left( 1 + \frac{4 a_{05} / A^{1/3}}{4 a_a + m_n - M_H} \right) \left( 1 + \frac{4 a_{05} / A^{1/3}}{(4 a_a + a_c A^{2/3})} \right)^{-1}$$

Como

$$4 a_a + m_n - M_H > 0$$

y

$$4 a_a + a_c A^{2/3} > 0$$

se tiene que  $\bar{Z}/Z > 1$  sólo si  $a_{05} > 0$  y  $\bar{Z}/Z < 1$  si  $a_{05} < 0$ .

Por lo tanto, tenemos que si  $a_{05} > 0$  el término de asimetría de superficie nos modifica la línea de estabilidad, de tal modo que la nueva línea de estabilidad tiene  $\bar{Z} > Z$  y si  $a_{05} < 0$ , se obtiene que la desigualdad será  $\bar{Z} < Z$ .

De la fig. 2.3, se ve que para mejorar la línea de estabilidad dada por la fórmula de Bethe-Weizsäcker, se requiere que sea menor la  $Z$  de la nueva línea de estabilidad, lo que corresponde a un valor de  $a_{05} < 0$ .

Para obtener una estimación del valor de  $a_{05}$ , se despeja  $a_{05}$  de la ecuación (3.66) y se sustituyen en ellos los valores de  $Z$  y  $A$  correspondientes a la línea de estabilidad fenomenológica. Tomando valores de  $Z$  y  $A$

a lo largo de toda la línea de estabilidad, por medio de --  
 cálculos numéricos se obtuvo un intervalo de valores de --  
 $Q_{as}$  comprendido entre  $-10$  y  $-40$  Mev. La estimación--  
 del valor de  $Q_{as}$  que mejora la línea de estabilidad se da  
 tomando el promedio de los valores extremos del intervalo --  
 y es igual a  $-25$  Mev.

b).- Radio de curvatura. Para el análisis del radio -  
 de curvatura en  $Z_0$ , se tiene:

$$R = \frac{\left[ 1 + \left( \frac{\partial M}{\partial Z} \right) \Big|_{A=cte} \right]^2}{\frac{\partial^2 M}{\partial Z^2}}^{3/2}$$

Como se vió que la  $M$  se puede expresar así: --

$M = \alpha(A)A + \beta(A)Z + \gamma(A)Z^2$  (con  $\alpha(A)$ ,  $\beta(A)$  y  $\gamma(A)$   
 dados por (3.64)) se tiene que:

$$\frac{\partial M}{\partial Z} \Big|_{A=cte} = 2\gamma(A)Z + \beta(A)$$

$$\frac{\partial^2 M}{\partial Z^2} \Big|_{A=cte} = 2\gamma(A)$$

Para  $Z = Z_0 = -\frac{\beta}{2\gamma(A)}$ , además  $\frac{\partial M}{\partial Z} \Big|_{Z=Z_0} = 0$  así que:

$$R = \frac{1}{2\gamma(A)}$$

Sustituyendo  $\gamma(A)$  en  $R$ , se puede ver que:

$$R = \frac{A}{8(a_a + a_{as} A^{-1/3}) \left( 1 + \frac{A^{2/3}}{4 \frac{(a_a + a_{as} A^{-1/3})}{a_c}} \right)} \quad (3.68)$$

A continuación se verá si el radio de curvatura  $R$  - dado por la ecuación (3.68) es mayor o menor que el radio de curvatura que se obtiene sin el término de asimetría de superficie dado por (3.4). Para ello a la  $R$  de la ecuación (3.68) se distinguirá con una tilde sobre  $R$ .

Entonces  $\frac{R}{\bar{R}}$  es

$$\frac{R}{\bar{R}} = \frac{\frac{A}{8a_a \left( 1 + \frac{A^{2/3}}{4 a_a/a_c} \right)}}{\frac{A}{8(a_a + a_{as} A^{-1/3}) \left( 1 + \frac{A^{2/3}}{4(a_a + a_{as} A^{-1/3})/a_c} \right)}}$$

la cual haciendo unos pasos algebraicos se puede expresar - así:

$$\frac{R}{\bar{R}} = 1 + \frac{8a_{as} A^{-1/3}}{8a_a + 2a_c A^{2/3}}$$

Como  $8a_a + 2a_c A^{2/3} > 0$ , tenemos que para  $a_{as} > 0$  que  $R/\bar{R} > 1$  y para  $a_{as} < 0$  que  $R/\bar{R} < 1$ .

O sea, si el coeficiente del término de asimetría de superficie es positivo, el radio de curvatura dado por la fórmula de Bethe-Weiszäcker es mayor que el nuevo radio de curvatura y si el coeficiente del término de asimetría de superficie es negativo, el radio de curvatura dado por la fórmula de Bethe-Weiszäcker es menor que el nuevo radio de curvatura.

La discusión correspondiente a ver si es mejor o peor lo obtenido, no se realizará debido a que no existe una referencia adecuada para compararse.

A continuación se verán las líneas de goteo. Estas se obtendrán en el plano  $Z_{vs} A$  debido a que el análisis que se hará, será más fácil en ese plano. También por conveniencia separaremos el análisis de las líneas de goteo.

c).- La línea de goteo de los neutrones. En un diagrama de  $Z_{vs} A$  la línea de goteo de los neutrones se ob-

tiene de la ecuación:

$$S_n = \frac{\partial B}{\partial A} \Big|_{Z = \text{cte}} = 0$$

despejando  $Z$  en función de  $N$ .

Si  $B$  con el término de asimetría de superficie está dada por:

$$B = a_v A - a_s A^{2/3} - a_c \frac{Z^2}{A^{1/3}} - a_a \frac{(A - 2Z)^2}{A^2} A - a_{as} \frac{(A - 2Z)^2}{A^2} A^{2/3}$$

tenemos que

$$S_n = a_v - \frac{2}{3} a_s A^{-1/3} + \frac{1}{3} a_c Z^2 A^{-4/3} - a_a \left[ 1 - \frac{4Z^2}{A^2} \right]$$

$$- \left[ a_{as} A^{-7/3} \left[ 2(A - 2Z)A^{-1} - \frac{4}{3} (A - 2Z)^2 \right] \right] = 0$$

y por consiguiente

$$Z = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$



con

$$a = \frac{1}{3} a_c A^{-\frac{1}{3}} + 4 a_u A^{-2} + \frac{16}{3} a_{as} A^{-\frac{7}{3}}$$

$$b = -\frac{4}{3} a_{as} A^{-\frac{1}{3}}$$

$$c = a_v - \frac{2}{3} a_s A^{-\frac{1}{3}} - a_a - \frac{2}{3} a_{as} A^{-\frac{1}{3}}$$

(se toma sólo el signo más de la raíz, porque  $Z$  no puede ser negativa).

Para la ecuación (3.27), tenemos que  $Z$  en función de  $A$  es:

$$Z = \sqrt{\frac{c'}{a'}} \quad (3.70)$$

con

$$c' = -a_v + \frac{2}{3} a_s A^{-\frac{1}{3}} + a_a$$

$$a' = \frac{1}{3} a_c A^{-\frac{1}{3}} + \frac{4}{A^2} a_u$$

(se toma sólo el signo más de la raíz, porque  $Z$  no puede ser negativa).

Ahora se verá si la  $Z$  de la línea de goteo de los neutrones dada por (3.64) es mayor o menor que la  $Z$  que se obtiene sin el término de asimetría de superficie (3.70). Para ello a la  $Z$  de la ecuación (3.64) se distinguirá con una tilde sobre  $Z$ .

La diferencia de  $\bar{Z} - Z$  es:

$$\Delta Z = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} - \sqrt{\frac{c'}{a'}} \quad (3.71)$$

Para obtener el signo de  $\Delta Z$ , necesitamos comparar  $-\frac{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$  con  $\sqrt{\frac{c'}{a'}}$ , como el estudio analítico de la relación de estos términos resultó demasiado complicado se optó por obtener el valor de  $\Delta Z$  por medios numéricos.

Para ello se utilizó la calculadora portátil Texas Instrument TI-59 Programable.

Los valores obtenidos (usando para el cálculo los valores fenomenológicos de los coeficientes de la fórmula de B.W. obtenidos por De Shalit y Feschbach) se pueden ver gráficamente, en la fig. 3.4, de la cual se ve que para valores de  $a_{0s}$  comprendidos entre 20 y 110, se tiene

$$\Delta Z > 0 \quad \text{para cualquier valor de } A \quad \text{y por tanto} \\ \bar{Z} > Z .$$

También de la misma figura, se ve que para valores de  $a_{0s}$  comprendidos entre -10 y -100, se tiene  $\Delta Z < 0$  y por tanto  $\bar{Z} < Z$ .

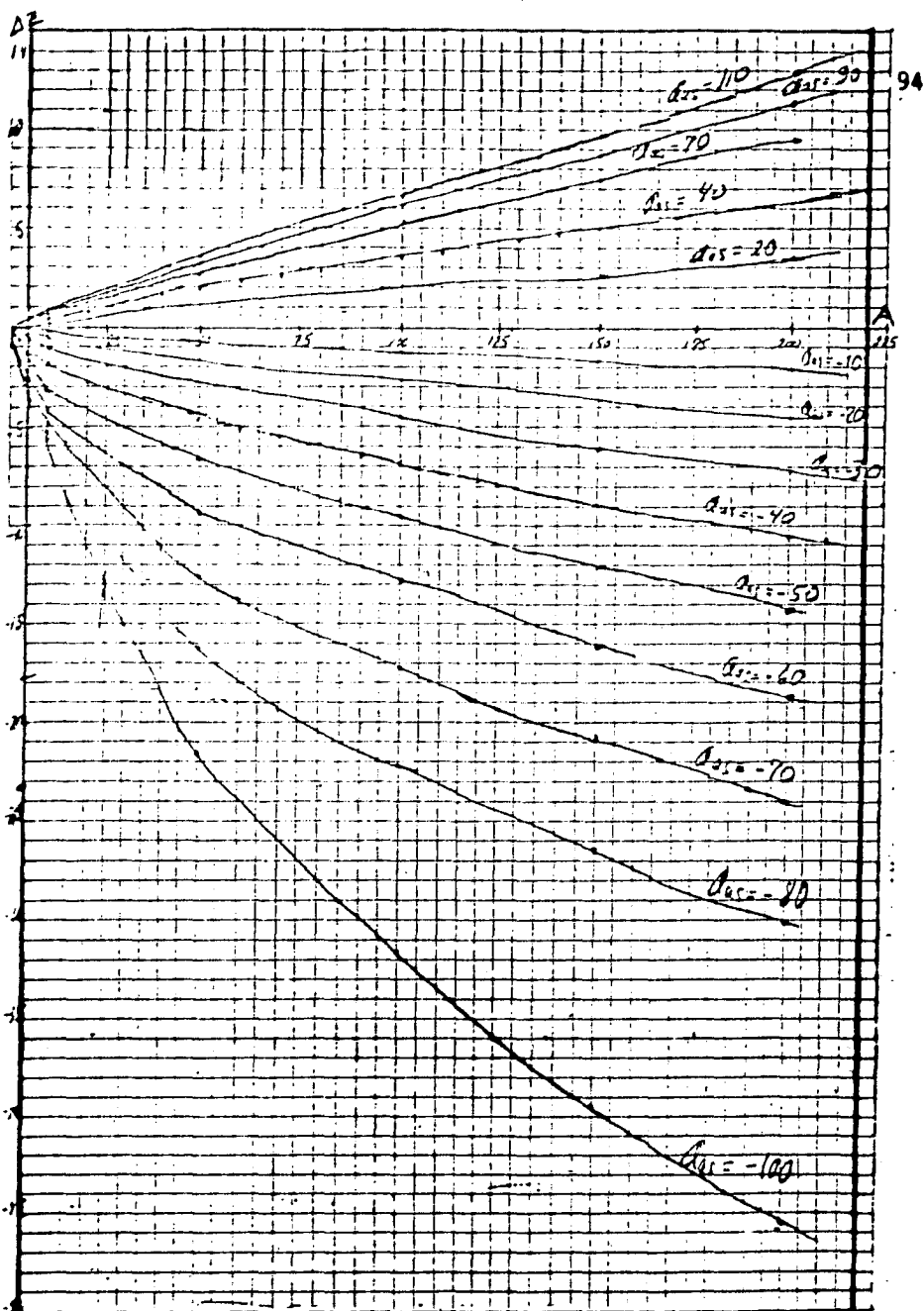


Fig. 3.4.-Gráfica donde se muestran los  $\Delta Z$  de las líneas - de goteo de los neutrones, que se obtienen para diferentes valores de  $\alpha_{as}$ .

Por otro lado, de la fig. 3.3, se ve que para mejorar la línea de goteo de los neutrones dada por la fórmula de B.W., se requiere que sea menor la nueva línea de goteo de los neutrones, lo que corresponde a un valor de  $Q_{05} < 0$ .

Una estimación del valor de  $Q_{05}$  que mejora la línea de goteo de los neutrones, se puede obtener de la fórmula (3.69), dando valores a  $Z$  y  $A$  correspondientes a la línea de goteo de los neutrones dada en la fig. 3.3. Tomando los valores en la forma citada anteriormente, por medio de cálculos numéricos se obtuvo un intervalo de valores de  $Q_{05}$  comprendido entre  $-20$  y  $-40$ . La estimación del valor  $Q_{05}$  que mejora la línea de goteo de los neutrones se da tomando el promedio de los valores extremos del intervalo y corresponde a un valor igual a  $-30$ .

d).- La línea de goteo de los protones. En un diagrama de  $Z$  vs  $A$  la línea de goteo de los protones se obtiene de la ecuación:

$$S_p = \frac{\partial B}{\partial A} \Big|_{N=\text{cte}} = 0$$

despejando  $Z$  en función de  $A$ .

Si tomamos la  $B$  con el término de asimetría de superficie, y procedemos a efectuar la operación citada anteriormente, se tiene que  $Z$  en función de  $A$  queda:

$$Z = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (3.72)$$

con

$$a = \frac{1}{3} a_c \bar{A}^{-4/3} + 4a_a \bar{A}^{-2} - \frac{16}{3} a_{as} \bar{A}^{-7/3}$$

$$b = -2a_c \bar{A}^{-1/3} - \frac{2}{3} a_c \bar{A}^{-4/3} - 8a_a \bar{A}^{-1} - 8a_a \bar{A}^{-2} + \frac{28}{3} a_{as} \bar{A}^{-4/3}$$

$$c = a_v - \frac{2}{3} a_s \bar{A}^{-1/3} + 3a_a - \frac{10}{3} a_{as} \bar{A}^{-1/3}$$

(se toma sólo el signo menos de la raíz, porque el signo más conduce a  $Z > A$  ).

Si tomamos  $B$  sin el término de asimetría de superficie ( $B_{BW}$ ), tenemos que la línea de goteo de los protones será

$$Z = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (3.73)$$

con

$$a = \frac{1}{3} a_c A^{-\frac{1}{3}} + 4a_a A^{-2}$$

$$b = -2a_c A^{-\frac{1}{3}} - \frac{2}{3} a_c A^{-\frac{1}{3}} - 8a_a A^{-1} - 8a_a A^{-2}$$

$$c = a_v - \frac{2}{3} a_s A^{-\frac{1}{3}} + 3a_a$$

(se toma sólo el signo menos de la raíz, porque el signo más conduce a  $Z > A$  ).

A continuación veremos si la  $Z$  de la línea de goteo de los protones dada por (3.72), es mayor o menor que la  $Z$  que se obtiene sin el término de asimetría de superficie (3.73). Para ello a la  $Z$  de la ecuación (3.72) se distinguirá con una tilde sobre  $Z$ .

La diferencia de  $\bar{Z} - Z$  es:

$$\Delta Z = \frac{-b' - \sqrt{(b')^2 - 4a'c'}}{2a'} - \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

como el estudio analítico de la relación entre los términos  $\frac{-b' - \sqrt{(b')^2 - 4a'c'}}{2a'}$  y  $\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ , resultó demasiado complicado, se optó por obtener el valor de  $\Delta Z$  por medios numéricos.

Usando otra vez la calculadora Texas Instrument fl 59 - Programmable, y los mismos valores para los coeficientes -

que en el caso anterior, los valores obtenidos de  $\Delta Z$  se tienen gráficamente en la fig. 3.5. En esta se ve que para valores de  $a_{45}$  comprendidos entre  $-60$  y  $-10$  se tiene:

$$\begin{array}{l} \Delta Z < 0 \quad \text{para} \quad 20 < A < 60 \\ \text{y} \quad \Delta Z > 0 \quad \text{para} \quad A > 70 \end{array}$$

Por lo tanto:

$$\begin{array}{l} \bar{Z} < Z \quad \text{para} \quad 20 < A < 60 \\ \text{y} \quad \bar{Z} > Z \quad \text{para} \quad A > 70 \end{array}$$

De la misma gráfica se ve también que si  $a_{45}$  está comprendido entre  $10$  y  $60$ , se tiene:

$$\begin{array}{l} \Delta Z > 0 \quad \text{para} \quad 20 < A < 60 \\ \text{y} \quad \Delta Z < 0 \quad \text{para} \quad A > 70 \end{array}$$

O sea

$$\begin{array}{l} \bar{Z} > Z \quad \text{para} \quad 20 < A < 60 \\ \text{y} \quad \bar{Z} < Z \quad \text{para} \quad A > 70 \end{array}$$

Por otro lado, de la fig. 3.3, se ve que para mejorar la línea de goteo de los protones dada por la fórmula de B.W., se requiere que sea mayor la nueva línea de goteo de los protones, lo que corresponde a un valor de  $a_{45} > 0$  para valores de  $A < 60$  y un valor de  $a_{45} < 0$  para valores de  $A > 70$ . Dado que el modelo de la gota delíquida no es válido para valores pequeños de  $A$ , se estimará solo el valor de  $a_{45}$  para  $A > 70$ .

La estimación del valor de  $a_{45}$  que mejora la línea de goteo de los protones se obtiene de la fórmula (3.72), dando valores a  $Z$  y  $A$  correspondientes a la línea de go-

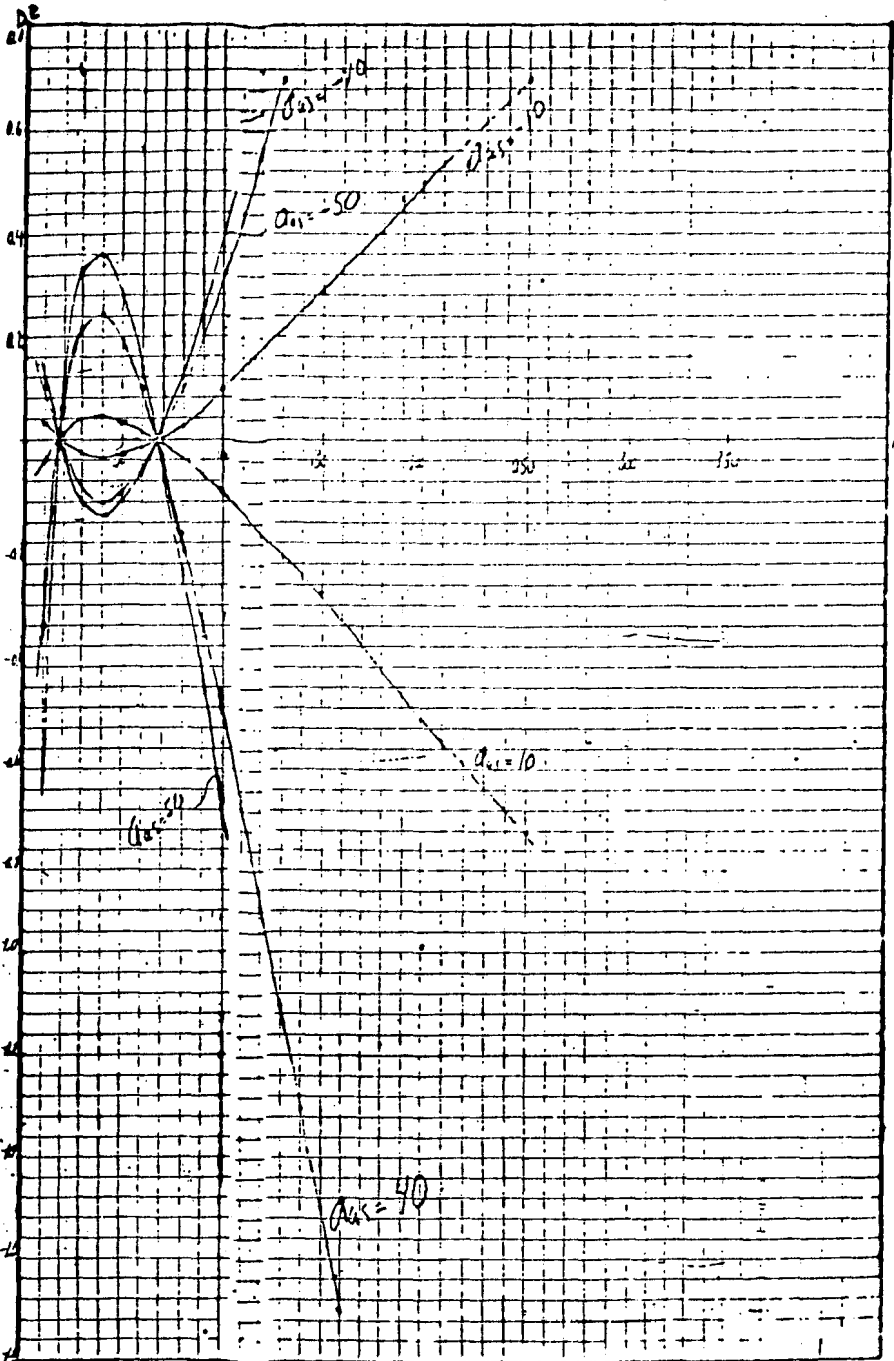


Fig. 3.5.-Gráfica donde se muestran los  $\Delta Z$  de las líneas de goteo de los protones, que se obtienen para diferentes valores de  $a_{a_5}$ .



teo de los protones dada en la fig. 3.3. Tomando los valores en la forma citada anteriormente, por medio de cálculos numéricos se obtuvo un intervalo de valores de  $a_{05}$  comprendido entre  $-10$  y  $-90$ . La estimación del valor de  $a_{05}$  que mejora la línea de goteo de los protones se da - tomando el promedio de los valores extremos del intervalo - y corresponde a un valor igual  $-50$ .

### 3.7 Resumen

Las modificaciones que sufrieron las fórmulas de la línea de estabilidad, el radio de curvatura y las líneas de goteo, debido a la introducción de nuevos términos en la fórmula de Bethe-Weiszäcker, están sintetizadas en el cuadro sinóptico # 1.

La relación de inequidad, que guardan las distintas fórmulas obtenidas y las fórmulas respectivas sin modificaciones se da en el cuadro sinóptico # 2.

Las estimaciones de los valores de los coeficientes de los términos de curvatura y asimetría de superficie, que mejoran las predicciones de la fórmula de B.W., están dadas en el cuadro sinóptico # 3. En el cuadro, no se incluye el coeficiente del término de torsión, porque no influye en las predicciones de la fórmula de B.W., ni la predicción correspondiente al radio de curvatura, debido a que no existe actualmente una referencia adecuada para comparar los resul

	Línea de estabilidad (Z <sub>0</sub> )	Línea de gotas de - los neutrones (S <sub>n</sub> )	Línea de gotas de - los protones (S <sub>p</sub> )	Radio de curvatura (R)
<b>Bethe-Weissäcker</b> $M(A, Z) = M_H Z + N m_n$ $- a_v A + a_s A^{2/3} + a_c \frac{Z^2}{A^{1/3}}$ $+ a_0 \frac{(A-Z)^2}{A}$	$Z_0 = \frac{A}{2} \left[ \frac{4a_0 + (m_n - M_H)}{4a_0 + a_c A^{2/3}} \right]$	$Z = \sqrt{\frac{-a_v + \frac{2}{3} a_s A^{-1/3} + a_u}{\frac{1}{3} a_c A^{-2/3} + \frac{4}{A^2} a_u}}$	$Z = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ con $a = \frac{1}{3} a_c A^{-2/3} + 4a_u A^{-2}$ $b = -2a_c A^{-1/3} - \frac{2}{3} a_s A^{-4/3} - 8a_0 A^{-1} - 8a_1 A^{-2}$ $c = a_v - \frac{1}{3} a_s A^{-1/3} + 3a_u$	$R = \frac{A}{8a_0 \left( 1 + \frac{A^{2/3}}{4a_0/a_c} \right)}$
<b>Torsión</b> $a_t A^0$				
<b>Curvatura</b> $a_{curv} A^{1/3}$		$Z = \sqrt{\frac{-a_v + \frac{2}{3} a_s A^{-1/3} + a_u + \frac{1}{3} a_{curv} A^{-2/3}}{\frac{1}{3} a_c A^{-2/3} + \frac{4}{A^2} a_u}}$	$Z = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ con $a = \frac{1}{3} a_c A^{-2/3} + 4a_u A^{-2}$ $b = -2a_c A^{-1/3} - \frac{2}{3} a_s A^{-4/3} - 8a_0 A^{-1} - 8a_1 A^{-2}$ $c = a_v - \frac{2}{3} a_s A^{-1/3} + 3a_u + \frac{1}{3} a_{curv} A^{-2/3}$	
<b>Asimetría de superf. cie.</b> $a_s \frac{(A-Z)^2}{A^2} A^{1/3}$	$Z_0 = \frac{A}{2} \left[ \frac{4(a_0 + \frac{a_{os}}{A^{1/3}}) + m_n - M_H}{4(a_0 + \frac{a_{os}}{A^{1/3}}) + a_c A^{2/3}} \right]$	$Z = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ con $a = \frac{1}{3} a_c A^{-2/3} + 4a_u A^{-2} + \frac{16}{3} a_{os} A^{-5/3}$ $b = -\frac{4}{3} a_s A^{-4/3}$ $c = a_v - \frac{2}{3} a_s A^{-1/3} - a_u - \frac{2}{3} a_{os} A^{-1/3}$	$Z = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ con $a = \frac{1}{3} a_c A^{-2/3} + 4a_u A^{-2} - \frac{16}{3} a_{os} A^{-5/3}$ $b = -2a_c A^{-1/3} - \frac{2}{3} a_s A^{-4/3} - 8a_0 A^{-1} - 8a_1 A^{-2} + \frac{28}{3} a_{os} A^{-1/3}$ $c = a_v - \frac{2}{3} a_s A^{-1/3} + 3a_u - \frac{16}{3} a_{os} A^{-1/3}$	$R = \frac{A}{8(a_0 + a_{os} A^{1/3})} \left[ 1 + \frac{A^{2/3}}{4(a_0 + a_{os} A^{1/3})} \right]$

Cuadro Sinóptico # 1.- Fórmulas modificadas de la línea de estabilidad, radio de curvatura y de las líneas de gotas, por para cada uno de los nuevos términos introducidos a la fórmula de Bethe-Weissäcker. 101

	Línea de estabilidad ( $Z_0$ )	Radio de curvatura ( $R$ )	Línea de goteo de los neutrones ( $S_n$ )	Línea de goteo de los protones ( $S_p$ )
Coeficiente de torsión $a_t > 0$ $a_t < 0$	$Z_{BW} = Z_t$	$R_{BW} = R_t$	$S_{n_{BW}} = S_{n_t}$	$S_{p_{BW}} = S_{p_t}$
Coeficiente de curvatura. $a_{curv} > 0$ $a_{curv} < 0$	$Z_{BW} = Z_{curv}$	$R_{BW} = R_{curv}$	$\bar{Z}_{curv} > Z_{BW}$ $\bar{Z}_{curv} < Z_{BW}$	$\bar{Z}_{curv} > Z_{BW}$ $\bar{Z}_{curv} < Z_{BW}$
Coeficiente de asimetría de superficie. $a_{as} > 0$ $a_{as} < 0$	$\bar{Z}_0 > Z_0$ $\bar{Z}_0 < Z_0$	$R_{B,W} > R_{as}$ $R_{as} > R_{B,W}$	$\bar{Z} > Z$ $\bar{Z} < Z$	$\bar{Z} > Z$ para $20 < A < 60$ $\bar{Z} < Z$ para $A > 70$ $\bar{Z} < Z$ para $20 < A < 60$ $\bar{Z} > Z$ para $A > 70$

Cuadro Sinóptico # 2.- Relaciones de inequidad que guardan las fórmulas modificadas por los nuevos términos, con las fórmulas obtenidas de los términos dados por Bethe-Weissäcker, cuando varían los signos de los nuevos términos.

Predicción de la fórmula de Bethe-Weissäcker.	Condición que se requiere para mejorar la predicción.	Valor estimado de $a_{curv}$ que mejora la predicción.	Valor estimado de $a_{as}$ que mejora la predicción.
Línea de estabilidad.	$Z_{nueva} < Z_{B.W.}$	X	$a_{as} = -2.5$
Línea de goteo de los neutrones.	$Z_{nueva} < Z_{B.W.}$	$a_{curv} = -8$	$a_{as} = -30$
Línea de goteo de los protones.	$Z_{nueva} > Z_{B.W.}$	$a_{curv} = 90$	$a_{as} = -50$ para $A > 70$

Cuadro Sinóptico # 3.- Estimaciones de los valores de los coeficientes de los términos de curvatura y asimetría de superficie que mejoran las predicciones de la fórmula de Bethe-Weissäcker.

tados obtenidos.

Las estimaciones de las diferentes energías de enlace por partícula obtenidas en la tesis, se dan en la Tabla 3.1.

TABLA 3.1.

Tabla que muestra las estimaciones de las diferentes energías de enlace por partícula obtenida en la tesis.

$$U_V = 3.39 \text{ Mev}$$

energía de enlace entre nucleones indistintos - (sin considerar la dependencia de espín, ni la carga de los mismos) en el interior del volumen nuclear.

$$U = 9.46 \text{ Mev}$$

energía de enlace entre nucleones de diferente tipo (neutrón-protón) - en el interior del volumen nuclear.

$$U_{as} = 7.26 \text{ Mev}$$

energía de enlace entre nucleones de diferente tipo (neutrón-protón) - en la superficie nuclear.

$$U'_S = 2.0 \text{ Mev}$$

energía de enlace entre nucleones indistintos - (sin considerar la dependencia de espín, ni la carga de los mismos) en la superficie nuclear.

$$U'^1 = -2.68 \text{ Mev}$$

energía de enlace entre nucleones del mismo tipo (neutrón-neutrón ó protón-protón) en el interior del volumen nuclear.

$$U'_{as} = -1.62 \text{ Mev}$$

energía de enlace entre nucleones del mismo tipo (neutrón-neutrón ó protón-protón) en la superficie nuclear.

## REFERENCIAS

- 1.- L.R.B.Elton, Ph.D., Introducción a la teoría nuclear. - Edic. Rial P, S.A., Madrid, pág.135(1964).
- 2.- L.R.B.Elton, Ph.D., Introducción a la teoría nuclear. - Edic. Rial P, S.A., Madrid, pág.135(1964).
- 3.- B.M.Yaborski y A.A.Detlaf, Manual de Física. Ed. Mir, Moscú pág.825(1972).
- 4.- Viliam F.Hornyak, Nuclear Structure. Academic Press, New York, San Francisco y London, pág.200(1975).
- 5.- Aage Bohr y Ben R.Motelson, Nuclear Structure, Vol. I, - W.A.Benjamin Inc., pág.169(1969).
- 6.- M.Beiner and R.J.Lombard, Atomic Data and Nuclear Data Tables. 17, pág.242(1976).
- 7.- P.Möller and J.R.Nix, Atomic Data and Nuclear Data Tables. 26, pág.168(1981).

## RESUMEN GENERAL Y CONCLUSIONES

La obtención sistemática, en base a un modelo bien -- definido, de los términos que constituyen la fórmula de masas semiempírica de Bethe-Weiszäcker, llevó en forma natural a la predicción de términos adicionales. Agregando a la fórmula de Bethe-Weiszäcker algunos de los términos que constituyen la extensión de ésta fórmula, se estudiaron - las modificaciones que sufren las predicciones de la fórmu la de Bethe-Weiszäcker. Además se obtuvieron las estina - ciones de los coeficientes de los términos que favorecen a las predicciones de la misma, las cuales se sintetizaron - en el capítulo III, sección 7.

Los resultados obtenidos muestran que la introducción de un término de asimetría de superficie a la fórmula de - masas dada por Bethe-Weiszäcker con un valor del coeficien te igual  $\approx 40 \text{ Mev}$ , mejora notablemente las predicciones - de la fórmula de Bethe-Weiszäcker. En lo que respecta al término de curvatura y torsión su introducción no favorece a las predicciones dadas por la fórmula de Bethe-Weiszä - cker, debido a que el signo del coeficiente no es consis-- tente para cada predicción de la fórmula de Bethe-Weiszä-- cker.



Por otro lado, una comparación seria con cualquier dato experimental requiere que en el modelo se considere efectos de deformación y efectos de capas, los cuales en esta tesis no fueron tratados por ser muy complicados.

Además, se aclara que los coeficientes utilizados en esta tesis (de 1974) para una fórmula de masas semiempírica - basada en el modelo de la gota de líquido esencialmente no han variado durante los últimos diez años, siendo los más recientes en la literatura los de P. Möller and J.R. Nix - (Atomic Masses from Macroscopic-Microscopic New Model, Atomic Data and Nuclear Data Tables 26, pág. 168 (1981)), que son:

$$a_v = 15.99 \text{ Mev}$$

$$a_s = 21.13 \text{ Mev}$$

$$a_c = 0.74 \text{ Mev}$$

$$a_a = 30.82 \text{ Mev}$$

los cuales si se hubieran usado en esta tesis, no habrían proporcionado esencialmente nada nuevo.

Por último, también se hace notar que hasta hoy no se tienen datos experimentales sobre inestabilidad neutrónica y protónica de núcleos lejos de la línea de estabilidad en la región media y alta de la tabla periódica y se está tratando de tener resultados en la región baja de la misma, donde es más cuestionable el modelo de la gota de líquido. Así, hasta hoy no se pueden comparar las líneas de goteo obtenidas en esta tesis con líneas de goteo experimental.

## Apéndice 1

En el siguiente apéndice se calcula el término de asimetría dentro de la estructura del modelo de gas de Fermi.

Como se vio, el término de asimetría mide el incremento de la masa  $M$  que ocurre cuando el número de neutrones ya no es igual al número de protones. Así, consideraremos la energía requerida para tomar protones desde los más altos niveles de protones llenos y transformarlos en neutrones de los más bajos niveles de neutrones sin llenar. Consideremos un núcleo con  $A$  nucleones, los cuales la mitad son neutrones y la mitad protones. Representando por  $\lambda$  la fracción de los protones cambiados en neutrones, así que después del cambio se tenga:

$$Z' = \frac{A}{2} (1 - \lambda) \quad N' = \frac{A}{2} (1 + \lambda)$$

$$\therefore \Delta N = - \Delta Z = \frac{\lambda A}{2}$$

La energía consumida en este cambio es:

$$\Delta E = 2 \int_{A/4}^{A/4(1+\lambda)} \epsilon \, dn - 2 \int_{A/4(1-\lambda)}^{A/4} \epsilon \, dn$$

donde el 2 se debe al espín de los nucleones y  $\epsilon(n)$  es la energía del nivel  $n$ .

Si se introduce

$$F(n) = \int_0^n \epsilon \, dn$$

se tiene

$$\begin{aligned} \Delta E &= 2 \left\{ F\left[\frac{A}{4}(1+\lambda)\right] - 2F\left(\frac{A}{4}\right) + F\left[\frac{A}{4}(1-\lambda)\right] \right\} \\ &= 2 \left(\frac{A\lambda}{4}\right)^2 \left(\frac{d^2 F}{dn^2}\right)_{n=A/4} \\ &= \frac{1}{8} (A\lambda)^2 \left(\frac{d\epsilon}{dn}\right)_{n=A/4} \end{aligned}$$

Pero acorde con el modelo del gas de Fermi, la energía está cuantizada y está dada por:

$$\epsilon = \epsilon_0 n^{2/3}$$

donde  $\epsilon_0$  es una constante. Cuando  $n = A/4$ ,  $\epsilon$  es igual a la energía de Fermi  $\epsilon_F$ .

De aquí que:

$$\frac{1}{\epsilon} \frac{d\epsilon}{dn} = \frac{2}{3n}$$

así que:

$$\left( \frac{d\epsilon}{dn} \right)_{n=A/4} = 8 \frac{\epsilon_F}{3A}$$

Como

$$(A\lambda)^2 = (N' - Z')^2$$

se tiene finalmente que:

$$\Delta E = \frac{1}{3} \epsilon_F \frac{(N' - Z')^2}{A}$$

tomando en cuenta que:

$$\epsilon_F = 38 \text{ Mev}$$

entonces

$$\Delta E = 13 \frac{(N' - Z')^2}{A} \text{ Mev}$$

## Apendice 2

En este apéndice trataremos de obtener un valor más correcto para la energía de enlace de los nucleones en el núcleo. Ya que la energía de enlace es la diferencia entre la energía potencial y la energía cinética, primero calcularemos la energía potencial y después la energía cinética. Para ello usaremos un potencial de Yukawa para obtener la energía potencial de los nucleones y el principio de incertidumbre para obtener la energía cinética de los mismos en el núcleo.

La energía potencial de acuerdo con el potencial de Yukawa es:

$$V = V_Y \left( \frac{r}{b_Y} \right)^{-1} \exp \left( - \frac{r}{b_Y} \right)$$

donde  $V_Y$  es la profundidad del potencial de Yukawa y  $b_Y$  es el alcance del potencial mismo.

La relación entre la profundidad del potencial de Yukawa y la profundidad del potencial cuadrado  $V_S$  es:

$$V_Y = 1.45 V_S$$

y la relación entre el alcance del potencial de Yukawa  $b_Y$  y el alcance del potencial cuadrado  $b_S$  es:

$$b_Y = 0.472 b_S$$

Para el caso de un sistema ligado nucleón-nucleón en el estado triplete (deuterón), el alcance y la profundidad del potencial cuadrado es:

$$b_t = 1.93 \text{ f} \quad \text{y} \quad V_{0t} = 38.5 \text{ Mev}$$

Por lo tanto, el potencial de Yukawa nos queda:

$$\begin{aligned} V &= 1.45 V_s \left( \frac{r}{0.472 b_s} \right)^{-1} \exp \left( - \frac{r}{0.472 b_s} \right) \\ &= 55.8 \left( \frac{r}{0.91} \right)^{-1} \exp \left( - \frac{r}{0.91} \right) \end{aligned}$$

Como la distancia entre los nucleones en el núcleo es de 1.2 f tenemos que:

$$V = 11.31 \text{ Mev}$$

Ahora, para encontrar la energía cinética, partiremos del principio de incertidumbre

$$\Delta r \Delta P_r \geq \frac{\hbar}{2}$$

donde

$$\Delta r = \sqrt{\langle r^2 \rangle - \langle r \rangle^2}$$

y

$$\Delta P_r = \sqrt{\langle P_r^2 \rangle - \langle P_r \rangle^2}$$

Tomando en cuenta que las  $|\psi\rangle$  sobre las  $r$  cumplen la ley de paridad (debido a la simetría del problema), - se tiene que  $\langle r \rangle^2$  y  $\langle P_r \rangle^2$  son cero. Por lo tanto

$$\Delta r = r \quad \text{y} \quad \Delta P_r = P_r$$

y el principio de incertidumbre se reduce a

$$r \cdot P_r \geq \frac{\hbar}{2}$$

o

$$P_r \geq \frac{\hbar}{2r}$$

Sustituyendo los valores de  $r$  y  $\hbar$ , y haciendo - las operaciones correspondientes tenemos que:

$$P_r \geq 0.439 \times 10^{-19} \text{ Kg} \frac{\text{m}}{\text{seg}}$$

Por otro lado, para un potencial central

$$P^2 = P_r^2 + \frac{\hat{l}^2}{r^2}$$

pero por ser el núcleo un sistema con momento angular cero, tenemos:

$$P^2 = P_r^2$$

y la energía cinética de la partícula (con la masa reduci

da de los 2 nucleones que interaccionan), moviéndose en un potencial central será:

$$E_k = \frac{P_r^2}{2(m/2)}$$

donde  $P_r$  es el ímpetu de la partícula  
y  $m$  es la masa de un nucleón.

Sustituyendo en  $E_k$  los valores de  $P_r$  y  $m$  tenemos:

$$E_k = 0.114 \times 10^{-11} \text{ Joules}$$

6

$$E_k = 7.10 \text{ Mev}$$

y finalmente, la energía de enlace será:

$$U = E_p - E_k = 11.31 - 7.10 = 4.21 \text{ Mev}$$



## Apéndice 3

En este apéndice calcularemos el volumen  $V'$  de los nucleones que se sobrestimaron al obtener el término de su superficie, los cuales conducen a un déficit en la energía de enlace total que se conoce como el término de curvatura.

De acuerdo con la fig. 1, el volumen  $V'$  está comprendido entre el volumen del cilindro recto

$$V = \pi r_v^2 h$$

y el volumen del segmento esférico

$$V = \frac{1}{2} \pi h^2 (3R - h)$$

O sea  $V'$ , es:

$$v' = \pi r_v^2 h - \frac{1}{2} \pi h^2 (3R - h)$$

$$= \pi r_v^2 h - \frac{3}{2} \pi R h^2 + \frac{1}{2} \pi h^3$$

como  $h^3$  es un infinitésimo de 3<sup>er</sup> orden, la ecuación anterior se simplifica a

$$v' = \pi r_v^2 h - \frac{3}{2} \pi h^2 R$$

Para  $h$  en función de  $r_v$ , usando la expresión -  
 $r_v^2 \cong h^2 R$  (obtenida de despreciar  $h^2$  en la igualdad  
 $r_v^2 = h^2 R - h^2$ ), la ecuación anterior se puede expresar  
 como:

$$v' = \pi \frac{r_v^4}{2R} - \frac{3}{2} \pi \left( \frac{r_v^4}{4R^2} \right) R$$

Sustituyendo  $R = r_0 A^{1/3}$ , se tiene:

$$\begin{aligned} v' &= \left( \pi \frac{r_v^4}{2} - \frac{3}{8} \pi r_v^4 \right) r_0^{-1} A^{-1/3} \\ &= \frac{1}{8} \pi r_v^4 r_0^{-1} A^{-1/3} \end{aligned}$$

que nos da finalmente el volumen que ocupan los nucleones-  
 que se sobrestimaron.

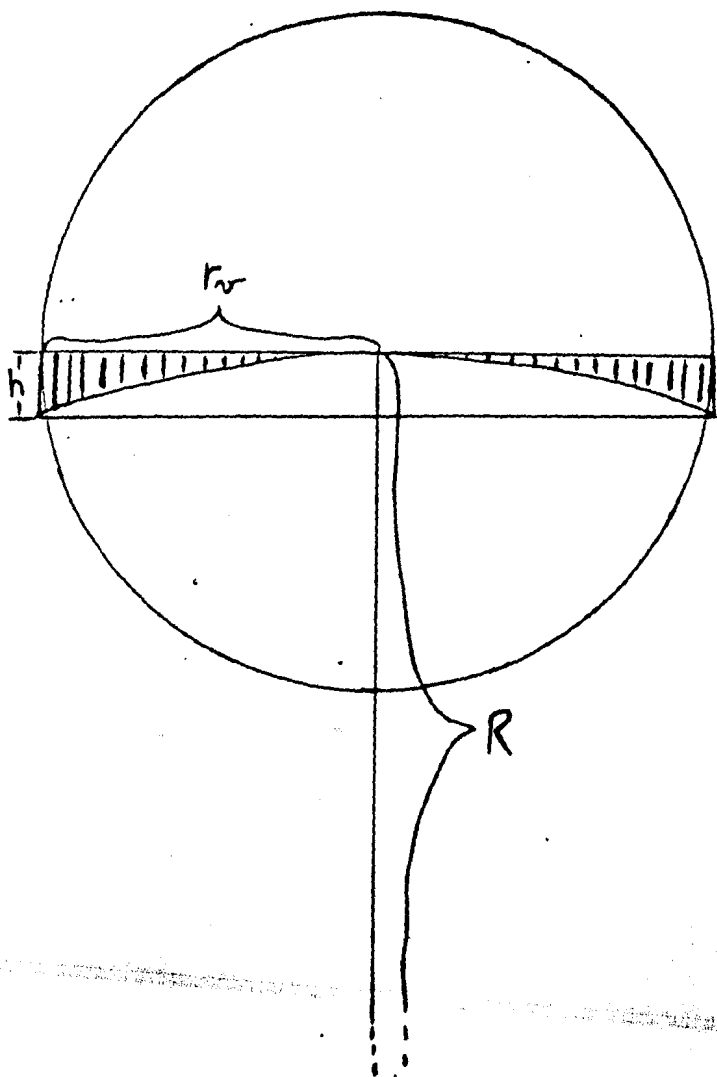


Fig. 1.-Dibujo donde se muestra el volumen de los nucleones que se sobrestimaron (con rayas verticales) al obtener el término de superficie. Se simboliza con  $R$  el radio del núcleo, con  $r_v$  el radio de la vecindad de un nucleón superficial y con  $h$  la altura del cilindro recto donde están contenidos los nucleones que se sobrestimaron.

## REFERENCIAS DE LOS APENDICES

- 1.- Amos de Shalit and Herman Feschbach, Theoretical Nuclear -  
clear Physics, Volume 1, Nuclear Structure. Wiley and -  
Sons, New York, pág.122-128(1974).
- 2.- L.R.B.Elton, Ph.D., Introducción a la teoría nuclear. -  
Edic.Rial P,S.A.,Madrid(1964)