

**COEFICIENTES DE ABSORCION ACUSTICA -METODOS DE ONDAS ESTACIONARIAS.**

**HÉCTOR CHÁVEZ HERNÁNDEZ  
FACULTAD DE CIENCIAS  
U.N.A.M.**



Universidad Nacional  
Autónoma de México

UNAM



## **UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso**

### **DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

# INDICE .

	PÁG.
INTRODUCCION	1
CAPITULO 1.-FUNDAMENTACION TEORICA.	
1.1 EL PROBLEMA DE LA ABSORCIÓN DE ENERGÍA ACÚSTICA Y LOS METODOS PARA DETERMINARLA	3
1.2 LA IMPEDANCIA CARACTERISTICA RELATIVA	6
1.3 APARATOS DE ONDAS ESTACIONARIAS MÉTODO TRADICIONAL	14
1.3A EL MÉTODO TRADICIONAL -DESCRIPCIÓN Y DISCUSIÓN	14
1.3B EL MÉTODO TRADICIONAL -ANÁLISIS TEÓRICO SIN CONTAR EL FACTOR DE AMORTIGUAMIENTO INTERNO	17
1.3C EL MÉTODO TRADICIONAL -TRATAMIENTO TEÓRICO QUE INCLUYE EXPLICITAMENTE EL FACTOR DE AMORTIGUAMIENTO INTERNO	22
1.4 APARATOS DE ONDAS ESTACIONARIAS MÉTODO DIFERENCIAL	29
CAPITULO 2.-DESARROLLO EXPERIMENTAL.	
GENERALIDADES	41
2.1 CONDICIONES GENERALES DEL TRATAMIENTO EXPERIMENTAL EN LOS MÉTODOS DE ONDAS ESTACIONARIAS	42

## INDICE (CONTINUACIÓN)

	PÁG.
2.2 DETERMINACIÓN DEL CONJUNTO DE - FRECUENCIAS DE TRABAJO	46
2.3 TRANSDUCTORES	51
2.4 MÉTODO TRADICIONAL	55
2.5 MÉTODO DIFERENCIAL	58
2.6 TRATAMIENTO DE DATOS	61
2.6A MÉTODO TRADICIONAL	61
2.6B MÉTODO DIFERENCIAL	64
2.6C EL FACTOR DE AMORTIGUAMIENTO IN- TERNO ( $\alpha$ ) COMO FUNCIÓN DEL ES- PESOR DEL MATERIAL ( $\delta$ ) Y LA FRE- CUENCIA ( $\nu$ ).	69
2.7 PREDICCIÓN DEL COMPORTAMIENTO - DE DOS MUESTRAS DEL MATERIAL ES- TUDIADO UTILIZANDO EL MÉTODO DI- FERENCIAL	74
2.7A METODOLOGÍA	74
2.7B COMENTARIOS	76
2.8 UN TRATAMIENTO DE DATOS ALTERNA- TIVO PARA LA PREDICCIÓN DEL COM- PORTAMIENTO DE DOS MUESTRAS DEL MATERIAL ESTUDIADO UTILIZANDO - EL MÉTODO DIFERENCIAL	79
2.8A METODOLOGÍA	79
2.8B COMENTARIOS	85

## INDICE (CONTINUACIÓN)

	PÁG.
2. 9 GRÁFICAS	87
2.10 PROCEDIMIENTO GENERAL PARA DETERMINAR EL COEFICIENTE DE ABSORCIÓN DE UN MATERIAL; SU FACTOR DE AMORTIGUAMIENTO INTERNO Y LA PREDICCIÓN DE SU COMPORTAMIENTO	93
CAPITULO 3.-CONCLUSIONES	
CONCLUSIONES	96
APENDICE 1	
MÉTODO DE MÍNIMOS CUADRADOS PARA AJUSTAR UN POLINOMIO DE CUALQUIER GRADO - A UN CONJUNTO DE N PUNTOS EXPERIMENTALES	100
PROGRAMA DE COMPUTADORA PARA APLICAR EL MÉTODO DE MÍNIMOS CUADRADOS	104
REFERENCIAS	107
BIBLIOGRAFIA	108

## INTRODUCCION.

Determinar la cantidad de energía acústica absorbida por un material es un problema que, si bien ha sido ampliamente estudiado, aún no ha sido resuelto de manera satisfactoria.

El presente trabajo tiene su origen en la necesidad de contar con un método eficiente y accesible para determinar coeficientes de absorción de energía acústica y en él se describe la forma en la que fué concebido dicho método, su fundamentación teórica, el trabajo experimental realizado, los resultados obtenidos y la forma en la cual fueron evaluados dichos resultados.

El primer capítulo contiene el fundamento teórico del trabajo y en él se hace evidente la inoperancia de los métodos tradicionalmente usados para medir coeficientes de absorción acústica. También se presenta el aspecto teórico del nuevo método (que en este trabajo recibe el nombre de Método Diferencial).

El desarrollo experimental queda contenido en el capítulo segundo donde se mencionan las condiciones experimentales requeridas, así como la forma en la cual se experimentó con el aparato de ondas estacionarias. Dentro de este mismo capítulo se incluyen las tablas de datos y resultados obtenidos así como las gráficas correspondientes. También se menciona la forma en la cual fué predicho el comportamiento de dos muestras del material estudiado.

El capítulo tercero está destinado a los comentarios y conclusiones que se desprenden de los resultados obtenidos.

Finalmente se incluye un apéndice donde se encuentra un método para ajustar cualquier función a un conjunto de puntos experimentales. También contiene el programa de computadora utilizado para aplicar el método anterior.

# CAPITULO 1

## FUNDAMENTACION TEORICA

## 1.1 EL PROBLEMA DE LA ABSORCIÓN DE LA ENERGÍA ACÚSTICA Y LOS MÉTODOS PARA DETERMINARLA.

La acústica se ocupa del estudio de los fenómenos ondulatorios en medios materiales. Entre los tópicos que más fuertemente han llamado la atención de los especialistas en esta rama de la Física, se encuentra aquel cuya finalidad es desarrollar métodos eficientes para evaluar coeficientes de absorción de energía acústica. Una de las razones por las cuales se ha dedicado una gran cantidad de trabajo a la solución de dicho problema, es la importancia que tienen los coeficientes de absorción acústica en el control de ruido y vibraciones que son dos factores relevantes en la contaminación ambiental.

Los métodos que se utilizan para evaluar coeficientes de absorción acústica son variados, sin embargo pueden ser divididos en dos grandes grupos: el primer grupo lo componen aquellos métodos en los cuales la evaluación se hace dentro de recintos cuyas condiciones acústicas son extremas y están rígidamente controladas. Dichos recintos pueden ser cámaras anecóicas o cámaras de reverberación.

Para establecer con más claridad las características de este tipo de métodos puede, por ejemplo, describirse a grandes rasgos la manera de proceder con una cámara de reverberación. En este caso se mide el tiempo de reverberación de la cámara antes y después de que el material ha sido situado dentro de ella. Entonces, utilizando la bien conocida fórmula de Sabine, puede ser calculado el coeficiente de absorción acústica del material que se quiere caracterizar dividiendo la absorción total encontrada, entre el área del material que se quiere caracterizar. Sin ahondar más en este método debe observarse que existe una característica presente en todos los casos que el coeficiente de absorción se determina en una cámara y es que, lo que en realidad se está determinando es el



comportamiento de un material particular en una cámara en particular. Lo anterior constituye el principal problema de este tipo de método ya que puede probarse en forma teórica y experimental que, aún con el mismo material de prueba, el efecto de absorción resulta ser distinto en distintas cámaras y que además depende de la forma en que sea situado el material dentro de dichas cámaras<sup>1</sup>. De lo anterior se concluye que cuando la evaluación se hace en una cámara acústica ( de cualquier tipo ) no es posible hablar de un coeficiente de absorción definido cuando, al mismo tiempo, no han sido especificadas las dimensiones y formas de dicha cámara y el área del material así como la forma en la que fué colocado. Por ello, los coeficientes de absorción evaluados con estos métodos no sólo dependen de las constantes físicas del material tales como su constitución mecánica, su rigidez, densidad, porosidad, elasticidad, homogeneidad, etc., sino que también están fuertemente influenciados por las condiciones en las cuales fué hecha la evaluación. La causa de lo anterior resulta evidente cuando se observa que los coeficientes de absorción medidos en la forma descrita no están basados directamente en la definición usual del coeficiente de absorción como la razón de la energía absorbida por la muestra entre la energía total que incide sobre ella. La relación en estos casos resulta totalmente indirecta al ser obtenida por medio de la fórmula estadística de reverberación de Sabine con la cual se calculan los coeficientes. Cabe agregar que dicha fórmula postula una serie de condiciones que ninguna cámara acústica podría satisfacer<sup>1</sup>.

El segundo grupo de métodos para evaluar coeficientes de absorción tiene su origen dentro de la perspectiva que presenta el panorama anterior, la cual dió como resultado el pensar en una metodología alternativa para medir coeficientes de absorción acústica. Tal metodología debería reunir varias características entre las cuales se encontraba el hecho de poder calcular el coeficiente de absorción en términos de su definición usual, además de poder lograr que las medidas sean reproducibles bajo condiciones análogas.

Este segundo conjunto de métodos para medir coeficientes de absorción surge en 1902 cuando Tuma<sup>2</sup> ideó realizar esta evaluación por medio de ondas estacionarias dentro de un tubo rígido. Con los métodos de ondas estacionarias el coeficiente de absorción es medido sobre la base de su definición, de manera que sólo depende de las constantes físicas del material, siendo así que, bajo las mismas condiciones experimentales, muestras del mismo material, analizadas por los métodos de ondas estacionarias, presentarán coeficientes de absorción iguales. Por otra parte, con los métodos de ondas estacionarias también es posible determinar directamente la impedancia acústica específica, que constituye una condición de frontera sumamente importante y acerca de la cual se tratará más adelante así como de las características experimentales del aparato de ondas estacionarias.

Llegado a este punto es necesario destacar el carácter puramente operacional de los coeficientes que se determinan con cualquiera de los dos métodos. El problema reside en que lo único que se caracteriza de un cierto material es su comportamiento externo, es decir, el resultado de su intracción con el campo sonoro incidente, sin embargo es claro que su comportamiento debería poder predecirse por medio de un parámetro que caracterizara el material por sus constantes físicas internas y del cual pudiera obtenerse información acerca de los mecanismos que intervienen en la degradación de energía acústica dentro de él. Dicho parámetro es el factor de amortiguamiento interno y el método que en este trabajo recibe el nombre de Método Diferencial permite evaluar ese factor pudiendo, de esta manera, caracterizar un material en forma única -- además de poder determinar otras de sus constantes físicas de importancia.

## 1.2 LA IMPEDANCIA CARACTERISTICA RELATIVA.

Los métodos de ondas estacionarias basan el cálculo de los coeficientes de absorción acústica en la determinación de la impedancia característica relativa. Esta cantidad física y el concepto involucrado con ella son de suma importancia en el estudio de la absorción de energía acústica y por ello se dedica la presente sección a su estudio teórico y a la discusión de sus propiedades.

El concepto surge cuando se estudia el fenómeno de transmisión de energía acústica entre dos medios en las condiciones que se detallan a continuación:

Sea  $\overline{OO'}$  el plano de la frontera entre el medio 1 de impedancia característica  $\rho_1 c_1$  y el medio 2 de impedancia característica  $\rho_2 c_2$  (ver figura 1), dicha frontera constituye la interfase de dos medios semi infinitos.

Considérese ahora una onda plana en el medio 1, viajando en la dirección positiva del eje  $x$  e incidiendo perpendicularmente sobre la frontera  $\overline{OO'}$  como se muestra en la figura 1.

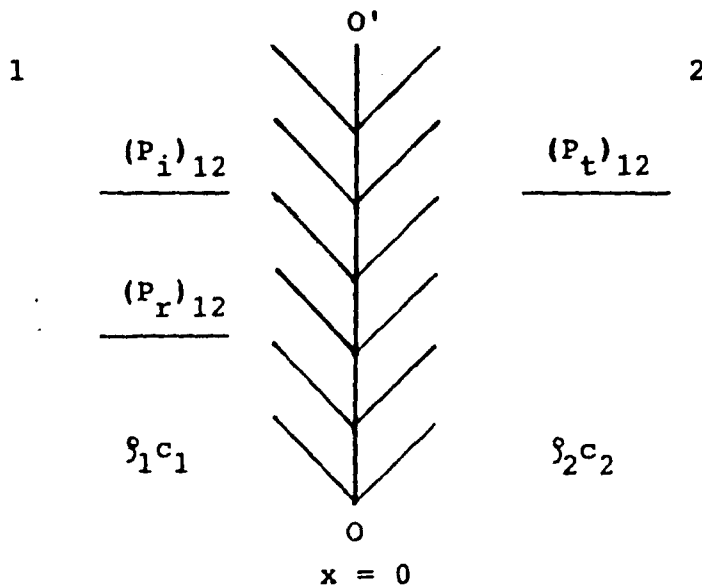


Fig. 1.

La onda incidente puede ser representada matemáticamente por

$$(P_i)_{12} = I_{12} e^{j(\omega t - k_1 x)} \quad \dots (1)$$

Al incidir en el plano de la frontera  $\overline{OO'}$ , el cual es por conveniencia escogido en  $x = 0$ , son generadas una onda reflejada

$$(P_r)_{12} = R_{12} e^{j(\omega t + k_1 x)} \quad \dots (2)$$

y una onda transmitida

$$(P_t)_{12} = T_{12} e^{j(\omega t - k_2 x)} \quad \dots (3)$$

La onda transmitida siempre tiene la misma frecuencia que la onda incidente, pero como resultado de la diferencia de velocidades,  $c_1$  y  $c_2$ , en los dos medios, los valores del número de onda,  $k_1 = \omega/c_1$ , en el medio 1 y  $k_2 = \omega/c_2$  en el medio 2, son diferentes.

Obsérvese además que en la frontera  $\overline{OO'}$  estas tres ondas están en fase.

Considerando lo anterior se procede a determinar en función de las amplitudes de las ondas descritas por las ecuaciones (1), (2), (3), la impedancia característica relativa de los dos medios que se define como

$$r_{12} = \frac{\rho_2 c_2}{\rho_1 c_1}$$

Para determinarla es necesario recordar que existen dos condiciones de frontera que deben ser satisfechas en todo momento y en cualquier punto de la frontera  $\overline{OO'}$ .

Dichas condiciones son:

- a) Las presiones acústicas sobre ambos lados de  $\overline{00}$  son iguales.
- b) Las velocidades de las partículas sobre la interfase son iguales.

Dado que la presión es una cantidad escalar, la presión en cualquier punto del medio 1 estará dada por

$$(P_i)_{12} + (P_r)_{12}$$

de la condición (a) se obtiene que

$$(P_i)_{12} + (P_r)_{12} = (P_t)_{12}$$

utilizando las ecuaciones (1), (2) y (3) evaluadas en  $x = 0$ , la expresión anterior se convierte en

$$I_{12}e^{j\omega t} + R_{12}e^{j\omega t} = T_{12}e^{j\omega t}$$

simplificando, se tiene

$$I_{12} + R_{12} = T_{12} \quad \dots (5)$$

Ahora bien, la impedancia acústica específica para ondas planas viajando en la dirección positiva del eje  $x$ , esta dada por

$$z_+ = \frac{P_+}{U_+} = \rho c$$

y para una onda plana que viaja en la dirección negativa del eje  $x$

$$z_- = \frac{P_-}{U_-} = - \rho c$$

donde  $U$  es la velocidad de las partículas en la dirección del movimiento. De estas dos últimas ecuaciones se encuentra que la velocidad de las partículas asociadas a las ondas (1), (2) y (3) puede ser representada por

$$(U_i)_{12} = \frac{(P_i)_{12}}{\rho_1 c_1}$$

$$(U_r)_{12} = - \frac{(P_r)_{12}}{\rho_1 c_1} \quad \dots (6)$$

$$(U_t)_{12} = \frac{(P_t)_{12}}{\rho_2 c_2}$$

Así la velocidad de las partículas en el medio 1 es

$$(U_i)_{12} + (U_r)_{12}$$

y entonces la condición de frontera (b) puede expresarse como

$$(U_i)_{12} \Big|_{x=0} + (U_r)_{12} \Big|_{x=0} = (U_t)_{12} \Big|_{x=0}$$

Así, de las ecuaciones (6) se obtiene

$$\frac{(P_i)_{12} \Big|_{x=0}}{\rho_1 c_1} - \frac{(P_r)_{12} \Big|_{x=0}}{\rho_1 c_1} = \frac{(P_t)_{12} \Big|_{x=0}}{\rho_2 c_2}$$

Entonces utilizando las ecuaciones (1), (2), (3), resulta

$$\frac{I_{12} e^{j\omega t}}{\rho_1 c_1} - \frac{R_{12} e^{j\omega t}}{\rho_1 c_1} = \frac{T_{12} e^{j\omega t}}{\rho_2 c_2}$$

Simplificando

$$\frac{I_{12}}{\vartheta_1 c_1} - \frac{R_{12}}{\vartheta_1 c_1} = \frac{T_{12}}{\vartheta_2 c_2}$$

De donde

$$\frac{\vartheta_2 c_2}{\vartheta_1 c_1} (I_{12} - R_{12}) = T_{12}$$

Lo cual puede ser escrito como

$$r_{12} (I_{12} - R_{12}) = T_{12} \quad \dots (7)$$

Luego, restando la ecuación (7) de la ecuación (5) puede ser eliminada  $T_{12}$  quedando

$$I_{12} + R_{12} - r_{12} (I_{12} - R_{12}) = 0 \quad \dots (8)$$

y se obtiene  $r_{12}$

$$r_{12} = \frac{I_{12} - R_{12}}{I_{12} + R_{12}} \quad \dots (9)$$

Por otra parte de la ecuación (8), distribuyendo y reagrupando, puede ser encontrada la relación entre  $I_{12}$  y  $R_{12}$ , que resulta ser

$$R_{12} = I_{12} \frac{r_{12} - 1}{r_{12} + 1} \quad \dots (10)$$

entonces la razón del flujo de la energía sonora reflejada al flujo de la energía sonora incidente es

$$A_r = \frac{R_{12}^2}{I_{12}^2} = \left( \frac{r_{12} - 1}{r_{12} + 1} \right)^2, \quad \dots (11)$$

el coeficiente de reflexión en términos de la energía.

De la ecuación (5) y (7) puede eliminarse también  $R_{12}$  obteniendo entonces

$$2I_{12} = T_{12} \frac{r_{12} + 1}{r_{12}}$$

De donde

$$T_{12} = I_{12} \frac{2r_{12}}{r_{12} + 1} \quad \dots (12)$$

y el coeficiente de transmisión en términos de la energía estará dado por

$$A_t = \frac{1}{r_{12}} \frac{T_{12}^2}{I_{12}^2} = \frac{4r_{12}}{(r_{12}+1)^2} \quad \dots (13)$$

Este último es independiente de la dirección del movimiento - de la onda, el resultado hubiera sido el mismo si el análisis se hubiera hecho para una onda que incidiera desde el medio 2, sobre el medio 1. Esta propiedad de reciprocidad en la transmisión no es, sino un caso especial de un principio mucho más general de reciprocidad aplicable al fenómeno acústico. Obsérvese además que esto es



interesante porque la impedancia acústica relativa no es la misma cuando se invierte la dirección de la onda incidente, por ejemplo, en este caso  $r_{21}$  es distinta de  $r_{12}$ , es decir, el pasar del medio 2 al 1 en lugar de ir del 1 al 2, origina un valor distinto en el valor de la impedancia acústica relativa. De hecho en general se obtiene que

$$r_{ij} = \frac{1}{r_{ji}}$$

como puede verse directamente de la definición.

El concepto de la impedancia acústica relativa es sumamente importante por varias razones:

- a) Físicamente puede visualizarse como la "resistencia" que presenta la interfase al flujo de energía acústica.
- b) Por otra parte debe notarse que constituye un efecto exclusivo de la interfase puesto que está determinado únicamente por la diferencia en los valores de las impedancias acústicas específicas que corresponden a cada uno de los medios.

Cabe hacer notar que en el presente tratamiento no se hace suposición alguna acerca de lo que ocurre con las ondas lejos de la interfase, es decir, no se imponen condiciones sobre ninguno de los medios además de las especificadas al principio, por ello es que este tratamiento es válido para cualquier terna de ondas, incidente, transmitida y reflejada sobre una interfase, no importando que alguno de los medios (o ambos) presente efectos de degradación de energía acústica, lo que ocurra en la frontera depende exclusivamente del cociente  $r_{12}$ . Así la cantidad de energía acústica transmitida no deberá cambiar si las impedancias acústicas específicas de los medios no cambian.

Por último obsérvese que si  $r_{12}$  es igual a 1 la transmisión es completa y no existe reflexión, lo cual implica que para tener transmisión completa es suficiente con que los medios presenten -

impedancias acústicas específicas iguales.

Además, si  $r_{12} = \infty$ , es decir, el caso de una onda que incide sobre un medio sumamente denso o muy rígido se encuentra que la reflexión es total y no existe transmisión alguna. Estas consideraciones son importantes porque permitirán analizar los casos límite en los tratamientos teóricos presentados posteriormente.

### 1.3 APARATOS DE ONDAS ESTACIONARIAS - METODO TRADICIONAL.

#### 1.3A EL MÉTODO TRADICIONAL - DESCRIPCIÓN Y DISCUSIÓN.

En esta sección se expondrán los principios básicos de funcionamiento del aparato de ondas estacionarias que se utiliza en el método que en este trabajo se denomina "Método Tradicional". Como ya se ha dicho, lo que se pretende con los métodos de ondas estacionarias es obtener los coeficientes de absorción a través de su definición como cocientes de energía. La manera en que se determina es la que se describe a continuación:

En un dispositivo como el que se muestra en la figura 2 se genera una onda plana con amplitud de presión  $I_{12}$  que viaja a lo largo del tubo para incidir sobre una muestra del material que se desea evaluar situada en el otro extremo del tubo. Al incidir sobre la muestra parte de la energía es absorbida y otra parte es reflejada a lo largo del tubo con una amplitud  $R_{12}$ .

Como resultado de la interferencia de las ondas incidente y reflejada se genera una onda estacionaria dentro del tubo. Se tiene entonces que la amplitud de presión máxima de esta onda será  $I_{12} + R_{12}$  y la amplitud de presión mínima  $I_{12} - R_{12}$  y en esta forma se conoce la relación entre la presión máxima y mínima del tubo

$$n = \frac{P_{\max}}{P_{\min}} = \frac{I_{12} + R_{12}}{I_{12} - R_{12}} \quad \dots (15)$$

lo cual implica el conocimiento de las amplitudes  $I_{12}$  y  $R_{12}$ , de donde puede obtenerse el coeficiente de absorción de la siguiente manera

$$A' = 1 - \frac{R_{12}^2}{I_{12}^2} = 1 - \left( \frac{n - 1}{n + 1} \right)^2 \quad \dots (16)$$

Así, es posible encontrar el coeficiente de absorción una vez que se conoce la razón de las amplitudes máxima y mínima de la onda estacionaria.

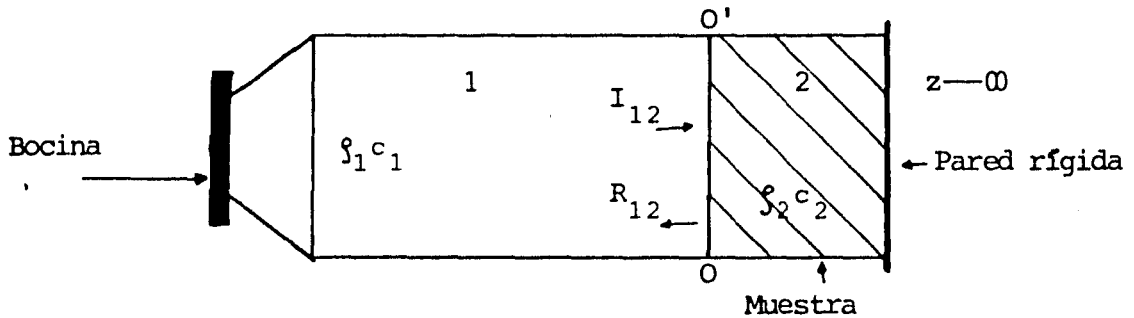


Fig. 2

Cabe aclarar que lo descrito anteriormente es tan sólo la forma en la que tradicionalmente se utiliza el aparato de ondas estacionarias, sin embargo, llegado a este punto, conviene detenerse a considerar algunos detalles sobre la teoría que respalda las expresiones (15) y (16). Obsérvese que, en esencia, lo que se ha supuesto es que la onda estacionaria generada en el tubo es producto de la superposición de dos ondas: una que viaja desde la bocina hacia la pared rígida en el otro extremo del tubo y otra que viaja en sentido opuesto. Así la expresión

$$\frac{R_{12}^2}{I_{12}^2}$$

representa un coeficiente de reflexión en términos de la energía pero hay que notar que  $R_{12}$  no es puramente la amplitud de la onda que se refleja en la interfase  $\overline{OO'}$  sino que está compuesta de la amplitud de la onda que se refleja en  $\overline{OO'}$  mas la amplitud de la onda que se transmite en  $\overline{OO'}$  e incide sobre la pared rígida, se refleja e incide en  $\overline{OO'}$  por el lado opuesto y una parte se transmite nuevamente hacia el medio 1. Así lo que en realidad representa  $R_{12}^2$  es la energía que se refleja en  $\overline{OO'}$  más la energía que se transmite por el material. Nótese además que la onda que se transmite desde  $\overline{OO'}$  a la pared rígida y regresa a  $\overline{OO'}$  no se transmite completamente al medio 1 otra vez, sino que en  $\overline{OO'}$  parte de ella se refleja nuevamente hacia la pared rígida y parte se transmite hacia 1. Así, en efecto, el complemento de  $R_{12}^2/I_{12}^2$ , es decir  $A'$ , es el coeficiente de absorción calculado en términos de su definición como cociente de energías y en este aspecto el método es consistente.

Sin embargo obsérvese que las expresiones (15) y (16) son exactamente las expresiones (9) y (11) respectivamente y que  $n$ , no es otra cosa que  $r_{12}$ . Así, resulta muy interesante observar que aún cuando en el caso del dispositivo de la figura 1 las condiciones son muy distintas de las que se tienen en el sistema presentado en la sección 1.2, mediante el cual se determinó teóricamente  $r_{12}$ , ésta última puede ser calculada a través de las expresiones (15) y (16). Considerando lo anterior y observando la expresión (11) podría concluirse que al aplicarla al aparato de ondas estacionarias a través de (16) se ha hecho la suposición de que toda la energía que se transmite a través de la frontera  $\overline{OO'}$  es absorbida por el material, lo cual, en general, no sucede.

Por otra parte, aún cuando pudiera hacerse esta suposición, el principal problema de este método consiste en que no hay forma de saber que parte de la fracción de energía que representa  $A'$  se debe al efecto de reflexión en la interfase y que parte es la que realmente se degradó en el interior de la muestra. Es por ello que este método, cuando más, ofrece un coeficiente de absorción operativo --

que no permite caracterizar de manera única al material puesto que no se determina a ciencia cierta la capacidad que tiene para degradar energía acústica en su interior. Además, regresando al problema de  $n$ , se encuentra experimentalmente que ésta varía con el espesor de la muestra, lo cual no debería ocurrir puesto que, como se demostró en 1.2, se trata exclusivamente de un efecto de interfase. Así, lo que se observa es que en  $n$ , también está involucrado el efecto de degradación de energía acústica en el interior del material, puesto que, en caso contrario  $n$  no registraría variaciones al cambiar el espesor de la muestra.

Por lo anterior es claro que si quiere caracterizarse de manera única un cierto material entonces deberán hacerse otras consideraciones teóricas que se expondrán en las siguientes secciones.

### 1.3B EL MÉTODO TRADICIONAL - ANÁLISIS TEÓRICO SIN CONSIDERAR EL FACTOR DE AMORTIGUAMIENTO INTERNO.

Dado el problema descrito en la sección anterior ahora se trata de ver si es posible, a través de este método, separar los efectos de interfase y de amortiguamiento interno. El primer paso sería aplicar un análisis teórico más completo al dispositivo de la figura 2 pero con la simplificación de que no exista un factor de amortiguamiento interno. El objeto de la presente sección es hacer evidente que esto no es posible.

El tratamiento para este caso y los que más adelante se detallan será del mismo tipo que el utilizado para analizar problemas de líneas de transmisión y lo que se pretende es determinar las relaciones existentes entre las amplitudes de las distintas ondas puesto que es lo que experimentalmente puede evaluarse.

Considérese entonces el sistema representado en la figura 3. Se trata de un tubo en el cual se monta una muestra del material -- que se desea evaluar y que constituye el medio 2. El tubo está cerrado con una tapa sumamente rígida que conforma el medio 3. La cá-

para que contiene al medio 1 esta llena de aire.

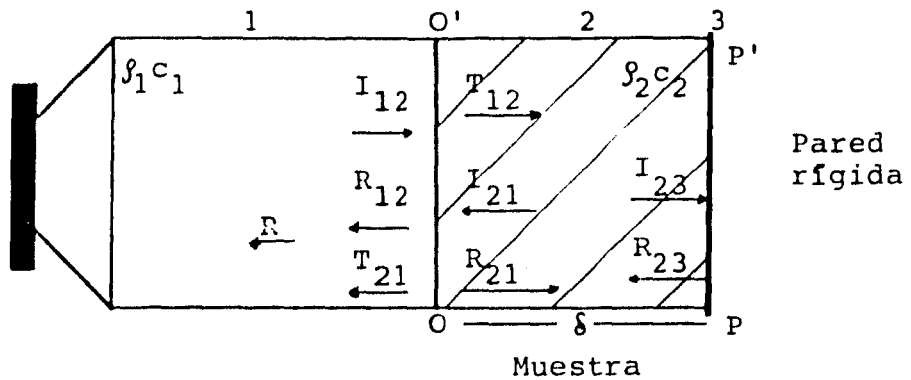


Fig. 3

Lo que ocurre entonces es que se hace incidir una onda de amplitud  $I_{12}$  sobre la frontera  $\overline{OO'}$ , parte de esta onda se refleja como una onda de amplitud  $R_{12}$  y parte de ella se transmite hacia 2 como  $T_{12}$ . A su vez, la onda de amplitud  $T_{12}$  viaja por el medio 2 para incidir sobre  $\overline{PP'}$  como parte de la onda cuya amplitud es  $I_{23}$ , esta última se refleja completamente en la pared rígida como una onda de amplitud  $R_{23}$  que viaja otra vez por todo el medio 2 para incidir -- (ahora por el lado opuesto) sobre  $\overline{OO'}$  como una onda cuya amplitud es  $I_{21}$ , parte de  $I_{21}$  será reflejada como la onda de amplitud  $R_{21}$  que viajará otra vez hacia  $\overline{PP'}$  para unirse con la onda de amplitud  $T_{12}$  y formar la onda de amplitud  $I_{23}$ . La otra parte de la onda de amplitud  $I_{21}$  se transmitirá hacia 1 como una onda de amplitud  $T_{21}$  para unirse con la onda de amplitud  $R_{12}$  y formar la onda de amplitud  $R$ .

Obsérvese que la ventaja de este tratamiento teórico es que se trabaja únicamente con las amplitudes de las ondas lo cual simplifica notablemente el trabajo.

También es de notarse que en este caso se han hecho las siguientes suposiciones:

- 1) La única onda que incide sobre  $\overline{OO'}$  desde el medio 1 es aquella que tiene amplitud  $I_{12}$ , esto es equivalente a decir que la onda

cuya amplitud es  $R$  no se refleja en la bocina para volver a incidir sobre  $\overline{OO'}$ .

- 2) La pared que constituye el medio 3 es sumamente rígida comparada con el medio 2 y por ello impone una condición de reflexión total, lo cual implica  $I_{23} = R_{23}$ .
- 3) El medio 2 no presenta efectos de amortiguamiento en su interior, es decir, la amplitud de las ondas no decrece conforme viajan a través de él.
- 4) Las ondas son planas y no sufren reflexiones en las paredes laterales del tubo.

Dado lo anterior se observa que, de la sección 1.2 pueden encontrarse las siguientes relaciones.

$$\left. \begin{aligned} \frac{R_{12}}{I_{12}} &= \frac{r_{12} - 1}{r_{12} + 1} = S_a & \frac{R_{21}}{I_{21}} &= \frac{r_{21} - 1}{r_{21} + 1} = S_b \\ \frac{T_{12}}{I_{12}} &= \frac{2r_{12}}{r_{12} + 1} = Q_a & \frac{T_{21}}{I_{21}} &= \frac{2r_{21}}{r_{21} + 1} = Q_b \end{aligned} \right\} I_{23} = R_{23}$$

Además nótese que

$$r_{12} = \frac{1}{r_{21}}$$

Entonces, lo que se desea encontrar es el valor de  $R$  para poder determinar

$$\frac{R^2}{I_{12}^2}$$



Resulta que  $R_{12}$  puede evaluarse de inmediato en términos de  $I_{12}$ , por lo tanto el problema se reduce a determinar  $T_{21}$  en términos de  $I_{12}$ .

Así

$$T_{21} = Q_b I_{21}$$

pero

$$I_{21} = R_{23}$$

por lo tanto

$$T_{21} = Q_b R_{23} = Q_b I_{23}$$

Ahora bien, como se dijo anteriormente

$$I_{23} = R_{21} + T_{12}$$

por lo tanto

$$T_{21} = Q_b (R_{21} + T_{12}) \quad \dots (17)$$

por otra parte

$$I_{21} = R_{23} = I_{23} = R_{21} + T_{12} \quad \dots (18)$$

pero como

$$R_{21} = S_b I_{21}$$

entonces

$$I_{21} = S_b I_{21} + T_{12}$$

despejando

$$I_{21} = [ 1/(1-S_b) ] T_{12} \quad \dots (19)$$

entonces de (17) y (18)

$$T_{21} = Q_b I_{21}$$

y de (19)

$$T_{21} = [Q_b/(1-S_b)] T_{12} \quad \dots (20)$$

Dado que

$$T_{12} = Q_a I_{12}$$

entonces de (20)

$$T_{21} = [Q_a Q_b / (1-S_b)] T_{12} \quad \dots (21)$$

Ahora bien, obsérvese que  $S_b$  y  $Q_b$  pueden expresarse en términos de  $r_{12}$  como

$$S_b = (1-r_{12})/(1+r_{12}) \quad ; \quad Q_b = 2/(1+r_{12})$$

y por ello pueden expresarse en términos de  $Q_a$  como

$$S_b = 1 - Q_a \quad ; \quad Q_b = 2 - Q_a$$

de tal manera que (21) resulta

$$T_{21} = [Q_a(2-Q_a)/1-(1-Q_a)] I_{12}$$

lo que es igual a

$$T_{21} = [Q_a(2-Q_a)/Q_a] I_{12}$$

entonces

$$T_{21} = (2-Q_a) I_{12} \quad \dots (22)$$

Así puede evaluarse R de la siguiente manera

$$R = R_{12} + T_{12}$$

y de (22) al igual que de  $R_{12} = S_a I_{12}$  se encuentra que

$$R = S_a I_{12} + (2-Q_a) I_{12} = (S_a + 2 - Q_a) I_{12} \quad \dots (23)$$

como  $S_a = Q_a - 1$ , (23) se convierte en

$$R = (Q_a - 1 + 2 - Q_a) I_{12}$$

simplificando, se tiene

$$R = I_{12} \quad \dots (24)$$

La ecuación (24) indica que, bajo las condiciones requeridas en un aparato de ondas estacionarias, la energía total reflejada es igual a la energía total que recibe la muestra. Este resultado es consistente puesto que al no haber pérdidas en el tubo ni degradación de energía en el interior de la muestra, entonces toda la energía que incide sobre  $\overline{OO'}$  desde el medio 1 deberá ser reflejada nuevamente hacia él. Como puede apreciarse, si no se considera explícitamente un factor de amortiguamiento interno en la muestra, entonces no es posible determinar las características del efecto de interfase en forma de la impedancia acústica relativa puesto que dicho efecto no puede ser notado debido a las condiciones que resultan de poner una pared rígida atrás de la muestra.

Dado lo anterior es evidente que debe considerarse explícitamente un factor de amortiguamiento interno en el tratamiento teórico del aparato de ondas estacionarias y esto constituye el objetivo de la siguiente sección.

### 1.3c MÉTODO TRADICIONAL - TRATAMIENTO TEÓRICO QUE INCLUYE EXPLÍCITAMENTE EL FACTOR DE AMORTIGUAMIENTO INTERNO.

El sistema por estudiar en este caso es exactamente el mismo que el descrito en la sección 1.3b y representado esquemáticamente en la figura 3, el proceso mediante el cual se genera el patrón esquematizado en esa figura es el mismo que el explicado en la sección 1.3b y siguen suponiéndose válidas las condiciones 1), 2) y 4) de la misma sección. Sin embargo, en este caso se descarta la suposición 3) y se considera que el material que constituye el medio 2 presenta un efecto de degradación de energía acústica al viajar la onda a través de él, lo cual ocasiona una disminución en su amplitud por un coeficiente de tipo exponencial expresado matemáticamente como  $e^{-\alpha x'}$ , donde  $x'$  es la distancia recorrida por la onda dentro de la muestra y  $\alpha$  es el factor de amortiguamiento interno que se quiere determinar. La razón por la que se eligió una forma exponencial es por el hecho que este tipo de atenuación es muy común cuando existe degradación de energía de ondas mecánicas en medios materiales; como un clásico ejemplo de ello está el oscilador armónico amortiguado.

Lo anterior implica que, por ejemplo, si una onda con amplitud  $A$  incide sobre la interfase  $\overline{OO'}$  desde el medio 1 y viaja por el medio 2 hasta la interfase  $\overline{PP'}$  entonces, si  $\delta$  es el espesor de la muestra, la amplitud de la onda al llegar a la segunda interfase será  $e^{-\alpha\delta} A$ . Como  $x'$  representa una distancia, siempre será positiva, por lo tanto si una onda viaja en el medio 2 desde  $\overline{PP'}$  hasta  $\overline{OO'}$  entonces el coeficiente de amortiguamiento es también  $e^{-\alpha\delta}$ .

Bajo las condiciones anteriores se encuentra que existirán las siguientes relaciones entre las amplitudes de las distintas ondas que componen el patrón.

$$\frac{R_{12}}{I_{12}} = \frac{r_{12} - 1}{r_{12} + 1} = S_a \quad \left| \quad \frac{R_{21}}{I_{21}} = \frac{r_{21} - 1}{r_{21} + 1} = S_b \quad \right| \quad I_{23} = T_{23}$$

$$\frac{T_{12}}{I_{12}} = \frac{2r_{12}}{r_{12} + 1} = Q_a \left| \frac{T_{21}}{I_{21}} = \frac{2r_{21}}{r_{21} + 1} = Q_b \right| \quad r_{12} = \frac{1}{r_{21}}$$

Además

$$i) I_{23} = e^{-\alpha\delta} (T_{12} + R_{21}) = e^{-\alpha\delta} T_{12} + e^{-\alpha\delta} R_{21}$$

$$ii) I_{21} = e^{-\alpha\delta} (T_{23}) = e^{-\alpha\delta} I_{23} = e^{-2\alpha\delta} T_{12} + e^{-2\alpha\delta} R_{21}$$

$$iii) R_{21} = S_b I_{21} = S_b e^{-2\alpha\delta} T_{12} + S_b e^{-2\alpha\delta} R_{21}$$

$$iv) T_{21} = Q_b I_{21} = Q_b e^{-2\alpha\delta} T_{12} + Q_b e^{-2\alpha\delta} R_{21}$$

$$v) R = R_{12} + T_{21}$$

Ahora bien, lo que se quiere determinar es  $R$  en términos de  $I_{12}$ . En tal caso  $R_{12}$  es inmediato y el problema se reduce a evaluar  $T_{12}$ . Para esto último el primer paso es encontrar  $I_{21}$ , por lo tanto de ii) se tiene

$$I_{21} = e^{-2\alpha\delta} T_{12} + e^{-2\alpha\delta} R_{21}$$

pero  $R_{21} = S_b I_{21}$  por lo tanto

$$I_{21} = e^{-2\alpha\delta} T_{12} + S_b e^{-2\alpha\delta} I_{21}$$

despejando  $I_{21}$

$$I_{21} - S_b e^{-2\alpha\delta} I_{21} = e^{-2\alpha\delta} T_{12}$$

de donde

$$I_{21} = [e^{-\alpha\delta} / 1 - S_b e^{-2\alpha\delta}] T_{12}$$

pero  $T_{12} = Q_a I_{12}$ , entonces

$$I_{21} = [Q_a e^{-2\alpha\delta} / 1 - S_b e^{-2\alpha\delta}] T_{12} \quad \dots (25)$$

Ahora bien,  $T_{21} = Q_b I_{21}$ , así, de (25) se encuentra

$$T_{21} = [Q_a Q_b e^{-2\alpha\delta} / 1 - S_b e^{-2\alpha\delta}] I_{12} \quad \dots (26)$$

entonces para determinar  $R = R_{12} + T_{21}$ , se hace uso de  $R_{12} = S_a I_{12}$  y de (26), así se tiene

$$R = S_a I_{12} + [Q_a Q_b e^{-2\alpha\delta} / 1 - S_b e^{-2\alpha\delta}] I_{12}$$

factorizando

$$R = [S_a + (Q_a Q_b e^{-2\alpha\delta} / 1 - S_b e^{-2\alpha\delta})] I_{12}$$

sumando las fracciones

$$R = [(S_a + e^{-2\alpha\delta} (S_a S_b + Q_a Q_b)) / 1 - S_b e^{-2\alpha\delta}] I_{12} \quad \dots (27)$$

Ahora bien, considerando que  $r_{12} = \frac{1}{r_{21}}$  se tiene que

$$S_a = Q_a - 1 ; S_b = 1 - Q_a ; Q_b = 2 - Q_a$$

por lo tanto

$$S_a S_b = (Q_a - 1)(1 - Q_a) = -Q_a^2 + 2Q_a - 1$$

$$Q_a Q_b = (2 - Q_a)(Q_a) = 2Q_a - Q_a^2$$

entonces

$$Q_a Q_b - S_a S_b = 2Q_a - Q_a^2 + Q_a^2 - 2Q_a + 1 = 1$$

de donde (27) se convierte en

$$R = [(S_a + e^{-2\alpha\delta}) / (1 - S_b e^{-2\alpha\delta})] I_{12}$$

por último, observando que  $S_a = -S_b$ , se tiene que

$$R = [(S_a + e^{-2\alpha\delta}) / (1 + S_a e^{-2\alpha\delta})] I_{12} \quad \dots (28)$$

Una manera de verificar la bondad de un resultado es observar su comportamiento en los casos límite. Para la fórmula (28) existen cuatro casos límite, los dos primeros para el espesor ( $\delta$ ) de la muestra y los restantes para la impedancia acústica relativa ( $r_{12}$ ).

En el caso de  $\delta$ , se supone un factor  $\alpha$  finito y se toman las siguientes condiciones extremas

a)  $\delta = 0$ , es decir el caso en que no existe la muestra.

Se tiene de (28)

$$R = [(S_a + 1) / (1 + S_a)] I_{12} - I_{12}$$

Lo cual es consistente puesto que, al no existir la muestra, la onda reflejada debe tener igual amplitud que la onda incidente.

b)  $\delta = \infty$ , es decir una muestra infinitamente grande.

Se tiene de (28)

$$R = S_a I_{12} = R_{12}$$

Resultado que también concuerda puesto que al ser infinito el es-

pesor de la muestra, entonces la interacción de la onda con amplitud  $R_{12}$  con las ondas que se reflejan desde  $\overline{PP'}$ , es inexistente - puesto que la amplitud de estas últimas se hace infinitamente pequeña debido al coeficiente  $e^{-\alpha\delta}$ .

Para los dos casos en los cuales se imponen condiciones extremas sobre  $r_{12}$ , conviene expresar (28) en términos de la impedancia acústica relativa de la siguiente manera.

$$R = [ \left( \frac{r_{12}-1}{r_{12}+1} \right) e^{-2\alpha\delta} / \left( 1 + \left( \frac{r_{12}-1}{r_{12}+1} \right) e^{-2\alpha\delta} \right) ] I_{12}$$

Entonces las condiciones extremas para  $r_{12}$  son:

- a)  $r_{12} \rightarrow \infty$ , es decir, el medio 2 está constituido por un material muy rígido o muy denso.

En tal caso, se tiene de la expresión de R en términos de la impedancia acústica relativa

$$R = \left[ \frac{1 + e^{-2\alpha\delta}}{1 - e^{-2\alpha\delta}} \right] I_{12} = I_{12}$$

El resultado es correcto puesto que como se vió en la sección 1.2, en este caso la reflexión es total y tiene lugar unicamente en la interfase  $\overline{OO'}$ .

- b)  $r_{12} \rightarrow 1$ , el caso de una muestra constituida por un material que no presenta efectos de interfase.

En tal caso la expresión de R en términos de la impedancia acústica relativa se convierte en

$$R = e^{-2\alpha\delta} I_{12}$$

Obsérvese que en este caso la transmisión en las interfases es total y la amplitud de la onda reflejada solamente es afectada por el hecho de pasar dos veces la onda a través de una muestra cuyo espesor sea  $\delta$ .



Como puede notarse, la expresion (28) responde perfectamente a los casos límite, lo cual hace razonable pensar que en las regiones intermedias de los parámetros  $\alpha$  y  $r_{12}$  también se comportará en concordancia con el estado físico del sistema.

Ahora bien, recuérdese que el objetivo de la sección anterior y la presente era tratar de encontrar un tratamiento teórico que permitiera separar explícitamente los efectos de interfase y los de degradación de energía acústica en el interior de la muestra. Considerando lo anterior y dado que lo que puede ser determinado experimentalmente es

$$I_{12} + R$$

además de

$$I_{12} - R$$

puesto que lo único que con certeza puede evaluarse en el patrón estacionario generado en el sistema son las amplitudes máxima y mínima de presión, se procedera entonces a determinar las expresiones teóricas para estas dos cantidades y para el cociente

$$\frac{I_{12} + R}{I_{12} - R} \quad \dots(29)$$

Así, utilizando la fórmula (28) se encuentra que

$$I_{12} + R = [(1+e^{-2\alpha\delta})(1+S_a)/(1+S_a e^{-2\alpha\delta})] I_{12}$$

por lo tanto

$$I_{12} + R = [Q_a(1+e^{-2\alpha\delta})/(1+S_a e^{-2\alpha\delta})] I_{12}$$

Por otra parte

$$I_{12} - R = [(1-e^{-2\alpha\delta})(1-S_a)/(1+S_a e^{-2\alpha\delta})] I_{12}$$

lo cual puede escribirse como

$$I_{12} - R = [(2-Q_a)(1-e^{-2\alpha\delta})/(1+S_a e^{-2\alpha\delta})] I_{12}$$

entonces el cociente dado por la expresión (29) se convierte en

$$\frac{I_{12} + R}{I_{12} - R} = Q_a (1+e^{-2\alpha\delta}) / (2-Q_a) (1-e^{-2\alpha\delta}) \quad \dots (30)$$

Ahora bien,  $2-Q_a = Q_b = 2r_{21} / (r_{21} + 1) = 2 / (r_{12} + 1)$ , de donde

$$Q_a / Q_b = r_{12}$$

Por lo tanto (30) resulta

$$\frac{I_{12} + R}{I_{12} - R} = r_{12} [(1+e^{-2\alpha\delta}) / (1-e^{-2\alpha\delta})] \quad \dots (31)$$

Como puede observarse este último cociente esta determinado por dos partes:

Una,  $r_{12}$ , que representa el efecto de interfase y otra, expresada en terminos del cociente  $(1+e^{-2\alpha\delta}) / (1-e^{-2\alpha\delta})$ , que representa el efecto de degradación de energía acústica dentro del material. Sin embargo puesto que experimentalmente sólo pueden ser determinados  $\delta$  y el cociente dado por la expresión (29) entonces en el caso de (31) se tiene una sola ecuación con dos incógnitas, ninguna de las cuales puede ser determinada explícitamente y por ello no es posible evaluar  $r_{12}$  ni  $\alpha$  a partir de ella.

La conclusión que surge en forma inmediata de lo establecido en las secciones 1.3A, 1.3B y 1.3C es que por medio del Método Tradicional sólo es posible obtener un coeficiente de absorción mediante el cual no puede establecerse que parte de la energía que incide sobre una muestra es reflejada en la interfase y que parte es degradada en el interior de ella. Por lo tanto no es posible caracterizar de manera única al material que constituye dicha muestra. Para lograr esto último será necesario proponer un nuevo método cuya descripción se hace en la sección 1.4.

### 1.4 APARATOS DE ONDAS ESTACIONARIAS - METODO DIFERENCIAL.

Continuando con la idea de caracterizar el comportamiento que presenta un cierto material en el terreno de la absorción acústica, lo que se pretende en esta sección es proponer y evaluar teóricamente un nuevo método con el cual sea posible obtener la información deseada.

El método aludido se denominará en este trabajo "Método Diferencial" y sus características son las que a continuación se detallan:

Se trata ahora de un nuevo sistema cuya configuración se presenta esquemáticamente en la siguiente figura

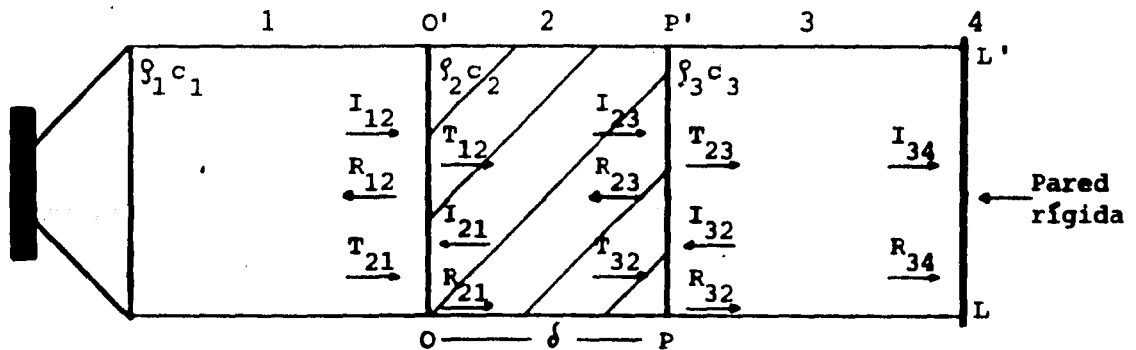


Fig. 4

Ahora bien, se supone que sobre el mencionado sistema imperan las siguientes condiciones:

- La fuente sonora genera ondas planas que no experimentan reflexiones en las paredes laterales del tubo.
- La pared que constituye el medio 4 es sumamente rígida comparada con el medio 3, esto quiere decir que  $r_{34} \rightarrow \infty$ , lo cual implica una condición de reflexión total, por lo tanto  $I_{34} = R_{34}$ .

- c) Los medios 1 y 3 están constituidos por aire, de donde  $\rho_1 = \rho_3$   
 y  $c_1 = c_3$
- d) La única onda que incide sobre la frontera  $\overline{OO'}$  desde el medio 1 -  
 es aquella que tiene amplitud  $I_{12}$ , lo cual equivale a suponer que  
 la onda que tiene amplitud  $R = T_{21} + R_{12}$  no se refleja en la bocina  
 para volver a incidir sobre  $\overline{OO'}$  desde el medio 1.
- e) El medio 2, constituido por la muestra que se quiere caracterizar,  
 presenta un efecto de degradación de energía acústica en su interior  
 que origina una atenuación en la amplitud de la onda que viaja  
 a través de él. Dicha atenuación está determinada por un coeficiente  
 de la forma  $e^{-\alpha x'}$ , siendo  $x'$  la distancia recorrida por la  
 onda dentro de la muestra y  $\alpha$  el factor de amortiguamiento interno.

Una vez establecido lo anterior puede analizarse la forma en la que se genera el patrón representado en la figura 4.

Lo que se tiene es una onda de amplitud  $I_{12}$  que incide sobre  $\overline{OO'}$  desde el medio 1, dicha onda es en parte reflejada con amplitud  $R_{12}$  y en parte transmitida con amplitud  $T_{12}$ . Esta última viajará a lo largo del medio 2 para incidir sobre  $\overline{PP'}$  con amplitud  $e^{-\alpha \delta} T_{12}$ . Sobre la frontera  $\overline{PP'}$  incide desde el medio 2 una onda cuya amplitud será  $I_{23}$  y que en parte estará formada por la onda cuya amplitud es  $e^{-\alpha \delta} T_{12}$ ; la onda cuya amplitud es  $I_{23}$  se reflejará en parte con amplitud  $R_{23}$  para finalmente incidir sobre  $\overline{OO'}$  desde 2 con amplitud  $e^{-\alpha \delta} I_{21}$ , también  $I_{23}$  se transmitirá en parte como  $T_{23}$  para incidir sobre  $\overline{LL'}$  y formar parte de la onda cuya amplitud es  $I_{34}$  que será reflejada totalmente con amplitud  $R_{34}$  para incidir sobre  $\overline{PP'}$  desde 3 con amplitud  $I_{32}$ , parte de ella se reflejará para volver a incidir con amplitud  $R_{32}$  sobre  $\overline{LL'}$  y formar, junto con la onda que tiene amplitud  $T_{23}$ , la onda de amplitud  $I_{34}$ . A su vez, parte de  $I_{32}$  será transmitida a 2 con amplitud  $T_{32}$  y viajará a lo largo de 2 para incidir sobre  $\overline{OO'}$  con amplitud  $e^{-\alpha \delta} T_{32}$ , uniéndose ahí con la onda de amplitud  $e^{-\alpha \delta} R_{23}$  para formar la onda que incide sobre  $\overline{OO'}$  con amplitud  $I_{21}$ . También esta vez parte de  $I_{21}$  será reflejada con amplitud  $R_{21}$  y viajará a lo largo de 2 para incidir con amplitud  $e^{-\alpha \delta} R_{21}$  sobre  $\overline{PP'}$ .

junto con la onda que tiene amplitud  $e^{-\alpha \delta} T_{12}$  para formar la onda de amplitud  $I_{23}$ . La otra parte de  $I_{21}$  será transmitida con amplitud  $T_{21}$  y se unirá con la onda de amplitud  $R_{12}$  para formar  $R$ . Esta es la forma en que se genera el patrón de ondas estacionarias dentro del tubo.

Por otra parte, para poder describir el proceso anterior, se ha supuesto además que ya ha finalizado el estado transitorio y lo que se presenta en la figura 4 así como la descripción anterior son únicamente el esquema simplificado de las ondas viajeras y la forma en que interactúan para dar origen al patrón estacionario.

El siguiente paso es determinar las relaciones que existan entre las amplitudes de las distintas ondas que generan el patrón. El método es el utilizado en las secciones anteriores y es el mismo que se usa para el análisis de líneas de transmisión. De hecho la descripción anterior está basada en dicho método.

Es así que se encuentran las siguientes relaciones primarias:

$$\begin{array}{l} \frac{R_{12}}{I_{12}} = \frac{r_{12}^{-1}}{r_{12}^{+1}} = S_a \quad \left| \quad \frac{R_{21}}{I_{21}} = \frac{r_{21}^{-1}}{r_{21}^{+1}} = S_b \quad \left| \quad \frac{R_{23}}{I_{23}} = \frac{r_{23}^{-1}}{r_{23}^{+1}} = S_c \quad \left| \quad \frac{R_{32}}{I_{32}} = \frac{r_{32}^{-1}}{r_{32}^{+1}} = S_d \quad \left| \quad \begin{array}{l} I_{34} = R_{34} \\ I_{43} = R_{43} \end{array} \right. \\ \frac{T_{12}}{I_{12}} = \frac{2r_{12}}{r_{12}^{+1}} = Q_a \quad \left| \quad \frac{T_{21}}{I_{21}} = \frac{2r_{21}}{r_{21}^{+1}} = Q_b \quad \left| \quad \frac{T_{23}}{I_{23}} = \frac{2r_{23}}{r_{23}^{+1}} = Q_c \quad \left| \quad \frac{T_{32}}{I_{32}} = \frac{2r_{32}}{r_{32}^{+1}} = Q_d \quad \left| \quad \end{array} \right. \right. \right. \end{array}$$

Además

$$r_{12} = r_{32} = (1/r_{21}) = (1/r_{23})$$

Por otra parte

i)  $R_{12} = S_a I_{12} = (S_a / Q_a) T_{12}$

ii)  $T_{12} = Q_a I_{12} = (Q_a / S_a) R_{12}$

iii)  $I_{21} = e^{-\alpha \delta} T_{32} + e^{-\alpha \delta} R_{23}$

$$\text{iv) } R_{21} = S_b I_{21} = S_b e^{-\alpha \delta} T_{32} + e^{-\alpha \delta} R_{23} = (S_b/Q_b) T_{21}$$

$$\text{v) } T_{21} = Q_b I_{21} = Q_b e^{-\alpha \delta} T_{32} + Q_b e^{-\alpha \delta} R_{23} = (Q_b/S_b) R_{21}$$

$$\text{vi) } I_{23} = e^{-\alpha \delta} T_{12} + e^{-\alpha \delta} R_{21}$$

$$\text{vii) } R_{23} = S_c I_{23} = S_c e^{-\alpha \delta} T_{12} + S_c e^{-\alpha \delta} R_{21} = (S_c/Q_c) T_{23}$$

$$\text{viii) } T_{23} = Q_c I_{23} = Q_c e^{-\alpha \delta} T_{12} + Q_c e^{-\alpha \delta} R_{21} = (Q_c/S_c) R_{23}$$

$$\text{ix) } I_{32} = R_{34} = I_{34} = T_{23} + R_{32}$$

$$\text{x) } R_{32} = S_d I_{32} = S_d T_{23} + S_d R_{32} = S_d R_{34} = S_d I_{34} = (S_d/Q_d) T_{32}$$

$$\text{xi) } T_{32} = Q_d R_{34} = Q_d I_{34} = Q_d I_{32} = Q_d T_{23} + Q_d R_{32} = (Q_d/S_d) R_{32}$$

$$\text{xii) } I_{34} = R_{34} = T_{23} + R_{32}$$

Entonces la idea es obtener  $T_{21} + R_{12}$  en términos de  $I_{12}$ . El caso de  $R_{12}$  es inmediato por lo tanto se analizará  $T_{21}$ .

Se tiene

$$T_{21} = Q_b e^{-\alpha \delta} T_{32} + Q_b e^{-\alpha \delta} R_{23} \quad \dots (32)$$

Ahora bien

$$T_{32} = Q_d T_{23} + Q_d R_{32}$$

Pero

$$T_{32} = (Q_d Q_c / S_c) R_{23} + (S_d Q_d / Q_d) T_{32}$$

así

$$T_{32} - S_d T_{32} = (Q_d Q_c / S_c) R_{23}$$

entonces

$$T_{32} = (1/1-S_d) (Q_d Q_c / S_c) R_{23}$$

Pero

$$1 - S_d = 2 - Q_a = Q_c$$

finalmente

$$T_{32} = (Q_d / S_c) R_{23} \quad \dots (33)$$

Así, (32) resulta

$$T_{21} = Q_b (Q_d / S_c) e^{-\alpha \delta} R_{23} + Q_b e^{-\alpha \delta} R_{23}$$

Factorizando

$$T_{21} = Q_b [(Q_d + S_c) / S_c] e^{-\alpha \delta} R_{23}$$

Pero

$$Q_d + S_c = Q_a + 1 - Q_a = 1$$

entonces

$$T_{21} = (Q_b / S_c) e^{-\alpha \delta} R_{23} \quad \dots (34)$$

Ahora bien, para  $R_{23}$  se encuentra que

$$R_{23} = S_c e^{-\alpha \delta} T_{12} + S_c e^{-\alpha \delta} R_{21}$$

Pero, de (ii) y (iv), se tiene

$$R_{23} = S_c Q_a e^{-\alpha \delta} I_{12} + (S_c S_b / Q_b) e^{-\alpha \delta} T_{21}$$

Entonces (34) se convierte en

$$T_{21} = Q_a Q_b e^{-2\alpha\delta} I_{12} + S_b e^{-2\alpha\delta} T_{21}$$

de donde

$$T_{21} - S_b e^{-2\alpha\delta} T_{21} = Q_a Q_b e^{-2\alpha\delta} I_{12}$$

Finalmente

$$T_{21} = (Q_a Q_b e^{-2\alpha\delta} / 1 - S_b e^{-2\alpha\delta}) I_{12} \quad \dots (35)$$

Así se procede a determinar R de la siguiente manera

$$R = R_{12} + T_{21}$$

entonces de (i) y (35) se encuentra

$$R = S_a I_{12} + (Q_a Q_b e^{-2\alpha\delta} / 1 - S_b e^{-2\alpha\delta}) I_{12}$$

lo cual es igual a

$$R = [(S_a + (Q_a Q_b - S_a S_b) e^{-2\alpha\delta}) / (1 - S_b e^{-2\alpha\delta})] I_{12}$$

Pero obsérvese que esta expresión es la misma que (27), la cual finalmente se simplificó como

$$R = [(S_a + e^{-2\alpha\delta}) / (1 + S_a e^{-2\alpha\delta})] I_{12} \quad \dots (36)$$

Ahora bien, la anterior expresión no requiere de comprobarse en los casos límite puesto que eso ya fué hecho en la sección 1.3C - ya que (36) es igual a (27).

En verdad no es sorprendente esta similitud puesto que al ser rífgida la pared 4, toda la energía que se transmite desde el medio 3



hacia ella debe regresar nuevamente al medio 3. Así, las condiciones realmente no cambian respecto al Método Tradicional. La ventaja real del Método Diferencial estriba en que permite conocer la energía -- que se transmite a través del medio 3 y que será evaluada a continuación.

Lo que se desea encontrar es

$$T = T_{23} + R_{32} \quad \dots (37)$$

Se tiene que

$$R_{32} = (S_d/Q_d)T_{32}$$

y de (33) que

$$T_{32} = (Q_d/S_c)R_{23}$$

por lo tanto

$$R_{32} = (S_d/S_c)R_{23}$$

Por otra parte de (vii) se tiene

$$R_{23} = (S_c/Q_c)T_{23}$$

Por lo tanto

$$R_{32} = (S_d/Q_c)T_{23}$$

Así (37) se convierte en

$$T = T_{23} + (S_d/Q_c)T_{23} = [(Q_c + S_d)/Q_c] T_{23}$$

pero

$$Q_c + S_d = 2 - Q_a + Q_a - 1 = 1$$

por lo tanto

$$T = (1/Q_c)T_{23} = I_{23} \quad \dots (38)$$

Ahora bien,

$$I_{23} = e^{-\alpha\delta} T_{12} + e^{-\alpha\delta} R_{21}$$

pero de (iv)

$$R_{21} = (S_b/Q_b)T_{21}$$

y de (35)

$$T_{21} = (Q_a Q_b e^{-2\alpha\delta} / 1 - S_b e^{-2\alpha\delta}) I_{12}$$

entonces

$$R_{21} = (Q_a S_b e^{-2\alpha\delta} / 1 - S_b e^{-2\alpha\delta}) I_{12}$$

de donde

$$I_{23} = e^{-\alpha\delta} T_{12} + (Q_a S_b e^{-3\alpha\delta} / 1 - S_b e^{-2\alpha\delta}) I_{12}$$

Así,

$$I_{23} = Q_a e^{-\alpha\delta} I_{12} + (Q_a S_b e^{-3\alpha\delta} / 1 - S_b e^{-2\alpha\delta}) I_{12}$$

factorizando

$$I_{23} = Q_a e^{-\alpha\delta} [1 + (S_b e^{-2\alpha\delta} / 1 - S_b e^{-2\alpha\delta})] I_{12}$$

simplificando

$$I_{23} = (Q_a e^{-\alpha\delta} / 1 - S_b e^{-2\alpha\delta}) I_{12}$$

Por lo tanto, de (38)

$$T = (Q_a e^{-\alpha \delta} / (1 - S_b e^{-2\alpha \delta})) I_{12} \quad \dots (39)$$

Ahora bien, el comportamiento en los casos límite es el siguiente:

a)  $\delta \rightarrow \infty$ , en este caso (38) se convierte en

$$T = (0/1) I_{12} = 0$$

Lo cual es correcto.

b)  $\delta \rightarrow 0$ ; entonces se tiene

$$T = [Q_a / (1 - S_b)] I_{12}$$

pero  $1 - S_b = Q_a$ , así

$$T = I_{12}$$

lo cual concuerda con lo esperado

c)  $r_{12} = 1$ ; para ello antes hay que expresar (39) en términos de  $r_{12}$  de la siguiente manera

$$T = \frac{[2r_{12} / (r_{12} + 1)] e^{-\alpha \delta}}{1 - [(1 - r_{12}) / (r_{12} + 1)] e^{-2\alpha \delta}} I_{12} \quad \dots (40)$$

así, para  $r_{12} = 1$  se encuentra

$$T = e^{-\alpha \delta} I_{12}$$

lo cual coincide puesto que el efecto de interfase desaparece y sólo resta el efecto de amortiguamiento en la forma  $e^{-\alpha \delta}$ .

d)  $r_{12} \rightarrow \infty$ .

En este caso la condición de frontera debe tomarse directamente sobre la interfase  $\overline{OO'}$  y recuérdese que entonces  $R = I_{12}$ , por lo --

tanto no hay transmisión, es decir, en el límite cuando  $r_{12} \rightarrow \infty$ ,  $I_{12} \rightarrow 0$  en la expresión (40), por lo tanto

$$T = 0$$

lo cual también concuerda con lo esperado.

Ahora bien, para separar los efectos de interfase de los de degradación de energía considérense los máximos de las ondas a cada lado de la muestra. El primero de ellos será

$$M_1 = I_{12} + R = [1 + (S_a + e^{-2\alpha\delta}) / (1 + S_a e^{-2\alpha\delta})] I_{12}$$

entonces, considerando que  $1 + S_a = Q_a$  se encuentra

$$M_1 = [Q_a (1 + e^{-2\alpha\delta}) / (1 + S_a e^{-2\alpha\delta})] I_{12} \quad \dots (41)$$

El segundo máximo estará dado por

$$M_2 = T + R_{34}$$

pero

$$R_{34} = I_{34} = T_{23} + R_{32} = T$$

Así

$$M_2 = 2T = (2Q_a e^{-\alpha\delta} / (1 - S_b e^{-2\alpha\delta})) I_{12}$$

pero obsérvese que  $-S_b = S_a$ , entonces

$$M_2 = (2Q_a e^{-\alpha\delta} / (1 + S_a e^{-2\alpha\delta})) I_{12} \quad \dots (42)$$

Ahora bien, tomando el cociente de (41) y (42) se encuentra que

$$\frac{M_1}{M_2} = \frac{Q_a (1 + e^{-2\alpha\delta}) / (1 + S_a e^{-2\alpha\delta})}{2Q_a e^{-\alpha\delta} / (1 + S_a e^{-2\alpha\delta})} \frac{I_{12}}{I_{12}}$$

entonces

$$\frac{M_1}{M_2} = \frac{1+e^{-2\alpha\delta}}{2e^{-\alpha\delta}}$$

lo cual puede escribirse como

$$\frac{M_1}{M_2} = \frac{e^{\alpha\delta} + e^{-\alpha\delta}}{2} \quad \dots (43)$$

Nótese que el segundo miembro de (43) no es otra cosa que

$$\cosh (\alpha \delta )$$

entonces

$$\frac{M_1}{M_2} = \cosh (\alpha \delta ) \quad \dots (44)$$

Por otra parte se tiene que  $M_1$  y  $M_2$  pueden ser determinados experimentalmente. Llámese a su cociente  $\Omega$  y como también se conoce  $\delta$  para cada muestra se tiene que

$$\alpha = \frac{\text{arc cosh } \Omega}{\delta} \quad \dots (45)$$

Como puede verse, con este método si es posible separar los efectos de interfase y degradación de energía, pudiendo así determinar el factor de amortiguamiento interno  $\alpha$  y caracterizar el material a través de él.

Además ahora es muy simple determinar que cantidad de energía acústica se ha degradado dentro de la muestra puesto que si las cámaras que contienen los medios 1 y 3 son idénticas, entonces la diferencia de energía que exista entre la onda estacionaria del medio 1 y la del medio 3 será sencillamente la energía que se degradó en el in

terior de la muestra, de donde el coeficiente de absorción en términos de la energía será

$$A = 1 - \frac{M_2^2}{M_1^2} \quad \dots (46)$$

lo cual es inmediato de determinar. Por otra parte conociendo  $\alpha$  y  $\delta$  se tiene también

$$A = 1 - [1/\cosh^2(\alpha \delta)]$$

que es una expresión equivalente a (46).

Cabe aclarar que el anterior tratamiento teórico se ha hecho considerando una frecuencia particular  $\nu$ , que se mantiene constante durante todo el proceso descrito de manera que es natural pensar que para cada frecuencia se obtendrá una  $\alpha$  distinta, así como se obtiene una  $\alpha$  distinta para cada  $\delta$ , resultando así, que  $\alpha$  es una función de dos variables:  $\delta$  y  $\nu$ .

Establecido lo anterior es necesario pasar al terreno experimental para verificar la concordancia entre la teoría y la realidad física y comprobar que es posible predecir el comportamiento de una muestra en particular por medio de este método.

## CAPITULO 2

### DESARROLLO EXPERIMENTAL.

## GENERALIDADES.

El presente capítulo se divide fundamentalmente en tres secciones. En la primera parte se describe el trabajo experimental y se incluye la manera en la cual fué seleccionado, intalado y calibrado el equipo experimental, así como la determinación del conjunto de -- frecuencias de trabajo para el aparato de ondas estacionarias. Tam-- bién se describe la forma en la que se llevó a cabo la obtención de datos con dicho aparato.

En la segunda parte se presenta el tratamiento de los datos - obtenidos y comprende las fórmulas con las cuales se obtuvieron los distintos resultados, también comprende un conjunto de tablas donde se muestran los datos y resultados encontrados.

El capítulo concluye con una sección que contiene el trabajo hecho para predecir el comportamiento de dos muestras de un material en particular e incluye los datos y los resultados encontrados.



## 2.1 CONDICIONES GENERALES DEL TRABAJO EXPERIMENTAL EN LOS METODOS DE ONDAS ESTACIONARIAS.

El objeto de esta sección es describir de manera general los dispositivos utilizados para evaluar coeficientes de absorción acústica por medio de los métodos de ondas estacionarias, así como las condiciones de trabajo que deben satisfacer dichos dispositivos.

El aparato de ondas estacionarias es, en esencia, un tubo cerrado en un extremo por medio de una pared rígida y en el otro extremo por una fuente sonora que produce ondas planas, de tal manera que adentro se genera un patrón de ondas estacionarias. La figura 5 representa, de manera esquemática dicho aparato.

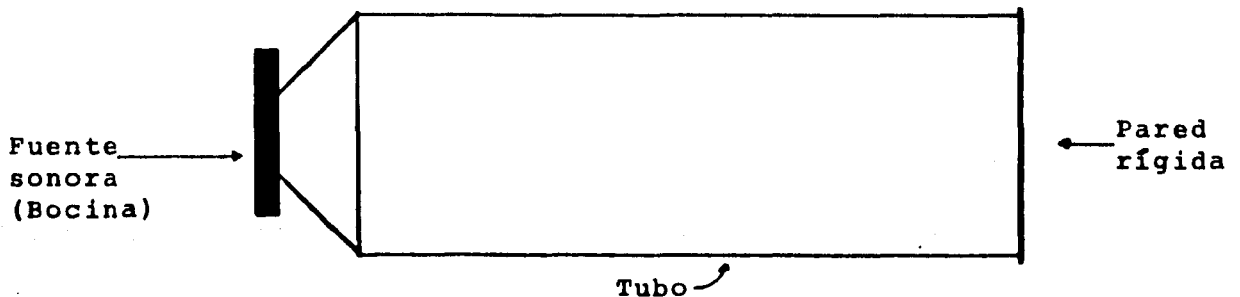


Fig. 5

Cabe hacer notar que es sumamente importante contar con un patrón de ondas estacionarias dentro del dispositivo. Las razones de esto y la forma en que es posible obtener dicho patrón son explicadas con detalle en la sección 2.2. Dentro de la misma sección se especifican también cuales son los límites superior e inferior para las frecuencias de trabajo en el aparato de ondas estacionarias.

Respecto a la fuente sonora, existen varias formas de posicio  
narla en el aparato. En algunos casos se utiliza una bocina situada  
en un baffle y unida al tubo por medio de otro tubo que actúa como lí  
nea de transmisión. En otros casos se instala directamente sobre el  
tubo. La forma en que se dispuso para el presente trabajo fué la úl-  
tima con la particularidad de que también se utilizó un baffle para -  
soportarla y unirla al tubo y para lograr una mejor unión entre la -  
bocina y el tubo, así como para asegurar un mejor direccionamiento -  
de las ondas al garantizar que la bocina estuviera correctamente ali-  
neada con el tubo.

Son varios los parámetros que pueden medirse directamente en  
el aparato de ondas estacionarias. La elección de ellos depende del  
método utilizado y en las secciones 2.4 y 2.5 se analizará la razón  
de dicha elección, basta decir por el momento que los dos parámetros  
que primeramente pueden determinarse son las amplitudes correspondien-  
tes a los antinodos y a los nodos que presenta el patrón estaciona-  
rio dentro del tubo. Ahora bien, si al patrón estacionario se le vi-  
sualiza como la interacción de dos ondas, una que viaja desde la fuen  
te a la pared rígida y otra que viaja en el sentido inverso, enton-  
ces en ciertos métodos puede ser importante medir el desfaseamiento -  
entre esas dos ondas y ese resulta ser el tercer parámetro que se mi  
de directamente.

Para efectuar la medición de los parámetros antes mencionados  
se utilizan diversos tipos de transductores que van desde una punta  
de prueba que transmite la señal en forma de onda de presión a un mi  
crófono situado en el exterior del aparato, hasta las pastillas uti-  
lizadas en los tocadiscos pasando por diversos tipos de micrófonos -  
que se utilizan en el interior del tubo. Todos estos transductores -  
se colocan de tal manera que las mediciones tengan lugar sobre el --  
eje de simetría del tubo. La elección de los transductores utiliza-  
dos y su evaluación en función de las características requeridas en  
el presente trabajo se exponen en la sección 2.3.

Ahora bien, respecto a los métodos para utilizar el aparato -

de ondas estacionarias, en este trabajo se les considera divididos - en dos grupos. El primero de ellos es aquel que hasta ahora ha recibido el nombre de Método Tradicional y que se distingue principalmente por que la muestra se coloca pegada a la pared rígida o ligeramente separada de ella y porque las mediciones se efectúan en la cámara situada entre la muestra y la bocina, determinando la amplitud en el antinodo y el nodo de la onda estacionaria y utilizando las relaciones de la sección 1.3A para determinar  $A'$ . La forma en que se hace lo anterior y los resultados obtenidos se presentan con detalle en la sección 2.4. Las figuras 6(a) y 6(b) muestran esquemáticamente las dos modalidades del método tradicional

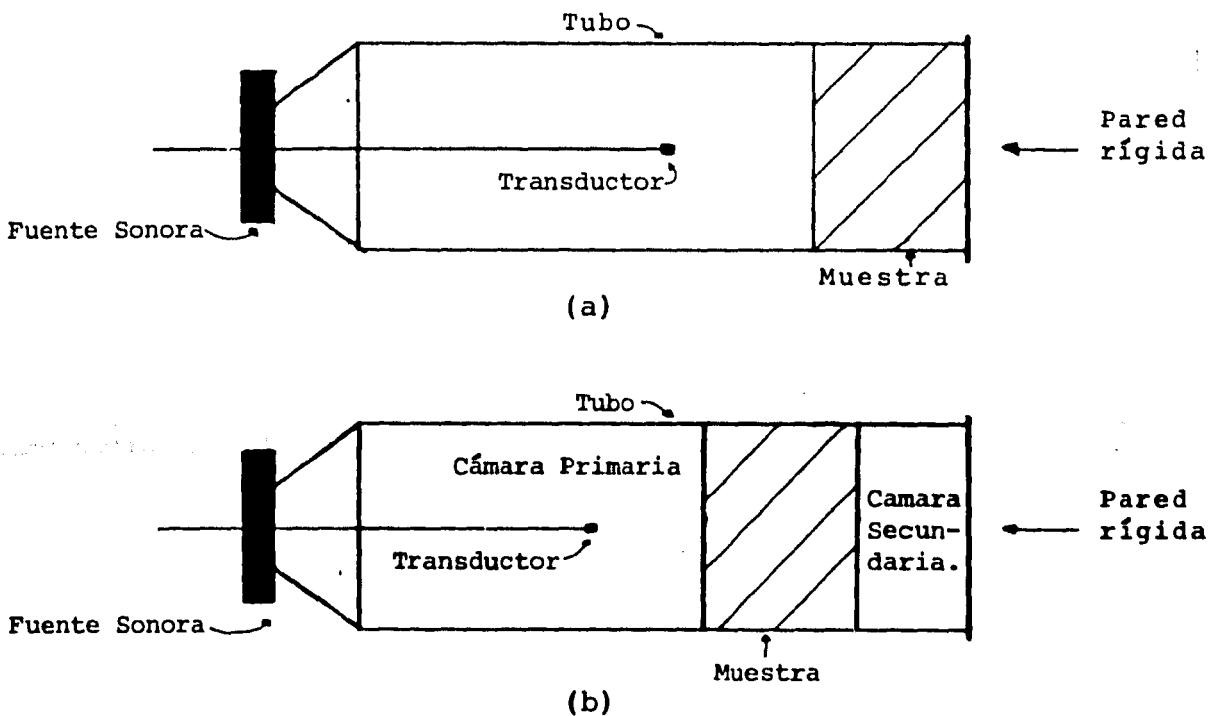


Fig. 6

Si bien en este trabajo sólo se utilizó la modalidad correspondiente a la figura 6(a), cabe decir que la modalidad de la figura 6(b) se utiliza para medir con más facilidad el desfaseamiento en

en el caso en que se evalúen muestras delgadas. La descripción completa del método y el trabajo realizado con él se describen en la sección 2.4. Por otra parte, el segundo grupo consiste en lo que en este trabajo se conoce como Método Diferencial. Este método se distingue del Tradicional en que ahora la muestra se coloca a la mitad del tubo, es decir, a igual distancia de la pared rígida que de la bocina, utilizando en este caso dos transductores en lugar de uno, situados a ambos lados de la muestra y midiendo con ellos exclusivamente las amplitudes de los antinodos del patrón estacionario que se forma a cada lado de la muestra para utilizar después las relaciones encontradas al final de la sección 1.4 con objeto de determinar  $\alpha$  y  $A$ . A continuación se muestra un diagrama esquemático que ilustra lo anterior.

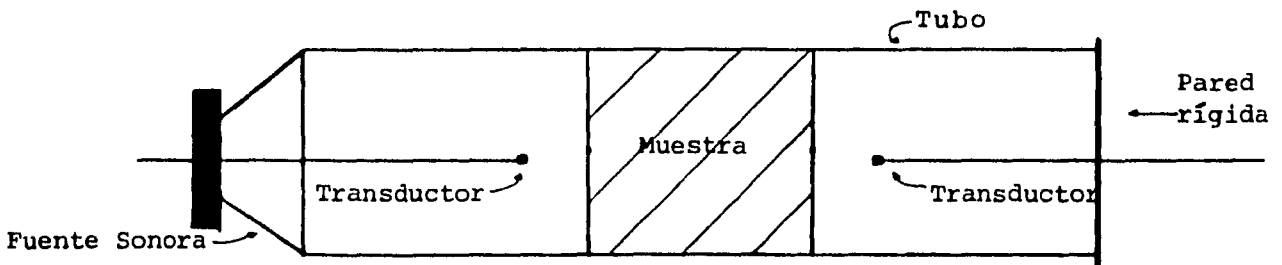


Fig. 7

En la sección 2.5 se hace una exposición más amplia del Método Diferencial, sus ventajas y la manera en la que se utilizó.

Para terminar esta sección, es conveniente observar que el equipo periférico utilizado puede variar mucho. A lo largo del capítulo se especificarán sus características y las razones para su elección.

## 2.2 DETERMINACION DEL CONJUNTO DE FRECUENCIAS DE TRABAJO.

Una condición indispensable para poder aplicar los desarrollos teóricos presentados en las secciones 1.3 y 1.4 es la existencia de ondas estacionarias planas en el aparato de ondas estacionarias.

Debido a la forma en que se generan las ondas en la fuente sonora es posible asegurar que éstas sean planas en cualquier lugar dentro del tubo donde no se presenten efectos de distorsión. Es así que podrá tenerse la certeza de tratar con ondas planas siempre y cuando se tenga cuidado de realizar las mediciones en cualquier lugar dentro del tubo que no sea la vecindad de la bocina, de la muestra o de la pared rígida.

Ahora bien, asegurar la existencia de un patrón estacionario es un problema que requiere más atención. Para empezar recuérdese -- que dentro de un tubo cerrado existirán ondas estacionarias siempre que la longitud del tubo corresponda a un múltiplo entero de la longitud de onda de la señal generada dentro de él. Así, como en el presente caso la señal en la bocina se creaba mediante un generador en el cual lo que se controlaba era la frecuencia, entonces, conociendo la longitud del tubo, la frecuencia podría ser determinada calculándola por medio de

$$\nu = \frac{c}{\lambda} \quad \dots (47)$$

donde  $\lambda$  sería un submúltiplo de la longitud del tubo y  $c$  la velocidad del sonido en el aire.

Sin embargo, el valor de  $c$  puede cambiar considerablemente -- con factores como la densidad, humedad, temperatura y aún cuando existen tablas para calcular esa variación el valor obtenido resulta ser sólo aproximado.

Es por lo anterior que se decidió utilizar otro método, apoyado en el anterior, para determinar las frecuencias que darían lugar a patrones estacionarios dentro del tubo.

Este nuevo método considera que, debido al hecho de utilizar un micrófono como transductor, lo que está registrando son cambios en la presión dentro del tubo que después son convertidos a una señal eléctrica alterna. Si tal es el caso entonces se encuentra que existirá un patrón estacionario cuando la señal que registre el micrófono esté en fase con la señal que genera la bocina. Lo único que se supondrá es que esta última señal estará, a su vez, en fase con la señal alterna que se utiliza para excitar la bocina. Así el problema se reduce a encontrar las frecuencias para las cuales el desfaseamiento sea nulo. Existe todo un intervalo de frecuencias permisibles para trabajar con el aparato de ondas estacionarias, la determinación de los límites de este intervalo se discutirá más adelante, sin embargo, lo que cabe hacer notar en este momento es el hecho de que para no tener que buscar dentro de dicho intervalo, frecuencia a frecuencia, aquellos puntos donde el desfaseamiento es nulo resulta conveniente determinar, a través de la expresión (47) un conjunto de frecuencias aproximadas y hacer pequeñas variaciones en torno a ellas para determinar los puntos donde el desfaseamiento sea nulo.

Ahora bien, medir el desfaseamiento es un problema que puede resolverse sencillamente si para ello se utilizan las propiedades de las figuras de Lisajous.

Obsérvese que si la señal obtenida con el micrófono en combinación con la señal que excita la bocina (que se ha supuesto en fase con la que sale de la bocina) se registra por medio de un osciloscopio operando en el modo X-Y lo que se obtiene es una figura de Lisajous cuya forma dependerá de las relaciones de amplitud y fase de las dos señales antes mencionadas. Así, la figura de Lisajous se convierte en una línea recta cuya pendiente será positiva (independientemente de la relación de amplitudes) si el desfaseamiento es nulo, o cuya pendiente será negativa si el desfaseamiento es de  $180^\circ$ . Enton

ces lo que se hizo fué variar ligeramente la frecuencia alrededor de los valores determinados por medio de (47) hasta encontrar los puntos donde la figura de Lisajous correspondiente degeneraba en una línea recta de pendiente positiva.

Respecto a los límites del intervalo de frecuencias permisibles, se tiene que la mínima frecuencia será aquella que dé lugar a una -- longitud de onda tal, que el tubo contenga  $\frac{1}{2} \lambda$ , puesto que de otra manera no puede garantizarse el encontrar un nodo y un antinodo, sin embargo en la realidad se tiene que tanto en este caso como en el de la frecuencia que da lugar a una longitud de onda completa dentro -- del tubo lo que se encontró fué que los nodos o los antinodos coinci-- dían con la pared rígida o la bocina y la distorsión no permitía eva-- luar su amplitud correctamente, por lo tanto el límite inferior se -- escogió para aquella frecuencia con la cual la longitud del tubo equi-- valía exactamente a  $2 \lambda$ .

Por otra parte, en el caso de límite superior se encuentra que puede determinarse teóricamente<sup>4</sup> que en el tubo existirán solamente ondas planas siempre y cuando la longitud de onda cumpla con la si-- guiente condición:

$$\lambda = 1.7 D \quad \dots (48)$$

donde D es el diámetro del tubo. Así, en términos de (48) puede deter-- minarse el límite superior del intervalo de frecuencias de trabajo.

Con esto, el límite inferior para el conjunto de frecuencias de trabajo se determinó alrededor de 450 Hz y el límite superior es aproximadamente 1750 Hz. Los valores que finalmente se utilizaron -- fueron determinados experimentalmente por medio de las figuras de Li-- sajous.

Para encontrar los dos límites aludidos se hizo uso de las -- formulas (47) y (48) con  $D = 0.105 \text{ m}$  y  $c = 329.8 \text{ m/s}$ .

Establecido lo anterior se procedió a determinar experimental

mente el conjunto de frecuencias de trabajo para lo cual se utilizó un dispositivo como el que se muestra esquemáticamente en la figura 6(a).

Con dicho dispositivo se trabajó de la siguiente manera:

La señal alterna originada en el generador de audio frecuencia se amplificaba y se hacía llegar a la bocina que la convertía en una señal acústica. Paralelamente, la misma señal que se usaba para excitar a la bocina se hacía llegar a un osciloscopio que funcionaba en el modo de operación X-Y. La señal acústica generada en la bocina dentro del tubo se registraba por medio de un micrófono calibrado -- que contaba con un preamplificador acoplado. Dicho micrófono convertía la señal acústica en señal eléctrica alterna cuya intensidad era medida por medio de un decibelímetro conectado en paralelo al osciloscopio donde la señal del micrófono era registrada en combinación con la señal utilizada para excitar a la bocina y formar así una figura de Lisajous.

Una vez hecho lo anterior se deslizaba el micrófono dentro -- del tubo hasta encontrar en el decibelímetro un máximo en la lectura, lo cual implicaba la existencia de un antinodo. La razón por la cual se utilizaron los antinodos es que al tener señales con mayor intensidad el ruido recogido por el cableado y el micrófono dejan de constituir un problema.

Cabe aclarar que la señal era generada por una frecuencia determinada por la fórmula (47) y una vez encontrado el antinodo, se -- variaba ligeramente esa frecuencia hasta encontrar una figura de Lisajous que correspondiera a una línea recta. Si esta línea era de -- pendiente negativa entonces se deslizaba el micrófono hasta encontrar el antinodo consecutivo y se evitaba así ese desfase de 180°.

Por otra parte es conveniente señalar que el transistor del -- preamplificador acoplado al micrófono puede desfasar la señal 180°. Sin embargo esto no ocasiona ningún problema puesto que si dos señales están en fase y forman una figura de Lisajous que sea una línea recta de pendiente positiva, entonces, si una de las señales se des-



fasa  $180^\circ$ , lo único que ocurrirá es que la pendiente será negativa pero la figura continuará siendo una línea recta.

En la tabla 1 se muestran las frecuencias y longitudes de onda calculadas teóricamente así como las obtenidas de manera experimental.

Para el cálculo de los datos teóricos se utilizó un valor para la velocidad del sonido en el aire de

$$c = 329.8 \text{ m/seg}$$

y una longitud del tubo (cuyo submúltiplos corresponden a las longitudes de onda obtenidas teóricamente) de

$$L = 1.52 \text{ m}$$

$\lambda_t$ (m)	$\nu_t$ (Hz)	$\lambda_e \pm 0,5\%$	$\nu_e \pm 5\%$
0.760	434	0.735	452
0.507	651	0.488	675
0.380	868	0.392	845
0.304	1085	0.310	1050
0.253	1302	0.260	1270
0.217	1519	0.217	1520
0.190	1736	0.186	1755

Tabla 1

(Donde  $\lambda_t$  es la longitud de onda teórica,  $\nu_t$  la frecuencia teórica,  $\lambda_e$  la longitud de onda experimental y  $\nu_e$  la frecuencia teórica).

De esta manera se encuentra que el conjunto denominado  $\nu_e$  contiene las frecuencias que generan patrones estacionarios dentro del tubo y que se encuentran dentro de los límites que aseguran la existencia de ondas planas.

## 2.3 TRANSDUCTORES.

En el aparato de ondas estacionarias se requieren dos tipos de transductores. El primero es aquel destinado a convertir la señal eléctrica alterna proveniente del generador en una onda acústica plana cuyo objeto es originar un patrón estacionario dentro del tubo. El segundo tipo de transductor es aquel cuya finalidad es convertir la señal acústica dentro del tubo en una señal eléctrica alterna para ser registrada y evaluada en el decibelímetro o en el osciloscopio.

Respecto al primer tipo de transductores lo que se utilizó -- fué sencillamente una bocina de sección circular tal que su diámetro coincidía con el diámetro del tubo. Con este transductor es posible asegurar que fuera de la vecindad de la bocina se tendrían ondas planas dentro del tubo. Para excitarla en cualquiera de las frecuencias de trabajo se utilizó un voltaje alterno cuya amplitud se mantuvo -- constante a 200 mv(r.m.s.). La razón por la cual se eligió dicha amplitud consistió en que resultaba ser el máximo valor con el cual no se tenía distorsión de la señal en todo el conjunto de frecuencias de trabajo.

En cuanto al segundo tipo de transductores el problema no fué tan simple. Dadas las condiciones que imperaban dentro del tubo era necesario que contara con un cierto número de características.

La primera de ellas es que las dimensiones del transductor -- deberían ser pequeñas (cuando más 1 cm de diámetro por 1 cm de largo). Por otra parte se requería que fuera capaz de registrar pequeñas variaciones de presión y que una vez convertidas en una señal eléctrica, las amplificara por medio de un dispositivo contenido también en las dimensiones antes especificadas. Esto último se debe al hecho de que cuanto más intensa es la señal que manda el conjunto de transduc

tor y preamplificador, menor es el problema que ocasiona el ruido recogido por el cableado, el ruido generado por la bocina o el existente dentro del propio tubo.

El transductor más indicado para realizar la función descrita es un micrófono, sin embargo los micrófonos capaces de cumplir con las funciones especificadas no son comunes, en gran medida debido al tamaño requerido y al preamplificador acoplado. En vista de lo anterior se pensó que los micrófonos que vienen integrados a las grabadoras comerciales podrían servir en este caso. En efecto, las condiciones de tamaño del micrófono y amplitud de la señal fueron satisfechas por los micrófonos modelo 34-AL-25. Dichos micrófonos cuentan con un preamplificador acoplado compuesto por un transistor y dos resistencias.

El problema entonces fué que se desconocía la respuesta de estos micrófonos dentro del conjunto de frecuencias de trabajo y por ello fué necesario determinarlas en forma experimental por comparación con un micrófono calibrado cuya respuesta en función de la frecuencia era conocida.

Para la calibración se procedió de la siguiente manera:

- a) Dado que dentro del aparato de ondas estacionarias existen condiciones muy particulares y que sólo es permisible un reducido número de frecuencias para trabajar con él, se consideró que la calibración debería efectuarse dentro del mismo aparato y sólo para aquellas frecuencias comprendidas en el conjunto determinado en la sección 2.2. Por otra parte esta consideración redujo de manera muy significativa la cantidad de trabajo requerida para efectuar la calibración de los micrófonos.
- b) Puesto que se conocía la respuesta con respecto a la frecuencia del micrófono calibrado se procedió a determinar la respuesta de la bocina para el conjunto de frecuencias de trabajo con un voltaje constante de 200 mv (r.m.s.) para excitar la bocina.
- c) Una vez calibrada la bocina se le hizo funcionar en las mismas condiciones que en el inciso anterior y se registró la señal den-

tro del tubo con los micrófonos por calibrar, en las mismas condiciones que las existentes cuando se utilizó el micrófono calibrado.

- d) Los registros hechos con los micrófonos sin calibrar se compararon con aquellos correspondientes al micrófono calibrado y se obtuvieron los valores del factor de corrección ( $f_c$ ) para cada micrófono en cada frecuencia de trabajo. Los resultados se encuentran en la tabla 2.

Dichos factores de corrección fueron determinados como el cociente de la lectura obtenida con el micrófono calibrado entre la lectura hecha con el micrófono por calibrar.

Así, el verdadero valor de la intensidad de la onda dentro del tubo se evalúa multiplicando la lectura hecha con alguno de los micrófonos recientemente calibrados por el factor de corrección correspondiente.

Una vez que se dispuso de los transductores adecuados fué posible trabajar con el aparato de ondas estacionarias. Describir dicho trabajo es objeto de las siguientes secciones.

$\lambda$	$m_c \pm 2\%$	$m_1 \pm 2\%$	$m_2 \pm 2\%$	$m_3 \pm 2\%$	$f_1 \pm 5\%$	$f_2 \pm 5\%$	$f_3 \pm 5\%$
452	450	420	450	420	1.071	1.000	1.071
675	200	180	190	170	1.111	1.053	1.176
845	180	250	220	240	0.720	0.818	0.750
1050	190	280	255	300	0.679	0.745	0.633
1270	160	180	180	195	0.889	0.889	0.821
1520	124	140	132	128	0.886	0.939	0.969
1755	88	128	120	106	0.688	0.733	0.830

Tabla 2

Factor de corrección para los micrófonos  $m_1, m_2, m_3$  obtenido como

$$f_i = \frac{m_c}{m_i}$$

## 2.4 METODO TRADICIONAL.

Como se dijo en la sección 2.1, la principal característica de esta modalidad consiste en el hecho de que la muestra se coloca pegada a la pared rígida y en que los parámetros que se determinan experimentalmente son las amplitudes en el nodo y el antinodo de la onda estacionaria que se forma en la cámara comprendida entre la bocina y la pared rígida.

El arreglo experimental en este caso es el que se muestra esquemáticamente en la siguiente figura:

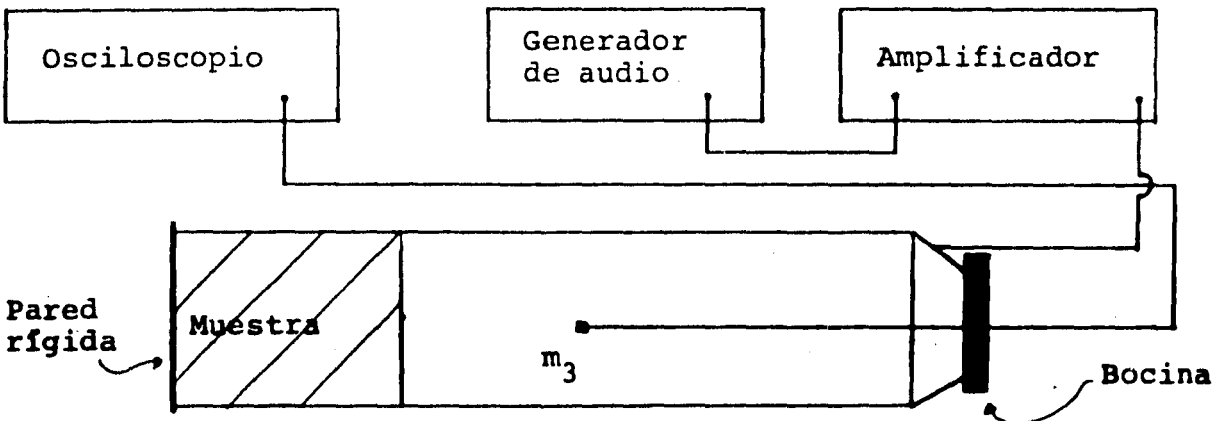


Fig. 9

La forma en la que se trabajó con dicho arreglo fué la siguiente:

La bocina era excitada por una señal senoidal cuya amplitud era la misma que la utilizada en la calibración de los micrófonos. Dicha señal provenía del amplificador que, a su vez, la recibía del generador de audio.

La señal originada en la bocina daba lugar a un patrón esta--

cionario, entonces se procedía a deslizar el micrófono a lo largo del eje de simetría del tubo para encontrar las amplitudes de un nodo y un antinodo consecutivos, teniendo cuidado de no realizar las mediciones en la vecindad de la muestra o de la bocina. Las amplitudes buscadas eran evaluadas por medio del osciloscopio.

Se utilizaron nueve muestras de poliuretano cuyos espesores - eran de 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18 y 20 cm. Para cada muestra se - evaluaron las amplitudes de los nodos y antinodos generados en cada una de las frecuencias comprendidas en la tabla 1 en la columna co- rrespondiente a  $\nu_e$ . Los datos obtenidos de esta manera son presen- tados en la tabla 3.

Cabe hacer notar que las amplitudes encontradas en los nodos y los antinodos de la onda formada dentro del tubo fueron medidas - directamente en milivolts por medio del osciloscopio. La razón de - lo anterior es que un micrófono funciona generando un voltaje pro- porcional a la presión ejercida sobre su elemento sensible y, dado que al final se evaluaron cocientes no es necesario considerar ese factor de proporcionalidad entre la intensidad de la señal eléctri- ca alterna y la intensidad de la onda de presión.

$\gamma$	$\delta = 4 \text{ cm}$		$\delta = 6 \text{ cm}$		$\delta = 8 \text{ cm}$	
	$M \pm 2\%$	$m \pm 2\%$	$M \pm 2\%$	$m \pm 2\%$	$M \pm 2\%$	$m \pm 2\%$
452	400	50	340	92	230	150
675	164	21	180	80	150	92
845	142	32	112	72	210	88
1050	152	54	92	64	106	40
1270	104	54	64	34	62	24
1520	32	22	30	9	29	16
1755	32	20	32	13	32	19

$\gamma$	$\delta = 10 \text{ cm}$		$\delta = 12 \text{ cm}$		$\delta = 14 \text{ cm}$	
	$M \pm 2\%$	$m \pm 2\%$	$M \pm 2\%$	$m \pm 2\%$	$M \pm 2\%$	$m \pm 2\%$
452	200	140	220	150	230	160
675	150	80	170	100	160	88
845	170	78	150	68	124	64
1050	100	44	92	48	82	64
1270	60	36	60	42	64	44
1520	25	16	28	20	27	17
1755	40	22	44	25	36	23

$\gamma$	$\delta = 16 \text{ cm}$		$\delta = 18 \text{ cm}$		$\delta = 20 \text{ cm}$	
	$M \pm 2\%$	$m \pm 2\%$	$M \pm 2\%$	$m \pm 2\%$	$M \pm 2\%$	$m \pm 2\%$
452	220	120	230	120	230	110
675	190	84	180	92	200	120
845	120	72	110	72	120	72
1050	104	68	120	72	130	76
1270	76	44	64	40	58	38
1520	25	16	21	14	27	18
1755	34	20	31	20	37	27

Tabla 3

Amplitudes de los antinodos y los nodos determinadas mediante el Método Tradicional.

Acotaciones: M = Amplitud del antinodo ; m = amplitud del nodo



## 2.5 METODO DIFERENCIAL.

El objetivo fundamental de este proyecto lo constituye la idea de desarrollar un método más eficiente para medir coeficientes de absorción acústica. Como se vió en el capítulo uno, la modalidad que en este trabajo se ha denominado "Método Diferencial" satisface, en teoría, las condiciones requeridas. Es por ello que esta sección está dedicada al trabajo experimental realizado con el aparato de ondas estacionarias utilizando el Método Diferencial.

El aparato de ondas estacionarias no cambia, es decir se trata del mismo tubo cerrado en un lado por una fuente sonora y, en el otro lado por una pared rígida. La diferencia en este caso estriba en que la muestra es colocada a distancias iguales de la pared rígida y la bocina y que ahora, en lugar de utilizar un solo micrófono, se utilizan dos, uno a cada lado de la muestra. También se distingue del Método Tradicional en que no se miden las amplitudes de los nodos y los antinodos, sino solamente las amplitudes de los antinodos a cada lado de la muestra. Una imagen esquematizada del dispositivo experimental se presenta en la siguiente figura.

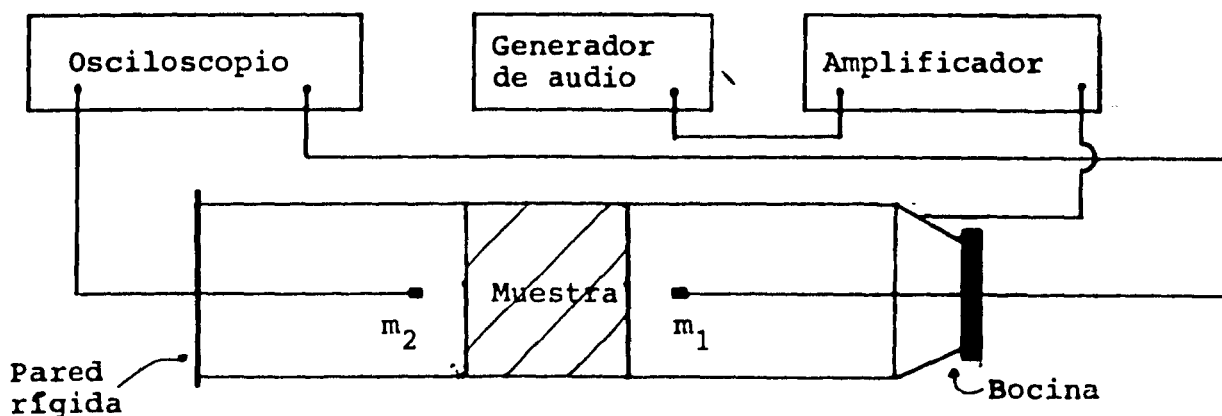


Fig. 10

Una vez que se dispuso del arreglo experimental fué posible - efectuar las mediciones en la forma que se describe a continuación.

El patrón estacionario fué generado dentro del tubo en la misma forma que en el caso del Método Tradicional descrito en la sección 2.4.

Establecido el patrón estacionario se determinó la amplitud - de los antinodos a cada lado de la muestra deslizando los micrófonos hasta obtener una lectura máxima en el osciloscopio.

Para este caso también fueron evaluadas las mismas nueve muestras de poliuretano que fueron mencionadas en la sección 2.4 para cada una de las frecuencias encontradas en la sección 2.2. Los datos - obtenidos se presentan en la tabla 4.

$\nu$	$\delta = 4 \text{ cm}$		$\delta = 6 \text{ cm}$		$\delta = 8 \text{ cm}$	
	$M_1^{\circ} \pm 2\%$	$M_2^{\circ} \pm 2\%$	$M_1^{\circ} \pm 2\%$	$M_2^{\circ} \pm 2\%$	$M_1^{\circ} \pm 2\%$	$M_2^{\circ} \pm 2\%$
452	375	335	390	310	365	220
675	230	164	270	180	265	124
845	114	69	118	63	130	53
1050	98	60	98	58	98	44
1270	88	58	76	52	76	44
1520	29	18	24	16	29	13
1755	30	19	31	24	29	17

$\nu$	$\delta = 10 \text{ cm}$		$\delta = 12 \text{ cm}$		$\delta = 14 \text{ cm}$	
	$M_1^{\circ} \pm 2\%$	$M_2^{\circ} \pm 2\%$	$M_1^{\circ} \pm 2\%$	$M_2^{\circ} \pm 2\%$	$M_1^{\circ} \pm 2\%$	$M_2^{\circ} \pm 2\%$
452	310	195	280	190	255	150
675	230	116	195	114	148	84
845	128	57	124	60	120	68
1050	92	46	102	55	98	58
1270	64	37.5	66	37.5	62	31
1520	24	14	25	19	28	12
1755	32	16	35	16.5	35.5	11

$\nu$	$\delta = 16 \text{ cm}$		$\delta = 18 \text{ cm}$		$\delta = 20 \text{ cm}$	
	$M_1^{\circ} \pm 2\%$	$M_2^{\circ} \pm 2\%$	$M_1^{\circ} \pm 2\%$	$M_2^{\circ} \pm 2\%$	$M_1^{\circ} \pm 2\%$	$M_2^{\circ} \pm 2\%$
452	230	128	260	106	210	76
675	144	60	140	47	144	36
845	128	48	128	46	124	33
1050	136	47	136	46	118	33
1270	73	28	78	25	80	15
1520	32	11	26	8	23	4
1755	37	10	35	9	32	5

Tabla 4

Amplitudes de los antinodos determinadas mediante el Método Diferencial.  
 Acotaciones:  $M_1^{\circ}$  = Amplitud del antinodo en la cámara adyacente a la bocina;  $M_2^{\circ}$  = Amplitud del antinodo en la cámara adyacente a la pared rígida.

## 2.6 TRATAMIENTO DE DATOS.

### 2.6A MÉTODO TRADICIONAL.

Utilizando este método fueron determinados los valores de la tabla 3, a partir de los cuales fueron encontrados los valores de  $n$  y  $A'$ , mencionados en la sección 1.3A, después de haber sido procesados de la siguiente manera:

De las fórmulas (15) y (16) de la sección 1.3A se encuentra que

$$n = \frac{P_{\max}}{P_{\min}}$$

además

$$A' = 1 - [(n - 1)/(n + 1)]^2 = 4[n + (1/n) + 2]$$

Ahora bien, obsérvese que en la tabla 3,  $M$  y  $m$  representan -- las amplitudes de los antinodos y los nodos de la onda estacionaria dentro del tubo, medidos en milivolts directamente del osciloscopio, pero como se dijo anteriormente estas medidas son proporcionales a las hechas en términos de la presión, por lo tanto

$$P_{\max} = hM \quad \dots (49a)$$

$$P_{\min} = hm \quad \dots (49b)$$

donde  $h$  es la constante de proporcionalidad.

Entonces, dado que la constante de proporcionalidad es la misma se obtiene

$$n = \frac{P_{\max}}{P_{\min}} = \frac{M}{m} \quad \dots (50)$$

y así puede evaluarse  $A'$  utilizando la expresión (16).

Los factores de corrección para el micrófono número 3 no fueron utilizados en este caso particular puesto que, al obtener  $n$ , se anulan mutuamente por tratarse de un cociente.

Cada uno de los datos que aparecen en la tabla 3 fueron tratados de esa manera y los resultados aparecen en la tabla 5.

$\nu$	$\delta = 4 \text{ cm}$		$\delta = 6 \text{ cm}$		$\delta = 8 \text{ cm}$	
	$n \pm 5\%$	$A' \pm 10\%$	$n \pm 5\%$	$A' \pm 10\%$	$n \pm 5\%$	$A' \pm 10\%$
452	8.00	0.39	3.70	0.67	1.53	0.98
675	7.81	0.40	2.25	0.85	1.63	0.94
845	4.44	0.60	1.56	0.95	2.39	0.83
1050	2.81	0.77	1.44	0.97	2.65	0.80
1270	1.93	0.90	1.88	0.91	2.58	0.80
1520	1.45	0.97	3.33	0.71	1.81	0.91
1755	1.60	0.95	2.46	0.82	1.68	0.94

$\nu$	$\delta = 10 \text{ cm}$		$\delta = 12 \text{ cm}$		$\delta = 14 \text{ cm}$	
	$n \pm 5\%$	$A' \pm 10\%$	$n \pm 5\%$	$A' \pm 10\%$	$n \pm 5\%$	$A' \pm 10\%$
452	1.43	0.97	1.47	0.96	1.44	0.97
675	1.88	0.91	1.70	0.93	1.82	0.91
845	2.18	0.86	2.21	0.86	1.94	0.90
1050	2.27	0.85	1.92	0.90	1.28	0.99
1270	1.67	0.94	1.43	0.97	1.45	0.96
1520	1.56	0.95	1.40	0.97	1.59	0.95
1755	1.82	0.91	1.76	0.92	1.57	0.95

$\nu$	$\delta = 16 \text{ cm}$		$\delta = 18 \text{ cm}$		$\delta = 20 \text{ cm}$	
	$n \pm 5\%$	$A' \pm 10\%$	$n \pm 5\%$	$A' \pm 10\%$	$n \pm 5\%$	$A' \pm 10\%$
452	1.83	0.91	1.92	0.90	2.09	0.88
675	2.26	0.85	1.96	0.90	1.67	0.94
845	1.67	0.94	1.53	0.91	1.67	0.94
1050	1.53	0.96	1.67	0.94	1.71	0.93
1270	1.73	0.93	1.60	0.95	1.53	0.96
1520	1.56	0.95	1.50	0.96	1.50	0.96
1755	1.70	0.93	1.55	0.95	1.37	0.98

Tabla 5

Parámetros acústicos de absorción determinados por medio del Método Diferencial.

## 2.6B METODO DIFERENCIAL.

Los datos correspondientes a la tabla 4 fueron procesados como se indica a continuación para obtener  $\Omega$ ,  $\alpha$  y A.

En la tabla 4 se tienen las amplitudes correspondientes a los antinodos, para cada  $\delta$  y cada frecuencia, expresados como  $M_1^0$  y  $M_2^0$ , los cuales están determinados directamente en milivolts.

Entonces, el primer paso es corregir estas lecturas multiplicándolas por los factores de corrección  $f_1$  y  $f_2$  para obtener las amplitudes verdaderas.

Así

$$M_1 = (M_1^0) (f_1)$$

$$M_2 = (M_2^0) (f_2)$$

Una vez hecho lo anterior se procede a determinar  $\Omega$  como el cociente de esas dos amplitudes y se obtiene

$$\Omega = \frac{M_1}{M_2}$$

A partir de  $\Omega$  se evalúa  $\alpha$  por medio de la fórmula (45) correspondiente a la sección 1.4 y se encuentra que

$$\alpha = \frac{\text{arc cosh } \Omega}{\delta}$$

Es decir, a partir de esta última expresión queda determinado el factor de amortiguamiento interno para cada espesor de las muestras y cada frecuencia de trabajo. Este factor de amortiguamiento interno conduce, a su vez, al conocimiento del coeficiente de absorción determinado mediante la siguiente expresión

$$A = 1 - [\cosh (\alpha \delta)]^{-2} \quad \dots (51)$$

que es equivalente a la expresión (46). Los resultados obtenidos de esta manera aparecen en la tabla 6. Se anexa también la tabla 7 que contiene los resultados referentes a  $\alpha$  como función de  $\nu$  y  $\delta$ .



$\delta = 4 \text{ cm}$					
$\nu$	$M_1 \pm 5\%$	$M_2 \pm 5\%$	$\Omega \pm 10\%$	$\alpha \pm 15\%$	$A \pm 15\%$
452	375.00	352.78	1.04	0.07	0.08
675	242.19	182.20	1.33	0.20	0.43
845	93.25	49.68	1.88	0.33	0.72
1050	73.01	40.74	1.79	0.30	0.70
1270	78.23	51.56	1.52	0.24	0.57
1520	21.23	15.94	1.71	0.28	0.66
1755	21.99	13.07	1.68	0.28	0.65

$\delta = 6 \text{ cm}$					
$\nu$	$M_1 \pm 5\%$	$M_2 \pm 5\%$	$\Omega \pm 10\%$	$\alpha \pm 15\%$	$A \pm 15\%$
452	390.00	332.01	1.17	0.10	0.27
675	284.31	199.98	1.42	0.15	0.50
845	96.52	45.36	2.13	0.23	0.78
1050	73.01	39.38	1.85	0.20	0.71
1270	67.56	46.23	1.46	0.15	0.53
1520	22.54	14.18	1.59	0.17	0.60
1755	22.72	16.51	1.38	0.14	0.47

$\delta = 8 \text{ cm}$					
$\nu$	$M_1 \pm 5\%$	$M_2 \pm 5\%$	$\Omega \pm 10\%$	$\alpha \pm 15\%$	$A \pm 15\%$
452	365.00	235.62	1.55	0.13	0.58
675	279.04	137.76	2.03	0.17	0.76
845	106.34	38.16	2.79	0.21	0.87
1050	73.01	29.87	2.44	0.19	0.83
1270	67.56	39.12	1.73	0.14	0.66
1520	27.23	11.52	2.36	0.19	0.82
1755	21.26	11.70	1.22	0.15	0.70

Tabla 6

Parámetros de absorción determinados con el Método Diferencial.

$\delta = 10 \text{ cm}$					
$\nu$	$M_1 \pm 5\%$	$M_2 \pm 5\%$	$\Omega \pm 10\%$	$\alpha \pm 15\%$	$A \pm 15\%$
452	310.00	208.84	1.48	0.09	0.55
675	242.19	128.88	1.88	0.12	0.72
845	104.70	41.04	2.55	0.16	0.85
1050	68.54	31.23	2.19	0.14	0.79
1270	56.90	33.34	1.71	0.11	0.66
1520	22.54	12.40	1.82	0.12	0.70
1755	23.46	11.00	2.13	0.14	0.78

$\delta = 12 \text{ cm}$					
$\nu$	$M_1 \pm 5\%$	$M_2 \pm 5\%$	$\Omega \pm 10\%$	$\alpha \pm 15\%$	$A \pm 15\%$
452	280.00	203.49	1.38	0.07	0.47
675	164.27	106.66	1.54	0.08	0.58
845	85.07	35.28	2.41	0.13	0.83
1050	65.56	29.88	2.19	0.12	0.79
1270	52.67	34.67	1.69	0.09	0.65
1520	32.86	15.95	2.06	0.11	0.76
1755	26.39	11.70	2.26	0.12	0.80

$\delta = 14 \text{ cm}$					
$\nu$	$M_1 \pm 5\%$	$M_2 \pm 5\%$	$\Omega \pm 10\%$	$\alpha \pm 15\%$	$A \pm 15\%$
452	255.00	160.65	1.59	0.07	0.60
675	155.84	93.32	1.67	0.08	0.64
845	96.16	48.96	2.00	0.09	0.75
1050	73.01	39.38	1.85	0.09	0.71
1270	55.12	27.56	2.00	0.09	0.75
1520	26.29	10.63	2.47	0.11	0.84
1755	26.02	7.57	3.44	0.14	0.91

Tabla 6

..... ( continuación )

$\delta = 16 \text{ cm}$					
$\nu$	$M_1 \pm 5\%$	$M_2 \pm 5\%$	$\Omega \pm 10\%$	$\alpha \pm 15\%$	$A \pm 15\%$
452	230.00	137.09	1.68	0.07	0.64
675	151.63	66.66	2.27	0.09	0.81
845	104.70	34.56	3.03	0.11	0.89
1050	101.32	31.91	3.17	0.11	0.90
1270	64.90	24.89	2.61	0.10	0.85
1520	30.05	9.75	3.08	0.11	0.89
1755	27.12	6.88	3.94	0.13	0.94

$\delta = 18 \text{ cm}$					
$\nu$	$M_1 \pm 5\%$	$M_2 \pm 5\%$	$\Omega \pm 10\%$	$\alpha \pm 15\%$	$A \pm 15\%$
452	260.00	113.53	2.29	0.08	0.81
675	147.42	52.22	2.82	0.09	0.87
845	104.70	33.12	3.16	0.10	0.90
1050	101.32	31.23	3.24	0.10	0.90
1270	69.34	22.22	3.12	0.10	0.90
1520	24.41	7.09	3.44	0.11	0.92
1755	25.65	6.19	4.14	0.12	0.94

$\delta = 20 \text{ cm}$					
$\nu$	$M_1 \pm 5\%$	$M_2 \pm 5\%$	$\Omega \pm 10\%$	$\alpha \pm 15\%$	$A \pm 15\%$
452	210.00	81.40	2.58	0.08	0.85
675	151.63	39.99	3.79	0.10	0.93
845	101.43	23.76	4.27	0.11	0.94
1050	87.91	22.40	3.92	0.10	0.93
1270	71.12	13.33	5.33	0.12	0.96
1520	21.59	3.54	6.09	0.12	0.97
1755	23.45	3.44	6.82	0.13	0.98

Tabla 6

.... ( continuación )

## 2.6c EL FACTOR DE AMORTIGUAMIENTO INTERNO ( $\alpha$ ) COMO FUNCION DEL ESPESOR DEL MATERIAL ( $\delta$ ) Y LA FRECUENCIA ( $\nu$ ).

En la tabla 7 puede apreciarse  $\alpha$  en función de  $\delta$  y  $\nu$ , -- sin embargo el objetivo que originalmente se perseguía con este método era el de predecir el comportamiento de cualquier muestra del material estudiado. Es por lo anterior que resulta necesario conocer en forma explícita el comportamiento de  $\alpha$  en función de  $\delta$  y de  $\nu$ .

Regresando a la tabla 7 resulta evidente que lo que se ha obtenido ahí es una serie de puntos correspondientes a las curvas de nivel de la función  $\alpha = f(\delta, \nu)$ , dichas curvas de nivel estarán representadas por  $\alpha = g(\delta, \nu = \text{cte})$  y  $\alpha = h(\delta = \text{cte}, \nu)$ . Es necesario recordar que cuando se conoce explícitamente una función de dos variables, siempre es posible conocer en forma explícita las ecuaciones de sus curvas de nivel. Sin embargo, a partir de las ecuaciones de las curvas de nivel no siempre es posible determinar a partir de ellas la función en forma explícita, de donde resulta que expresar  $\alpha$  como función de  $\delta$  y  $\nu$  constituye un problema cuya solución no es, de ninguna manera, inmediata.

Para resolver este problema es necesario recordar la expresión determinada teóricamente que describe el comportamiento de  $\alpha$ , la cual está dada por

$$\alpha = \frac{\text{arc cosh } \Omega}{\delta} \quad \dots (45)$$

Obsérvese que  $\alpha$  es función de dos variables,  $\delta$  y  $\Omega$  que, en general, será también función de  $\delta$  y  $\nu$ . Esto último se infiere considerando que el caso de la absorción acústica tiene fuertes analogías con el caso de la absorción óptica donde el espesor de la

lente y la frecuencia de la onda son determinantes en la cantidad de energía absorbida.

Ahora bien, la función  $\text{arc cosh } \Omega$  de la expresión (45), es de naturaleza tal que pequeñas variaciones en  $\Omega$  repercutirán en variaciones aún más pequeñas en  $\text{arc cosh } \Omega$ , comportamiento que se hará más notorio conforme  $\Omega$  adquiera valores más grandes.

Como en este caso las variaciones de  $\Omega$  son pequeñas es posible resolver el problema de la predicción del comportamiento de una muestra en una forma alternativa si no se busca encontrar explícitamente  $\alpha = f(\delta, \nu)$ , sino ajustar una serie de funciones a los puntos dados como  $(\delta, \alpha)$  para  $\nu = \text{cte}$  y entonces interpolar para otros valores de  $\delta$ .

Lo anterior puede realizarse si se considera que al tener  $\Omega$  variaciones pequeñas, entonces  $\alpha$  puede expresarse como

$$\alpha = a_1 (1/\delta) + a_2 \quad \dots (52)$$

donde  $a_1$  y  $a_2$  son constantes por determinar.

Así, el problema se reduce a ajustar, utilizando mínimos cuadrados, la expresión (52) a una serie de conjuntos de puntos experimentales correspondientes a cada una de las frecuencias utilizadas.

La razón por la cual se incluyó la constante  $a_2$  es porque experimentalmente puede tener sentido suponer una constante aditiva, por otra parte, en caso de resultar de magnitud despreciable siempre será posible eliminarla.

La presentación del fundamento teórico del método para ajustar una función a un conjunto de puntos experimentales se hace en el Apéndice 1.

Los valores de las constantes  $a_1$  y  $a_2$  se encuentran en la tabla 8. En la tabla 9 se muestran los valores  $(\alpha_e)$  experimentales del coeficiente de amortiguamiento contrastados con los valores  $(\alpha_t)$  obtenidos por medio de las funciones expresadas en la fórmula (52).

		$\alpha \pm 15 \%$							
$\gamma \backslash \delta$	4	6	8	10	12	14	16	18	20
452	0.07*	0.10*	0.13*	0.09	0.07	0.07	0.07	0.08	0.08
675	0.20*	0.15	0.17	0.12	0.08	0.08	0.09	0.09	0.10
845	0.31	0.23	0.21	0.16	0.13	0.09	0.11	0.10	0.11
1050	0.30	0.20	0.19	0.14	0.12	0.09	0.11	0.10	0.10
1270	0.24	0.15	0.14	0.11	0.09	0.09	0.10	0.10	0.12
1520	0.28	0.17	0.19	0.12	0.11	0.11	0.11	0.11	0.12
1755	0.28	0.14*	0.15	0.14	0.12	0.14	0.13	0.12	0.13

Tabla 7

Coeficiente de amortiguamiento interno ( $\alpha$ ) como función del espesor de la muestra ( $\delta$ ) y de la frecuencia ( $\gamma$ ).

\* Estos datos sólo se consideran superficialmente puesto que su error porcentual es mayor que el 15%.

		$\alpha \pm 15 \%$							
$\nu \backslash \delta$	4	6	8	10	12	14	16	18	20
452	0.07*	0.10*	0.13*	0.09	0.07	0.07	0.07	0.08	0.08
675	0.20*	0.15	0.17	0.12	0.08	0.08	0.09	0.09	0.10
845	0.31	0.23	0.21	0.16	0.13	0.09	0.11	0.10	0.11
1050	0.30	0.20	0.19	0.14	0.12	0.09	0.11	0.10	0.10
1270	0.24	0.15	0.14	0.11	0.09	0.09	0.10	0.10	0.12
1520	0.28	0.17	0.19	0.12	0.11	0.11	0.11	0.11	0.12
1755	0.28	0.14*	0.15	0.14	0.12	0.14	0.13	0.12	0.13

Tabla 7

Coefficiente de amortiguamiento interno ( $\alpha$ ) como función del espesor de la muestra ( $\delta$ ) y de la frecuencia ( $\nu$ ).

\* Estos datos sólo se consideran superficialmente puesto que su error porcentual es mayor que el 15%.

$\nu$	$a_1 \pm 17\%$	$a_2 \pm 25\%$
452	0.05	0.08
675	0.60	0.05
845	1.11	0.04
1050	1.03	0.04
1270	0.68	0.05
1520	0.84	0.06
1755	0.67	0.08

Tabla 8

Valores de las constantes  $a_1$  y  $a_2$  de la expresión (52) ajustadas a los con juntos de datos de las frecuencias - de trabajo, utilizadas en el aparato de ondas estacionarias.



		$\nu$							
		452	675	845	1050	1270	1520	1755	
$\delta$	4	$\alpha_t \pm 20\%$	0.09*	0.21	0.32	0.30	0.22	0.27	0.25
		$\alpha_e \pm 15\%$	0.07*	0.20*	0.31	0.30	0.24	0.28	0.28
	6	$\alpha_t \pm 20\%$	0.09*	0.16	0.22	0.21	0.16	0.20	0.19
		$\alpha_e \pm 15\%$	0.10*	0.15	0.23	0.20	0.15	0.17	0.14*
	8	$\alpha_t \pm 20\%$	0.09*	0.14	0.18	0.17	0.14	0.17	0.16
		$\alpha_e \pm 15\%$	0.13*	0.17	0.21	0.19	0.14	0.19	0.15
	10	$\alpha_t \pm 20\%$	0.09*	0.12	0.15	0.14	0.12	0.14	0.15
		$\alpha_e \pm 15\%$	0.09	0.12	0.16	0.14	0.11	0.12	0.14
	12	$\alpha_t \pm 20\%$	0.08*	0.11	0.13	0.13	0.11	0.13	0.14
		$\alpha_e \pm 15\%$	0.07	0.08	0.13	0.12	0.09	0.11	0.12
	14	$\alpha_t \pm 20\%$	0.08*	0.10	0.12	0.11	0.10	0.12	0.13
		$\alpha_e \pm 15\%$	0.07	0.08	0.09	0.09	0.09	0.11	0.14
	16	$\alpha_t \pm 20\%$	0.08*	0.10	0.11	0.10	0.09	0.11	0.12
		$\alpha_e \pm 15\%$	0.07	0.09	0.11	0.11	0.10	0.11	0.13
	18	$\alpha_t \pm 20\%$	0.08*	0.09	0.10	0.10	0.09	0.11	0.12
		$\alpha_e \pm 15\%$	0.08	0.09	0.10	0.10	0.10	0.11	0.12
20	$\alpha_t \pm 20\%$	0.08*	0.09	0.10	0.09	0.08	0.10	0.11	
	$\alpha_e \pm 15\%$	0.08	0.10	0.11	0.10	0.12	0.12	0.13	

Tabla 9

Tabla comparativa de los valores ( $\alpha_e$ ) experimentales del coeficiente de amortiguamiento contrastados con los valores ( $\alpha_t$ ) calculados teóricamente mediante la expresión (52).

\* Estos valores no son significativos puesto que su error porcentual es mayor que el 20%.

\* Estos valores no son significativos puesto que su error porcentual es mayor que el 15%

## 2.7 PREDICCIÓN DEL COMPORTAMIENTO DE DOS MUESTRAS DEL MATERIAL ESTUDIADO UTILIZANDO EL METODO DIFERENCIAL.

### 2.7A METODOLOGÍA.

Continuando con la idea de poder predecir el comportamiento de un material a través de su coeficiente de amortiguamiento interno, se procedió a evaluar en forma experimental dicho coeficiente, para dos nuevas muestras cuyos espesores eran de nueve y once centímetros respectivamente.

Utilizando el desarrollo experimental descrito en la sección 2.5 se determinaron los valores de los antinodos correspondientes a cada frecuencia de trabajo en cada uno de los dos espesores y se encontraron los parámetros  $\Omega_e$ ,  $\alpha_e$  y  $A_e$ , en la misma forma que en la sección 2.6B.

Por otra parte, dado que ya habían sido evaluados los coeficientes  $a_1$  y  $a_2$  de la expresión (52), fueron determinados los valores de  $\alpha_t$  que teóricamente se esperaba encontrar para el conjunto de frecuencias de trabajo en cada uno de los dos nuevos espesores.

Los resultados así obtenidos se encuentran en la tabla 10 que contiene los valores experimentales de  $\Omega_e$ ,  $\alpha_e$ ,  $A_e$  y los valores teóricamente esperados de  $\alpha_t$  y  $A_t$ , correspondientes a los espesores de nueve y once centímetros.

$\delta = 9 \text{ cm}$									
$\nu$	$M_{1-}^{0+2\%}$	$M_{2-}^{0+2\%}$	$M_{1-}^{+5\%}$	$M_{2-}^{+5\%}$	$\Omega_{e-}^{+10\%}$	$\alpha_{e-}^{+15\%}$	$\alpha_{t-}^{+20\%}$	$A_{e-}^{+15\%}$	$A_{t-}^{+20\%}$
452	330	200	330.00	214.20	1.54	0.11*	0.08*	0.58*	0.42*
675	250	116	263.25	128.88	2.04	0.15	0.12	0.76	0.61
845	132	52	107.98	37.44	2.88	0.19	0.17	0.88	0.81
1050	96	42	71.52	28.51	2.51	0.17	0.15	0.84	0.78
1270	70	40	62.23	35.56	1.75	0.13	0.13	0.67	0.66
1520	27	13	25.35	11.52	2.20	0.16	0.15	0.79	0.78
1755	30	16	21.99	11.01	2.00	0.15	0.15	0.75	0.78

$\delta = 11 \text{ cm}$									
$\nu$	$M_{1-}^{0+2\%}$	$M_{2-}^{0+2\%}$	$M_{1-}^{+5\%}$	$M_{2-}^{+5\%}$	$\Omega_{e-}^{+10\%}$	$\alpha_{e-}^{+15\%}$	$\alpha_{t-}^{+20\%}$	$A_{e-}^{+15\%}$	$A_{t-}^{+20\%}$
452	290	200	290.00	214.20	1.35	0.07	0.08*	0.45	0.53*
675	190	112	200.07	124.43	1.61	0.09	0.11	0.61	0.67
845	115	52	94.07	37.44	2.51	0.14	0.14	0.84	0.84
1050	88	45	65.56	30.55	2.15	0.13	0.13	0.78	0.81
1270	64	38	56.90	33.78	1.68	0.10	0.12	0.65	0.71
1520	29	17	27.23	15.06	1.81	0.11	0.13	0.69	0.82
1755	34	17	24.92	11.70	2.13	0.13	0.14	0.78	0.84

Tabla 10

Tabla comparativa de los valores de los parámetros de absorción obtenidos en forma experimental y teórica para dos muestras cuyos espesores eran de nueve y once centímetros respectivamente.

- \* Estos valores no son significativos puesto que su error porcentual es mayor que el 20%
- \* Estos valores no son significativos puesto que su error porcentual es mayor que el 15%

## 2.7B COMENTARIOS.

En este punto cabe hacer algunas observaciones sobre la naturaleza y las implicaciones de los resultados obtenidos en la sección - 2.7A.

Obsérvese que los valores esperados teóricamente coinciden en general bastante bien con los valores de  $\alpha$  obtenidos experimentalmente aún cuando existen discrepancias en algunos puntos. Es importante notar que dichas discrepancias tienen lugar preferentemente para las bajas frecuencias y espesores pequeños.

La razón de las discrepancias mencionadas puede consistir en el hecho de que para proponer la ecuación (52) como base para el ajuste se supuso que el  $\text{arc cosh } \Omega$  se comportaba en forma prácticamente constante, lo cual implicaba que los valores de  $\Omega$  eran mayores que 2 y no variaban exageradamente. Sin embargo el hecho es que para las bajas frecuencias y pequeños espesores ( $\delta \leq 8$ ) lo anterior en general no ocurre, lo cual probablemente puede ser la causa de las discrepancias entre los valores de  $\alpha_t$  y  $\alpha_e$ .

Más importantes que lo anterior son las implicaciones que se originan al suponer que el  $\text{arc cosh } \Omega$  se comporta en forma prácticamente constante y de ahí que las variaciones de  $\Omega$  sean pequeñas. De hecho se esperaba un comportamiento distinto, es decir, el cociente de las amplitudes de los antinodos ( $\Omega$ ) debería haber presentado valles o crestas para determinadas combinaciones de frecuencia y espesor, lo cual implicaría un comportamiento similar en  $\alpha$  y, consecuentemente, de  $A$ , encontrándose así que el comportamiento de la absorción es selectivo para ciertos valores de  $\delta$  y  $\nu$ . Lo anterior se esperaba teniendo en cuenta, el caso óptico en donde la frecuencia de la luz que incide sobre una lente, el espesor de ésta y las características propias del material por el cual está constituida, origi-

nan un comportamiento selectivo en la absorción.

De los valores de  $\alpha$  presentados en la tabla 7 no puede concluirse un comportamiento selectivo para determinados valores de  $\delta$  y  $\nu$ . La causa de lo anterior está dada por las limitaciones experimentales, que tienen como consecuencia que la incertidumbre sea grande para los valores de  $\alpha$  y que se tengan pocos puntos experimentales de  $\alpha$  como función de  $\delta$  y  $\nu$ . Debido a ello es que no puede asegurarse que el comportamiento de  $\alpha$  no esté dado por la expresión (52) si no por otro tipo de expresión cuyo comportamiento incluyera valles y crestas, dando origen así a una absorción selectiva.

Por otra parte, es conveniente señalar que predecir el comportamiento de  $\alpha$  por medio de la expresión (52) tiene la gran ventaja de poder encontrar un significado físico a los coeficientes  $a_1$  y  $a_2$ . En el caso de  $a_1$  la interpretación es inmediata y puede visualizarse como un valor promedio o un valor esperado de  $\Omega$  para cada una de las frecuencias de trabajo, el cual contiene gran cantidad de información acerca del comportamiento que con respecto a la absorción acústica tiene el material estudiado. Ahora bien, la constante  $a_2$  tiene implicaciones muy interesantes sobre el comportamiento de  $\alpha$  y, en consecuencia, para el coeficiente de absorción  $A$ . Obsérvese que la existencia de  $a_2$  en la expresión (52) implica que el factor de amortiguamiento  $\alpha$  sea en todo momento distinto de cero, sin importar que  $\delta$  adquiera valores muy grandes, lo cual implica que, a partir de cierto valor de  $\delta$ ,  $\alpha$  no presentará variaciones significativas y tendrá un valor prácticamente constante. Lo anterior es sumamente importante si se considera la expresión para el coeficiente de absorción como función de  $\alpha$  y  $\delta$ , que está dada por

$$A = 1 - [\cosh(\alpha\delta)]^{-2} \quad \dots (53)$$

En términos de la expresión (52) el producto de  $\alpha\delta$  resulta ser

$$\alpha\delta = a_1 + a_2\delta$$

de donde se infiere que el producto  $\alpha\delta$  es monótonamente creciente -- con respecto a  $\delta$ , por lo tanto  $A$  también se acerca monótonamente a uno conforme  $\delta$  crece. De lo anterior se desprende en forma inmediata la importancia de  $a_2$ , puesto que sin esta constante en la expresión (52), el producto de  $\alpha\delta$  permanecería sin variación alguna para cualquier valor de  $\delta$  y, por lo tanto,  $A$  no dependería del espesor del material, lo cual no ocurre en la práctica.

Por último la importancia de  $a_2$  puede ser relevante al seleccionar el espesor de un material de absorción considerando que si a partir de ciertos valores de  $\delta$ ,  $\alpha$  no varía significativamente (por ejemplo si un 10% en un incremento de  $\delta$  implica sólo un 1% en la -- disminución de  $\alpha$ ) entonces puede elegirse un espesor crítico  $\delta_c$  con el cual se logra una absorción satisfactoria con la mínima cantidad posible de material, lo cual tiene gran importancia económica.

Para terminar es necesario reconocer que el análisis hecho para  $a_2$  es, en cierto modo especulativo dado que el error obtenido al evaluar esas constantes (en general del 25%) puede significar que posiblemente no sea correcto considerarlas. Así mismo, en el caso de  $a_1$  para 452 Hz se encuentra que el error es tan grande que los valores de  $\alpha$  que de ahí resultan, sólo pueden ser considerados como una mera referencia sin pensar que verdaderamente sean significativos. Finalmente, es necesario puntualizar que se decidió tener en cuenta las constantes  $a_2$  dada la importancia que reviste su significado físico, como lo mostró el análisis anterior.

## 2.8 UN TRATAMIENTO DE DATOS ALTERNATIVO PARA LA PREDICCIÓN DEL COMPORTAMIENTO DE DOS MUESTRAS DEL MATERIAL ESTUDIADO, UTILIZANDO EL METODO DIFERENCIAL.

### 2.8A METODOLOGÍA.

Al analizar los resultados que se presentan en la sección 2.7 se pensó que, dado que el objetivo inicial era predecir el comportamiento de una muestra, tal vez pudiera utilizarse un método alternativo en el cual el ajuste de los datos experimentales correspondientes a  $\alpha$  obedeciera no a una suposición acerca de las características físicas del sistema (como el hecho en la sección 2.7) sino a resultados puramente estadísticos, obtenidos directamente del ajuste tales como la desviación estandar para cada parámetro determinado y el coeficiente de correlación.

Para realizar dicho ajuste fué necesario tener en mente que, si bien se tenía una idea de la tendencia que debería obedecer  $\alpha$ , el número de puntos experimentales y la precisión con la cual se habían determinado, no permitían suponer nada al respecto. Dado lo anterior, se decidió ajustar los puntos experimentales por medio de un polinomio y se encontró que los polinomios de séptimo grado arrojaban los valores más adecuados en cuanto a desviación estandar y coeficiente de correlación.

Fué así que se ajustaron funciones del tipo

$$\alpha(\delta) = \sum_{i=0}^7 a_i \delta^i \quad \dots (54)$$

donde  $a_i$  son constantes cuyos valores fueron determinados mediante el método del Apéndice 1 y que aparecen en la tabla 11. Asimismo, la tabla 12 muestra comparativamente los valores experimentales obtenidos ( $\alpha_e$ ) y los valores teóricamente determinados ( $\alpha_t$ ), por este mé

todo, del coeficiente de amortiguamiento interno.

Finalmente en la tabla 13 se encuentran los valores experimentales y teóricos de  $\alpha$  y  $A$  encontrados para predecir el comportamiento de dos nuevas muestras de 9 y 11 centímetros.



	$\nu = 452$	$\nu = 675$	$\nu = 845$
$a_0$	5.831645002	6.599600056	0.652050859
$a_1$	-4.450802050	-4.614587332	0.051917102
$a_2$	1.369191072	1.325208389	-0.109403329
$a_3$	-0.218654920	-0.198524918	0.031114900
$a_4$	0.019798430	0.016864676	$-4.031404838 \times 10^{-3}$
$a_5$	$-1.026486426 \times 10^{-3}$	$-8.193568911 \times 10^{-4}$	$2.699803733 \times 10^{-4}$
$a_6$	$2.843183540 \times 10^{-5}$	$2.124074382 \times 10^{-5}$	$-9.072872689 \times 10^{-6}$
$a_7$	$-3.264081690 \times 10^{-7}$	$-2.280508099 \times 10^{-7}$	$1.211039222 \times 10^{-7}$
	R = 0.998 E = 0.0167	R = 0.999 E = 0.00126	R = 0.997 E = 0.0162

	$\nu = 1050$	$\nu = 1270$	$\nu = 1520$
$a_0$	3.093079917	3.594272978	12.22486719
$a_1$	-1.771194730	-2.256631364	- 8.812512672
$a_2$	0.438016062	0.605251218	2.615987472
$a_3$	-0.055883065	-0.085654416	- 0.409402298
$a_4$	$3.905233732 \times 10^{-3}$	$6.887205675 \times 10^{-3}$	0.036632973
$a_5$	$-1.470103039 \times 10^{-4}$	$-3.155741286 \times 10^{-4}$	$- 1.884616172 \times 10^{-3}$
$a_6$	$2.653405061 \times 10^{-6}$	$7.659421644 \times 10^{-6}$	$5.188541858 \times 10^{-5}$
$a_7$	$-1.556311206 \times 10^{-8}$	$-7.619179412 \times 10^{-8}$	$- 5.923453427 \times 10^{-7}$
	R = 0.996 E = 0.0169	R = 0.999 E = 0.00157	R = 0.997 E = 0.0127

Tabla 11

( Acotaciones al final de la siguiente página )

	$\nu = 1755$
$a_0$	7.230564142
$a_1$	-4.817096276
$a_2$	1.340191755
$a_3$	-0.197972153
$a_4$	0.016810992
$a_5$	$-8.235246948 \times 10^{-4}$
$a_6$	$2.162892241 \times 10^{-5}$
$a_7$	$-2.357724134 \times 10^{-7}$
	$R = 0.997 \quad E = 9.854 \times 10^{-3}$

Tabla 11

Coeficientes de los polinomios usados para ajustar  $\alpha$  como función de  $\delta$ , a  $\nu =$  constante.

R = Coeficiente de correlación

E = Error estandar estimado.

Nota: En este caso se consideró un elevado número de cifras significativas porque ello mejora la eficiencia del ajuste.

		$\gamma$							
		452	675	845	1050	1270	1520	1755	
$\delta$	4	$\alpha_t \pm 15\%$	0.07	0.20	0.31	0.30	0.24	0.28	0.28
		$\alpha_e \pm 15\%$	0.07*	0.20*	0.31	0.30	0.24	0.28	0.28
	6	$\alpha_t \pm 15\%$	0.10	0.15	0.23	0.20	0.15	0.17	0.14
		$\alpha_e \pm 15\%$	0.10*	0.15	0.23	0.20	0.15	0.17	0.14*
	8	$\alpha_t \pm 15\%$	0.13	0.17	0.21	0.19	0.14	0.19	0.15
		$\alpha_e \pm 15\%$	0.13*	0.17	0.21	0.19	0.14	0.19	0.15
	10	$\alpha_t \pm 15\%$	0.09	0.12	0.17	0.15	0.11	0.13	0.14
		$\alpha_e \pm 15\%$	0.09	0.12	0.16	0.14	0.11	0.12	0.14
	12	$\alpha_t \pm 15\%$	0.07	0.08	0.12	0.11	0.09	0.10	0.13
		$\alpha_e \pm 15\%$	0.07	0.08	0.13	0.12	0.09	0.11	0.12
	14	$\alpha_t \pm 15\%$	0.07	0.08	0.10	0.10	0.09	0.12	0.14
		$\alpha_e \pm 15\%$	0.07	0.08	0.09	0.09	0.09	0.11	0.14
	16	$\alpha_t \pm 15\%$	0.07	0.09	0.11	0.11	0.10	0.11	0.13
		$\alpha_e \pm 15\%$	0.07	0.09	0.11	0.11	0.10	0.11	0.13
	18	$\alpha_t \pm 15\%$	0.08	0.09	0.10	0.10	0.10	0.11	0.12
		$\alpha_e \pm 15\%$	0.08	0.09	0.10	0.10	0.10	0.11	0.12
20	$\alpha_t \pm 15\%$	0.08	0.10	0.11	0.10	0.12	0.12	0.13	
	$\alpha_e \pm 15\%$	0.08	0.10	0.11	0.10	0.12	0.12	0.13	

Tabla 12

Tabla comparativa de los valores experimentales ( $\alpha_e$ ) del factor de amortiguamiento interno y de los valores teóricos ( $\alpha_t$ ) de dicho factor obtenidos por medio de la expresión (54).

\* Estos valores no son significativos puesto que su error porcentual es mayor que el 15%

\* Estos valores no son significativos puesto que su error porcentual es mayor que el 15%

$\delta = 9 \text{ cm}$									
$\gamma$	$M_{1-}^{0+2\%}$	$M_{2-}^{0+2\%}$	$M_{1-} + 5\%$	$M_{2-} + 5\%$	$\Omega_{e-} + 10\%$	$\alpha_{e-} + 15\%$	$\alpha_{t-} + 15\%$	$A_{e-} + 15\%$	$A_{t-} + 15\%$
452	330	200	330.00	214.20	1.54	0.11*	0.11	0.58*	0.57
675	250	116	263.25	128.88	2.04	0.15	0.15	0.76	0.76
845	132	52	107.98	37.44	2.88	0.19	0.19	0.88	0.88
1050	96	42	71.52	28.51	2.51	0.17	0.17	0.84	0.83
1270	70	40	62.23	35.56	1.75	0.13	0.13	0.67	0.68
1520	27	13	25.35	11.52	2.20	0.16	0.16	0.79	0.80
1755	30	16	21.99	11.01	2.00	0.15	0.15	0.75	0.76

$\delta = 11 \text{ cm}$									
$\gamma$	$M_{1-}^{0+2\%}$	$M_{2-}^{0+2\%}$	$M_{1-} + 5\%$	$M_{2-} + 5\%$	$\Omega_{e-} + 10\%$	$\alpha_{e-} + 15\%$	$\alpha_{t-} + 15\%$	$A_{e-} + 15\%$	$A_{t-} + 15\%$
452	290	200	290.00	214.20	1.35	0.07	0.07	0.45	0.42
675	190	112	200.07	124.43	1.61	0.09	0.10	0.61	0.64
845	115	52	94.07	37.44	2.51	0.14	0.14	0.84	0.83
1050	88	45	65.56	30.55	2.15	0.13	0.13	0.78	0.80
1270	64	38	56.90	33.78	1.68	0.10	0.10	0.65	0.64
1520	29	17	27.23	15.06	1.81	0.11	0.11	0.69	0.70
1755	34	17	24.92	11.70	2.13	0.13	0.13	0.78	0.80

Tabla 13

Tabla comparativa entre la predicción teórica y los resultados experimentales referentes a los parámetros de absorción de dos muestras con espesores de nueve y once centímetros.

\* Estos valores no son significativos puesto que su error porcentual es mayor que el 15%.

## 2.8B COMENTARIOS.

Como puede observarse en los resultados que se muestran en -- las tablas 12 y 13, el ajuste hecho con los polinomios de séptimo -- grado presenta una concordancia casi perfecta, dado que todos los va -- lores determinados teóricamente se encuentran dentro del intervalo - de incertidumbre de los valores experimentales. Lo anterior ocurre - aún para los espesores de 4 y 6 centímetros en las frecuencias de -- 452 y 675 Hz cuyo error porcentual resultó tan grande que sólo se -- tiene en cuenta como referencia.

Lo anterior, sin embargo, no puede servir como base para con -- cluir que el patrón experimental de  $\alpha$  tiene cierta tendencia, puesto que debe recordarse en todo momento, que la incertidumbre en los da -- tos experimentales es demasiado grande y el número de puntos obteni -- dos demasiado pequeño para asegurar lo anterior.

Por otra parte, es necesario notar que un ajuste de este tipo, tiene la gran desventaja de que no puede asignarse un significado ff sico inmediato a los coeficientes  $a_i$ . De hecho son, en su mayoría -- tan pequeños (en general mucho menores que la incertidumbre) que ni siquiera puede asegurarse que sea correcto considerar su existencia. Lo que se ha determinado en todo caso, es un polinomio que pasa por todos los puntos experimentales y lo que resulta muy significativo - es que pueda predecir los valores experimentales de  $\alpha$  mediante una interpolación, aún cuando es necesario reconocer que un polinomio - de tan alto grado, puede ajustarse prácticamente a cualquier conjun -- to de puntos experimentales.

Para terminar puede decirse que si bien este tipo de ajuste - no prueba la existencia de valles y crestas en el patrón experimen -- tal de  $\alpha$ , puede ser utilizado para predecir el comportamiento del - coeficiente de amortiguamiento, siempre y cuando se cuente con la --

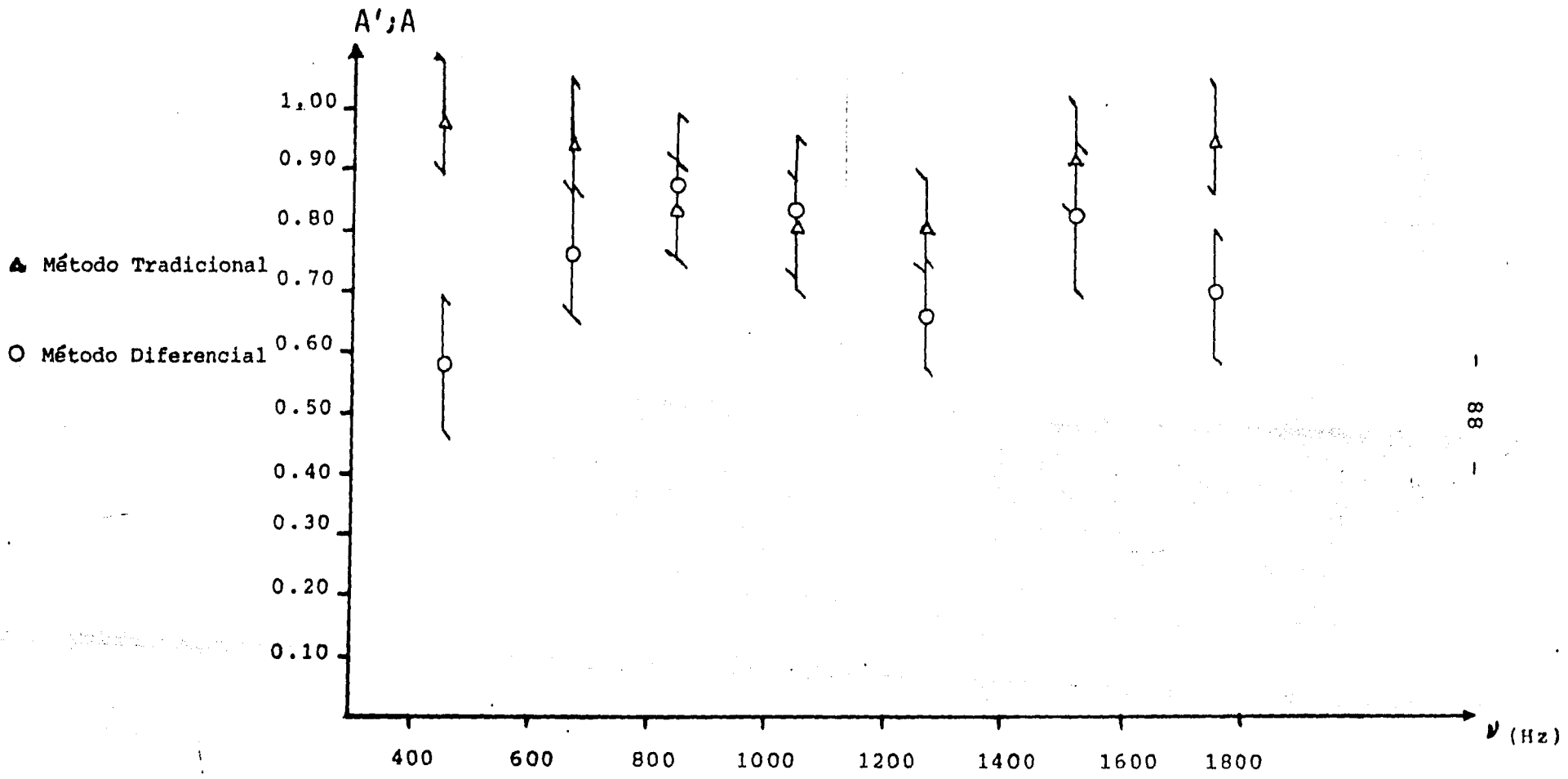
existencia de un conjunto con mayor cantidad de puntos experimentales, que garantice la existencia de una tendencia definida en el comportamiento de  $\alpha$  .

## 2.9 GRAFICAS.

Para mayor claridad en la interpretación de los resultados obtenidos, es conveniente contar con la representación gráfica de algunos de ellos.

Dado que los resultados provenientes del Método Tradicional se utilizaron en este trabajo exclusivamente como marco de referencia, resulta ilustrativo comparar gráficamente el comportamiento de las muestras 8, 14 y 20 centímetros determinado por este método con el comportamiento que esas mismas muestras presentan al ser estudiadas por medio del Método Diferencial. Las gráficas 1, 2 y 3 están dedicadas a dicho propósito. Es necesario aclarar que tan solo se han representados los puntos obtenidos experimentalmente, puesto que en ninguno de los dos casos representados se ha asignado una forma analítica al comportamiento de  $A$  y  $A'$  respecto a  $\nu$  para  $\delta = \text{cte}$ .

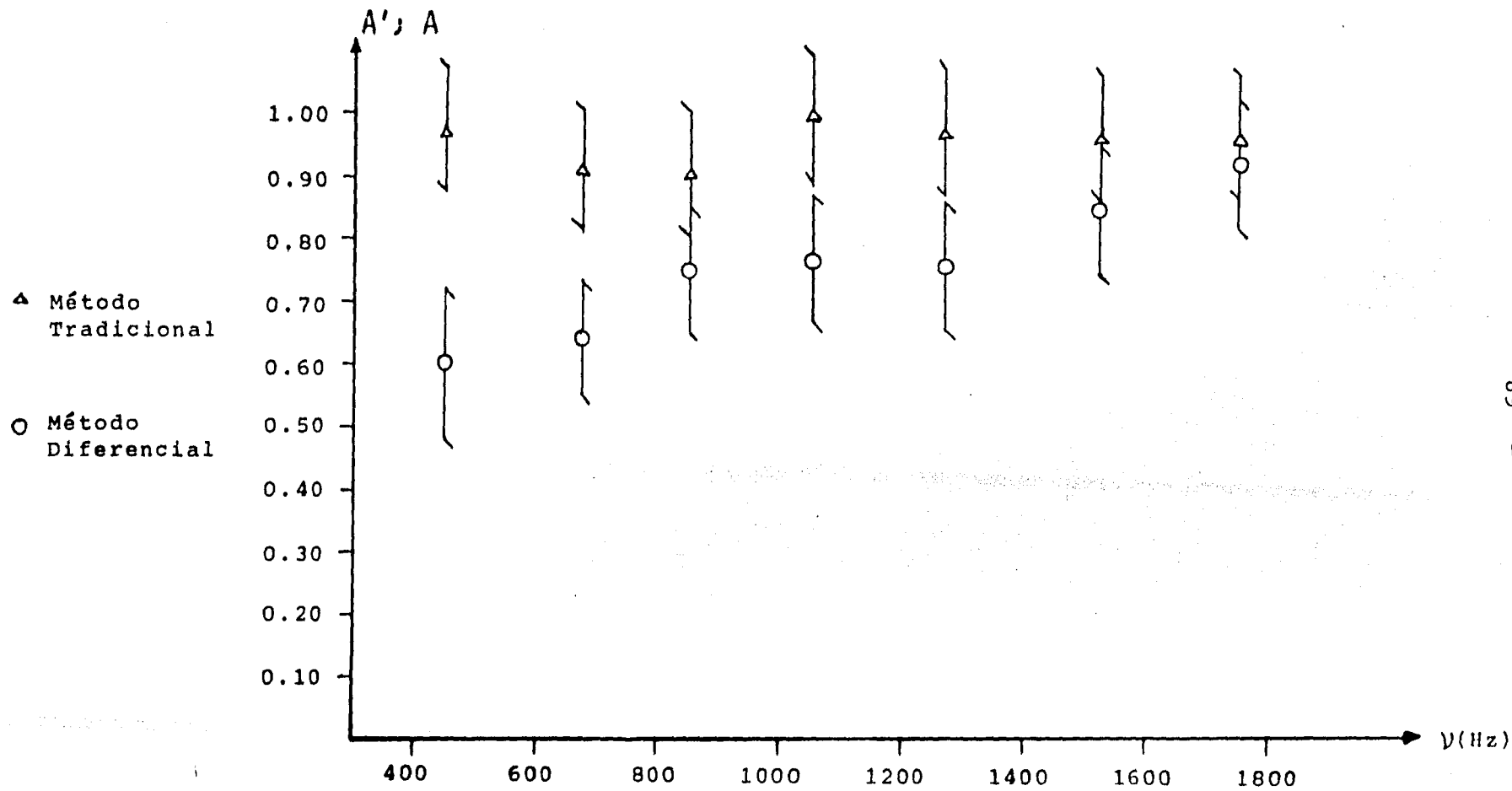
Por otra parte, puede resultar interesante observar los resultados de  $\alpha$  obtenidos en forma experimental y por medio de las expresiones (52) y (54) representados en la misma gráfica. Así, las gráficas 4 y 5 representan  $\alpha$  como función de  $\delta$  en los casos 845 Hz y 1270 Hz respectivamente.



Gráfica 1

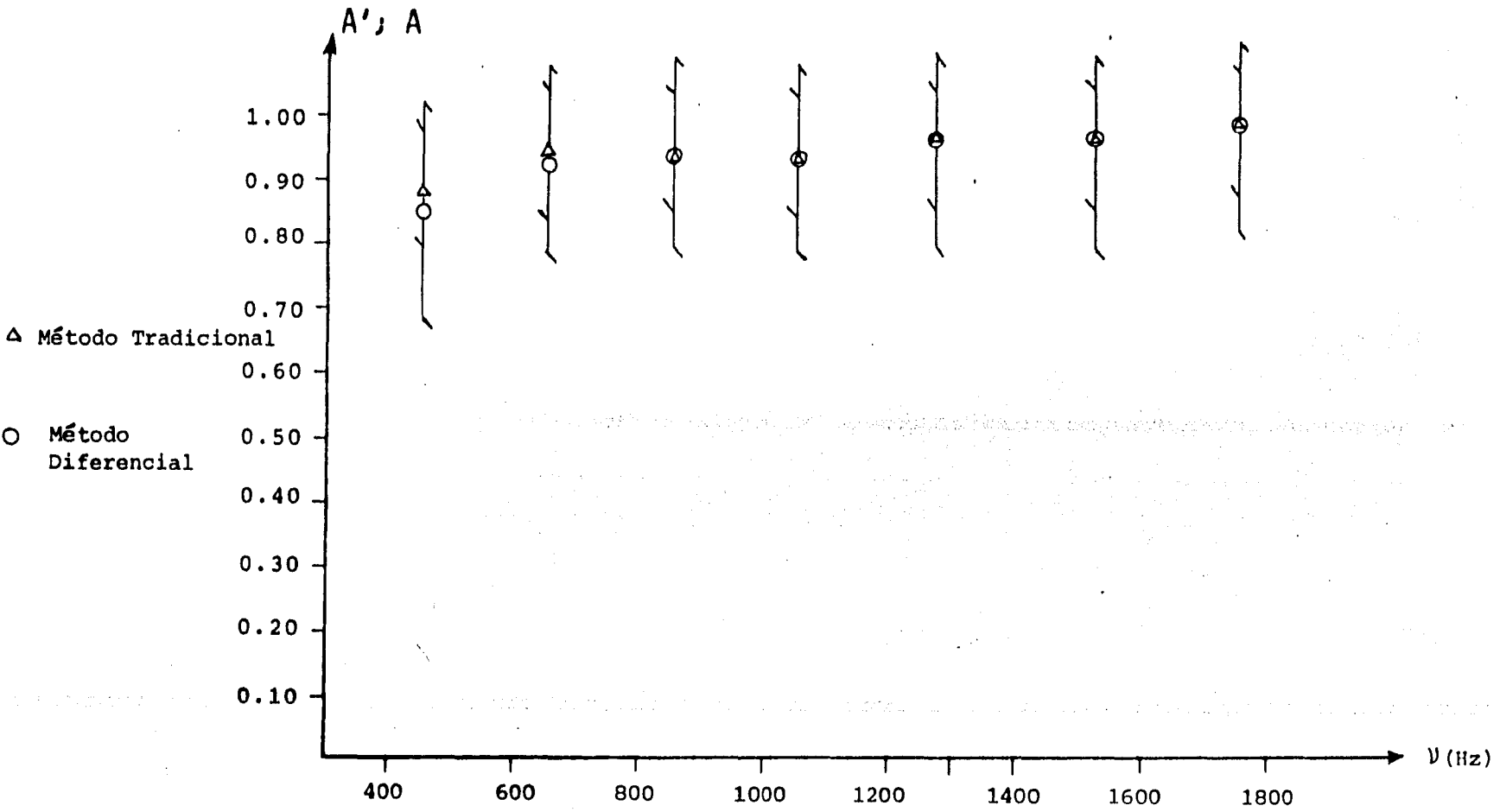
Representación comparativa del coeficiente de absorción de energía acústica de una muestra de 8 cm. de espesor, determinado por el Método Tradicional y por el Método Diferencial.





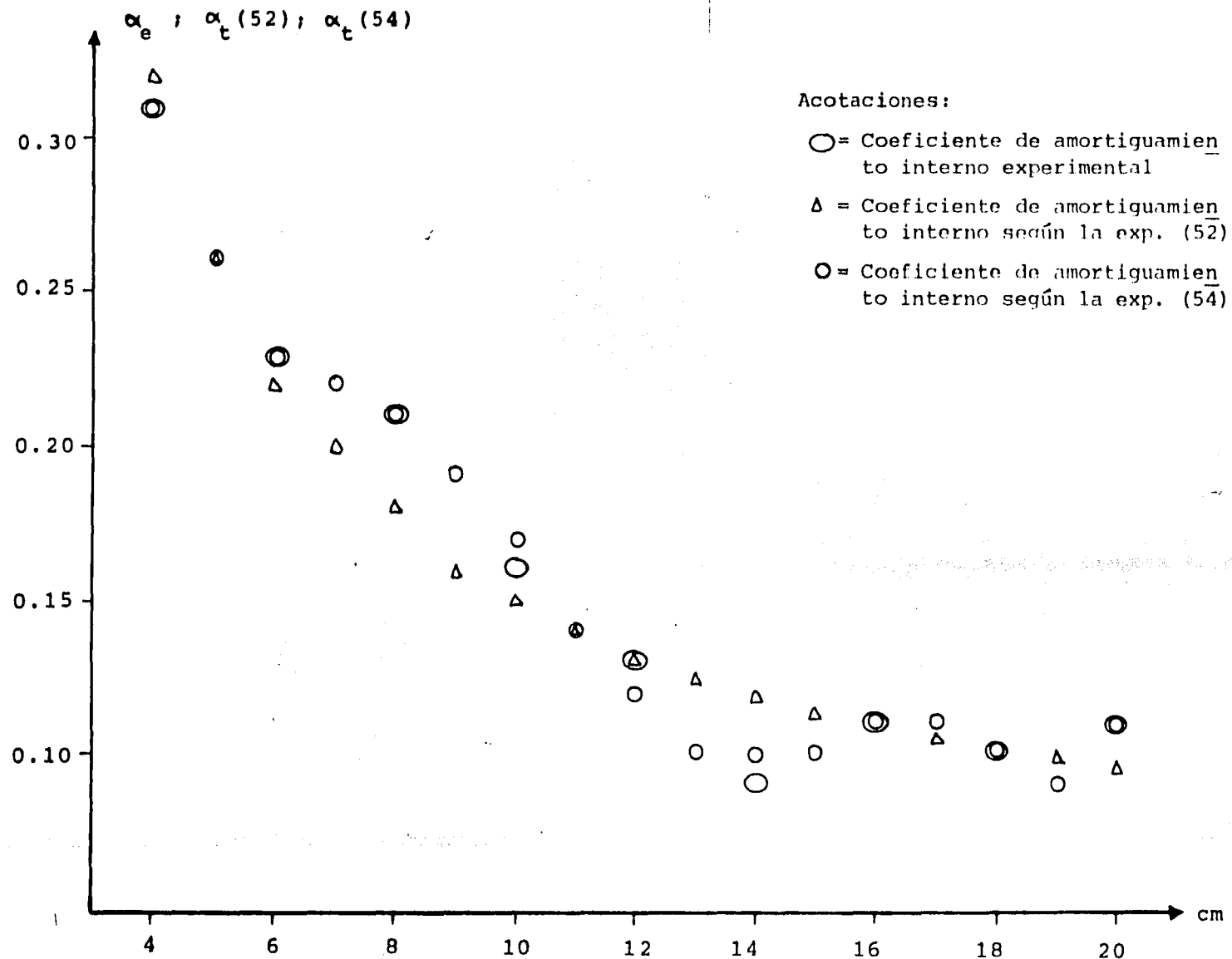
Gráfica 2

Representación comparativa del coeficiente de absorción de energía acústica de una muestra de 14 cm de espesor, determinado por el Método Tradicional y por el Método Diferencial.



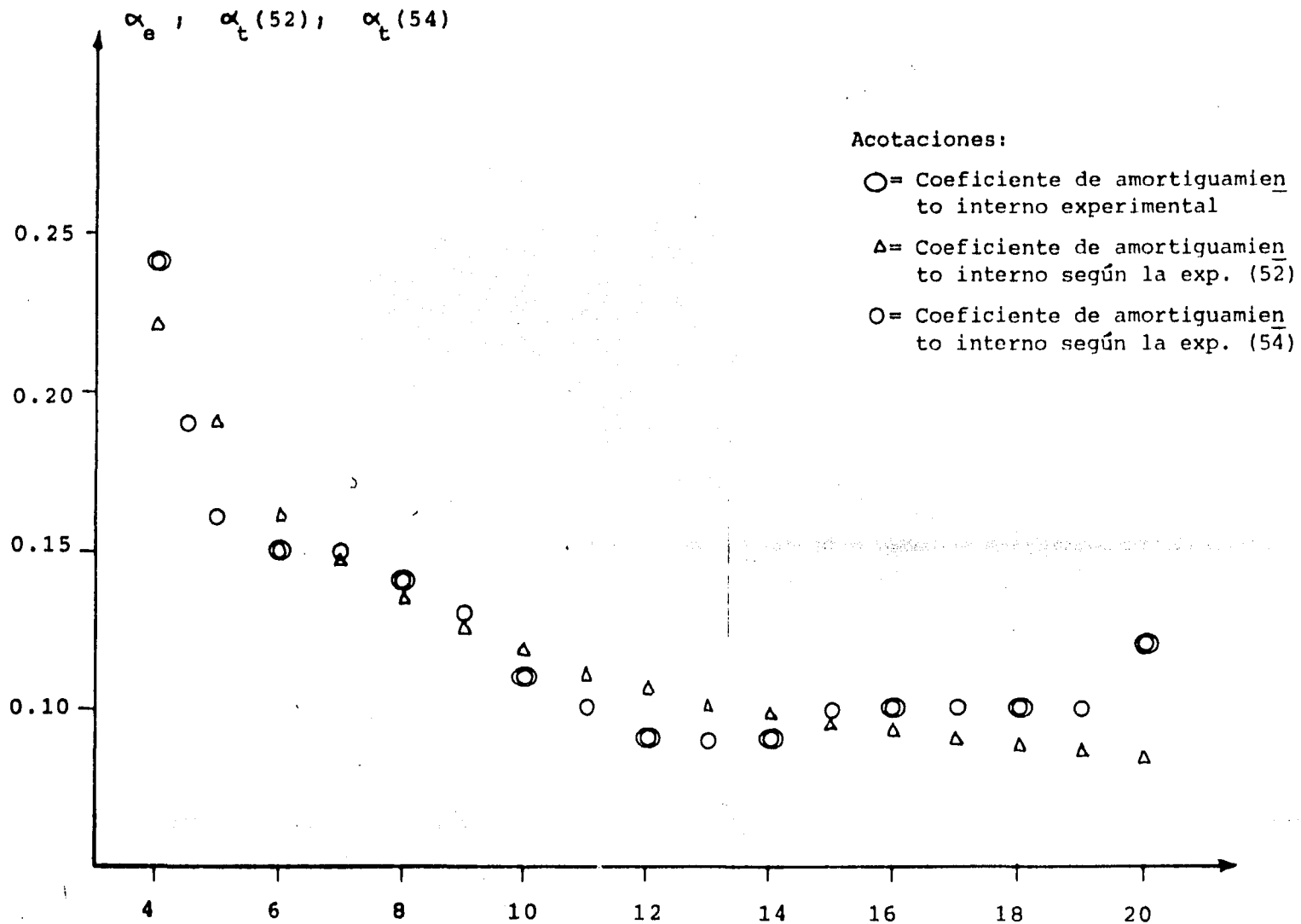
Gráfica 3

Representación comparativa del coeficiente de absorción de energía acústica de una muestra de 20 cm de espesor, determinado por el Método Tradicional y por el Método Diferencial.



Gráfica 4

Representación comparativa del coeficiente de amortiguamiento interno obtenido experimentalmente, teóricamente por medio de la expresión (52) y teóricamente por medio de la expresión (54), correspondiente a una frecuencia de 845 Hz.



Gráfica 5

Representación comparativa del coeficiente de amortiguamiento interno obtenido experimentalmente, teóricamente por medio de la expresión (52) y teóricamente por medio de la expresión (54), correspondiente a una frecuencia de 1270 Hz.

## 2.10 PROCEDIMIENTO GENERAL PARA DETERMINAR EL COEFICIENTE DE ABSORCIÓN DE UN MATERIAL, SU FACTOR DE AMORTIGUAMIENTO INTERNO Y LA PREDICCIÓN DE SU COMPORTAMIENTO.

La presente sección tiene como objetivo el establecer una serie de pasos que deberán seguirse cada vez que se pretenda evaluar los parámetros de absorción acústica de un material determinado, -- así como predecir su comportamiento.

Como requisito para lo anterior se supone que se cuenta con el equipo descrito en la secciones 2.3 y 2.5, es por ello que sólo se detallarán los pasos correspondientes al desarrollo experimental y al tratamiento de datos.

Así, el procedimiento general, puede describirse como sigue:

- 1) Utilizando el aparato de ondas estacionarias en la modalidad del Método Diferencial, se evalúan las amplitudes de los antinodos en cada una de las frecuencias de trabajo de un conjunto de muestras que sea lo suficientemente grande para garantizar que exista una tendencia definida en el patrón experimental que presente  $\alpha$ . El número de puntos experimentales es de gran importancia, dado que es la única manera de proponer sobre bases firmes una función que se ajuste adecuadamente a  $\alpha$ .
- 2) Una vez hecho lo anterior, se procede a corregir las lecturas por medio de los factores de corrección ( $f_c$ ) de la tabla 2, con objeto de obtener las amplitudes reales de los antinodos. Así se encuentra  $M_1 = (M_1^o)(f_1)$ ,  $M_2 = (M_2^o)(f_2)$ .
- 3) Se determina  $\Omega$  como cociente de las amplitudes corregidas de los antinodos.

$$\Omega = \frac{M_1}{M_2}$$

- 4) A partir de  $\Omega$  se evalúa el factor de amortiguamiento interno ( $\alpha$ ) por medio de la fórmula (45) correspondiente a la sección 1.4 y se encuentra que

$$\alpha = \frac{\text{arc cosh } \Omega}{\delta}$$

- 5) El conocimiento de  $\alpha$  implica el conocimiento del coeficiente de absorción de energía acústica (A) que se calcula mediante la expresión (51). Así se tiene que

$$A = 1 - [\cosh (\alpha \delta)]^{-2}$$

- 6) Establecidos los parámetros de absorción acústica se procede a establecer la función que relacione a  $\alpha$  con  $\delta$  para  $\nu$  constante, para ello puede utilizarse un polinomio, si la tendencia del patrón experimental de  $\alpha$  está bien definida, o bien la expresión (52) - en caso contrario. En cualquier caso los parámetros del ajuste y el error del mismo, se determinarán como se indica en el Apéndice 1.
- 7) Calculados los parámetros del ajuste el material queda caracterizado puesto que es posible predecir su comportamiento, evaluando la función ajustada para cualquier espesor que se encuentre dentro de los límites impuestos por los valores máximo y mínimo de los espesores de las muestras. Asimismo, el conocimiento de dichos parámetros no sólo permite predecir  $\alpha$ , sino también el coeficiente de absorción de energía (A) mediante la fórmula (51).

## C A P I T U L O 3

## C O N C L U S I O N E S

## CONCLUSIONES .

Como primer punto es importante destacar que los resultados obtenidos con el Método Diferencial están sujetos a las limitaciones impuestas por el intervalo de frecuencias permisibles en el aparato de ondas estacionarias. Lo anterior implica, que para trabajar con frecuencias más altas, sería necesario utilizar otro aparato de ondas estacionarias, cuyo tubo constara de un diámetro no mayor de 5 centímetros. De lo anterior resulta que para cubrir el conjunto de frecuencias audibles, sería necesario contar con varios aparatos de ondas estacionarias cuyos tubos fueran de diámetros distintos. Sin embargo, un hecho que puede observarse en las gráficas 1, 2 y 3, es que en general, el coeficiente de absorción aumenta conforme aumenta la frecuencia. Lo anterior es algo que se percibe con mucha más claridad cuando se trabaja con ultrasonido, en altas frecuencias, entonces se encuentra que un metro de aire es suficiente para amortiguar la onda, hasta hacer que su amplitud sea despreciable con la que tenía originalmente. En el presente caso, para frecuencias audibles mayores que las aquí utilizadas, la absorción será tan grande que para cualquier aplicación práctica dejará de constituir un problema. Por esto último, para caracterizar un material es suficiente con evaluar sus parámetros, como se hizo en el presente trabajo.

La discrepancia existente entre los valores del coeficiente de absorción obtenidos en el Método Diferencial y los correspondientes obtenidos con el Método Tradicional, constituye otro punto interesante. Como puede observarse en las tablas 5 y 6 y en las gráficas 1, 2 y 3, la diferencia mencionada tiende a reducirse conforme aumentan  $\delta$  y  $\nu$ , lo cual concuerda con las predicciones teóricas en el caso de  $\delta$ , puesto que, como se dijo al aumentar ésta, el Método Tradicional resulta consistente con su fundamento teórico, en el cual implícitamente se supone que no existe una onda reflejada desde la -



pared rígida.

La importancia de esto último constituye el motivo por el cual se utilizó también el Método Tradicional, ya que la única manera, por la cual podía ser verificada la bondad del Método Diferencial, era por comparación con un método conocido o por autoconsistencia. El caso de comparación es el que acaba de discutirse y la autoconsistencia será tratada posteriormente.

Una de las ventajas más sobresalientes del Método Diferencial, es que muestra con mucha claridad los picos de absorción que presentan las muestras de espesores pequeños ( $\delta \leq 12\text{cm}$ ) como puede apreciarse en la tabla 6 o en las gráficas 1, 2 y 3. Aún cuando explicar el origen de dichos picos es objeto de un estudio que sobrepasa el nivel del tratamiento teórico empleado en este trabajo, es importante resaltar que el Método Diferencial, al separar los efectos de interfase y de amortiguamiento interno, origina la posibilidad de encontrar los mecanismos específicos por medio de los cuales el material caracterizado degrada la energía acústica en su interior; así como evaluar la cantidad de energía acústica que es degradada por cada uno de esos mecanismos. Finalmente cabe decir que el estudio de la forma en la que un material degrada la energía acústica en su interior se sugiere como una futura línea de trabajo.

Regresando a la cuestión de la bondad del Método Diferencial para caracterizar un material a través de sus parámetros de absorción y predecir su comportamiento, se mencionó anteriormente que otra manera de verificarla sería comprobando su autoconsistencia. Lo anterior quiere decir que la comprobación deberá hacerse por medio de la concordancia entre las predicciones teóricas y los resultados experimentales. Como puede verse en la tabla 9 y en las gráficas 4 y 5 los resultados teóricos y experimentales concuerdan notablemente, lo cual motiva la confianza en el Método Experimental y fortalece las hipótesis en las cuales se fundamenta. Respecto a la bondad del ajuste cabe mencionar que definitivamente es necesario obtener un número considerablemente mayor de puntos experimentales,

es decir, evaluar un número mayor de muestras de distintos espesores con objeto de definir claramente la tendencia del patrón experimental de  $\alpha$  y poder elegir con mayor eficiencia, el tipo de función -- que ajuste  $\alpha$  como función de  $\delta$ , a  $\nu$  constante, así como para observar y localizar con más precisión, los picos de absorción que presentan las muestras en sus distintos espesores. Es por lo anterior -- que, como se dijo anteriormente, los resultados obtenidos sólo fortalecen las hipótesis en las cuales se funda el Método Diferencial, pero de ninguna manera, puede decirse que sean lo suficientemente concluyentes para considerar dichas hipótesis totalmente válidas.

Por otra parte resulta imprescindible reconocer que, hasta el momento, no se ha encontrado explícitamente la función que relacione en forma directa a  $\alpha$  con la frecuencia y el espesor de la muestra, es por ello que dicho estudio se sugiere también como un trabajo posterior. Sin embargo, en los que a los objetivos primarios concierne, puede decirse que fueron cumplidos, ya que fué establecido un método que permite caracterizar a los materiales por medio de sus parámetros acústicos. Dicho método necesita ser refinado para obtener de él toda la información posible, pero dados los resultados obtenidos, puede concluirse que es adecuado.

Para terminar, es muy importante indicar que el presente trabajo es sólo la puerta que permite el acceso a un vasto campo de investigación sobre la absorción de energía acústica dentro del cual -- pueden ser estudiados los mecanismos internos de absorción, la absorción en el caso de incidencia a cualquier ángulo, la absorción como función de la geometría de la muestra sobre la cual incide la onda, -- así como una gran cantidad de variantes en este campo de la Física -- que, a pesar de haber recibido una gran atención, resulta todavía poco conocido.

A P E N D I C E 1

## METODO DE MINIMOS CUADRADOS PARA AJUSTAR UN POLINOMIO DE CUALQUIER GRADO A UN CONJUNTO DE N PUNTOS EXPERIMENTALES.

Considérese un conjunto de puntos experimentales

$$\{y_k, x_k\}$$

donde  $k$  es el número de puntos que, en este caso se supone igual a  $N$ .

Entonces se postula una relación entre los valores  $y_k, x_k$ . En general se supone

$$y = \sum_i A_i f_i(x) \quad \dots (a1)$$

Donde  $A_i$  es un conjunto de parámetros e  $i$  su número que se supone igual a  $L$ .

Como ejemplo tómesese el caso en el cual se supone una relación lineal, si tal es el caso (a1) se convierte en

$$y = bx + a$$

con una cantidad de parámetros

$$i = 2$$

Por lo tanto

$$y = A_1 x + A_2$$

donde

$$A_1 = b$$

$$f_1(x) = x$$

$$A_2 = a$$

$$f_2(x) = 1$$

Ahora bien, en general se tendrá una relación

$$y_c = \sum_i A_i f_i(x_k)$$

en la cual  $y_c$  es el valor calculado de  $y$  en contraste con  $y_k$  que es el valor observado, por lo tanto el cuadrado de su diferencia podrá expresarse como

$$(\Delta y)^2 = \sum_x (y_k - y_c)^2 \quad \dots (a2)$$

lo cual puede escribirse como:

$$(\Delta y)^2 = \sum_k (y_k - \sum_i A_i f_{ik})^2 \quad \dots (a3)$$

Con  $f_{ik} = f_i(x_k)$

Así, derivando la expresión (a3) se encuentra que

$$\frac{\delta (\Delta y)^2}{\delta A_j} = \sum_x 2(y_k - \sum_i A_i f_{ik}) (-f_{jk}) \quad \dots (a4)$$

Entonces, como se trata de que las diferencias cuadráticas de los valores calculados y observados sean mínimos se procede a igualar a cero la expresión (a4) obteniendo

$$\frac{\delta (\Delta y)^2}{\delta A_j} = \sum_k 2(y_k - \sum_i A_i f_{ik}) (-f_{jk}) = 0 \quad \dots (a5)$$

de donde resulta que

$$\sum_k (y_k - \sum_i A_i f_{ik}) (f_{jk}) = 0 \quad \dots (a6)$$

lo cual implica

$$\sum_k y_k f_{jk} = \sum_{k,i} A_i f_{jk} f_{ik} \quad \dots (a7)$$

Ahora bien, considerando el término de la izquierda en la expresión (a7)

$$\sum_k f_{jk} y_k \quad \dots \text{ (a8)}$$

se observa que es un elemento producto de las matrices

$$\begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & \dots & f_{1N} \\ f_{21} & f_{22} & \dots & f_{2N} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ f_{L1} & f_{L2} & \dots & f_{LN} \end{pmatrix}_{L \times N} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ y_N \end{pmatrix}_{N \times 1}$$

Por otra parte, atendiendo al término de la derecha en la expresión (a7) se tiene que

$$\sum_{k,i} A_i f_{ik} f_{jk} = \sum_i A_i \sum_k f_{ik} \tilde{f}_{kj} \quad \dots \text{ (a9)}$$

Entonces, si  $T$  es la matriz cuyo tamaño es  $L \times N$ ,  $Y$  la matriz de los valores observados  $y_k$  cuyo tamaño es  $N \times 1$  y  $A$  la matriz formada por los parámetros  $A_i$  cuyo tamaño es  $L \times 1$  se encuentra que

$$\sum_k f_{ik} \tilde{f}_{kj} = (T \times \tilde{T}) \quad \dots \text{ (a10)}$$

Por lo tanto (a9) se convierte en

$$\sum_j A_j (T \times \tilde{T})_{ij} = \sum_j (T \times \tilde{T})_{ij} A_j \quad \dots \text{ (a11)}$$

De donde

$$T \times Y = T \times \tilde{T} \times A \quad \dots (a12)$$

Así, la matriz  $A$  de los parámetros puede ser determinada como

$$A = (T \times \tilde{T})^{-1} \times T \times Y \quad \dots (a13)$$

Con los cual el problema queda resuelto.

Obsérvese que no se ha supuesto nada acerca de la naturaleza de las funciones  $f_{ik}$ , es decir que este método es aplicable también al caso en el cual  $f_{ik}$  no es sólo una potencia de  $x_k$ , sino que puede ser también una función algebraica más complicada e inclusive -- una función trascendente.

PROGRAMA DE COMPUTADORA PARA APLICAR EL METODO DE MINIMOS CUADRADOS.

```
10 PRINT
20 PRINT
30 PRINT "REGRESION DE ORDEN N"
40 PRINT
50 PRINT
60 PRINT "GRADO DE LA ECUACION";
70 INPUT D
80 PRINT
90 PRINT
100 DIM A(2*D+1)
110 DIM R(D+1,D+2)
120 DIM T(D+2)
130 PRINT "NUMERO DE PUNTOS EXPERIMENTALES";
140 INPUT N
150 A(1)=N
160 FOR I=1 TO N
170 PRINT "VALORES DE X, Y DEL PUNTO";I;
180 INPUT X, Y
190 FOR J=2 TO 2*D+1
200 A(J)=A(J)+X^(J-1)
210 NEXT J
220 FOR K=1 TO D+1
230 R(K,D+2)=T(K)+Y*X^(K-1)
240 T(K)=T(K)+Y*X^(K-1)
250 NEXT K
260 T(D+2)=T(D+2)+Y^2
270 NEXT I
280 FOR J=1 TO D+1
```



```
290 FOR K=1 TO D+1
300 R(J,K)=A(J+K-1)
310 NEXT K
320 NEXT J
330 FOR J=1 TO D+1
340 FOR K=J TO D+1
350 IF R(K,J) <> 0 THEN 390
360 NEXT K
370 PRINT "SOLUCION NO UNICA"
380 GOTO 930
390 R I=1 TO D+2
400 SO R(J,I)=R(K,I)
420 R(K,I)=S
430 NEXT I
440 Z=I/R(J,J)
450 FOR I=1 TO D+2
460 R(J,I)=Z*R(J,I)
470 NEXT I
480 FOR K=1 TO D+1
490 IF K=J THEN 540
500 Z=-R(K,J)
510 FOR I=1 TO D+2
520 R(K,I)=R(K,I)+Z*R(J,I)
530 NEXT I
540 NEXT K
550 NEXT J
560 PRINT
570 PRINT "      CONSTANTE= "
580 PRINT R(1,D+2)
590 FOR J=1 TO D
600 PRINT "COEFICIENTE DEL TERMINO DE GRADO";J; " = "
610 PRINT R(J+1,D+2)
620 NEXT J
630 PRINT
640 P=0
```

```
650 FOR J=2 TO D+1
660 P=P+R(J,D+2)*(T(J)-A(J)*T(1)/N)
670 NEXT J
680 Q=T(D+2)-T(1)^2/N
690 Z=Q-P
700 I=N-D-1
710 PRINT
720 J=P/Q
730 PRINT "COEFICIENTE DE"
740 PRINT "DETERMINACION"
750 PRINT "(R^2) = ";J
760 PRINT "COEFICIENTE DE CORRELACION=";
770 PRINT SQR(J)
780 PRINT "ERROR ESTANDAR ESTIMADO=";
790 PRINT SQR(Z/I)
800 PRINT
810 PRINT "INTERPOLACION:"
820 PRINT "PONGA 0 PARA TERMINAR EL PROGRAMA"
830 P=R(1,D+2)
840 PRINT "X= "
850 INPUT X
860 IF X=0 THEN 930
870 FOR J=1 TO D
880 P=P+R(J+1,D+2)*X^J
890 NEXT J
900 PRINT "Y=";P
910 PRINT
920 GOTO 830
930 END
```

REFERENCIAS .

- 1.- TECHNICAL REVIEW. Brüel And Kjaer. No. 1. Enero 1955
- 2.- TUMA. SITZ. der Kaiz. Akad der. Weissenschaften, III 2A,  
p. 402(1902)
- 3.- KINSLER, LAWRENCE E.; FREY, AUSTIN R. p. 144. Fundamentals  
of Acoustics. John Wiley and Sons, Inc. 1950
- 4.- RAYLEIGH, Theory of Sounds Vol. II, 2nd Ed, p. 161, Cambridge  
1896

## B I B L I O G R A F I A .

- 1.- ELMORE, WILLIAM C.; HEALD, MARK A. Physics of Waves. McGraw-Hill Kobakusha, LTD. 1969.
- 2.- KINSLER, LAWRENCE E.; FREY, AUSTIN R. Fundamentals of Acoustics. John Wiley and Sons, INC. 1950.
- 3.- ZWIKKER, C.; KOSTEN, C. W. Sound Absorbing Materials. Elsevier Publishing Company, INC. 1949.