

**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA  
DE MEXICO**

---

**FACULTAD DE CIENCIAS**

**INTEGRACION DEL MODELO BAROCLINICO DE DOS  
PARAMETROS EN LA ESTACION INVERNAL**

**T E S I S**

**QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:**

**F I S I C O**

**P R E S E N T A :**

**JUAN CARLOS ROMAN CARMONA SANCHEZ**

**México, D. F.**

**1985**



Universidad Nacional  
Autónoma de México



## **UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso**

### **DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## CAPITULO I

### PRINCIPIOS FISICOS FUNDAMENTALES

- 1.1 La fuerza del gradiente de presión
- 1.2 La fuerza gravitacional
- 1.3 Fuerzas de fricción
- 1.4 Sistemas de referencia no inerciales y fuerzas aparentes.
  - 1.4.1 Fuerza centrípeta
  - 1.4.2 Fuerza de Coriolis
- 1.5 La Ecuación de movimiento
- 1.6 Análisis de escala de la ecuación de movimiento
- 1.7 Aproximación Geostrófica
- 1.8 Aproximación Hidrostática
- 1.9 Análisis de vientos teóricos
  - 1.9.1 Viento Geostrófico
  - 1.9.2 Viento Térmico
- 1.10 La Ecuación de continuidad
- 1.11 La ecuación de la Energía Termodinámica

## CAPITULO II

### EL SISTEMA CASIGEOSTROPICO

- 2.1 Vorticidad
- 2.2 La ecuación de vorticidad en coordenadas cartesianas.
- 2.3 Análisis de escala de la ecuación de vorticidad.
- 2.4 La ecuación de vorticidad en coordenadas isobáricas.
- 2.5 La ecuación de la Energía Termodinámica

### CAPITULO III

#### EL MODELO BAROCLINICO DE DOS PARAMETROS

- 3.1 El filtrado de las ondas de sonido y de gravedad
- 3.2 Las ecuaciones de predicción filtradas del Sistema casigeostrófico.
- 3.3 Derivación del modelo baroclínico de dos parámetros.
- 3.4 Las condiciones de frontera

### CAPITULO IV

#### RESULTADOS Y CONCLUSIONES

#### APENDICES A Y B

## I N T R O D U C C I O N

En este trabajo se hace uso del modelo Baroclínico filtrado de cuatro capas y cinco niveles que son 1000 mb, 750 mb, — 500 mb, 250 mb y 0 mb; con el fin de pronosticar el campo -geopotencial en los niveles de 750 mb, 500 mb y 250 mb. — Con esto se persigue proporcionar la modelación atmosférica en el área conocida como región IV (O.M.M.), donde se en—cuentra la república mexicana para llegar posteriormente a obtener un pronóstico adecuado del tiempo.

La tesis está dividida en cuatro capítulos. En el primero de ellos se hace una breve descripción de las ecuaciones bá—sicas que se emplean en el estudio de los fenómenos atmosféricos. En el segundo capítulo se realiza un análisis de — las ecuaciones del sistema casi-geostrófico donde se incluyen las hipótesis básicas proporcionadas por Charney (1948) para poder filtrar las ondas de gravedad y de sonido que no permitieron a Richardson (1922) obtener buenos resultados — al haber intentado hacer su primer pronóstico numérico del tiempo a corto plazo.

En el tercer capítulo se describe el modelo baroclínico fil—trado de cuatro capas por medio del cual se hará el pronós—tico en la cuarta región, considerando para ésta, ciclici—dad en sus fronteras este y oeste y tomándose constante el—

geopotencial en sus fronteras norte y sur de acuerdo con la condición que se tiene para resolver las ecuaciones de Helmholtz. (Arfken, G. 1981)

En el capítulo IV se describen los resultados y conclusiones de la aplicación del modelo con ayuda de las cartas de uso diario elaboradas en el Centro de Ciencias de la Atmósfera.

Por último se anexan tres apéndices que intentan explicar un poco más algunos aspectos que se mencionaron en los capítulos de éste trabajo.

## CAPITULO I

### 1. PRINCIPIOS FISICOS FUNDAMENTALES

Todos los fenómenos meteorológicos relacionados con el tiempo, son el resultado de la desigual distribución de energía calorífica en el sistema océano-atmósfera-continente que es recibida principalmente del Sol y donde la mayor parte de los cambios que tienen lugar dependen del sencillo hecho básico de que el aire al calentarse se hace relativamente menos denso y como consecuencia asciende, contrariamente el que se enfría tiende a descender.

También influye la rotación de la tierra alrededor de su eje, produciendo con esto la desviación de las corrientes de aire que se mueven del ecuador a los polos y viceversa.

La meteorología dinámica trata principalmente a la región inferior de la atmósfera conocida como la tropósfera, ya que es ahí donde ocurren la mayor parte de los cambios del tiempo que se manifiestan sobre la superficie de la tierra.

A merced la componente vertical del viento comparada con las componentes horizontales, se desprecia por ser muy pequeña, pero debido a que son los movimientos verticales, las causas que propician las precipitaciones y en general los fenómenos asociados con el tiempo, esta componente vertical del viento debe tomarse en cuenta en el análisis de dichos fenómenos meteorológicos.

Las bases físicas y matemáticas de todos los métodos de predicción dinámica del tiempo están en los principios de con-

servación de momentum, de masa y de energía. Estos principios están expresados matemáticamente en las ecuaciones de movimiento de Newton, la ecuación de continuidad y la ecuación de energía termodinámica (Thompson, P.D 1961)

Se tratará cada una de estas leyes de conservación empezando con la ley de conservación del momentum o segunda ley de Newton, que establece que la aceleración de un cuerpo de masa unitaria es igual a la suma de todas las fuerzas actuando sobre él, teniendo en cuenta que esta ley es válida para movimientos relativos o sistemas de referencia no acelerados o inerciales, pero dado que las observaciones meteorológicas son efectuadas en puntos fijos en la tierra girando, es conveniente referir los movimientos de la atmósfera a un sistema de coordenadas que esté fijo en la tierra, siendo éste un sistema acelerado o no inercial. El efecto del giro de la tierra será considerado más adelante en las ecuaciones de movimiento, primero se hace mención de las fuerzas fundamentales que intervienen en la atmósfera, considerando a ésta sin girar para poder aplicar la segunda ley de Newton.

En un sistema de coordenadas cartesianas supuestamente inercial, las componentes de una fuerza serán

$$F_x = \frac{du}{dt} \quad F_y = \frac{dv}{dt} \quad F_z = \frac{dw}{dt} \quad (1,1)$$

donde u, v y w son las componentes del vector velocidad conocidas como la componente zonal, meridional y vertical respectivamente del vector velocidad

$$\vec{v} = u_1 + v_j + w_k$$

Las ecuaciones (1,1) indican además en qué dirección se actúa



lerará una parcela de aire de masa unitaria, la cual está sometida a todas las fuerzas externas que puedan ser del tipo gravitacional, de gradiente de presión y de viscosidad o de fricción.

### 1.1 LA FUERZA DEL GRADIENTE DE PRESION

Esta fuerza aparece en una dirección donde existe una diferencia de presión entre dos puntos. Suponiendo que estos puntos se encuentran en dirección X, en esta dirección entonces obrará una fuerza de este tipo expresada por la ecuación: (Holton, J. R. 1979)

$$\frac{F}{m} = \frac{du}{dt} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} \quad (1,2)$$

Análogamente se pueden expresar las componentes en dirección y y z que queda generalizado para tres dimensiones si es representado en notación vectorial como:

$$\frac{\vec{F}}{m} = \frac{d\vec{v}}{dt} = - \frac{1}{\rho} \left[ \frac{\partial P}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial P}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial P}{\partial z} \hat{k} \right] = - \frac{1}{\rho} \nabla P \quad (1,3)$$

El signo menos indica que la aceleración es positiva cuando la parcela de aire se mueve de las regiones de mayor presión a las de menor presión, notando con esto que la fuerza es proporcional al gradiente del campo de presión y no a la presión en sí.

### 1.2 FUERZA GRAVITACIONAL

La más común de las fuerzas que actúan sobre la atmósfera -

es la de gravitación universal, ésta tiene su origen en el simple hecho de que los cuerpos poseen masa, pudiendo éstos, ser planetas, galaxias o granos de arena y la ley que rige esta atracción establece que la fuerza con que dos cuerpos se atraen es directamente proporcional al producto de sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre ellos.

Si  $M$  representa la masa de la tierra, y  $m$  la masa de una parcela de aire, entonces la fuerza por unidad de masa de la parcela de aire o sea la aceleración que esta adquiere debido a la atracción gravitacional será:

$$\frac{\vec{F}}{m} = \vec{g} = \frac{GM}{r^2} \left( \frac{\vec{r}}{r} \right) \quad (1,4)$$

### 1.3 FUERZAS DE FRICCIÓN

Dado que las fuerzas viscosas dependen del gradiente de velocidad de un fluido, el mayor efecto de la fuerza de rozamiento tiene lugar cerca de la superficie de la tierra, donde el gradiente de velocidad es grande. Esta región recibe el nombre de capa superficial o capa límite. En las capas superiores, la fricción ya no es tan importante. En el modelo que aquí se presenta, se manejan las configuraciones del geopotencial en tres niveles que son 250mb, 500mb y 750mb. Por lo que se despreciará la fricción de aquí en adelante.

### 1.4 SISTEMAS DE REFERENCIA NO INERCIALES Y FUERZAS APARENTES

Los movimientos que suceden en la tierra y observados desde ella, difieren de la descripción que haría un observador situado en un sistema de referencia inercial. La diferencia surge no de la violación de las leyes de Newton, sino de — realizar las observaciones en un sistema rotatorio. Debido a ésto, dicho sistema posee una aceleración y para describir los problemas de dinámica que en él tienen lugar, hay que tener en cuenta este movimiento de giro donde van incluidos los efectos de dos fuerzas aparentes que son la fuerza centrífuga y la fuerza de coriolis.

#### 1.4.1 FUERZA CENTRÍPETA

Si se considera el movimiento de una pequeña masa sujeta al extremo de un hilo y que recorre arcos iguales de un círculo de radio  $r$  en tiempos iguales, esta masa mantiene constante su velocidad angular pero su velocidad lineal cambia de — dirección en todo punto de su trayectoria, produciéndose una aceleración, pudiendo calcularla del análisis gráfico del movimiento en la Fig. (1,1)

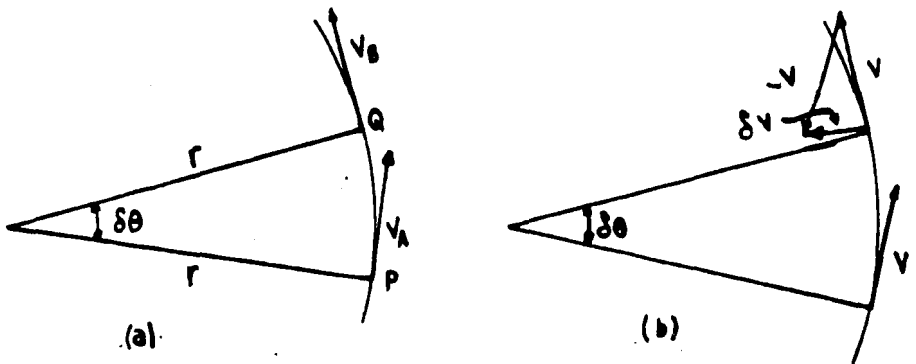


Fig. (1,1)

representando por  $V_A$  la velocidad de la masa en el punto P de la trayectoria y por  $V_B$  la velocidad de la misma un intervalo  $\delta t$  después, cuando pasa por el punto Q habiendo barrido un ángulo  $\delta \theta$ .

$$|\delta v| = |v| \delta \theta \quad (1,5)$$

Como sólo cambia la dirección de  $V$ ;  $|V_A| = |V_B| = v$

para tener la aceleración, se divide la relación (1,5) entre el intervalo de tiempo, cuando  $\delta t \rightarrow 0$

$$\bar{a} = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\delta \bar{v}}{\delta t} = \frac{d\bar{v}}{dt} = v \frac{d\theta}{dt} \left( - \frac{\bar{r}}{r} \right) \quad (1,6)$$

$$\delta t \rightarrow 0$$

sabiendo que  $\Omega = \frac{d\theta}{dt}$  y  $\bar{v} = \Omega r$

$$\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt} = - \Omega^2 \bar{r} \quad (1,7)$$

Esta aceleración está dirigida hacia el eje de rotación y se conoce como aceleración centrípeta.

Haciendo la observación desde un sistema fijo, la masa girando sufre una aceleración centrípeta constante como respuesta a una fuerza ejercida por el hilo, pero si la observación es hecha desde un sistema girando con la masa, ésta parece estacionaria y la fuerza ejercida por el hilo está balanceada — por una fuerza aparente que es la fuerza centrífuga. Un objeto en reposo sobre la superficie terrestre estará sometido a una fuerza centrífuga ( $\Omega^2 R$ ) cuando es visto por un ob—

servador que está en un sistema con la tierra girando, por lo que el peso de este objeto será menor que la fuerza gravitacional  $mg^*$  que tendría si no estuviera girando. Entonces la gravedad efectiva se obtiene de la combinación de estos dos efectos.

$$\bar{g} = g^* + \Omega^2 \bar{R} \quad (1,8)$$

con  $g^*$  la gravedad real que está dirigida hacia el centro de la tierra, entonces la gravedad efectiva estará un poco desviada del centro de la tierra debido al efecto centrífugo.

#### 1.4.2 FUERZA DE CORIOLIS

El aspecto que tiene un movimiento rectilíneo y uniforme para un sistema inercial, parece curvilíneo observado desde un sistema rotatorio. Se sabe que en los sistemas rotatorios aparece una fuerza centrífuga, sin embargo no puede ser esta la causa de la torsión del trayecto, puesto que la dirección de esta fuerza es a lo largo del radio. Por consiguiente en los sistemas que giran, aparece además una fuerza complementaria que es la fuerza de Coriolis.

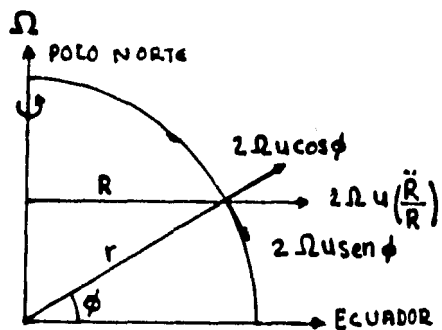
A diferencia de la fuerza centrífuga, cuyo valor depende de la distancia hasta el eje de giro, la fuerza de Coriolis no depende de la distancia, sino de la velocidad del movimiento y su dirección con respecto al eje de giro. Para aclarar esto, supóngase una partícula de masa unitaria puesta en movimiento hacia el este por una fuerza impulsiva, como ahora la partícula gira más rápido que la tierra, la fuerza

centrífuga sobre la partícula es aumentada. Si  $u$  es la velocidad de la partícula hacia el este respecto al suelo, la fuerza total será:

$$\left(\Omega + \frac{u}{R}\right)^2 \bar{R} = \Omega^2 \bar{R} + \frac{2\Omega u}{R} \bar{R} + u^2 \frac{\bar{R}}{R^2} \quad (1,9)$$

el primer término del lado derecho representa la fuerza centrífuga debido a la rotación de la tierra, que se incluye en la gravedad efectiva, ecuación (1,8). En los otros dos términos están las fuerzas de deflexión que actúan perpendiculares al eje de rotación. Para movimientos de escala - sinóptica  $u \ll \Omega R$  y podemos despreciar el último término. Finalmente el término  $2\Omega u \bar{R}/R$  es la fuerza de Coriolis debido al movimiento relativo paralelo a un círculo de latitud. Se puede descomponer esta fuerza en componentes vertical y meridional como aparece en la figura (1,2)

Fig. (1,2) Descomposición de la fuerza de Coriolis en su parte vertical y meridional.



El movimiento en dirección este-oeste producirá una aceleración en dirección norte sur dada por:

$$\left(\frac{dv}{dt}\right) = - 2\Omega u \text{sen } \phi \quad (1,10)$$

Y una aceleración en la vertical dada por

$$\left( \frac{dw}{dt} \right) = 2\Omega \cos \phi \quad (1.11)$$

donde  $\phi$  es la latitud. Una partícula moviéndose hacia el este en el plano horizontal en el hemisferio norte será deflectada hacia el sur por la fuerza de Coriolis, mientras que una partícula moviéndose hacia el oeste será deflectada hacia el norte, en cualquier caso de la deflección está a la derecha de la dirección del movimiento. En el hemisferio sur la deflección es hacia la izquierda.

### 1.5 LA ECUACION DE MOVIMIENTO

Para aplicar la segunda ley de Newton a movimientos relativos a la tierra, se pueden expresar las aceleraciones en un sistema de referencia inercial en términos de movimientos relativos a la tierra. Para ésto se comienza tomando un vector  $\bar{A}$  cualquiera, que es función de las tres coordenadas espaciales X, Y y Z de un sistema inercial y se puede expresar como:

$$\bar{A} = A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k} \quad (1.12)$$

Si  $x'$ ,  $y'$  y  $z'$  son las coordenadas cartesianas de un sistema que gira con la tierra cuya velocidad angular es  $\Omega$ , donde  $\mathbf{i}'$ ,  $\mathbf{j}'$  y  $\mathbf{k}'$  son los vectores unitarios a lo largo de los ejes de este sistema, el vector  $\bar{A}$  puede también expresarse:

$$\bar{A} = A_{x'} \mathbf{i}' + A_{y'} \mathbf{j}' + A_{z'} \mathbf{k}' \quad (1.13)$$

Sabiendo que en el tiempo los vectores unitarios en el sistema que gira, tienen variación en su dirección, la derivada total de la ecuación anterior queda como:

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{A}}{dt} = & \frac{dAx'}{dt} i' + \frac{dAy'}{dt} j' + \frac{dAz'}{dt} k' + Ax' \frac{di'}{dt} + Ay' \frac{dj'}{dt} + \\ & + Az' \frac{dk'}{dt} \end{aligned} \quad (1,14)$$

Los primeros tres términos del segundo miembro representan - la derivada total de  $\bar{A}$  siguiendo el movimiento relativo o - sea con respecto a las coordenadas girando. Además, como es te sistema se mueve con velocidad angular  $\Omega$  constante.

$$\frac{di'}{dt} = \Omega \times i' \quad \frac{dj'}{dt} = \Omega \times j' \quad \frac{dk'}{dt} = \Omega \times k' \quad (1,15)$$

reescribiendo la ecuación (1,14) se tiene

$$\frac{d\bar{A}}{dt} = \frac{d'\bar{A}}{dt} + \Omega \times \bar{A} \quad (1,16)$$

Esto indica que la diferencia entre la derivada total de - cualquier vector  $\bar{A}$  respecto a sistemas inercial y rotando, - es igual al producto vectorial de  $\bar{A}$  y la velocidad angular - del sistema girando.

Aplicando el resultado anterior a un caso especial donde  $\bar{A}$  pudiera representar la posición  $\bar{r}$  de una partícula

$$\frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{d'\bar{r}}{dt} + \Omega \times \bar{r} \quad (1,17)$$



y sabiendo que  $d\vec{r}/dt = \vec{v}$

$$\vec{v} = \vec{v}' + \Omega \times \vec{r} \quad (1,18)$$

V y V' representan respectivamente las velocidades en los sistemas inercial y girando. Aplicando (1,16) a (1,18)

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d'\vec{v}}{dt} + \Omega \times \vec{v}$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d'}{dt} (\vec{v}' + \Omega \times \vec{r}) + \Omega \times (\vec{v}' + \Omega \times \vec{r})$$

$$= \frac{d'v'}{dt} + \Omega \times \frac{d'\vec{r}}{dt} + \Omega \times \vec{v}' + \Omega \times \Omega \times \vec{r}$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d'v'}{dt} + 2 \Omega \times \vec{v}' - \Omega^2 \vec{r} \quad (1,19)$$

La ecuación ( 1,19) establece que la aceleración siguiendo el movimiento en un sistema inercial es igual a la aceleración siguiendo el movimiento relativo en un sistema girando con la tierra más la aceleración centrípeta y la de Coriolis.

Ahora es más sencillo aplicar la segunda ley de Newton a una partícula de aire de masa unitaria donde su aceleración absoluta será el resultado de todas las fuerzas reales actuando sobre ella.

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d'\vec{v}'}{dt} + 2\Omega \times \vec{v}' - \Omega^2 \vec{r} = \vec{g} - \frac{1}{\rho} \nabla P \quad (1,20)$$

como ya se hizo notar en la ecuación (1,8), la combinación de la fuerza gravitacional y la fuerza centrífuga, dá la fuerza gravitacional efectiva  $\bar{g}$ , quedando finalmente

$$\frac{d\bar{V}'}{dt} = -\frac{1}{\rho} \bar{\nabla} P + \bar{g} - 2 \Omega \times \bar{V}' \quad (1,21)$$

Esta es la ecuación de movimiento para un sistema de coordenadas girando, que establece que la aceleración siguiendo el movimiento relativo en el sistema girando es igual a la suma de la fuerza del gradiente de presión, la gravedad efectiva y la fuerza de Coriolis.

La ecuación (1,21) sirve de base para describir los movimientos atmosféricos, pero para propósitos de problemas prácticos en el cálculo numérico debe reemplazarse por tres ecuaciones componentes, sin duda el procedimiento más natural es considerar un sistema de coordenadas esféricas donde las tres coordenadas son: la longitud  $\lambda$ , la latitud  $\phi$  y la distancia vertical  $z$  desde la superficie del suelo.

Los vectores unitarios  $i, j, k$  están dirigidos ahora hacia el este, hacia el norte y hacia el cenit respectivamente.

Una consideración más, es que estos vectores unitarios al ser funciones de posición sobre la superficie de la tierra, sus direcciones no se mantendrán constantes como en un sistema de coordenadas cartesianas por lo que para obtener las ecuaciones componentes es necesario primero evaluar las razones de cambio de los vectores unitarios siguiendo el movimiento, aplicando la derivada total expresada por el operador:

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z} \quad (1,22)$$

así calculando las componentes de la ecuación (1,21) en las tres direcciones, aplicando el operador (1,22) se tiene, —  
(Ver apéndice A)

$$\frac{du}{dt} - \frac{uv \tan \phi}{a} + \frac{uw}{a} - 2\Omega v \sin \phi + 2\Omega w \cos \phi = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} \quad (1,23)$$

$$\frac{dv}{dt} + \frac{u^2 \tan \phi}{a} + \frac{vw}{a} + 2\Omega u \sin \phi = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} \quad (1,24)$$

$$\frac{dw}{dt} - \frac{u^2 + v^2}{a} - 2\Omega u \cos \phi = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} - g \quad (1,25)$$

Las distancias medidas hacia el este, hacia el norte y hacia arriba son x, y y z respectivamente; u, v, w son las componentes de la velocidad relativa al sistema en rotación y a es aproximadamente el radio medio de la tierra.

## 1.6 ANALISIS DE ESCALA DE LA ECUACION DE MOVIMIENTO

Las leyes básicas de la dinámica de fluidos describen todo el espectro de movimientos atmosféricos con excepción de la escala molecular. Por lo que no es sorprendente que no existan soluciones generales para las ecuaciones que inclu-

yen estas leyes.

Para tener resultados útiles, pueden simplificarse las ecuaciones de tal manera que filtren los movimientos que no interesan por medio de la técnica llamada análisis de escala.

Las cantidades que son contínuas y derivables son llamadas variables de campo, como tales son: la velocidad, la presión, la densidad y la temperatura. Las leyes que gobiernan el movimiento atmosférico pueden expresarse como ecuaciones diferenciales que incluyen las variables de campo y sus derivadas.

Es necesario estimar no solo las magnitudes de los campos, sino también las derivadas en estas variables de campo, para decidir si algunos términos en comparación con otros pueden ser despreciados en un análisis aproximado.

Las ecuaciones (1,23), (1,24) y (1,25) describen todos los tipos de movimiento posibles en la atmósfera, siendo las ondas de sonido una solución válida a estas ecuaciones. Sin embargo, para problemas meteorológicos éstas carecen de importancia y pueden eliminarse. (Haltiner, G.J. 1979).

En el análisis de escala se especifican: las magnitudes de las variables de campo, las amplitudes de fluctuaciones en las variables de campo y la longitud, profundidad y escala de tiempo en que ocurren estas fluctuaciones. La naturaleza de los términos dominantes en las ecuaciones que rigen los movimientos es altamente dependiente de las escalas horizontales de movimiento. En base a lo observado en sistemas sinépticos de latitudes medias, se adoptan las siguientes

tes escalas para las variables de campo anteriormente señaladas:

Longitud	$L \sim 10^8 \text{ cm}$
Profundidad	$H \sim 10^6 \text{ cm}$
velocidad horizontal	$U \sim 10^3 \text{ cm seg}^{-1}$
velocidad vertical	$W \sim 1 \text{ cm seg}^{-1}$
variación de presión en la horizontal	$\Delta P \sim 10^4 \text{ dinas cm}^{-2}$
escala de tiempo	$L/U \sim 10^5 \text{ seg}$
parámetro de Coriolis	$f \sim 10^{-4} \text{ seg}^{-1}$
parámetro beta	$df/dy \sim 10^{-13} \text{ cm seg}^{-1}$
densidad media	$\rho \sim 1 \text{ kg m}^{-3}$
cambio de la densidad fraccional	$\delta\rho/\rho \sim 10^{-2}$

Aquí se utiliza una escala de tiempo advectiva, tal que  $L/U$  es el tiempo requerido para recorrer una distancia  $L$  a una rapidez  $U$ , apropiada a sistemas que se desplazan a la rapidez horizontal del viento como los sistemas de presión a escala sinóptica.

Se puede ahora evaluar los órdenes de magnitud de todos los términos que aparecen en las ecuaciones de meteorología dinámica, las derivadas parciales se aproximarán siguiendo el método de diferencias finitas. Así por ejemplo para evaluar el orden de magnitud de  $\partial u / \partial x$ , siendo  $u$  la velocidad zonal y  $x$  una distancia horizontal, se reemplaza  $\partial u / \partial x$  por  $\Delta U / \Delta L$  y suponiendo que  $\Delta U$  tiene el mismo orden de -

magnitud que  $u$  cuando  $\Delta L = L$ . Así que  $\partial u / \partial x \sim U/L$ .  
 más generalmente (Van Mieghem, J. 1978)

$$\left| \frac{\partial u}{\partial x} \right| \sim \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| \sim \left| \frac{\partial v}{\partial x} \right| \sim \left| \frac{\partial v}{\partial y} \right| \sim \left| \frac{U}{L} \right|$$

$$\left| \frac{\partial u}{\partial z} \right| \sim \left| \frac{\partial v}{\partial z} \right| \sim \left| \frac{U}{H} \right|$$

$$\left| \frac{\partial w}{\partial x} \right| \sim \left| \frac{\partial w}{\partial y} \right| \sim \left| \frac{W}{L} \right|$$

$$\left| \frac{\partial w}{\partial z} \right| \sim \left| \frac{W}{H} \right|$$

Estimando la magnitud de cada término de las ecuaciones ---  
 (1,23) y (1,24) para movimientos de escala sinóptica en cierta latitud, se elige por conveniencia que las perturbaciones estén localizadas a una latitud  $\phi_0 = 45^\circ$  Entonces:

$$f_0 = 2\Omega \sin \phi_0 = 2\Omega \cos \phi_0 \sim 10^{-4} \text{ seg}^{-1}$$

En este análisis no se consideran los efectos de la fricción ya que esta fuerza pierde importancia cuando es comparada -- con las fuerzas de Coriolis y del gradiente de presión.

En la siguiente tabla aparecen en los dos primeros renglones las componentes X y Y respectivamente de la ecuación de movimiento, en el tercer renglón aparecen las escalas de términos individuales y en el último renglón, el orden de magnitud de cada término en  $\text{cm seg}^{-2}$ .

TABLA 1.1

ANALISIS DE ESCALA DE LAS ECUACIONES HORIZONTALES DE MOVIMIENTO.

A	B	C	D	E	F
$\frac{du}{dt}$	$-2\Omega v \operatorname{sen}\phi + 2\Omega w \operatorname{cos}\phi$	$+$	$\frac{uw}{a}$	$- \frac{uvtan\phi}{a} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x}$	
$\frac{dv}{dt}$	$+2\Omega u \operatorname{sen}\phi$		$+$	$\frac{vw}{a} + \frac{u^2 tan\phi}{a} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y}$	
$\frac{U}{L}$	$f U$	$f W$	$\frac{Uw}{a}$	$\frac{U^2}{a}$	$\frac{\Delta P}{\Delta L}$
$10^{-2}$	$10^{-1}$	$10^{-4}$	$10^{-6}$	$10^{-3}$	$10^{-1}$

TABLA 1.2

ANALISIS DE ESCALA DE LA ECUACION DE MOVIMIENTO VERTICAL.

A	B	C	D	E
$\frac{dw}{dt}$	$-2\Omega u \operatorname{cos}\phi$	$-\frac{u^2 + v^2}{a} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z}$		$-\epsilon$
$\frac{UW}{L}$	$f_0 U$	$\frac{U^2}{a}$	$\frac{P_0}{H}$	$\epsilon$
$10^{-5}$	$10^{-1}$	$10^{-3}$	$10^3$	$10^3$

### 1.7 APROXIMACION GEOSTROPICA

Analizando los órdenes de magnitud en cada término de las ecuaciones de momentum horizontal que aparecen en la tabla (1,1), se ve que para perturbaciones de escala sinóptica, los términos B y F tienen el mismo orden de magnitud existiendo por lo tanto, un balance entre la fuerza del gradiente de presión y la fuerza de Coriolis. Al retener solo estos términos, representada por:

$$\begin{aligned} -2 \Omega v \operatorname{sen} \phi &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} \\ y \\ 2 \Omega u \operatorname{sen} \phi &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} \end{aligned} \quad (1,27)$$

se obtiene la relación del viento geostrófico que en forma vectorial, se representa por:

$$\bar{V}_g = \frac{1}{\rho f} k \times \nabla_H P \quad (1,28)$$

donde  $f = 2\Omega \operatorname{sen} \phi$  se le conoce como el parámetro de Coriolis. La ecuación (1,28) representa el campo de velocidad horizontal que está definido por una distribución del campo de presión en determinado tiempo.

El hecho de que la aceleración sea cero en el movimiento geostrófico, implica que la trayectoria debe ser recta, de no ser así se rompería el equilibrio entre las dos fuerzas y el fluido horizontal dejaría de ser geostrófico.

En el viento geostrófico, la fuerza del gradiente de presión es perpendicular a las isobaras y está dirigida de las presiones mayores a las presiones menores, por lo tanto, la fuerza de Coriolis que también es perpendicular a las isobaras está-



dirigida de las presiones menores hacia las mayores.

Al no estar relacionadas con el tiempo las ecuaciones (1,27), éstas solo sirven como una relación de diagnóstico, pero si se quiere pronosticar la futura configuración del campo de velocidad, debe retenerse el término de aceleración en las ecuaciones de momentum horizontal aproximado, teniendo

$$\frac{du}{dt} - fv = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x}$$

$$\frac{dv}{dt} + fu = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} \quad (1,29)$$

Es en la práctica donde estas ecuaciones dificultan el pronóstico del tiempo ya que la aceleración que es un orden de magnitud menor, resulta de la pequeña diferencia de dos términos grandes del mismo orden y cualquier error en la medición de uno de ellos, amplificaría el error en la determinación de la aceleración.

### 1.8 LA APROXIMACION HIDROSTATICA

Analizando la ecuación de movimiento vertical para perturbaciones de escala sinóptica, se ve en la tabla (1,2) que los dos últimos términos tienen el mismo orden de magnitud por lo que está aproximadamente en equilibrio el gradiente vertical de presión y la gravedad. El gradiente vertical de presión puede ser tomado por consideraciones de escala como  $-\frac{P_0}{H}$ , donde  $P_0$  es la presión en superficie y  $H$  es la profundidad de la tropósfera. Ya que la presión decrece en un orden de magnitud desde el suelo hasta la tropopausa. Despreñ

oiando algunos cambios horizontales en la presión, se puede-  
escribir la relación entre la presión del aire y la gravedad  
desde un punto de vista estático como

$$\frac{\partial P}{\partial z} = - \rho g \quad (1,30)$$

Al igual que en las ecuaciones de movimiento horizontal se  
hace aquí la consideración que los movimientos están centra-  
dos a 45° de latitud.

La gravedad actúa sobre la masa de la atmósfera de tal mane-  
ra que cuanto más cerca está el aire al suelo, más comprimi-  
do se encuentra, es decir que en las grandes alturas, el --  
aire se encuentra muy enrarecido.

## 1.9 ANALISIS DE VIENTOS

En la meteorología clásica existen diversas clases de vien-  
tos en equilibrio, que existirían si la atmósfera se compor-  
tara idealmente. Tal vez, las clases más simples de movi-  
miento son aquellos en los que no existe aceleración. Por  
la importancia que revisten, se tratará aquí con dos tipos  
importantes de vientos. El Viento Geostrófico y el Viento -  
Térmico.

### 1.9.1 VIENTO GEOSTROFICO

Las observaciones prácticas confirman el hecho que las condi

ciones geostróficas son una aproximación válida en la mayoría de los casos. Esta relación dá al meteorólogo una regla valiosa para relacionar el viento con la distribución de presión, aunque esta relación es válida solo si las isobaras — son líneas rectas.

Usualmente los datos meteorológicos son reportados sobre superficies de presión constante más que a superficies de altura constante, por lo que la expresión del viento geostrófico en coordenadas isobáricas se da como:

$$u_g = - \frac{1}{f} \frac{\partial \Phi}{\partial y} \quad (1,31)$$

$$v_g = \frac{1}{f} \frac{\partial \Phi}{\partial x}$$

o en forma vectorial

$$\bar{v}_g = \frac{1}{f} k \times \nabla_p \Phi \quad (1,32)$$

Donde  $\Phi$  representa el geopotencial que se define como el — trabajo requerido para elevar la unidad de masa desde la superficie de la tierra a una determinada altura y  $\nabla_p$  es el — operador gradiente tomando la presión constante.

La relación del viento geostrófico, puede comprenderse fácilmente en forma gráfica como un equilibrio de fuerzas, tal como aparece en la figura (1,3)

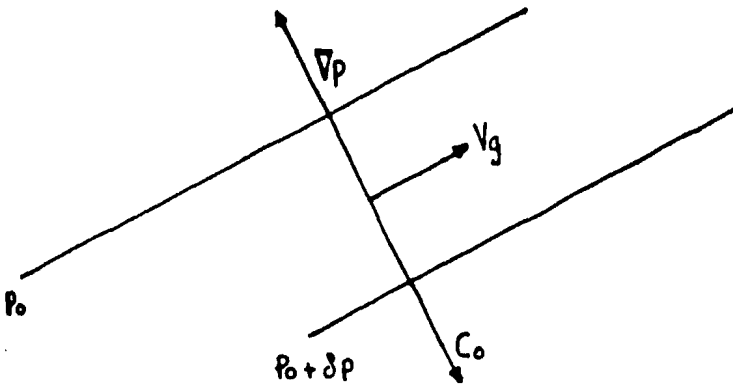


Fig. (1,3)

Por las ecuaciones (1,31) puede verse que la velocidad del viento geostrófico aumenta con la disminución de  $f$ , esto es, al disminuir la latitud. En el ecuador no hay componente vertical de la velocidad angular de la tierra y por lo tanto no hay fuerza de Coriolis, entonces  $V_g$  sería teóricamente in finita. Esto de hecho no es posible, no puede establecerse ningún equilibrio cuando  $f = 0$ .

### 1.9.2 VIENTO TERMICO

Como el aire caliente es menos denso que el frío, la distancia vertical entre dos superficies de presión constante es mayor en las regiones calientes que en las regiones frías. Frecuentemente las masas de aire frío desplazan a las de aire caliente en la atmósfera. Bajo estas condiciones la concentración vertical de isobaras debe ser mayor en las regiones frías que en las zonas cálidas y puede desarrollarse un excesivo aumento en el gradiente de presión como lo indica -

la figura (1,4).

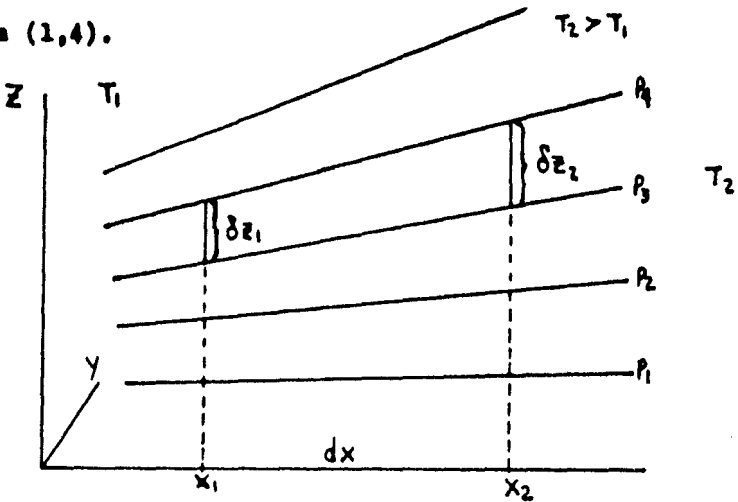


Fig. (1,4)

Inclinación de las superficies isobáricas y regiones de distinta densidad del aire.

La inclinación descendente de las superficies isobáricas a la izquierda de la Fig. (1,4) resulta de un viento geostrofico dirigido hacia el centro del diagrama en el eje y, aumentando en magnitud con la altura cuando aumenta la pendiente de las isobaras. La variación del viento geostrofico por unidad de variación con la altura, se le denomina viento térmico. Y su representación en coordenadas isobáricas es

$$\frac{\partial v_g}{\partial \ln P} = -\frac{R}{f} \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)_P \quad (1.33)$$

$$\frac{\partial u_g}{\partial \ln P} = \frac{R}{f} \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right)_P$$

o en su forma vectorial

$$\frac{\partial v_g}{\partial \ln P} = - \frac{R}{f} k \times (\nabla T)_p \quad (1,34)$$

Puede también representarse el viento térmico para una capa de aire en términos del gradiente horizontal de la diferencia de geopotencial entre la parte superior y la inferior de la capa como :

$$u_T = u_g(P_1) - u_g(P_0) = - \frac{1}{f} \frac{\partial}{\partial y} (\Phi_1 - \Phi_0)$$

$$v_T = v_g(P_1) - v_g(P_0) = \frac{1}{f} \frac{\partial}{\partial x} (\Phi_1 - \Phi_0) \quad (1,35)$$

o en forma vectorial

$$V_T = \frac{1}{f} k \times \nabla (\Phi_1 - \Phi_0)$$

Ahora si se integra la ecuación hidrostática

$$\frac{\partial \Phi}{\partial P} = - \alpha \quad (1,36)$$

y reemplazando el valor de  $\alpha$  en la ecuación de estado

$$P \alpha = RT \quad (1,37)$$

después de integrar y considerando una temperatura promedio  $\bar{T}$  en el interior de la capa se obtiene

$$\delta \Phi = \Phi_1 - \Phi_0 = R \ln \left( \frac{P_0}{P_1} \right) \bar{T} \quad (1,38)$$

de donde se deduce que el espesor proporcional a la temperatura media de la capa, conociéndose a  $\delta \Phi$  como el espesor de la capa entre  $P_0$  y  $P_1$ .

La ecuación del viento térmico es una herramienta de diagnóstico bastante útil que puede utilizarse para calcular la advección horizontal de temperatura en una capa determinada.

Alternativamente, el viento geostrófico puede calcularse del campo de temperatura media, dado que la velocidad geostrófica se conoce a un solo nivel, por ejemplo si se conoce el viento geostrófico en 750 mb y el gradiente de temperatura media horizontal en la capa 750-500 mb también se conoce, se puede aplicar la ecuación del viento térmico para obtener el viento geostrófico en 500 mb.

#### 1.10 LA ECUACION DE CONTINUIDAD O CONSERVACION DE LA MASA

Una variación de la presión atmosférica en cierto lugar representa un acarreo neto de masa de aire de o hacia el lugar. Como consecuencia del movimiento general del aire y de los cambios de temperatura que ocurren en él, se presentan acumulaciones y enrarecimientos de su masa. El campo de presión en la superficie y su desarrollo dependen del movimiento integrado de la atmósfera entre la superficie y la altura por encima de la cual la presión o peso del aire por unidad de área es inapreciable. El movimiento en algunos niveles puede ser más importante que en otros, pero el resultado neto es la causa de que el campo de la presión media en la superficie sea el que se observe en un momento dado.

El importante principio de continuidad, exige que en un mo-

vimiento estacionario, la cantidad de fluido que penetra en cierta región, sea igual a la que sale.

Teóricamente el principio de continuidad puede emplearse -- para deducir el campo de movimiento vertical, conociendo el campo de velocidad horizontal que en la atmósfera toma la -- forma.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial x} (\rho u) - \frac{\partial}{\partial y} (\rho v) - \frac{\partial}{\partial z} (\rho w) \quad (1,39)$$

$$\delta \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \bar{v}) = 0 \quad (1,39)$$

donde  $\rho$  es la densidad media del aire y  $u, v, y w$  son las -- componentes del vector velocidad.

Una forma distinta de representar la ecuación de continui-- dad es empleando la derivada total de la densidad como

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \bar{v} \cdot \nabla \rho \quad (1,40)$$

Y de la identidad matemática.

$$\nabla \cdot (\rho \bar{v}) = \rho \nabla \cdot \bar{v} + \bar{v} \cdot \nabla \rho \quad (1,41)$$

se tiene finalmente la ecuación de continuidad, en la forma

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \nabla \cdot \bar{v} = 0 \quad (1,42)$$

si la densidad no varía apreciablemente, el primer término de (1,42) es cero y se tiene



$$\nabla \cdot v_H = - \frac{\delta w}{\delta z} \quad (1,43)$$

La ecuación (1,43) indica que cualquier divergencia horizontal está compensada por el reemplazamiento debido a la convergencia del movimiento vertical y viceversa.

### 1.11 LA ECUACION DE ENERGIA TERMODINAMICA

El último de los principios básicos para una predicción dinámica es la ley de conservación de la energía que está expresada en la primera ley de la termodinámica que establece que la energía calorífica suministrada a una masa dada de aire, es igual al cambio en su energía interna más el trabajo realizado contra las presiones externas.

$$dq = du + dw \quad (1,44)$$

$du$  es la medida de excitación molecular, pudiéndose demostrar que depende únicamente de la temperatura.

La cantidad de calor requerida por el sistema para cambiar su temperatura, depende del proceso, esto es, si el volumen se mantiene constante, no hay trabajo sobre o por las vecindades y (1,44) queda

$$dq = du \quad (1,45)$$

$$\delta \left( \frac{dq}{dt} \right)_v = \left( \frac{du}{dt} \right) = C_v$$

$$\text{así } du = C_v dt \quad (1,46)$$

si el proceso no es isocórico, entonces

$$dq = C_v dt + p d\alpha \quad (1,47)$$

que es la ecuación de energía para un gas perfecto.

Diferenciando la ecuación de estado  $p\alpha = RT$ , se tiene:

$$p d\alpha + \alpha dp = R dT \quad (1,48)$$

Entonces es posible escribir a (1,47) como

$$dq = C_p dt - \alpha dp \quad (1,49)$$

$$\text{donde } C_p = C_v + R$$

Para sistemas de escala sinóptica a latitudes medias, la razón de calentamiento externo es pequeña comparada a la razón de cambio de energía interna y la razón en que el sistema -- realiza trabajo, por lo que los movimientos que se consideren son casi adiabáticos.

Dividiendo la ecuación (1,44) entre T para representar la -- primera ley de la termodinámica en términos de la entropía

$$\frac{dq}{T} = C_p \frac{dT}{T} - \frac{\alpha}{p} dt \quad (1,50)$$

$$\text{ó } ds = C_p \frac{dT}{T} - R \frac{dp}{p} \quad (1,51)$$

dividiendo esta última ecuación entre  $dt$ , se tiene

$$\frac{dq}{dt} = C_p \frac{d \ln T}{dt} - R \frac{d \ln P}{dt} \quad (1,52)$$

considerando un caso adiabático,  $dq = 0$  y entonces

$$C_p \frac{d \ln T}{dt} = R \frac{d \ln P}{dt} \quad (1,53)$$

Usando ahora la definición de temperatura potencial que es - la temperatura que adquiere una porción de aire cuando por - compresión o por dilatación se le lleva a una presión de - - 1000 mb, representada matemáticamente por:

$$\theta = T \left( \frac{1000}{P} \right)^{R/C_p} \quad (1,54)$$

Tomando el logaritmo de esta expresión y derivándola con respecto a  $t$ , resulta

$$C_p \frac{d \ln \theta}{dt} = C_p \frac{d \ln T}{dt} - R \frac{d \ln P}{dt} \quad (1,55)$$

comparando las ecuaciones (1,52) y (1,55), resulta que

$$\frac{dq}{dt} = C_p \frac{d \ln \theta}{dt} \quad (1,56)$$

De esta última ecuación se tiene que la temperatura potencial es proporcional a la entropía, representando esta última ecuación, la primera ley de la termodinámica (Helton J.R. 1979).

Cuando la densidad del aire depende de la presión y de la temperatura  $\rho = \rho(P, T)$ , se dice que la atmósfera es baroclínica. En una atmósfera de este tipo, el viento geostrofico, tiene un corte vertical que está relacionado con el gradiente horizontal de temperatura.

Cuando la densidad solo depende de la presión, se dice que la atmósfera es barotrópica y puede entenderse que una superficie de densidad constante, es también una superficie isobárica.

## CAPITULO II

### 2. EL SISTEMA CASIGEOSTROPICO

Dado que este trabajo está enfocado para aplicarse en el área donde se localiza la República Mexicana, meteorológicamente hablando la región IV, se deben considerar las ecuaciones que expliquen el comportamiento de los sistemas sinóticos de latitudes medias y bajas, siendo éstas las expresiones matemáticas de la segunda ley de Newton, de la continuidad de masa y de la conservación de energía, estas ecuaciones permiten diagnosticar y pronosticar la estructura tridimensional de un sistema sinóptico. En este capítulo se van a derivar y analizar las ecuaciones básicas del sistema casigeostrópico que está conformado por la ecuación de vorticidad y la ecuación de energía termodinámica con las restricciones de geostroficidad.

Estas ecuaciones básicas sirven de soporte a los modelos de pronóstico numérico que tratan el comportamiento y evolución de los sistemas atmosféricos. (Holton, J.R. 1979).

#### 2.1 VORTICIDAD

El concepto de vorticidad está asociado con la velocidad instantánea de rotación o del giro en un fluido.

Esta cantidad puede representarse vectorialmente como el rotacional de la velocidad. Esto es :

$$\begin{aligned} \text{vorticidad} = \nabla \times \bar{V} = & \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) i - \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} \right) j + \\ & + \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) k \end{aligned} \quad (2,1)$$

Las tres componentes dan al giro del elemento de fluido una orientación en el espacio, así como su magnitud. De aquí - que la vorticidad se exprese gráficamente por un vector paralelo al eje de rotación del elemento de fluido y proporcional a la velocidad angular del elemento. Aquí solo se utilizará la componente vertical de la vorticidad o vorticidad relativa que se presenta simbólicamente por  $\zeta$ , debido a que en la atmósfera las componentes horizontales son despreciables comparadas con la componente vertical (Holton - 1979).

$$\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \quad (2,2)$$

Otra forma de tratar la vorticidad es relacionándola con la circulación alrededor de un pequeño elemento de área, para obtener la medida microscópica de la rotación del fluido, alrededor del área encerrada como aparece en la figura (2,1) - se toman las siguientes consideraciones:

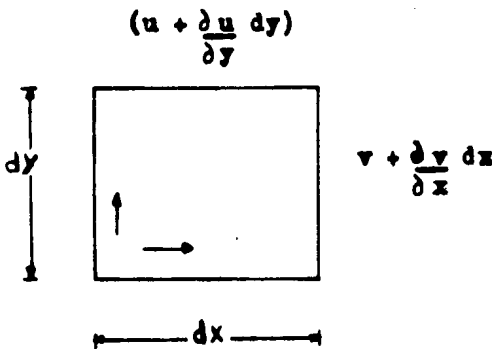


Fig. (2,1)

Derivación de la vorticidad alrededor de un elemento de área.

Si la circulación alrededor de la trayectoria cerrada en un plano se define por la integral de línea

$$c = \oint v' dl \quad (2,3)$$

en el plano xy se tendrá

$$c = \oint u' dx + v' dy$$
$$dc = u dx + v dy$$

cuando el área del elemento rectangular tiende a cero,

$$\zeta = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{\oint v' dl}{\Delta} \quad (2,4)$$

Para demostrar esta relación se utiliza la figura (2,1) en donde la circulación alrededor del pequeño elemento rectangular es:

$$dc = u dx + (v + \frac{\partial v}{\partial x} dx) dy - (u + \frac{\partial u}{\partial y} dy) dx - v dy$$
$$= (\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}) dx dy$$

$$\therefore \frac{dc}{d\Delta} = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \quad (2,5)$$

Esta es la vorticidad en el plano xy, similarmente se pueden obtener las componentes en los planos xs y ys como aparece -

en la ecuación (2,1)

Si la circulación es alrededor de un elemento circular de fluido, entonces partiendo de la expresión (2,5) se tiene que la vorticidad representa el doble de la velocidad angular de una partícula del fluido considerado; esto es:

$$\zeta = \frac{dc}{dA} = \frac{2\pi r v}{\pi r^2} = \frac{2v}{r} = 2\Omega$$

como la vorticidad puede medirse en función de la rotación o de la velocidad angular, evidentemente es una función de la curvatura en la trayectoria de la partícula o elemento de fluido; esto es particularmente significativo en meteorología, donde como resultado de la suposición geostrofica, se considera que el viento sopla a lo largo de las isobaras. La curvatura de éstas es por lo tanto de importancia para estimar la vorticidad horizontal del campo de viento atmosférico. La vorticidad es también función del cizallamiento, definiéndose a éste como el cambio de velocidad por unidad de distancia en dirección normal a la del movimiento.

## 2.2 LA ECUACION DE VORTICIDAD EN COORDENADAS CARTESIANAS

Con el objeto de derivar la ecuación de vorticidad se analizarán las ecuaciones de movimiento horizontal, que darán la variación de la vorticidad con respecto al tiempo sin limitar la validez al movimiento adiabático. Considerándose me-



vimientos a la escala sinéptica y suponiéndose que  $\rho$  permanece constante en la horizontal, se emplean las ecuaciones — (1,29) derivándose la primera con respecto a  $y$  y la segunda con respecto a  $x$ , de la siguiente manera:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{du}{dt} - fv = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \right] ; \quad \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{dv}{dt} + fu = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \right]$$

Del resultado de estas derivaciones, se resta la segunda de la primera y ordenando términos después de considerar que la vorticidad está representada por la ecuación (2,2), se tiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial \zeta}{\partial t} + w \frac{\partial \zeta}{\partial x} + v \frac{\partial \zeta}{\partial y} + w \frac{\partial \zeta}{\partial z} + (\zeta + f) \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \left( \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial z} - \right. \\ \left. \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} \right) + v \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{\rho^2} \left( \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial \rho}{\partial y} \frac{\partial p}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (2,6)$$

Dado que el parámetro de Coriolis solo depende de la velocidad angular de la tierra y de la latitud,

$$\frac{df}{dt} = v \frac{\partial f}{\partial y}$$

por lo que puede representarse a la ecuación (2,6) como

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [\zeta + f] = -(\zeta + f) \left[ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right] - \left[ \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} \right] + \\ + \frac{1}{\rho^2} \left[ \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial \rho}{\partial y} \frac{\partial p}{\partial x} \right] \end{aligned} \quad (2,7)$$

En el análisis de esta ecuación, toda partícula de aire que se mueve, debe tener una vorticidad absoluta  $\eta = \zeta + f$  que está compuesta de la vorticidad debida a su movimiento relativo a la superficie de la tierra, más la vorticidad planetaria debida al giro de la tierra.

La expresión (2,7) establece que la razón de cambio de la vorticidad absoluta es igual a la suma de diferentes manifestaciones de la vorticidad originadas por la divergencia, la inclinación y el campo solenoidal respectivamente. La contribución al cambio de vorticidad absoluta debido a cada término de la ecuación (2,7) se puede considerar como sigue:

Considerando el término de divergencia puede observarse la aportación si se establece la analogía con un cuerpo sólido en rotación que cambia su velocidad angular cuando cambia su momento de giro conservándose el momento angular. En este caso, si hay divergencia horizontal positiva, aumentará con el tiempo el área encerrada de una parcela de fluido, pudiendo disminuir la vorticidad absoluta promedio del fluido encerrado si se conserva la circulación.

La contribución por el término de inclinación o torcedura se debe principalmente a los componentes de vorticidad en la vertical orientadas horizontalmente por un campo de movimiento vertical no uniforme.

Por último el término solenoidal es el equivalente al solenoide donde se aplica el teorema de la circulación, dividido entre el área cuando ésta tiende a cero en el límite. Para reforzar este concepto, se considera el término solenoidal -

del teorema de circulación  $\oint dp/\rho$ , el cual con la ayuda del teorema de Stokes, se puede representar como (Holton 1979):

$$-\oint \alpha dp = -\oint \alpha \nabla p \cdot d\mathbf{l} = -\iint_A \nabla \times (\alpha \nabla p) \cdot \mathbf{k} \, dA$$

donde A representa el área encerrada por la curva que la rodea y utilizándose la identidad  $\nabla \times (\alpha \nabla p) = \nabla \alpha \times \nabla p$ , se tiene  $-\oint \alpha dp = -\iint (\nabla \alpha \times \nabla p) \cdot \mathbf{k} \, dA$

desarrollándose el producto vectorial del paréntesis y dividiéndolo entre el área, se encuentra la equivalencia entre el término solenoidal de la vorticidad y del teorema de la circulación, éste es

$$-\left( \frac{\partial \alpha}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial \alpha}{\partial y} \frac{\partial p}{\partial x} \right) = -k \cdot (\nabla \alpha \times \nabla p)$$

### 2.3 ANALISIS DE ESCALA DE LA ECUACION DE VORTICIDAD

Para hacer un análisis de escala en la ecuación de vorticidad, se usan los valores de las consideradas para movimientos de escala sinóptica que aparecen en la sección 1.6, con ellas se evalúa el orden de magnitud en cada término de la ecuación (2,6). Teniendo primeramente que

$$\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \lesssim \frac{U}{L} \sim 10^{-5} \text{ seg}^{-1}$$

el símbolo  $\lesssim$  se usa para denotar que posiblemente las dos partes de la expresión pueden cancelarse parcialmente, de tal manera que la magnitud real sea menor que la indicada. Si comparamos el orden de magnitud de la vorticidad relativa

va con el parámetro de Coriolis, se tiene:

$$\frac{\zeta}{f} \lesssim \frac{U}{f_0 L} \sim 10^{-1} = R_0$$

donde  $R_0$  se le conoce como el número de Rossby, alcanzando éste un valor aproximado a la unidad en latitudes bajas cercanas al ecuador.

De este resultado, se aprecia que para sistemas de escala sinóptica de latitudes medias, la vorticidad relativa es menor que la vorticidad de la tierra. De aquí que sea posible despreciar  $\zeta$  en el término de la divergencia

$$(\zeta + f) \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \sim f \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = f \nabla_H \cdot \bar{V}$$

las magnitudes de los demás términos de la ecuación (2,6) son

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t}, \quad u \frac{\partial \zeta}{\partial x}, \quad v \frac{\partial \zeta}{\partial y} \sim \frac{U^2}{L^2} \sim 10^{-10} \text{ s}^{-2}$$

$$w \frac{\partial \zeta}{\partial z} \sim \frac{wU}{LH} \sim 10^{-11} \text{ s}^{-2}$$

$$v \frac{\partial f}{\partial y} \sim U \beta \sim 10^{-10} \text{ s}^{-2}$$

$$f \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \lesssim \frac{fU}{L} \sim 10^{-9} \text{ s}^{-2}$$

$$\left( \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} \right) \lesssim \frac{wU}{HL} \sim 10^{-10} \text{ s}^{-2}$$

$$\frac{1}{\rho^2} \left( \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial \rho}{\partial y} - \frac{\partial \rho}{\partial y} \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) \lesssim \frac{\delta \rho}{\rho^2} \frac{\delta \rho}{L^2} \sim 2 \times 10^{-11} \text{ s}^{-2}$$

comparándose las magnitudes de los términos que aparecen, - se observa que si  $\partial u / \partial x$  y  $\partial v / \partial y$  no fueran casi iguales y opuestos, la ecuación no podría satisfacerse al ser el término de divergencia en orden de magnitud mayor que los demás términos. De esto se desprende que el comportamiento de las perturbaciones de de escala sinóptica debe ser casi no divergente, para que el término de divergencia sea lo su ficientemente pequeño y pueda balancearse con los términos de advección de vorticidad.

De las consideraciones de escala anteriores y la definición del número de Rossby

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \lesssim 10^{-6} \text{ s}^{-1}$$

$$\left| \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) / \zeta_0 \right| \lesssim R_0^2$$

$$\text{y } \left| \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) / \zeta \right| \ll R_0$$

se incluye que la razón de la divergencia horizontal a la vorticidad relativa tiene la misma magnitud que la razón de la vorticidad relativa a la vorticidad planetaria. Reteniendo entonces en la ecuación (2,7) solo los términos de orden  $10^{-10}$ , se obtiene como una primera aproximación para movimientos de escala sinóptica que:

$$d_h \left( \frac{\zeta + f}{dt} \right) = -f \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \quad (2,8)$$

la ecuación (2,8) es una primera aproximación y establece - que el cambio en la vorticidad absoluta siguiendo el movimiento horizontal en escala sinóptica, es totalmente debido al efecto de divergencia. Esta aproximación sin embargo no es válida en la vecindad de frentes atmosféricos, donde la escala de variación horizontal es solo 100 Km y en esta escale  $w \sim 10 \text{ cm S}^{-1}$ , aquí tanto la advección vertical, los términos de inclinación y solenoidal pueden hacerse tan grandes como el término de divergencia.

#### 2.4 LA ECUACION DE VORTICIDAD EN COORDENADAS ISOBARICAS

Una forma más sencilla de trabajar con la componente vertical de la vorticidad es cuando se considera en un sistema de coordenadas isobárico, dadas las ventajas mencionadas en el apéndice B. Para tener esta forma sencilla se utilizarán nuevamente las ecuaciones de movimiento en coordenadas isobáricas, representadas vectorialmente por

$$\frac{dV}{dt} + f k \times V = -\nabla \Phi \quad (2,9)$$

empleándose además las siguientes igualdades vectoriales

$$(V \cdot \nabla) V = \nabla \left( \frac{V \cdot V}{2} \right) + k \times V \zeta$$

$$\text{siendo } \zeta = k \cdot (\nabla \times V)$$

$$\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = (\nabla \cdot \mathbf{B}) \mathbf{A} + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{A} - (\nabla \cdot \mathbf{A}) \mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B}$$

y  $\nabla \times \nabla C = 0$

siendo  $\bar{\mathbf{A}}$  y  $\bar{\mathbf{B}}$  dos vectores cualesquiera y C un escalar

el operador  $\nabla$  representa el gradiente horizontal en una superficie isobárica. Aplicando las igualdades vectoriales sobre la ecuación (2,9), se tiene una nueva expresión para la ecuación de movimiento como

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \nabla \left( \frac{\mathbf{V} \cdot \mathbf{V}}{2} \right) + \mathbf{k} \times \mathbf{V} \zeta + \omega \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial p} + \mathbf{f} \mathbf{k} \times \mathbf{V} = - \nabla \Phi \quad (2,10)$$

Aplicándose ahora el operador  $\mathbf{k} \cdot \nabla$  a la ecuación (2,10) se llega a la ecuación:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = - \mathbf{V} \cdot \nabla (\zeta + \mathbf{f}) - (\zeta + \mathbf{f}) \nabla \cdot \mathbf{V} - \mathbf{k} \cdot (\nabla \omega \times \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial p}) - \omega \frac{\partial \zeta}{\partial p} \quad (2,11)$$

La ventaja de esta ecuación comparada con (2,7) es que se elimina la contribución solenoidal. Para fines prácticos esta contribución no importa mucho debido a la pequeñas de su magnitud que puede ser despreciada en los movimientos de escala sinóptica.

Los términos de la ecuación (2,11) en orden de aparición son:

- 1.- La razón local de cambio de la vorticidad relativa
- 2.- La advección horizontal de la vorticidad absoluta

- 3.- El término de divergencia
- 4.- El término de inclinación
- 5.- La advección vertical de la vorticidad relativa

Por el análisis de escala dado en la sección (2,3) puede simplificarse aún más la ecuación de vorticidad (2,11) para movimientos de escala sinóptica si:

- 1.- Se reemplaza la vorticidad relativa por su valor geostrofico.
- 2.- Se aproxima la velocidad horizontal por el viento geostrofico en el término de advección.
- 3.- Se desprecia  $\zeta$  comparada con  $f$  en el término de divergencia.
- 4.- Despreciando la advección vertical y términos de inclinación.

La expresión resultante dadas las anteriores restricciones queda como:

$$\frac{\partial \zeta_g}{\partial t} = - v_g \cdot \nabla (\zeta_g + f) - f \nabla \cdot v \quad (2,12)$$

Si además se desarrolla el parámetro de Coriolis en una serie de Taylor a una latitud  $\phi_0$ , para determinar el orden de magnitud de la razón de los primeros dos términos de la expansión. Esto es

$$f = f_0 + \beta Y + (\text{términos de orden superior})$$

$$\text{donde } \beta = \left( \frac{d f}{d y} \right)_{\phi_0} \quad \text{y } Y = 0 \text{ en } \phi_0$$

eligiendo a  $L$  como la escala latitudinal de los movimientos, se tiene el siguiente orden de magnitud



$$\frac{\beta}{f_0} \frac{df}{dy} \frac{L}{f_0} = \frac{1}{a} \frac{d}{d\phi} (2\Omega \operatorname{sen} \phi) \frac{L}{f_0}$$

$$= \frac{L}{a} \frac{2\Omega \cos \phi}{2\Omega \operatorname{sen} \phi} = \frac{\cos \phi}{\operatorname{Sen} \phi} \frac{L}{a}$$

Quando la escala latitudinal de los movimientos comparada — con el radio de la tierra es pequeña,  $L/a \ll 1$ , entonces el — parámetro de Coriolis puede considerarse con un valor cons— tante  $f_0$  excepto en el caso en que aparece diferenciado en — el término de advección. Considerando lo anterior, la ecua— ción de vorticidad casigeostrofica se expresa como:

$$\frac{\partial \zeta_g}{\partial t} = - v_g \cdot \nabla (\zeta_g + f) - f_0 \nabla \cdot v \quad (2,13)$$

## 2.5 LA ECUACION DE LA ENERGIA TERMODINAMICA

Como fue mencionado al principio del capítulo, la ecuación — de la energía termodinámica es la base del modelo baroclíni— co que aquí se manejará, por lo que es conveniente hacer un— análisis de ella. Con el fin de adecuar esta ecuación a los — fines meteorológicos que se han propuesto; es decir para ha— cer un pronóstico numérico, se expresará en términos del geo— potencial, haciendo uso de las siguientes ecuaciones:

$P \alpha = R T$	Ecuación de estado
$\theta = T \left( \frac{1000}{P} \right)^{\kappa/c_p}$	Ecuación de temperatura poten— cial
$\frac{\partial \Phi}{\partial p} = - \alpha$	Ecuación hidrostática
$c_p \frac{d \ln \theta}{dt} = \frac{dq}{dt}$	Ecuación de energía termodiná— mica

Para facilitar el análisis de estas ecuaciones se elige un —

sistema de coordenadas isobárico donde la derivada total siguiendo el movimiento está dada por el operador

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + \omega \frac{\partial}{\partial p}$$

donde  $\omega = \frac{dp}{dt}$

con el fin de obtener un conjunto cerrado de ecuaciones se elimina  $\Theta$  reescribiendo la ecuación de la energía termodinámica en términos del geopotencial. Esto es posible ya que  $-\partial\Phi/\partial p$  es proporcional a la temperatura si la atmósfera se encuentra en equilibrio hidrostático. Partiendo de la relación de la temperatura potencial y la ecuación de estado:

$$\Theta = \frac{p \alpha}{R} \left( \frac{1000}{p} \right) R/c_p$$

calculando el logaritmo natural de esta expresión y derivando con respecto al tiempo se tiene:

$$\frac{d \ln \Theta}{dt} = \frac{\partial \ln \Theta}{\partial t} + u \frac{\partial \ln \Theta}{\partial x} + v \frac{\partial \ln \Theta}{\partial y} + \omega \frac{\partial \ln \Theta}{\partial p} = \frac{1}{c_p} \frac{ds}{dt}$$

(2,14)

si se trabaja sobre una superficie isobárica, se tiene

$$\left( \frac{d \ln \Theta}{dt} \right)_p = \left( \frac{d \ln \alpha}{dt} \right)_p$$

por lo que la ecuación de la energía termodinámica tendrá la forma:

$$\frac{d \ln \Theta}{dt} = \frac{\partial \ln \alpha}{\partial t} + u \frac{\partial \ln \alpha}{\partial x} + v \frac{\partial \ln \alpha}{\partial y} + \frac{\partial \ln \Theta}{\partial p} = \frac{1}{c_p} \frac{ds}{dt} \quad (2,15)$$

Utilizando en esta ecuación la aproximación hidrostática se tiene finalmente:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left( -\frac{\partial \Phi}{\partial p} \right) + u \frac{\partial}{\partial x} \left( -\frac{\partial \Phi}{\partial p} \right) + v \frac{\partial}{\partial y} \left( -\frac{\partial \Phi}{\partial p} \right) - \sigma \omega = \\ = \frac{\alpha}{c_p} \frac{ds}{dt} \end{aligned}$$

donde  $\sigma = -\frac{\alpha}{\Theta} \frac{\partial \Theta}{\partial p}$  (2,16)

se le conoce como el parámetro de estabilidad estática. La ventaja de llegar a la expresión (2,16) es haber reducido el número de variables, pudiendo ser aún más simplificada si se considera que para sistemas de escala sinóptica, la velocidad horizontal puede ser igual a la velocidad geostrofica.

$$V = i u + j v = k \times \frac{\nabla \Phi}{f}$$

de tal manera que se pueden reemplazar por su valor geostrofico las componentes de la velocidad en la ecuación (2,16)

Haciendo una consideración más, se supone que el calentamiento diabático es demasiado pequeño comparado con los demás términos por lo que puede ser despreciado, teniendo para la ecuación de energía termodinámica aproximada, la siguiente expresión:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( -\frac{\partial \Phi}{\partial p} \right) = -v_g \cdot \left( -\frac{\partial \Phi}{\partial p} \right) + \tau \omega \quad (2,17)$$

como se observó anteriormente, para una atmósfera hidrostática, la temperatura es proporcional a  $-\partial \Phi / \partial p$  conociéndose también a este término como el espesor.

Analizando cada término de la ec. (2,17), se tiene que el primero representa la razón local de cambio de la temperatura sobre una superficie isobárica. Los otros dos términos representan la advección de temperatura por el viento geostrofico y el enfriamiento adiabático respectivamente. En este último término están contemplados los cambios de temperatura debidos a compresiones y expansiones del aire.

## CAPITULO III

### EL MODELO BAROCLINICO DE DOS PARAMETROS

Es un hecho ampliamente aceptado que el comportamiento de las perturbaciones a gran escala en el flujo del oeste en latitudes medias, es en muchos aspectos muy similar al de perturbaciones inicialmente equivalentes a un fluido barotrópico. Las soluciones numéricas de la ecuación de vorticidad no lineal para flujo barotrópico no divergente fueron primero presentados por Charney y colaboradores (1950) y los resultados de pruebas más extensas llevadas a cabo en Suecia y otros centros meteorológicos, han establecido que el mecanismo dominante de los cambios diarios de presión en la tropósfera media, está involucrado el principio de conservación de vorticidad. Sin embargo se ha encontrado que la teoría del flujo barotrópico no es capaz de describir la intensificación ó decaimiento de los sistemas de presión, simplemente porque el principio de conservación de vorticidad imposibilita cambios en la intensidad de los centros de circulación. Para ello, muchos investigadores han puesto su atención en el desarrollo de una teoría apropiada del flujo baroclínico, que sea lo suficientemente simple para explicar el crecimiento de nuevos centros de circulación.

Puesto que la ciclogénesis es normalmente acompañada por un aumento en la energía cinética total, es claro que uno de los ingredientes esenciales en tal teoría sería un mecanismo de inestabilidad netamente baroclínica, porque la energía cinética de la perturbación en desarrollo es suministrada por la transformación de la energía potencial existente. La clave del problema está en incorporar este hecho en una forma real y simple.

En los últimos años varias teorías han sido propuestas por Eady (1952), Eliassen (1952), Thompson (1953) Charney y Phillips (1953) con los mismos fines pero siguiendo distintas aproximaciones.

Todos éstos modelos exhiben una especie de inestabilidad baroclínica que permite alimentar de energía a la perturbación en desarrollo.

En este capítulo se presenta la teoría del modelo baroclínico de dos parámetros que describe cómo pueden computarse los pronósticos; comenzando con las ecuaciones generales de movimiento casigeostrofico para un tipo especial de flujo baroclínico, cuyo estado es caracterizado por solo dos variables y que se reduce a un flujo barotópico en un caso degenerado.

### 3.1 EL FILTRADO DE ONDAS DE SONIDO Y DE GRAVEDAD

Las ecuaciones generales de la atmósfera permiten soluciones de diversos tipos, tales como, ondas de sonido, de inercia, de gravedad y ondas de Rossby. No todos estos tipos de onda tienen la misma importancia en lo referente a descripción de sistemas en movimiento que conducen el tiempo; por ejemplo las ondas de gravedad y de sonido se mueven muy rápido en comparación a éstos sistemas, sin embargo las ondas de Rossby caracterizadas por un movimiento lento son principalmente capaces de describir el movimiento de los sistemas meteorológicos de interés.

En base a lo anterior, es conveniente tomar un sistema de --

ecuaciones filtradas que describan con precisión las ondas de Rossby, al mismo tiempo que los otros movimientos ondulatorios pueden ser omitidos, de tal manera que la solución real no se vea oscurecida por ondas indeseables.

Para eliminar las ondas de sonido en la vertical, se reemplaza la ecuación de movimiento vertical por la de aproximación hidrostática. Sin embargo una atmósfera hidrostáticamente balanceada puede permitir una clase especial de ondas acústicas propagándose horizontalmente. En este tipo de onda, la velocidad vertical es cero, pero la presión oscila en la capa inferior. Para filtrar este tipo de oscilación es necesario que:

$$\omega = \frac{d p}{d t} = 0 \text{ en la capa inferior (Holton 1979).}$$

Un campo de velocidad horizontal divergente que cambia con el tiempo es esencial para la propagación de ondas de gravedad. Si se desprecia la razón local de cambio de la divergencia horizontal al calcular el balance entre los campos de masa y velocidad es suficiente para filtrar las ondas de gravedad dependientes del tiempo.

Hasta ahora la mayoría de las ecuaciones de pronóstico que han sido consideradas, se han basado en las aproximaciones casi-geostroficadas y casi-estáticas. La aproximación casi-estática es válida para movimientos cuyo alcance horizontal es grande en comparación con su alcance vertical y es generalmente tratada como legítima para todos los movimientos a gran escala en la atmósfera.

Al estudiar las soluciones de ecuaciones linealizadas, se en

cuentra que esta aproximación junto con la aproximación casi estática, eliminan las ondas de sonido y las ondas inerciales y gravitacionales ordinarias, cuyas velocidades de perturbación son completamente no geostróficas. La aproximación casi-estática permite usar la presión  $p$  en lugar de la altura  $z$  como coordenada vertical.

### 3.2 LAS ECUACIONES DE PREDICCIÓN DEL SISTEMA CASIGEOSTROFICO FILTRADAS

El método casigeostrófico consiste en sustituir el viento real por el viento geostrófico en los términos que no son críticamente afectados por ésta sustitución. Así la aproximación del viento geostrófico no puede usarse en el término de la divergencia. La manera más simple y lógica de introducir la aproximación geostrófica consiste en sustituir el viento real por el viento geostrófico en la ecuación de la energía termodinámica y la ecuación de vorticidad.

Un concepto que reviste importancia en este trabajo, es el de la función corriente representada por  $\psi$  y para introducirla en el análisis, puede partirse del teorema de Helmholtz, que establece que un campo de velocidad puede dividirse en una parte no divergente  $V_\psi$  más una parte irrotacional  $V_\bullet$  (Holton 1979).

$$V = V_\psi + V_\bullet$$

donde  $\nabla \cdot V_\psi = 0$  y  $\nabla \times V_\bullet = 0$

(3.1)



Considerando bidimensional el campo de velocidad, puede considerarse la parte no divergente en términos de una función-corriente  $\psi$  definida por:

$$V\psi = k \times \nabla\psi \quad (3.2)$$

o en componentes cartesianas

$$u = -\frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial\psi}{\partial x}$$

de lo cual puede verificarse

$$\nabla \cdot V\psi = 0 \quad \text{y} \quad \zeta = k \cdot \nabla \times V = \nabla^2 \psi$$

Puesto que las isolíneas de  $\psi$  corresponden a líneas de corriente para la velocidad no divergente, la distancia que se para las isolíneas de  $\psi$  es inversamente proporcional a la magnitud de la velocidad no divergente, la distribución de  $V\psi$  puede ser fácilmente representada en el trazado de líneas de  $\psi$  constante sobre un mapa.

Por análisis de escala de la ecuación de vorticidad dada en el capítulo 2, se tiene que  $V$  puede considerarse casi no divergente, esto es

$$|v\psi| \ll |v_e|$$

Por medio de la ecuación de balance lineal, no tratada aquí, puede relacionarse la función  $\psi$  con el geopotencial  $\Phi$  en una relación sencilla que es aproximada solo fuera de los trópicos y es:

$$\nabla^2 \Phi = f_0 \nabla^2 \psi$$

donde  $f_0$  es un valor medio del parámetro de Coriolis. Así para movimientos de escala sinóptica, la función corriente -

se da aproximadamente por  $\psi = \Phi / f_0$ . De aquí que el campo de geopotencial sobre una carta de presión constante sea proporcional al campo de la función corriente y al mismo orden de aproximación

$$v_\psi = \frac{k \times \nabla \Phi}{f_0}$$

Ahora la ecuación de vorticidad (2,13) y la ecuación de la energía termodinámica (2,17) pueden representarse en términos de  $\psi$  y  $\omega$  como

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \psi = - v_\psi \cdot \nabla (\nabla^2 \psi + f) + f_0 \frac{\partial \omega}{\partial p} \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \psi}{\partial p} \right) = - v_\psi \cdot \nabla \left( \frac{\partial \psi}{\partial p} \right) - \frac{\sigma}{f_0} \omega \quad (3.4)$$

### 3.3 DERIVACION DEL MODELO BAROCLINICO DE DOS PARAMETROS

Los modelos barotrópicos establecen que la distribución de vorticidad vertical en cualquier instante es transportada -- isobáricamente por el campo de vientos, no permitiendo la advección de temperatura que es un proceso esencial para el desarrollo de sistemas sinópticos. Si se quieren producir pronósticos satisfactoriamente consistentes, es necesario predecir el desarrollo de nuevos sistemas. Para incluir los procesos de advección térmica que son esenciales en el desarrollo baroclínico, debe usarse un modelo que incluye más de un nivel en la atmósfera, pues en una atmósfera baroclínica hay advección de aire de diferentes temperaturas y el espesor de

las distintas capas varía como resultado de este efecto.

El modelo Baroclínico que se integra en este trabajo es el publicado por Holton (1979) que incorpora el proceso de advección de temperatura baroclínica en la predicción del geopotencial entre dos niveles. La derivación del modelo consiste en dividir la atmósfera en dos capas como aparece en la figura (3,1), la primer capa de 0 mb a 500 mb y la segunda de 500 mb a 1000 mb

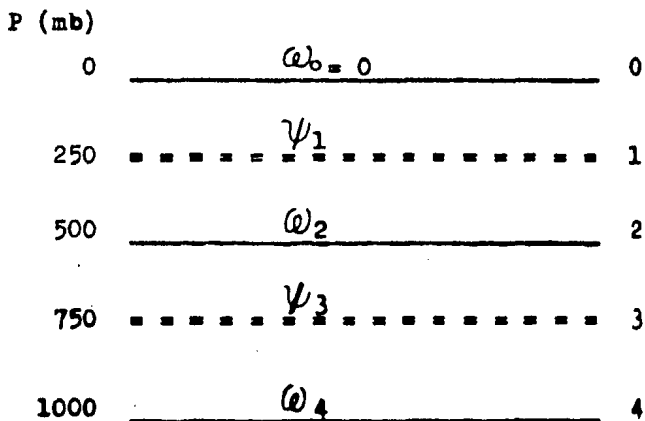


Fig. (3,1) Representación de la atmósfera dividida en capas para la derivación del modelo Baroclínico.

Dividiendo estas capas en intervalos de presión de 250 mb, aparecen los niveles 1 y 3.

Aplicando la ecuación de vorticidad en los niveles de presión de 750 mb y 250 mb, utilizando además la ecuación de la energía termodinámica en el nivel isobárico de 500 mb. y haciendo uso de las aproximaciones por diferencias finitas, se pueden evaluar las derivadas verticales como;

$$\left(\frac{\partial \omega}{\partial p}\right)_2 \approx \frac{\omega_2 - \omega_0}{\Delta p} \quad ; \quad \left(\frac{\partial \omega}{\partial p}\right)_3 \approx \frac{\omega_4 - \omega_2}{\Delta p}$$

Resultando las ecuaciones de vorticiudad:

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \psi_1 = - (k \times \nabla \psi_1) \cdot \nabla (\nabla^2 \psi_1 + f) + \frac{f_0}{\Delta p} \omega_2 \quad (3,5)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \psi_3 = - (k \times \nabla \psi_3) \cdot \nabla (\nabla^2 \psi_3 + f) - \frac{f_0}{\Delta p} \omega_2 \quad (3,6)$$

donde por condiciones a la frontera, se considera que la velocidad vertical debe ser nula en 0mb y 1000 mb, para evitar la posibilidad de que exista flujo de momento a través de estas superficies.

Aplicando ahora la ecuación de la energía termodinámica ---- (2,17) en el nivel isobárico de 500 mb y aproximando por diferencias finitas el término  $\partial \psi / \partial p$  como:

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial p}\right)_2 \approx \frac{\psi_3 - \psi_1}{\Delta p}$$

resulta la expresión:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\psi_1 - \psi_3) = - (k \times \nabla \psi_2) \cdot \nabla (\psi_1 - \psi_3) + \frac{\sigma \Delta p}{f_0} \omega_2 \quad (3,7)$$

en esta ecuación, el primer término del segundo miembro representa la advección de espesor 250 mb - 750 mb por el viento de 500 mb. Debido a que la función corriente en 500 mb no es predicha por el modelo, puede obtenerse por la extrapolación lineal de las  $\psi_3$  en 250 mb y 750 mb como:

$$\psi_2 = \frac{1}{2} (\psi_1 + \psi_3) \quad (3,8)$$

Para tener un conjunto cerrado de ecuaciones de predicción, es necesario reducir el número de variables; consiguiendo — eliminar  $\omega_2$  al sumar las ecuaciones (3,5) y (3,6) obteniendo

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 (\psi_1 + \psi_3) = & - (k \times \nabla \psi_1) \cdot \nabla (\nabla^2 \psi_1 + f) \\ & - (k \times \nabla \psi_3) \cdot \nabla (\nabla^2 \psi_3 + f) \end{aligned} \quad (3,9)$$

Esta ecuación establece que el cambio local de la vorticidad verticalmente promediada es igual al promedio de las advecciones de vorticidad (250 mb y 750 mb). De esta forma la — ecuación (3,9) gobierna la parte barotrópica del flujo.

Con la misma intención de eliminar  $\omega_2$  en las ecuaciones de vorticidad, se resta la ecuación (3,6) de la ecuación (3,5) — resultando la expresión

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 (\psi_1 - \psi_3) = & - (k \times \nabla \psi_1) \cdot \nabla (\nabla^2 \psi_1 + f) + \\ & + (k \times \nabla \psi_3) \cdot \nabla (\nabla^2 \psi_3 + f) + \frac{2f_0 \omega_2}{\Delta P} \end{aligned} \quad (3,10)$$

Sumando la ecuación (3,7) multiplicada por  $-2 \lambda^2$  a la ecuación (3,10), donde

$$\lambda^2 = \frac{f_0^2}{G (\Delta P)^2}$$

Se tienen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla^2 - 2\lambda^2) (\psi_1 - \psi_3) &= -(\mathbf{k} \times \nabla \psi_1). \\ \nabla(\nabla^2 \psi_1 + f) + (\mathbf{k} \times \nabla \psi_3) \cdot \nabla(\nabla^2 \psi_3 + f) \\ + 2\lambda^2 (\mathbf{k} \times \nabla \psi_2) \cdot \nabla(\psi_1 - \psi_3) & \quad (3,11) \end{aligned}$$

La ecuación (3,11) expresa que el cambio local del espesor - 250 mb - 750 mb es proporcional a la diferencia entre las advecciones de vorticidad de 250 mb y 750 mb más la advección-térmica.

Puede considerarse la ecuación (3,11) como una ecuación para la tendencia del espesor.

Con el fin de llegar a una expresión más simple de la ecuación (3,9) se desarrolla cada uno de los términos en la siguiente forma:

$$\begin{aligned} (-\mathbf{k} \times \nabla \psi_1) \cdot \nabla(\nabla^2 \psi_1 + f) &= \\ \frac{\partial \psi_1}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} (\nabla^2 \psi_1 + f) - \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} (\nabla^2 \psi_1 + f) & \\ = J(\nabla^2 \psi_1 + f, \psi_1) & \quad (3,12) \end{aligned}$$

Donde  $J$  representa el operador Jacobiano; de la misma forma:

$$(-\mathbf{k} \times \nabla \psi_3) \cdot \nabla(\nabla^2 \psi_3 + f) = J(\nabla^2 \psi_3 + f, \psi_3) \quad (3,13)$$

Por lo tanto se tiene ahora una nueva expresión para la ecuación (3,9) representada por:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 (\psi_1 + \psi_3) &= J(\nabla^2 \psi_1 + f, \psi_1) + J(\nabla^2 \psi_3 + f, \psi_3) \\ &= J(\nabla^2 \psi_1, \psi_1) + J(\nabla^2 \psi_3, \psi_3) + \\ &+ J(f, \psi_1) + J(f, \psi_3) \end{aligned} \quad (3,14)$$

Que se puede modificar más si se toman los dos últimos Jacobianos como:

$$\begin{aligned} J(f, \psi_1) + J(f, \psi_3) &= - \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial \psi_1}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial \psi_3}{\partial x} \\ &= - \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} (\psi_1 + \psi_3) \end{aligned}$$

Ya que a una primera aproximación  $f$  solo depende de  $y$ .

Si además se toma  $\Delta = \psi_1 + \psi_3$ , entonces

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \Delta = J(\nabla^2 \psi_1, \psi_1) + J(\nabla^2 \psi_3, \psi_3) - \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial \Delta}{\partial x} \quad (3,15)$$

ahora desarrollando los términos de advección de vorticidad en la ecuación (3,11)

$$- k x \nabla \psi_1 \cdot \nabla (\nabla^2 \psi_1 + f) = J(\nabla^2 \psi_1, \psi_1) - \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial \psi_1}{\partial x}$$

$$\mathbf{k} \times \nabla \psi_3 \cdot \nabla (\nabla^2 \psi_3 + \varepsilon) = J(\psi_3, \nabla^2 \psi_3) + \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \frac{\partial \psi_3}{\partial x}$$

aplicándole a la ecuación (3,11) la consideración

$$B = (\psi_1 - \psi_3) \quad (3,16)$$

Y utilizando además la ecuación (3,8), se tiene la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 B - 2 \lambda^2 \frac{\partial B}{\partial t} &= J(\nabla^2 \psi_1, \psi_1) + J(\psi_3, \nabla^2 \psi_3) \\ &\quad - \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \frac{\partial B}{\partial x} + \lambda^2 (\mathbf{k} \times \nabla A) \cdot \nabla B \end{aligned} \quad (3,17)$$

Al desarrollar el último término de (3,17) como

$$\begin{aligned} \lambda^2 \mathbf{k} \times \nabla A \cdot \nabla B &= \lambda^2 \left( - \frac{\partial B}{\partial x} \frac{\partial A}{\partial y} + \frac{\partial A}{\partial x} \frac{\partial B}{\partial y} \right) \\ &= \lambda^2 J(A, B) \end{aligned}$$

Sustituyendo este resultado en la ecuación (3,17) se tiene - finalmente la expresión de la energía termodinámica

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 B - 2 \lambda^2 \frac{\partial B}{\partial t} &= J(\nabla^2 \psi_1, \psi_1) + J(\psi_3, \nabla^2 \psi_3) \\ &\quad + \lambda^2 J(A, B) - \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \frac{\partial B}{\partial x} \end{aligned} \quad (3,18)$$

Puede observarse que en el segundo miembro de las ecuaciones



(3,15) y (3,18) pueden calcularse los términos para cada punto de la red utilizada, garantizando con ésto que pueden expresarse como funciones de las coordenadas  $x$  y  $y$ , este es, - pueden representarse dichas ecuaciones como:

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 A = F_1(x, y) \quad (3,19)$$

$$y \quad \nabla^2 \frac{\partial B}{\partial t} - 2 \lambda^2 \frac{\partial B}{\partial t} = F^2(x, y) \quad (3,20)$$

Formando un par de ecuaciones simultáneas, que al proporcionar los valores de  $A$  y  $B$ , quedan definidos los valores de  $\psi_1$  y  $\psi_3$ . Estas ecuaciones pueden ser resueltas por el método de relajación. Una vez obtenida la solución, se integra en el tiempo la tendencia de  $A$  y la tendencia de  $B$  por diferencias finitas adelantadas en el primer paso de tiempo de la siguiente forma:

$$\frac{\Delta A}{\Delta t} = F_1(x, y) \quad \text{de lo cual} \quad A = F_1(x, y) \Delta t$$

$$\frac{\Delta B}{\Delta t} = F_2(x, y) \quad \text{de lo cual} \quad B = F_2(x, y) \Delta t$$

para los siguientes pasos de tiempo se utilizan diferencias finitas centradas; esto es:

$$\frac{\Delta A}{2 \Delta t} = F_1(x, y) \quad \text{ó} \quad \Delta A = 2 \Delta t F_1(x, y)$$

$$\frac{\Delta B}{2 \Delta t} = F_2(x, y) \quad \text{ó} \quad \Delta B = 2 \Delta t F_2(x, y)$$

Finalmente como:

$$\frac{A + B}{2} = \frac{(\psi_1 + \psi_3) + (\psi_1 - \psi_3)}{2} = \psi_1$$

y

$$\frac{A - B}{2} = \frac{(\psi_1 + \psi_3) - (\psi_1 - \psi_3)}{2} = \psi_3$$

Se llega a un pronóstico del geopotencial de 750 mb y 250 mb a 12, 24 ó 48 horas según el número de iteraciones que se -- realicen.

#### CONDICIONES DE FRONTERA

Al adecuar una solución por métodos numéricos de las ecuaciones (3,19) y (3,20) en una red de 22 por 19 puntos conteniendo a la región IV (O.M.M.) que comprende los países de México, Canadá, Estados Unidos, Centroamérica y el Caribe, deben considerarse con especial interés las condiciones de frontera que eviten errores en la evaluación de las derivadas en los puntos periféricos de la región de integración. Si quiere evitarse el flujo de momento hacia ó desde la región de integración, se requiere en primer lugar que las componentes de velocidad sean cero en las fronteras Norte y Sur y segundo, que en las fronteras Este y Oeste se adopten condiciones cíclicas. Para el primer caso se hace que en la frontera -- Norte, el segundo renglón de la red sea igual al tercero en cuanto al valor del geopotencial y el primer renglón tenga -- para el geopotencial, un valor constante.

Dado que:

$$u = -\frac{1}{f} \frac{\partial \Phi}{\partial y} \quad \text{y} \quad v = \frac{1}{f} \frac{\partial \Phi}{\partial x}$$

al calcular las derivadas en la frontera Norte, se tiene que:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\Phi(1, j+1) - \Phi(1, j-1)}{\Delta x}$$

si la condición es que  $v = \frac{1}{f} \frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0$ , entonces

$$\Phi(2, j) = \text{constante} = \sum_{i=1}^N \frac{\Phi(2, j)}{N}$$

donde  $j$  denota la columna de la red y varía de 1 a 19

Ahora si se desea que  $u = 0$  en el norte, se tiene que cumplir que:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{\Phi(2, j) - \Phi(3, j)}{y} = 0$$

entonces  $\Phi(2, j) = \Phi(3, j)$

De la misma forma se procede en la frontera Sur.

Para el caso de las fronteras laterales se supone una ciclicidad entre el Este y el Oeste, que consiste en igualar la -

primera columna de la red con la penúltima e igualando la se  
gunda con la penúltima, suponiendo en una forma idealizada -  
que la región circunda toda la tierra. El metodo utilizado-  
es el recomendado por el maestro Enrique Buendía y colabora-  
dores (C.C.A. U.N.A.M.). Con ésta aproximación se intenta-  
reducir la contaminación en la región de pronóstico. Para -  
lograr esta aproximación se incorporan a la red cuatro columna  
s de datos hacia el Este y cuatro renglones en el Norte, -  
así como un renglón en el Sur de la región IV (O.M.M.) Buen-  
día et. al. (1985)

## CAPITULO IV

### RESULTADOS Y CONCLUSIONES

En esta tesis se aplica el modelo Baroclínico de dos parámetros en la región IV, utilizando las cartas de uso diario - del Centro de Ciencias de la Atmósfera de la UNAM, tomando - los niveles de 250 y 750 mb para pronosticar los niveles de - 250, 500 y 750 mb. Del análisis de las cartas proporcionadas solamente se tomaron los campos del día 15 de enero de 1985, haciendo notar que se presenta únicamente este día, porque - en él se encuentran los sistemas clásicos de la estación in - vernal.

En la figura 1, se muestran los tres campos observados a las 12.00 Z del día 15 de enero de 1985, en donde se aprecia cla - ramente una vaguada en el oeste de la región IV, afectando a la península de Baja California, siendo notoria una ligera - inclinación de la vaguada hacia el oeste con la altura. En - el este del continente americano se observa otra vaguada que se extiende hasta la península de Florida en los tres nive - les. Aci mismo en la región del Caribe se aprecia una circu - lación anticiclónica que es mas notable en el nivel de 700 - mb, figura 1 (C).

Para el día 16 de enero se observa en los tres niveles, figu - ra 2, un movimiento muy débil hacia el este de la vaguada oc - cidental observándose que los ejes están aproximadamente en - fase; por otro lado la vaguada oriental presenta un movimien - to pendular y finalmente en la región del Caribe se tiene -- nuevamente una región de circulación anticiclónica.

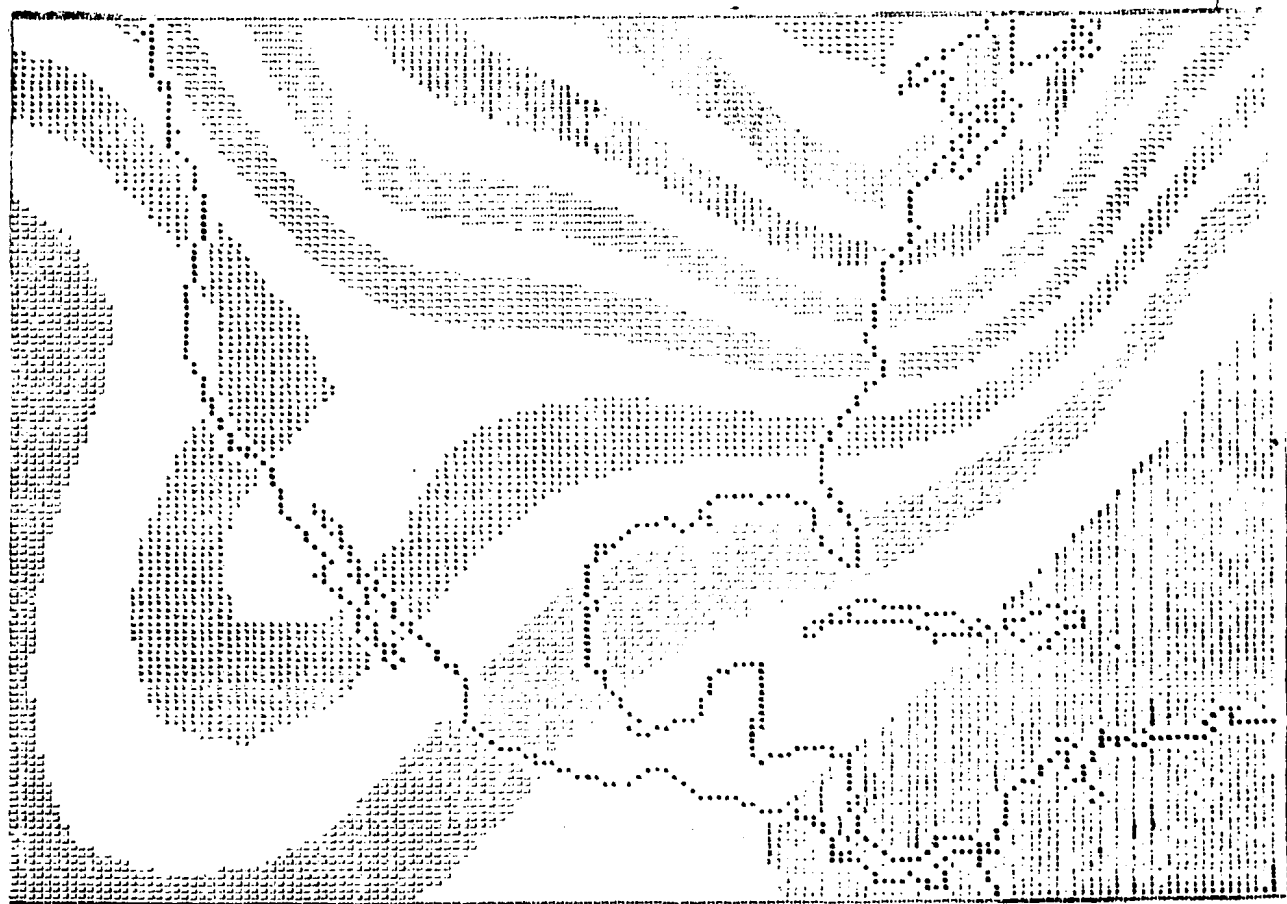
Al aplicar el modelo Baroclínico para un pronóstico de 12 ho - ras a partir del día 15 de enero, se obtienen los resultados que aparecen en la figura 3, notándose que los sistemas mani

fiestan poco cambio en su configuración excepto en 700 mb, ya que en el Caribe la circulación anticiclónica se extiende hacia el suroeste abarcando una area mayor, los otros dos sistemas permanecen aproximadamente en la misma posición como se dijo anteriormente.

En la figura 4, se tienen los resultados del pronóstico a 24 horas en los tres niveles de trabajo, apreciándose en general un retraso de los sistemas sinópticos con respecto a los observados figura 2, sobre todo en latitudes altas y no se observa el movimiento pendular en la vaguada oriental antes mencionada. Esta falla puede deberse al análisis sinóptico que se realiza en la parte Este, ya que al hacer la ciclicidad en esta zona el día 16 de enero, no se trazó la cuña que aparece el día anterior, dando lugar a que el eje de la vaguada en su parte sur figura 2, efectúe el movimiento pendular, mientras que en el pronóstico, la cuña que tiene desde el día 15, impide este movimiento. Por lo demás, el pronóstico a 24 horas de la circulación anticiclónica en el Caribe es aceptable.

Cabe mencionar que el retraso de la vaguada occidental de latitudes altas puede deberse a las condiciones de frontera de escalón adoptadas en la parte norte (Buendía et.al 1985) que obligan a extender la malla cinco puntos al norte, donde se realiza un análisis falso en esta región, dando lugar a cambios bruscos en el gradiente del geopotencial, ya que en esta zona no se cuenta con datos. La configuración pronosticada a 24 horas figura 4, en la zona de la República Mexicana es muy similar a la observada, por lo que se propone que es-

te modelo puede ser utilizado en el Servicio Meteorológico -  
Nacional como una herramienta más en el pronóstico del tiempo a corto plazo de nuestro país.



**Fig. 1(a) CAMPO OBSERVADO A 250 mb 15 Enero 1985**



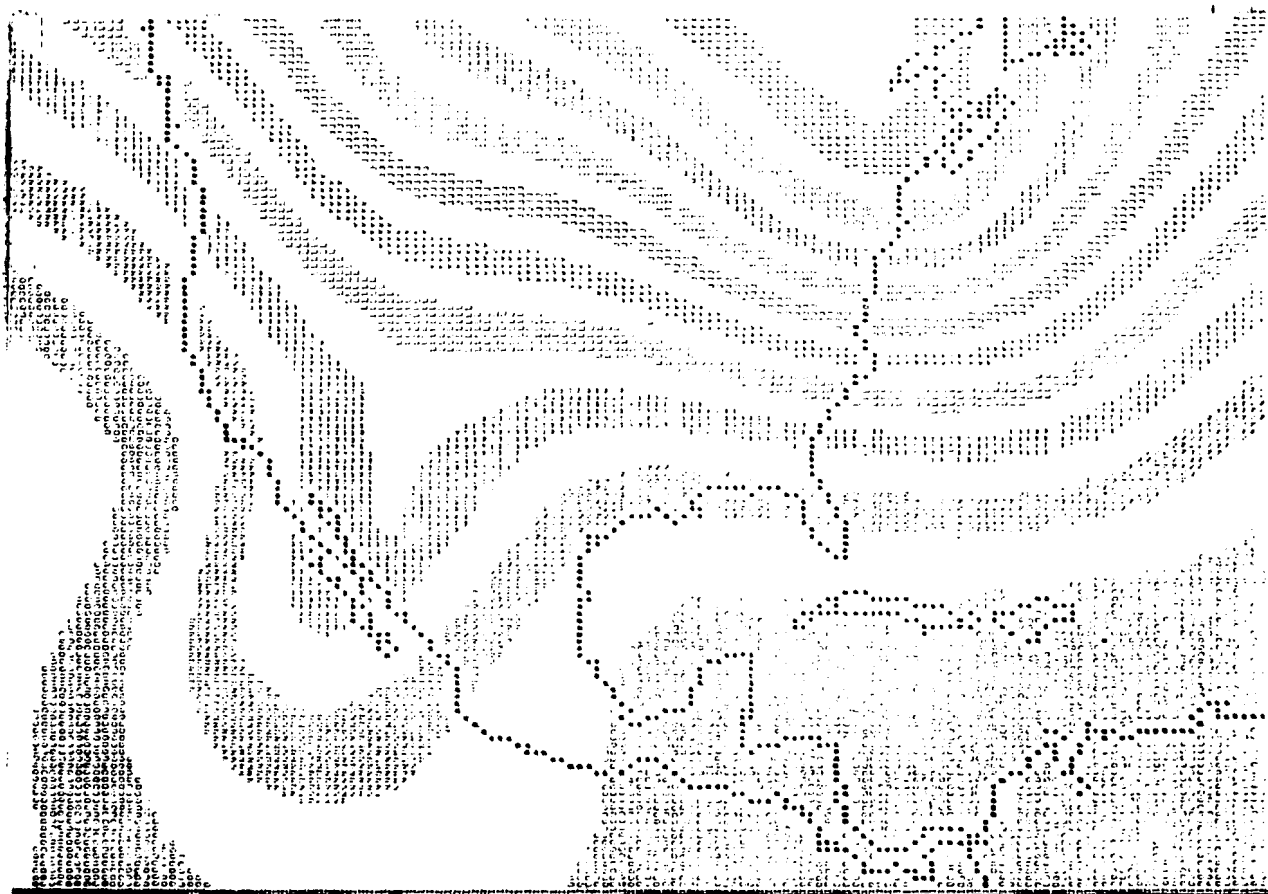
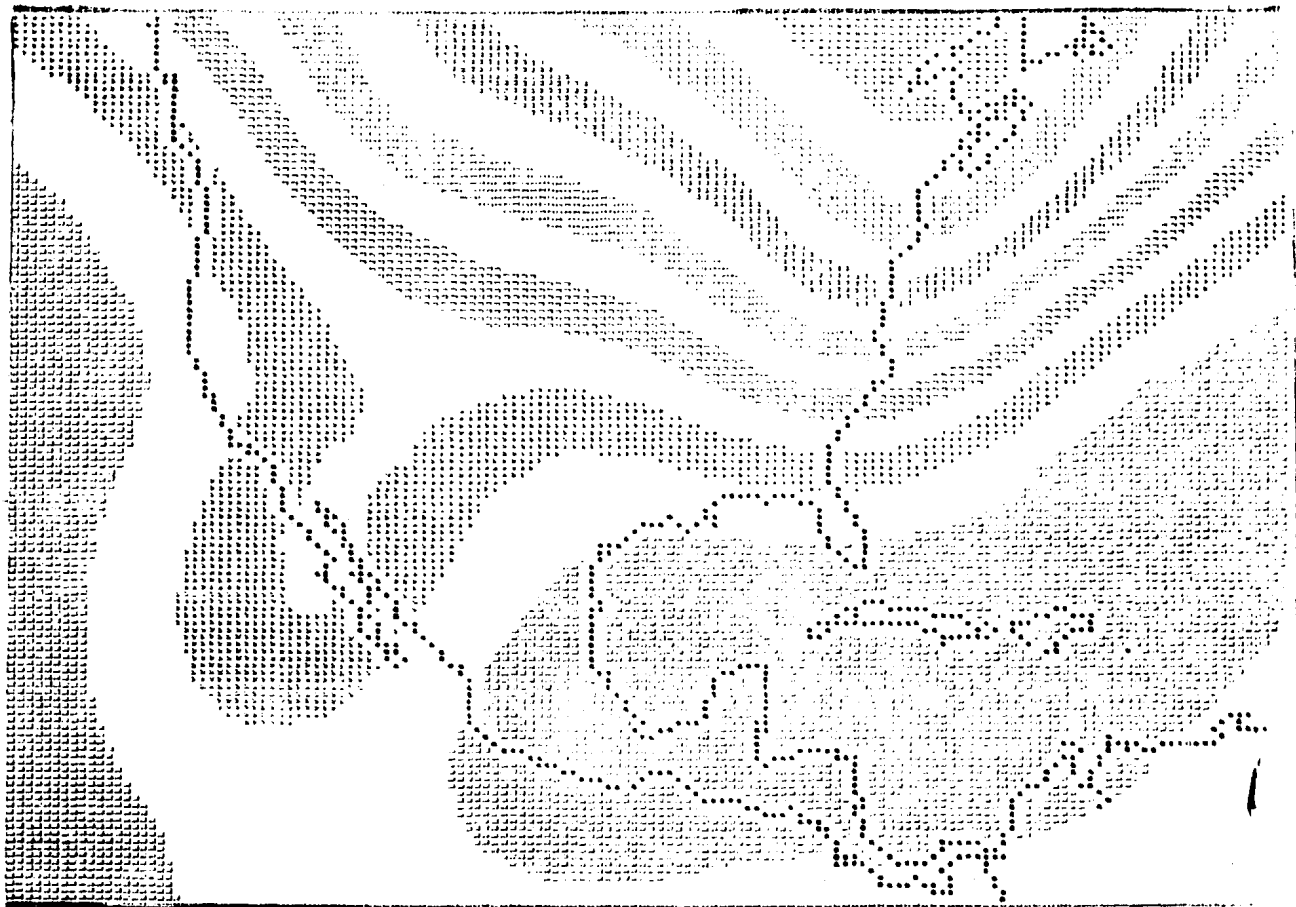
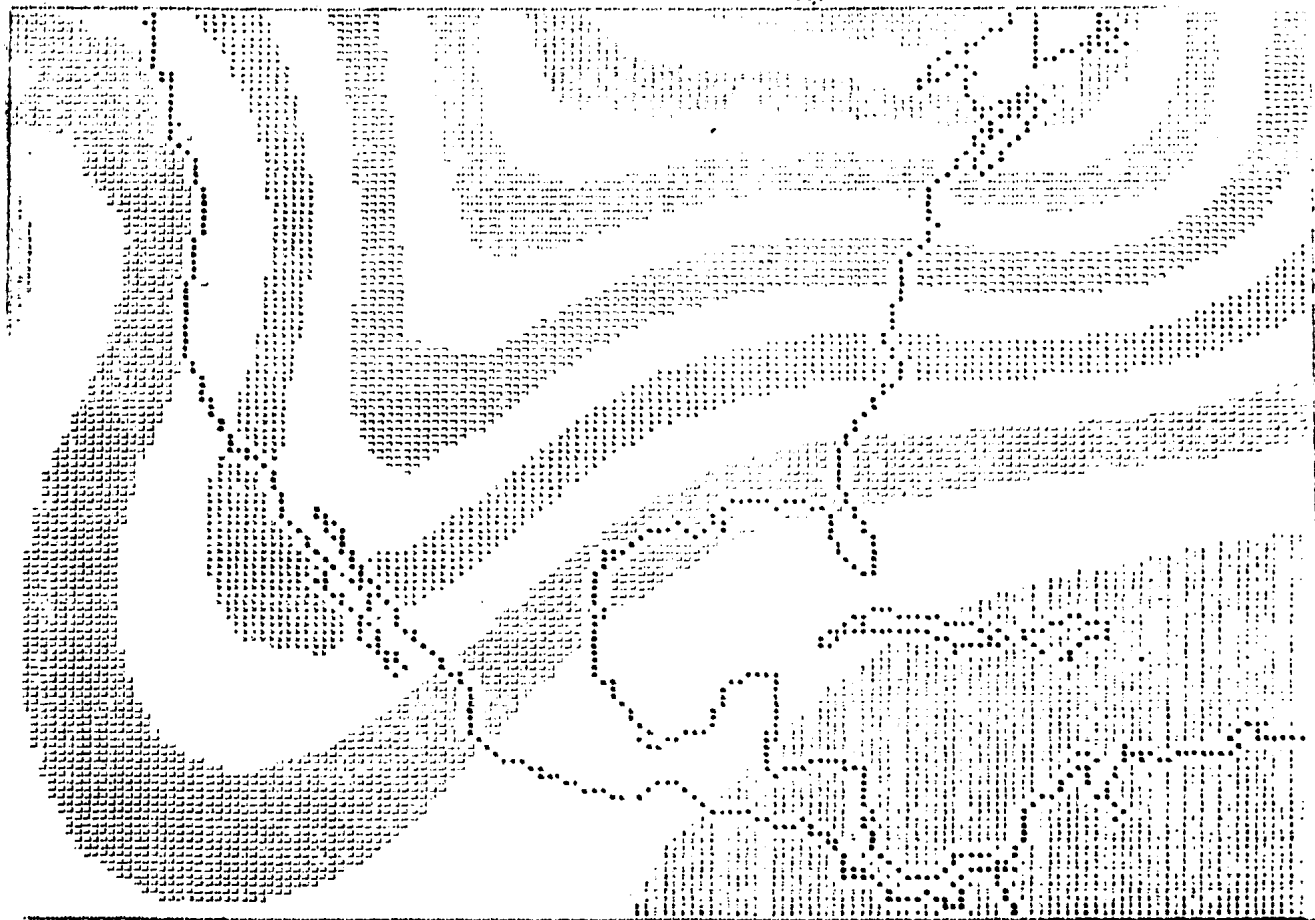


Fig. 1(b) CAMPO OBSERVADO A 500 mb 15 Enero 1985



**Fig. 1(c) CAMPO OBSERVADO A 700 mb 15 Enero 1985**



**Fig. 2(a) CAMPO OBSERVADO A 250 mb 16 Enero 1985**

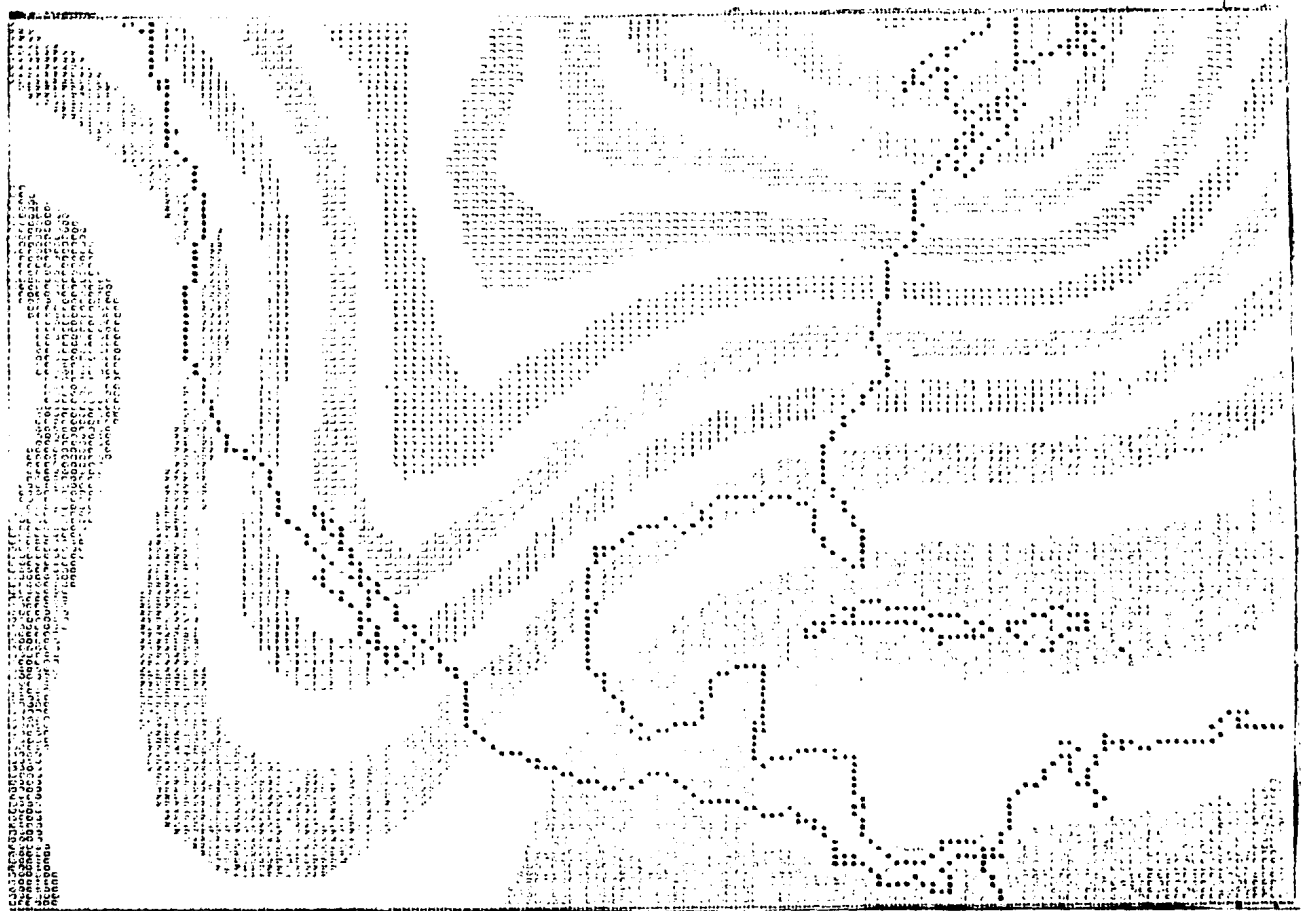


Fig. 2(b) CAMPO OBSERVADO A 500 mb 16 Enero 1985

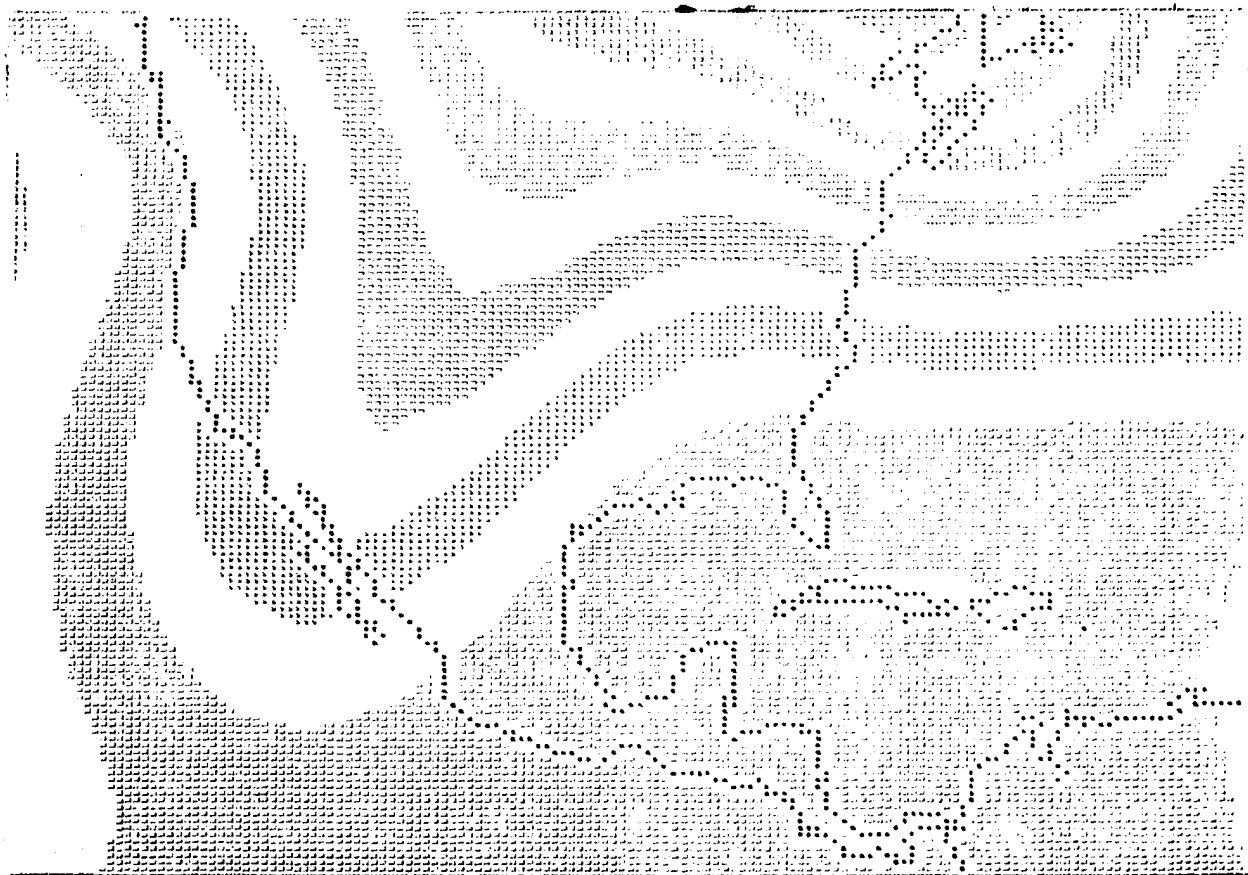


Fig. 2(c) CAMPO OBSERVADO A 700 mb 16 Enero 1985

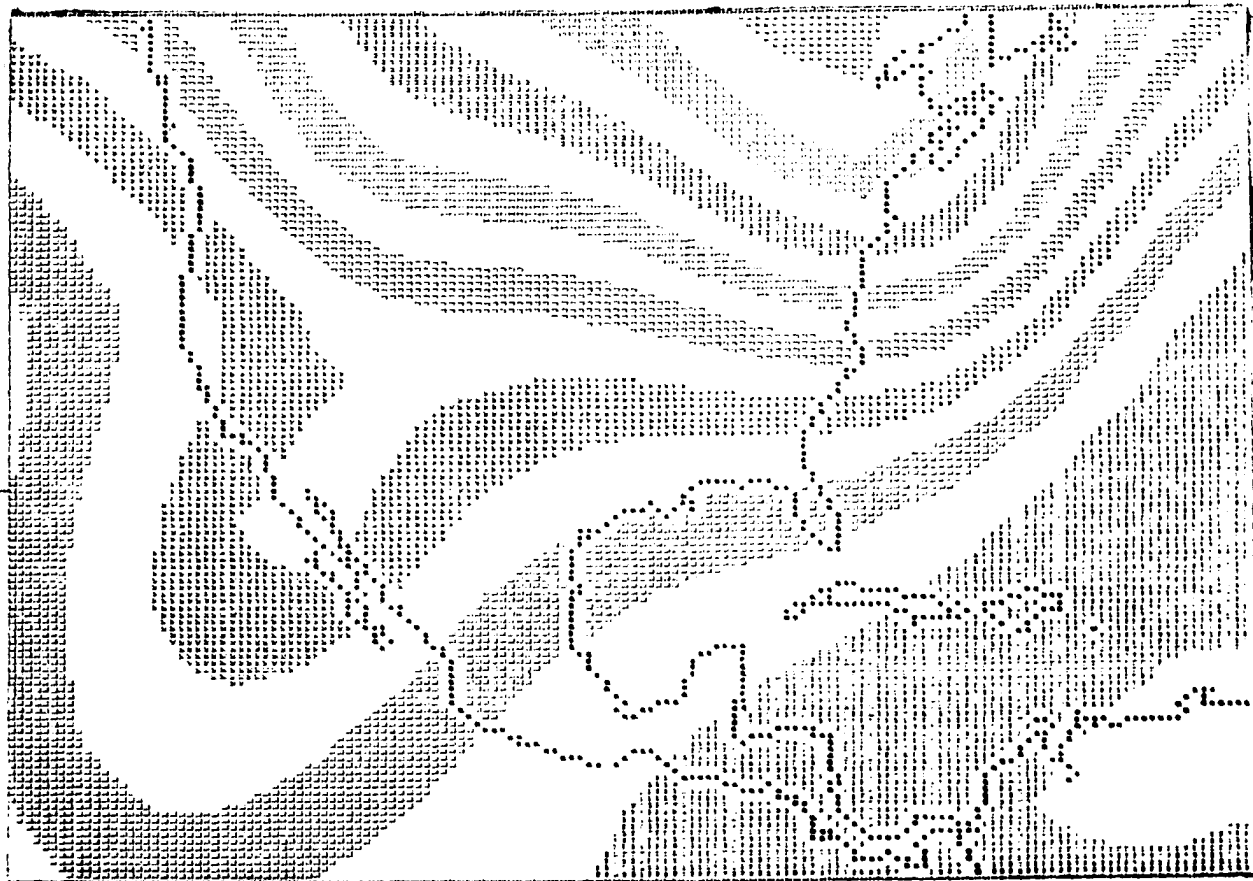


Fig. 3(a) PRONOSTICO A 12 hrs 250 mb

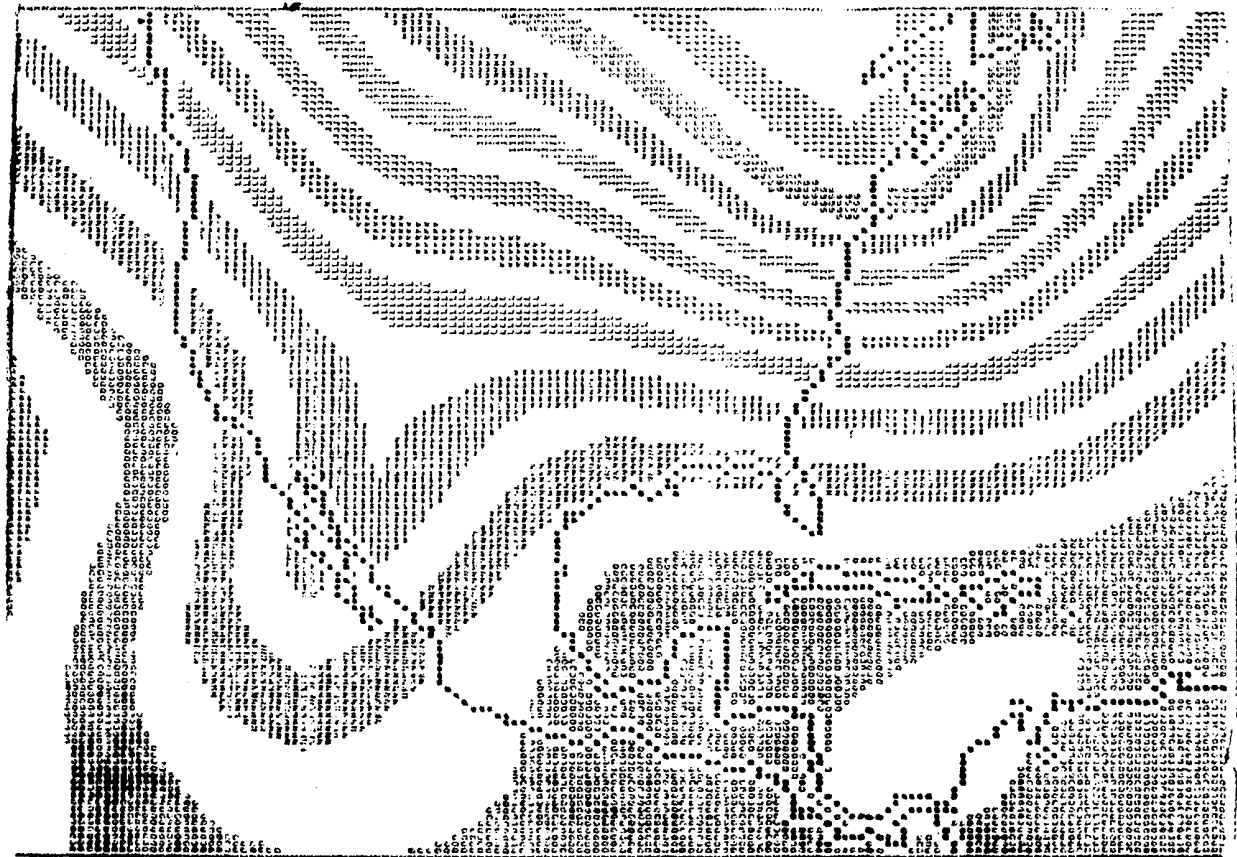


Fig. 3(b) PRONOSTICO A 12 hrs 500 mb

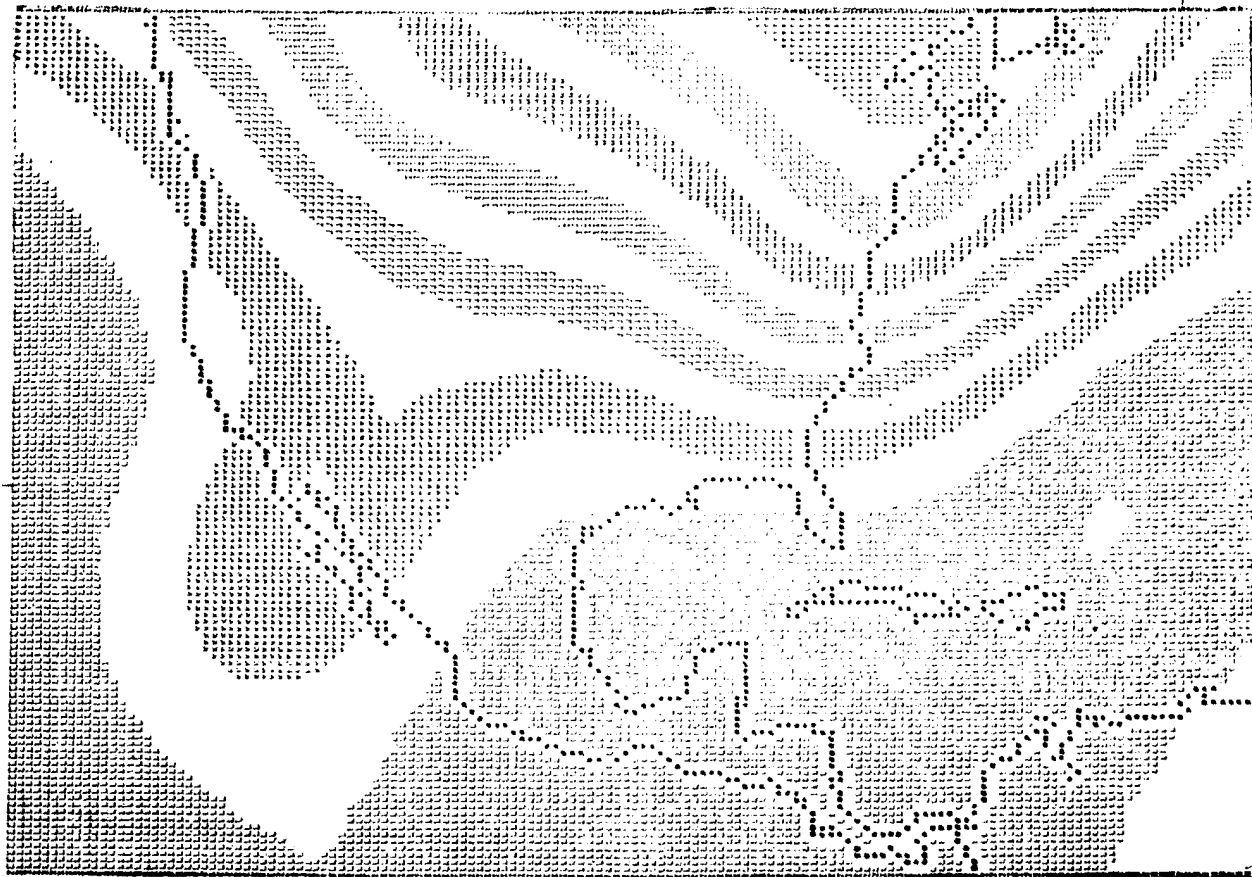


Fig. 3(c) PRONOSTICO A 12 hrs 700 mb



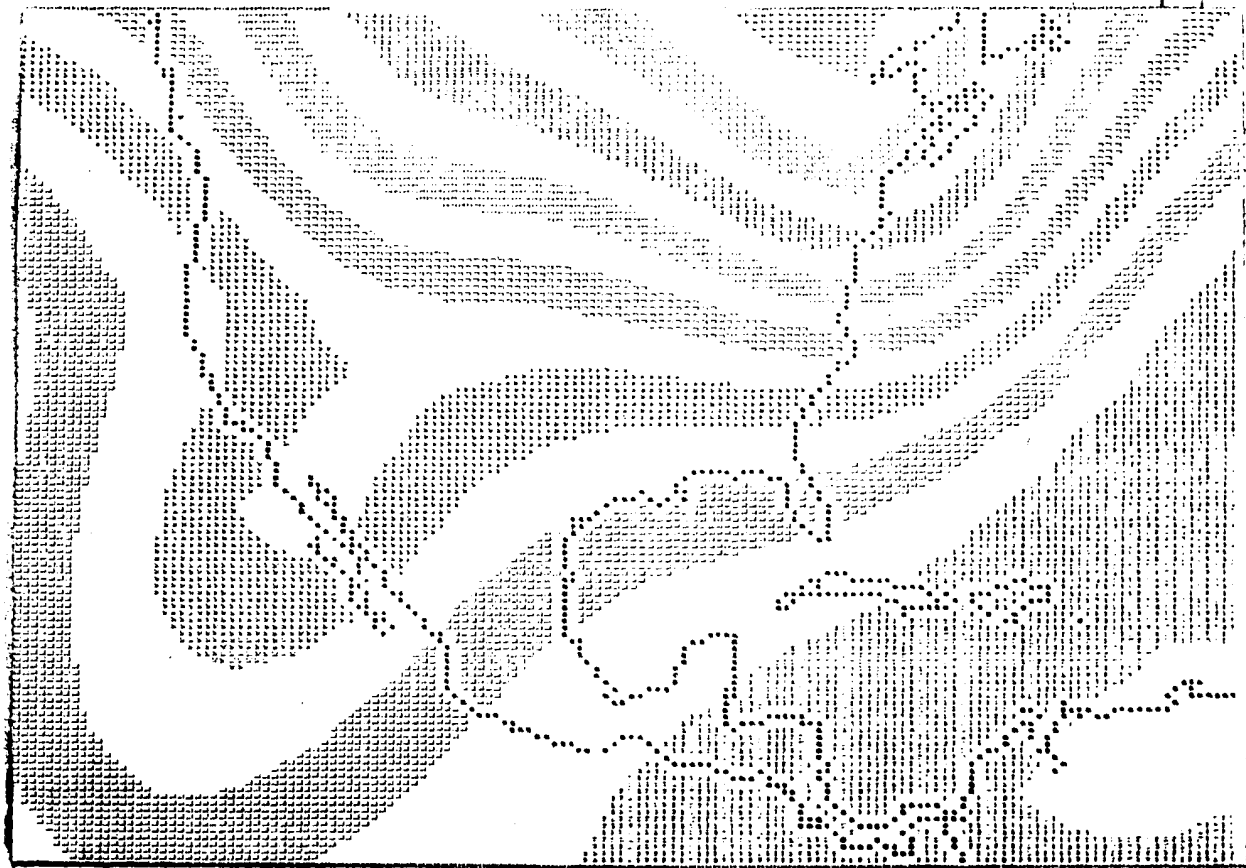


Fig. 4 (a) PRONOSTICO A 24 hrs 250 mb

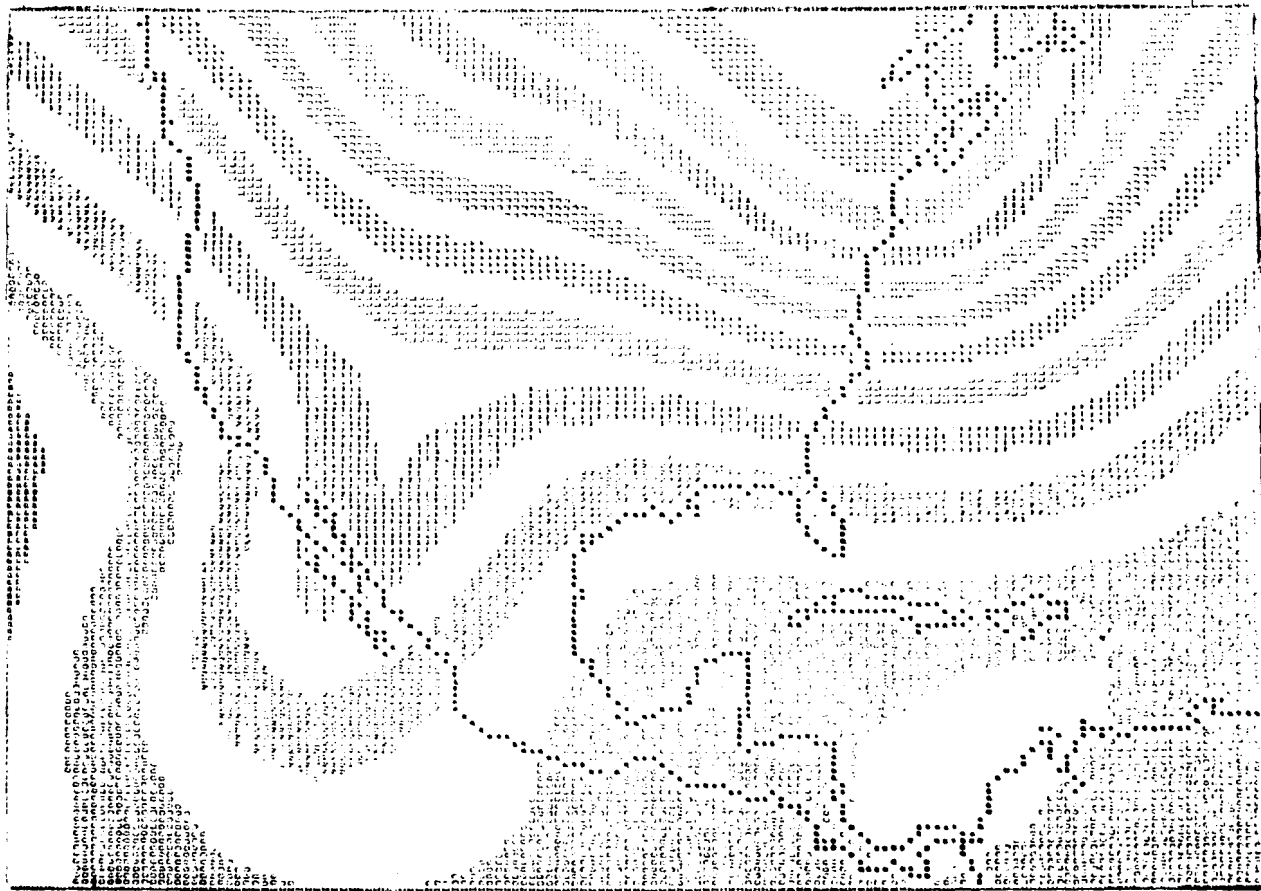


Fig. 4(b) PRONOSTICO A 24 hrs 500 mb

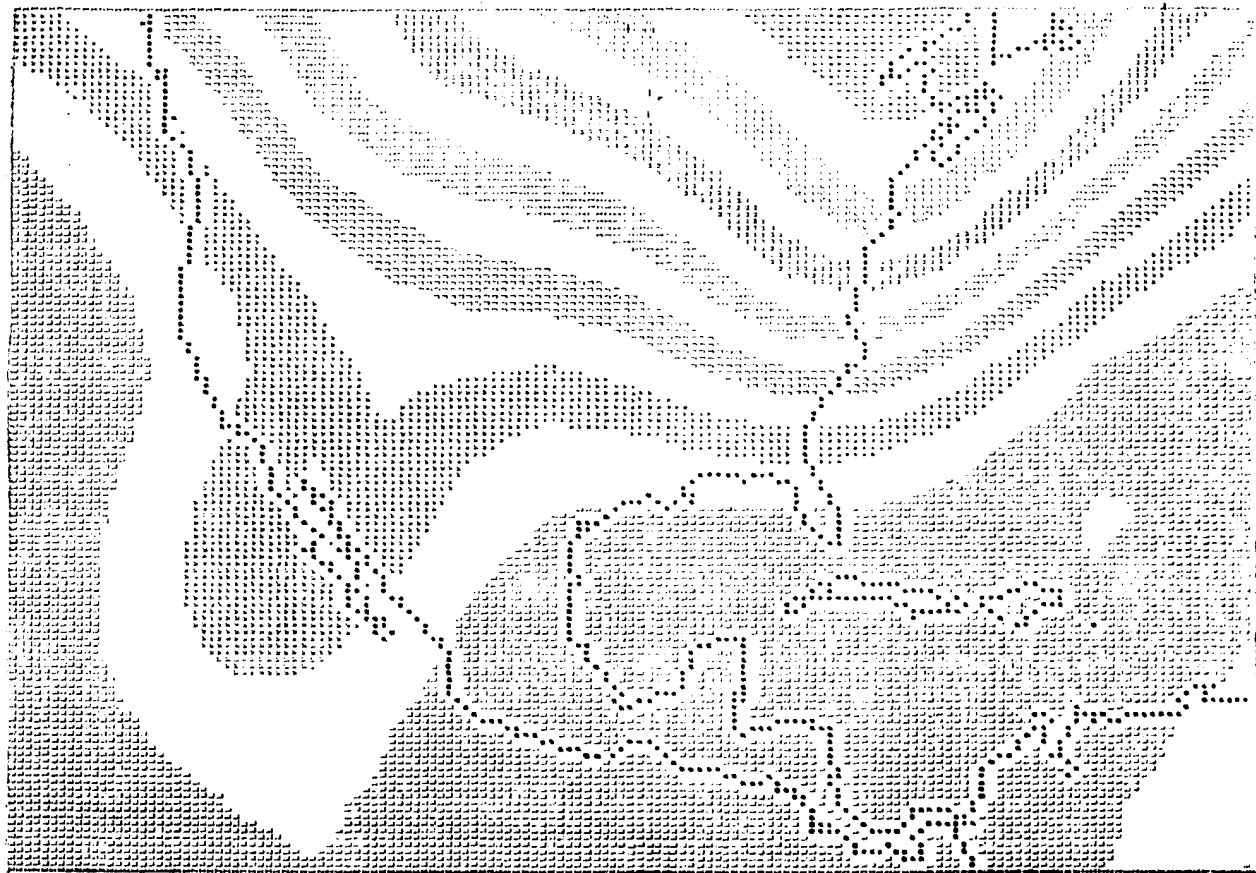


Fig. 4 (c) PRONOSTICO A 24 hrs 700 mb

APENDICE A

DÉPENDENCIA DE LOS VECTORES UNITARIOS CON  
RESPECTO A LA LONGITUD, LATITUD Y ALTURA

Como se mencionó en el primer capítulo, las direcciones de los vectores unitarios no se mantienen constantes por ser funciones de posición en una superficie esférica sobre la tierra. Se hace aquí una evaluación de las razones de cambio de los vectores unitarios en dirección longitudinal, latitudinal y vertical ( $x, y, z$ ) siguiendo el movimiento. Para lo cual se utiliza el operador de la derivada total expresado por

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z}$$

Se considera que los vectores unitarios no presentan variación temporal o local por lo que

$$\frac{\partial i}{\partial t} = \frac{\partial j}{\partial t} = \frac{\partial k}{\partial t} = 0$$

Dado que  $i$  solo depende de  $x$ , la representación de su derivada total será

$$\frac{d i}{d t} = u \frac{\partial i}{\partial x} \tag{A.1}$$

Para mejor ilustración se emplea la figura (A.1)

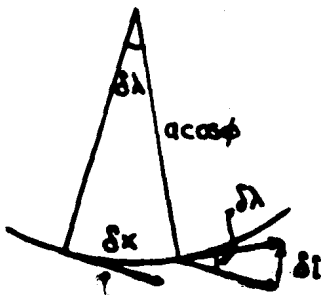


Figura (A.1)  
Dependencia latitudinal  
del vector unitario  $i$

Cuando  $\delta \lambda$  es muy pequeño, el arco  $\delta x$  se confunde con una —  
 recta y puede entonces hacerse la aproximación de una seme—  
 janza de triángulos como

$$\frac{\delta i}{\delta x} = \frac{1}{\text{acos } \phi} \quad (\text{A,2})$$

y

$$\lim_{\delta x \rightarrow 0} \frac{\delta i}{\delta x} = \frac{\partial i}{\partial x} = \frac{1}{\text{acos } \phi} \quad (\text{A,3})$$

el vector  $\frac{\partial i}{\partial x}$  está dirigido hacia el eje de rotación y puede  
 representarse en base a la figura (A,2) como

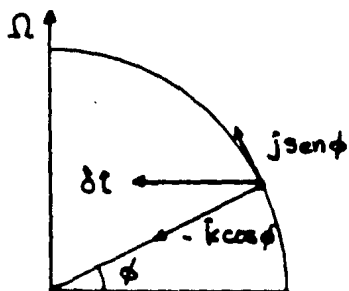


Figura (A,2)

Descomposición del vector

$\delta i$  en sus partes vertical y  
 latitudinal.

$$\frac{\partial i}{\partial x} = \frac{1}{\text{acos } \phi} ( j \text{ sen } \phi - k \text{ cos } \phi ) \quad (\text{A,4})$$

por lo que la ecuación (A,1) toma la forma

$$\frac{di}{dt} = \frac{n}{\text{acos } \phi} ( j \text{ sen } \phi - k \text{ cos } \phi ) \quad (\text{A,5})$$

Analizando ahora la variación del vector unitario  $j$ , se en—  
 cuentra que este es solo función de  $x$ ,  $y$  y  $z$ , con ayuda de la—  
 figura (A,3) se llega a lo siguiente

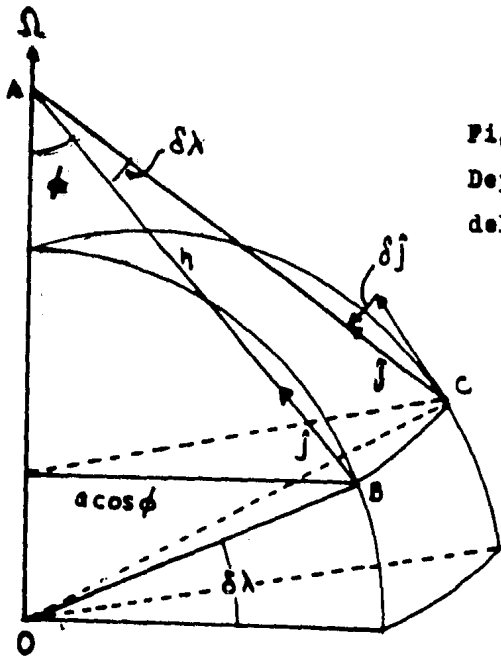


Figura (A,3)  
Dependencia longitudinal  
del vector  $j$

Del triángulo  $O A B$   $\tan \phi = \frac{a}{h}$  ó  $h = a / \tan \phi$

considerando  $\delta \lambda$  muy pequeño, puede hacerse la aproximación que en los puntos  $A B C$  se forma un triángulo semejante al formado por los vectores unitarios y el incremento  $\delta j$

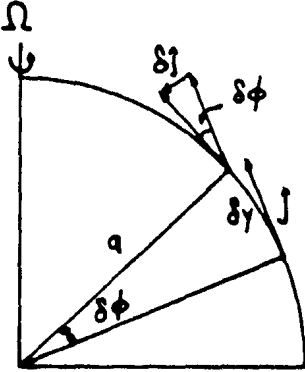
$$\frac{\delta j}{\delta x} = \frac{j}{h} = \frac{\tan \phi}{a} \quad (A,6)$$

$$\frac{\partial j}{\partial x} = \lim_{\delta x \rightarrow 0} \frac{\delta j}{\delta x} = \frac{\tan \phi}{a} \quad (A,7)$$

Puede verse de la figura (A,3) que el vector  $\partial j / \partial x$  está d<sub>j</sub> rígido en dirección de  $x$ , entonces

$$\frac{\partial j}{\partial x} = - \frac{\tan \phi}{a} j \quad (A,8)$$

Con respecto a la variación latitudinal del vector  $j$  se puede utilizar la figura (A,4) para su análisis



(A,4) Dependencia latitudinal del vector unitario  $j$

Tomando  $\delta\phi$  muy pequeño puede considerarse una semejanza de triángulos, tal que:

$$\frac{\delta j}{\delta y} = \frac{j}{a} = \frac{1}{a} \quad (A,9)$$

y

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\delta j}{\delta y} = \frac{\partial j}{\partial y} = \frac{1}{a} \quad (A,10)$$

como también se ve la figura (A,4), el vector  $\partial j / \partial x$  está dirigido en dirección negativa de  $k$ , por lo que puede expresarse a (A,10) como

$$\frac{\partial j}{\partial y} = -\frac{k}{a} \quad (A,11)$$

tomando las dependencias longitudinal y latitudinal en una sola expresión, se tiene finalmente

$$\frac{dj}{dt} = -\frac{v \tan \phi}{a} i - \frac{v}{a} k \quad (A,12)$$

Por último se utiliza la figura (A,5) para tener la razón de cambio del vector  $k$ , encontrando que éste solo depende de  $x$  y  $y$ .

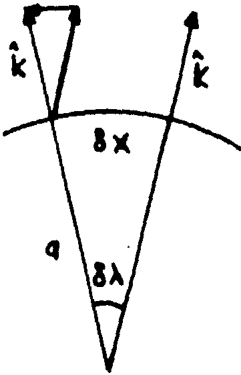


Figura (A,5) Dependencia latitudinal del vector unitario  $k$

Considerando como en los casos anteriores a  $\delta\lambda$  muy pequeño, se llega a

$$\frac{\delta k}{\delta x} = \frac{k}{a} = \frac{1}{a}$$

(A,13)

ahora  $\lim_{\delta x \rightarrow 0} \frac{\delta k}{\delta x} = \frac{\partial k}{\partial x} = \frac{1}{a}$

En una forma similar se calcula la variación de  $k$  con respecto a  $y$ . Los vectores  $\partial k / \partial x$  y  $\partial k / \partial y$  apuntan en dirección positiva de  $x$  e  $y$  respectivamente, por lo que

$$\frac{dk}{dt} = \frac{u}{a} i + \frac{v}{a} j$$

(A,14)



## A P E N D I C E B

### Las coordenadas de presión y relación entre $\omega$ y $w$

Generalmente los datos meteorológicos son reportados sobre superficies de presión constante más que a superficies de altura constante por lo que es conveniente expresar las ecuaciones en un sistema de coordenadas híbrido; éstas son las coordenadas de presión. Matemáticamente esto significa una transformación de  $Z$  a  $P$  como la coordenada vertical independiente. En el sistema de coordenadas  $P$ , las coordenadas usuales  $(x,y)$  denotan una posición de punto proyectada sobre un plano horizontal y la presión denota su localización a lo largo del eje vertical. Las variables dependientes no son afectadas por la transformación de coordenadas excepto que  $p$  es una de las variables independientes y la altura geopotencial de una superficie isobárica particular es una variable dependiente  $\Phi = \Phi(x, y, p, t)$ .

Para transformar la fuerza del gradiente de presión dada por la ecuación (1,3) de coordenadas de altura a coordenadas de presión, puede obtenerse utilizando la fig. (B,1), tomándose los cambios de presión a lo largo de  $x$  y  $z$ , teniendo lo siguiente:

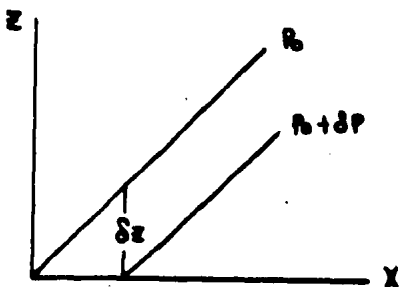


fig. (B,1) Sección transversal vertical, paralela al plano  $xz$  que muestra la conexión entre las derivadas con  $z$  constante y  $P$  constante

$$\frac{(P_0 + \delta P) - P_0}{\delta x} = \frac{(P_0 + \delta P) - P_0}{\delta z} x \frac{(\delta z)}{\delta x} P$$

Tomándose: límites cuando  $\delta x, \delta z \rightarrow 0$

$$\lim_{\delta x \rightarrow 0} \left( \frac{\delta P}{\delta x} \right) = \lim_{\delta z \rightarrow 0} \left( \frac{\delta P}{\delta z} \right) x \frac{(\delta z)}{\delta x} P$$

$$\delta \left( \frac{\partial P}{\partial x} \right) = - \left( \frac{\partial P}{\partial z} \right) x \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right) P \quad (B,1)$$

Auxiliándose de la ecuación hidrostática (1,30) se tiene para la componente x de la fuerza del gradiente de presión.

$$\frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial P}{\partial x} \right) = -g \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right) = \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) P \quad (B,2)$$

donde  $\Phi = \int_0^z g dz$  es el geopotencial que está definido como - el trabajo requerido para elevar una masa unitaria desde el nivel del mar hasta una altura z.

De la misma forma que (B,2) se puede expresar la componente y de la fuerza del gradiente de presión

$$\frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial P}{\partial y} \right) = \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) P \quad (B,3)$$

Una ventaja más del sistema de coordenadas isobárico es que explícitamente no aparece la densidad en la fuerza del gradiente de presión y los componentes horizontales de ésta, - pueden ser medidos en términos del geopotencial.

En forma vectorial las ecuaciones de movimiento horizontal - aproximados (1,29) pueden ser escritas en coordenadas cartesianas y en coordenadas isobáricas respectivamente como:

$$\frac{dV}{dt} + f k \times V = - \frac{1}{\rho} \nabla_p$$

$$\delta \quad \frac{dV}{dt} + f k \times V = - \nabla_p \Phi \quad (B,4)$$

entonces la relación geostrofica en coordenadas isobáricas es

$$f V_g = k \times \nabla_p \Phi \quad (B,5)$$

Relación entre  $\omega$  y  $w$ .

Partiendo de la definición de  $\omega = dp/dt$  y desarrollándola en el sistema de coordenadas cartesianas se tiene:

$$\omega = \frac{dP}{dt} = \frac{\partial P}{\partial t} + V \cdot \nabla P + w \frac{\partial P}{\partial z} \quad (B,6)$$

si los movimientos se restringen solamente a aquellos de escala sinóptica, la velocidad horizontal aproximadamente es geostrofica a primera aproximación. Este es:

$$V = V_g + V' \quad \text{donde } V' \ll V_g \quad \text{además de (1,28)}$$

$$V_g = \frac{1}{\rho f} k \times \nabla_h P$$

$$\text{de tal manera que } V_g \cdot \nabla_p = \left( \frac{1}{\rho f} k \times \nabla P \right) \cdot \nabla P = 0$$

con este resultado y con la relación hidrostática puede reescribirse la ecuación (B,5) como:

$$\omega = \frac{\partial P}{\partial t} + V' \cdot \nabla P - \rho g w \quad (B,7)$$

comparando las magnitudes de cada uno de los términos de —  
(B,6) para movimientos de escala sinóptica se tiene

$$\frac{\partial P}{\partial t} \sim 1 \text{ k P}_a \text{ d}^{-1}$$

$$v' \cdot \nabla P \sim (1 \text{ ms}^{-1}) (1 \text{ P}) (\text{km}^{-1}) \sim 0.1 \text{ k P d}^{-1}$$

$$\rho_{gw} \sim 10 \text{ k P d}^{-1}$$

de donde puede concluirse que a una primera aproximación se puede tener:

$$\omega = - \rho_{gw}$$

**Bibliografía:**

- Arfken, G. (1981): *Mathematical methods for physicist* --- Academic Press, New York, U.S.A.
- Buendía, E y Delgado, O. (1981) : *Integración del modelo -- baroclínico filtrado en la cuarta región.*  
Instituto Panamericano de Geografía e Historia, Num 14/15,- México, p.p. 153- 169.
- Buendía, E, Et al. (1985): *Step boundary conditions in the barotropic model.* En prensa.
- Charney, J. G. (1948): *On the scale of atmospheric motions.* Geofys. Publ., 17 No. 2.
- Eliassen, A.: *Simplified dynamic models of the atmosphere, designed for the purpose of numerical weather prediction.* Tellus, Vol 4, Num 3 1952.
- Haltiner, G.J. (1979): *Numerical prediction and dynamic meteorology*, 2a. ed. John Willey and Sons.
- Holton, J.R. (1979) *An introduction to dynamic meteorology* Chicago Academic Press.
- Richardson, L.F. (1922) *Weather prediction by numerical process.* Cambridge Univ. Press.
- Thompson, P.D. (1961): *Numerical weather analysis and prediction.* New York, Mac Millan Company, N.Y.
- Van Mieghem, J.: *Scale Analysis of Large atmospheric motion systems in all latitudes.* Academic Press, Inc 1978.