

DEDICATORIA.

A mis padres: Rodolfo Conde Quintero (Q.E.P.D.) y
Aurea del Aguila Vda. de Conde
A quienes debo todo lo que soy.

A mis hermanos: Raúl Conde del Aguila
José Guadalupe Conde del Aguila
Rodolfo Conde del Aguila
Oscar E. Conde del Aguila (Q.E.P.D.)

A mi esposa: Lourdes Díaz Bautista con profundo amor, por su ejemplo de -
trabajo y honestidad.

A mis hijos: Roberto Conde Díaz y Rafael Enrique Conde Díaz, cuyas vidas
han enriquecido la mía.

A la familia Ocaña Ruíz y con especial afecto al Lic. Jose Luis Ocaña Andra
de por su calidad de amigo.

A la memoria del señor Anastasio Ocampo Wade por sus consejos e inolvidable
amistad.

A los miembros del Centro de Cómputo del Instituto de Ingeniería de la Uni--
versidad "Juárez" Autónoma de Tabasco y a mi amigo Federico Suárez Domínguez,
quienes hicieron posible la impresión de la presente tesis.

Deseo expresar mi más profundo agradecimiento al Doc
tor en Ciencias Alipio Gustavo Calles Martínez, en
quien siempre encontré la mejor disposición para dis
cutir los problemas que surgieron en el desarrollo y
elaboración del presente trabajo.

FISJCO
Conde del Aguila Roberto



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

I N D I C E

INTRODUCCION

CAPITULO PRIMERO

Aspectos Historicos.

CAPITULO SEGUNDO

- 2.1 Principios de cálculo Variacional.
- 2.2 Distancia y tiempo de recorrido óptimo, sin fricción en base a un principio variacional.
- 2.3 Tabla I

CAPITULO TERCERO

- 3.1 Distancia y tiempo en un plano inclinado sin fricción.
- 3.2 Tabla II
- 3.3 Distancia y tiempo en un plano inclinado con fricción.
- 3.4 Tabla III
- 3.5 Tabla comparativa I.
- 3.6 Distancia y tiempo por la parte superior e inferior en una trayectoria rectangular sin fricción.
- 3.7 Tabla IV y V
- 3.8 Distancia y tiempo por la parte superior e inferior en una trayectoria rectangular con fricción.
- 3.9 Tablas VI y VII
- 3.10 Tabla comparativa II y III

CAPITULO CUARTO

- 4.1 Ecuación general de las cónicas con foco en el eje X pasando por el origen y el punto (a,b).
- 4.2 Distancia y tiempo de recorrido por una sección cónica sin fricción.
- 4.3 Graficas.

CAPITULO QUINTO

Curvas de tiempo óptimo con fricción.

Conclusiones.

Bibliografía.

I N T R O D U C C I O N

El presente trabajo tiene como objetivo calcular y comparar el tiempo requerido por una partícula para deslizarse sobre una curva en un plano vertical, por acción de la gravedad desde un punto a otro, así como de ilustrar la importancia en la enseñanza, del cálculo de variaciones y de la integración numérica.

En el capítulo primero se presentan los aspectos históricos del problema de la braquistocrona, que se plantearon y resolvieron los hermanos Bernoulli. Dicho problema consistió en hallar la forma de la curva por la cual al deslizarse sin fricción una partícula por acción de la gravedad y en un plano vertical, el tiempo fuera mínimo. La importancia del problema de la braquistocrona fue tal que dió inicio a una nueva rama de las matemáticas llamada cálculo de variaciones. El primer método desarrollado por Jacob Bernoulli, para resolver este problema utiliza el problema de mínimo de la ley de la refracción simple, y es en si un método de un carácter especial, es decir adaptado al problema. Sin embargo Euler y Lagrange desarrollaron métodos más generales para resolver problemas de extremo en los cuales el elemento independiente no era una sola variable numérica ó un número finito de tales variables, sino toda una curva o función, e incluso un sistema de funciones. Se llamó Cálculo de Variaciones al nuevo método que permitió resolver dichos problemas. En el capítulo segundo se comenta la ecuación de Euler-Lagrange del cálculo de variaciones, para utilizarla en el cálculo de la trayectoria óptima, es decir la de tiempo mínimo sin considerar fricción. En el capítulo tercero se calculan los tiempos de caída de una partícula por un plano inclinado, primero sin fricción y después considerandola, para luego hacer lo mismo para con trayectorias rectangulares, finalmente en este capítulo se comparan los tiempos y distancias de caída entre las trayectorias recta o plano inclinado con la rectangular. En el capítulo cuarto se escojen como trayectorias las secciones cónicas y se hacen graficas de distancia y tiempo contra la excentricidad de las cónicas. En el capítulo quinto se hace un breve comentario del artículo 'brachistochrone with Coulomb Friction', escrito por cuatro investigadores del departamento de física y astrofísica de la Universidad de Colorado, en el que se resuelve el problema de encontrar las trayectorias de tiempo mínimo, cuando existe fricción. En dicho artículo se resuelve esta cuestión aplicando el cálculo de variaciones y al final se exponen varios resultados, para diferentes valores del coeficiente de fricción.

CAPITULO PRIMERO
ASPECTOS HISTORICOS

En el siglo XVII los hermanos Bernoulli, formularon y estudiaron un problema que dió inicio a una nueva rama de las matemáticas, que se denominó, Cálculo de Variaciones. El problema que se plantearon fue el siguiente, si un cuerpo pequeño se mueve bajo la influencia de la gravedad de un punto a otro a lo largo de una curva dada en un plano vertical, entonces el tiempo necesario para efectuar el recorrido por dicha curva dependerá naturalmente de la forma de la curva. El tiempo será diferente si el cuerpo se mueve a lo largo de una línea recta, esto es, en un plano inclinado, que a lo largo de una curva. La pregunta de los hermanos Bernoulli era, ¿que trayectoria requiere menor tiempo?. Uno podría pensar que el movimiento a lo largo de una línea recta es el más rápido, pero Galileo ya había advertido que el tiempo requerido en algunas curvas es menor que el de la línea recta. Los hermanos Bernoulli hallaron la forma de la curva que requiere menor tiempo posible. Se trataba de una curva ya conocida en geometría y que había sido denominada cicloide. La cicloide es el lugar geométrico descrito por un punto de una circunferencia que rueda sobre una línea recta sin deslizar, figura (1.1).

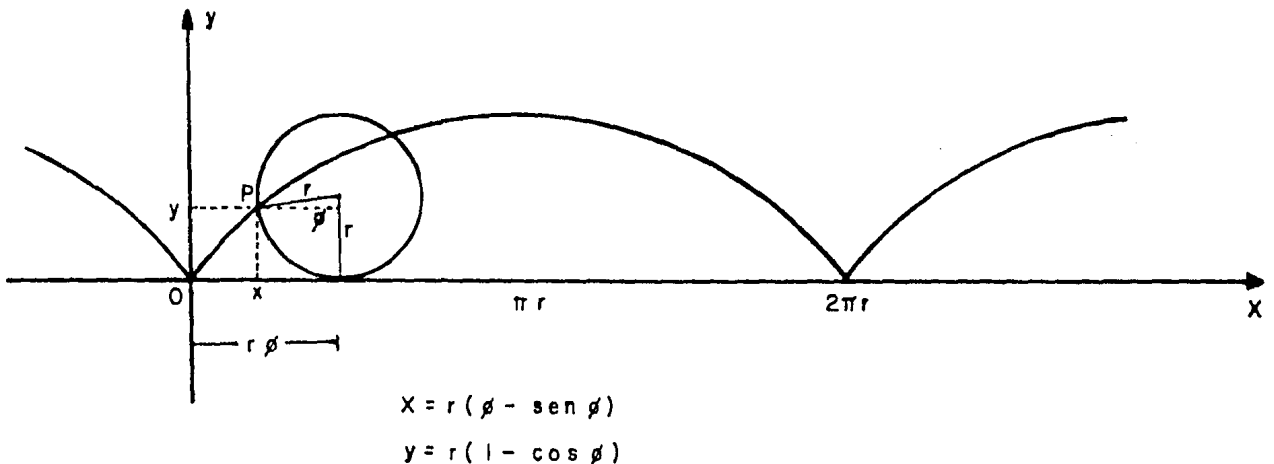


Figura (1.1)

Los matemáticos de la época reconocieron inmediatamente que el problema de la braquistocrona (la palabra braquistocrona se deriva de dos palabras griegas que significan tiempo mas corto), era de un caracter enteramente diferente. Mientras que hasta entonces en los problemas estudiados mediante el cálculo diferencial, la cantidad cuyo mínimo se buscaba dependía solo de una o más variables numéricas, en este problema la cantidad que se

consideraba, es decir, el tiempo necesario para el descenso, dependía de toda la curva, lo que constituyó una diferencia esencial, que ponía el problema fuera del alcance del cálculo diferencial o de cualquier otro método conocido en aquella época. Este problema interesó grandemente a los matemáticos contemporáneos, tanto más al conocer que la solución estaba dada por la cicloide, curva que había sido relacionada con la construcción de un péndulo ideal. Huygens había descubierto que un punto ideal provisto de masa, que oscile sin rozamiento bajo la acción de la gravedad en una cicloide vertical, tiene un período de oscilación independiente de la amplitud del movimiento.

El primer método desarrollado por Jacob Bernoulli para resolver el problema de la braquistocrona, utilizó el principio de mínimo de la ley de la refracción simple. Esta ley empírica encontrada por Snell (1591-1602), afirma que la trayectoria de un rayo de luz que pasa de un medio homogéneo a otro se desvía en la superficie de separación de ambos de tal forma que la trayectoria consta de dos segmentos rectilíneos, AA' y A'B, que forman con la normal dos ángulos, α y α' , determinados por la condición,

$$\text{Sen } \alpha / \text{Sen } \alpha' = V / V'$$

Así en la figura (1.2), un rayo luminoso que parte de un punto A, en el medio superior donde la velocidad de la luz es V, hacia un punto B, donde la velocidad es V', seguirá la trayectoria AA'B, cumpliendo la ley de refracción.

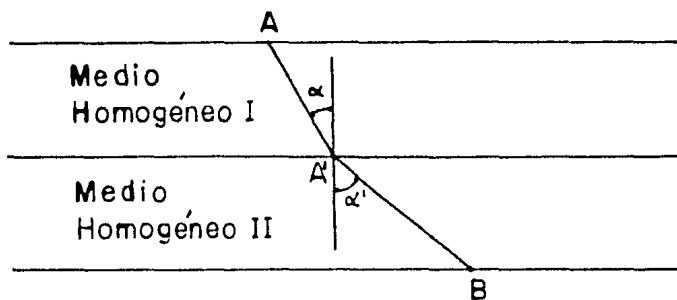


FIGURA (1.2)

Fermat demostró, por medio del cálculo que esta trayectoria es tal que el tiempo necesario para que el rayo de luz pase de A a B es mínimo, es decir, menor de lo que sería si siguiera cualquier otra trayectoria. Para utilizar esta ley, Jacob Bernoulli tuvo primero en cuenta que cuando una partícula cae desde un punto Po sin velocidad inicial, siguiendo una curva C, tendrá en cualquier punto P' de la curva una velocidad proporcional a \sqrt{H} , siendo H la distancia vertical entre Po y P'; es decir, $V = K\sqrt{H}$, donde K es una constante. luego dividió el espacio en numerosas y delgadas capas horizontales, cada una de espesor h, y supuso que la velocidad de la partícula en movimiento no varía continuamente,

sino en pequeños saltos, al pasar de una capa a otra; es decir que en la primera capa adyacente a P_0 , la velocidad es $k\sqrt{h}$; en la segunda, $k\sqrt{2h}$, y en la n -ésima, $k\sqrt{nh} = k\sqrt{H}$. Al ser rectilínea la trayectoria en cada capa, la solución es una poligonal, ver figura (1.3)

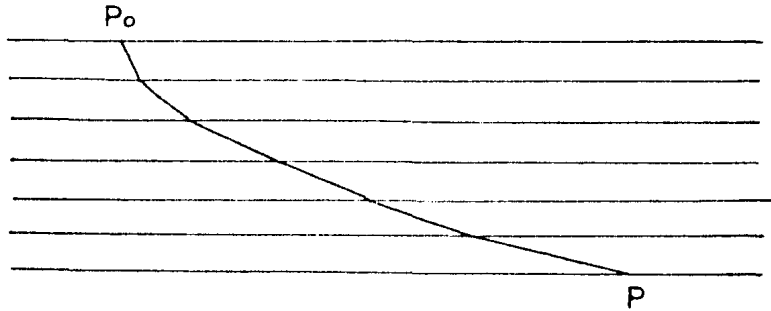


FIGURA (1.3)

En este momento es donde Bernoulli utiliza el principio de mínimo de la ley de la refracción, ya que de acuerdo a esta ley en cada par de capas sucesivas el movimiento de A a B pasando por A' , figura (1.2) debe ser tal que, suponiendo A y B fijos, A' proporciona la curva de tiempo mínimo. Por lo tanto, si tomamos la capa m -ésima y la que le sigue, figura (1.4) y aplicamos dicha ley tendremos,

$$\frac{\text{sen } \alpha}{\text{sen } \alpha'} = \frac{k\sqrt{mh}}{k\sqrt{(m+1)h}}, \text{ esto es, } \frac{\text{sen } \alpha}{\sqrt{mh}} = \frac{\text{sen } \alpha'}{\sqrt{(m+1)h}}$$

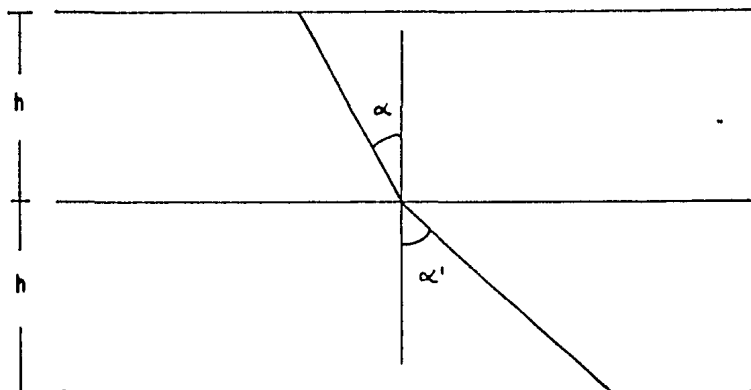


FIGURA (1.4)

aplicando reiteradamente este razonamiento se obtiene la siguiente sucesión de igualdades:

$$\frac{\text{sen } \alpha_1}{\sqrt{h}} = \frac{\text{sen } \alpha_2}{\sqrt{2h}} = \frac{\text{sen } \alpha_3}{\sqrt{3h}} = \dots = \frac{\text{sen } \alpha_n}{\sqrt{H}} \quad (1.1)$$

donde α_n es el ángulo entre la poligonal en la n-ésima capa y la vertical. Bernoulli supone ahora que el espesor h se hace cada vez mas pequeño y tiende a cero, de modo que el polígono tiende a la solución buscada del problema original. Este paso al límite no afecta a las igualdades (1.1), por lo que Bernoulli concluye que la solución debe ser una curva C , que tenga la siguiente propiedad: Si α es el ángulo formado por la tangente y la vertical en cualquier punto P de C , y H es la distancia vertical de P a la horizontal que pasa por P_0 , $\text{sen } \alpha / \sqrt{H}$ es constante para todos los puntos P de C , figura (1.5)

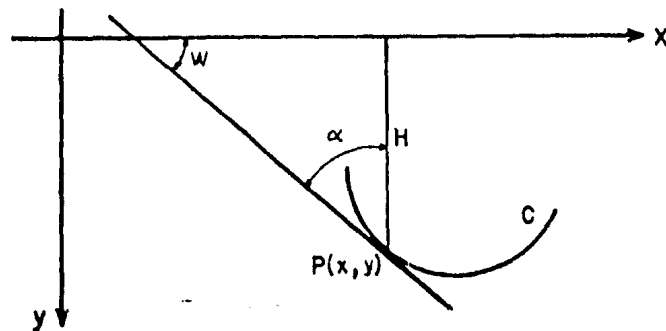


FIGURA (1.5)

De este modo para todo punto $P(x, y)$ de la curva requerida C , tendremos, $H=y$ y que $\text{sen } \alpha / \sqrt{H} = k$, esto es,

$$\text{sen } \alpha = k\sqrt{y} \quad (1.2)$$

donde, k , es una constante. Así mismo de acuerdo a la figura (1.5),

$$\frac{dy}{dx} = \tan w = \cot \alpha = \frac{1}{k} \sqrt{\frac{1 - k^2 y}{y}}$$

elevando al cuadrado $y' = \frac{dy}{dx}$, obtenemos

$$y'^2 = \frac{1}{k^2 y} - 1, \text{ esto es, } 1 + y'^2 = \frac{1}{k^2 y}$$

pero de (1.2) $k^2 y = \sec^2 \alpha$, por lo que la ecuación anterior toma la forma,

$$1 + y'^2 = \sec^2 \alpha \quad (1.3)$$

pero, $y'' = (-\sec^2 \alpha) \alpha'$, lo cual implica,

$$\sec^2 \alpha = -\frac{y''}{\alpha'} \quad (1.4)$$

por otra parte derivando la expresión (1.2) con respecto a x nos da,

$$(\cos \alpha) \alpha' = \frac{ky'}{2\sqrt{y}} , \text{ de donde } \alpha' = \frac{1}{2y}$$

sustituyendo esta última expresión en (1.4), tenemos que,

$$\sec^2 \alpha = -2yy''$$

por lo que la relación (1.3) se puede escribir como,

$$1 + y'^2 + 2yy'' = 0$$

ecuación diferencial cuya solución son las ecuaciones paramétricas de la cicloide, esto es,

$$x = r(\phi - \operatorname{sen} \phi) \quad Y \quad y = r(1 - \cos \phi)$$

donde r es el radio de la circunferencia que engendra la cicloide al rodar sobre una recta fija y ϕ es el ángulo central de dicha circunferencia, ver definición y figura (1.1).

CAPITULO SEGUNDO

2.1 Principios de cálculo Variacional. Ecuación de Euler-Lagrange.

En la teoría matemática de los problemas de máximo y mínimo en el cálculo de variaciones se emplean distintos métodos. El antiguo método clásico consiste en hallar criterios sobre sí, para una curva determinada, el número correspondiente alcanza o no un máximo o un mínimo. A fin de hallar tales criterios, se varía un poco la curva considerada, y de este método proviene el nombre de "Cálculo de Variaciones" para toda la rama de la matemática. El primer resultado de este método, fue la ecuación de Euler-Lagrange.

Otro método consiste en descubrir de forma bastante general si un problema dado tiene o no solución. Como ejemplo podemos considerar los dos problemas siguientes: Dos puntos dados pueden unirse mediante todas las curvas posibles; entonces ¿cual de ellas tiene menor longitud? y ¿cual la mayor?. El primer problema tiene solución: el segmento recto que une a los dos puntos es la línea más corta que los une. El segundo problema no tiene solución. La longitud es un número asociado a cada curva que no alcanza un máximo finito para ninguna de ellas.

Al hablar del cálculo variacional, se introduce el concepto de funcional. Se llaman funcionales a las magnitudes variables cuyos valores se determinan mediante la elección de una o varias funciones. Los problemas en que se exige investigar el máximo o el mínimo de una funcional, se denominan problemas variacionales.

Consideremos la funcional:

$$J(y(x)) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y(x), y'(x)) \quad (2.1)$$

con puntos frontera, $y(x_0)=y_0$ e $y(x_1)=y_1$, fijos. La condición necesaria para que halla un extremo es que la variación de la función se anule. Supongamos que en la curva $y=y(x)$ se tiene un extremo y tomemos cierta curva $y=\bar{y}(x)$ cercana a $y=y(x)$ e incluyamos estas dos curvas en la familia de curvas,

$$y(x, \alpha) = y(x) + \alpha [\bar{y}(x) - y(x)]$$

Cuando $\alpha = 0$, se obtiene la curva $y=y(x)$; para $\alpha = 1$, se tiene $y=\bar{y}(x)$.

La diferencia $\bar{y}(x) - y(x)$ se denomina variación de la función $y(x)$ y se denota por δy . De esta forma consideremos la familia,

$$y(x, \alpha) = y(x) + \delta y$$

que contiene para $\alpha = 0$, la curva en la cual se alcanza el extremo y para $\alpha = 1$, cierta curva cercana, que llamaremos curva de comparación.

Si consideramos los valores de la funcional $J(y(x))$ solo en las curvas de la familia $y(x, \alpha)$, la funcional se transforma en función de α , esto es,

$$J(y(x, \alpha)) = W(\alpha)$$

ya que el valor del parámetro α determina una curva de la familia $y(x, \alpha)$, determinando también con esto el valor de la función $J(y(x, \alpha))$. Esta función tiene un extremo en $\alpha = 0$, ya que para dicho valor se tiene $y = y(x)$. La condición necesaria para que la función $W(\alpha)$ tenga un extremo en $\alpha = 0$, es que se anule su derivada en $\alpha = 0$, esto es, $W'(0) = 0$.

Como,

$$W(\alpha) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y(x, \alpha), y'_x(x, \alpha)) dx$$

tendremos,

$$W'(\alpha) = \int_{x_0}^{x_1} \left[\frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \alpha} y(x, \alpha) + \frac{\partial F}{\partial y'} \frac{\partial}{\partial \alpha} y'(x, \alpha) \right] dx$$

pero,

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} y(x, \alpha) = \frac{\partial}{\partial \alpha} [y(x) + \alpha \delta y] = \delta y$$

y

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} y'_x(x, \alpha) = \frac{\partial}{\partial \alpha} [y'_x(x) + \alpha \delta y'_x] = \delta y'_x$$

con lo cual,

$$W'(\alpha) = \int_{x_0}^{x_1} \left[\frac{\partial F}{\partial y} F(x, y(x, \alpha), y'_x(x, \alpha)) \delta y + \frac{\partial F}{\partial y'} F(x, y(x, \alpha), y'_x(x, \alpha)) \delta y'_x \right] dx$$

y

$$W'(0) = \int_{x_0}^{x_1} \left[\frac{\partial}{\partial y} F(x, y(x), y'(x)) \delta y + \frac{\partial}{\partial y'} F(x, y(x), y'(x)) \delta y' \right] dx$$

pero $W'(0)$ es la variación de la funcional, que denotaremos por δJ , y su anulación es la condición de extremo de la funcional,

$$J(y(x)) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y') dx$$

por lo que para la condición de extremo tendrá que cumplirse lo siguiente,

$$\int_{x_0}^{x_1} \left[\frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y' \right] dx = 0$$

pero, $\delta y' = (\delta y)'$, con lo cual la expresión anterior queda,

$$\int_{x_0}^{x_1} \left[\frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F}{\partial y'} (\delta y)' \right] dx = 0$$

integrando el segundo sumando por partes tendremos:

$$\left[\frac{\partial F}{\partial y'} \delta y \right]_{x_0}^{x_1} + \int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \right) \delta y dx = 0$$

pero,

$$\delta y \Big|_{x_0} = \bar{y}(x_0) - y(x_0) = 0, \quad \gamma \quad \delta y \Big|_{x_1} = \bar{y}(x_1) - y(x_1) = 0$$

ya que todas las curvas admisibles en el problema considerado pasan por los puntos frontera fijos (x_0, y_0) y (x_1, y_1) , por lo tanto la condición necesaria de extremo toma la forma:

$$\int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \right) \delta y \, dx = 0$$

como $\delta y = \bar{y}(x) - y(x)$, es una variación arbitraria de $y(x)$, se deduce que la expresión anterior, para la condición de extremo se cumple solamente si,

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) = 0 \quad (2.2)$$

en la curva, $y(x)$, que realiza el extremo de la funcional considerada. La ecuación (2.2) se denomina ecuación de Euler-Lagrange. Las curvas integrales de esta ecuación $y = y(x_1, c_1, c_2)$ se denominan extremales.

Para hallar la curva que realice un extremo de la funcional (2.1), se integra la ecuación de Euler-Lagrange y se determinan las dos constantes arbitrarias, que figuran en la solución general de esta ecuación, de las condiciones de frontera, $y(x_0) = y_0$, $y(x_1) = y_1$.

2.2 Distancia y tiempo de recorrido óptimo, sin fricción, en base a un principio variacional.

Consideremos una partícula que desliza sin fricción, sobre una curva, por acción de la gravedad, en un plano vertical, desde un punto $A(0,0)$ a un punto $C(a,b)$, partiendo del reposo, figura (2.1).

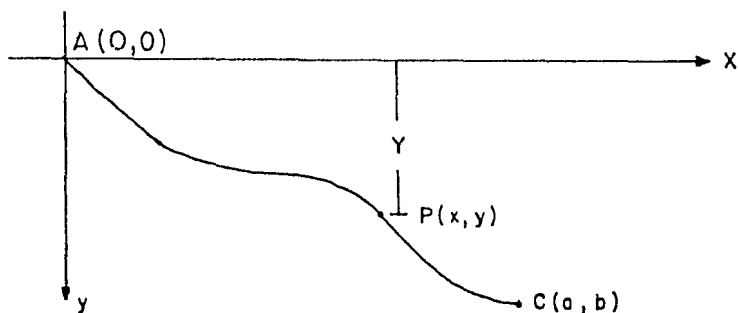


FIGURA (2.1)

Supongamos que la partícula tiene masa M y que su posición esta dada por $P(x,y)$. Por el principio de conservación de la energía tendremos que cuando la partícula halla descendido una distancia "Y" vertical (figura (2.1)) por la curva, habrá una transformación de energía potencial en energía cinética, de acuerdo a la relación,

$$mgy = 1/2 m v^2$$

donde v es la magnitud de la velocidad de la partícula y g la aceleración de la gravedad. De la relación anterior tendremos que,

$$dt = \frac{ds}{\sqrt{2gy}} = \sqrt{\frac{1 + (dy/dx)^2}{2gy}} = \frac{1}{\sqrt{2g}} \sqrt{\frac{1 + \dot{y}^2}{y}} dx$$

esto es,

$$t = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int \sqrt{\frac{1 + \dot{y}^2}{y}} dx = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int F(x, y, \dot{y}) dx$$

donde

$$F(x, y, \dot{y}) = \sqrt{\frac{1 + \dot{y}^2}{y}} \quad Y \quad y(0) = 0, \quad y(a) = b$$

De acuerdo al cálculo de variaciones, el tiempo será mínimo para la curva $Y(x)$, tal que

$$F(x, y, \dot{y}) = \sqrt{\frac{1 + \dot{y}^2}{y}}$$

satisfaga la ecuación de Euler-Lagrange, esto es,

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{y}} \right) = 0 \quad (2.3)$$

Haciendo el cálculo de las derivadas parciales de la ecuación diferencial (2.3), obtenemos,

$$\frac{\partial F}{\partial y} = -\frac{1}{2} y^{-3/2} (1 + \dot{y}^2)^{1/2}$$

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{y}} = (1 + \dot{y}^2)^{-1/2} \dot{y} y^{-1/2}$$

y

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{y}} \right) = -\frac{1}{2} (1 + \dot{y}^2) \dot{y}^2 y^{-3/2} + (1 + \dot{y}^2)^{-1/2} \ddot{y} y^{-1/2} - (1 + \dot{y}^2)^{-3/2} \dot{y} \dot{y}^2 y^{-1/2}$$

sustituyendo estas expresiones en la ecuación (2.3) y simplificando obtenemos

$$\dot{y}^2 + 2y\ddot{y} + 1 = 0 \quad (2.4)$$

Para resolver la ecuación diferencial (2.4) hagamos, $\dot{y} = q$, con lo cual,

$$\ddot{y} = \frac{dq}{dx} = \frac{dq}{dy} \frac{dy}{dx} = \frac{dq}{dy} \dot{y} = q \frac{dq}{dy}$$

sustituyendo en (2.4) tendremos,

$$1 + q^2 + 2yq \frac{dq}{dy} = 0$$

esto es,

$$\frac{2q}{1+q^2} dq + \frac{dy}{y} = 0$$

integrando esta última expresión, resulta,

$$y(1 + q^2) = C$$

donde C es una constante, pero,

$$q = \dot{y} = \frac{dy}{dx}$$

con lo cual la expresión anterior nos queda

$$dx = \sqrt{\frac{y}{c-y}} dy$$

donde haciendo la sustitución

$$y = C \operatorname{sen}^2 \theta$$

obtenemos

$$x = \frac{1}{2} C (2\theta - \operatorname{sen} 2\theta) + C_1$$

y

$$y = \frac{1}{2} C (1 - \cos 2\theta)$$

siendo C_1 otra constante. Como la curva pasa por el punto (0,0), tendremos que $C_1 = 0$, con lo cual

$$x = \frac{1}{2} C (2\theta - \operatorname{sen} 2\theta)$$

y

$$y = \frac{1}{2} C (1 - \cos 2\theta)$$

haciendo entonces $\phi = 2\theta$ y $r = \frac{1}{2} C$, nos queda:

$$x = r(\phi - \text{sen } \phi) \quad (2.5)$$

y

$$y = r(1 - \text{cos } \phi) \quad (2.6)$$

las ecuaciones (2.5) y (2.6) son las ecuaciones paramétricas de la curva $Y(x)$ buscada, por la cual la partícula se desliza sin fricción del punto $(0,0)$ al punto (a,b) en un tiempo mínimo. Esta curva es conocida con el nombre de cicloide. Por lo que la trayectoria de tiempo mínimo es un arco de cicloide invertida tal como se muestra en la figura (2.2).

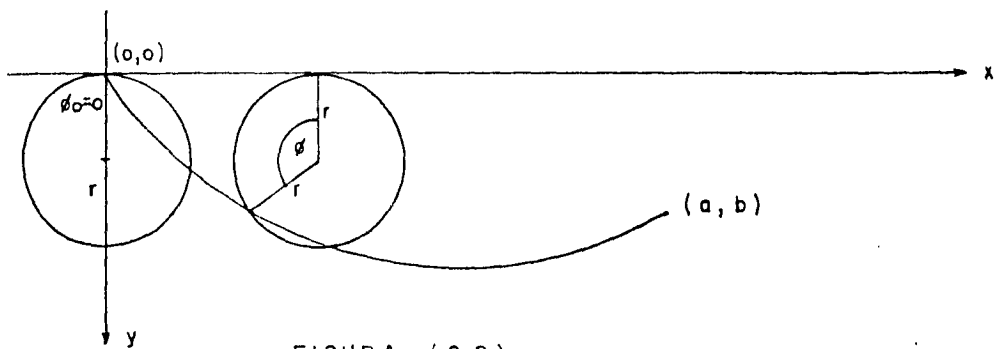


FIGURA (2.2)

Para calcular el tiempo mínimo escribamos la ecuación

$$t = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int \sqrt{\frac{1 + \dot{y}^2}{y}} dx$$

en la forma:

$$t = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int \sqrt{\frac{(dx)^2 + (dy)^2}{y}}$$

y de las ecuaciones (2.5) y (2.6) obtengamos

$$dx = r(1 - \text{cos } \phi) d\phi$$

y

$$dy = r \text{sen } \phi d\phi$$

que sustituyendo en la ecuación para T nos da:

$$t = \sqrt{\frac{r}{g}} \int_{\phi_0}^{\phi_1} d\phi = \sqrt{r/g} (\phi_1 - \phi_0)$$

pero en $(0,0)$ tenemos $\phi_0 = 0$ por lo que:

$$t = \phi_1 \sqrt{r/g} \quad (2.7)$$

De las ecuaciones (2.5) y (2.6) podemos obtener la ecuación rectangular de la cicloide, esto es:

$$\frac{x}{r} = \text{arc cos} \left(1 - \frac{y}{r} \right) - \text{sen} \left[\text{arc cos} \left(1 - \frac{y}{r} \right) \right] \quad (2.8)$$

la cual podemos emplear para determinar el valor de la constante r , de tal forma que la curva pase por el punto (a,b) , luego de la ecuación (2.6) es posible determinar el ángulo θ , con el cual podemos determinar el tiempo por medio de la expresión (2.7).

Para el calculo de la distancia recorrida tenemos que

$$dS = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$$

y como

$$(dx)^2 + (dy)^2 = \left[r^2(1 - \cos \theta)^2 + r^2 \text{sen}^2 \theta \right] (d\theta)^2 = 2r^2(1 - \cos \theta)(d\theta)^2$$

de donde

$$dS = \sqrt{2} r \sqrt{1 - \cos \theta} d\theta = 2r \text{sen} \left(\frac{\theta}{2} \right) d\theta$$

para finalmente obtener

$$S = 4r (1 - \cos (\theta/2)) \quad (2.9)$$

Por medio de las expresiones (2.7) y (2.9) podemos hallar el tiempo y la distancia de recorrido de una partícula al ir del punto $(0,0)$ a un punto (a,b) , en el tiempo mínimo de acuerdo al problema planteado. En la tabla I se muestran los valores hallados para los diferentes puntos (a,b) escogidos. En la misma, T y S representan el tiempo y la distancia para cada cicloide correspondiente a cada punto (a,b) .

2.3 TABLA I.

(A,B)	ϕ	R	S	T
(1.0.2)	4.5946	0.1790	1.1916	0.6205
(1.0.4)	3.8197	0.2249	1.1988	0.5786
(1.0.6)	3.2340	0.3006	1.2579	0.5664
(1.0.8)	2.7753	0.4137	1.3534	0.5699
(1.1.0)	2.4120	0.5729	1.4741	0.5828
(1.1.2)	2.1216	0.7877	1.6127	0.6011
(1.1.4)	1.8867	1.0682	1.7643	0.6225
(1.1.6)	1.6945	1.4243	1.9254	0.64566
(1.1.8)	1.5351	1.8666	2.0935	0.6696
(1.2.0)	1.4014	2.4055	2.2670	0.6939
(1.4.0)	0.7364	15.4375	4.1387	0.9237
(1.6.0)	0.4959	49.8094	6.0932	1.1174
(1.8.0)	0.3733	116.1591	8.0701	1.2845
(1.10.0)	0.2991	225.2357	10.0561	1.4331

CAPITULO TERCERO

3.1 Distancia y tiempo en un plano inclinado sin fricción.

Consideremos una partícula que se desplaza, desde un punto $(0,0)$ a un punto (a,b) , siguiendo una trayectoria recta por medio de un plano inclinado, sin fricción y por acción de la gravedad. Sea α el ángulo de inclinación del plano y consideremos cero la velocidad inicial de la partícula, figura (3.1)

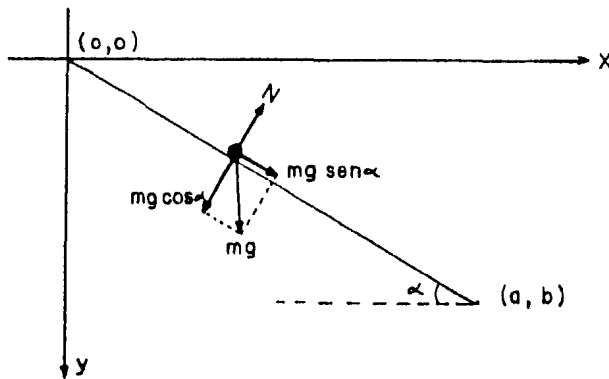


FIGURA (3.1)

la aceleración será

$$A = g \sin \alpha$$

donde

$$\alpha = \arctan (b/a)$$

con lo que, de la relación

$$S = 1/2 A t^2$$

tendremos

$$t = \sqrt{\frac{2S}{g \sin \alpha}} \quad (3.1)$$

donde

$$S = \sqrt{a^2 + b^2} \quad (3.2)$$

3.2 TABLA II.

LAS RELACIONES (3.1) Y (3.2) NOS PERMITEN ENCONTRAR EL TIEMPO Y LA DISTANCIA RECORRIDA POR LA PARTICULA ENTRE LOS PUNTOS CONSIDERADOS.

(A, B)	DISTANCIA S	TIEMPO T $\mu_{k=0}$
(1, 0.2)	1.01980	1.02963
(1, 0.4)	1.07703	0.76892
(1, 0.6)	1.16619	0.67979
(1, 0.8)	1.28062	0.64648
(1, 1.0)	1.41421	0.63855
(1, 1.2)	1.56205	0.64385
(1, 1.4)	1.72047	0.65654
(1, 1.6)	1.88680	0.67351
(1, 1.8)	2.05913	0.69299
(1, 2.0)	2.23607	0.71392
(1, 4.0)	4.12311	0.93084
(1, 6.0)	6.08276	1.12126
(1, 8.0)	8.06226	1.28704
(1, 10.0)	10.04988	1.43496

3.3 Distancia y tiempo en un plano inclinado con fricción.

Supongamos ahora que existe fricción entre el plano inclinado y la partícula, siendo μ_k el coeficiente de fricción cinético, figura (3.2)

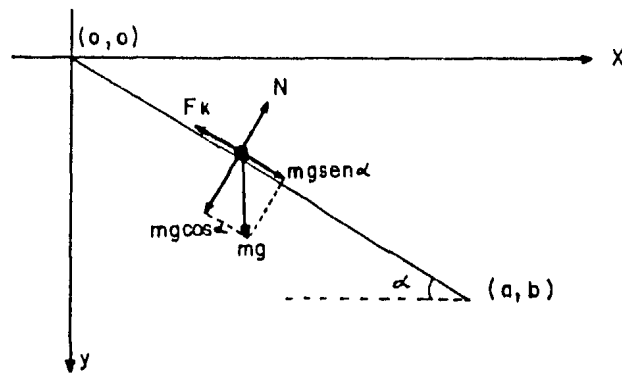


FIGURA (3.2)

la aceleración estará dada por

$$A = g(\sin \alpha - \mu_k \cos \alpha)$$

donde

$$\alpha = \arctan(b/a)$$

con lo que, de la relación

$$S = 1/2 \cdot A t^2$$

tendremos

$$t = \sqrt{\frac{2S}{g(\sin \alpha - \mu_k \cos \alpha)}} \quad (3.3)$$

donde

$$S = \sqrt{a^2 + b^2} \quad (3.4)$$

3.4 TABLA III.

LAS EXPRESIONES (3.3) Y (3.4) NOS PERMITEN HALLAR EL TIEMPO Y LA DISTANCIA RECORRIDA POR LA PARTICULA ENTRE LOS PUNTOS (0,0) Y (A,B), LA TABLA III NOS MUESTRA LOS VALORES CALCULADOS PARA S Y T, A PARTIR DE LOS DADOS A, 'A', 'B', Y $\mu_k = 1$

(A,B)	DISTANCIA S	TIEMPO T $\mu_k = 1$
(1, 0.2)	1.01980	1.45612
(1, 0.4)	1.07703	0.88787
(1, 0.6)	1.16619	0.74467
(1, 0.8)	1.28062	0.69112
(1, 1.0)	1.41421	0.67309
(1, 1.2)	1.56205	0.67248
(1, 1.4)	1.72047	0.68133
(1, 1.6)	1.88680	0.69560
(1, 1.8)	2.05913	0.71308
(1, 2.0)	2.23607	0.73247
(1, 4.0)	4.12311	0.94270
(1, 6.0)	6.08276	1.13072
(1, 8.0)	8.06226	1.29516
(1,10.0)	10.04988	1.44219

3.5 TABLA COMPARATIVA I.

DE LAS TABLAS II Y III PODEMOS ELABORAR LA TABLA SIGUIENTE:

(A,B)	α	S	T $\mu_x=0$	T $\mu_x=0.1$
(1,0.2)	0.19740	1.01980	1.02963	1.45612
(1,0.4)	0.38051	1.07703	0.76892	0.88787
(1,0.6)	0.54042	1.16619	0.67979	0.74467
(1,0.8)	0.67474	1.28062	0.64648	0.69112
(1,1.0)	0.78540	1.41421	0.63855	0.67309
(1,1.2)	0.87606	1.56205	0.64385	0.67248
(1,1.4)	0.95055	1.72047	0.65654	0.68133
(1,1.6)	1.01220	1.88680	0.67351	0.69560
(1,1.8)	1.06370	2.05913	0.69299	0.71308
(1,2.0)	1.10715	2.23607	0.71392	0.73247
(1,4.0)	1.32582	4.12311	0.93084	0.94270
(1,6.0)	1.40565	6.08276	1.12126	1.13072
(1,8.0)	1.44644	8.06226	1.28704	1.29516
(1,10)	1.47113	10.04988	1.43496	1.44219

3.6 Distancia y tiempo por la parte superior e inferior en una trayectoria rectangular sin fricción.

Supongamos ahora que la partícula se desplaza partiendo del reposo por la parte superior del rectángulo indicando en la figura (3.3) esto es por la trayectoria ABC, para trasladarse desde el punto (0,0) al punto (a,b) y que no existe fricción.

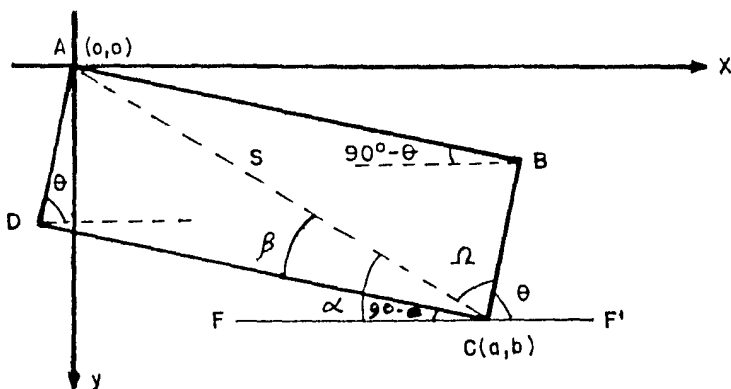


FIGURA (3.3)

sea FF' una línea recta paralela al eje X , θ el ángulo de inclinación del rectángulo, α el ángulo que forma la diagonal S , con la recta FF' . Supondremos que en el vértice, 'B', hay una ligera curvatura, de tal modo que la partícula cambia en forma continua de pendiente, al pasar por allí, pero no altera significativamente el tiempo de recorrido desde el punto 'A' al 'C', calculándolo como el tiempo en el plano inclinado AB más el tiempo del plano inclinado BC .

Analizando la figura (3.3), nos damos cuenta que el ángulo entre el lado DC del rectángulo y la recta FF' es de $90 - \theta$, por lo que para el lado AB , tendremos que la aceleración es :

$$A = g \sin (90^\circ - \theta) = g \cos \theta$$

y

$$AB = \frac{1}{2} g (\cos \theta) t_{AB}^2$$

por lo que

$$t_{AB} = \sqrt{\frac{2(AB)}{g \cos \theta}} \quad (3.5)$$

donde t_{AB} es el tiempo de recorrido de la partícula sobre el lado AB,

Además si denotamos por β el ángulo formado por la diagonal S y el lado DC, se deduce de la figura (3.3) que,

$$\beta = \alpha - (90^\circ - \theta) = \alpha + \theta - 90^\circ \quad \text{y que} \quad \cos \beta = \frac{DC}{S} = \frac{AB}{S}$$

por lo que

$$AB = S \cos \beta$$

esto es

$$AB = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(\alpha + \theta) \quad (3.6)$$

sustituyendo la relación (3.6) en (3.5), tendremos:

$$t_{AB} = \sqrt{\frac{2 \sqrt{a^2 + b^2} \sin(\alpha + \theta)}{g \cos \theta}} \quad (3.7)$$

para calcular el tiempo de recorrido del lado BC necesitamos conocer la velocidad en el vértice, B, llamémosla, V_B , entonces:

$$V_B = g(\cos \theta) \sqrt{\frac{2 \sqrt{a^2 + b^2} \sin(\alpha + \theta)}{g \cos \theta}} \quad (3.8)$$

por otra parte la aceleración en el lado BC es,

$$A = g \sin \theta$$

y

$$BC = V_B t_{BC} + \frac{1}{2} g (\sin \theta) t_{BC}^2 \quad (3.9)$$

siendo t_{BC} el tiempo de desplazamiento de la partícula sobre el lado BC del rectángulo. Resolviendo (3.9) para t_{BC} , encontramos que,

$$t_{BC} = \frac{-V_B + \sqrt{V_B^2 + 2g(\sin \theta)(BC)}}{g \sin \theta} \quad (3.10)$$

pero de la figura (3.3) podemos ver que

$$\text{Sen } \beta = \frac{AD}{S} = \frac{BC}{S}$$

por lo que

$$BC = S(\text{sen } \beta)$$

esto es,

$$BC = -\sqrt{a^2 + b^2} \cos(\alpha + \theta) \quad (3.11)$$

sustituyendo (3.11) en (3.12) obtenemos:

$$t_{BC} = \frac{-V_B + \sqrt{V_B^2 - 2g\sqrt{a^2 + b^2}(\text{sen } \theta) \cos(\alpha + \theta)}}{g \text{ sen } \theta} \quad (3.12)$$

sumando entonces las relaciones (3.7) y (3.12) obtenemos el tiempo total de recorrido de la partícula desde el punto (0,0) al punto (a,b), por la parte superior del rectángulo, de acuerdo a las condiciones impuestas, esto es,

$$t_{ABC} = \sqrt{\frac{2\sqrt{a^2 + b^2} \text{sen}(\alpha + \theta)}{g \cos \theta}} + \frac{-V_B + \sqrt{V_B^2 - 2g\sqrt{a^2 + b^2}(\text{sen } \theta) \cos(\alpha + \theta)}}{g \text{ sen } \theta} \quad (3.13)$$

donde V_B esta dada por (3.8) y $\alpha = \text{arc tan}(b/a)$.

Sumando las relaciones (3.6) y (3.11) encontramos la distancia total recorrida, denotándola por S' , tendremos :

$$S' = \sqrt{a^2 + b^2} \left[\text{sen}(\alpha + \theta) - \cos(\alpha + \theta) \right] \quad (3.14)$$

nótese que si denotamos por Ω , el ángulo con vértice en (a,b) y lados la diagonal S y BC , entonces $\alpha + \Omega + \theta = 180^\circ$, por lo que $\alpha + \theta > 90^\circ$, para tener un rectángulo. Si $\alpha + \theta = 180^\circ$ ($\Omega = 0$) o $\alpha + \theta = 90^\circ$ ($\Omega = 90^\circ$) entonces tenemos que BC coincide con S y tendríamos el deslizamiento por una trayectoria recta.

Consideremos en la figura (3.3) el tiempo de recorrido por la trayectoria ADC. El tiempo total será igual al tiempo para recorrer AD más el tiempo para recorrer DC.

Para AD, tenemos que la aceleración es,

$$A = g \sin \theta$$

y por lo tanto

$$t_{AD} = \sqrt{\frac{2(AD)}{g \sin \theta}}$$

usando (3.11) tendremos

$$t_{AD} = \sqrt{\frac{-2 \sqrt{a^2 + b^2} \cos(\alpha + \theta)}{g \sin \theta}} \quad (3.15)$$

para el cálculo del tiempo en el lado DC necesitamos conocer la velocidad de la partícula en el vértice D, designando dicha velocidad por V_D , tenemos que,

$$V_D = g(\sin \theta) \sqrt{\frac{-2 \sqrt{a^2 + b^2} \cos(\alpha + \theta)}{g \sin \theta}} \quad (3.16)$$

la aceleración para esta parte es,

$$A = g \cos \theta$$

con lo cual

$$DC = V_D t_{DC} + \frac{1}{2} g (\cos \theta) t_{DC}^2 \quad (3.17)$$

resolviendo (3.17) para t_{DC} , hallamos que,

$$t_{DC} = \frac{-V_D + \sqrt{V_D^2 + 2g(\cos \theta) DC}}{g \cos \theta}$$

sustituyendo (3.6) ya que $AD=DC$, nos queda,

$$t_{DC} = \frac{-V_D + \sqrt{V_D^2 + 2g \sqrt{a^2 + b^2} (\cos \theta) \sin(\alpha + \theta)}}{g \cos \theta} \quad (3.18)$$

sumando las relaciones (3.15) y (3.18), obtendremos el tiempo de recorrido, de la partícula entre los puntos (0,0) y (a,b), por la parte inferior del rectángulo, esto es,

$$t_{ADC} = \sqrt{\frac{-2 \sqrt{a^2 + b^2} \cos(\alpha + \theta)}{g \sin \theta}} + \frac{-V_D + \sqrt{V_D^2 + 2g \sqrt{a^2 + b^2} \cos \theta \sin(\alpha + \theta)}}{g \cos \theta} \quad (3.19)$$

donde V_D está dada por la expresión (3.16) y $\alpha = \arctan(b/a)$. La distancia total recorrida, $S'' = AD + DC = S'$, está dada por la suma de las relaciones (3.6) y (3.11), esto es,

$$S'' = S' = \sqrt{a^2 + b^2} \left[\sin(\alpha + \theta) - \cos(\alpha + \theta) \right] \quad (3.20)$$

3.7 TABLAS IV Y V.

DE LAS EXPRESIONES (3.13), (3.14) Y (3.19), ES POSIBLE CALCULAR EL TIEMPO Y LA DISTANCIA RECORRIDA POR LA PARTICULA ENTRE LOS PUNTOS CONSIDERADOS, TANTO POR LA TRAYECTORIA ABC COMO POR LA AIC. LAS TABLAS IV Y V, MUESTRAN LOS VALORES ENCONTRADOS PARA S' , T_{ABC} Y T_{AIC} , ASIGNANDOLE A LAS VARIABLES 'A' Y 'B' LOS MISMOS VALORES QUE SE LE HAN ASIGNADO Y PARA θ UN VALOR TAL QUE, $90^\circ - \alpha < \theta < 90^\circ$.

TABLA IV

(A,B)	DISTANCIA S'	TIEMPO T_{ABC}
(1, 0.2)	1.10980	1.46293
(1, 0.4)	1.32961	1.56033
(1, 0.6)	1.54942	1.63781
(1, 0.8)	1.76923	1.70497
(1, 1.0)	1.98904	1.76550
(1, 1.2)	2.20885	1.82130
(1, 1.4)	2.42866	1.87349
(1, 1.6)	2.64827	1.92280
(1, 1.8)	2.86828	1.96974
(1, 2.0)	3.08809	2.01469
(1, 4.0)	5.28619	2.39521
(1, 6.0)	7.48430	2.70559
(1, 8.0)	9.68240	2.97726
(1,10.0)	11.88050	3.22291

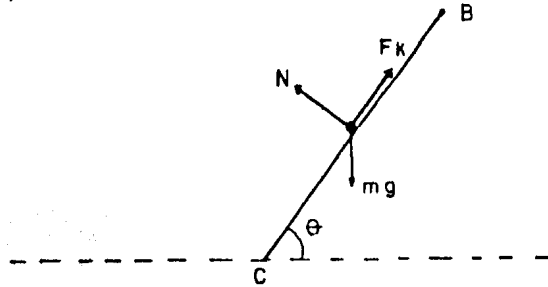
TABLA V

(A,B)	DISTANCIA S'	TIEMPO T _{ADC}
(1, 0.2)	1.10980	0.74751
(1, 0.4)	1.32961	0.64428
(1, 0.6)	1.54942	0.64145
(1, 0.8)	1.76923	0.65885
(1, 1.0)	1.98904	0.68283
(1, 1.2)	2.20885	0.70920
(1, 1.4)	2.42866	0.73633
(1, 1.6)	2.64827	0.76350
(1, 1.8)	2.86828	0.79038
(1, 2.0)	3.08809	0.81680
(1, 4.0)	5.28619	1.05206
(1, 6.0)	7.48430	1.24681
(1, 8.0)	9.68240	1.41570
(1,10.0)	11.88050	1.56673

$$V_B = g(\cos \theta - \mu_k \sin \theta) \frac{2 \sqrt{a^2 + b^2} \sin(\alpha + \theta)}{g(\cos \theta - \mu_k \sin \theta)} \quad (3.23)$$

por otra parte, la aceleración en el tramo BC, figura (3.5), está dada por,

$$A = g(\sin \theta - \mu_k \cos \theta) \quad (3.24)$$



FIGURA(3.5)

y

$$BC = V_B t_{BC} + \frac{1}{2} g(\sin \theta - \mu_k \cos \theta) t_{BC}^2 \quad (3.25)$$

resolviendo (3.25) para t_{BC} , nos queda,

$$t_{BC} = \frac{-V_B + \sqrt{V_B^2 + 2g(\sin \theta - \mu_k \cos \theta) BC}}{g(\sin \theta - \mu_k \cos \theta)} \quad (3.26)$$

de la relación (3.11)

$$BC = -\sqrt{a^2 + b^2} \cos(\alpha + \theta)$$

por lo que (3.26) queda,

$$t_{BC} = \frac{-V_B + \sqrt{V_B^2 - 2g\sqrt{a^2 + b^2}(\sin \theta - \mu_k \cos \theta) \cos(\alpha + \theta)}}{g(\sin \theta - \mu_k \cos \theta)} \quad (3.27)$$

con lo que el tiempo de recorrido en la trayectoria ABC, está dado por la suma de las expresiones (3.22) y (3.27), esto es,

$$t_{ABC} = \sqrt{\frac{2\sqrt{a^2 + b^2} \sin(\alpha + \theta)}{g(\cos \theta - \mu_k \sin \theta)}} + \frac{-V_B + \sqrt{V_B^2 - 2g\sqrt{a^2 + b^2}(\sin \theta - \mu_k \cos \theta) \cos(\alpha + \theta)}}{g(\sin \theta - \mu_k \cos \theta)} \quad (3.28)$$

donde V_B está dada por (3.23) y $\alpha = \text{arc.tan}(b/a)$.

La distancia total recorrida está dada por la relación (3.14) o (3.20), esto es,

$$S' = \sqrt{a^2 + b^2} \left[\text{sen}(\alpha + \theta) - \text{cos}(\alpha + \theta) \right] \quad (3.29)$$

De las expresiones (3.28) y (3.29) es posible calcular el tiempo y la distancia entre los puntos 'A' y 'C', por la trayectoria ABC, existiendo ahora fricción.

Consideremos ahora, la trayectoria ADC de figura (3.4). Para AD, figura (3.6), tenemos que la partícula tendrá una aceleración dada por,

$$A = g(\text{sen } \theta - \mu_k \text{cos } \theta)$$

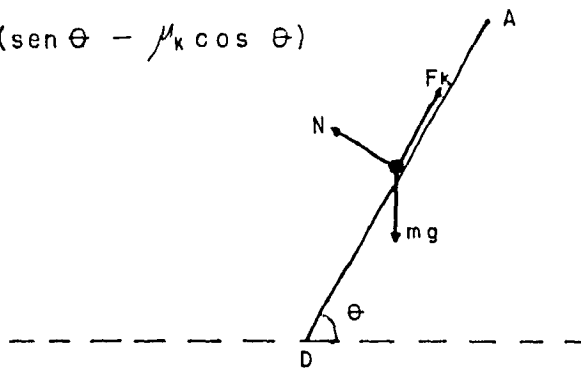


FIGURA (3.6)

como suponemos que parte del reposo, tendremos,

$$AD = \frac{1}{2} g (\text{sen } \theta - \mu_k \text{cos } \theta) t_{AD}^2 \quad (3.30)$$

donde t_{AD} es el tiempo, que tarda la partícula para ir desde el punto 'A', al punto 'D'. Despejando de (3.30) el tiempo y sustituyendo la relación (3.11) nos queda,

$$t_{AD} = \sqrt{\frac{-2 \sqrt{a^2 + b^2} \text{cos}(\alpha + \theta)}{g(\text{sen } \theta - \mu_k \text{cos } \theta)}} \quad (3.31)$$

Para obtener el tiempo t_{DC} , es decir el tiempo desde el punto 'D' al punto 'C', necesitamos la velocidad en 'D', sea esta V_D , entonces,

$$V_D = g(\sin \theta - \mu_k \cos \theta) \sqrt{\frac{-2 \sqrt{a^2 + b^2} \cos(\alpha + \theta)}{g(\sin \theta - \mu_k \cos \theta)}} \quad (3.32)$$

la aceleración en el lado DC, de acuerdo a la figura (3.7), está dada por,

$$A = g(\cos \theta - \mu_k \sin \theta)$$

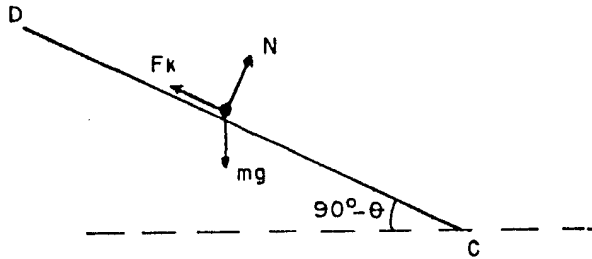


FIGURA (3.7)

con lo cual,

$$DC = V_D t_{DC} + \frac{1}{2} g(\cos \theta - \mu_k \sin \theta) t_{DC}^2 \quad (3.33)$$

Resolviendo (3.33) para t_{DC} , obtenemos,

$$t_{DC} = \frac{-V_D + \sqrt{V_D^2 + 2g(\cos \theta - \mu_k \sin \theta)(DC)}}{g(\cos \theta - \mu_k \sin \theta)} \quad (3.34)$$

sustituyendo en esta expresión (3.34) la relación (3.6), obtenemos,

$$t_{DC} = \frac{-V_D + \sqrt{V_D^2 + 2g \sqrt{a^2 + b^2} (\cos \theta - \mu_k \sin \theta) \sin(\alpha + \theta)}}{g(\cos \theta - \mu_k \sin \theta)} \quad (3.35)$$

con lo que el tiempo de recorrido en la trayectoria ADC, está dada por la suma de las relaciones, (3.31) y (3.35), esto es,

$$t_{ADC} = \sqrt{\frac{-2 \sqrt{a^2 + b^2} \cos(\alpha + \theta)}{g(\sin \theta - \mu_k \cos \theta)}} + \frac{-V_D + \sqrt{V_D^2 + 2g \sqrt{a^2 + b^2} (\cos \theta - \mu_k \sin \theta) \sin(\alpha + \theta)}}{g(\cos \theta - \mu_k \sin \theta)} \quad (3.36)$$

donde V_D está dada por (3.32). La distancia total recorrida en el trayecto ADC, está expresada por la relación (3.14) o (3.20), esto es,

$$S' = \sqrt{a^2 + b^2} [\sin(\alpha + \theta) - \cos(\alpha + \theta)]$$

3.9 TABLAS VI Y VII.

DE LAS RELACIONES (3.28), (3.29) Y (3.36) PODEMOS CALCULAR EL TIEMPO Y LA DISTANCIA ENTRE LOS PUNTOS 'A' Y 'C', TANTO POR LA TRAYECTORIA ABC COMO POR LA TRAYECTORIA ADC. PARA EL CASO EN QUE EXISTE FRICCIÓN. LAS TABLAS VI Y VII MUESTRAN LOS VALORES CALCULADOS PARA S' , T_{ABC} Y T_{ADC} , ASIGNÁNDOLES A LAS VARIABLES K , 'A', 'B' Y ' θ '. LOS MISMOS VALORES QUE SE LE ASIGNARON ANTERIORMENTE.

TABLA VI

(A,B)	DISTANCIA S'	TIEMPO T_{ABC}
(1, 0.2)	1.10980	6.97289
(1, 0.4)	1.32961	7.03889
(1, 0.6)	1.54942	7.07747
(1, 0.8)	1.76923	7.13459
(1, 1.0)	1.98904	7.20389
(1, 1.2)	2.20885	7.28023
(1, 1.4)	2.42866	7.36046
(1, 1.6)	2.64827	7.44274
(1, 1.8)	2.86828	7.52595
(1, 2.0)	3.08809	7.60940
(1, 4.0)	5.28619	8.41185
(1, 6.0)	7.48430	9.14044
(1, 8.0)	9.68240	9.80955
(1,10.0)	11.88050	10.43234

TABLA VII

(A,B)	DISTANCIA S'	TIEMPO T_{ADC}
(1, 0.2)	1.10980	0.88191
(1, 0.4)	1.32961	0.68004
(1, 0.6)	1.54942	0.66134
(1, 0.8)	1.76923	0.67295
(1, 1.0)	1.98904	0.69411
(1, 1.2)	2.20885	0.71890
(1, 1.4)	2.42866	0.74506
(1, 1.6)	2.64827	0.77161
(1, 1.8)	2.86828	0.79807
(1, 2.0)	3.08809	0.82421
(1, 4.0)	5.28619	1.05910
(1, 6.0)	7.48430	1.25445
(1, 8.0)	9.68240	1.42405
(1,10.0)	11.88050	1.57579

3.10 TABLAS COMPARATIVAS II Y III.

A PARTIR DE LAS TABLAS IV, V, VI Y VII PODEMOS HACER LA SIGUIENTE TABLA COMPARATIVA II. DE LA TABLA I Y LAS TABLAS COMPARATIVAS I Y II, ELABORAMOS LA TABLA COMPARATIVA III, EN LA CUAL PODEMOS COMPARAR LOS DIFERENTES TIEMPOS DE RECORRIDO Y DISTANCIA, ENTRE LOS PUNTOS DADOS DE ACUERDO A LAS TRAYECTORIAS CONSIDERADAS

T A B L A C O M P A R A T I V A

II

(A,B)	S'	T_{ABC} $\mu_k=0 \theta=84^\circ$	T_{ADC} $\mu_k=0 \theta=84^\circ$	T_{ABC} $\mu_k=1 \theta=84^\circ$	T_{ADC} $\mu_k=1 \theta=84^\circ$
(1,0.2)	1.10980	1.46293	0.74751	6.97289	0.88191
(1,0.4)	1.32961	1.56033	0.64428	7.03889	0.68004
(1,0.6)	1.54942	1.63781	0.64145	7.07747	0.66134
(1,0.8)	1.76923	1.70497	0.65885	7.13459	0.67295
(1,1.0)	1.98904	1.76550	0.68283	7.20389	0.69411
(1,1.2)	2.20885	1.82130	0.70920	7.28023	0.71890
(1,1.4)	2.42866	1.87349	0.73633	7.36046	0.74506
(1,1.6)	2.64847	1.92280	0.76350	7.44274	0.77161
(1,1.8)	2.86828	1.96974	0.79038	7.52595	0.79807
(1, 2)	3.08809	2.01469	0.81680	7.60940	0.82421
(1, 4)	5.28619	2.39521	1.05206	8.41185	1.05910
(1, 6)	7.48430	2.70559	1.24681	9.14044	1.25445
(1, 8)	9.68240	2.97726	1.41570	9.80955	1.42405
(1, 10)	11.88050	3.22291	1.56673	10.43234	1.57579

TABLA COMPARATIVA

III

(A,B)	S	S'	TIEMPO T	T ABC	T ADC	TIEMPO T	T ABC	T ADC	DIS- TANCIA	TIEMPO CICLOIDE
			$\mu_k = 0$	$\mu_k = 0$	$\mu_k = 0$	$\mu_k = 0.1$	$\mu_k = 0.1$	$\mu_k = 0.1$		
(1,0.2)	1.01980	1.10980	1.02963	1.46293	0.74751	1.45612	6.97289	0.88191	1.1916	0.6205
(1,0.4)	1.07703	1.32961	0.76892	1.56033	0.64428	0.88787	7.03889	0.68004	1.1988	0.5786
(1,0.6)	1.16619	1.54942	0.67979	1.63781	0.64145	0.74467	7.07747	0.66134	1.2579	0.5664
(1,0.8)	1.28062	1.76923	0.64648	1.70497	0.65885	0.69112	7.13459	0.67295	1.3534	0.5699
(1, 1)	1.41421	1.98904	0.63855	1.76550	0.68283	0.67309	7.20389	0.69411	1.4741	0.5828
(1,1.2)	1.56205	2.20885	0.64385	1.82130	0.70920	0.67248	7.28023	0.71890	1.6127	0.6011
(1,1.4)	1.72047	2.42866	0.65654	1.87349	0.73633	0.68133	7.36046	0.74506	1.7643	0.6225
(1,1.6)	1.88680	2.64847	0.67351	1.92280	0.76350	0.69560	7.44274	0.77161	1.9254	0.6456
(1,1.8)	2.05913	2.86828	0.69299	1.96974	0.79038	0.71308	7.52595	0.79807	2.0935	0.6696
(1, 2)	2.23607	3.08809	0.71392	2.01469	0.81680	0.73247	7.60940	0.82421	2.2670	0.6939
(1, 4)	4.12311	5.28619	0.93084	2.39521	1.05206	0.94270	8.41185	1.05910	4.1387	0.9237
(1, 6)	6.08276	7.48430	1.12126	2.70559	1.24681	1.13072	9.14044	1.25445	6.0932	1.1174
(1, 8)	8.06226	9.68240	1.28704	2.97726	1.41570	1.29516	9.80955	1.42405	8.0701	1.2845
(1, 10)	10.04988	11.88050	1.43496	3.22291	1.56673	1.44219	10.43234	1.57579	10.0561	1.4331

CAPITULO CUARTO

4.1 Ecuación general de cónicas, con foco en eje X, pasando por el origen y un punto (a,b).

La definición general de cónicas, incluye una recta fija L, llamada directriz, un punto fijo F, llamado foco y un punto P, que se mueve en el plano de L y F, de tal manera que la razón de su distancia de F a su distancia de L, es siempre igual a una constante positiva o cero. El lugar geométrico descrito por P, es en sí la cónica.

Sea L la recta $x = q$, F el punto $(P,0)$ y $P(x,y)$, un punto cualquiera del lugar geométrico, figura (4.1).

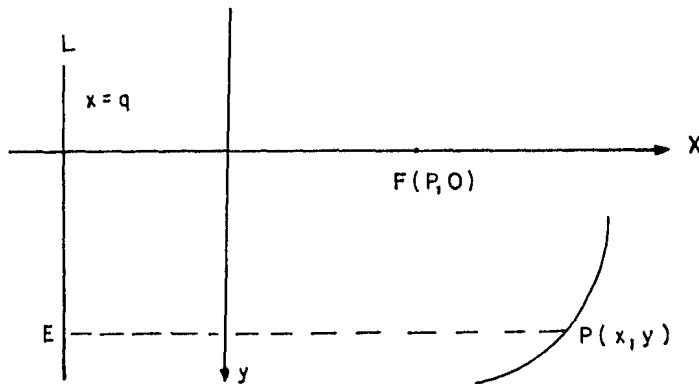


FIGURA (4.1)

Desde P, tracemos el segmento PE, perpendicular a la directriz L. Entonces por la definición anterior, el punto P debe satisfacer la condición geométrica :

$$|PF| / |PE| = e$$

la cual puede expresarse analíticamente por la ecuación

$$\sqrt{(x - P)^2 + y^2} / |x - q| = e \quad (4.1)$$

que es posible escribirla en la forma

$$x^2(1 - e^2) - 2x(P - qe^2) + P^2 - q^2e^2 + y^2 = 0 \quad (4.2)$$

Como la cónica debe pasar por el origen y el punto (a,b), tendremos que,

$$p^2 - q^2 e^2 = 0 \quad (4.3)$$

y

$$\frac{b^2 + (1 - e^2) a^2}{2a} = p - q e^2 \quad (4.4)$$

Con lo cual (4.2) puede expresarse como:

$$y^2 - Ax - Bx^2 = 0 \quad (4.5)$$

donde

$$A = a(1 - e^2) + \frac{b^2}{a} \quad (4.6)$$

y

$$B = e^2 - 1 \quad (4.7)$$

La expresión (4.5) representa la ecuación de una cónica que pasa por los puntos $(0,0)$ y (a,b) , y es circunferencia, elipse, parábola o hipérbola, si $e=0$, $0 < e < 1$, $e=1$ o $e > 1$, respectivamente.

4.2 Distancia y tiempo de recorrido por una sección cónica, sin fricción.

Consideremos una partícula que resbala sin fricción, por acción de la gravedad, en un plano vertical, desde un punto $A(0,0)$ a un punto $C(a,b)$, siguiendo una trayectoria dada por (4.5) y partiendo del reposo en el punto $A(0,0)$, figura (4.2)

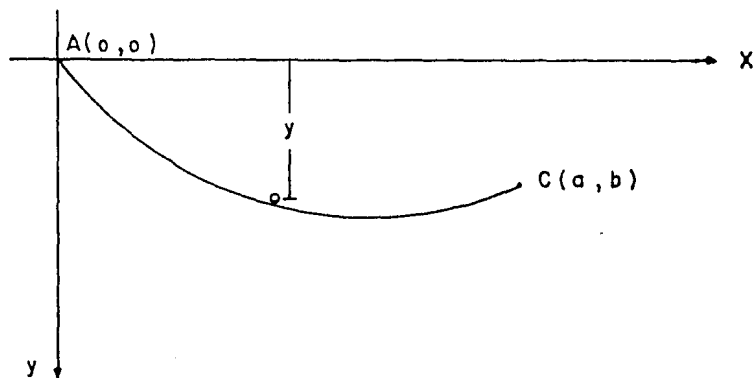


FIGURA (4.2)

como suponemos que no existe fricción y la fuerza gravitacional es conservativa, tendremos que cuando la partícula haya descendido una distancia "y" vertical por la curva (4.5) habrá una transformación de energía potencial en energía cinética, de acuerdo

a la relación

$$mgy = \frac{1}{2} m v^2$$

lo cual implica que

$$dt = ds / \sqrt{2gy}$$

pero como

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx \quad (4.8), \text{ tendremos, } dt = \frac{1}{\sqrt{2g}} \sqrt{\frac{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{y}} dx \quad (4.9)$$

ahora de (4.5) tenemos

$$\frac{dy}{dx} = (A + 2Bx) / 2y \quad (4.10)$$

y también de (4.5) tenemos

$$y = \sqrt{Ax + Bx^2} \quad (4.11)$$

entonces, sustituyendo (4.10) en (4.9), nos queda

$$dt = \frac{1}{2\sqrt{2g}} \sqrt{\frac{4y^2 + (A + 2Bx)^2}{y^3}} dx \quad (4.12)$$

ahora sustituyendo (4.11) en (4.12) obtenemos

$$dt = \frac{1}{2\sqrt{2g}} \sqrt{\frac{4(Ax + Bx^2) + (A + 2Bx)^2}{(Ax + Bx^2)^{3/2}}} dx$$

con lo cual,

$$t = \frac{1}{2\sqrt{2g}} \int_0^a \sqrt{\frac{4(Ax + Bx^2) + (A + 2Bx)^2}{(Ax + Bx^2)^{3/2}}} dx \quad (4.13)$$

Para calcular la distancia recorrida por la partícula sobre la curva, sustituimos (4.10) en (4.8), con lo cual tenemos,

$$ds = \sqrt{1 + \frac{(A + 2Bx)^2}{4(Ax + Bx^2)}} dx$$

de donde,

$$s = \int_0^a \sqrt{1 + \frac{(A + 2Bx)^2}{4(Ax + Bx^2)}} dx \quad (4.14)$$

las relaciones (4.13) y (4.14) nos permiten calcular el tiempo y la distancia, que recorre una partícula al ir desde el punto (0,0) al punto (a,b) sin fricción por un arco de circunferencia, un arco de parábola, un arco de elipse ó un arco de hipérbola, según se escoja el valor de la excentricidad, e .
Sin embargo hay que hacer notar que dado un punto cualquiera (a,b), no siempre será posible hacer pasar por el la cónica llamada hipérbola, esto es de las dadas por la relación (4.5), ya que si en dicha relación hacemos $y = b$ tendremos,

$$b^2 = Bx^2 + Ax$$

esto es,

$$Bx^2 + Ax - b^2 = 0$$

resolviendola para x y tomando en cuenta que,

$$A = \frac{b^2}{a} - Ba$$

tendremos,

$$x = \frac{-A \pm \sqrt{A^2 + 4b^2B}}{2B}$$

esto es,

$$x = \frac{-\frac{b^2}{a} + Ba \pm \left(\frac{b^2}{a} + Ba\right)}{2B}$$

con lo cual $x_1 = a$ y $x_2 = -b^2/aB$ lo cual nos dice que para cada cónica, cuando $y = b$ tendremos dos puntos de corte y para la hipérbola, figura (4.3) tendremos $|-b^2/aB| > a$

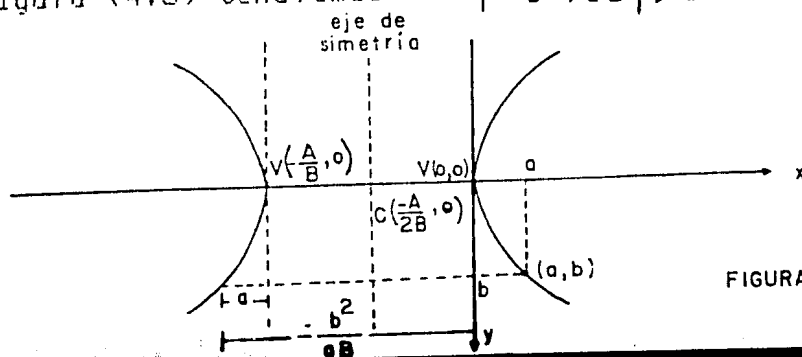


FIGURA (4.3)

esto es

$$b^2/a^2 > B$$

lo cual implica

$$e < \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} \quad (4.15)$$

La relación (4.15), nos impone un límite para la excentricidad. Por lo tanto dado el punto (a,b) si sus coordenadas no satisfacen la relación (4.15) no será posible tener una hipérbola con eje focal en el eje X que, pasando por el origen pase por el punto (a,b).

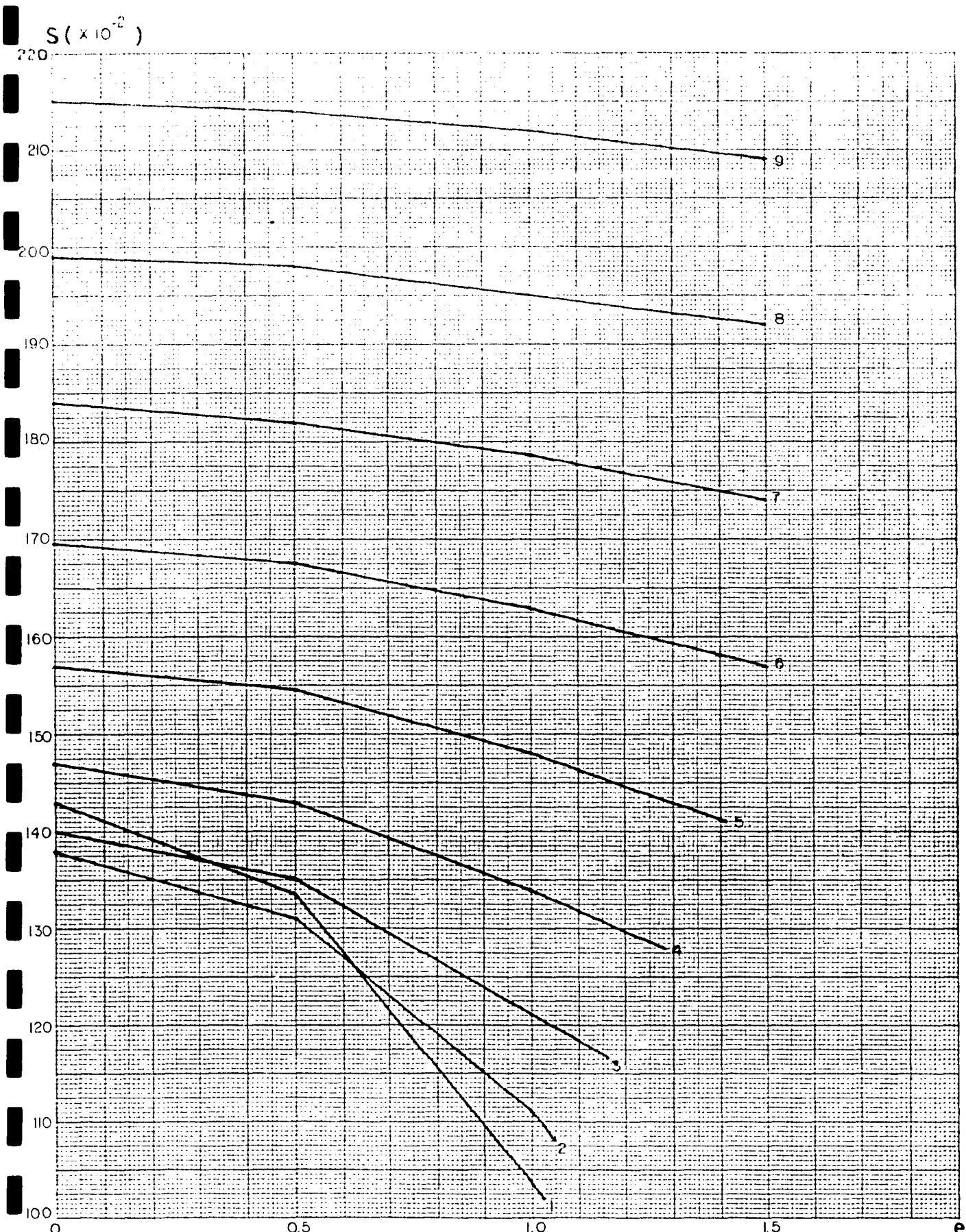
Otra forma de analizar lo anteriormente expuesto, es reduciendo la ecuación (4.5) a su forma canónica, esto es,

$$\frac{\left(x + \frac{A}{2B}\right)^2}{\frac{A^2}{4B^2}} - \frac{y^2}{\frac{A^2}{4B}} = 1$$

en la cual podemos notar que la relación (4.5) siempre nos dará hipérbolas con eje focal coincidentes con el eje X, con centro $(-A/2B, 0)$, vértices $(0, 0)$, $(-A/B, 0)$ (figura (4.3)) y excentricidad, e dada por,

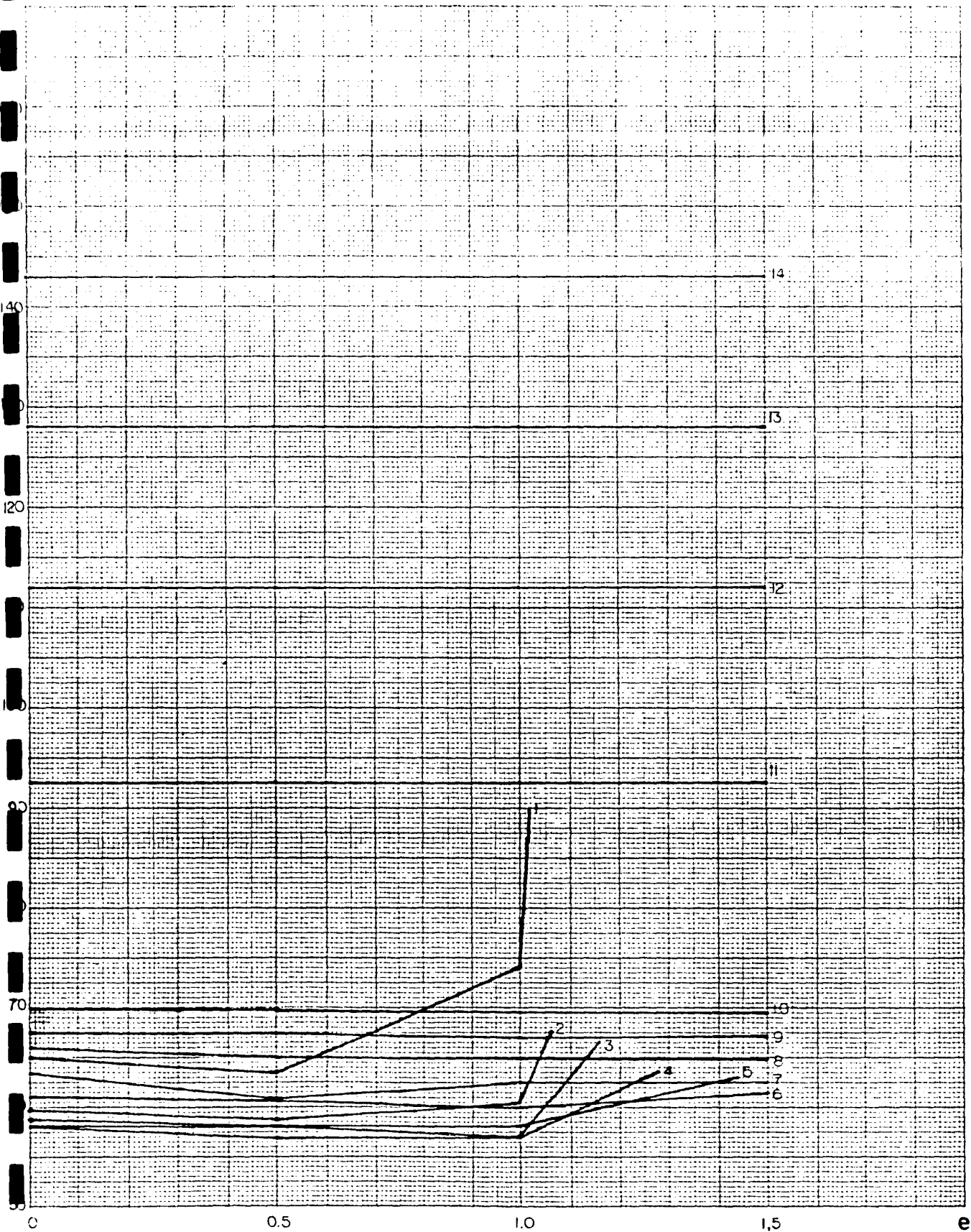
$$e = \frac{\sqrt{\frac{A^2}{4B^2} + \frac{A^2}{4B}}}{\frac{A}{2B}} > 1 \quad (4.16)$$

La expresión (4.16) implica $A > 0$ lo cual de acuerdo a (4.6) se traduce en $a(1-e^2) + b^2/a > 0$ y de aquí obtenemos $e < \sqrt{1 + b^2/a^2}$, esto es, la relación (4.15)

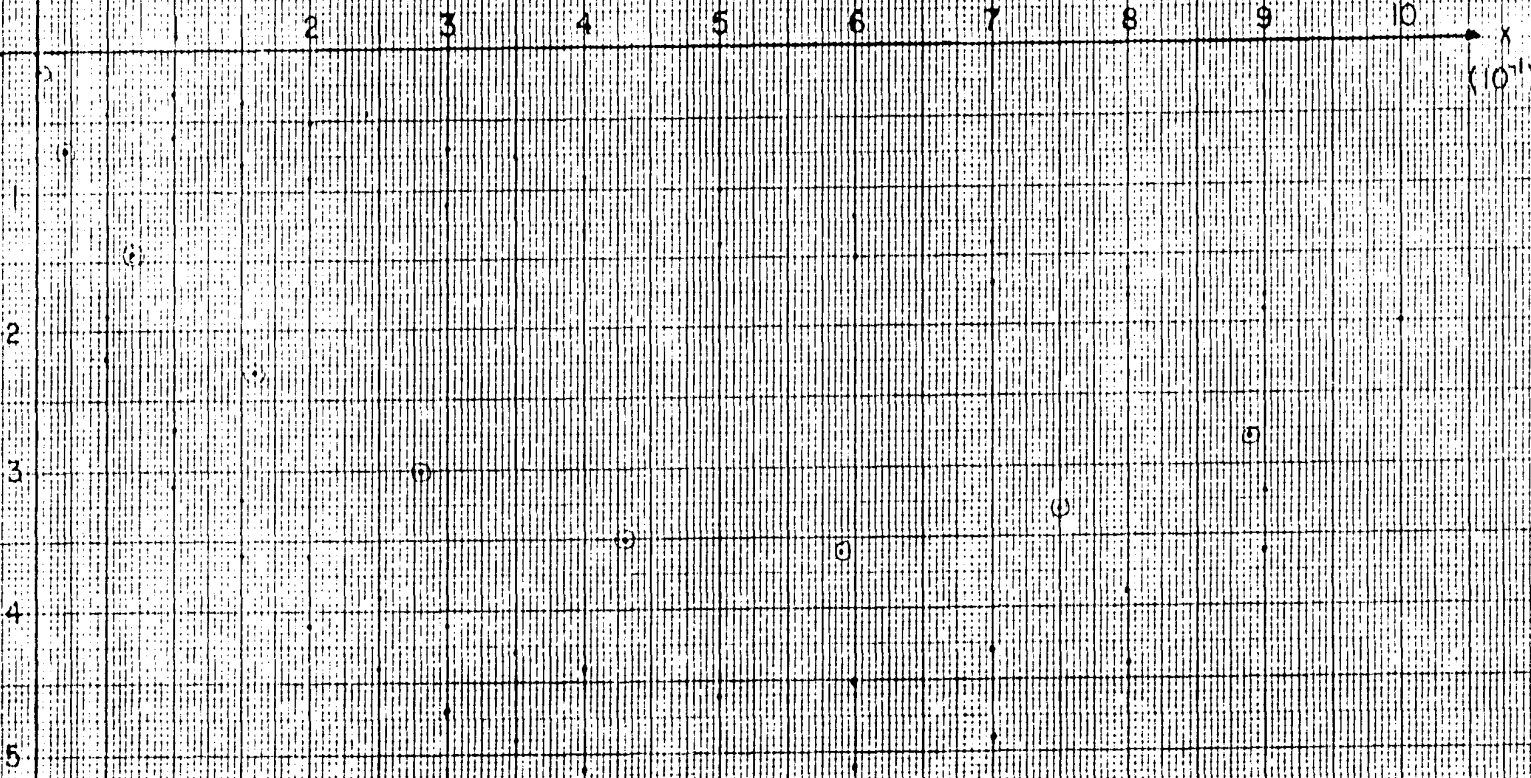


Gráficos de distancia sobre excentricidad de cónicas, las curvas están numeradas de tal forma que el número uno corresponde al punto final (1, 0.2) de la trayectoria de la partícula, el número dos al punto final (1, 0.4), el tres al punto (1, 0.6), el cuatro al punto (1, 0.8), etc..

$T(x 10^{-2})$



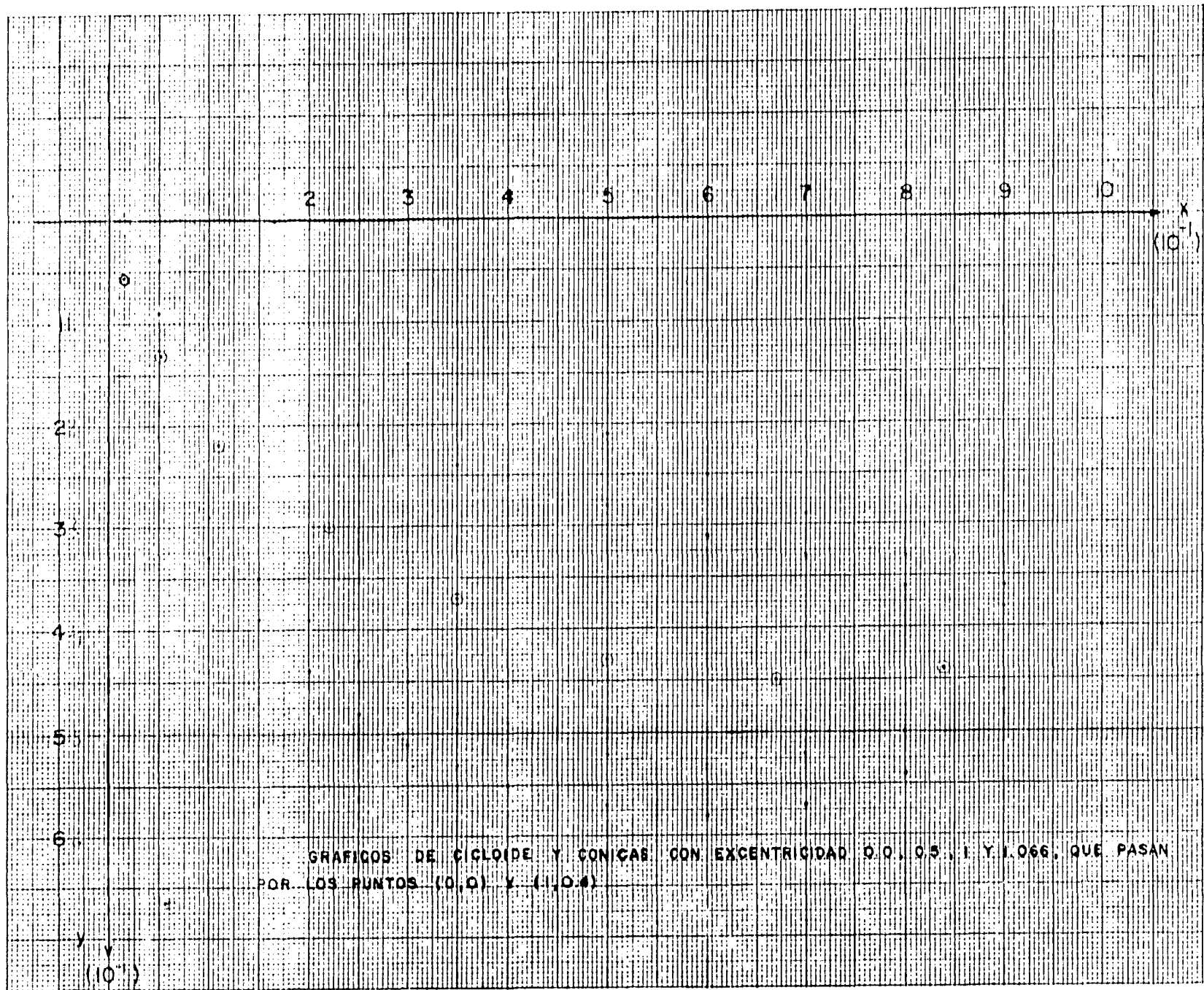
Graficos de tiempo sobre excentricidad de cónicas, las curvas estan numeradas de tal forma que la número uno corresponde al punto final (1,0.2), de la trayectoria de la partícula, la número dos al punto final (1,0.4), la tres al punto final (1,0.6), la cuatro al punto (1,0.8), etc...



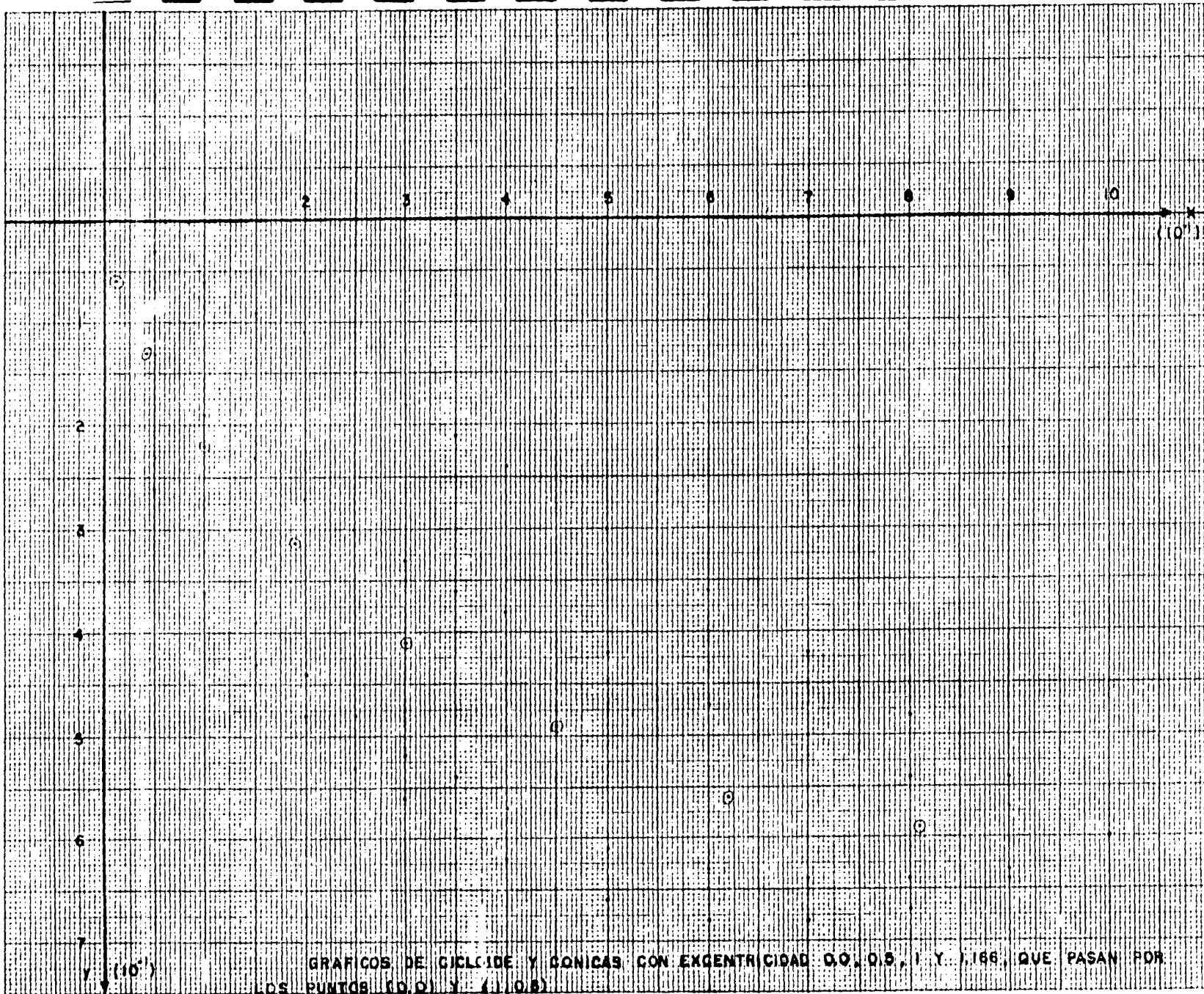
GRAFICAS DE CICLOIDE Y CONICAS CON EXCENTRICIDAD, 0, 0.5, 1 Y 1.018, QUE PASAN POR LOS PUNTOS (0, 0) Y (1, 0.2).

PARA LAS GRAFICAS DE ESTA HOJA Y LAS QUE EN HOJAS SUBSECUENTES SE MUESTRAN, LOS PUNTOS ENDESRADOS EN UN CIRCULO PEQUEÑO, SON DE LA CICLOIDE CORRESPONDIENTE. LOS PUNTOS MAS ALEJADOS CORRESPONDEN A LA CIRCUNFERENCIA, PARA SEGUIR LOS DE LA ELIPSE Y CONTINUAR LOS DE LA PARABOLA, Y POR ULTIMO EN LA PARTE SUPERIOR LOS MAS CERCANOS AL EJE X, LOS DE LA HIPERBOLA.

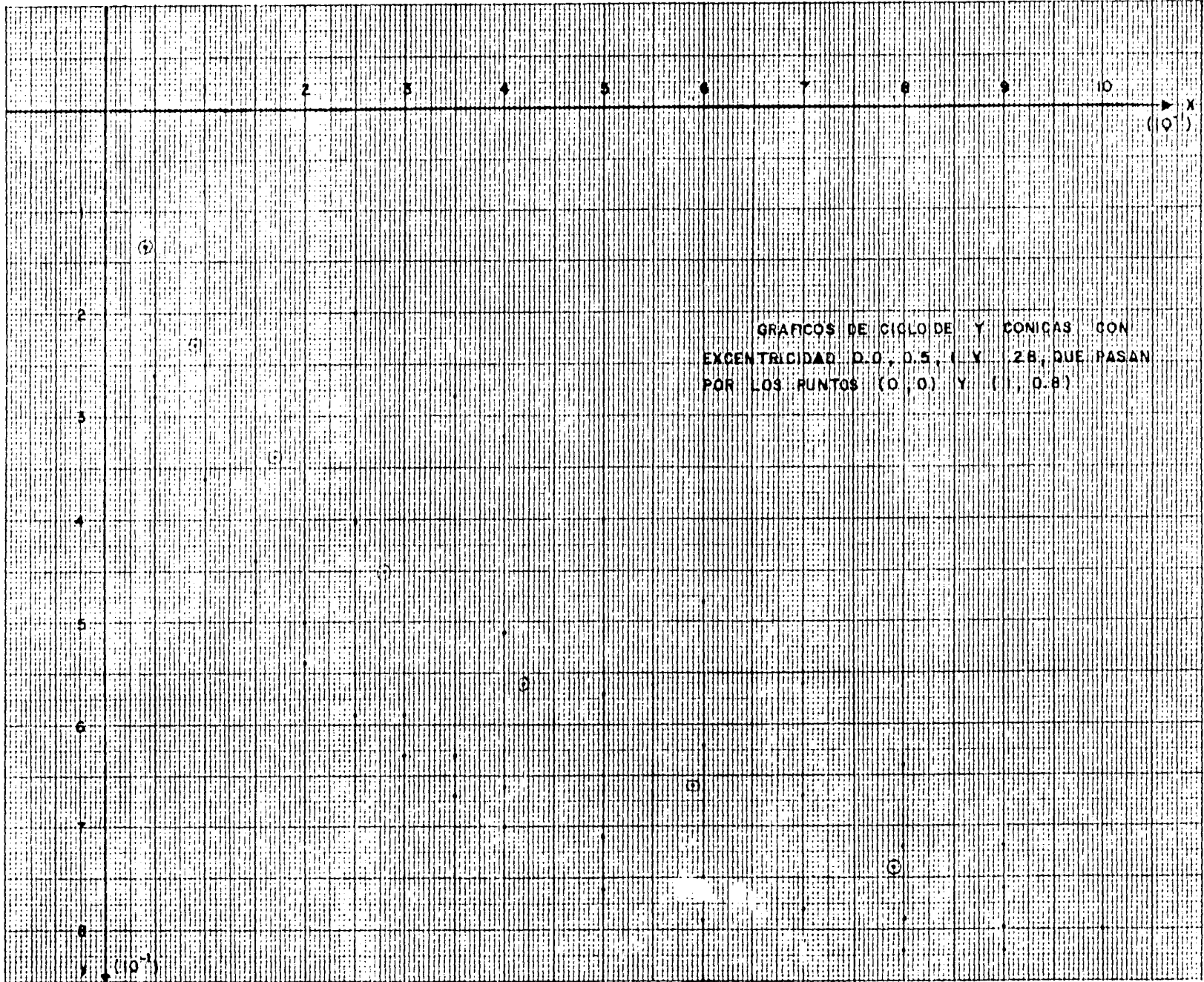
y
(10⁻¹)



GRAFICOS DE CICLOIDE Y CONICAS CON EXCENTRICIDAD 0.0, 0.5, 1 Y 1.066, QUE PASAN POR LOS PUNTOS (0,0) Y (1,0.4)



GRAFICOS DE CICLIDE Y CONICAS CON EXCENTRICIDAD 0.0, 0.5, 1 Y 1.66, QUE PASAN POR LOS PUNTOS (10, 0) Y (1, 0.5)



2 3 4 5 6 7 8 9 10 x
 (0,0)

(9)

2 (5)

3 (0)

4

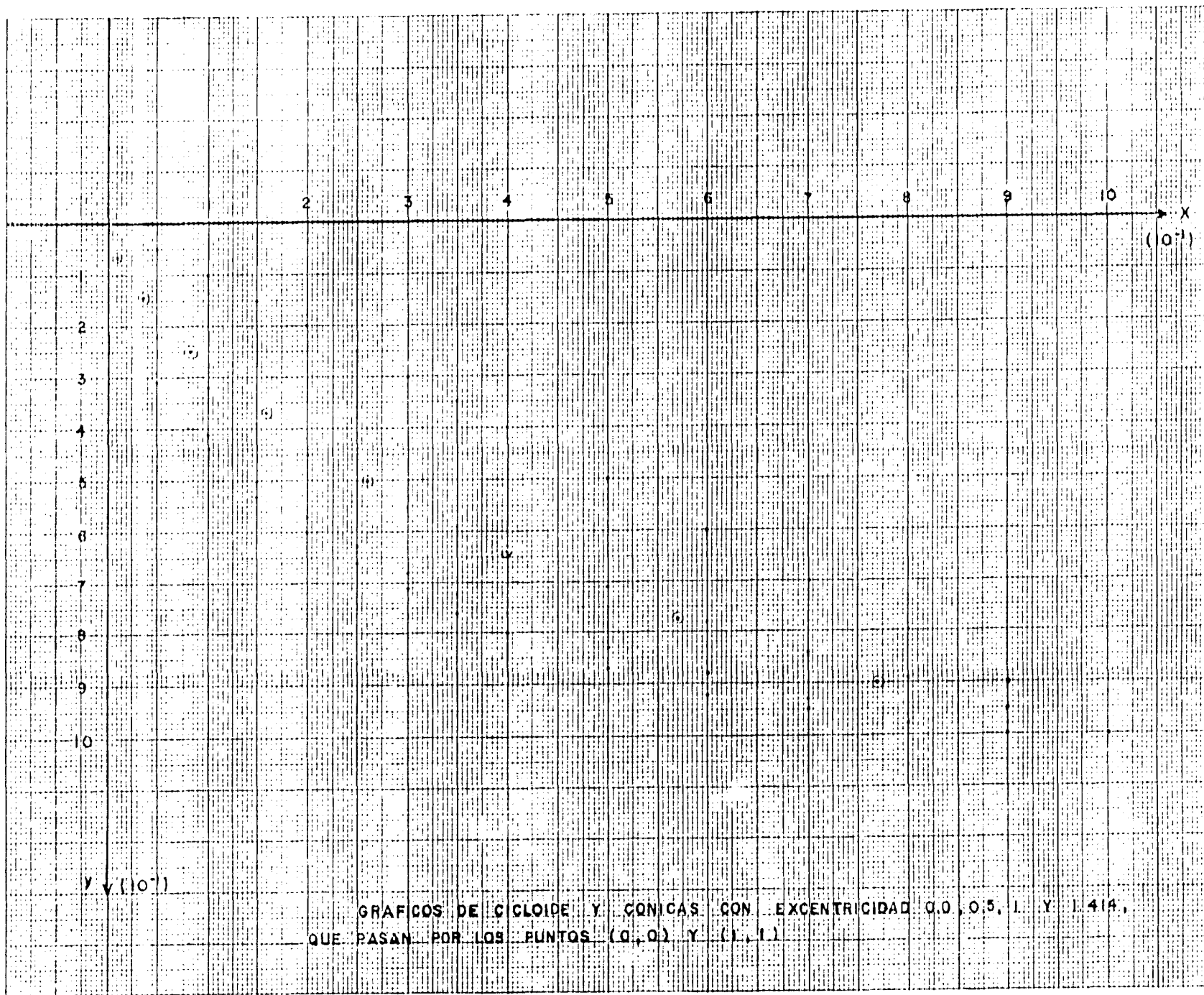
5

6

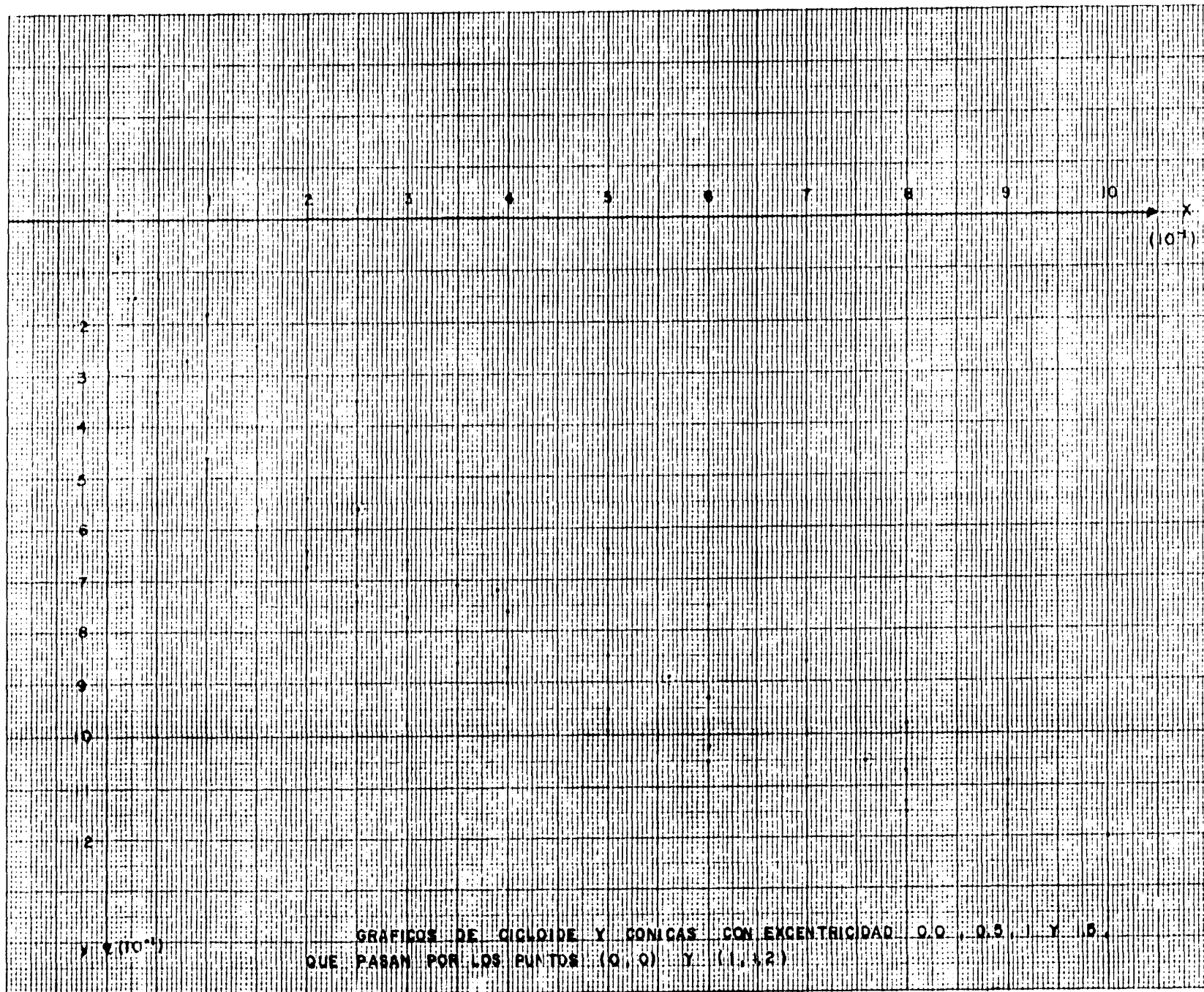
7

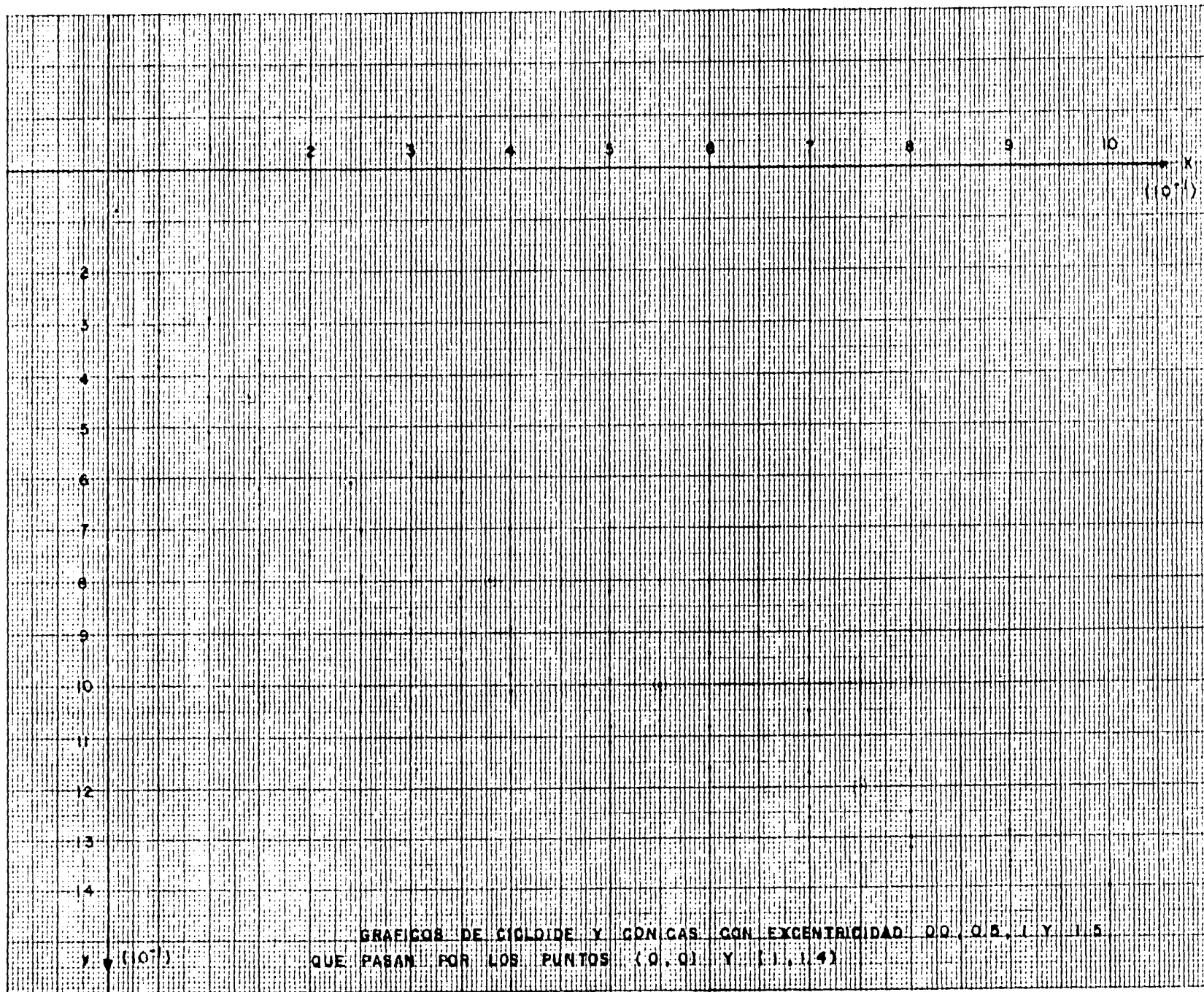
8

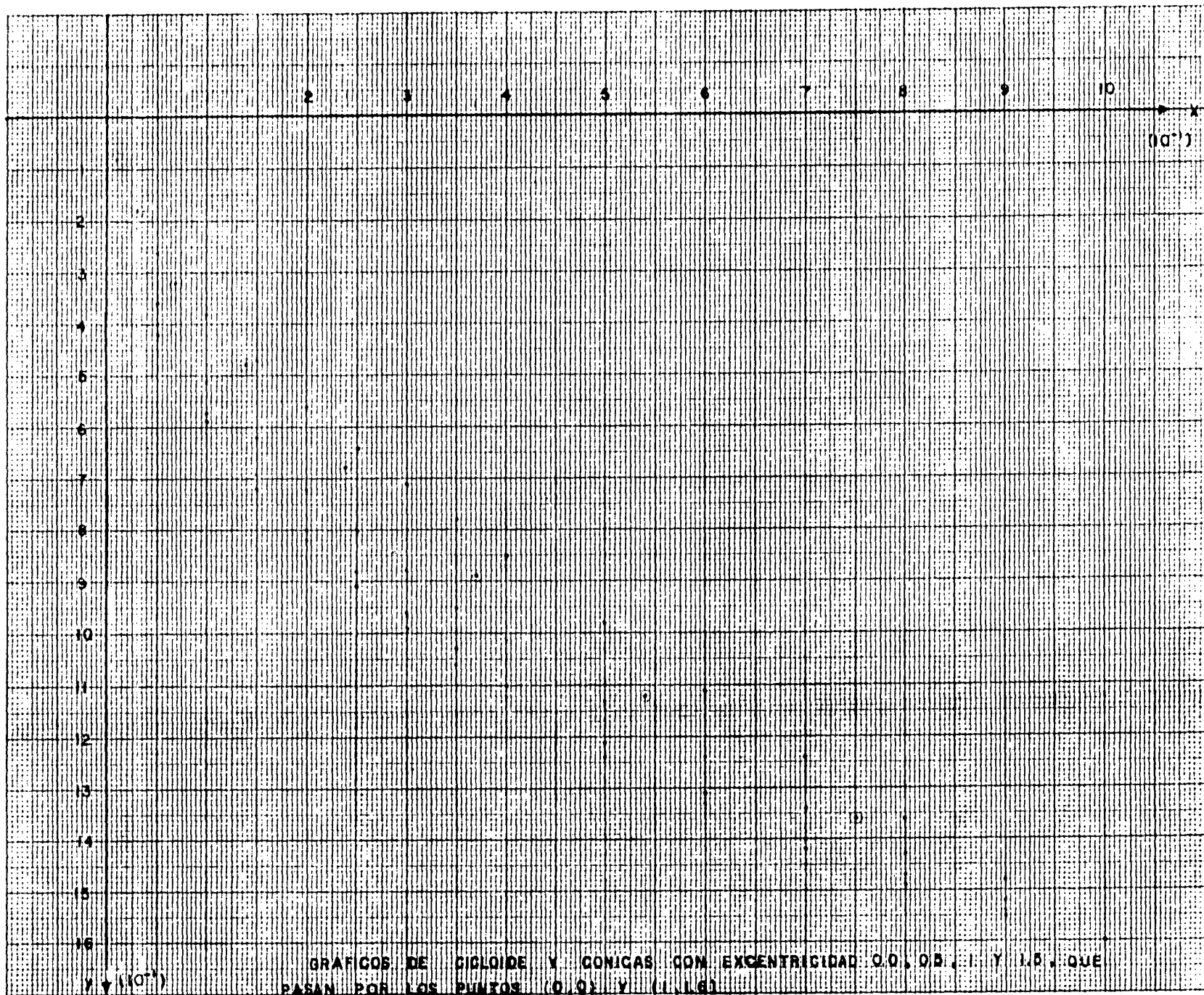
y (0,0)

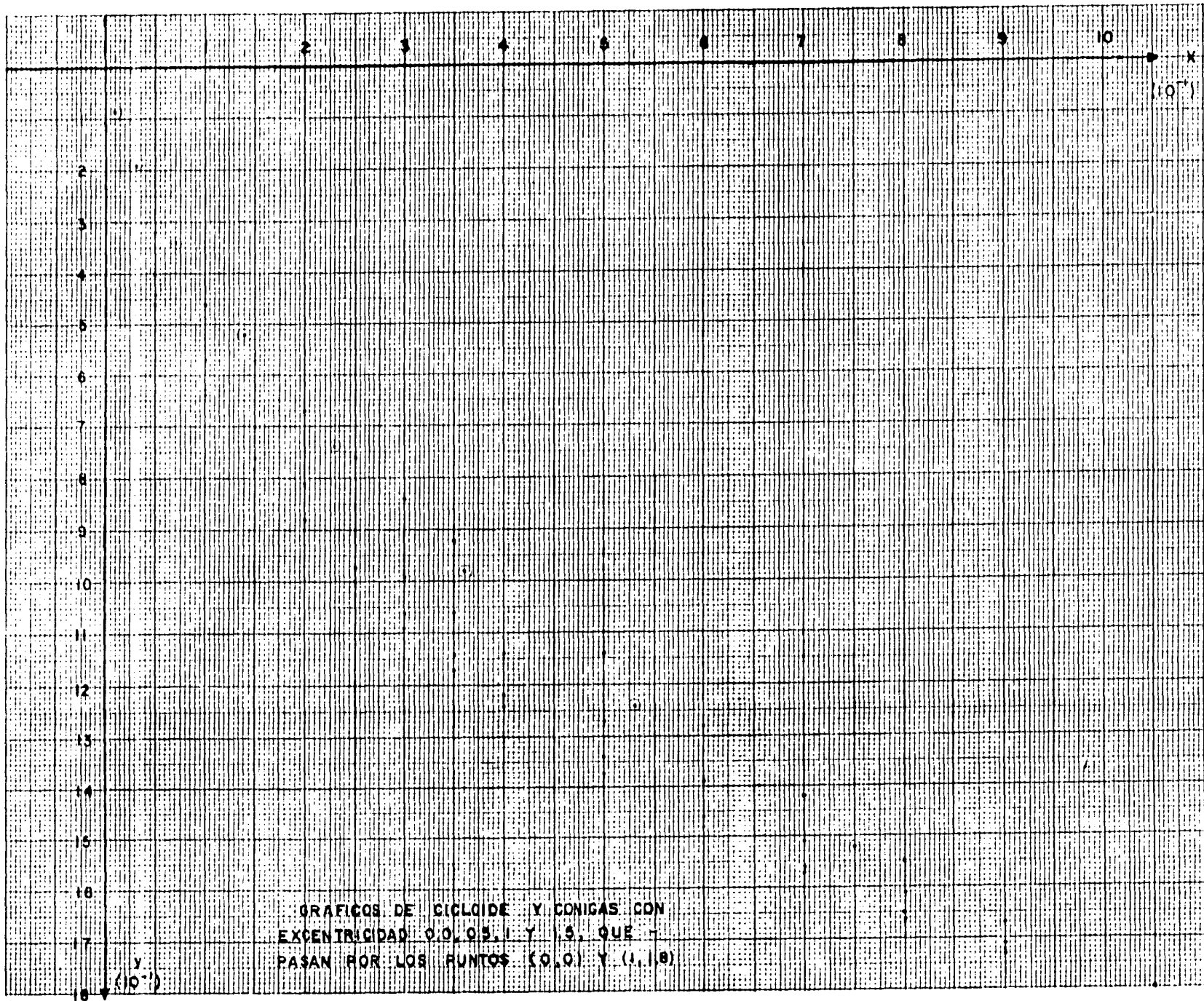


GRAFICOS DE C CLOIDE Y CONICAS CON EXCENTRICIDAD 0.0, 0.5, 1. Y 1.414, QUE PASAN POR LOS PUNTOS (0,0) Y (1,1)

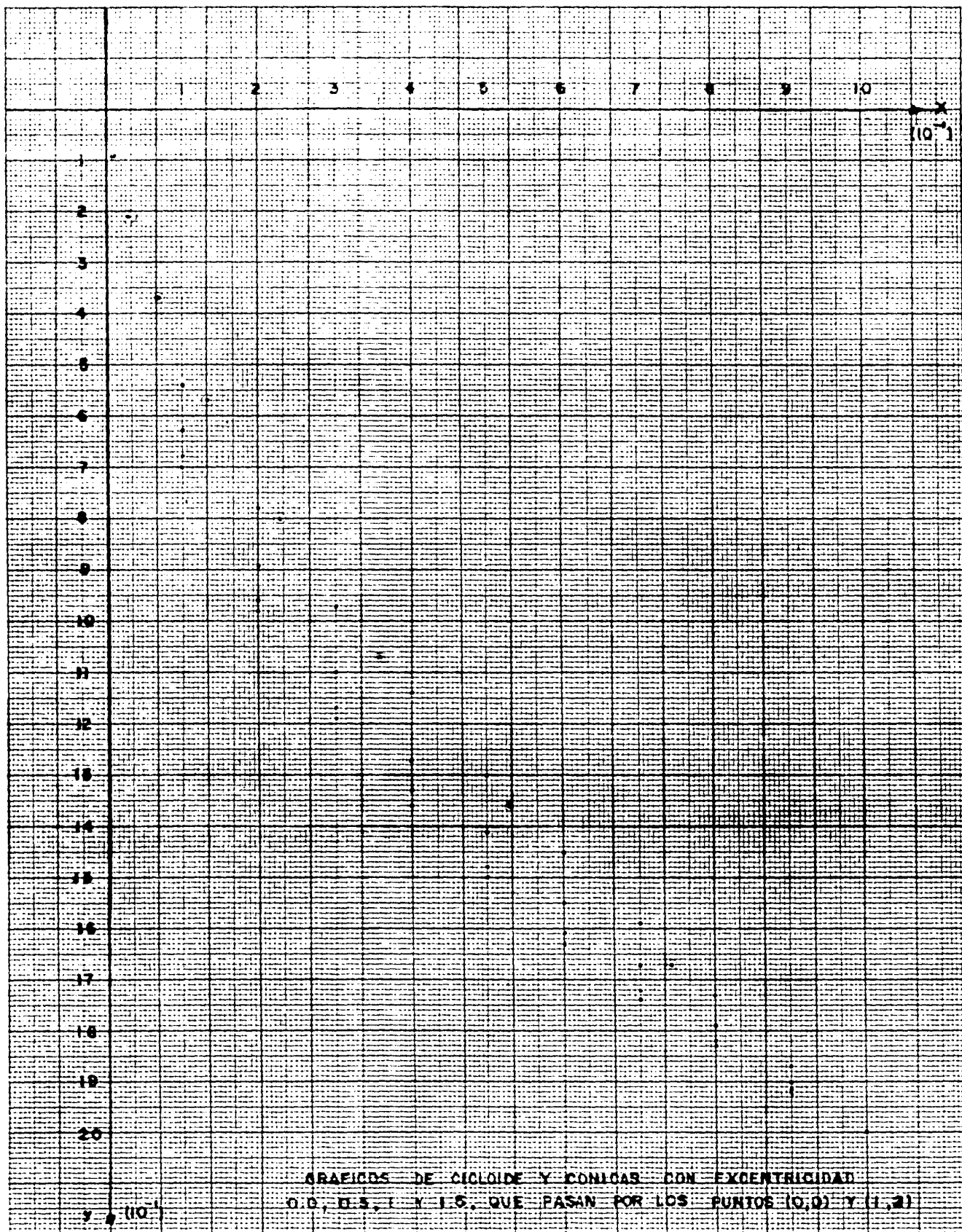








GRAFICOS DE CICLOIDE Y CONICAS CON
EXCENTRICIDAD 0,0, 0,5, 1 Y 1,5, QUE
PASAN POR LOS PUNTOS (0,0) Y (1,18)



GRAFICOS DE CICLOIDE Y CONICAS CON EXCENTRICIDAD
0.0, 0.5, 1 Y 1.5, QUE PASAN POR LOS PUNTOS (0,0) Y (1,2)

CAPITULO QUINTO

5. Curvas de tiempo óptimo con fricción.

El problema de encontrar la curva de más rápido descenso de una partícula de masa, m , que resbala a lo largo de una curva, de un punto determinado a otro, en un plano vertical, bajo la influencia simultánea de la gravedad y de la fricción, asumida esta última proporcional a la fuerza normal entre la partícula y la curva por donde desliza con coeficiente de fricción μ figura (5), se puede resolver tratando la ecuación de movimiento como una ecuación de constreñimiento (ligadura).

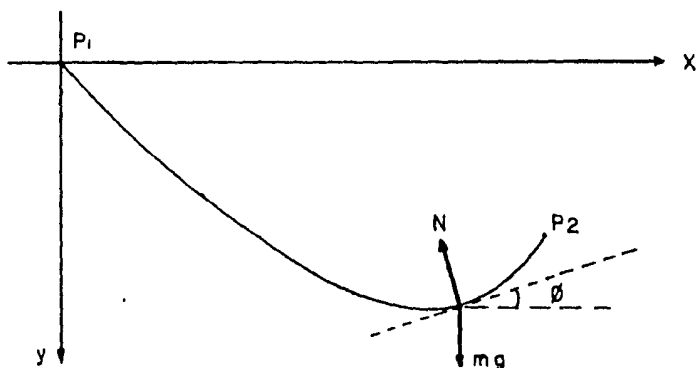


FIGURA 5

Usando el método de multiplicadores de Lagrange, este problema, planteado y resuelto en un artículo denominado, Brachistochrone With Coulomb Friction, escrito por N. Ashby, W.E. Brittin, W.F. Love y W. Wyss, of department of Physics and Astrophysics University of Colorado, se reduce a minimizar la integral,

$$I = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \left\{ T + \lambda \left[VV' + gy' + \mu gx' + \mu (x'y'' - y'x'') / T^2 \right] + \sigma \left[(x'^2 + y'^2)^{1/2} - VT \right] \right\} d\tau$$

esto es,

$$I = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau L(T, T'; V, V'; X, X', X''; Y, Y', Y'')$$

donde λ y σ son multiplicadores de Lagrange. La parte del integrando que está multiplicada por λ es la ecuación de

movimiento de la partícula y la multiplicada por σ es la condición que expresa la dependencia de la velocidad V de X' , Y' y T' .

τ es un parámetro arbitrario que se incrementa monótonicamente a lo largo de la curva y la prima denota diferenciación respecto de τ . Para minimizar la integral I se utilizan las ecuaciones de Euler-Lagrange del cálculo de variaciones, esto es,

$$\frac{\partial L}{\partial T} - \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial L}{\partial T'} \right) = 0$$

para T

$$\frac{\partial L}{\partial Y} - \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial L}{\partial Y'} \right) + \frac{d^2}{d\tau^2} \left(\frac{\partial L}{\partial Y''} \right) = 0$$

para Y

$$\frac{\partial L}{\partial X} - \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial L}{\partial X'} \right) + \frac{d^2}{d\tau^2} \left(\frac{\partial L}{\partial X''} \right) = 0$$

para X

$$\frac{\partial L}{\partial V} - \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial L}{\partial V'} \right) = 0$$

para V

En las ecuaciones que resultan se escoge el parámetro τ igual al tiempo T , e integrando las cuatro ecuaciones se obtiene,

$$\sigma v + 2\lambda\mu v^2 \dot{\theta} = C_1$$

$$\lambda g - \lambda\mu \ddot{x} + \sigma \sin \theta - \frac{d}{dT} (\lambda\mu \dot{x}) = C_2$$

$$\lambda\mu g + \lambda\mu \ddot{y} + \sigma \cos \theta + \frac{d}{dT} (\lambda\mu \dot{y}) = C_3$$

$$\frac{d\lambda}{dT} = \frac{-\sigma}{v}$$

donde C_1 , C_2 y C_3 son las constantes de integración.

Estas cuatro ecuaciones junto con la ecuación de movimiento y la

condición $V^2 = \dot{X}^2 + \dot{Y}^2$, forman un conjunto completo de ecuaciones diferenciales para determinar X , Y , V , λ y σ . La matemática empleada en el desarrollo del artículo es bastante laboriosa por lo que me limitaré a exponer los resultados. Las ecuaciones diferenciales para X , Y y T en las que θ se considera como variable independiente pueden escribirse en la forma,

$$gB^2 \frac{dX}{d\theta} = \frac{(2-h) \cos^2 \theta}{h^3}$$

$$gB^2 \frac{dY}{d\theta} = \frac{(2-h) \cos \theta \sin \theta}{h^3}$$

$$gB \frac{dT}{d\theta} = \frac{2}{h^2} - \frac{1}{h}$$

donde,

$$h = h(\theta) = 1 + 2\mu \sin \theta \cos \theta + 2\mu A \cos^2 \theta$$

donde

$$A = \frac{C_3 \mu - C_2}{C_3 + C_2 \mu}$$

y

$$B = \frac{C_3 + C_2 \mu}{C_1(1 + \mu^2)}$$

y al integrar tales ecuaciones se obtiene,

$$2gB^2 X = \left[-\frac{1}{2} (h^{-2} - h^{-1}) + 2(\mu - A)F_3 + (3A - \mu)F_2 - AF_1 \right] / \mu(1 + A^2)$$

$$2gB^2 Y = \left[\frac{1}{2} A(h^{-2} - h^{-1}) - 2(1 + \mu A)F_3 + (3 + \mu A)F_2 - F_1 \right] / \mu(1 + A^2)$$

$$gBT = 2F_2 - F_1$$

donde,

$$F_1(\theta) = \frac{1}{(a^2 - b^2)^{1/2}} \left\{ \tan^{-1} \left[\left(\frac{a-b}{a+b} \right)^{1/2} \tan \left(\theta + \frac{n}{2} \right) \right] \right. \\ \left. - \tan^{-1} \left[\left(\frac{a-b}{a+b} \right)^{1/2} \tan \left(-\frac{\pi}{2} + \frac{n}{2} \right) \right] \right\}$$

$$F_2 = \left\{ aF_1 - \frac{1}{2} \left[(\mu A \sin 2\theta - \mu \cos 2\theta) / h - \mu \right] \right\} (a^2 - b^2)^{-1}$$

$$F_3 = \left\{ 3aF_2 / 2 - \frac{1}{2} F_1 + \frac{1}{4} \left[-(\mu A \sin 2\theta - \mu \cos 2\theta) / h^2 + \mu \right] \right\} (a^2 - b^2)^{-1}$$

con,

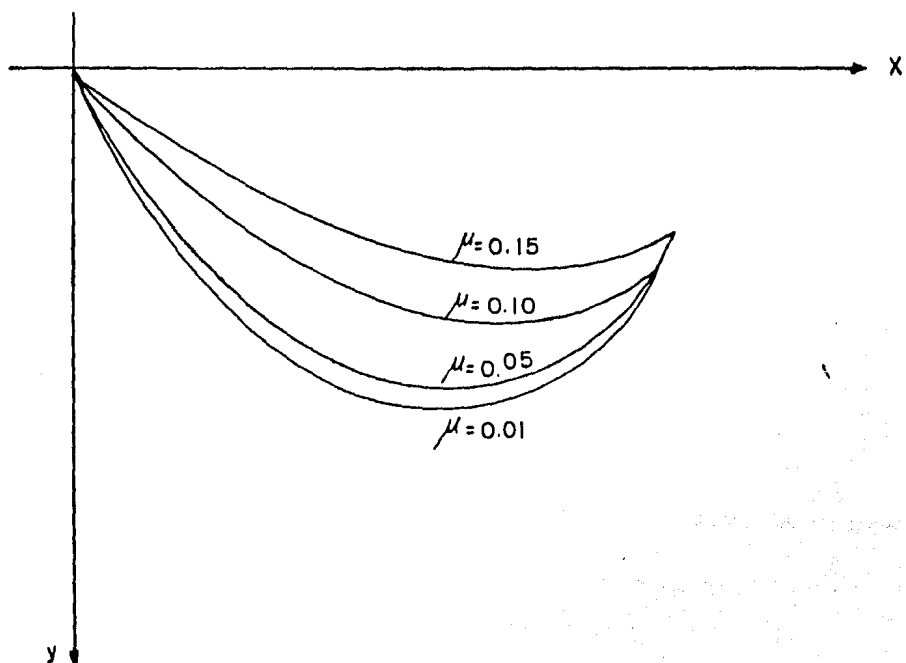
$$a = 1 + \mu A \quad , \quad b = \mu (1 + A^2)^{1/2}$$

$$\cos n = A / (1 + A^2)^{1/2} \quad \text{y} \quad \sin n = -1 / (1 + A^2)^{1/2}$$

La ecuación de movimiento $V\dot{V} + g\dot{Y} + \mu g\dot{X} + \mu V^2\dot{\theta} = 0$, puede ahora ser integrada dando como resultado,

$$1/2 V^2 + gX(\mu + Y/X) = -\mu \int_{-\pi/2}^{\theta} V^2 d\theta$$

En la figura siguiente mostramos las curvas de tiempo mínimo, mismas que se mencionan en el artículo citado,



desde el punto $(0,0)$ al punto $(6,1)$ con valores para μ de 0.01, 0.05, 0.10 y 0.15.

C O N C L U S I O N E S

Al calcular los diferentes tiempos requeridos por una partícula para deslizarse sobre una curva desde un punto a otro, en un plano vertical, hemos encontrado que la línea recta o plano inclinado, que es la trayectoria de longitud mínima, no nos proporciona el tiempo mínimo, e incluso hemos hallado trayectorias rectangulares, en las cuales a pesar de que la distancia de recorrido es mayor, el tiempo resulta ser menor que en la trayectoria de mínima longitud (tablas II, IV y V). Es posible inclusive variar el ángulo del rectángulo de la figura (3.3) de tal modo que el tiempo de deslizamiento de la partícula para ir de un punto a otro, sea menor en que la recta tanto por la trayectoria superior como por la inferior.

Al escoger como trayectorias las secciones cónicas encontramos que los tiempos resultan ser menores que por la recta, por ejemplo cuando el punto (A,B) es (1,0.2), el tiempo por la trayectoria mínima es de 1.029 y por el arco del círculo correspondiente es de 0.649, lo cual nos da una diferencia notable de tiempo, aun cuando la distancia por el círculo resulto ser de 1.43 y por la recta 1.019, lo mismo sucede con las otras secciones cónicas, en la elipse para el punto considerado, el tiempo fue de 0.634, en la parábola 0.742 y en la hipérbola 0.897. Sin embargo todos estos tiempos resultan ser mayores que el tiempo que tarda la partícula en hacer el recorrido considerado por la cicloide correspondiente, en la cual el tiempo resulto ser de 0.620 (tabla I y tabla comparativa III). Este resultado esta de acuerdo al calculo de variaciones, el cual de hecho se inicio con el famoso problema de braquistocrona.

El calculo de variaciones demuestra que la trayectoria de tiempo mínimo sin fricción esta dada por la curva llamada cicloide y es en ella donde nosotros obtenemos el mínimo tiempo de caída, además notamos de acuerdo a las graficas de la cicloide y cónicas que se muestran en la sección 4.3, que la conica que mas se acerca a la cicloide resulta ser la conica de menor tiempo de recorrido.

Al analizar las graficas de distancia sobre excentricidad observamos que la distancia máxima la recorre la partícula sobre la conica llamada círculo y la distancia mínima sobre la conica llamada hipérbola. Con respecto a la elipse y la parábola, recorre mayor distancia por los arcos de elipse que por los arcos de parábola. Por otra parte a medida de que el punto (A,B) se aleja del eje X, la distancia recorrida por la partícula por las distintas cónicas van siendo iguales entre si, es decir las cónicas tienden a coincidir entre si y a la línea recta (graficas de S vs e y tabla comparativa III). En las graficas de tiempo sobre excentricidad notamos que para algunas trayectorias, determinadas por el punto (A,B) junto con la excentricidad, el tiempo mínimo se obtiene en un arco de elipse o

parabola, mientras que el máximo está dado por un arco de hipérbola, esto es con referencia a los gráficos 1, 2, 3, 4, 5 y 6 (gráficos I vs), para luego cambiar y localizar el tiempo máximo en un arco de círculo y el mínimo en uno de hipérbola, coincidiendo para estos casos que el tiempo mínimo se localiza en la trayectoria de distancia también mínima. De manera general se observa como anteriormente se dijo que la cónica de menor tiempo es la que se aproxima más a la cicloide correspondiente al punto (A,B), (gráficos de cicloide y cónicas).

Por último quiero hacer notar que al calcular los tiempos y distancias cuando la partícula hace su recorrido por las secciones cónicas, llegamos a expresiones en las que es necesario para su solución utilizar métodos de integración numérica. Por otra parte se siente la necesidad de conocer algún lenguaje de programación que nos permita efectuar dichos cálculos. Es en este sentido que este trabajo me ha motivado en gran manera a aprender programación, cálculo variacional y análisis numérico.

B I B L I O G R A F I A

- 1.- Goldstein., Mecanica Clasica. Aguilar
- 2.- Walter Hauser., Introduccion a los principios de la mecanica. Uteha.
- 3.- L. Elsqolt., Ecuaciones Diferenciales y Cálculo Variacional. Cultura popular.
- 4.- M.L.Krasnov, G.J. Makarenko y A.I. Kiseliiov., Calculo Variacional. Mir.
- 5.- J.W. Craags., Cálculo de Variaciones. Limusa.
- 6.- Courant. robbins., Que es la matematica?. Aguilar.
- 7.- George H. Thomas Jr., Cálculo infinitesimal y Geometria Analitica. Aguilar
- 8.- Leithold., El cálculo con geometria Analitica. Harla.
- 9.- Earl W. Swokowski., Cálculo con Geometria Analitica. Iberoamerica.
- 10.- John C. Amazioq, Lester A. Rubenfeld., Cálculo Avanzado con Aplicaciones a la Inqenieria y a la Fisica. Mc. Graw Hill.
- 11.- Jamens R Newman., SIGMA El mundo de las matematicas, tomos I y II. Grijalbo.