



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

Facultad de Ciencias

INTERPRETACION MEDIANTE TEORIA DE FUENTES DE
LAS ECUACIONES DE CAMPO DEFINIDAS EN UN
ALGEBRA DE GRASSMANN.

Tesis Profesional

Que para obtener el título de

F I S I C O

Presenta

JAIME ALBARRAN ARREGUIN



México, D. F.

1985



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

TABLA DE CONTENIDO

INTRODUCCION

CONVENCIONES

Capítulo 1: Teoría de Fuentes

1.1	SPIN-0	5
1.2	SPIN-1. (FOTON)	20
1.3	SPIN-1/2.	30

Capítulo 2: Campos y Acción

2.1	SPIN-0	43
2.2	EL FOTON	51
2.3	SPIN-1/2	55

Capítulo 3: Cantidades Conservadas

3.1	Partícula Cargada de Spin-0	60
3.2	Supercorriente	70

RESUMEN Y CONCLUSIONES 104

APENDICES (A, B, C, D)

REFERENCIAS

INTRODUCCION

El propósito de este trabajo es el utilizar Teoría de Fuentes (T.F.) en modelos supersimétricos con el objeto de abrir una posibilidad de interpretación de las llamadas soluciones clásicas de las teorías supersimétricas que introducen números de Grassmann. En la supersimetría se consideran a un mismo nivel a los fermiones así como los bosones ya que ambas clases de partículas son diferentes manifestaciones de las superpartículas (esto es que difieren en un nuevo número cuántico). La mezcla que esta teoría hace de ambas clases de partículas puede verse reflejada en el hecho de que en las transformaciones infinitesimales de supersimetría del campo bosónico aparecen términos que incluyen al campo fermiónico y viceversa. En esta teoría los parámetros de las transformaciones supersimétricas son números de Grassmann.

Los dos primeros capítulos de este trabajo consisten en una revisión de la Teoría de Fuentes. En este trabajo no se consideran procesos de uno o más bucles. La Teoría de Fuentes, que es una teoría intermedia entre la Teoría Cuántica de Campos con Operadores y la Teoría de Matriz-S, es una Teoría Cuántica de Campos ya que como veremos nuestros postulados nos conducen a definir una transición de probabilidad (la de vacío-vacío:

$\langle O_+ | O_- \rangle$, la cual es fundamental en esta teoría) igual a la exponencial de una acción clásica. Con Teoría de Fuentes se obtienen resultados equivalentes a los de las Teorías Cuánticas de Operadores, empero la primera no utiliza operadores, sino campos numéricos.

En el primer capítulo estudiaremos partículas de spin-0, 1, $1/2$, con la Teoría de Fuentes. En el último caso las fuentes fermiónicas resultan ser números de Grassmann.

En el segundo veremos como se puede obtener una Teoría de Campos a partir de T.F. Para ello definiremos el campo de una manera análoga al caso electrostático.

Las razones anteriores, en especial el hecho de que los campos fermiónicos tengan un caracter grassmaniano, aunado a que los números de Grassmann tienen un sentido físico claro en esta teoría, nos han motivado a utilizar la Teoría de Fuentes en la búsqueda de la corriente conservada asociada a la supersimetría (Supercorriente) para un sistema de partículas libres de spin-1 y spin-1/2. Ahora bien, la cantidad conservada (Supercarga) resulta ser un spinor que no tiene una dependencia grassmannina lo cual permite su interpretación física. Como veremos, la conservación de la supercarga implica relaciones entre las amplitudes de dispersión del sistema.

Empero antes atacaremos un problema de cantidades conservadas que por su simplicidad ilustrará con claridad las ideas y el método que utilizamos en este trabajo. El problema en cuestion

es la conservación de la carga eléctrica para partículas de spin-0. Esta cantidad conservada está asociada a la invariancia bajo rotaciones en el espacio de carga. Las mismas ideas se aplican posteriormente al caso de la Supercorriente.

Un cálculo similar al presente ha sido efectuado en la ref.(8) usando Teoría Cuántica de Campos con operadores para partículas de spin-2 y spin-3/2 cuya interacción es supersimétrica. Nuestros resultados son análogos a éstos.

CONVENCIONES

$$x^\mu = (x^0 = t, \vec{x}), \quad x^2 = x^\mu x_\mu = g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu$$

$$p_x = p_\mu x^\mu = p \cdot x - p^0 x^0, \quad p^\mu = (E, \vec{p}); \quad E = + \sqrt{p^2 + m^2}$$

$$(dx) = dx^0 dx^1 dx^2 dx^3, \quad (dp) = dp^0 dp^1 dp^2 dp^3.$$

$dw_p = d\vec{p} / (2\pi)^3 2\sqrt{p^2 + m^2}$ = medida invariante de la celda dp en el espacio de momentos.

Nuestras unidades son tales que $\hbar = c = 1$.

$$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Las ecuaciones están numeradas de acuerdo al capítulo y en orden progresivo. Cuando hagamos referencia a una ecuación y ésta se encuentre en el mismo capítulo sólo haremos referencia al número de la progresión correspondiente a la ecuación. Al referirnos a una Ec. en otro capítulo entonces tal referencia incluirá el número del capítulo correspondiente.

Capítulo 1

Teoría de Fuentes

La T.F. es una Teoría Cuántica Relativista de Campos desarrollada por Schwinger alrededor de 1967.

En esta teoría se evitan las suposiciones, hasta donde es posible, acerca de la estructura interna de la partícula. Es por ello que las ideas de partícula, creación y detección de ésta se consideran principios fundamentales. De la teoría emerge, como concepto derivado, una teoría de campos con sus ecuaciones de campo correspondientes sin embargo no hay relaciones de conmutación y más aun, no hay operadores. Por tal razón se dice que T.F. es un punto de vista intermedio entre la Teoría de Campos de Operadores y la de Matriz-S.

Las partículas en las cuales tenemos interés son en su mayoría inestables, y en lugar de observar esto como una aberración, escogemos tener esto como una propiedad de la partícula, en general. En analogía a lo que ocurre en la producción de partículas en aceleradores de altas-energías, primeramente debemos crear la partícula para después poder estudiarla.

La creación de una partícula de interés es el primer paso en el experimento, siendo la detección de la misma el paso final. Los métodos de detección consisten invariablemente en la transformación de la partícula en otra forma de materia mas apropiada al método experimental.

El concepto de fuente cumple un papel doble en la teoría:

1. La fuente, por el hecho de estar asociada con actos de creación y detección (aniquilación) de partículas, sirve como instrumento que identifica a la partícula de interes dentro del marco teórico.
2. La fuente es un concepto unificador para cada tipo de partículas dado que la fuente de una partícula en especial reúne todas las propiedades dinámicas que tienen en común los varios mecanismos para crear tal partícula. Aunque ésta no considera las peculiaridades de cada mecanismo.

Ahora bien, el proceso de creación de una partícula puede ser visto como una colisión con otras partículas en una reacción específica. Entonces las partículas reactantes sirven para transferir las propiedades deseadas a la partícula de interes, por lo cual podemos hablar de dicha reacción particular como la fuente de la partícula deseada. Luego el concepto de fuente es la abstracción de todos los procesos dinámicos que producen la creación de una partícula específica.

Para representar numéricamente esta abstracción de los procesos reales, notamos que las colisiones tienen un cierto grado de localización espacio-temporal. Entonces la fuente estará representada por una función numérica $S(x)$ que denota tal aspecto de localización. La efectividad de que la colisión libere varios momentos será medida por otra función $S(p)$. La cual escogemos como $S(p) = \int (dx) e^{-ipx} S(x)$, para satisfacer la relación de incertidumbre de Heisenberg.

En el caso de las partículas inestables, éstas eventualmente decaen y el proceso de decaimiento es un dispositivo de detección. En general cualquier dispositivo de detección puede ser visto como un aniquilamiento de partículas. Luego el concepto de fuente puede ser usado como la abstracción de colisiones de aniquilamiento, en la cual la fuente actúa negativamente, como un sumidero. Ahora tenemos ya una visión física total de la situación: la fuente es usada inicialmente para crear partículas del estado de vacío y a la vez esta es usada para detectar las partículas resultantes de alguna interacción que retornan finalmente al estado de vacío.

La amplitud fundamental en la teoría es la amplitud de vacío-vacío (A.V.) y denotada por $\langle 0_+ | 0_- \rangle$. Esta describe el proceso en su totalidad, desde el vacío inicial hasta el vacío final.

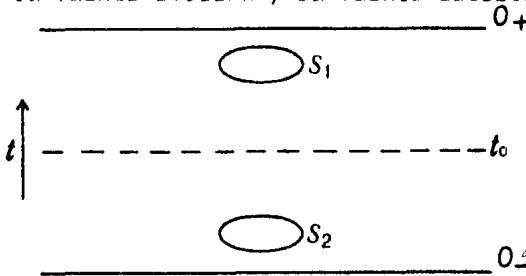
Hay 2 postulados básicos en la teoría a saber:

1. Causalidad

La producción en el espacio-tiempo $t_0 < t < t_0$ depende sólo de la fuente 2.

La detección en el espacio-tiempo $t_0 < t < t_+$ depende sólo de la fuente 1.

El siguiente gráfico pone de relieve la idea anterior. Es conveniente hacer notar que en general existe una separación espacial entre la fuente emisora y la fuente detectora.



La causalidad refleja un hecho experimental; primero se crea la partícula, transcurre un lapso de tiempo para que la partícula interactúe con otra y finalmente se sucede otro lapso de tiempo para eventualmente detectarla.

2. Uniformidad espacio-tiempo

La A.V. depende sólo de la fuente total, i.e. $S = S_1 + S_2$.

Dentro de este trabajo haremos referencia a los postulados 1 y 2 como las ecuaciones (1.1) y (1.2) respectivamente.

1.1 SPIN=0

Usaremos el símbolo K para referirnos a fuentes de partículas con spin=0 específicamente.

Las partículas de spin cero están caracterizadas por la masa y el momento. La fuente para spin cero será una función escalar K .

Ahora definimos las amplitudes de creación y detección en términos de la fuente débil K (esto significa que sólo el intercambio de una partícula entre las fuentes es numéricamente significativo)

$$\text{Creación } \langle 1_p | 0_- \rangle^K = i \sqrt{dw_p} K(p),$$

(1.3)

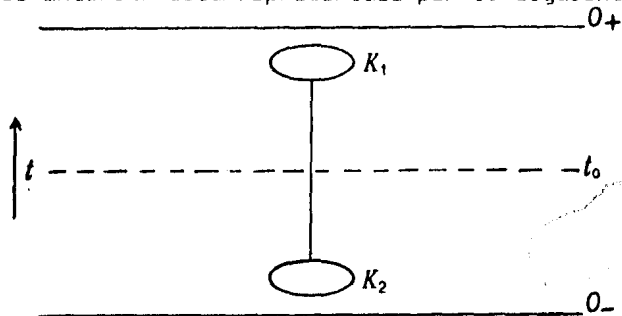
$$\text{Detección } \langle 0_+ | 1_p \rangle^K = i \sqrt{dw_p} K(-p),$$

donde $|1_p\rangle$ es el estado de una partícula con momento específico dentro de un pequeño elemento de volumen (dp). Los subíndices $-$, $+$ se refieren a la acción temporal de la fuente, respectivamente, $|0_+\rangle$ es el estado de vacío después de su acción y $|0_-\rangle$ el estado de vacío antes de ella.

Considerando que el experimentador trabaja con procesos causales tales como producción-propagación-detección de haces de

partículas, en una primera aproximación de tal proceso examinamos la siguiente situación causal para fuente débil. Comenzamos con el estado de vacío. Luego una fuente débil K_2 , que ocupa una región localizada del espacio-tiempo, actúa, siendo lo más frecuente que nada suceda (con la amplitud de probabilidad asociada $\langle 0_+ | 0_- \rangle^{K_2} \approx 1$) hasta que ocasionalmente se produzca una sola partícula con probabilidad $1_p | 0_- \rangle^{K_2}$. Después de la emisión el estado de una partícula persiste y se propaga hasta que entramos en la región espacio-temporal de la fuente K_1 que detecta a la partícula. Esto está representado por la amplitud $\langle 0_+ | 1_p \rangle^{K_1}$. Finalmente retornamos al estado de vacío.

El proceso anterior está representado por la siguiente figura



Utilizando la completez de los estados de multipartículas y analizando los estados intermedios en t_0 , podemos escribir la amplitud de vacío-vacío como

$$\begin{aligned} \langle 0_+ | 0_- \rangle^{K=K_1+K_2} &= \sum \langle 0_+ | \rangle \langle \rangle | 0_- \rangle = \sum \langle 0_+ | \rangle^{K_1} \langle \rangle | 0_- \rangle^{K_2}, \text{ [por (1)]} \\ &= \langle 0_+ | 0_- \rangle^{K_1} \langle 0_+ | 0_- \rangle^{K_2} + \sum_p \langle 0_+ | 1_p \rangle^{K_1} \langle 1_p | 0_- \rangle^{K_2}, \end{aligned} \quad (1.4)$$

en la aproximación de fuente débil.

La amplitud de vacío-vacío individual tiene la forma siguiente

$$\langle 0_+ | 0_- \rangle^K = 1 + f(K), \text{ con } f(0) = 0, |f(p)| \ll 1 \text{ (fuente débil), (1.5)}$$

con lo que se recuperan las propiedades siguientes para $K = 0$

$$\begin{aligned} \langle 0_- | 0_+ \rangle &= \langle 0_+ | 0_- \rangle^* = 1 \\ \text{y} \\ \langle 1_{p'} | 1_p \rangle &= \delta_{pp'}. \end{aligned}$$

Hasta el momento no hemos establecido característica alguna para la función $K(x)$.

Veamos qué restricción impone a $K(x)$ el utilizar la ortogonalidad que existe entre el estado de vacío y el de una partícula, antes de que actúe la fuente. Junto con la completitud de los estados de multipartículas, después de la acción de la fuente

$$0 = \langle 0_- | 1_{p_-} \rangle = \underbrace{\langle 0_- | 0_+ \rangle^K}_{1+f} \underbrace{\langle 0_+ | 1_{p_-} \rangle^K}_f + \sum_{p'} \underbrace{\langle 0_- | 1_{p'} \rangle^K}_f \underbrace{\langle 1_{p'} | 1_{p_-} \rangle^K}_{\delta_{pp'}+f} + \dots$$

por lo cual a orden f tenemos

$$0 = \langle 0_+ | 1_{p_-} \rangle^K + \langle 0_- | 1_{p_+} \rangle^K = \langle 0_+ | 1_{p_-} \rangle^K + (\langle 1_{p_+} | 0_- \rangle^K)^*,$$

si utilizamos las definiciones dadas por (3) lo anterior se reduce a

$$0 = i\sqrt{dw_p} K(-p) - i\sqrt{dw_p} K(p)^* \implies K(-p) = K(p)^*, \text{ por lo tanto } K(x) \text{ es real.}$$

Esto es una propiedad general de fuentes y por ende una fuente compleja será considerada como la combinación de dos fuentes reales las cuales describen alguna propiedad física de tal multiplicidad.

Por otro lado tenemos que usando (2) y (5) se obtiene

$$1+f(K)=[1+f(K_1)][1+f(K_2)]+\int dw_p \int (dx)(dx') iK_1(x) e^{ip(x-x')} iK_2(x'),$$

por lo tanto

$$f(K_1+K_2)=f(K_1)+f(K_2)+\int dw_p \int (dx)(dx') iK_1(x) e^{ip(x-x')} iK_2(x'). \quad (1.6)$$

Debemos notar que no hay nada en esta descripción que distinga a una fuente de la otra, salvo la referencia a la región espacio-tiempo en que esta se localiza. Esta uniformidad del espacio-tiempo nos permite reexpresar la condición (6) estableciendo que $f(K)$ debe ser bilineal en la fuente $K=K_1+K_2$. Por lo cual, en general $f(K)$ tiene la forma

$$f(K)=(1/2) \int (dx)(dx') K(x) \Delta_+(x-x') K(x') \quad (1.7)$$

y entonces (5) se reduce a

$\langle 0_+ | 0_- \rangle^K = 1 + (1/2) \int (dx)(dx') K(x) \Delta_+(x-x') K(x') \quad (1.8)$ en donde, debido a la invariancia bajo translaciones, Δ_+ debe ser función de $x-x'$. Dado que sólo la parte simétrica de Δ_+ contribuye a (7), i.e.

$\Delta_+ = (1/2) [\Delta_+(x-x') + \Delta_+(x'-x)]$, sin pérdida de generalidad podemos escoger $\Delta_+(x-x') = \Delta_+(x'-x)$.

Ahora bien, de comparar (7) con $K=K_1+K_2$ y (6), concluimos que para $x^0 > x'^0$

$$\Delta_+(x-x') = i \int d\omega_p e^{ip(x-x')} \quad (1.9)$$

donde $p^2+m^2=0$ en esta integral. De la simetría de Δ_+ tenemos

$$x^0 < x'^0; \Delta_+(x-x') = i \int d\omega_p e^{ip(x-x')}, \quad (p^2+m^2=0). \quad (1.9')$$

Esta función es solución a la ecuación diferencial

$$(m^2 - \partial^2) \Delta_+(x-x') = \delta(x-x'), \quad (1.10)$$

esto es, es la función de Green para partículas de spin-0, y ésta obedece las siguientes condiciones de frontera

Tiene frecuencias positivas para $x^0 > x'^0$ y frecuencias negativas para $x^0 < x'^0$.

Ahora bien, la construcción explícita de Δ_+ es válida para cualquier $(x-x')^\mu$, tipo tiempo o tipo espacio. Si bien para el caso de tipo espacio lo anterior no resulta tan obvio ya que en tal caso la causalidad no tiene un sentido invariante. La validez se debe a que en dicho caso siempre es posible elegir un sistema tal que $t-t'=0$, y dado que tanto $d\omega_p$ como $e^{ip(x-x')}$ tienen un sentido invariante, entonces tendremos

$$\Delta_+(x-x') = i \int d\omega_p e^{\pm ip \cdot (x-x')}. \text{ Como vemos la dificultad radica}$$

en la ambigüedad del signo. Pero esto no es problema ya que siempre podemos hacer la transformación $p \rightarrow -p$.

Sin embargo, existe una representación alternativa para Δ_+ que es

$$\Delta_+(x-x') = \int dp / (2\pi)^4 e^{ip(x-x')} / p^2 + m^2 - i\epsilon \quad |\epsilon \rightarrow +0$$

Como ya acotamos anteriormente, no hay ninguna indicación en (8), acerca de la causalidad del arreglo inicial de las fuentes, por lo cual ésta es aplicable a cualquier disposición espacio-temporal de las fuentes. Esta extrapolación espacio-temporal requiere de una verificación de consistencia.

Hay restricciones que podemos deducir para fuentes débiles del requisito de que la suma de probabilidad de todos los eventos posibles sea uno. Estas se expresan como:

$$1 \geq | \langle 0_+ | 0_- \rangle |^2 + \sum | \langle 1_p | 0_- \rangle |^2 \quad (1.11)$$

$$1 \geq | \langle 0_+ | 0_- \rangle |^2 + \sum | \langle 0_+ | 1_p \rangle |^2 \quad (1.12)$$

Ambas pueden reescribirse utilizando (3) de la siguiente forma

$$| \langle 0_+ | 0_- \rangle |^2 = 1 - \int d\omega_p |K(p)|^2$$

Ahora comprobaremos este requisito como prueba de consistencia.

Utilizando (8) con nuestra aproximación de fuente débil se tiene

$$| \langle 0_+ | 0_- \rangle^{K_1} |^2 = \langle 0_+ | 0_- \rangle^{K_1} \langle 0_+ | 0_- \rangle^{K_1^*} = 1 + (i/2) \int K \Delta_+ K \{ 1 - (i/2) \int K \Delta_+^* K \}$$

$$= 1 + (i/2) \int K (\Delta_+ - \Delta_+^*) K + O(K^4).$$

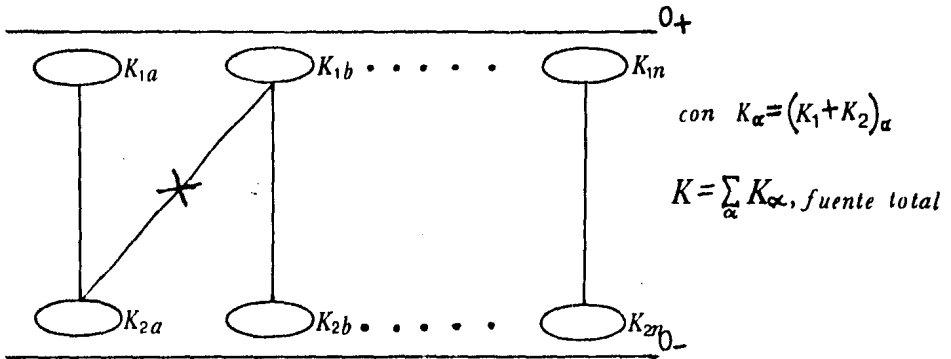
Pero $\Delta_+ - \Delta_+^* = 2i \operatorname{Im} \Delta_+ = 2i \operatorname{Im} [i \int d\omega_p e^{ip(x-x')}] = 2i \operatorname{Re} \int d\omega_p e^{ip(x-x')}.$

$$| \langle 0_+ | 0_- \rangle^{K_1} |^2 = 1 + (i/2) 2i \operatorname{Re} \int K(x) e^{ip(x-x')} K(x') = 1 - \operatorname{Re} \int d\omega_p K(-p) K(p)$$

$$= 1 - \int d\omega_p |K(p)|^2. \text{ Lo cual confirma (11) ó (12).}$$

Dado que la fuente de producción K_2 y la de detección K_1 están localizadas dentro de un cierto volumen macroscópico, correspondientemente la trayectoria de la partícula de intercambio está limitada. Todo lo anterior define una región asociada con la partícula específica. Fuera de esta región otros actos independientes de creación y detección pueden ser considerados, y similarmente representados. Por lo que la restricción de fuente débil puede ser removida considerando un haz que sea denso macroscópicamente pero a nivel microscópico sea débil. Con tal idea pensamos en el siguiente arreglo: Una sucesión arbitraria de fuentes débiles (donde por cada fuente débil debe entenderse el par de fuentes; de creación y detección) que no interactúan entre sí y sujetas a la limitación de que todas las partículas sean físicamente independientes en virtud de su separación espacial.

Tal como lo indica la siguiente figura.



Matemáticamente tal restricción estará dada por:

$$0 = \int K_\alpha(x) \Delta_+(x-x') K_\beta(x'), \text{ para } \alpha \neq \beta. \quad (1.13)$$

Nos interesa determinar cuál es la A.V. en este caso. La situación estará descrita por la amplitud de vacío de la fuente total, la cual debido a que cada proceso es independiente, será la productoria de todas las amplitudes de probabilidad de vacío asociadas a cada fuente, i.e.

$$\langle 0_+ | 0_- \rangle^K = \prod_\alpha \langle 0_+ | 0_- \rangle^{K_\alpha} = \prod_\alpha \left\{ 1 + (i/2) \int K_\alpha(x) \Delta_+(x-x') K_\alpha(x') \right\} \quad (1.14)$$

$$\neq 1 + \sum_\alpha (i/2) \int (dx)(dx') K_\alpha(x) \Delta_+(x-x') K_\alpha(x') + \dots$$

En la aproximación de fuente débil, y extrapolando esta expresión (como $1+x \rightarrow e^x$) tenemos

$$\langle 0_+ | 0_- \rangle^K = e^{(i/2) \sum_\alpha \int K_\alpha \Delta_+ K_\alpha}$$

$$\langle 0_+ | 0_- \rangle^K = e^{(i/2) \int (\sum_\alpha K_\alpha) \Delta_+ (\sum_\alpha K_\alpha)},$$

en virtud de (13). Obteniendo entonces

$$\langle 0_+ | 0_- \rangle^K = e^{(i/2) \int K(x) \Delta_+(x-x') K(x') (dx) (dx')} \quad (1.15)$$

Por el contrario, bajo la condición (13) y de fuente débil, (15) reproduce (14) ya que

$$\begin{aligned} & e^{(i/2) \int (dx) (dx') K(x) \Delta_+(x-x') K(x')} \\ & = e^{(i/2) \sum_{\alpha} \int (dx) (dx') K_{\alpha}(x) \Delta_+(x-x') K_{\alpha}(x')} \\ & = \prod_{\alpha} e^{(i/2) \int (dx) (dx') K_{\alpha}(x) \Delta_+(x-x') K_{\alpha}(x')} \\ & = \prod_{\alpha} (1 + (i/2) \int (dx) (dx') K_{\alpha}(x) \Delta_+(x-x') K_{\alpha}(x')). \end{aligned}$$

Consideraremos la ecuación (15) como la forma general para la amplitud de vacío-vacío para fuentes fuertes.

$$\text{Definamos: } W(K) = (i/2) \int (dx) (dx') K(x) \Delta_+(x-x') K(x').$$

Por lo tanto, podemos reescribir (15) como:

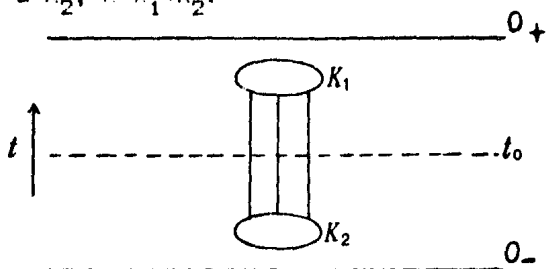
$$\langle 0_+ | 0_- \rangle^K = e^{iW(K)} \quad (1.16)$$

$W(K)$ describe el proceso básico de creación - propagación - detección, y la exponencial indica la repetición indefinida de éste. Más adelante veremos que $W(K)$ tiene el valor numérico de la acción.

Ahora estamos en posición de considerar intercambios de muchas partículas para fuentes fuertes.

Sea el arreglo causal usual (creación - propagación - detección), dado por la figura siguiente:

K_1 posterior a K_2 , $K=K_1+K_2$.



Luego de (16) tenemos:

$\langle 0_+ | 0_- \rangle^K = e^{(i/2) \int_{K_1} \Delta_{K_1}} e^{i \int_{K_1} \Delta_{K_2}} e^{(i/2) \int_{K_2} \Delta_{K_2}}$, en donde se ha hecho uso de la simetría de Δ , y donde hemos escrito por simplicidad

$$\int_{K_\alpha} \Delta_{K_\beta} = \int (dx)(dx') K_\alpha(x) \Delta_+(x-x') K_\beta(x'), \quad (\alpha, \beta=1,2).$$

Ahora analicemos el segundo producto, i.e.

$$\begin{aligned} \exp[i \int_{K_1} \Delta_{K_2}] &= \exp[i \int_{K_1} (x) \Delta_+(x-x') K_2(x') (dx)(dx')] \\ &= \exp[i \int (dx)(dx') K_1(x) i d w_p \exp(ip(x-x')) K_2(x')] \\ &= \exp[i \int d w_p i \int (dx) K_1(x) e^{ipx} i \int (dx') K_2(x') e^{-ipx'}] \\ &= \exp[\int d w_p K_1(-p) K_2(p)] = \exp[\sum i \sqrt{d w_p} K_1^*(p) i \sqrt{d w_p} K_2(p)] \\ &= \exp[\sum i K_{1p}^* i K_{2p}] \end{aligned} \quad (1.17), \text{ en}$$

donde hemos usado (9) para obtener la expresión de la segunda línea y además hemos definido $K_p = \sqrt{d w_p} K(p)$. Por lo tanto de (16):

$$\langle 0_+ | 0_- \rangle^K = \langle 0_+ | 0_- \rangle^{K_1} \exp[\sum i K_{1p}^* i K_{2p}] \langle 0_+ | 0_- \rangle^{K_2}. \quad (1.18)$$

Por otro lado, la causalidad del arreglo nos permite analizar el proceso completo en una emisión inicial de muchas partículas, representadas por la amplitud de probabilidad $\langle n | 0_- \rangle^{K_2}$, la propagación de dichas partículas y el subsecuente proceso de detección descrito por $\langle 0_+ | n \rangle^{K_1}$, donde $\{n\}$ indica las propiedades que distinguen a los diferentes estados de n -partículas. Por lo cual, la amplitud de vacío es

$$\langle 0_+ | 0_- \rangle^K = \sum \langle 0_+ | n \rangle^{K_1} \langle n | 0_- \rangle^{K_2} \dots \quad (1.19)$$

Ahora para poder comparar esta última expresión con (18) tenemos sólo que introducir el desarrollo de la exponencial separando lo que depende de 1 de lo que depende de 2, i.e.

$$\begin{aligned} \exp \left[\sum_p iK_{1p}^* iK_{2p} \right] &= \prod_p \exp \left[iK_{1p}^* iK_{2p} \right] = \prod_p \sum_{h_p=0}^{\infty} \left[(iK_{1p}^*)^{n_p} / (n_p!) \right] \left[i(K_{2p})^{n_p} / (n_p!) \right] \\ &= \sum_{h_p=0}^{\infty} \prod_p \left[(iK_{1p}^*)^{n_p} / (n_p!) \right] \left[i(K_{2p})^{n_p} / (n_p!) \right] \quad (1.20) \end{aligned}$$

Luego de introducir esta expresión en (18) y de comparar con (19) encontramos las amplitudes de creación y detección respectivamente

$$\langle n | 0_- \rangle^K = \langle 0_+ | 0_- \rangle^K \prod_p (iK_p)^{n_p} / (n_p!)^{1/2} \quad (1.21)$$

$$\langle 0_+ | n \rangle^K = \langle 0_+ | 0_- \rangle^K \prod_p (iK_p)^{n_p} / (n_p!)^{1/2}$$

Los estados intermedios están caracterizados por los números

cuánticos $n_{p1}, n_{p2}, n_{p3}, \dots$, los cuales describen estados de muchas partículas asociadas a vecindades, o celdas, del respectivo momento (p_1, p_2, p_3, \dots) en el espacio de momentos.

Hay varias cosas que debemos acotar acerca de (21). Notemos primeramente que siendo las partículas no distinguibles entre sí, y dado que no hay límites al número de partículas que puedan tener la misma propiedad, entonces estamos describiendo partículas idénticas que obedecen la estadística de Bose-Einstein. También notemos que $\langle \{n\} | 0_- \rangle^K$ no es el complejo conjugado de $\langle 0_+ | \{n\} \rangle^K$, y que si $n_p = 0 \forall p$, i.e. $|\{n\}\rangle = |0\rangle$, entonces en cada uno de los términos de (21) obtenemos una igualdad, lo cual verifica la consistencia de esta. Si $n_p = 1$ y $n_{p'} = 0 \forall p' \neq p$, tenemos $\langle 1_p | 0_- \rangle^K = i K_p \langle 0_+ | 0_- \rangle^K = i K_p$, recuperando (3) como era de esperar.

Ahora verificaremos la condición de normalización de probabilidad, o la completez de los estados de muchas partículas;

$$\sum \langle 0_- | \{n\} \rangle^K \langle \{n\} | 0_- \rangle^K = \sum |\langle \{n\} | 0_- \rangle^K|^2 = \sum_p \prod_p [(i K_p)^2 n_p / n_p!] |\langle 0_+ | 0_- \rangle^K|^2,$$

dado que $\langle 0_- | \{n\} \rangle^K = (\langle \{n\} | 0_- \rangle^K)^*$, en donde se ha usado (21)

entonces

$$|\langle 0_+ | 0_- \rangle^K|^2 \prod_p \sum_{n_p} (i K_p)^2 n_p / n_p! = |\langle 0_+ | 0_- \rangle^K|^2 e^{\sum_p i K_p^2} \quad (1.22).$$

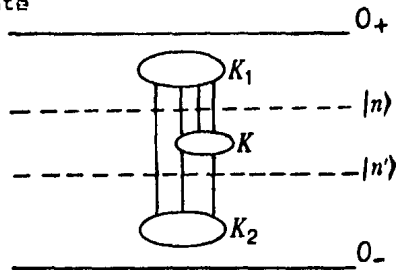
Empero $|\langle 0_+ | 0_- \rangle^K|^2 = e^{(i/2) \int K \Delta K_e (-i/2) \int K \Delta^* K}$

$$= e^{(i/2) \int K (\Delta - \Delta^*) K} = \exp\{-\sum |K_p|^2\},$$

Donde hemos hecho uso de la relación de las deltas de pág. 11. Luego al combinar este resultado con (22) obtenemos

$$\sum_{\langle n \rangle} \langle 0_+ | \langle n \rangle \rangle^K \langle \langle n \rangle | 0_- \rangle^K = 1. \quad \text{Q.E.D}$$

Veamos ahora una aplicación que nos será útil posteriormente. Esta es una modificación al problema de propagación que hemos considerado hasta el momento. Consiste en colocar una fuente de prueba K entre la fuente de creación y detección, de tal manera que el haz de partículas pueda modificarse, tal como se ilustra en la figura siguiente



La fuente TOTAL será: $K_{tot} = K_1 + K_2 + K$; luego de (16) tenemos:

$$\langle 0_+ | 0_- \rangle^{K_{tot}} = \langle 0_+ | 0_- \rangle^{K_1 + K_2} e^{i \int K_1 \Delta} e^{i \int K \Delta} e^{i \int K_2 \Delta} \langle 0_+ | 0_- \rangle^K$$

Donde hemos usado que K_1 actúa después a K y esta última, posteriormente a K_2 . Utilizando (17) tenemos

$$\langle 0_+ | 0_- \rangle^{K_{tot}} = \sum \langle 0_+ | \langle n \rangle \rangle^{K_1} \langle \langle n \rangle | 0_- \rangle^{K_2} \exp\left\{ \sum_p (iK_p^* iK_p + iK_p^* iK_{2p}) \right\} \langle 0_+ | 0_- \rangle^K.$$

Ahora considerando el caso de fuente de prueba débil, i.e.

para K, se tiene

$\langle 0_+ 10_- \rangle^{K \geq 1}$, solo términos en K son significativos, por lo que:

$$\begin{aligned} \langle 0_+ 10_- \rangle^{K_{tot}} &= \sum \langle 0_+ 1 \{n\} \rangle^{K_1} \langle \{n\} 10_- \rangle^{K_2} (1 + \sum [iK_{1p}^* iK_p + iK_p^* iK_{2p}]) \\ &= \sum \langle 0_+ 1 \{n\} \rangle^{K_1} \langle \{n\} 10_- \rangle^{K_2} + \sum \langle 0_+ 1 \{n\} \rangle^{K_1} iK_{1p}^* iK_p \langle \{n\} 10_- \rangle^{K_2} \\ &\quad + \sum_{n,p} \langle 0_+ 1 \{n\} \rangle^{K_1} iK_p^* iK_{2p} \langle \{n\} 10_- \rangle^{K_2} + O(K^2) \end{aligned} \quad (1.23).$$

Por otro lado, introduciendo dos veces la relación de completéz para los estados de muchas partículas, tenemos la relación siguiente

$$\langle 0_+ 10_- \rangle^{K_{tot}} = \sum_{\{n\}, \{n'\}} \langle 0_+ 1 \{n\} \rangle^{K_1} \langle \{n\} 1 \{n'\} \rangle^K \langle \{n'\} 10_- \rangle^{K_2}$$

Luego comparando ésta con (23), con la ayuda de (21) y poniendo atención a la normalización, tenemos:

$$iK_{2p} \langle \{n\} 10_- \rangle^{K_2} = \sqrt{1+n_p} \langle \{n\} + 1_p 10_- \rangle^{K_2} \quad (1.24)$$

$$\langle 0_+ 1 \{n\} \rangle^{K_1} iK_{1p}^* = \sqrt{1+n_p} \langle 0_+ 1 \{n\} + 1_p \rangle^{K_1}$$

Notemos que una vez la acción de la proyección de la fuente con cierto momento aumenta en uno el número de partículas, con dicho momento, con la normalización adecuada.

Así que para términos lineales en K tenemos:

$$\sum_{\langle n \rangle_p} [\langle 0_+ | \langle n \rangle + 1_p \rangle^{K_1} \sqrt{n_p + 1} i K_p \langle n \rangle | 0_- \rangle^{K_2} + \langle 0_+ | \langle n \rangle \rangle^{K_1} \sqrt{n_p + 1} i K_p^* \langle n \rangle + 1_p | 0_- \rangle^{K_2}]$$

Pero por otro lado tenemos:

$$\langle 0_+ | 0_- \rangle^{K_{tot}} = \sum_{\langle n \rangle, \langle n' \rangle} \langle 0_+ | \langle n \rangle \rangle^{K_1} \langle n \rangle | \langle n' \rangle \rangle^{K_2} \langle n' \rangle | 0_- \rangle^{K_2}.$$

Por lo que comparando ambas expresiones deducimos los siguientes elementos de matriz

$$\langle n \rangle + 1_p | \langle n \rangle \rangle^{K_1} = \sqrt{n_p + 1} i K_p, \quad \langle n \rangle | \langle n \rangle + 1_p \rangle^{K_2} = \sqrt{n_p + 1} i K_p^*.$$

La primera puede ser reescrita como

$$\langle n \rangle + 1_p | \langle n \rangle \rangle^{K_1} = \sqrt{n_p + 1} \langle 1_p | 0_- \rangle^{K_1}.$$

Luego hemos generalizado las definiciones preliminares para las amplitudes de creación y detección dadas en (3), liberándonos de la restricción de fuente débil. Notando además que la probabilidad para la emisión de otra partícula será proporcional a $n_p + 1$, con n_p el número de partículas con momento p inicialmente. Por lo que la emisión estimulada es característica de una estadística de Bose-Einstein.

1.2 SPIN-1. (FOTON)

La forma exponencial que hemos establecido para la amplitud de vacío en la sección anterior conlleva la posibilidad de producir cualquier número de eventos aislados de emisión y detección de partículas.

Luego, si una fuente escalar describe partículas de spin cero, es de esperar que fuentes que se transforman como vectores, o tensores de cualquier rango, describan partículas de spin uno, o más alto.

Ahora bien, el candidato lógico para ser un vector fuente que genere partículas de spin uno es $J^\mu(x)$. Sin embargo esta fuente tendría cuatro componentes en oposición a las tres fuentes independientes que uno esperaría asociar con las tres componentes del spin asociadas a partículas masivas de spin uno. Luego, $J^\mu(x)$ debe ser una fuente que contiene partículas de spin-1 y spin-0: Estas últimas corresponderían a la posibilidad de formar un escalar diferenciando, i.e. $\partial_\mu J^\mu(x)$. Por otro lado existen dificultades relacionadas con el hecho de reemplazar J^μ por K en nuestra forma fundamental (15)

$$\langle 0_+ | 0_- \rangle_{J=e} = (i/2) \int (dx) (dx') J^\mu(x) \Delta_+(x-x') J_\mu(x').$$

Encontramos problemas con la probabilidad de vacío, ya que:

$$\begin{aligned}
| \langle 0_+ | 0_- \rangle^{J^2} &= e^{-\int (dx)(dx') J^\mu(x) \text{Re} (1/i) \Delta_+(x-x') J_\mu(x')} \\
&= \exp(-\int dw_p J^\mu(-p) J_\mu(p)) \\
&= \exp(-\int dw_p [|\vec{J}(p)|^2 - |J^0(p)|^2]), \text{ pero:} \\
\int dw_p [|\vec{J}(p)|^2 - |J^0(p)|^2] &\geq 0.
\end{aligned}$$

Luego $| \langle 0_+ | 0_- \rangle^{J^2} |$ no sería $\ll 1$ necesariamente

Con el objeto de superar esta dificultad observamos que la estructura básica que encontramos para spin cero

$\exp(i \int K_1 \Delta K_2) = \exp(\sum dw_p i k_1^*(p) i k_2(p))$, puede ser generalizada a

$$\exp(\sum dw_p i \vec{J}_1^*(p) \vec{J}_2(p)) \quad (1.25)$$

donde $J(p)$ es la transformada de Fourier de $J(x)$ que es la componente espacial del cuadrivector $J^\mu(x)$, siendo este último real, i.e. $J^\mu = (J^0, \vec{J})$. Notemos que entonces la fuente para partículas masivas de spin-1 tendrá tres componentes independientes¹ las cuales se transforman entre sí bajo rotaciones como las componentes de un vector, tal como es debido para partículas de spin-1. Empero como podemos observar de (25) $\vec{J}_1^*(p) \cdot \vec{J}_2(p)$ no es covariante.

1. Lo cual será evidente en el sistema en reposo como veremos más adelante

Sin embargo, si escribimos: $\bar{J}_1^* \bar{J}_2 = J_1^{\mu*} J_{2\mu} + J_1^{0*} J_2^0$, y somos capaces de escribir esta en una forma válida en el sistema en reposo de la partícula y después generalizarla, entonces habremos allanado tal dificultad.

Para ello consideraremos el producto $P_\mu J^\mu$. Como sucede generalmente resulta sencillo evaluarlo en el sistema en reposo en el cual $P^\mu = (m, 0)$, por lo que $P_\mu J^\mu = -mJ^0 \implies J^0 = -P_\mu J^\mu / m$. De manera que:

$$\begin{aligned} \bar{J}_1^* \bar{J}_2 &= J_1^{\mu*} J_{2\mu} + (P_\mu J_1^{\mu*} P_\nu J_2^\nu) / m^2 \\ &= J_1^{\mu*}(\rho) [g_{\mu\nu} + P_\mu P_\nu / m^2] J_2^\nu(\rho) \quad (1.26). \end{aligned}$$

Esta última expresión es claramente covariante y más aún si evaluamos el tensor métrico, dado entre paréntesis en (26), en el sistema en reposo este tendrá los siguientes valores

$$g_{\mu\nu} + P_\mu P_\nu / m^2 = \begin{cases} 0 & \mu = \nu = 0 \\ \mu = k, \nu = 0 \\ \mu = k, \nu = l \end{cases} \begin{cases} 0 \\ 0 \\ \delta_{kl} \end{cases} \quad (1.27)$$

Por lo cual

$$J^{\mu*}(\rho) [g_{\mu\nu} + P_\mu P_\nu / m^2] J^\nu(\rho) = |J(\rho)|^2 \geq 0 \implies |\langle 0_+ | 0_- \rangle^J|^2 \leq 1.$$

Ahora bien, la estructura en el espacio de coordenadas que reproduce a (25), con la substitución de (26), será

$$\langle 0_+ | 0_- \rangle^J = \exp\left((1/2) \int (dx) (dx') J^\mu(x) [g_{\mu\nu} - \partial_\mu(x) \partial_\nu(x') / m^2] \Delta_+(x-x') J^\nu(x') \right)$$

la cual consideramos como la forma fundamental de la amplitud de vacío-vacío para partículas masivas de spin-1

Si consideramos el arreglo causal usual, para la fuente $J=J_1+J_2$, donde J_1 actúa después de J_2 , tendremos a partir de (28) que

$$\langle 0_+ | 0_- \rangle^J = \langle 0_+ | 0_- \rangle^{J_1} \exp\left(\sum i J_1^{\mu*}(p) [g_{\mu\nu} + P_\mu P_\nu / m^2] i J_2^\nu\right) \langle 0_+ | 0_- \rangle^{J_2} \quad (1.29)$$

Que es análoga para el caso de spin cero, y donde vemos explícitamente que recuperamos el punto de partida.

Si miramos al tensor simétrico $g_{\mu\nu} + P_\mu P_\nu / m^2$ (1.30), como una matriz diagonal $[0, 1, 1, 1]^2$ podemos reescribir tal tensor como una forma diádica, i.e. como la suma de producto de vectores <e.g. $\sum_{\mu i} v_{\mu i} v_{\nu i}$, donde estos serán vectores propios con valores propios dados por la diagonal>.

Del hecho de que: $[g_{\mu\nu} + P_\mu P_\nu / m^2] P^\mu = P_\nu + P_\nu P^2 / m^2 = P_\nu - P_\nu = 0$, vemos que P^μ es un autovector tipo tiempo con autovalor cero.

Los tres restantes serán tres autovectores tipo espacio, con autovalores +1.

Estos autovectores representan los grados de libertad de la

2. cf. ec. (27)

partícula masiva de spin-1, i.e. son los vectores de polarización y los denotamos $e_{\lambda\rho}^{\mu}$ y son ortogonales entre sí;

$$e_{\lambda\rho}^{\mu*} e_{\mu\lambda'\rho} = \delta_{\lambda\lambda'}$$

Ya que el autovector tiempo y los autovectores espaciales tienen valores propios distintos, se debe tener

$P_{\mu} e_{\lambda\rho}^{\mu} = 0 \quad \lambda=1, 2, 3$. Es decir los $e_{\lambda\rho}^{\mu}$ son ortogonales a tal momento.

Por lo tanto

$$g_{\mu\nu} + P_{\mu} P_{\nu} / m^2 = \delta_{\mu\nu} + i \sum_{\lambda\rho} e_{\mu\lambda\rho} e_{\nu\lambda\rho}^* = \sum_{\lambda\rho} e_{\mu\lambda\rho} e_{\nu\lambda\rho}^* \quad (1.31)^3$$

Para verificar la dimensionalidad pongamos $\mu=\nu$ en la fórmula anterior y sumemos sobre μ , obteniendo $4-1=3$, que es el número correcto de grados de libertad para partículas masivas de spin-1.

Al introducir (31) en (29) y definiendo $J_{\rho\lambda} = \sqrt{\partial\omega/\partial p} e_{\nu\lambda\rho}^* J^{\nu}(\rho)$, que interpretamos como la proyección de la fuente en el respectivo autovector, obtenemos la expresión:

$$\langle 0_+ | 0_- \rangle^J = \langle 0_+ | 0_- \rangle^{J_1} \exp\left(\sum_{\rho\lambda} i J_{1\rho\lambda}^* J_{2\rho\lambda}\right) \langle 0_+ | 0_- \rangle^{J_2}$$

que es completamente análoga al caso spin-0.

 3. La simetría de $g_{\mu\nu}$ indica que el complejo conjugado de los tres $e_{\mu\lambda\rho}$ produce una transformación unitaria en el conjunto

Si siguiendo los mismos pasos podemos obtener las amplitudes de creación y detección para estados de multipartículas masivas de spin-1:

$$\langle n_{p\lambda} | 0_- \rangle^J = \prod_{p,\lambda} (i J_{p\lambda})^{n_{p\lambda}} / (n_{p\lambda}!)^{1/2} \langle 0_+ | 0_- \rangle^J,$$

$$\langle 0_+ | n_{p\lambda} \rangle^J = \left[\prod_{p,\lambda} (i J_{p\lambda})^{n_{p\lambda}} / (n_{p\lambda}!)^{1/2} \right] \langle 0_+ | 0_- \rangle^J.$$

Aquí $(n_{p\lambda})$ es un conjunto de enteros que especifica cuántas partículas de momento p y polarización λ hay en el estado $| \rangle$ correspondiente. Y al igual que en el caso de spin-0 no hay restricción en los $n_{p\lambda}$, de modo que tenemos un sistema de Bose-Einstein.

Ahora pasemos a considerar el límite cuando $m \rightarrow 0$; esto es, deseamos considerar a los fotones. El desarrollo anterior no es aplicable porque nos encontramos que el tensor simétrico (30) no tiene sentido, y por ende tampoco la acción que en forma simbólica es

$$W(J) = (1/2) \int J^\mu \Delta_{\mu\nu} J^\nu + \partial_\mu J^\mu \Delta \partial_\nu J^\nu / m^2.$$

Como ya anotamos anteriormente el término $\partial_\mu J^\mu$ nos dá la posibilidad de formar una fuente escalar, i.e. $\partial_\mu J^\mu(x) = \lambda K(x)$.

Y dado que toda la dependencia en la masa se encuentra en el término $(1/m^2) \partial_\mu J^\mu(x) \Delta_{+(x-x')} \partial_\nu J^\nu(x')$, resulta evidente que en el límite de masa cero la acción divergirá a menos que $\partial_\mu J^\mu$ se anule.

Entonces escogemos $\lambda=m$, teniendo entonces que $\delta_{\mu} J^{\mu}(x)=mK(x)$ con K finita cuando $m \rightarrow 0$. Por lo tanto en el límite de masa cero, tendremos $\delta_{\mu} J^{\mu}=0$.⁴

En el caso del fotón hemos deducido del hecho de que tenga masa cero, una restricción sobre la fuente J^{μ} . Esta ha sido que su divergencia se anule lo cual indica una ley de conservación. Siendo, como es bien sabido, la carga eléctrica la propiedad física conservada.

De este modo nuestra acción se reduce a

$$W(J) = (1/2) \int J^{\mu} D_{\mu} + (1/2) \int K D K$$

Donde hemos introducido la notación:

$$\lim_{m \rightarrow 0} \Delta_{+}(x-x') = D_{+}(x-x')$$

Ya que no hay evidencia experimental de partículas con $m=0$, $s=0$ no tomaremos en cuenta tal fuente, por lo que pondremos $K(x)=0$.

De este modo la amplitud de vacío que describe fotones es

$$\langle 0_{+} | 0_{-} \rangle^J = \exp \left\{ (i/2) \int (dx)(dx') J^{\mu}(x) D_{+}(x-x') J_{\mu}(x') \right\} \quad (1.32)$$

con el requerimiento adicional que $\delta_{\mu} J^{\mu} = 0$.

4. Claramente estamos describiendo fotones

Debemos verificar que $|\langle 0_+ | 0_- \rangle^J|^2 \leq 1$, como corresponde a una probabilidad.

$$\begin{aligned} |\langle 0_+ | 0_- \rangle^J|^2 &= e^{iW} e^{-iW^*} = e^{-2 \operatorname{Im} W} \\ &= \exp(-2(1/2) \int J^\mu(x) \operatorname{Im}(i d w_p \exp[+ip(x-x')] J_\mu(x')) \\ &= \exp(-\operatorname{Re} \sum d w_p J^{\mu*}(p) J_\mu(p)). \end{aligned}$$

En donde hemos hecho exactamente lo análogo a $\Delta_+ - \Delta_+^*$ para $D_+ - D_+^*$, siendo además superfluo el hecho de tomar la parte real.

En este punto debemos considerar la condición $P^2=0$, y la restricción de conservación de la fuente $P_\mu J^\mu(p)=0$ ⁵

Sin pérdida de generalidad consideremos al momento \vec{p} paralelo al eje z y como $P^2=0$ entonces $P^\mu = (|\vec{p}|, 0, 0, |\vec{p}|)$. Luego la restricción anterior implica que $J^0(p) = J^3(p)$ de manera que

$$|J(p)|^2 - |J^0(p)|^2 = \cancel{(-|J^0|^2 + |J^3|^2)} + |J^1|^2 + |J^2|^2 > 0$$

por lo tanto $|\langle 0_+ | 0_- \rangle^J|^2 \leq 1$

Además lo anterior pone de manifiesto los dos grados de libertad para el fotón.

Ahora consideremos el arreglo causal usual $J^\mu(x) = J_1^\mu(x) + J_2^\mu(x)$, luego la amplitud de vacío-vacío será

5. En el espacio de momentos

$$\langle 0_+ | 0_- \rangle^J = \langle 0_+ | 0_- \rangle^{J_1} \exp\left(\int d\omega_p i J_1^{\mu*}(p) g_{\mu\nu} i J_2^\nu(p)\right) \langle 0_+ | 0_- \rangle^{J_2}$$

Ahora debemos escribir $g_{\mu\nu}$ en forma diádica. $g_{\mu\nu}$ tiene un vector tipo tiempo y tres vectores propios tipo espacio.

Sea \bar{P}^μ el cuadrivector con el vector momento contrario a P^μ , el cual es un vector tipo tiempo i.e. $P^2=0$, por lo cual el primero estará dado por $\bar{P}^0=P^0$, $\bar{P}^k=-P^k$, $\bar{P}^2=0$.

Entonces $P^\mu + \bar{P}^\mu$ y $P^\mu - \bar{P}^\mu$ son respectivamente vectores tipo tiempo y tipo espacio.

Finalmente escojamos otros dos vectores tipo espacio $e^\mu_{\rho\lambda}$ $\lambda=1,2$, tales que $P_\mu e^\mu_{\rho\lambda}=0$, $\bar{P}_\mu e^\mu_{\rho\lambda}=0$, $e^{\mu*}_{\rho\lambda} e_{\mu\rho\lambda} = \delta_{\lambda\lambda'}$.

$$\begin{aligned} g^{\mu\nu} &= (P^\mu + \bar{P}^\mu)(P^\nu + \bar{P}^\nu) / 2P\bar{P} - (P^\mu - \bar{P}^\mu)(P^\nu - \bar{P}^\nu) / 2P\bar{P} + \sum_\lambda e^\mu_{\rho\lambda} e^{\nu*}_{\rho\lambda} \\ &= (P^\mu \bar{P}^\nu + P^\nu \bar{P}^\mu) / P\bar{P} + \sum_\lambda e^\mu_{\rho\lambda} e^{\nu*}_{\rho\lambda} \end{aligned}$$

Ahora, usando la restricción para la fuente de fotones $P_\mu J^\mu(p)=0$, $P_\mu J^{\mu*}(p)=0$,⁶ obtenemos

$$\begin{aligned} \int d\omega_p J_1^{\mu*}(p) g_{\mu\nu} J_2^\nu(p) &= \int d\omega_p J_1^{\mu*}(p) \sum_\lambda e_{\mu\rho\lambda} e^*_{\nu\rho\lambda} J_2^\nu(p) \\ &= \sum_{\rho\lambda} J_1^{\rho*} i\rho\lambda J_2^\rho, \text{ en donde hemos hecho uso de} \\ \text{la siguiente definición } J_{\rho\lambda} &= \sqrt{d\omega_p} e^*_{\nu\rho\lambda} J^\nu(p). \end{aligned}$$

Introduciendo este resultado en la amplitud de vacío-vacío

6. notar que $\bar{P}_\mu J^\mu(p) \neq 0$

tendremos $\langle 0_+ | 0_- \rangle^J = \langle 0_+ | 0_- \rangle^{J_1} \exp \left(\sum_{1p\lambda} iJ_{1p\lambda}^* iJ_{2p\lambda} \right) \langle 0_+ | 0_- \rangle^{J_2}$.

Que es completamente análoga al caso de spin-0. Por lo cual, siguiendo los mismos pasos encontramos las amplitudes de creación y detección para los estados de multipartículas

$$\langle n_{p\lambda} | 0_- \rangle^J = \prod_{\mu\lambda} \left[(iJ_{p\lambda})^{n_{p\lambda}} / (n_{p\lambda}!)^{1/2} \right] \langle 0_+ | 0_- \rangle^J \quad (1.32)$$

$$\langle 0_+ | n_{p\lambda} \rangle^J = \prod_{\mu\lambda} \left[(iJ_{p\lambda}^*)^{n_{p\lambda}} / (n_{p\lambda}!)^{1/2} \right] \langle 0_+ | 0_- \rangle^J.$$

Aquí $\langle n_{p\lambda} \rangle$ indica cuantas partículas de momento p y polarización λ hay en el estado correspondiente $| \rangle$. Al igual que en el caso de spin-0, no hay restricción para los $n_{p\lambda}$, por lo cual tenemos una vez más un sistema con estadística de Bose-Einstein.

1.3 SPIN-1/2

Sabemos que la ecuación que nos describe partículas de spin-1/2, es la ec. de Dirac

$$[\gamma^\mu (1/i) \partial_\mu + m] \Psi = \eta, \quad (1.32)$$
 donde η será nuestra fuente fermiónica. Pediremos por el momento que η sea real i.e. $\eta(x) = \eta^*(x)$.

Además como sabemos la representación más pequeña del grupo de Lorentz de spin-1/2 consiste en matrices de 4x4. Por lo cual η será un spinor de cuatro componentes reales.

Sabemos que la base para el álgebra de matrices de 4x4 puede ser generada a partir de las matrices γ^μ que satisfacen

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = \gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = -2g^{\mu\nu}$$
$$(\gamma^0)^2 = 1, \quad (\gamma^k)^2 = -1, \quad k=1, 2, 3.$$

Escogemos una representación tal que γ^μ sean imaginarias, $\gamma^0 = -\gamma^{0T}$ (antisimétrica), $\gamma^k = \gamma^{kT}$ (simétricas). (1.34)

La cual encuentra realización de la siguiente forma

$$(1.35)$$

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & i1 \\ -i1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^1 = \begin{pmatrix} i\sigma^1 & 0 \\ 0 & -i\sigma^1 \end{pmatrix}, \quad \gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i1 \\ -i1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^3 = \begin{pmatrix} i\sigma^3 & 0 \\ 0 & -i\sigma^3 \end{pmatrix}$$

$$\gamma_5 = \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 = \begin{pmatrix} -i\sigma^2 & 0 \\ 0 & i\sigma^2 \end{pmatrix}$$

con $\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$

En nuestra representación γ_5 es real, antisimétrica y es tal que $\{\gamma^\mu, \gamma_5\} = 0$ con $(\gamma_5)^2 = -1$.

Las 16 matrices que generan el álgebra son: $\{1, \gamma^\mu, \gamma^{\mu\nu}, i\gamma_5 \gamma^\mu, \gamma_5\}$, donde $\gamma^{\mu\nu} = (i/2)[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$

Estas pueden agruparse de acuerdo a sus propiedades de simetría:

$$\left. \begin{matrix} \gamma^0 \gamma^\mu \\ \gamma^\mu \gamma^{\nu\lambda} \end{matrix} \right\} \text{reales, simétricas;} \quad \left. \begin{matrix} \gamma^0 \gamma_5 \gamma^\mu \\ \gamma^0 \gamma_5 \gamma^{\nu\lambda} \end{matrix} \right\} \text{imaginarias, antisimétricas.}$$

Acotemos dos propiedades de la matriz γ^0 , para uso subsecuente.

γ^0 es el operador que actúa en la misma forma al operador de paridad de espacio-tiempo, empero en otro espacio.

En nuestro caso γ^0 actúa en el espacio de las gammas i.e. $(\gamma^0)^{-1} \gamma^\mu \gamma^0 = F^\mu_\nu \gamma^\nu$, con $F^\mu_\nu = \text{diag}[1, -1, -1, -1]$, mientras que la transformación de paridad en el espacio-tiempo es: $x^0 \rightarrow x^0$ y $x^k \rightarrow -x^k$.

La segunda propiedad consiste en que γ^0 juega el papel de tensor métrico en el espacio de spin i.e. $L^T \gamma^0 L = \gamma^0$. Por ende en el espacio de los espinores. $\eta \gamma^0 \eta$ es un escalar ⁷. Además notemos que el conmutador de γ^0 con ∇ es cero, donde $\nabla^1 = \nabla^{23}$, $\nabla^2 = \nabla^{31}$, $\nabla^3 = \nabla^{12}$, de modo que podemos usar los números cuánticos de paridad y spin simultáneamente.

Hemos señalado anteriormente que la forma general para $\langle 0_+ 10_- \rangle$ es la exponencial de la forma cuadrática de la fuente. Entonces podríamos preguntarnos si es correcta la siguiente expresión:

$$\langle 0_+ 10_- \rangle \eta = e^{\int (dx) (dx') \eta(x) \gamma^0 \Delta_+(x-x') \eta(x')}$$
, para describir partículas de spin-1/2. Hemos escrito explícitamente a γ^0 en su carácter de tensor métrico.

La respuesta es negativa dado que la fuente η tiene cuatro componentes independientes que describen más grados de libertad que los dos correspondientes para partículas de spin-1/2. Consideramos al número cuántico extra como la paridad intrínseca de la partícula ($\gamma^0 = \pm 1$) y escogemos describir partículas con paridad +1. Luego necesitamos un proyector que nos elimine a los estados con paridad -1. Este es: $(1 + \gamma^0)/2$, en el sistema en reposo. Pero debemos escribir tal proyector en forma covariante y para ello disponemos de los vectores γ^μ y P^μ , cuyo producto $-\gamma^\mu P_\mu$ en el sistema en reposo ($\vec{p} = 0$, $p^0 = m$) reproduce a γ^0

7. A excepción de indicarse lo contrario la n de la izquierda deberá entenderse como η^T

módulo la constante m . Por lo cual nuestra estructura básica será

$$\langle 0_+ | 0_- \rangle = e^{iW} \quad (1.36)$$

$$\text{con } W = (1/2) \int (dx) (dx') \eta(x) \gamma^0 (m - \gamma^\mu (1/i) \partial_\mu) \Delta_+(x-x') \eta(x').$$

Notemos que entre las dos expresiones anteriores existe una redefinición de las fuentes en la cual se absorbe el factor m .

Para asegurarnos de la validez de la forma anterior, debemos verificar la simetría bajo el intercambio de variables de integración $x \leftrightarrow x'$. Por lo cual

$$W = (1/2) \int (dx) (dx') \eta(x') \gamma^0 (m - \gamma^\mu (1/i) \partial'_\mu) \Delta_+(x'-x) \eta(x),$$

transponiendo $\eta(x')$ y $\eta(x)$ y recordando las propiedades sobre la simetría de las matrices γ -s tenemos:

$$\begin{aligned} W &= (1/2) \int (dx) (dx') \eta(x) \gamma^0 (-m + \gamma^\mu \partial_\mu) \Delta_+(x-x') \eta(x') \\ &= -W, \end{aligned}$$

en donde hemos usado que

$\Delta_+(x-x') = \Delta_+(x'-x)$, $\partial'_\mu \Delta_+(x'-x) = -\partial_\mu \Delta_+(x'-x)$, por lo que tendríamos que $W = 0$.

Existen dos posibles escapes a tal contradicción. La primera sería agrandar nuestro espacio introduciendo un número cuántico adicional descrito por una matriz antisimétrica, hermítica, q ;

que además cumpla

$$[q, \gamma_\mu] = 0.$$

Una elección simple sería

$$q = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

En esas condiciones la antisimetría de q se combina con la antisimetría de $\gamma^\mu G_+(x-x')$, donde:

$$G_+(x-x') = (m - \gamma^\mu \partial_\mu / i) \Delta_+(x-x'),$$

para producir $W = W$ al hacer el intercambio $x \leftrightarrow x'$.

Sin embargo es posible verificar en el sistema en reposo que $|<0_+|0_->|^2$ no es necesariamente menor que 1. Esto es porque la matriz q es intrínsecamente indefinida, ya que tiene valores propios ± 1 , y es independiente de las matrices gammas.

Ahora bien, la segunda posibilidad, que resulta ser consistente es modificar el carácter de las fuentes imponiendo que éstas sean números que anticonmutan entre sí, i.e. $\eta_w(x)\eta_w(x') = -\eta_w(x')\eta_w(x)$; éstos elementos constituyen lo que se conoce como números de Grassmann y conmutan con los números usuales. Tienen las siguientes propiedades algebraicas: $(\eta_w^*)^* = \eta_w$, $(a \eta_w + b \eta_w)^* = a^* \eta_w^* + b^* \eta_w^*$, $\lambda(a \eta_w + b \eta_w) = \lambda a \eta_w + \lambda b \eta_w$.

Ahora consideremos el arreglo causal familiar para encontrar

los estados de multipartículas. Sea $\eta = \eta_1 + \eta_2$, donde η_2 es la fuente emisora y η_1 , la fuente detectora. Luego substituyéndolo dentro de nuestra forma fundamental para el vacío (36) tenemos

$$\begin{aligned} \langle 0_+ | 0_- \rangle^\eta &= \exp(i \int \eta_1 \gamma^0 G_{+} \eta_1 / 2 + i \int \eta_2 \gamma^0 G_{+} \eta_2 / 2 + i \int \eta_1 \gamma^0 G_{+} \eta_2). \quad (1.37) \\ &= \langle 0_+ | 0_- \rangle^{\eta_1} \exp(i \int \eta_1 \gamma^0 G_{+} \eta_2) \langle 0_+ | 0_- \rangle^{\eta_2} \end{aligned}$$

Notemos que expresiones bilineales en los números de Grassmann se comportan como números usuales y conmutan con cualquier cosa.

Como de costumbre debemos separar ahora el segundo término en una suma de factores que dependan de 1 y 2. Usando la expresion causal de Δ_+ se obtiene

$$\exp\{i \int (dx)(dx') \eta_1(x) \gamma^0 G_{+}(x-x') \eta_2(x')\} = \exp\{i \int d^4p \eta_1^*(p) \gamma^0 (m - \not{\gamma} p) i \eta_2(p)\} \quad (1.38)$$

donde $\eta(p) = \int (dx) e^{-ipx} \eta(x)$. Como $\eta(p)$ es una combinación lineal de números de Grassmann éste será un número de Grassmann también. Ahora debemos escribir $(m - \not{\gamma} p)$ en forma diádica. Esto se puede hacer trivialmente en el sistema en reposo y entonces el problema será hallar la transformación de Lorentz tal que

$$(m - \not{\gamma} p) = L^{-1} 2m(1 + \not{\gamma}^0 / 2) L \quad (1.39).$$

El proyector $1 + \not{\gamma}^0 / 2$ se puede escribir en forma diádica, utilizando dos eigenvectores ortonormales V_\mp de $\not{\gamma}^0$, i.e.

$$\gamma^0 v_{\nu} = v_{\nu}, \quad v_{\nu}^* v_{\nu} = \delta_{\nu\nu}, \quad \text{como } 1 + \gamma^0/2 = \sum v_{\nu} v_{\nu}^* \quad (1.40)$$

Se puede verificar que la dimensionalidad es dos, tomando la traza de ambos lados de la ecuación anterior.

Ahora bien puede hallarse una elección específica de v_{ν} pidiendo que éste sea eigenvector de alguna componente de \vec{v} (ya que $[\gamma^0, \vec{v}] = 0$), por decir v^3 ,

$$v^3 v_{\nu} = v v_{\nu}, \quad v = \pm 1$$

Haciendo uso de que γ^0 y \vec{v} son imaginarios tenemos

$$\gamma^0 v_{\nu}^* = -v_{\nu}^*, \quad v^3 (v_{\nu}^*)^* = -v (v_{\nu}^*)^*,$$

luego v_{ν}^* es el eigenvector con valor propio -1 . Por lo tanto sustituyendo (40) en (39) tenemos

$$(m - \gamma p) = (2m) \sum_{\nu} L^{-1} v_{\nu} v_{\nu}^* L,$$

$$\gamma^0 (m - \gamma p) = 2m \sum_{\nu} L^T \gamma^0 v_{\nu} (v_{\nu}^*)^* L, \quad 8$$

$$\gamma^0 (m - \gamma p) = 2m \sum L^T \gamma^0 v_{\nu} v_{\nu}^* L$$

$$= 2m \sum L^T v_{\nu} v_{\nu}^* L$$

$$= 2m \sum \gamma^0 U_{p\nu} U_{p\nu}^* \gamma^0 \quad (1.41)$$

Donde hemos definido $\gamma^0 U_{p\nu} = L^T v_{\nu} \implies U_{p\nu}^* \gamma^0 = v_{\nu}^* L$, en lo cual se ha utilizado $\gamma^{0\dagger} = \gamma^0$ y $L^* = L$.

8. recordando el carácter de tensor métrico de γ^0

Entonces de (41) tenemos $(m-\gamma p) = \sum_{\nu} \bar{U}_{p\nu} U_{p\nu}^* \gamma^0$ (1.42)

Ahora encontraremos L. Para ello notamos de (39) que basta que pongamos atención en $-\gamma p = L^{-1} m \gamma^0 L$ que en el sistema donde $\bar{p} = (0, 0, p^3)$, $p^3 = +|p|$ y $p^0 = E$, toma la forma: $L^{-1} \gamma^0 L = \gamma^0 E/m - \gamma^3 |p|/m$. Recordando que en las transformaciones de Lorentz aparecen naturalmente las funciones hiperbólicas $\cosh\theta = E/m$, $\sinh\theta = |p|/m$, tenemos que la expresión anterior se reduce a:

$$L^{-1} \gamma^0 L = \cosh\theta \gamma^0 - \sinh\theta \gamma^3 \quad (1.43)$$

Proponemos $L = \exp(-\theta \gamma^0 \gamma^3 / 2)$, $L^{-1} = \exp(\theta \gamma^0 \gamma^3 / 2)$, para que cumpla la condición anterior. Verifiquemos ésto calculando

$$\begin{aligned} L^{-1} \gamma^0 L &= \exp(\theta \gamma^0 \gamma^3 / 2) \gamma^0 \exp(-\theta \gamma^0 \gamma^3 / 2) = \gamma^0 \exp(-\theta \gamma^0 \gamma^3), \quad 9 \\ &= \gamma^0 (\cosh\theta - \gamma^0 \gamma^3 \sinh\theta) = \gamma^0 \cosh\theta - \gamma^3 \sinh\theta, \end{aligned}$$

lo cual verifica (43). Luego en general tendremos:

$$L = \exp(-\theta p/|p| \cdot (\gamma^0 \gamma^3 / 2)) \quad (1.44)$$

donde $p/|p|$ indica la dirección en que producimos esta transformación de Lorentz.

De este modo, de la ecuación anterior tendremos:

$$U_{p\nu} = \gamma^0 L^{-1} T_{\nu} = \gamma^0 \exp(-\theta p/|p| \cdot (\gamma^0 \gamma^3 / 2)) V_{\nu} \quad (1.45)$$

9. ya que $(\gamma^0 \gamma^3, \gamma^0) = 0$

$$= \exp\left\{(\theta p/|p|) \cdot \gamma^0 \gamma / 2\right\} v_{\nu}$$

Con esto terminamos la construcción de la forma diádica para $(m-\gamma p)/2m$.

Ahora regresando a (38) y sustituyendo en ella (41) tenemos

$$\begin{aligned} & \exp\left\{i \int (dx) (dx') \eta_1(x) \gamma^0 \gamma_+ (x-x') \eta_2(x')\right\} \\ &= \exp\left\{\sum_{p, \nu} (2m) d w_p i \eta_1^*(p) \gamma^0 U_{p\nu} U_{p\nu}^* \gamma^0 i \eta_2(p)\right\} \\ &= \exp\left\{\sum_{p, \nu} i \eta_1^* i \eta_2\right\} \\ &= \prod_{p, \nu} \exp\left\{i \eta_1^* i \eta_2\right\} \\ &= \prod_{p, \nu} \left\{i \eta_1^* i \eta_2\right\}^{n_{p\nu}} / n_{p\nu}! \end{aligned} \quad (1.46)$$

En donde hemos definido

$$n_{1p\nu}^* = \sqrt{2mdw_p} \eta_1^*(p) \gamma^0 U_{p\nu} \quad (1.47)$$

$$n_{2p\nu} = \sqrt{2mdw_p} U_{p\nu}^* \gamma^0 \eta_2(p) \quad (1.48)$$

Hasta el momento todo parece análogo a los casos anteriores, en lo referente a la estadística de Bose-Einstein. Empero, como los $n_{p\nu}$ son números de Grassmann i.e.

$$\{n_{p\nu}, n_{p'\nu'}\} = \{n_{p\nu}, n_{p'\nu'}^*\} = \{n_{p\nu}^*, n_{p'\nu'}\} = 0.$$

Y en particular, $(n_{p\nu})^2 = 0$, $(n_{p\nu}^*)^2 = 0$, por lo que la serie de potencias constará de sólo dos términos: $n_{p\nu} = 0, 1$. Reagrupando los términos de orden mayor, vemos que

$$(i\eta^*_{1p\nu} i\eta_{2p\nu}) = i\eta^*_{1p\nu} i\eta_{2p\nu} i\eta_{1p\nu} i\eta_{2p\nu}$$

$$= -(\eta^*_{1p\nu}) (i\eta_{2p\nu}) = 0, \text{ por lo que toda la serie}$$

termina en $\eta_{p\nu} = 1$.

Reconocemos pues la característica básica de la estadística de Fermi-Dirac, que es el principio de exclusión.

Una fuente fermiónica no puede crear dos partículas con todos los números cuánticos (p, ν en nuestro caso) iguales.

Luego sustituyendo (47) en la amplitud de vacío-vacío (37) tendremos

$$\langle 0_+ | 0_- \rangle^{\eta_1} = \langle 0_+ | 0_- \rangle^{\eta_1} \sum_{\eta_{\kappa}} \prod_{p\nu} (i\eta^*_{1p\nu} i\eta_{2p\nu})^{\eta_{\kappa}} \langle 0_+ | 0_- \rangle^{\eta_2} \quad (1.49)$$

con $\eta_{p\nu} = 0, 1$. Y ésto deseamos compararlo con la amplitud de vacío en términos de los estados de multipartículas.

$$\langle 0_+ | 0_- \rangle^{\eta_1} = \sum \langle 0_+ | \{n\} \rangle^{\eta_1} \langle \{n\} | 0_- \rangle^{\eta_2}.$$

Observamos que para poder comparar ambas ecuaciones debemos separar la producción 2 de la detección 1 en (49).

Esto puede realizarse usando las propiedades algebraicas de las fuentes ya que cada término de esta estructura puede ser factorizado en dos partes, una a la izquierda encontrándose todas las fuentes de detección 1 y la otra a la derecha con fuentes de producción 2.

Consideremos el ejemplo de dos estados a y b para ilustrar el

procedimiento

$$i\eta_{1a}^* i\eta_{2a} i\eta_{1b}^* i\eta_{2b} = (i\eta_{1b}^* i\eta_{1a}^*) (i\eta_{2a} i\eta_{2b}),$$

por lo cual en general tendremos

$$\prod_{\rho\sigma} (i\eta_{1\rho\sigma}^* i\eta_{2\rho\sigma})^{\eta_{\rho\sigma}} = \prod_{\rho\sigma}^T (i\eta_{1\rho\sigma})^{\eta_{\rho\sigma}} \prod_{\rho\sigma} (i\eta_{2\rho\sigma})^{\eta_{\rho\sigma}},$$

donde \prod^T indica el orden transpuesto al orden arbitrario escogido en \prod . Luego al sustituir este resultado en (48) y al comparar con (49) encontramos:

$$\langle \{n_{p\sigma}\} | 0_- \rangle^{\eta} = \langle 0_+ | 0_- \rangle^{\eta} \prod_{\rho\sigma} (i\eta_{\rho\sigma})^{\eta_{\rho\sigma}} \quad (1.50)$$

$$\langle 0_+ | \{n_{p\sigma}\} \rangle^{\eta} = \langle 0_+ | 0_- \rangle^{\eta} \prod_{\rho\sigma}^T (i\eta_{\rho\sigma}^*)^{\eta_{\rho\sigma}} \quad (1.51)$$

donde hemos suprimido el factor $\eta_{p\sigma}!$, que siempre es uno.

Notemos que las amplitudes anteriores son en general números de Grassmann. Queremos mantener la propiedad que se da en Mecánica Cuántica: $\langle a|b \rangle = \langle b|a \rangle^*$. Esto traerá consecuencias importantes como veremos del análisis de la conservación de la probabilidad.

Dos formas alternativas que en el caso de spin-0 eran trivialmente equivalentes, son

$$\sum \langle 0_+ | \{n\} \rangle \langle 0_+ | \{n\} \rangle^* = \sum \langle 0_+ | \{n\} \rangle \langle \{n\} | 0_+ \rangle = \langle 0_+ | 0_+ \rangle = 1 \quad (1.52)$$

$$\sum \langle \{n\} | 0_- \rangle^* \langle \{n\} | 0_- \rangle = \sum \langle 0_- | \{n\} \rangle \langle \{n\} | 0_- \rangle = \langle 0_- | 0_- \rangle = 1$$

que respectivamente se reducen a

$$\sum_{\eta} \prod_{p \neq \eta}^T (i\eta_{p\nu}^*)^{\eta} [\prod_{p \neq \eta}^T (i\eta_{p\nu}^*)^{\eta}]^* | \langle 0_+ | 0_- \rangle |^2 = 1$$

$$\sum_{\eta} [\prod_{p \neq \eta} (i\eta_{p\nu})^{\eta}]^* \prod_{p \neq \eta} (i\eta_{p\nu})^{\eta} | \langle 0_+ | 0_- \rangle |^2 = 1$$

Considerando sólo dos estados a y b, vemos de las expresiones anteriores

$$| \langle 0_+ | 0_- \rangle |^{-2} = i\eta_a^* i\eta_b (i\eta_a^* i\eta_b^*)^*$$

$$| \langle 0_+ | 0_- \rangle |^2 = (i\eta_b i\eta_a)^* i\eta_b i\eta_a$$

Las cuales son consistentes si y sólo si

$$(\eta_a \eta_b)^* = \eta_b^* \eta_a^* \quad (1.53)$$

Es decir la conjugación transpone el orden en los números de Grassmann. Es de hacer notar que de esta manera la estructura $\eta^* \eta$ es real, ya que $(\eta^* \eta)^* = \eta^* (\eta^*)^* = \eta^* \eta$. Con la propiedad (53), cualquiera de las formas (52) se escribe entonces como

$$| \langle 0_+ | 0_- \rangle |^{-2} = \sum_{\eta} \prod_{p \neq \eta}^T (\eta_{p\nu}^*)^{\eta} \prod_{p \neq \eta} (\eta_{p\nu})^{\eta} \quad \text{====>}$$

$$| \langle 0_+ | 0_- \rangle |^{-2} = \sum_{\eta} \prod_{p \neq \eta} (\eta_{p\nu}^* \eta_{p\nu})^{\eta} = \exp(\sum_{p \neq \eta} \eta_{p\nu}^* \eta_{p\nu}). \quad (1.54)$$

Ahora verifiquemos directamente la ecuación anterior.

$$| \langle 0_+ | 0_- \rangle |^{-2} = e^{iW} e^{-iW^*} = e^{-2 \text{Im } W} \quad (1.55)$$

con $W = (1/2) \int \eta(x) \gamma^0 G(x-x') \eta(x')$. Como $\eta(x)$ es real, entonces

$$[\eta(x) \gamma^0 \eta(x')]^* = [\eta_w(x) \eta_w(x')]^* \gamma_{ww}^{0*} = \eta_w(x') \eta_w(x) \gamma_{ww}^{0*}$$

$$= -\eta_w(x) \gamma^{\alpha*} \eta_w(x') = -\eta(x) \gamma^{\alpha*} \eta(x') = \eta(x) \gamma^{\alpha} \eta(x') \dots$$

Análogamente tenemos $[\eta(x) \gamma^{\alpha} \gamma^{\mu} \eta(x')]^* = \eta(x) \gamma^{\alpha} \gamma^{\mu} \eta(x')$.

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{Im} W &= \int \eta(x) \gamma^{\alpha} (m - \gamma^{\mu} \partial_{\mu} / i) \operatorname{Im} \{ \Delta_+(x-x') \} \eta(x') \\ &= \operatorname{Re} \int \eta(x) \gamma^{\alpha} (m - \gamma^{\mu} \partial_{\mu} / i) e^{i p (x-x')} \eta(x') (dx) (dx') (dw_p) \\ &= \operatorname{Re} \int \eta^*(p) \gamma^{\alpha} (m - \gamma^{\rho} p) \eta(p) (dw_p) = \operatorname{Re} \sum_{\rho \neq \sigma} (2m) dw_p \eta^*(p) \gamma^{\alpha} U_{\rho \sigma} U_{\rho \sigma}^* \gamma^{\alpha} \eta(p) \\ &= \operatorname{Re} \sum_{\rho \neq \sigma} \eta^*_{\rho \sigma} \eta_{\rho \sigma} = \sum_{\rho \neq \sigma} \eta^*_{\rho \sigma} \eta_{\rho \sigma}. \end{aligned}$$

Por lo cual sustituyendo este resultado en (53) tenemos

$| \langle 0_+ | 0_- \rangle |^2 = \exp(- \sum_{\rho \neq \sigma} \eta^*_{\rho \sigma} \eta_{\rho \sigma})$, que verifica (54), estableciendo así la consistencia de la formulación.

Capítulo 2

CAMPOS Y ACCION

2.1 SPIN=0

Hasta el momento nuestra amplitud de vacío-vacío W se encuentra escrita en la forma de acción a distancia i.e.:

$$W = (1/2) \int K \Delta K \quad (2.1)$$

Nos interesa tener una formulación local de la teoría y con este objeto introducimos la idea del campo producido por una fuente. Procediendo en completa analogía con electrostática definimos el campo, como la respuesta de $W(K)$ a una fuente prueba $\delta K(x)$ i.e.

$$\delta W(K) = \int \delta K(x) \phi(x) \quad (2.2)$$

Luego variemos (1) para que al comparar con (2) encontremos ϕ .

$$\begin{aligned} \delta W &= (1/2) \int \delta K(x) \Delta_+(x-x') K(x') + (1/2) \int K(x) \Delta_+(x-x') \delta K(x') \\ &= \int \delta K(x) \Delta_+(x-x') K(x'), \text{ por lo tanto} \end{aligned}$$

$$\phi(x) = \int (dx') \Delta_+(x-x') K(x') \quad (2.3)$$

Emplearemos la notación $\phi = \Delta K$. Dado que $\Delta_+(x-x')$ es la función de Green del operador $(m^2 - \partial^2)$, entonces vemos que ϕ satisface:

$$(m^2 - \partial^2)\phi(x) = K(x) \quad (2.4)$$

que es una ecuación de Klein-Gordon inhomogénea

Entonces de (3) y (4) podemos escribir a W como

$$W = (1/2) \int (dx) K(x) \phi(x) \quad \text{ó} \quad W = (1/2) \int (dx) \phi(x) (m^2 - \partial^2) \phi(x).$$

Sin embargo existe una forma más conveniente para escribir a W que será estacionaria respecto a las variaciones de los campos

$$\begin{aligned} W &= 2W - W = \int (dx) [K(x) \phi(x) - \phi(x) (m^2 - \partial^2) \phi(x) / 2] \\ &= \int (dx) [K(x) \phi(x) - L(\phi(x))], \quad \text{con } L = -\phi(x) (m^2 - \partial^2) \phi(x) / 2. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Observamos que $W(K, \phi)$ tiene la forma de una acción y L es la función lagrangiana. En efecto calculemos el cambio de W a partir de (5)

$\delta W = \int (dx) \{ \delta K \phi + \delta_\phi [K \phi + L(\phi)] \}$, la cual al comparar con (2) tenemos:

$$\delta_\phi W = \int (dx) \delta_\phi [K \phi + L(\phi)] = 0 \quad (2.6)$$

que es el enunciado del principio de acción.

Las derivadas totales que aparecen en el lagrangiano producen

una dependencia en los extremos ($t \rightarrow \pm\infty, |x| \rightarrow \pm\infty$) al ser integradas en W . Esto por su parte produce funciones constantes en la amplitud de vacío, las cuales no tienen relevancia física.

Ahora bien, una forma más simétrica de presentar al lagrangiano de una partícula libre de spin-0 es:

$$L = -(\partial_\mu \phi)^\mu \phi + m^2 \phi^2 / 2 \quad (2.7)$$

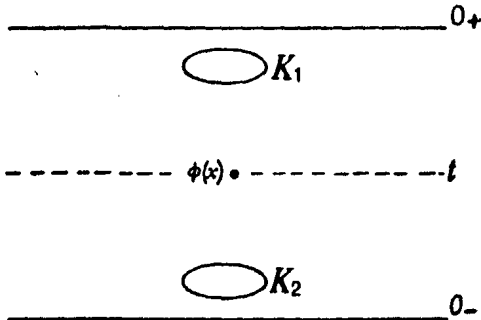
que difiere del anterior por una derivada total. Utilizando este lagrangiano, junto con (6), recuperamos las ecuaciones de movimiento (4).

$$\begin{aligned} 0 &= \delta_\phi \int (dx) (K\phi - (\partial_\mu \phi)^\mu \phi + m^2 \phi^2) \\ &= \int (dx) (K\delta\phi - \partial_\mu \phi^\mu \delta\phi + m^2 \phi \delta\phi) \\ &= \int (dx) \delta\phi(x) (K + \partial^2 \phi - m^2 \phi), \text{ donde hemos integrado por partes el} \\ &\text{segundo término. Debido a la arbitrariedad de } \delta\phi(x) \text{ tenemos} \\ &K = (m^2 - \partial^2)\phi, \text{ tal como afirmamos.} \end{aligned}$$

Ahora queremos calcular el campo de spin-0 a un tiempo intermedio t i.e. después de que actúa la fuente de creación y antes de actuar la fuente de detección.

Para ello consideremos el arreglo causal usual tal y como se muestra en la siguiente figura

$$K = K_1 + K_2, \quad \phi = \Delta K = \Delta K_1 + \Delta K_2 = \phi_1 + \phi_2 \quad (2.8)$$



$$\phi_1 = \Delta_{K_1} = \int (dx') \Delta_+(x-x') K_1(x') = \int (dx') K_1(x') \Delta_+(x-x'); \quad t' > t.$$

Empleando la forma causal de Δ_+ tenemos

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \int (dx') i d\omega_p K_1(x') e^{ip(x'-x)} = \sum i d\omega_p K_1(p)^* e^{-ipx} \\ &= \sum_p i K_{1p}^* \phi_p, \quad \text{con } \phi_p = \int d\omega_p e^{-ipx}, \end{aligned}$$

De manera análoga para $\phi_2 = \Delta_{K_2}$, obtenemos

$$\phi_2 = \sum_p \phi_p^* i K_{2p},$$

luego, el campo total de spin-0, para un tiempo intermedio es:

$$\phi(x) = \sum_p (i K_{1p}^* \phi_p + \phi_p^* i K_{2p}),$$

el cual representa una medida de la perturbación producida en x debido a la fuente $K=K_1+K_2$.

Queremos ahora dotar a las partículas de spin-0 de un número cuántico adicional, la carga eléctrica, para ello introducimos una simetría adicional interna. Consideremos una fuente real en un espacio de dos dimensiones (espacio de carga), que

transformará como escalar bajo transformaciones de Lorentz.

$$\text{Tomamos para } W, W = (1/2) (K_1 \Delta + K_2 \Delta) \quad (2.9)$$

que abreviamos $W = (1/2) K \Delta K$,¹⁰ donde

$$\Delta = \begin{pmatrix} \Delta & 0 \\ 0 & \Delta \end{pmatrix}, \quad K(x) = \begin{pmatrix} K_i(x) \\ K_j(x) \end{pmatrix}$$

Notemos que (8) es invariante bajo la transformación ($\varphi = \text{cte}$)

$$K_i \longrightarrow K_i \cos \varphi + K_j \sin \varphi$$

(2.10)

$$K_j \longrightarrow -K_i \sin \varphi + K_j \cos \varphi,$$

en la cual se mantiene la naturaleza real de las fuentes.

$$\text{En forma matricial escribimos (9) como } K \longrightarrow e^{iq\varphi} K \quad (2.10')$$

donde iq debe ser una matriz real por lo cual q es imaginaria.

Para obtener la forma de q debe considerarse una transformación infinitesimal en (9) y (10). Obteniendo

$$q = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.11)$$

que satisface $q^2 = -1$, $q = q^\dagger$, $q^T = -q$, $q^* = -q$. De este modo verificamos que $e^{iq\varphi} = \cos \varphi + iq \sin \varphi$. Notamos que la invariancia bajo (9) es

10. Notación: K a la izquierda es K^T

válida sólo si φ es independiente de la posición.

La matriz q que genera las transformaciones de invariancia en el espacio de carga, será identificada como la matriz de carga.

Tenemos entonces dos estados de carga correspondientes a los autovalores $+1$ y -1 . Ambos estados tienen la misma masa y corresponden a la descripción partícula-antipartícula. La matriz q tiene un conjunto completo de autovectores U_q , tal que

$$qU_q = q'U_{q'}, \text{ con } q' = \pm 1, U_q^* \cdot U_q = \delta_{qq'}, \sum_{q'=\pm 1} U_{q'} \cdot U_{q'}^* = 1. \quad (2.12)$$

En particular tenemos

$$U_+ = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \quad U_- = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix},$$

por lo cual $U_q^* = U_{-q}$.

Teniendo en cuenta nuestra notación, y c.f. ecs. (3), (2)

definimos

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}.$$

Queremos construir el campo en un punto x entre la fuente de creación y la de detección de partículas, entonces

$$\phi = \phi_1 + \phi_2, \quad \phi_1(x) = \int \Delta_+(x-x') K_1(x') (dx'),$$

$$\phi_2(x) = \int \Delta_+(x-x') K_2(x') (dx'), \quad \text{donde } t_1 < t_x < t_2. \quad \text{Utilizando la}$$

forma causal de Δ_+ tenemos que $\phi_2(x) = \sum_p idw_p \exp(ipx) K_2(p)$, la cual se diferencia del caso no cargado, en que $K_2(p)$ y por ende $\phi_2(x)$ son vectores columnas en el espacio de carga.

En la expresión para el campo nos interesa escribir explícitamente una suma sobre los números cuánticos que caracterizan al sistema. p, q' en este caso. Para ello introducimos la unidad en la forma $K_2(p) = \sum U_q U_q^* K_2(p)$, de manera que $\phi_2(x) = \sum_{p,q'} \sqrt{dw_p} i K_{2pq} U_q e^{ipx}$.

Los subíndices 2 y 1 denotarán siempre, como hasta ahora, creación y detección respectivamente.

Siempre podemos escribir las cantidades uno a la izquierda de modo que éstas siempre estarán transpuestas y las dos a la derecha por lo que en éste entendido tenemos

$$\phi_1^T = \phi_1 = \int K_1(x') \Delta_+(x'-x) (dx') = \sum_p idw_p e^{-ipx} K_1^*(p),$$

e insertando nuevamente la unidad, tenemos

$$\phi_1 = \sum_{p,q'} idw_p e^{-ipx} K_1^*(p) U_q U_q^* = \sum_{p,q'} \sqrt{dw_p} i K_{1pq}^* e^{-ipx} U_q^*,$$

donde recordamos que ϕ_1 y U_q^* son realmente vectores filas transpuestos.

Ya que encontramos una completa analogía en las estructuras entre el caso de spin-0 no cargada y la cargada, entonces tendremos que las ecs. de movimiento serán.

$$(\square^2 - d^2)\phi(x) = K(x) \quad (2.13)$$

La acción, que reproduce las anteriores ecs. es

$$W = \int (dx) \{ K\phi - [d_\mu \phi d^\mu + m^2 \phi\phi] / 2 \} \quad (2.14)$$

2.2. EL FOTON

Partimos de

$$W = (1/2) \int (dx) (dx') J^\mu(x) D_+(x-x') J_\mu(x'), \quad \partial_\mu J^\mu(x) = 0 \quad (2.15)$$

Y como de costumbre definimos $A^\mu(x)$ como la respuesta a

$$\delta_J W = \int \delta J^\mu(x) A_\mu(x) (dx) \quad (2.16),$$

donde siempre tenemos que respetar la conservación

$$\partial_\mu \delta J^\mu(x) = 0 \quad (2.17)$$

Esta relación introduce una arbitrariedad en la definición de A_μ , ya que $A_\mu(x) + \partial_\mu \lambda(x)$, y $A_\mu(x)$, producen el mismo resultado en (16), como se ve de integrar por partes y usar (17) en el término adicional. Así hallamos

$$A_\mu(x) = (dx') D_+(x-x') J_\mu(x') + \partial_\mu \lambda(x) \quad (2.18),$$

donde $\lambda(x)$ es un escalar arbitrario y a $\partial_\mu \lambda(x)$ se le llama el término de gauge o norma del campo A_μ .

De (18) encontramos las ecs. de movimiento del campo. Para lo cual recordamos que $-\partial^2 D_+(x-x') = \delta^4(x-x')$.

Luego entonces obtenemos

$$-\partial^2 A_\mu(x) = J_\mu(x) + \partial_\mu \partial^2 \lambda(x). \quad (2.19)$$

Ahora bien, tomando el gradiente en (18) obtenemos

$$\begin{aligned} \partial^\mu A_\mu(x) &= \int (dx') \partial^\mu D_+(x-x') J_\mu(x') + \partial^2 \lambda(x) \\ &= \int -\partial^\mu D_+(x-x') J_\mu(x') + \partial^2 \lambda(x) \\ &= \int (dx') D_+(x-x') \partial^\mu J_\mu(x') + \partial^2 \lambda(x), \end{aligned}$$

por lo tanto $\partial^\mu A_\mu(x) = \partial^2 \lambda(x)$.

Por lo cual sustituyendo este resultado en (19) obtenemos:

$$\partial^\nu (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) = J_\mu. \quad (2.20)$$

Con la definición de intensidad de campo,

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = -F_{\nu\mu}.$$

obtenemos al sustituir en (20), la ecuación de movimiento siguiente

$$\partial^\mu F_{\mu\nu} = J_\nu \quad (2.21),$$

que reconocemos como las ecs. de Maxwell para el campo electromagnético con fuentes. Observamos:

1. $F_{\mu\nu}$ es invariante de norma.

2. De (21) y de que $F_{\mu\nu}$ es antisimétrico, recuperamos $\partial^\mu J_\mu = 0$.

La conexión con los campos eléctrico \vec{E} y magnético \vec{H} es

$F^{0k} = E^k$, $F^{kl} = c^{klm} H^m$, e identificamos a J^μ como la corriente electromagnética.

Ahora bien usando (18) y (21) en (15) eliminamos las fuentes, para escribir la acción en función de los campos,

$$\begin{aligned} W &= (1/2) \int (dx) \partial^\nu F^\mu{}_\nu A_\mu = -(1/2) \int (dx) F_{\mu\nu} \partial^\nu A^\mu \\ &= -(1/4) \int (dx) F_{\mu\nu} (\partial^\nu A^\mu - \partial^\mu A^\nu) \\ &= (1/4) \int (dx) F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}. \end{aligned}$$

en donde hemos integrado por partes y usado (15).

Sin embargo, existe una forma más conveniente de escribir W , siendo ésta estacionaria bajo variaciones de los campos A_μ , produciendo así las ecs. de movimiento (21). Esta es

$$W = 2W(J, A) - W(F) = \int (dx) \{ J^\mu(x) A_\mu - F_{\mu\nu}(x) F^{\mu\nu}(x) / 4 \}. \quad (2.22)$$

La acción anterior es invariante de norma i.e. bajo $A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \lambda(x)$, en virtud de la conservación de la fuente.

Ahora calculemos el campo de spin-1 sin masa, para un punto intermedio entre la fuente de creación y detección.

$$J_\mu = J_{\mu 1} + J_{\mu 2}, \quad A_\mu = D_+ J_\mu = D_+ J_{\mu 1} + D_+ J_{\mu 2}, \text{ luego } A_\mu = A_{\mu 1} + A_{\mu 2}.$$

Empleando la forma causal de D_+ tenemos

$$A_{\mu 1} = \int (dx') D_+(x-x') J_{\mu 1}(x') = \int (dx') J_{\mu 1}(x') D_+(x'-x), \text{ ya que } t' > t$$

$$= \int (dx') idw_p J_{\mu 1}(x') e^{ip(x'-x)}$$

$$= \sum idw_p J_{\mu 1}^*(p) e^{-ipx}.$$

Recordando que los vectores de polarización cumplen con

$$e_{\rho\lambda}^\mu e_{\mu\rho\lambda'}^* = \delta_{\lambda\lambda'} \implies \sum e_{\rho\lambda}^\mu e_{\mu\rho\lambda}^* = 1.$$

Luego introduciendo esta a la derecha de $J_{\mu 1}^*$, obtenemos

$$A_{\mu 1}(x) = \sum iJ_{1\rho\lambda}^* A_{\mu\rho\lambda}^*(x), \text{ con } A_{\mu\rho\lambda}^* = \sqrt{dw_p} e_{\mu\rho\lambda}^* e^{-ipx}.$$

De manera análoga usando $A_{\mu 2} = D_+ J_{\mu 2}$ obtenemos

$$A_{\mu 2}(x) = \sum A_{\mu\rho\lambda}(x) iJ_{2\rho\lambda}, \text{ por lo tanto}$$

$$A_\mu(x) = \sum (iJ_{1\rho\lambda}^* A_{\mu\rho\lambda}^* + A_{\mu\rho\lambda}(x) iJ_{2\rho\lambda}).$$

2.3 SPIN-1/2

Ahora deseamos hacerlo análogo a las secciones anteriores para el caso de spin-1/2 i.e. encontrar la acción y los campos que describen partículas de spin-1/2. Nuestro punto de partida es.

$$W = (1/2) \int (dx)(dx') \eta(x) \gamma^0 G(x-x') \eta(x'),$$

donde como sabemos G es el propagador o función de Green para partículas libres de spin-1/2, dado por

$$G(x-x') = (m-\gamma^\mu [(1/i)\partial_\mu]) \Delta_+(x-x').$$

Dicho propagador tiene las siguientes propiedades

$$(m-\gamma^\mu [(1/i)\partial_\mu]) G(x-x') = \delta(x-x'), \quad (2.23)$$

$$G(x-x') = 1/(2\pi)^4 \int dp (m-\gamma p) e^{ip(x-x')} / p^2 + m^2 - i\epsilon, \quad (2.24)$$

$$G(x-x') = \int idw_p (m-\gamma p) e^{ip(x-x')}, \quad x^0 > x'^0 \text{ (forma causal)} \quad (2.25)$$

$$\begin{aligned} [\gamma^0 G_+(x'-x)]^T &= \gamma^0 m - \gamma^0 \gamma^\mu (1/i) \partial_\mu^T \Delta_+(x'-x) \\ &= -[\gamma^0 G_+(x-x')]. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Hemos usado para esta última las propiedades siguientes.

$\partial'_\mu = -\partial_\mu$, $\gamma^0 \gamma^\mu$ es simétrica, γ^0 es antisimétrica.

Definamos el campo de la manera usual

$$\delta W = \delta \int \eta(x) \delta^0 \Psi(x) (dx). \quad (2.27)$$

De esta manera resulta

$$\Psi(x) = \int G(x-x') \eta(x') (dx') \quad (2.28)$$

$$\Psi(x) \delta^0 = \int (dx') \eta(x') \delta^0 G(x'-x).$$

Luego utilizando (23) en (28) obtenemos la ecuación de movimiento

$$(m + \delta^{\mu} (1/i) \partial_{\mu}) \Psi(x) = \eta(x) \quad (2.29)$$

Ahora podemos escribir la acción como

$$W(\eta) = (1/2) \int \eta \delta^0 G \eta, \quad W(\eta, \Psi) = (1/2) \int \eta \delta^0 \Psi = (1/2) \int \Psi \delta^0 \eta$$

$W(\Psi) = (1/2) \int \Psi \delta^0 (m + \delta^{\mu} (1/i) \partial_{\mu}) \Psi$. Pero sin embargo, si escribimos

$$W = 2W(\eta, \Psi) - W(\Psi) = \int \eta \delta^0 \Psi - (1/2) \int \Psi \delta^0 (m + \delta^{\mu} (1/i) \partial_{\mu}) \Psi \quad (2.30),$$

ésta tiene las propiedades de ser estacionaria.

Considerando el arreglo causal usual tenemos

$\eta = \eta_1 + \eta_2$ y como $\Psi = G\eta = G\eta_1 + G\eta_2$, por lo tanto $\Psi = \Psi_1 + \Psi_2$ con

$$\Psi_2(x) = \int (dx') G(x-x') \eta_2(x'), \quad x^0 > x'^0$$

$$\Psi_1(x) \delta^0 = \int (dx') \eta_1(x') \delta^0 G(x'-x), \quad x^0 > x'^0$$

Introduciendo la forma causal de G obtenemos

$$\Psi_2(x) = \sum \Psi_{pV} i \eta_{2pV}, \text{ con } \Psi_{pV} = \sqrt{2mdw} U_{pV} e^{ipx}$$

$$\Psi_1(x) \delta^0 = \sum i \eta_{1pV}^* \Psi_{pV}^* \delta^0 \text{ con } \Psi_{pV}^* \delta^0 = \sqrt{2mdw} U_{pV}^* e^{-ipx}.$$

Capítulo 3

CANTIDADES CONSERVADAS

Como hemos visto del capítulo anterior Teoría de Fuentes puede ser formulada desde un punto de vista análogo al de Teoría Clásica de Campos, donde se introduce una densidad Lagrangiana para describir al sistema. Por lo cual resulta obvio preguntarse (al igual que en toda Teoría de Campos) bajo que simetrías los lagrangianos encontrados en esta nueva teoría resultarán invariantes y por ende que cantidad será la conservada. Luego lo que pretendemos hacer es teorema de Noether para Teoría de Fuentes.

Para hacer ésto de una manera metódica empezaremos por ver cómo se encuentra la cantidad conservada asociada a una simetría dada. Por simplicidad y claridad tanto en álgebra como en concepto nos remitiremos al caso de partículas "cargadas de spin-0".

La amplitud $\langle 0_+ | 0_- \rangle^S$ es inalterada por transformaciones globales de rotación y translación. Cuando agrandamos nuestro espacio para considerar otro nuevo número cuántico al que llamamos "carga" y rotamos en tal espacio las fuentes

transformadas se encuentran sólo multiplicadas por un factor de fase de las no transformadas i.e. $k_{pq} \rightarrow e^{iq'\phi} k_{pq}$, siendo tanto q' como ϕ constantes. La información de las cantidades conservadas se obtendrá rompiendo la simetría y ésto se hará a través de la transformación no homogénea (local) de las diferentes partes de la distribución de fuentes. Por lo cual translaciones relativas dan información acerca del momento-energía, mientras que la rotación relativa la dará acerca del momento angular y como veremos la rotación relativa en el espacio de "carga" lo hará de la carga eléctrica total.

Estamos interesados fundamentalmente en hallar la corriente conservada asociada a transformaciones de supersimetría en la acción de partículas de spin-1/2 y spin-1, ambas sin masa, sin términos de interacción. También nos preocuparemos de la interpretación de dicha corriente.

3.1 PARTICULAS CARGADAS DE SPIN-0

Recordemos del capítulo anterior que la acción para partículas cargadas de spin-0 es

$$W = \int dx \{ K^T \phi - 1/2 (\partial^\mu \phi^T \partial_\mu \phi + m^2 \phi^T \phi) \} \quad (3.1)$$

en donde $K = \begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \end{pmatrix}$ y $\phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}$.

Ahora bien W es invariante bajo rotaciones en 1, 2 i.e.

$$\begin{aligned} K_1 &= K_1 \cos\theta + K_2 \operatorname{sen}\theta & \phi_1 &= \phi_1 \cos\theta + \phi_2 \operatorname{sen}\theta \\ K_2 &= -K_1 \operatorname{sen}\theta + K_2 \cos\theta & \phi_2 &= -\phi_1 \operatorname{sen}\theta + \phi_2 \cos\theta \end{aligned}$$

que podemos escribir en forma matricial, utilizando para ello las propiedades de q, como

$$K' = e^{iq\theta} K, \text{ y } \phi' = e^{iq\theta} \phi \quad (3.2)$$

Debemos tener presente que la matriz de carga q cumple con $q^T = -q$, $q^2 = 1$, $q = q^\dagger$ y $q^* = -q$. Así como la notación del capítulo anterior

$$K' \phi' = K'^T \phi' = K e^{-iq\theta} e^{iq\theta} \phi = K \phi.$$

Las transformaciones infinitesimales que producen (2) son

$$\begin{aligned} \delta\phi &= iq\phi\delta\theta \implies \delta\phi^T = -\phi iq\delta\theta \\ \delta_K &= iqK\delta\theta \implies \delta_K^T = -Kiq\delta\theta \end{aligned} \quad \text{con } \delta\theta = \text{cte.} \quad (3.3)$$

Ahora verificamos explícitamente la invariancia de (1)

$$\delta_{(K\phi)} = \delta_K\phi + K\delta\phi = -iKq\phi\delta\theta + Kiq\phi\delta\theta = 0 \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} \delta_{(\partial^\mu\phi\partial_\mu\phi)} &= 2\partial^\mu\phi\partial_\mu\delta\phi = 2i\delta\theta\partial^\mu\phi q\partial_\mu\phi \\ &= 2i\delta\theta\partial_\mu\phi q\partial^\mu\phi = -2i\delta\theta\partial^\mu\phi q\partial_\mu\phi = 0 \quad (3.5) \end{aligned}$$

$$\delta_{(\phi\phi)} = (\delta\phi)\phi + \phi(\delta\phi) = -i\phi q\phi\delta\theta + \phi iq\phi\delta\theta = 0 \quad (3.6)$$

$$\text{Aún más } \phi q\phi = 0 \quad (3.7)$$

Por lo tanto $\delta W = 0$ bajo (3).

Para obtener información acerca de la cantidad conservada asociada a (3) debemos romper la simetría [o dicho de otra manera, la invariancia de (1) bajo (3)]. Consideremos que sea una función de la posición i.e. $\delta\theta \rightarrow \delta\theta(x)$. (Esencialmente estamos realizando Teorema de Noether para Teoría de Fuentes) Por lo tanto al variar (1) tendremos:

$$\delta W = \int dx [-iKq\delta\theta(x)\phi + iKq\phi\delta\theta(x)\phi - 1/2(2\partial^\mu\phi\partial_\mu\delta\phi + 2m^2\phi\delta\phi)]$$

Anulándose como antes los dos primeros términos, así como el último (cf. ecs. (4) y (7)), quedando solamente

$$\begin{aligned}
 \delta W &= \int dx (-\partial^\mu \phi) \partial_\mu \delta\theta(x) = \int dx -\partial^\mu \phi (i q \phi \partial_\mu \delta\theta(x) + i q \delta\theta(x) \partial_\mu \phi) \\
 &= \int dx (-\partial_\mu \delta\theta(x) [\cancel{\partial^\mu \phi} i q \phi - i \delta\theta(x) [\cancel{\partial^\mu \phi} i q \phi]_\mu])^{11} \\
 &= - \int dx \partial_\mu \delta\theta(x) [\partial^\mu \phi] i q \phi \quad (3.8)
 \end{aligned}$$

Que como observamos, se reduce a cero, cuando $\delta\theta = \text{cte.}$ ya que $\partial_\mu \delta\theta(x) = 0.$

Definimos la corriente J^μ asociada a la invariancia bajo (3) de igual manera a como lo hicimos en la sección anterior i.e. como la respuesta de δW al hacer $\delta\theta \rightarrow \delta\theta(x)$, o sea

$$\delta W = - \int dx \partial_\mu \delta\theta(x) J^\mu(x) \quad (3.9)$$

por lo cual al comparar con (8) tenemos

$$J^\mu(x) = (\partial^\mu \phi) i q \phi. \quad (3.10)$$

Ahora deseamos encontrar la ecuación de movimiento para J^μ y para esto recordemos la ec. de movimiento $(m^2 - \partial^2)\phi = K.$

$$\begin{aligned}
 \text{Luego } \partial_\mu J^\mu &= \partial_\mu (\partial^\mu \phi i q \phi) = \partial^2 \phi i q \phi + \cancel{\partial^\mu \phi} i q \partial_\mu \phi \\
 &= (-K + m^2 \phi) i q \phi = -K i q \phi + i m^2 \phi i q \phi,^{12} \text{ por lo tanto}
 \end{aligned}$$

$$\partial_\mu J^\mu = -K i q \phi. \quad (3.11)$$

Una forma de verificar este resultado es aplicar el principio

11. c.f ec (5)

12. c.f ecs. (5), (7)

de acción tal como se hizo en la sección anterior.

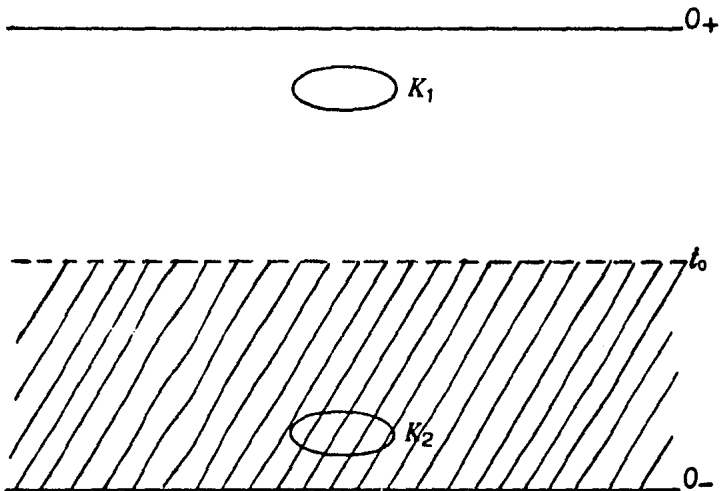
Hemos construido un cuadrivector J^μ en función del campo con carga de spin-0, el cual es conservado fuera de las fuentes i.e. $\partial_\mu J^\mu = 0$, cuando $K(x) = 0$.

Como es bien sabido de Teoría Clásica de Campos la cantidad conservada es

$$\int J^0 dx,$$

la cual para el caso de simetría interna, c.f. ec. (2), es llamada la carga.

Ahora obtendremos ésta al tiempo t_0 a partir de integrar (11) y de considerar el arreglo causal usual. La integración se llevará a cabo en la región marcada R la cual sólo incluye K_2 , tal como lo muestra el siguiente diagrama.



$$\text{Por lo tanto } \int_R d_\mu J^\mu(dx) = \int \phi i q K(dx).$$

Aplicando el Teorema de Gauss al lado izquierdo y tomando superficies temporaloides i.e. volúmenes en tres dimensiones en t_0 y 0_- tenemos,

$$\int J^0(\vec{x}, t_0) d\vec{x} - \int J^0(\vec{x}, t) d\vec{x} \Big|_{0_-} = \int \phi i q K_2(x) dx.$$

Para calcular ahora el lado derecho, recordemos que

$$0 = \phi_1 + \phi_2 = \Delta K_1 + \Delta K_2, \text{ por lo cual}$$

$$\int J^0(\vec{x}, t_0) d\vec{x} = \int (dx)(dx') \langle K_1(x) \Delta_+(x-x') i q K_2(x') + K_2(x) \Delta_+(x-x') i q K_2(x') \rangle$$

$$\text{luego } \int J^0(\vec{x}, t_0) d\vec{x} = \int K_1(x) \Delta_+(x-x') i q K_2(x') (dx)(dx') \quad (3.12),$$

$$\text{ya que } \int (dx)(dx') K_2(x) i q \Delta_+(x-x') K_2(x')$$

$$= \int (dx)(dx') \Delta_+(x-x') -K_2(x') i q K_2(x)$$

$$= -\int (dx)(dx') \Delta_+(x'-x) K_2(x) i q K_2(x')$$

$$= -\int (dx)(dx') \Delta_+(x-x') K_2(x) i q K_2(x') = 0. (3.13)$$

Donde hemos usado $K_2(x') i q K_2(x) = K_2^T(x') i q K_2(x) = K_2^T(x) i q K_2(x') = -K_2^T(x) i q K_2(x') = -K_2(x) i q K_2(x')$, además de $\Delta_+(x-x') = \Delta_+(x'-x)$.

Dado que tenemos un arreglo causal entonces utilizamos la forma causal para $\Delta_+(x-x')$ en (12) por lo que

$$\int J^0(x, t_0) dx = \int (dx) (dx') K_1(x) i d w_p e^{i p(x-x')} i q K_2(x')$$

$$= \sum_p d w_p i K_1^*(p) q i K_2(p) = \sum_p d w_p i K_1^*(p) [\sum_{q'} q' U_{q'} U_q^*] i K_2(p)$$

$$= \sum_{p, q'} i K_{1pq}^* q' i K_{2pq}, \quad (3.14)$$

donde hemos definido $K_{pq} = \sqrt{d w_p} U_q^* K(p)$ y

$$K_{pq}^* = \sqrt{d w_p} U_q K^*(p) = \sqrt{d w_p} K^*(p) U_q.$$

Ahora multipliquemos por

$$\langle 0_+ | 0_- \rangle = \sum \langle 0_+ | (n) \rangle^{K_1} \langle (n) | 0_- \rangle^{K_2} \quad (3.14)$$

obteniendo la siguiente expresión

$$\langle 0_+ | 0_- \rangle \int J^0(x, t_0) dx = \sum \langle 0_+ | (n) \rangle^{K_1} \left(\sum_{p, q'} i K_{1pq}^* q' i K_{2pq} \right) \langle (n) | 0_- \rangle^{K_2}$$

(3.15)

Luego usando las ecs. siguientes

$$i K_{2pq} \langle (n) | 0_- \rangle^{K_2} = \sqrt{n_p+1} \langle (n+1)_p | 0_- \rangle^{K_2}$$

y

$$\langle 0_+ | (n) \rangle^{K_1} i K_{1pq}^* = \sqrt{n_p+1} \langle 0_+ | (n+1)_p \rangle^{K_1}$$

las cuales se obtienen en forma completamente análoga a como se hizo en el capítulo uno. Ahora bien cambiando el índice mudo de la suma de $(n+1)_p \rightarrow (n)$ tenemos que (15) se convierte en

13. c.f. ec. (2.12)

$$\int J^0(\bar{x}, t_0) d\bar{x} = \frac{\sum_n \langle 0_+ | (n) \rangle^{K_1} \left(\sum_{p,q} n_{pq} q' \right) \langle (n) | 0_- \rangle^{K_2}}{\sum_n \langle 0_+ | (n) \rangle^{K_1} \langle (n) | 0_- \rangle^{K_2}} \cdot (3.16)$$

Luego vemos que $\int J^0(x, t_0) dx$ representa un promedio pesado de la carga total de los estados de muchas partículas $Q = \sum_{p,q} n_{pq} q'$. O sea que es la carga promedio $\langle Q \rangle$.

Otro camino de llegar a (16) es prestando atención al comentario hecho al principio de este capítulo. La idea es realizar una transformación en una de las dos fuentes que forman la distribución de fuentes las cuales se encuentran en situación causal. En este caso la fase de K_2 será cambiada por una cte. en la siguiente forma $K_{2pq} \rightarrow e^{iq\phi} K_{2pq}$, mientras que K_1 permanecerá sin cambio. Como sabemos esta transformación es una rotación en el espacio de carga [cf. ecs. (2), (3)]. La rotación en tal espacio está dada por $\delta\theta(x) = \delta\alpha\theta(t_0 - t)$; $\delta\alpha = \text{cte}$.

Luego esto querrá decir que "rotamos" K_2 en $\delta\alpha$ con respecto a K_1 , que no sufre cambio alguno. ¹⁴

$$\text{por lo tanto } \delta K = i\delta\theta(x)qK \implies \begin{cases} \delta K_1 = 0 \\ \delta K_2 = i\delta\alpha qK \end{cases}$$

Ahora deseamos calcular la variación de nuestra expresión

14. Nótese que si rotamos todo en $\delta\alpha$, la acción queda invariante

fundamental

$$\langle 0_+ | 0_- \rangle = e^{iW} \quad (3.17)$$

con W dado por (1), entonces

$$\delta \langle 0_+ | 0_- \rangle = \delta \left[\sum \langle 0_+ | \ln \rangle^{K_1} \langle n | 0_- \rangle^{K_2} \right] = \sum \langle 0_+ | \ln \rangle^{K_1} \delta \left(\langle n | 0_- \rangle^{K_2} \right) = \sum \langle 0_+ | \ln \rangle^{K_1} i \delta \alpha \theta(n) \langle n | 0_- \rangle^{K_2} \quad (3.18)$$

en donde hemos definido que $\delta \langle n | 0_- \rangle^{K_2} = \theta(n) i \delta \alpha \langle n | 0_- \rangle^{K_2}$ y donde hemos hecho uso de la relación causal que guardan las fuentes entre sí, así como de la no variación de K_1 . Por otro lado

$$\begin{aligned} \delta \langle e^{iW} \rangle &= e^{iW} i \delta W = -i e^{iW} \int (dx) \partial_\mu \delta \theta(x) J^\mu(x) \\ &= i e^{iW} \int (dx) \delta \alpha J^0(x) \delta(t-t_0) \\ &= i \delta \alpha \langle 0_+ | 0_- \rangle^{K_1} \int (d\bar{x}) J^0(\bar{x}, t_0). \quad (3.19) \end{aligned}$$

Ya que $\partial_\mu \delta \theta(x) = \partial_\mu \delta \alpha \theta(t_0 - t) = -\delta_\mu^0 (\delta \alpha) \delta(t-t_0)$, luego de (18) y (19) obtenemos

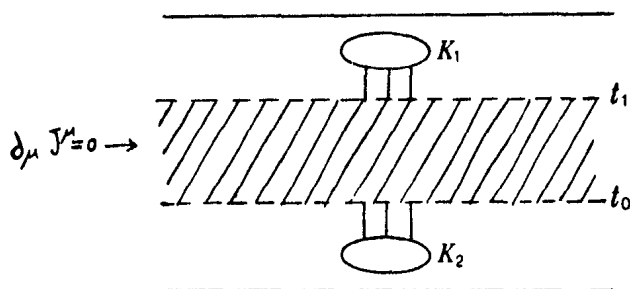
$$\int (dx) J^0(x, t_0) = \frac{\sum \langle 0_+ | \ln \rangle^{K_1} [Q(n) J_{t=t_0} \langle n | 0_- \rangle^{K_2}]}{\sum \langle 0_+ | \ln \rangle^{K_1} \langle n | 0_- \rangle^{K_2}}. \quad (3.20)$$

Luego hemos recuperado (16), salvo que no sabemos cuánto vale $Q(n)$ pero éste puede calcularse del lado derecho de (19) análogamente a como ya se ha hecho i.e. usando el Teorema de

Gauss, integrando sobre superficies temporaloides e introduciendo la corriente. Así llegamos a (13), obteniendo finalmente (16), por lo cual al comparar el lado derecho de (20) con el respectivo de (19) obtenemos

$$Q(n) = \sum_{p,q} n_{pq} \cdot q'.$$

Ahora bien dado que fuera de las fuentes $\partial_{\mu} J^{\mu}(x) = 0$ cf. ec. (11) tenemos que integrando en una región para dos tiempos diferentes que no incluyan a las fuentes nos da la posibilidad de conocer cuál es la cantidad conservada.



Luego integrando en la región marcada con superficies temporaloides en t_1 y t_0 , como se muestra en la figura, tendremos

$$0 = \int \partial_{\mu} J^{\mu}(x) dx = \int (d\vec{x}) J^0(\vec{x}, t_1) - \int (d\vec{x}) J^0(\vec{x}, t_0)$$

$$\implies \int (d\vec{x}) J^0(\vec{x}, t_1) = \int (d\vec{x}) J^0(\vec{x}, t_0). \quad (3.21)$$

Ahora bien el término a la izquierda es análogo al derecho para un tiempo $t = t_1$, obteniendo

$$\int (dx) J^0(x, t_0) = \frac{\sum \langle 0_+ | n \rangle^{K_1} [Q(n)]_{t=t_1} \langle n | 0_- \rangle^{K_2}}{\sum \langle 0_+ | n \rangle^{K_1} \langle n | 0_- \rangle^{K_2}} \quad (3.22)$$

Con $[Q(n)]_{t=t_1} = \sum_{p,q} n_{pq} \cdot q'$, por lo cual al comparar (22) con (21) vemos que la cantidad conservada es $Q(n)$, la carga total, como era de esperar.

3.2 SUPERCORRIENTE

Como se ha visto la Teoría de Fuentes nos permite la descripción de partículas de spin-0, 1, 1/2, (ésta puede también describir partículas con spin mayor). Mediante el uso de alguna simetría que deja invariante la acción del sistema podemos encontrar la cantidad conservada asociada a tal simetría. Esto fue hecho para acciones que no involucran términos de interacción y encontramos una manera metódica que nos permitió hallar las cantidades conservadas. En esta sección queremos la corriente asociada a la Supersimetría en la cual se consideran a un mismo nivel las partículas con diferente spin. En este nuevo tipo de simetría la acción queda invariante bajo transformaciones que cambian fermiones por bosones y viceversa [como consulta ver ref. (6)]. Nos interesa considerar un sistema supersimétrico en interacción que incluya partículas de spin-1/2 y spin-1 (ambas sin masa). Definiremos una supersimetría que deje invariante la acción que describe al sistema y encontraremos la corriente asociada, con la misma metodología de la sección anterior, a la cual llamaremos Supercorriente. Esta corriente se define cuando las partículas no interactúan (antes o después de la interacción) de tal manera que para nuestros fines bastará trabajar con el Lagrangiano libre del sistema. Estamos suponiendo además que la interacción (que no escribimos) respeta las mismas

transformaciones de simetría que la acción libre. Esto es, estamos haciendo Teorema de Noether en Teoría de fuentes (sin término de interacción) utilizando la supersimetría.

Ahora consideremos la siguiente acción

$$W = \int (dx) [\eta \gamma^0 \psi - (1/2) \psi \gamma^0 (\gamma^\mu \partial_\mu \psi / i) + J^\mu_{A_\mu} - F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} / 4] \quad (3.23)$$

la cual como vemos es esencialmente la suma de las acciones para spin-1/2 sin masa y la del fotón respectivamente, sin términos de interacción entre ellas.

Esta acción es invariante bajo las siguientes transformaciones, las cuales son llamadas de supersimetría

$$\delta \eta(x) = i \gamma^\mu J_\mu(x) \epsilon, \quad \delta \psi(x) = i \nabla^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \epsilon / 2, \quad \nabla^{\mu\nu} = i [\gamma^\mu, \gamma^\nu] / 2$$

$$\delta J_\mu = i c \gamma^0 \nabla_{\mu\nu} \delta^\nu \eta(x), \quad \delta A_\mu = i c \gamma^0 \gamma_\mu \psi(x),$$

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu, \quad \epsilon = \text{Spinor de Grassmann cte.} \quad (3.24)$$

Observamos que la variación en la fuente spinorial involucra a la fuente eléctrica (o de spin-1) y viceversa, sucediendo algo similar entre los campos $F_{\mu\nu}$ y ψ . Luego al tomar la variación tenemos lo siguiente

$$\delta W = \int (dx) [\delta \eta \gamma^0 \psi + \eta \gamma^0 \delta \psi - \delta \psi \gamma^0 (\gamma^\mu \partial_\mu \psi / i) - \psi \gamma^0 (\gamma^\mu \partial_\mu \delta \psi / 2) + (\delta J^\mu_{A_\mu}) + J^\mu \delta A_\mu - (\delta F^{\mu\nu}) F_{\mu\nu} / 4 - F_{\mu\nu} \delta F_{\mu\nu} / 4]. \quad (3.25)$$

$$\text{Pero } (\delta F^{\mu\nu}) F_{\mu\nu} = F^{\mu\nu} \delta F_{\mu\nu} = F^{\mu\nu} \delta (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) = F^{\mu\nu} \delta (\partial_\mu A_\nu) - F^{\mu\nu} \delta (\partial_\nu A_\mu) = F^{\mu\nu} \delta (\partial_\mu A_\nu) - F^{\nu\mu} \delta (\partial_\mu A_\nu) = 2 F^{\mu\nu} \delta (\partial_\mu A_\nu).$$

$$\begin{aligned}
 & \int d^4x \left[\delta \psi \gamma^0 / 2 \left((1/i) \gamma^\mu \partial_\mu \psi \right) - \delta_\mu \left[\delta \psi \gamma^0 \gamma^\mu \psi / i \right] / 2 \right] + \\
 & \delta_\mu \delta \psi \gamma^0 \gamma^\mu \psi / i. \quad 15 \\
 & = -\psi \gamma^0 \gamma^\mu T (1/i) \partial_\mu \delta \psi = -\psi \gamma^0 \gamma^\mu (1/2i) \partial_\mu \delta \psi = \\
 & -\psi \gamma^0 / 2 \left((1/i) \gamma^\mu \partial_\mu \delta \psi \right), \text{ por lo que (25) se transforma en}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \delta W = \int (dx) [& \delta \eta \gamma^0 \psi + \eta \gamma^0 \delta \psi - \psi \gamma^0 \left((1/i) \gamma^\mu \partial_\mu \delta \psi \right) + (\delta J^\mu) A_\mu + \\
 & J^\mu (\delta A_\mu) - F^{\mu\nu} (\partial_\mu \delta A_\nu)]. \quad (3.26)
 \end{aligned}$$

Ahora sustituyamos (24) en (26), luego

$$\begin{aligned}
 \delta W = \int (dx) [& (i \gamma_\mu J^\mu \epsilon) T \gamma^0 \psi + \eta \gamma^0 (1/2) \nabla^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \epsilon - \\
 & \psi \gamma^0 \gamma^\mu \partial_\mu [(1/2) \nabla^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \epsilon] / i + i \epsilon \gamma^0 \nabla^{\mu\nu} (\partial_\nu \eta) A_\mu + J^\mu i \epsilon \gamma^0 \gamma_\mu \psi - \\
 & F_{\mu\nu} \partial_\mu (i \epsilon \gamma^0 \gamma_\nu \psi)].
 \end{aligned}$$

Ahora analicemos cada término, empecemos por el primero

$$(i \gamma_\mu J^\mu \epsilon) T \gamma^0 \psi = i J^\mu (\gamma^0 \epsilon)^T (\gamma_\mu \gamma^0)^T T \gamma^0 \psi = -i J^\mu \epsilon \gamma^0 \gamma_\mu \psi, \text{ el cual se anula con el quinto término.}$$

Veamos ahora el cuarto término i.e.

$$i \epsilon \gamma^0 \nabla^{\mu\nu} (\partial_\nu \eta) A_\mu = \cancel{\partial_\nu (i \epsilon \gamma^0 \nabla^{\mu\nu} A_\mu \eta)} - i \epsilon \gamma^0 \nabla^{\mu\nu} \eta \partial_\nu A_\mu.$$

Ya que el producto de un tensor antisimétrico con uno simétrico es cero. Luego, la expresión anterior queda

$$= -i \epsilon \gamma^0 \nabla^{\mu\nu} \eta [(1/2) F_{\nu\mu} + (1/2) (\partial_\nu A_\mu + \partial_\mu A_\nu)]$$

15. Recordando que las lagrangianas están definidas salvo una cuadrivariación que no afecta las ecs. de movimiento.

$= -(i/2)\eta(\gamma^{\rho\mu\nu})^T \epsilon F_{\mu\nu} = -(i/2)\eta\gamma^{\rho\mu\nu} F_{\mu\nu} \epsilon$, por lo cual este término se anula con el segundo.

Donde hemos utilizado lo siguiente: sea $A = \gamma^{\rho\mu\nu}$, luego tenemos $\eta A \epsilon = \eta_i A_{ij} \epsilon_j = -\epsilon_j A_{ij} \eta_i = -\epsilon_j (A_{ji})^T \eta_i = -\epsilon A^T \eta$, usando que tanto η como ϵ son spinores de Grassmann.

Luego sólo falta por ver el tercer y sexto término, veamos este último

$$-F^{\mu\nu} \partial_\mu (i\epsilon \gamma^\rho \gamma_\nu \Psi) = -i F_{\mu\nu} \epsilon \gamma^\rho \gamma^\nu \partial^\mu \Psi = -i \epsilon \gamma^\rho \gamma^\nu \partial^\mu \Psi F_{\mu\nu} = i \partial^\mu \Psi (\gamma^\rho \gamma^\nu)^T \epsilon F_{\mu\nu} = i \partial^\mu \Psi \gamma^\rho \gamma^\nu \epsilon F_{\mu\nu}.$$

Ahora veamos el tercer término

$$(1/2) \gamma^\rho \gamma^\mu \partial_\mu (\nabla^{\nu\lambda} F_{\nu\lambda} \epsilon) = -(1/2) \partial_\mu \Psi \gamma^\rho \gamma^\mu \nabla^{\nu\lambda} F_{\nu\lambda} \epsilon$$

Haciendo uso de la siguiente identidad $\gamma^\mu \nabla^{\nu\lambda} = i(g^{\mu\nu} \gamma^\lambda - g^{\mu\lambda} \gamma^\nu)$, $-i\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \gamma_\sigma \gamma_\rho$, que se demuestra en el apéndice B, tenemos que la ec. anterior se transforma en

$$\begin{aligned} &= (1/2) \partial^\mu \Psi \gamma^\rho \gamma^\mu F_{\nu\lambda} \epsilon - (i/2) \partial^\mu \Psi \gamma^\rho \gamma^\nu F_{\mu\nu} \epsilon \\ &(i/2) \partial_\mu \Psi \gamma^\rho \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \gamma_\sigma \delta_\rho F_{\nu\lambda} \epsilon \\ &= -i \partial^\mu \Psi \gamma^\rho \gamma^\nu F_{\mu\nu} \epsilon - (i/2) \partial_\mu (\cancel{\Psi \gamma^\rho \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \gamma_\sigma \delta_\rho F_{\nu\lambda}}) + \\ &(i/2) \cancel{\gamma^\rho \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \gamma_\sigma \delta_\rho \epsilon} \partial_\mu F_{\nu\lambda} \\ &= -i \partial^\mu \Psi \gamma^\rho \gamma^\nu \epsilon F_{\mu\nu} + (i/2) \Psi \gamma^\rho \gamma_\sigma \delta_\rho \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\mu \partial_\nu A_\lambda - \partial_\mu \partial_\nu A_\lambda \\ &= -i \partial^\mu \Psi \gamma^\rho \gamma^\nu \epsilon F_{\mu\nu}. \text{ Por lo cual al sustituir todos los terminos} \end{aligned}$$

anteriores en (26) tenemos

$$\delta W = 0, \text{ Q.E.D.}$$

El siguiente paso es encontrar la corriente asociada a tal invariancia y para ello rompemos la simetría considerando que el spinor no es constante, sino que $\epsilon \rightarrow \epsilon(x)$, por lo cual

$$\begin{aligned} \delta W = & \int (dx) \langle (i \gamma_{\mu}^{\rho} \epsilon(x)) T \gamma^{\rho} \psi + \eta \gamma^{\rho} (i/2) \nabla^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \epsilon(x) - \\ & \psi \gamma^{\rho} [(1/i) \gamma^{\mu} \partial_{\mu} (i \nabla^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \epsilon(x) / 2)] + i \epsilon(x) \gamma^{\rho} \nabla^{\mu\nu} (\partial_{\nu} \eta) A_{\mu} + \\ & \int^{\mu} i \epsilon(x) \gamma^{\rho} \gamma_{\rho} \psi - F^{\mu\nu} \partial_{\mu} (i \epsilon(x) \gamma^{\rho} \gamma_{\rho} \psi) \rangle, \quad (3.27) \end{aligned}$$

Al igual que antes el primer término se anula con el quinto. Ahora veamos que sucede con el cuarto término

$$i \epsilon(x) \gamma^{\rho} \nabla^{\mu\nu} (\partial_{\nu} \eta) A_{\mu} = \cancel{\partial_{\nu} (i \epsilon(x) \gamma^{\rho} \nabla^{\mu\nu} \eta A_{\mu})} - i \epsilon(x) \gamma^{\rho} \nabla^{\mu\nu} \eta \partial_{\nu} A_{\mu} - \underline{i (\partial_{\nu} \epsilon(x)) \gamma^{\rho} \nabla^{\mu\nu} \eta A_{\mu}}$$

Observamos que el término no subrayado se anula con el segundo término de (27), Ahora pasemos al tercer término

$$\begin{aligned} -\psi \gamma^{\rho} [(1/i) \gamma^{\mu} \partial_{\mu} ((i/2) \nabla^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \epsilon(x))] &= 1/2 (\partial_{\mu} \psi) \gamma^{\rho} [(g^{\mu\nu} \gamma^{\rho} - g^{\mu\rho} \gamma^{\nu}) - \\ & i \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \gamma_{\sigma} \gamma_{\rho}] F_{\mu\nu} \epsilon(x) \\ &= i F^{\mu\nu} \epsilon(x) \gamma^{\rho} \gamma_{\nu} \partial_{\mu} \psi - (i/2) \partial_{\mu} [\psi \gamma^{\rho} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \gamma_{\sigma} \gamma_{\rho} \epsilon(x) F_{\mu\nu}] + \\ & (i/2) \psi \gamma^{\rho} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \gamma_{\sigma} \gamma_{\rho} \epsilon(x) \partial_{\mu} F_{\nu\sigma} + (i/2) \psi \gamma^{\rho} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \gamma_{\sigma} \gamma_{\rho} (\partial_{\mu} \epsilon(x)) F_{\nu\sigma} \\ &= i F^{\mu\nu} \epsilon(x) \gamma^{\rho} \gamma_{\nu} \partial_{\mu} \psi + (i/2) \psi \gamma^{\rho} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \gamma_{\sigma} \gamma_{\rho} \epsilon(x) \partial_{\mu} F_{\nu\sigma} \\ & \partial_{\mu} \epsilon(x) (i \gamma^{\rho} \gamma_{\sigma} \gamma^{\nu})^T F^{\mu\nu} \psi \end{aligned}$$

$$= iF^{\mu\nu}\epsilon(x)\delta^0\delta_\nu\partial_\mu\psi + (i/2)\psi\delta^0\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\delta_5\delta_\rho\epsilon^{(1)}\partial_\mu F_{\nu\sigma} - \underline{i\partial_\mu\epsilon(x)^*F^{\mu\nu}\delta^0\delta_\nu\delta_5\psi}$$

Los dos primeros términos se anulan como antes, el primero con un término del sexto término, el cual tratamos enseguida

$$-iF^{\mu\nu}\partial_\mu(i\epsilon(x)\delta^0\delta_\nu\psi) = \underline{-F^{\mu\nu}(\partial_\mu\epsilon(x))\delta^0\delta_\nu\psi} - iF^{\mu\nu}\epsilon(x)\delta^0\delta_\nu\partial_\mu\psi$$

comprobando lo anteriormente dicho. Luego los términos que sobreviven son los subrayados, por lo cual tenemos de (27)

$$\begin{aligned} \delta W &= \int(dx) [-\partial_\mu\epsilon(x)\delta^0(F^{\mu\nu}\delta_\nu + *F^{\mu\nu}\delta_\nu\delta_5)\psi + i\partial_\mu\epsilon(x)\delta^0\nabla^{\mu\nu}\eta A_\nu] \\ &= -\int(dx)\partial_\mu\epsilon(x)\delta^0[(1/2)\nabla^{k\lambda}F_{k\lambda}\delta^\mu\psi - i\nabla^{\mu\nu}\eta A_\nu]. \end{aligned}$$

Haciendo la siguiente definición, análoga a la de la ec. (9),

$$\delta W = -\int\partial_\mu\epsilon(x)\delta^0j^\mu(x) \text{ encontramos}$$

$$j^\mu(x) = (1/2)\nabla^{k\lambda}F_{k\lambda}\delta^\mu\psi - i\nabla^{\mu\nu}\eta A_\nu \quad (3.28)$$

Ahora nuestro siguiente paso consiste en hallar la ec. de movimiento para j^μ . Para esto, usando las ecs. de movimiento de los campos i.e.

$$(1/i)\delta^\mu\partial_\mu\psi = \eta \quad (3.29), \quad \partial_\nu F^{\mu\nu} = j^\mu, \quad (3.30)$$

obtenemos que

$$\partial_\mu j^\mu = -i\nabla^\nu\delta_\nu\psi + (1/2)\nabla^{\mu\nu}F_{\mu\nu}\eta - i\nabla^{\mu\nu}(\partial_\mu\eta)A_\nu - (1/2)\nabla^{\mu\nu}F_{\mu\nu}\eta$$

16. Ver apéndice B

$$= -iJ^{\nu} \gamma_{\nu} \Psi - i \not{\partial}^{\mu\nu} (\partial_{\mu} \eta) A_{\nu}. \quad (3.31)$$

Para verificar lo anterior recurramos a otro procedimiento. Calculemos

$$\delta_{J, \Psi}^{W_{\eta, A}} = - \int (\partial_{\mu} \epsilon) \gamma^{\mu} \not{\partial}^{\mu} \Psi$$

directamente a partir de

$$W = \int (J^{\mu} A_{\mu} + \eta \gamma^{\mu} \Psi + L(A_{\mu}, \Psi)).$$

Sabemos que la variación de la acción con respecto a los campos, en este caso A_{μ} , Ψ , nos dan las ecs. de movimiento i.e. $\delta_{A, \Psi} W = 0$. Luego sólo debemos calcular $\delta_{J, \eta} W$ i.e.

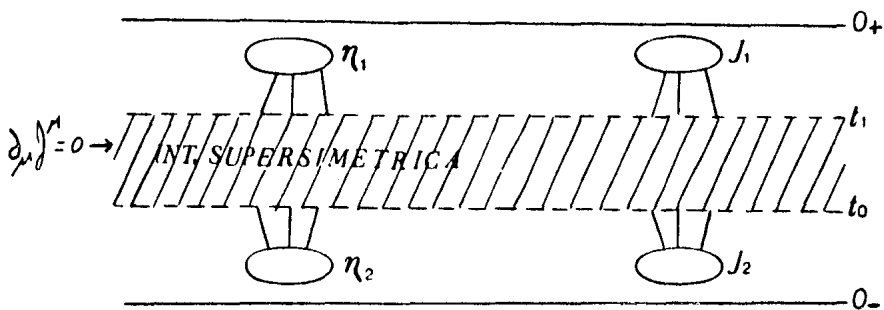
$$\begin{aligned} \delta_{J, \Psi}^{W_{\eta, A}} &= \delta_{J, \eta} W = \int (\delta J^{\mu}) A_{\mu} + \Psi \gamma^{\mu} \delta \eta \\ &= \int A_{\mu} i \epsilon \gamma^{\mu} \not{\partial}^{\mu\nu} \partial_{\nu} \eta + i \Psi \gamma^{\mu} \gamma^{\mu} \epsilon J_{\mu} = \int \epsilon \gamma^{\mu} \partial_{\mu} \not{\partial}^{\mu} \Psi \implies \end{aligned}$$

$$\partial_{\mu} \not{\partial}^{\mu} \Psi = i A_{\mu} \not{\partial}^{\mu\nu} \partial_{\nu} \eta - i \gamma^{\mu} \Psi J_{\mu} = -i \not{\partial}^{\mu\nu} (\partial_{\mu} \eta) A_{\nu} - i J^{\nu} \gamma_{\nu} \Psi$$

$$\text{Dado que } \int -(\partial_{\mu} \epsilon) \gamma^{\mu} \not{\partial}^{\mu} \Psi = \int [-\partial_{\mu} (\epsilon \gamma^{\mu} \not{\partial}^{\mu} \Psi) + \epsilon \gamma^{\mu} \partial_{\mu} \not{\partial}^{\mu} \Psi].$$

El siguiente paso consiste en calcular la cantidad conservada que en este caso se llama supercarga, i.e. $\int d\bar{x} \not{\partial}^{\mu} (x)$.

Dado que fuera de las fuentes tenemos $\partial_{\mu} \not{\partial}^{\mu} \Psi = 0$ cf. ec. (31), si suponemos una interacción Supersimétrica, esto nos dá la posibilidad de relacionar la supercarga para dos tiempos diferentes, tal como se ilustra en la siguiente fig.



Es precisamente en la región marcada donde la física ocurre ya que los campos Ψ y A_μ pueden interactuar entre ellos. Por lo que al integrar en esta región y considerar superficies temporaloides en t_0 y t_1 tenemos

$$0 = \int \partial_\mu J^\mu (dx) = \int (d\bar{x}) \mathcal{J}^0(\bar{x}, t_1) - \int (d\bar{x}) \mathcal{J}^0(\bar{x}, t_0) \implies$$

$$\int (d\bar{x}) \mathcal{J}^0(\bar{x}, t_1) = \int (d\bar{x}) \mathcal{J}^0(\bar{x}, t_0). \quad (3.32)$$

Redefiniremos la supercorriente considerando sólo el primer término de (28) i.e.

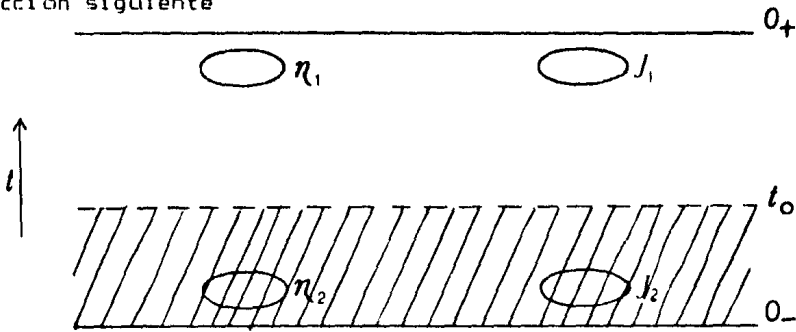
$$J^\mu = (1/2) \nabla^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \gamma^\mu \Psi \quad (3.33)$$

$$\implies \partial_\mu J^\mu = (1/2) \nabla^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \eta - i J^\nu \gamma_\nu. \quad (3.34)$$

Luego nuestra ley de conservación resulta ser (32) y ahora vamos a ver qué tipo de cantidad se conserva. Para esto debemos calcular cada una de estas integrales, así que el paso siguiente será éste.

Empezaremos a calcular el lado derecho de (32). Para esto consideremos el proceso causal: producción - propagación -

detección siguiente



Integrando en la región marcada y usando el Teorema de Gauss y superficies temporaloides en $t_0, 0_-$ tenemos

$$\int (dx) d_{\mu}^{\mu}(x) = \int \mathcal{G}^0(\vec{x}, t_0) d\vec{x} - \int \mathcal{G}^0(\vec{x}, t) d\vec{x} \Big|_{0_-}$$

$$\therefore \int \mathcal{G}^0(\vec{x}, t_0) d\vec{x} = \int dx [(i/2) \nabla^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \eta_2 - i J_{2\nu} \delta^{\nu} \psi]. \quad (3.35)$$

Dado que $(i/2) \nabla^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \eta = i \nabla^{\mu\nu} (\partial_{\mu} A_{\nu}) \eta$ tenemos

$$\int \mathcal{G}^0(\vec{x}, t_0) d\vec{x} = \int (dx) i \nabla^{\mu\nu} (\partial_{\mu} A_{\nu}) \eta_2 - i J_{2\nu} \delta^{\nu} \psi. \quad (3.36)$$

Usando $\psi = \psi_1 + \psi_2 = G\eta_1 + G\eta_2$ y $A_{\nu} = A_{1\nu} + A_{2\nu} = DJ_{1\nu} + DJ_{2\nu}$, resulta

$$\int \mathcal{G}^0(\vec{x}, t_0) d\vec{x} = \int (dx) i \nabla^{\mu\nu} (\partial_{\mu} [DJ_{1\nu} + DJ_{2\nu}]) \eta_2 - i J_{2\nu} \delta^{\nu} (G\eta_1 + G\eta_2).$$

Como veremos a continuación el segundo y cuarto término se anulan entre sí, por lo que queda

$$\int \mathcal{G}^0(\vec{x}, t_0) d\vec{x} = \int (dx) i \nabla^{\mu\nu} (\partial_{\mu} DJ_{1\nu}) \eta_2 - i J_{2\nu} \delta^{\nu} G\eta_1. \quad (3.37)$$

Observemos el segundo término dado por

$$\int (dx) i \not{\partial}^{\mu\nu} \partial_\mu(x) \left(\int (dx') D(x-x') J_{2\nu}(x') \right) \eta_2(x)$$

$$= \int (dx) (g^{\mu\nu} + \not{\gamma}^\mu \not{\gamma}^\nu) \int (dx') \partial_\mu(x) D(x-x') J_{2\nu}(x') \eta_2(x).$$

Este primer término se anula, ya que al integrar por partes queda una cuadridivergencia que contiene las fuentes localizadas más el otro término que contiene $\not{\partial}^\nu J_\nu = 0$.

Por otro lado en el término restante haciendo $x \longleftrightarrow x'$, tenemos

$$= \int (dx') \not{\gamma}^\nu i \int \not{\gamma}^\mu (1/i) \partial'_\mu D(x-x') J_{2\nu}(x) (dx) \eta_2(x)$$

$$= i \int (dx) \not{\gamma}^\nu J_{2\nu}(x) \int (dx') -\not{\gamma}^\mu (1/i) \partial'_\mu D(x-x') \eta_2(x')$$

$$= \int (dx) i J_{2\nu}(x) \not{\gamma}^\nu G(x-x') \eta_2(x'),$$

la cual como afirmamos se anula con el cuarto término. Hemos hecho uso de $D(x-x') = D(x'-x)$ y $\partial'_\mu = -\partial_\mu$.

La situación física que estamos considerando corresponde a $x^0 > x'^0$ y por ende la situación causal para (37) se encuentra perfectamente definida. Esto nos permite utilizar la forma causal de los propagadores, por lo cual sustituyéndolos en (37) nos permite calcular esta expresión. Por lo tanto del primer término de (37) tenemos:

$$\int (dx) i \not{\partial}^{\mu\nu} \partial_\mu \int (dx') D(x-x') J_{1\nu}(x') \eta_2(x)$$

$$= \int (dx) (dx') i \not{\partial}^{\mu\nu} \partial_\mu (i \int d\omega_p e^{ip(x-x')} J_{1\nu}(x')) \eta_2(x)$$

$$= -\int d\omega_p \delta^{\mu\nu} i J_{1\nu}(-p) i \eta_2(p)$$

[Recordemos que $\delta^{\mu\nu} = -ig^{\mu\nu} - i\delta^{\mu\nu}\delta^{\nu\mu}$]

$$= -\int d\omega_p \{ g^{\mu\nu} P_\mu i J_{1\nu}(-p) i \eta_2(p) - \delta^{\nu\mu} P_\mu i J_{1\nu}(-p) i \eta_2(p) \}$$

[Ya que $g^{\mu\nu} P_\mu J_{1\nu}(p) = P^\nu J_{1\nu}(p) = 0$]

$$= -\int d\omega_p i g_{\nu\mu} J_1^\mu(-p) \delta^{\nu\mu} P_\mu i \eta_2(p)$$

[Utilizando que $-g_P = 2P^0 \sum_{\rho\lambda} U_{\rho\lambda} U_{\rho\lambda}^* \delta^0$,

$g_{\nu\mu} = (g_{\nu\mu})^* = P_\nu \bar{P}_\mu + \bar{P}_\nu P_\mu / P^0 + \sum_{\nu=1,2} e^*_{\nu\rho} e_{\nu\sigma}$ y sustituyendo],

$$= \int d\omega_p [P^0 \bar{P}_\nu \delta^{\nu\mu} P_\mu J_1^\mu(-p) 2P^0 \sum_{\rho\lambda} U_{\rho\lambda} U_{\rho\lambda}^* \delta^0 i \eta_2(p) + \sum_{\nu=1,2} e^*_{\nu\rho} e_{\mu\sigma} P_\mu J_1^\mu(-p) \delta^{\nu\mu} 2P^0 \sum_{\rho\lambda} U_{\rho\lambda} U_{\rho\lambda}^* \delta^0 i \eta_2(p)]$$

[Como $P_\nu \delta^{\nu\mu} = P^\mu$, $P^\nu (\sum_{\rho\lambda} U_{\rho\lambda} U_{\rho\lambda}^* \delta^0) = 0$

$$= \sum_{\rho\lambda} i J_1^* P_\nu e^*_{\nu\rho} e_{\nu\sigma} \delta^{\nu\mu} U_{\rho\lambda} i \eta_2(p) \sqrt{2P^0}$$

Ahora pasemos a calcular el segundo término de (37), i.e.

$$-i \int (dx) J_{2\nu}(x) \delta^{\nu\mu} \int (dx') G(x-x') \eta_1(x')$$

$$= -i \int (dx) (dx') J_{2\nu}(x) \delta^{\nu\mu} i \int d\omega_p e^{ip(x'-x)} g_P \eta_1(x')$$

$$= -d\omega_p \delta_\mu^{\nu\mu} g^{\mu\nu} i J_{2\nu}(p) \delta^P i \eta_1(-p)$$

$$= d\omega_p \delta_\mu^{\nu\mu} [P^0 \bar{P}^\nu U^\nu i J_{2\nu}(p) \{ \delta^P i \eta_1(-p) + \sum_{\rho\lambda} 2P^0 \sum_{\rho\lambda} U_{\rho\lambda} U_{\rho\lambda}^* \delta^0 i \eta_1(-p) \} + \sum_{\rho\sigma} e^\mu_{\rho\sigma} e^*_{\nu\sigma} i J_{2\nu}(p) 2P^0 \sum_{\rho\lambda} U_{\rho\lambda} U_{\rho\lambda}^* \delta^0 i \eta_1(-p)]$$

sustituyendo $g^{\mu\nu} = \rho^{\mu\rho}\bar{\rho}^{\nu} + F^{\mu\rho}v^{\nu}/(\rho\bar{\rho}) + \sum e^{\mu}_{\rho\nu}e^{*\nu}_{\rho\sigma} \gamma^{\rho} \gamma^{\sigma} = (-\gamma^{\rho})^{*\mu}$

$$= 2P^0 \sum U^*_{\rho\lambda} U_{\rho\lambda} \gamma^0 = -2P^0 \sum U^*_{\rho\lambda} U_{\rho\lambda} \gamma^0, \text{ resulta}$$

$$= -\sum_{\rho,\lambda} \gamma_{\mu} e^{\mu}_{\rho\nu} i J_{2\rho\nu} U^*_{\rho\lambda} i \eta^*_{1\rho\lambda} \sqrt{2P^0} \quad (3.38)$$

$$P^{\nu} J_{2\nu} = 0; \gamma^{\rho} (\sum U^*_{\rho\lambda} U_{\rho\lambda} \gamma^0) = 0 \text{ y usando adem\u00e1s que } U_{\rho\lambda} \gamma^0 \eta_1(-\rho)$$

$$= -\eta_1(-\rho) \gamma^0 U_{\rho\lambda}.$$

Por lo que sustituyendo ambos t\u00e9rminos en (37) tenemos

$$\int \mathcal{L}^0(\bar{x}, t_0) d\bar{x} = \sqrt{2P^0} \sum [i J^*_{1\rho\nu} e^{*\nu}_{\rho\sigma} \gamma^{\nu} U_{\rho\lambda} i \eta_{2\rho\lambda} - \gamma_{\mu} e^{\mu}_{\rho\nu} i J_{2\rho\nu} U^*_{\rho\lambda} i \eta^*_{1\rho\lambda}].$$

3.39

Ahora bien siguiendo las mismas ideas y procedimientos vistos para el inciso anterior (Carga El\u00e9ctrica Total), "rotaremos" las fuentes dos, donde esto querr\u00e1 decir que s\u00f3lo las fuentes dos sufren la transformaci\u00f3n (24). Por lo cual con $\delta\epsilon \theta(t_0-t); \delta\epsilon = \text{cte.}$ tenemos

$$\begin{aligned} \delta \langle 0_+ | 0_- \rangle &= \delta(e^{iW}) = -\langle 0_+ | 0_- \rangle i \int (d\bar{x}) [d_{\mu} \delta\epsilon(x)] \gamma^{\mu}(x) \\ &= \langle 0_+ | 0_- \rangle i \delta\epsilon \gamma^0 \int (d\bar{x}) \mathcal{L}^0(\bar{x}, t_0) \\ &= \sum i \delta\epsilon \gamma^0 \langle 0_+ | (n), (m) \rangle \int (d\bar{x}) \mathcal{L}^0(\bar{x}, t_0) \langle (m), (n) | 0_- \rangle^2. \end{aligned}$$

(3.40)

Donde (m) representa los estados para fermiones sin masa al tiempo t_0 y (n) los estados para fotones.

Si ahora sustituimos (39) en esta expresión y utilizamos las ecs. análogas a (1.24) para fotones y partículas de spin-1/2 sin masa (i.e. el efecto de las proyecciones de las fuentes en las amplitudes de probabilidad de creación y detección) tenemos que (40) se transformará en

$$\sum i\delta\epsilon\gamma^0 \sqrt{2P^0} \sqrt{n_{p\nu}+1} \sqrt{m_{p\lambda}+1} \langle 0_+ | (n)_+ | p\nu, (m) \rangle \langle 0_+ | (n)_+ | p\nu, (m) \rangle^{-1} e^*_{\nu\rho\sigma} \gamma^\nu U_{p\lambda} \langle (m)_+ | p\lambda, (n) | 0_- \rangle^2 - \langle 0_+ | (n), (m)_+ | p\lambda \rangle \gamma_\mu e^\mu_{\rho\sigma} U_{p\lambda} \langle (m), (n)_+ | 0_- \rangle^2.$$

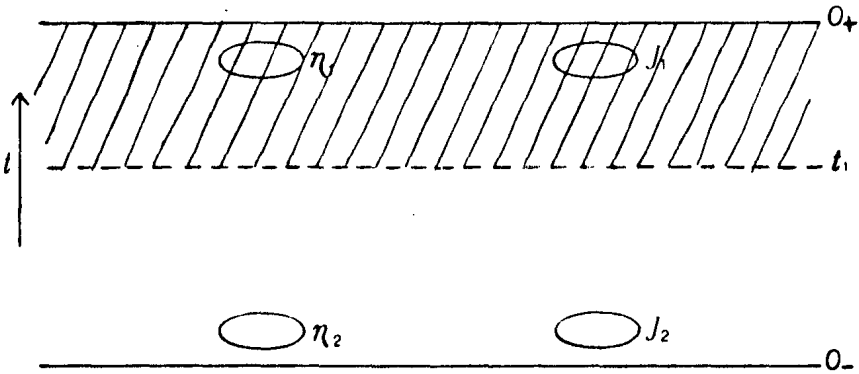
Pero por otro lado tenemos la siguiente expresión

$$\begin{aligned} \delta \langle 0_+ | 0_- \rangle &= \sum_{(n), (m)} \langle 0_+ | (n), (m) \rangle \delta \langle (m), (n) | 0_- \rangle^2 \\ &= \sum_{(n), (m)} i\delta\epsilon\gamma^0 \langle 0_+ | (n), (m) \rangle \langle (m), (n) | 0_- \rangle \langle (m'), (n') | 0_- \rangle \langle (m'), (n') | 0_- \rangle^2. \end{aligned}$$

Luego al comparar ambas expresiones se obtiene el siguiente valor para los elementos de matriz de la supercarga

$$\begin{aligned} \langle (m), (n) | Q | (n'), (m') \rangle &= \sum_{p, \nu} \sqrt{2P^0} \left[\sqrt{n_{p\nu}} \sqrt{m_{p\lambda}+1} e^*_{\nu\rho\sigma} \gamma^\nu U_{p\lambda} \delta_{n, n'-1} \delta_{m, m'+1} \right. \\ &\quad \left. - \sqrt{m_{p\lambda}} \sqrt{n_{p\nu}+1} \gamma_\mu e^\mu_{\rho\sigma} U^*_{p\lambda} \delta_{n, n'+1} \delta_{m, m'-1} \right]. \end{aligned} \tag{3.41}$$

Ahora debemos calcular el lado izquierdo de (32), la supercarga para $t = t_1$, para encontrar los elementos de matriz de la supercarga y utilizando (32) encontrar la cantidad conservada. Análogamente a lo visto para $t = t_0$. Consideraremos el proceso causal: producción - propagación - detección, en la región marcada de la siguiente fig.



Integramos sobre la región marcada. Usando el teorema de Gauss y superficies temporaloides en t_1 y 0_+ tenemos

$$\int (dx) \partial_\mu J^\mu(x) = \int \int^\square (\bar{x}, t) \Big|_{0_+} - \int \int^\square (\bar{x}, t_1) d\bar{x}$$

$$\int \int^\square (\bar{x}, t_1) d\bar{x} = - \int (dx) \{ (1/2) \nabla^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \eta_1 - i J_{1\nu} \gamma^\nu \psi \}. \quad (3.42)$$

Con $\psi = \psi_1 + \psi_2 = G\eta_1 + G\eta_2$, $A_\nu = A_{1\nu} + A_{2\nu} = DJ_{1\nu} + DJ_{2\nu}$ tenemos

$$\int (d\bar{x}) \int^\square (\bar{x}, t_1) = - \int (dx) \{ i \nabla^{\mu\nu} (\partial_\mu DJ_{1\nu}) \eta_1 + i \nabla^{\mu\nu} (\partial_\mu DJ_{2\nu}) \eta_1 - i J_{1\nu} \gamma^\nu G \eta_1 - i J_{1\nu} \gamma^\nu G \eta_2 \}. \quad (3.43)$$

En forma análoga a lo realizado para t_0 tenemos que el primer y tercer término se anulan, por lo cual

$$\int (d\bar{x}) \int^\square (\bar{x}, t_1) = - \int (dx) \{ i \nabla^{\mu\nu} \partial_\mu \int D(x-x') J_{2\nu}(x') (dx') \eta_1(x) - i J_{1\nu}(x) \gamma^\nu \int G(x-x') \eta_2(x') (dx') \}, \text{ con } x^0 > x'^0.$$

Por lo cual al sust. G y D, obtenemos

$$= - \int (dx) (dx') \{ i \nabla^{\mu\nu} \partial_\mu (i \int d\omega_p e^{ip(x-x')} J_{2\nu}(x')) \eta_1(x)$$

$$\begin{aligned}
& -iJ_{1\nu}(x) \gamma^\nu \int d^4p e^{ip(x-x')} (-\gamma^P) \eta_2(x') \\
& = -\int d^4p \{ iJ_{2\nu}(p) i\nabla^{\mu\nu} P_\mu \eta_1(-p) - \gamma^\nu iJ_{1\nu}(-p) (-\gamma^P) \eta_2(p) \} \\
& = -\int d^4p \{ g_{\nu\mu} iJ_2^\mu(p) \gamma^\nu \gamma^{\mu\rho} \eta_1(-p) - \gamma_\mu g^{\mu\nu} iJ_{1\nu}(-p) (-\gamma^P) \eta_2(p) \} \\
& = -\int d^4p \{ \sum_{\rho\sigma} e_{\nu\rho}^* e_{\mu\sigma} iJ_2^\mu(p) \gamma^\nu \sum_{\rho\lambda} U_{\rho\lambda}^* U_{\rho\lambda} \eta_1(p) \\
& \quad - \gamma_\mu \sum_{\rho\sigma} e_{\rho\sigma}^* e_{\nu\sigma} iJ_{1\nu}(-p) \sum_{\rho\lambda} U_{\rho\lambda} U_{\rho\lambda}^* \eta_2(p) \} \\
& = -\sum_{\rho,\lambda} \sqrt{2P^0} \{ e_{\nu\rho} iJ_{2\rho} \gamma^\nu U_{\rho\lambda}^* \eta_1^* - \gamma_\mu e_{\rho\nu}^* iJ_{1\rho} U_{\rho\lambda} \eta_{2\rho\lambda} \}.
\end{aligned}
\tag{3.44}$$

Rotando solo las fuentes uno obtenemos

$$\begin{aligned}
\delta \langle 0_+ | 0_- \rangle & = -i \langle 0_+ | 0_- \rangle \int d^4x (\partial_\mu \delta \epsilon(x)) \gamma^\mu \int d^4x' \\
& = -i \delta \epsilon \gamma^\mu \langle 0_+ | 0_- \rangle \int (d\bar{x}) \int^\square (\bar{x}, t_1) \\
& = -i \delta \epsilon \gamma^\mu \sum \langle 0_+ | (n), (m) \rangle \int (d\bar{x}) \int^\square (\bar{x}, t_1) \langle (m), (n) | 0_- \rangle^2.
\end{aligned}
\tag{3.45}$$

Ya que $\partial_\mu \delta \epsilon(x) = \partial_\mu (\delta \epsilon \theta(t-t_1)) = \delta_\mu^0 \delta \epsilon \delta(t-t_1)$. Empero, por otro lado tenemos

$$\begin{aligned}
\delta \langle 0_+ | 0_- \rangle & = \sum \delta \langle \langle 0_+ | (m), (n) \rangle \rangle \langle (m), (n) | 0_- \rangle^2 \\
& = i \delta \epsilon \gamma^\mu \sum \langle 0_+ | (n), (m) \rangle \langle (m), (n) | \tilde{0} | (n'), (m') \rangle \langle (m'), (n') | 0_- \rangle^2.
\end{aligned}
\tag{3.46}$$

En forma completamente análoga a lo realizado anteriormente, sustituyendo (44) en (45) y comparando con (46), obtenemos el siguiente valor para los elementos de matriz de la supercarga al tiempo t_1

$$\langle (m), (n) | \tilde{Q} | (n'), (m') \rangle = \sum \sqrt{2P^0} (\sqrt{n_{p\nu}+1} \sqrt{m_{p\lambda}} e_{\nu p \nu} \gamma^\nu U_{p\lambda}^* \delta_{n, n'+1} \delta_{m, m'-1} - \sqrt{m_{p\lambda}+1} \sqrt{n_{p\nu}} \gamma_\mu e^{*\mu} U_{p\lambda} \delta_{n, n'-1} \delta_{m, m'+1}). \quad (3.47)$$

Observamos, comparando (41) con (47), que $\tilde{Q} = -Q$.

Luego hemos encontrado tanto el valor de los elementos de matriz de la supercarga así como la relación entre éstos para antes y después de que tiene lugar la interacción supersimétrica. Nos encontramos entonces en la situación análoga al inciso anterior de haber encontrado el valor de la carga eléctrica total. Esta resulta ser diagonal en los estados de multipartículas en tanto que en este caso hemos hallado elementos no nulos fuera de la diagonal

El siguiente paso es encontrar la cantidad conservada. Para ello despejamos el valor de la supercarga de (45) y (46) para t_1 y en una forma completamente análoga a t_0 . Luego utilizando la identidad (32) tendremos

$$\frac{\sum \langle 0_+ | w \rangle \langle w | \tilde{Q} | w \rangle \langle w' | w \rangle \langle w'' | 0_- \rangle^2}{\sum \langle 0_+ | w \rangle \langle w | 0_- \rangle^2} = \frac{-\sum \langle 0_+ | w \rangle \langle w | w \rangle \langle w' | \tilde{Q} | w \rangle \langle w'' | 0_- \rangle^2}{\sum \langle 0_+ | w \rangle \langle w | 0_- \rangle^2}$$

donde por obvias razones hemos definido $w = (n), (m)$. Además se

introdujo un conjunto completo $\sum |w' \rangle \langle w'|$ al tiempo t_1 y otro $\sum |w'' \rangle \langle w''|$ al tiempo t_0 con el objeto de que podamos comparar ambos términos de la igualdad anterior y obtener

$$\begin{aligned} & \sum \langle \{m'\}, \{n'\} | Q | \{n\}, \{m\} \rangle \langle \{m\}, \{n\} | \{n''\}, \{m''\} \rangle \\ & = \sum \langle \{m'\}, \{n'\} | \{n\}, \{m\} \rangle \langle \{m\}, \{n\} | Q | \{n''\}, \{m''\} \rangle. \end{aligned}$$

(3.48)

Donde hemos usado $-\tilde{Q} = Q$. Esta es nuestra ley de conservación que relaciona transiciones de probabilidad $\langle w'_{t_1} | w''_{t_0} \rangle$. Dichas relaciones son restricciones de la Supersimetría sobre los procesos realizables físicamente.

Para encontrar explícitamente tales relaciones notemos que los estados que nosotros "fijamos" son $\langle \{m'\}, \{n'\} |$ y $| \{n''\}, \{m''\} \rangle$. Ahora bien sustituyendo el valor de los elementos de matriz en (48) resulta

$$\begin{aligned} & \sum \sqrt{2P^0} (\sqrt{m+1} \sqrt{n} \gamma_\mu e^{*\mu} U_{\rho\nu} U_{\rho\lambda} \delta_{n', n-1} \delta_{m', m+1} \langle m; n | n''; m'' \rangle - \sqrt{n+1} \sqrt{m} \\ & e_{\mu\rho\nu} \gamma^\mu U^*_{\rho\lambda} \delta_{n', n+1} \delta_{m', m-1} \langle m; n | n''; m'' \rangle) = \sum \sqrt{2P^0} (\sqrt{m+1} \sqrt{n} \\ & \gamma_\mu e^{*\mu} U_{\rho\nu} U_{\rho\lambda} \delta_{n, n''-1} \delta_{m, m''+1} \langle m'; n' | n; m \rangle - \sqrt{n+1} \sqrt{m} e_{\mu\rho\nu} \gamma^\mu U^*_{\rho\lambda} \\ & \delta_{n, n''+1} \delta_{m, m''-1} \langle m'; n' | n; m \rangle). \end{aligned}$$

(3.49)

Luego de esta ecuación obtenemos todas las constricciones de Supersimetría sobre el proceso de dispersión.

Ahora estudiaremos esta relación considerando estados para los

cuales se cumpla $2 = m' + m = n' + n''$, por lo que habrá 9 casos posibles, de los cuales sólo 4 no son identidades triviales.

Las identidades triviales resultan para los casos siguientes:

$$\langle m', n' |, |n'', m'' \rangle : \langle 0, 2 |, |2, 0 \rangle ; \langle 0, 2 |, |0, 2 \rangle ; \langle 2, 0 |, |2, 0 \rangle \\ \langle 2, 0 |, |0, 2 \rangle ; \langle 1, 1 |, |1, 1 \rangle.$$

Tomemos un caso y veamos el por qué. Consideremos el caso $\langle 0, 2 |, |2, 0 \rangle$ i.e. $m' = \langle 0 \rangle$, $n' = \langle 1_{q, \nabla}, 1_{q \nabla} \rangle$, $m'' = \langle 0 \rangle$, $n'' = \langle 1_{p, \lambda}, 1_{p \lambda} \rangle$. Entonces (49) nos da

$$\sum_{\mu, \nu} e^{-i \mu \nu} \gamma^{\mu \nu} U^*_{p \lambda} \delta_{0, m-1} \delta_{n', n+1} \langle (m); (n) | (1_{p, \lambda}, 1_{p \lambda}); 0 \rangle \\ = \sum \gamma_{\mu} e^{* \mu} U_{p \lambda} \delta_{m, 0+1} \delta_{n, n''-1} \langle 0; (1_{q, \nabla}, 1_{q \nabla}) | (n); (m) \rangle$$

Lo que implica

$$\sum_{\mu, \nu} (e_{\mu q, \nabla} \gamma^{\mu \nu} U^*_{q, w} \langle 1_{q, w} | 1_{q \nabla} | 1_{p, \lambda}, 1_{p \lambda}; 0 \rangle + e_{\mu q \nabla} \gamma^{\mu \nu} U^*_{q w} \\ \langle 1_{q w} | 1_{q, \nabla} | 1_{p, \lambda}, 1_{p \lambda}; 0 \rangle) = \sum (\gamma_{\mu} e^{* \mu} U_{p k} \langle 0; 1_{q, \nabla}, 1_{q \nabla} | 1_{p, \lambda}, 1_{p \lambda} \rangle \\ + \gamma_{\mu} e^{* \mu} U_{p' k} \langle 0; 1_{q, \nabla}, 1_{q \nabla} | 1_{p \lambda}, 1_{p' k} \rangle)$$

La razón de que cada elemento de matriz es cero, es la conservación del momento angular, ya que tenemos en las amplitudes de transición dos bosones "llendo" a un bosón y a un fermión o' un fermión y un bosón "llendo" a dos bosones.

Los demás casos triviales antes mencionados son análogos a éste.

Ahora pasemos a ver que ecuaciones resultan para los cuatro

casos de interés restantes.

Para el caso $\langle 0,21, 11,1 \rangle$ i.e. $m'=\langle 0 \rangle$, $n'=\langle 1_{q'v}, 1_{qv} \rangle$, $m''=\langle 1_{p\lambda} \rangle$, $n''=\langle 1_{p\lambda} \rangle$, tenemos de (49)

$$\begin{aligned} & \sum_{\mu} (e_{\mu q'v} \delta_{\mu U}^* q'k \langle 1_{q'k}; 1_{qv}; 1_{p\lambda}; 1_{p\lambda} \rangle + e_{\mu qv} \delta_{\mu U}^* qk \\ & \langle 1_{qk}; 1_{q'v}; 1_{p\lambda}; 1_{p\lambda} \rangle) = \sum_{\mu} (e_{\mu p'w} \delta_{\mu U}^* \langle 0; 1_{q'v}; 1_{qv}; 0; 1_{p\lambda}; 1_{p'w} \rangle \\ & - e_{\mu pw} \delta_{\mu U}^* \langle 0; 1_{q'v}; 1_{qv}; 1_{p\lambda}; 1_{pw} \rangle). \end{aligned} \quad (3.50)$$

Para el caso $\langle 2,01, 11,1 \rangle$ i.e. $m'=\langle 1_{q'v}, 1_{qv} \rangle$, $n'=\langle 0 \rangle$, $m''=\langle 1_{p\lambda} \rangle$, $n''=\langle 1_{p\lambda} \rangle$, tenemos

$$\begin{aligned} & \sum_{\mu} (e_{\mu q'v} \delta_{\mu U}^* \langle 1_{q'v}; 1_{qk}; 1_{p\lambda}; 1_{p\lambda} \rangle + e_{\mu q'v} \delta_{\mu U}^* q'k \\ & \langle 1_{qv}; 1_{q'k}; 1_{p\lambda}; 1_{p\lambda} \rangle) = \sum_{\mu} (e_{\mu p'w} \delta_{\mu U}^* \langle 1_{qv}; 1_{q'v}; 0; 0; 1_{p\lambda}; 1_{p'w} \rangle \\ & - e_{\mu pw} \delta_{\mu U}^* \langle 1_{p'v}; 1_{q'v}; 0; 1_{p\lambda}; 1_{pw}; 0 \rangle). \end{aligned} \quad (3.51)$$

Para el caso $\langle 1,11, 12,0 \rangle$ i.e. $m'=\langle 1_{q'v} \rangle$, $n'=\langle 1_{qv} \rangle$, $m''=\langle 0 \rangle$, $n''=\langle 1_{p\lambda}, 1_{p\lambda} \rangle$, tenemos

$$\begin{aligned} & \sum_{\mu} (e_{\mu q'k} \delta_{\mu U}^* \langle 0; 1_{qv}; 1_{q'k}; 1_{p\lambda}; 1_{p\lambda}; 0 \rangle - e_{\mu p'v} \delta_{\mu U}^* qk \\ & \langle 1_{q'v}; 1_{qk}; 0; 1_{p\lambda}; 1_{p\lambda}; 0 \rangle) = \sum_{\mu} (e_{\mu p'w} \delta_{\mu U}^* \langle 1_{q'v}; 1_{qv}; 1_{p\lambda}; 1_{p\lambda} \rangle \\ & + e_{\mu pw} \delta_{\mu U}^* \langle 1_{q'v}; 1_{qv}; 1_{p\lambda}; 1_{pw} \rangle). \end{aligned} \quad (3.52)$$

Para el caso $\langle 1,11, 10,2 \rangle$ i.e. $m'=\langle 1_{q'v} \rangle$, $n'=\langle 1_{qv} \rangle$, $m''=\langle 1_{p\lambda}, 1_{p\lambda} \rangle$, $n''=\langle 0 \rangle$, tenemos

$$\sum (e^{*H} \chi_{q,k}^{\mu} U_{q,\nabla} \langle 0; 1_{q\nabla}, 1_{q',k}, 1_0; 1_{p,\lambda}, 1_{p\lambda} \rangle - e_{\mu\rho\nabla} \delta^{\mu} U_{qk}^* \langle 1_{q,\nabla}, 1_{qk}, 1_0; 1_{p,\lambda}, 1_{p\lambda} \rangle) = \sum (e_{\mu\rho\nabla} \delta^{\mu} U_{p,\lambda}^* \langle 1_{q,\nabla}, 1_{q\nabla}, 1_{p,\lambda}, 1_{p\lambda} \rangle + e_{\mu\rho\nabla} \delta^{\mu} U_{p\lambda}^* \langle 1_{q,\nabla}, 1_{q\nabla}, 1_{p\nabla}, 1_{p,\lambda} \rangle).$$

(3.53)

Ahora bien, haciendo uso de las siguientes igualdades

$$e^{*H} \chi_{p\nabla,\mu}^{\mu} U_{p\lambda} = \sqrt{2^{\lambda}} \delta_{\nabla,\lambda} \chi_{p-\lambda}^0 U_{p-\lambda}; \quad e_{\mu\rho\nabla} \delta^{\mu} U_{p\lambda}^* = \sqrt{2^{\lambda}} \delta_{\nabla,\lambda} \chi_{p-\lambda}^0 U_{p-\lambda}^*,$$

que son probadas en el apéndice (C) podemos reescribir (50)--(53) en la siguiente forma

$$-U_{q,-\nabla}^* \langle 1_{q,\nabla}, 1_{q\nabla}, 1_{p,\lambda}, 1_{p\lambda} \rangle - U_{q,-\nabla}^* \langle 1_{q\nabla}, 1_{q,\nabla}, 1_{p,\lambda}, 1_{p\lambda} \rangle \\ = U_{p,\lambda} \langle 0; 1_{q,\nabla}, 1_{q\nabla}, 1_0; 1_{p,\lambda}, 1_{p\lambda} \rangle - U_{p-\lambda}^* \langle 0; 1_{q\nabla}, 1_{q,\nabla}, 1_{p,\lambda}, 1_{p\lambda}, 1_0 \rangle,$$

(3.54)

$$U_{q-\nabla} \langle 1_{q,\nabla}, 1_{q\nabla}, 1_{p,\lambda}, 1_{p\lambda} \rangle + U_{q,-\nabla} \langle 1_{q\nabla}, 1_{q,\nabla}, 1_{p,\lambda}, 1_{p\lambda} \rangle = \\ U_{p,\lambda} \langle 1_{q\nabla}, 1_{q,\nabla}, 1_0; 1_{p\lambda}, 1_{p,\lambda} \rangle - U_{p-\lambda}^* \langle 1_{q\nabla}, 1_{q,\nabla}, 1_0; 1_{p,\lambda}, 1_{p\lambda} \rangle,$$

(3.55)

$$U_{q,-\nabla} \langle 0; 1_{q\nabla}, 1_{q,\nabla}, 1_{p,\lambda}, 1_{p\lambda}; 0 \rangle - U_{q-\nabla}^* \langle 1_{q,\nabla}, 1_{q\nabla}, 1_0; 1_{p,\lambda}, 1_{p\lambda}; 0 \rangle \\ = U_{p,-\lambda} \langle 1_{q,\nabla}, 1_{q\nabla}, 1_{p\lambda}; 1_{p,\lambda} \rangle + U_{p-\lambda} \langle 1_{q,\nabla}, 1_{q\nabla}, 1_{p,\lambda}, 1_{p\lambda} \rangle \quad y$$

(3.56)

$$U_{q,-\nabla} \langle 0; 1_{q\nabla}, 1_{q,\nabla}, 1_0; 1_{p,\lambda}, 1_{p\lambda} \rangle - U_{q-\nabla}^* \langle 1_{q,\nabla}, 1_{q\nabla}, 1_0; 1_{p,\lambda}, 1_{p\lambda} \rangle$$

$$= -U_{p,-\lambda}^* \langle 1_{q,-\nabla}; 1_{q,\nabla} | 1_{p,\lambda}; 1_{p,\lambda} \rangle - U_{p-\lambda}^* \langle 1_{q,-\nabla}; 1_{q,\nabla} | 1_{p\lambda}; 1_{p,\lambda} \rangle. \quad (3.57)$$

De aquí en adelante adoptaremos la siguiente convención: En las transiciones de probabilidad sólo se indicará la polarización de las partículas, ya que la posición de éstas en las transiciones denotará el momento de cada una de ellas i.e. $\langle m, n | n', m' \rangle \rightarrow \langle q', q | p', p \rangle$, ésto con el propósito tanto de utilizar como de comparar resultados de la referencia (8). Por lo cual las ecs. anteriores se transformarán en las siguientes

$$\begin{aligned} & -U_{q,-\nabla}^* \langle \nabla'/2, \nabla | \lambda', \lambda/2 \rangle - U_{q-\nabla}^* \langle \nabla', \nabla/2 | \lambda', \lambda/2 \rangle \\ & = U_{p,-\lambda} \langle \nabla', \nabla | \lambda'/2, \lambda/2 \rangle - U_{p-\lambda}^* \langle \nabla', \nabla | \lambda', \lambda \rangle, \end{aligned} \quad (3.58)$$

$$\begin{aligned} & U_{q-\nabla} \langle \nabla'/2, \nabla/2 | \lambda', \lambda/2 \rangle + U_{q,-\nabla} \langle \nabla', \nabla/2 | \lambda', \lambda/2 \rangle \\ & = U_{p,-\lambda} \langle \nabla'/2, \nabla/2 | \lambda'/2, \lambda/2 \rangle - U_{p-\lambda}^* \langle \nabla'/2, \nabla/2 | \lambda', \lambda \rangle, \end{aligned} \quad (3.59)$$

$$\begin{aligned} & U_{q,-\nabla} \langle \nabla', \nabla | \lambda', \lambda \rangle - U_{q-\nabla}^* \langle \nabla'/2, \nabla/2 | \lambda', \lambda \rangle \\ & = U_{p,-\lambda} \langle \nabla'/2, \nabla | \lambda'/2, \lambda \rangle + U_{p-\lambda} \langle \nabla'/2, \nabla | \lambda', \lambda/2 \rangle \quad y \end{aligned} \quad (3.60)$$

$$\begin{aligned} & U_{q,-\nabla} \langle \nabla', \nabla | \lambda'/2, \lambda/2 \rangle - U_{q-\nabla}^* \langle \nabla'/2, \nabla/2 | \lambda'/2, \lambda/2 \rangle \\ & = -U_{p,-\lambda}^* \langle \nabla'/2, \nabla/2 | \lambda', \lambda/2 \rangle - U_{p-\lambda}^* \langle \nabla'/2, \nabla | \lambda', \lambda/2 \rangle. \end{aligned} \quad (3.61)$$

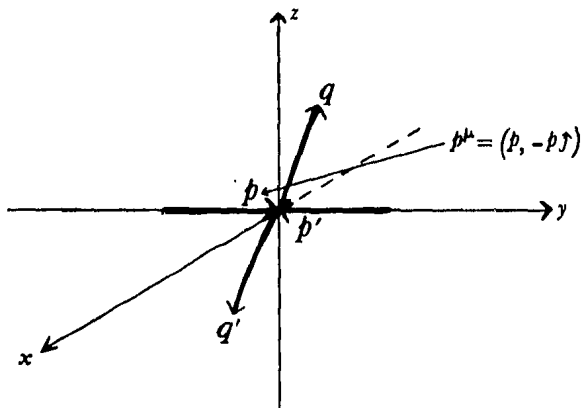
Dado que $\nabla, \nabla', \lambda, \lambda' = \pm 1$ tenemos 16 posibilidades para cada transición de probabilidad sin embargo utilizando (d.1) y (d.2) del apéndice D estas se reducen a 8, las cuales son

$$\langle +, + | +, + \rangle \quad \langle +, + | +, - \rangle \quad \langle +, + | - , + \rangle \quad \langle +, + | - , - \rangle \quad \langle - , + | +, + \rangle \quad \langle - , + | +, - \rangle \\ \dots \langle - , + | - , + \rangle \quad \langle - , + | - , - \rangle$$

donde se ha enfatizado solamente el signo de cada helicidad. Por lo cual tenemos 8 casos para cada ec. (58)---(59) i.e. 32 en total. Ahora bien de este total si utilizamos las dos restantes relaciones, (d.3) y (d.4), el número independiente de elementos se reduce a 11 los cuales son

$$\langle 1, 1 | 1, 1 \rangle \quad \langle 1, 1 | -1, 1 \rangle \quad \langle -1, -1 | 1, 1 \rangle \quad \langle 1/2, 1/2 | 1/2, 1/2 \rangle \\ \langle -1/2, -1/2 | 1/2, 1/2 \rangle \quad \langle 1, 1/2 | 1, 1/2 \rangle \quad \langle 1, 1/2 | -1, 1/2 \rangle \quad \langle 1, -1/2 | -1, 1/2 \rangle \\ \langle 1, 1/2 | -1, -1/2 \rangle \quad \langle 1, 1/2 | 1, -1/2 \rangle \quad \langle -1/2, 1/2 | 1/2, 1/2 \rangle.$$

Ahora calcularemos los spinores en el sistema Centro de Masa y para ello consideremos que los 3-momentos de las 4 partículas se encuentran en el plano z-y como muestra la figura.



En nuestro caso de $m = 0$, los $U_{p\lambda}$ cumplen las siguientes ecuaciones de eigenvalores ¹⁷

$$\begin{aligned}
 & (i\gamma_5 - \lambda)U_{p\lambda} = 0, \quad (\vec{\nabla} \cdot \vec{p}/|\rho| + \lambda)U_{p\lambda} = 0 \\
 \text{y} \\
 & U_{p\lambda}^* (i\gamma_5 - \lambda) = 0, \quad U_{p\lambda}^* (\vec{\nabla} \cdot \vec{p}/|\rho| + \lambda) = 0.
 \end{aligned}$$

Usando la relación $\gamma^{\alpha\beta} = i\gamma_5 \vec{\nabla} \longrightarrow \vec{\nabla} = i\gamma_5 \gamma^{\alpha\beta}$, y en nuestra representación

$$\nabla_2 = \begin{pmatrix} \nabla^2 & 0 \\ 0 & \nabla^2 \end{pmatrix}$$

Por lo que para la partícula p tenemos

$$(i\gamma_5 - 1)U_{p+} = 0, \quad (\nabla_2 + 1)U_{p+} = 0 \longrightarrow$$

$$U_{p+} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Mientras que para $\lambda = -1$ tenemos

$$(i\gamma_5 - 1)U_{p-} = 0, \quad (\nabla_2 - 1)U_{p-} = 0 \longrightarrow$$

 17. Ver sec. 30 de la ref. (3)

$$U_{p-} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Análogamente para la partícula p' tenemos

$$U_{p'+} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad U_{p'-} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Los spinores asociados a la partícula q (q') se encuentran rotando, alrededor del eje x , los encontrados para p (p') i.e. $U_q = R(\theta)U_p$, $U_{q'} = R(\theta)U_{p'}$. Recordemos que la matriz de rotación para un ángulo θ es en general $R(\theta) = 1\cos(\theta/2) - i\sin(\theta/2) \nabla \cdot \hat{n}$ y en nuestro caso $\hat{n} = \hat{i}$, por lo tanto $R(\theta) = 1\cos(\theta/2) - i\nabla_x \sin(\theta/2)$, por lo tanto

$$R(\theta) = 1\cos(\theta/2) - i\nabla_x \sin(\theta/2) = \begin{bmatrix} 0 & \nabla^3 \\ -\nabla^3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\cos(\theta/2) - \nabla^3 \sin(\theta/2) & \\ & \nabla^3 \sin(\theta/2) - 1\cos(\theta/2) \end{bmatrix}.$$

Luego

$$U_{q+} = R(\theta)U_{p+} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -i\sin(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) \\ 1\cos(\theta/2) \\ \cos(\theta/2) \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad U_{q-} = R(\theta)U_{p-} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} i\sin(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) \\ -1\cos(\theta/2) \\ \cos(\theta/2) \end{bmatrix}$$

$$U_{q'_+} = R(\theta)U_{p'_+} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -i\cos(\theta/2) \\ \cos(\theta/2) \\ -i\sin(\theta/2) \\ -\sin(\theta/2) \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad U_{q'_-} = R(\theta)U_{p'_-} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} i\cos(\theta/2) \\ \cos(\theta/2) \\ i\sin(\theta/2) \\ -\sin(\theta/2) \end{bmatrix}.$$

Ahora veamos los ocho casos posibles para la ecuación (58), sustituyendo en ella los spinores encontrados.

Para el caso $\nu' = +$, $\nu = +$, $\lambda' = +$, $\lambda = +$, tenemos

$$-U_{q'_-}^* \langle 1/2, 111, 1/2 \rangle - U_{q_-}^* \langle 1, 1/2 | 1, 1/2 \rangle = U_{p'_-} \langle 1, 111/2, 1/2 \rangle - U_{p_-}^* \langle 1, 111, 1 \rangle.$$

$$\implies \cos(\theta/2) \langle 1/2, 111, 1/2 \rangle = -\sin(\theta/2) \langle 1, 1/2 | 1, 1/2 \rangle, \quad (3.62)$$

$$\sin(\theta/2) \langle 1/2, 111, 1/2 \rangle - \cos(\theta/2) \langle 1, 1/2 | 1, 1/2 \rangle = -\langle 1, 111, 1 \rangle \quad \text{y}$$

$$(3.63)$$

$$\langle 1, 111/2, 1/2 \rangle = 0 \text{ pero } \langle 1, 111/2, 1/2 \rangle \simeq \langle 1, -1/2 | 1, -1/2 \rangle, \text{ por lo tanto } \langle 1, -1/2 | -1, 1/2 \rangle = 0. \quad (3.64)$$

Donde \simeq significa ser proporcional a. Esto es, por medio de las cuatro relaciones de simetría de cruce dadas en el apéndice D que nos permiten intercambiar el orden de las partículas en la amplitud de transición. Como veremos después a estas transiciones las definiremos en términos de nuevas funciones en analogía a como se encuentran en la referencia (8)

Para el caso $\nu' = +$, $\nu = +$, $\lambda' = +$, $\lambda = -$, resulta

$$-U_{q,-}^* \langle 1/2, 111, 1/2 \rangle - U_{q,-}^* \langle 1, 1/2 | 1, 1/2 \rangle = U_{p,-} \langle 1, 111/2, 1/2 \rangle - U_{p,+}^* \langle 1, 111, 1 \rangle$$

$$\implies \langle 1, 111, -1 \rangle = 0 = \langle 1, 111/2, -1/2 \rangle \simeq \langle 1, 1/2 | -1, 1/2 \rangle \quad (3.65)$$

por lo tanto $U_{q,-}^* \langle 1/2, 111, -1/2 \rangle = -U_{q,-}^* \langle 1, 1/2 | 1, -1/2 \rangle = 0$ por (69), luego esta relación se cumple trivialmente.

Para el caso $\nabla' = +$, $\nabla = +$, $\lambda' = -$, $\lambda = +$, tenemos

$$-U_{q,-}^* \langle 1/2, 11-1, 1/2 \rangle - U_{q,-}^* \langle 1, 1/2 | -1, 1/2 \rangle = U_{p,+} \langle 1, 11-1/2, 1/2 \rangle - U_{p,-}^* \langle 1, 11-1, 1 \rangle$$

esta relación se cumple trivialmente, ya que por ejemplo de (65) tenemos que $\langle 1, 11-1, 1 \rangle \simeq \langle 1, 111, -1 \rangle = 0$, análogamente las demás.

Para el caso $\nabla' = +$, $\nabla = +$, $\lambda' = -$, $\lambda = -$, resulta

$$-U_{q,-}^* \langle 1/2, 11-1, -1/2 \rangle - U_{q,-}^* \langle 1, 1/2 | -1, -1/2 \rangle = U_{p,+} \langle 1, 11-1/2, 1/2 \rangle - U_{p,+}^* \langle 1, 11-1, -1 \rangle$$

$$\implies \langle 1, 11-1, -1 \rangle = 0 \quad (3.66)$$

$$\text{y } \sin(\theta/2) \langle 1/2, 11-1, -1/2 \rangle = \cos(\theta/2) \langle 1, 1/2 | -1, -1/2 \rangle \quad (3.67)$$

$$-\cos(\theta/2) \langle 1/2, 11-1, -1/2 \rangle - \sin(\theta/2) \langle 1, 1/2 | -1, -1/2 \rangle = \langle 1, 11-1/2, -1/2 \rangle$$

$$(3.68)$$

Para $\nabla' = -, \nabla = +, \lambda' = +, \lambda = +$, tenemos

$$-U_{q,+}^* \langle -1/2, 1|1, 1/2 \rangle - U_{q,-}^* \langle -1, 1/2|1, 1/2 \rangle = U_{p,-}^* \langle -1, 1|1/2, 1/2 \rangle - U_{p-}^* \langle -1, 1|1, 1 \rangle$$

$$\implies 0 = \langle -1, 1/2|1, 1/2 \rangle = \langle -1/2, 1|1, 1/2 \rangle = \langle -1, 1|1/2, 1/2 \rangle \simeq \langle 1, 1/2|1, -1/2 \rangle \quad (3.69)$$

Para $\nabla' = -, \nabla = +, \lambda' = +, \lambda = -$, resulta

$$-U_{q,+}^* \langle -1/2, 1|1, -1/2 \rangle - U_{q,-}^* \langle -1, 1/2|1, -1/2 \rangle = U_{p,-}^* \langle -1, 1|1/2, -1/2 \rangle - U_{p+}^* \langle -1, 1|1, -1 \rangle$$

$$\implies \langle -1, 1/2|1, -1/2 \rangle = 0 \quad (3.70)$$

$$-\cos(\theta/2) \langle -1/2, 1|1, -1/2 \rangle = \langle -1, 1|1/2, -1/2 \rangle \quad (3.71)$$

$$-\sin(\theta/2) \langle -1/2, 1|1, -1/2 \rangle = \langle -1, 1|1, -1 \rangle \quad (3.72)$$

Para $\nabla' = -, \nabla = +, \lambda' = -, \lambda = +$, tenemos

$$-U_{q,+}^* \langle -1/2, 1|1, -1, 1/2 \rangle - U_{q,-}^* \langle -1, 1/2|1, 1/2 \rangle = U_{p,+}^* \langle -1, 1|1-1/2, 1/2 \rangle - U_{p-}^* \langle -1, 1|1, 1 \rangle$$

$$\implies 0 = \langle -1/2, 1|1-1, 1/2 \rangle \simeq \langle -1, 1/2|1, -1/2 \rangle \quad (3.73)$$

$$\sin(\theta/2) \langle -1, 1/2|1, 1/2 \rangle = -\langle -1, 1|1-1/2, 1/2 \rangle \quad (3.74)$$

$$\cos(\theta/2) \langle -1, 1/2|1, 1/2 \rangle = \langle -1, 1|1, 1 \rangle \dots \dots (3.75)$$

Para $\nabla' = -, \nabla = +, \lambda' = -, \lambda = -$, resulta

$$-U_{q,+}^* \langle -1/2, 1|1, -1, -1/2 \rangle - U_{q,-}^* \langle -1, 1/2|1, -1/2 \rangle$$

$$U_{p+} \langle -1, 1|1/2, -1/2 \rangle - U_{p+}^* \langle -1, 1|-1, -1 \rangle$$

$$\implies 0 = \langle -1/2, 1|-1, -1/2 \rangle \cong \langle -1, -1/2|1, 1/2 \rangle \quad (3.76)$$

Ahora bien, de (65), (66), (69), (70), (73) y (76) notamos que nuestro conjunto independiente decrece al siguiente

$$\langle 1, 1|1, 1 \rangle \langle 1/2, 1/2|1/2, 1/2 \rangle > \langle -1/2, -1/2|1/2, 1/2 \rangle \langle 1, 1/2|1, 1/2 \rangle \\ \langle 1, 1/2|-1, -1/2 \rangle \langle 1/2, 1/2|-1/2, 1/2 \rangle.$$

En términos de nuestras amplitudes de transición independientes definimos las siguientes funciones

$$\langle 1, 1|1, 1 \rangle \equiv E(\langle 1, 1, 1, 1; s, t, u \rangle)$$

$$\langle 1, 1/2|1, 1/2 \rangle \equiv F(1, 1/2, 1, 1/2; s, t, u)$$

$$\langle 1/2, 1/2|1/2, 1/2 \rangle \equiv G(1/2, 1/2, 1/2, 1/2; s, t, u)$$

$$\langle 1, 1/2|-1, -1/2 \rangle \equiv K(1, 1/2, -1, -1/2; s, t, u)$$

(3.77)

Estas resultan ser nuestras funciones fundamentales, ya que

$$\langle 1/2, 1/2|-1/2, 1/2 \rangle \equiv H(1/2, 1/2, -1/2, 1/2; s, t, u) = 0$$

$$\langle -1/2, -1/2|1/2, 1/2 \rangle \equiv J(-1/2, -1/2, 1/2, 1/2; s, t, u) = 0$$

La primera resulta de la ec. (59), para el caso $\nabla' = +$, $\nabla = +$, $\lambda' = -$, $\lambda = +$, mientras que la segunda para el caso $\nabla' = +$, $\nabla = +$, $\lambda' = -$, $\lambda = -$.

Ahora queremos determinar las relaciones independientes entre las amplitudes de transición. Para esto, reescribiremos el sistema de relaciones (63), (64), (67), (68), (71), (72), (74) y (75) en términos de las funciones (77), con la ayuda de las cuatro relaciones del apéndice D. Ahora bien, lo que haremos es definir cada una de nuestras amplitudes en términos de una función tipo (77), y luego mediante el uso de las cuatro relaciones veremos a qué tipo de (77) corresponde, por ejemplo

$$\langle 1/2, 111, 1/2 \rangle = A(1/2, 1, 1, 1/2; s, t, u) = A(1, 1/2, 1, 1/2; s, u, t)$$

[Utilizando (d.2) y (d.3)], luego A es del tipo F. Por lo cual para el sistema de relaciones antes mencionado, i.e. provenientes de la ecuación (58), resulta:

$$F(1, 1/2, 1, 1/2; s, t, u) = \cos(\theta/2) E(1, 1, 1, 1; s, t, u) \tag{3.78}$$

$$F(1, 1/2, 1, 1/2; s, u, t) = -\sin(\theta/2) E(1, 1, 1, 1; s, t, u) \tag{3.79}$$

$$F(1, 1/2, 1, 1/2; u, s, t) = -i \sin(\theta/2) F(1, 1/2, 1, 1/2; u, t, s) \tag{3.80}$$

$$E(1, 1, 1, 1; u, s, t) = \cos(\theta/2) F(1, 1/2, 1, 1/2; u, t, s) \tag{3.81}$$

$$F(1,1/2,1,1/2;t,s,u) = -\text{icos}(\theta/2)F(1,1/2,1,1/2;t,u,s) \quad (3.82)$$

$$E(1,1,1,1;t,s,u) = \text{sen}(\theta/2)F(1,1/2,1,1/2;t,u,s) \quad (3.83)$$

$$K(1,1/2,-1,-1/2;s,t,u) = -\text{isen}(\theta/2)K(1,1/2,-1,-1/2;t,s,u) \quad (3.84)$$

$$K(1,1/2,-1,-1/2;s,u,t) = \text{icos}(\theta/2)K(1,1/2,-1,-1/2;t,s,u) \quad (3.85)$$

Es de notarse que (81) = (83) y (80) = (82), teniendo presente que $\cos(\theta/2) = (-u/s)^{1/2}$ y $\text{sen}(\theta/2) = (-t/s)^{1/2}$, lo cual puede verificarse si se hace lo siguiente: $u \langle \text{---} \rangle t$, $s \langle \text{---} \rangle s$, $t \langle \text{---} \rangle u$. Estas relaciones entre amplitudes de transición son nuestras predicciones al proceso de dispersión que provienen de la ec. (58), y nos faltan aún por examinar las tres restantes. Repitiendo el cálculo de una manera similar a como lo hemos hecho para (58), tenemos para la ec. (59) el siguiente sistema de relaciones análogo a (78)-(85)

$$F(1,1/2,1,1/2;s,u,t) = -\text{sen}(\theta/2)G(1/2,1/2,1/2,1/2;s,t,u) \quad (3.86)$$

$$E(1,1/2,1,1/2;s,t,u) = \text{cos}(\theta/2)G(1/2,1/2,1/2,1/2;s,t,u)$$

(3.87)

$$G(1/2, 1/2, 1/2, 1/2; u, s, t) = -\cos(\theta/2)F(1, 1/2, 1, 1/2; u, t, s);$$

(3.88)

$$F(1, 1/2, 1, 1/2; u, s, t) = -i\operatorname{sen}(\theta/2)n_1n_2n_3n_4F(1, 1/2, 1, 1/2; u, t, s)$$

(3.89)

$$G(1/2, 1/2, 1/2, 1/2; t, s, u) = -\operatorname{sen}(\theta/2)F(1, 1/2, 1, 1/2; t, u, s)$$

(3.90)

$$F(1, 1/2, 1, 1/2; t, s, u) = -i\cos(\theta/2)n_1n_2n_3n_4F(1, 1/2, 1, 1/2; t, u, s)$$

(3.91)

$$K(1, 1/2, -1, -1/2; s, t, u) = i\operatorname{sen}(\theta/2)K(1, 1/2, -1, -1/2; t, s, u)$$

(3.92)

$$-n_1n_2n_3n_4K(1, 1/2, -1, -1/2; s, u, t) = -i\cos(\theta/2)K(1, 1/2, -1, -1/2; t, s, u)$$

(3.93)

Mientras que para la ec. (60) obtenemos

$$F(1, 1/2, 1, 1/2; s, t, u) = \cos(\theta/2)E(1, 1, 1, 1; s, t, u)$$

(3.94)

$$F(1, 1/2, 1, 1/2; s, u, t) = -\operatorname{sen}(\theta/2)E(1, 1, 1, 1; s, t, u)$$

(3.95)

$$F(1,1/2,1,1/2;u,s,t) = -i \operatorname{sen}(\theta/2) F(1,1/2,1,1/2;u,t,s)$$

(3.96)

$$n_1 n_2 n_3 n_4 E(1,1,1,1;u,s,t) = -\cos(\theta/2) F(1,1/2,1,1/2;u,t,s)$$

(3.97)

$$F(1,1/2,1,1/2;u,s,t) = i \cos(\theta/2) F(1,1/2,1,1/2;t,u,s)$$

(3.98)

$$n_1 n_2 n_3 n_4 E(1,1,1,1;t,s,u) = -\operatorname{sen}(\theta/2) F(1,1/2,1,1/2;t,u,s)$$

(3.99)

$$K(1,1/2,-1,-1/2;s,t,u) = -i \operatorname{sen}(\theta/2) K(1,1/2,-1,-1/2;t,s,u)$$

(3.100)

$$K(1,1/2,-1,-1/2;s,u,t) = -i \cos(\theta/2) K(1,1/2,-1,-1/2;t,s,u)$$

(3.101)

Y finalmente para la ec. (61) tenemos

$$F(1,1/2,1,1/2;s,u,t) = -\operatorname{sen}(\theta/2) \theta(1/2,1/2,1/2,1/2;s,t,u)$$

(3.102)

$$F(1,1/2,1,1/2;s,t,u) = \cos(\theta/2) \theta(1/2,1/2,1/2,1/2;s,t,u)$$

(3.103)

$$n_1 n_2 n_3 n_4 B(1/2, 1/2, 1/2, 1/2; u, s, t) = -\cos(\theta/2) F(1, 1/2, 1, 1/2; u, t, s)$$

(3.104)

$$F(1, 1/2, 1, 1/2; u, s, t) = -i \sin(\theta/2) F(1, 1/2, 1, 1/2; u, t, s)$$

(3.105)

$$n_1 n_2 n_3 n_4 B(1/2, 1/2, 1/2, 1/2; t, s, u) = -\sin(\theta/2) F(1, 1/2, 1, 1/2; t, u, s)$$

(3.106)

$$F(1, 1/2, 1, 1/2; t, s, u) = -i \cos(\theta/2) F(1, 1/2, 1, 1/2; t, u, s)$$

(3.107)

$$K(1, 1/2, -1, -1/2; s, u, t) = -i \cos(\theta/2) K(1, 1/2, -1, -1/2; t, s, u)$$

(3.108)

$$K(1, 1/2, -1, -1/2; s, t, u) = -i \sin(\theta/2) K(1, 1/2, -1, -1/2; t, s, u)$$

(3.109)

Notamos que muchas de las relaciones (78)–(109) se repiten, por lo cual veamos a cuanto decrece nuestro sistema de 32 relaciones, observamos que (78) = (94), (79) = (95) = (97) = (99), (80) = (82) = (89) = (91) = (96) = (105) = (107), (81) = (83), (86) = (88) = (90) = (102) = (104) = (106), (87), (98), para que se cumplan las igualdades se deberá tener que

$n_1 n_2 n_3 n_4 = 1$, la cual se satisface automáticamente ya que los n_i son paridades intrínsecas a las partículas, y como tenemos sólo dos clases de ellas entonces tenemos el producto de los cuadrados de las paridades para partículas de spin-1 y spin-1/2. Por otro lado, tenemos que de (84) = (100) = (109) y (92), no son consistentes, además de que con (93) = (101) = (108) y (93) sucede lo mismo, por lo $K(1, 1/2, -1, -1/2; s, t, u) = 0$ y por ende la transición $\langle 1, 1/2 | -1, -1/2 \rangle = 0$. Luego finalmente nuestras relaciones independientes decrecen a 7, siendo las siguientes (78), (79), (80), (81), (86), (87), (98).

RESUMEN Y CONCLUSIONES

En los dos primeros capítulos de esta Tesis exponemos la Teoría de Fuentes comenzando por definir el concepto de fuente asociada a una partícula la cual engloba tanto la idea de creación como la de detección de ésta. Encontramos que las fuentes que describen partículas de spin-0 y 1 son funciones escalares y vectoriales respectivamente en tanto que las de spin-1/2 son spinores de cuatro componentes. Posteriormente encontramos que los estados de multipartículas son característicos de una estadística de Bose-Einstein para spin-0 y spin-1, mientras que las partículas de spin-1/2, satisfacen el principio de exclusión y por ende los estados de multipartículas son característicos de una estadística de Fermi-Dirac.

Nos vimos forzados a aceptar el carácter grassmanniano de las fuentes fermiónicas por lo que estos números tienen un sentido físico claro dentro de la teoría. Luego de una manera análoga al caso electrostático definimos el campo asociado a una fuente por lo que al considerar un arreglo causal de las fuentes el campo asociado a dicho arreglo en todo punto entre ellas fue la suma de los campos asociados a la fuente detectora y emisora.

Además encontramos las ecuaciones de movimiento para cada campo asociado a las partículas de spin-0, 1 y 1/2, con lo cual pudimos

definir un lagrangiano para cada campo libre de donde notamos que la amplitud de vacío-vacío definida con anterioridad resulto ser igual a la exponencial de la acción.

Dado que T.F. es una teoría de campos resulta pues natural el cuestionarse bajo qué simetrías los lagrangianos de esta teoría serán invariantes y a qué cantidades conservadas darán origen. En el capítulo tres en primer lugar nos dimos a la tarea de encontrar la cantidad conservada para el caso de invariancia del lagrangiano de partícula cargada de spin-0 bajo rotaciones en el espacio de carga. También consideramos el caso de mucho mayor interés que es el de la invariancia de la suma de los lagrangianos libres para partículas de spin-1 y spin-1/2, (sin masa) bajo supersimetría.

En el primer caso, encontramos que lo que se conoce como "carga" $Q = \int dx J^0$, pudo ser evaluado antes y después de la interacción obteniendo que ésta es igual a

$$\int J^0(\vec{x}, t) d\vec{x} = \frac{\sum \langle 0_+ | \langle n \rangle^{k_1} \langle n | Q | n \rangle \langle n | 0_- \rangle^{k_2}}{\sum \langle 0_+ | \langle n \rangle^{k_1} \langle n | 0_- \rangle^{k_2}}$$

Esta expresión no coincide con la análoga en T.C.C. y por ende su interpretación es diferente. Ahora bien resultó en este caso que el elemento de matriz en la región de interacción fue diagonal (i.e. $\langle n | Q | n \rangle = Q(n) \delta_{n,n}$), por lo que la "carga" Q representa un promedio pesado de la carga eléctrica total de los estados $|n\rangle$. Debido a la ecuación de conservación para J^u encontramos que la carga eléctrica total (i.e. $\sum_{pq} n_{pq}$) antes y

después de la región de interacción se conservaba. Una vez familiarizados tanto con las ideas físicas así como con el álgebra involucrada atacamos el problema de mucho mayor complejidad relacionado con las implicaciones de supersimetría en T.F. En este caso encontramos que el elemento de matriz de la cantidad conservada en la región de interacción supersimétrica no era diagonal. Utilizando la conservación de la supercorriente en la región fuera de las fuentes obtuvimos como cantidades conservadas, cuatro ecuaciones que nos relacionaban las transiciones de probabilidad entre los estados antes y después de la interacción supersimétrica. Obtuvimos treinta y dos relaciones entre las diferentes transiciones siendo sólo siete de estas relaciones independientes y las cuales constituyen las predicciones de nuestra teoría al proceso de dispersión para partículas de spin-1 y 1/2 sin masa.

Debemos hacer notar que debido a que no conocemos el término de interacción no nos es posible poder corroborar explícitamente nuestros resultados. Sin embargo no encontramos inconsistencias y además hallamos que las cuatro transiciones de probabilidad para partículas de spin-1 y 1/2 siguientes, $\langle 1, 1/2 | -1, -1/2 \rangle$, $\langle 1, 1/2 | -1, 1/2 \rangle$, $\langle 1, 1/2 | 1, -1/2 \rangle$, $\langle -1, 1/2 | 1, -1/2 \rangle$ son nulas en completa analogía al caso de spin-2 y 3/2 tratado en la ref.8 mediante Teoría Cuántica de Campos.

APENDICE A

Propiedades de los $U_{p\sigma}$

Con la ayuda de (1.45) tenemos:

$$\begin{aligned} U_{p\sigma}^* \gamma^0 U_{p\sigma'} &= V_{\sigma'}^* \exp\{i\theta\bar{P}/|P|\} \gamma^0 \bar{\gamma} / 2 \gamma^0 \exp\{i\theta\bar{P}/|P|\} \gamma^0 \gamma / 2 V_{\sigma} \\ &= V_{\sigma'}^* V_{\sigma} = \delta_{\sigma', \sigma} \end{aligned}$$

por lo tanto tenemos la normalización:

$$U_{p\sigma}^* \gamma^0 U_{p\sigma'} = \delta_{\sigma', \sigma} \quad (\text{a.1})$$

Dado que $(m + \not{P})(m - \not{P}) = (m - \not{P})(m + \not{P}) = 0$, utilizando (1.42) tenemos que $(m + \not{P}) \sum_{\sigma} U_{p\sigma} U_{p\sigma}^* \gamma^0 = 0$, por lo cual al multiplicar por $U_{p\sigma}$ y usando (1), resulta

$$(m + \not{P}) U_{p\sigma} = 0 \quad (\text{a.2})$$

análogamente se obtiene

$$U_{p\sigma}^* \gamma^0 (m + \not{P}) = 0.$$

Luego vemos que los spinores $U_{p\sigma}$ satisfacen la ecuación de DIRAC.

APENDICE B

Deseamos calcular $i(F^{\alpha\nu}\gamma_{\nu} + {}^*\!F^{\alpha\nu}\gamma_{\nu}\gamma_5)$. Para ello recordemos

$$[\gamma^{\mu}, \nabla^{\nu\rho}] = \gamma^{\mu}\nabla^{\nu\rho} - \nabla^{\nu\rho}\gamma^{\mu} = 2i(g^{\mu\rho}\gamma^{\nu} - g^{\mu\nu}\gamma^{\rho})$$

$$\therefore \nabla^{\nu\rho}\gamma^{\mu} = \gamma^{\mu}\nabla^{\nu\rho} - 2i(g^{\mu\rho}\gamma^{\nu} - g^{\mu\nu}\gamma^{\rho}), \text{ pero}$$

$$\gamma^{\mu}\nabla^{\nu\rho} = i(g^{\mu\rho}\gamma^{\nu} - g^{\mu\nu}\gamma^{\rho}) - i\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\gamma_{\sigma}\gamma_5$$

$$\therefore \nabla^{\nu\rho}\gamma^{\mu} = -i(g^{\mu\rho}\gamma^{\nu} - g^{\mu\nu}\gamma^{\rho}) - i\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\gamma_{\sigma}\gamma_5$$

(b.1)

Ahora consideremos la expresión que deseamos calcular.

$$\begin{aligned} i(F^{\alpha\nu}\gamma_{\nu} + {}^*\!F^{\alpha\nu}\gamma_{\nu}\gamma_5)\psi &= iF^{\alpha\nu}\gamma_{\nu}\psi - i{}^*\!F^{\alpha\nu}\gamma_{\nu}\gamma_5\psi \\ &= -(i/2)F^{k\lambda}\gamma_k\psi + (i/2)F^{\alpha\lambda}\gamma_{\lambda}\psi - i(1/2)\epsilon^{\alpha\nu k\lambda}F_{k\lambda}\gamma_5\gamma_{\nu}\psi \\ &= -(i/2)F_k{}^{\alpha}\gamma^k\psi + (i/2)F_{\lambda}{}^{\alpha}\gamma^{\lambda}\psi - i(1/2)\epsilon^{k\lambda\alpha\nu}F_{k\lambda}\gamma_5\gamma_{\nu}\psi \\ &= -(i/2)F_{k\lambda}[(g^{\alpha\lambda}\gamma^k - g^{\alpha k}\gamma^{\lambda}) + \epsilon^{k\lambda\alpha\nu}\gamma_5\gamma_{\nu}]\psi \\ &= (1/2)F_{k\lambda}\gamma^{k\lambda}\psi \end{aligned} \tag{b.2}$$

APENDICE C

Deseamos calcular expresiones como $e^{*\mu}_{\rho\nu} \gamma^{\nu}{}_{\mu} U_{\rho\lambda}$, $e_{\mu\rho\nu} \gamma^{\mu} U^*_{\rho\lambda}$. Para ello consideremos un sistema de coordenadas particular. Este será tal que p es paralelo al eje z . Luego $F^{\mu} = (|P^0|, 0, 0, |P^0|)$ y $e^{\mu}_{\rho\lambda} = (0, \bar{e}_{\rho\lambda})$

c.1

Ya que $F_{\mu} e^{\mu}_{\rho\lambda} = 0$, dado que la componente cero de los $e^{\mu}_{\rho\lambda}$ es nula, entonces

$$\vec{F} \cdot \bar{e}_{\rho\lambda} = 0 \implies \text{que podemos elegir } \hat{e}_{\rho 1} = \hat{i}, \hat{e}_{\rho 2} = \hat{j}.$$

Como sabemos el fotón está descrito por dos polarizaciones $\bar{e}_{\rho\lambda}$, con $\lambda=1,2$, perpendiculares al momento \vec{F} . Ahora bien, podemos escoger cualquier combinación lineal de estos vectores. Una particularmente útil es:

$$\hat{e}^*_{\rho+1} = (1/\sqrt{2}) [-\hat{e}_{\rho 1} + i\hat{e}_{\rho 2}] = (1/\sqrt{2}) [-\hat{i} + i\hat{j}]$$

(c.2)

$$\hat{e}^*_{\rho-1} = (1/\sqrt{2}) [\hat{e}_{\rho 1} + i\hat{e}_{\rho 2}] = (1/\sqrt{2}) [\hat{i} + i\hat{j}]$$

Ahora bien, los spinores $U_{\rho\lambda}$, en nuestro caso de $m = 0$, cumplen las siguientes ecuaciones de eigenvalores:¹

$$(i\gamma_5 - \lambda)U_{p\lambda} = 0, \quad U_{p\lambda}^* (i\gamma_5 - \lambda) = 0$$

(c.3)

$$(\vec{\nabla} \cdot \vec{P} / |P| + \lambda)U_{p\lambda} = 0, \quad U_{p\lambda}^* (\vec{\nabla} \cdot \vec{P} / |P| + \lambda) = 0.$$

Luego en este sistema, nuestros $U_{p\lambda}$ resultan ser eigenvalores de ∇_3 , i.e. $\nabla_3 U_{p\lambda} = -\lambda U_{p\lambda}$, $\lambda = \pm 1$.

Además que estos eigenvectores estén relacionados por las operaciones usuales de spin, i.e.

$$(1/2)[\nabla_1 + i\nabla_2]U_{p-} = U_{p+}, \quad (1/2)[\nabla_1 - i\nabla_2]U_{p+} = U_{p-} \quad (c.4)$$

Existen además las siguientes relaciones entre un spinor y su complejo conjugado:

$$U_{p\lambda}^* = U_{p-\lambda} \quad (c.5)$$

Basta calcular las siguientes cuatro expresiones:

$$\begin{aligned} e^{\mu*}_{p+} \gamma_{\mu} U_{p-} &= [-\hat{1} + i\hat{2}] \gamma_{\mu} U_{p-} / \sqrt{2} = [-\gamma_1 + i\gamma_2] U_{p-} \\ &= \gamma^0 [-\gamma^0 \gamma_1 + i\gamma^0 \gamma_2] U_{p-} / \sqrt{2} = \gamma^0 [-i\gamma_5 \nabla_1 - \gamma_5 \nabla_2] U_{p-} / \sqrt{2} \\ &= -i\gamma^0 \gamma_5 / \sqrt{2} [\nabla_1 - i\nabla_2] U_{p-} = 0. \end{aligned}$$

$$e^{\mu*}_{p-} \gamma_{\mu} U_{p+} = [\hat{1} + i\hat{2}] \gamma_{\mu} U_{p+} / \sqrt{2} = 1/\sqrt{2} [\gamma_1 + i\gamma_2] U_{p+}$$

1. Ver Landau. Teoría Cuántica Relativista, volumen 4, Parte 1, sección 30

$$= \gamma^0 / \sqrt{2} [i \gamma^0 \gamma_1 + i \gamma_0 \gamma_2] U_{p+} = \gamma^0 [i \gamma_5 \nabla_1 - \gamma_5 \nabla_2] U_{p+} / \sqrt{2}$$

$$= i \gamma^0 \gamma_5 / \sqrt{2} (\nabla_1 + i \nabla_2) U_{p+} = 0.$$

$$e^{*\mu}_{p+} \gamma_{\mu} U_{p+} = -i \gamma^0 \gamma_5 (\nabla_1 - i \nabla_2) U_{p+} / \sqrt{2} = -\sqrt{2} \gamma^0 i \gamma_5 U_{p-} \quad (c.6)$$

$$e^{*\mu}_{p-} \gamma_{\mu} U_{p-} = i \gamma^0 \gamma_5 (\nabla_1 + i \nabla_2) U_{p-} / \sqrt{2} = \sqrt{2} \gamma^0 i \gamma_5 U_{p+} \quad (c.7)$$

donde hemos hecho uso de la siguiente igualdad $\gamma^0 \bar{\gamma} = i \gamma_5 \bar{\nabla}$.

Notando de (2) que $\hat{e}_{p-} = -\hat{e}_{p+}^*$ y $\hat{e}_{p+} = -\hat{e}_{p-}^*$ y haciendo uso de (5) tenemos:

$$e^{*\mu}_{p-} \gamma_{\mu} U_{p-} = e^{*\mu}_{\mu p-} \gamma^{\mu} U_{p-} = -e_{\mu p+} \gamma^{\mu} U_{p+}^*$$

$$e^{*\mu}_{p+} \gamma_{\mu} U_{p+} = e^{*\mu}_{\mu p+} \gamma^{\mu} U_{p+} = -e_{\mu p-} \gamma^{\mu} U_{p-}^*.$$

Por lo cual de (6) y (7) tendremos

$$-e_{\mu p+} \gamma^{\mu} U_{p+}^* = \gamma^0 i \gamma_5 U_{p-}^* / \sqrt{2} \quad (c.8)$$

$$-e_{\mu p-} \gamma^{\mu} U_{p-}^* = \gamma^0 i \gamma_5 U_{p+}^* / \sqrt{2} \quad (c.9)$$

Siendo las otra dos relaciones iguales a cero.

Haciendo uso de (3) tenemos que (6), (7), (8) y (9) resultan ser

$$e^{*\mu}_{p+} \gamma_{\mu} U_{p+} = \gamma^0 U_{p-} / \sqrt{2}, \quad e^{*\mu}_{p-} \gamma_{\mu} U_{p-} = \gamma^0 U_{p+} / \sqrt{2}$$

$$e_{\mu p+} \gamma^{\mu} U_{p+}^* = \gamma^0 U_{p-}^* / \sqrt{2}, \quad e_{\mu p-} \gamma^{\mu} U_{p-}^* = \gamma^0 U_{p+}^* / \sqrt{2}$$

Por lo tanto

$$e^{*\mu}_{\rho\nabla} \gamma^{\mu}_{\rho\lambda} = \delta_{\nabla,\lambda} \sqrt{2} \gamma^{\square U}_{\rho-\lambda}$$

$$e_{\mu\rho\nabla} \gamma^{\mu U*}_{\rho\lambda} = \delta_{\nabla,\lambda} \sqrt{2} \gamma^{\square U*}_{\rho-\lambda}$$

APENDICE D

Las amplitudes de transición satisfacen las siguientes relaciones como consecuencia de: ¹

1.- La simetría de reflexión espacial

$$F(\lambda_3, \lambda_4; \lambda_1, \lambda_2; s, t, u) = n_1 n_2 n_3 n_4 (-1)^{\lambda_s} (-1)^{\lambda_T} F(-\lambda_3, -\lambda_4; -\lambda_1, -\lambda_2; s, t, u)$$

(d.1)

2.- Invariancia bajo inversión temporal

$$F(\lambda_3, \lambda_4; \lambda_1, \lambda_2; s, t, u) = (-1)^{\lambda_T} F(\lambda_1, \lambda_2; \lambda_3, \lambda_4; s, t, u)$$

(d.2)

3.- El intercambio de las partículas 1 y 2 produce

$$F(\lambda_3, \lambda_4; \lambda_1, \lambda_2; s, t, u) = (-1)^{\lambda_T} (-1)^{2s_2} (-1)^{\nabla_2} F(\lambda_3, \lambda_4; \lambda_2, \lambda_1; s, u, t)$$

(d.3)

4.- El intercambio de las partículas 1 y 4 origina

1. Si se desea saber como se hallan tales relaciones, consultar ref. (10)

$$F(\lambda_3, \lambda_4 | \lambda_1, \lambda_2; s, t, u) = (-1)^{\nabla_{14}} (-1)^{2s_2} e^{i\pi(\lambda_2 - \lambda_3)} (-1)^{s_4 - \lambda_4} (-1)^{s_1 - \lambda_1}$$

$$F(\lambda_3, -\lambda_1 | -\lambda_4, \lambda_2; t, s, u)$$

(d.4)

Donde $\lambda_S = |\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4|$, $\lambda_T = |\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 + \lambda_4|$

s_i es el spin de la partícula i , $\lambda_r = s_1 + s_2 + s_3 + s_4$

$\nabla_{12} = 1$ cuando tanto la partícula 1 como la 2 sean fermiones, cero en otro caso

$\nabla_{14} = 1$ cuando tanto la partícula 1 como la 4 sean fermiones, cero en otro caso

los n_i son factores de paridad intrínseca asociados con cada una de las partículas.

REFERENCIAS

1. J. L. Lopes, 1977, Introducción a la Electrodinámica Cuántica, Trillas, Cd. México.
2. Bjorken and Drell, 1964, Relativistic Quantum Mechanics, Mc Graw-Hill, New York.
3. Landau and Lifshitz, Relativistic Quantum Theory, (Volume 4 of Course of Theoretical Physics), Pergamon-Press.
4. J. Schwinger, 1970, Particles, Sources and Fields, Addison-Wesley.
5. J. Schwinger, 1970, Particles and Sources, Gordon and Breach, New York.
6. Daniel Z. Freedman y Peter van Nieuwenhuizen, 1978, "SUPERGRAVEDAD Y LA UNIFICACION DE LAS LEYES DE LA FISICA", INVESTIGACION Y CIENCIA, Abril, 78.
7. J. Schwinger, 1966, "Particles and Sources", Phys. Rev. 152, 1219.
8. M. T. Grisaru and H. N. Pendleton, 1977, "Supergravity and the S-Matrix", Phys. Rev. D 15, 996.

9. W. Becker and D. Grosser, 1978, "Difficulties with the S-Matrix in Supergravity", Phys. Rev. D 18, 644.
10. J. P. Ader, M. Capdeville, and H. Navelet, 1968, Nuovo Cimento 56, 315.