29

Universidad Nacional Autónoma de México

FACULTAD DE CIENCIAS

DEGENERACION ACCIDENTAL EN EL EFECTO ZEEMAN Y SU GRUPO DE SIMETRIA EN EL CASO DEL OSCILADOR ARMONICO

TESIS PROFESIONAL

Que para obtener el título de

F I S I C O

p r e s e n t a

ESTHER MUROW FRANKLIN

MEXICO, D. F. ABRIL 1984

UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

INDICE

INTRODUCCION

En los últimos cuarenta años el tema de degeneración accidental de niveles de energía en sistemas cuánticos ha sido ampliamente discutido y estudiado en el ámbito de la física y las matemáticas, obteniéndose resultados de gran utilidad que han favorecido ampliamente nuestro entendimiento de la Naturaleza.

Al hablar de las ideas físicas involucradas en el Tema de Degeneración, no pueden olvidarse los métodos matemáticos que permiten la obtención de los resultados con una relativa sencillez. Específicamente me refiero a la Teoría de grupos que es un instrumento muy importante en la física principalmente porque nos permite entender la degeneración en los niveles de energía de un sistema físico en términos de las propiedades de simetría que poseen sus interacciones. Estas propiedades de simetría dan lugar a un conjunto completo de observables que conmutan, los cuales se identifican como cantidades que se conservan en el sistema y así permiten establecer reglas de selección para las transiciones, esquemas de decaimiento y reacciones.

En este trabajo me propongo resolver con ayuda de la Teoría de grupos, la degeneración accidental que en presencia de campos magnéticos débiles (campos con intensidades obtenibles en laboratorio) existen en un sistema físico que es precisamente el oscilador armónico.

Para lograr mi propósito es necesario encontrar el grupo de simetría causante de la degeneración, con esta idea en mente y para mayor claridad el primer capítulo de la tesis trata sobre teoría de grupos, las características generales y algunas aplicaciones en mecánica cuántica. Con ayuda de este primer capítulo será más fácil entender los procesos y métodos que se utilizan en los capítulos posteriores.

En el capítulo 2 resolveré el problema del oscilador en coordenadas cilíndricas, la razón de usar estas coordenadas es que la derivación del grupo y la forma de los generadores es más sencilla, en comparación al caso de coordenadas esféricas, el cual se expondrá en el capítulo 3 y que son en las que tradicionalmente se trabaja los problemas que suponen simetría esférica.

En ambos capítulos (2 y 3) obtendré los generadores del grupo de simetría. Finalmente concluiré presentando comentarios acerca de los resultados obtenidos.

Cabe mencionar que el problema de degeneración accidental en el efecto Zeeman y su grupo de simetría, aunque relativamente sencillo nunca antes fué resuelto, no obstante la importancia de los resultados.

CAPITULO I

ELEMENTOS DE TEORIA DE GRUPOS Y SU RELACION CON LA MECANICA CUANTICA

El avance de la Física en los últimos siglos se ha visto ampliamente favorecido por la exploración del universo a través de los métodos matemáticos, es decir, la descripción de los fenómenos físicos por medio de modelos o teorías matemáticas que facilitan su entendimiento y su descripción. Una de estas teorías, es la Teoría de Grupos que provee de un lenguaje matemático preciso para la expresión de las simetrías y la discusión de la clasificación, degeneración y mezcla de estados de sistemas cuánticos.

Más adelante, se discutirá explícitamente la estrecha relación que guardan la Mecánica Cuántica y la Teoría de Grupos. Teniendo en mente este propósito se revisaran brevemente algunos conceptos elementales de Teoría de Grupos.

Un Grupo es el conjunto de elementos A,B,C,... para los cuales está definida una ley de composición llamada "multiplicación" que especifica univocamente para cada par de elementos del grupo su producto que también es elemento del grupo. Además, cumple con los siguientes postulados:

i) La Ley Asociativa, i.e $(AB)C = A(BC)$

ii) Existencia de un elemento identidad E, único tal que $EA=A$.

iii) Dado A existe A^{-1} (inverso) tal que $AA^{-1} = E$.

Aquellos grupos para los cuales se cumple la propiedad conmutativa se llaman abelíanos.

En Aritmética, Geometría, Algebra y Análisis se encuentra una gran cantidad de ejemplos de grupos. Los cuatro números complejos 1, i, -1, $-i$, forman un grupo bajo la operación de multiplicación ordinaria de números complejos. Se debe enfatizar sin embargo, que la operación no necesita darse explicitamente. El grupo puede especificarse completamente por su tabla de multiplicación. Como ilustración se considera al grupo D_3 de seis elementos cuya tabla es:

	E	A	B	C	D	F
E	E	A	B	C	D	F
A	A	E	D	F	B	C
B	B	F	E	D	C	A
C	C	D	F	E	A	B
D	D	C	A	B	F	E
F	F	B	C	A	E	D

donde E es el elemento identidad y $A = A^{-1}$, $B=B^{-1}$, $C=C^{-1}$, $D^{-1}=F$ y $F^{-1}=D$, además $AB \neq BA$ por lo que no es un grupo abeliano. Las relaciones que existen entre los miembros de un grupo han dado lugar a una serie de conceptos como subgrupo, clase, y subgrupo invariante que se dan a continuación:

Si un subconjunto H del grupo G satisface los postulados de grupo, se dice que H es un subgrupo de G.

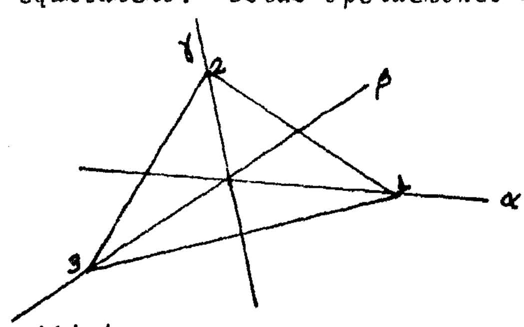
Se define una clase de equivalencia como al conjunto de elementos de un grupo que son conjugados entre si. A y B elemntos de G se llaman conjugados si existe un elemento R en G tal que $B = RAR^{-1}$.

En un subgrupo abeliano cada elemento constituye una clase del grupo.

En el grupo D_3 las clases que existen son $C_1 : \{E\}$ $C_2 : \{A, B, C,\}$ $C_3 : \{D, F.\}$ Si un subgrupo H de G contiene clases completas de G como seria $H: \{E, D. F\}$ que contiene a C_1 y C_3 se llama subgrupo invariante de G.

Dos grupos $G: \{A_1, A_2, \ldots\}$ y $\dot{G}: \{A_1, A_2 \ldots\}$ son isomorficos cuando se puede establecer una correspondencia biunívoca entre sus elementos $A_2 \longleftrightarrow \dot{A}_2$ tal que se cumple la propiedad $A_i\ A_j \longleftrightarrow A_i\ A_j$.

Un grupo isomorfico a D_3 se obtiene considerando las operaciones que dejan inalterada la orientación espacial de un triángulo equilátero. Estas operaciones son:



$\bar{E}$: operación identidad,

$\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{C}$ reflexiones del triángulo en las líneas fijas, , , respectivamente.

$\bar{D}$, $\bar{F}$ rotaciones del triángulo en su plano, alrededor del centro por $2\pi/3$ y $-2\pi/3$ respectivamente. Estas operaciones forman un grupo G bajo la correspondencia $E \leftrightarrow \bar{E}$, $A \leftrightarrow \bar{A}$, $B \leftrightarrow \bar{B}$, $C \leftrightarrow \bar{C}$ $D \leftrightarrow D$ $F \leftrightarrow F$, así G y $\bar{G}$ son isomorficas. Si la correspondencia es multiple y unidireccional $\{A_{i1}\ \ A_{i2}, \ldots\} \rightarrow A$ tal que $A_{ij}\ A_{js} \longrightarrow \bar{A}_i \bar{A}_j$ se dice que G es Homomórfico sobre $\dot{\bar{G}}$. El grupo D_3 es homomórfico al grupo cíclico C_2: $\{E, A\} \equiv \bar{G}$ bajo la correspondencia $\{E, D, F\} \longrightarrow \bar{E}$ y $\{A, B, C\} \longrightarrow \bar{A}$.

Dado un grupo G: $\{E, A, B, \ldots\}$ una representación de G es un grupo de matrices $\bar{G}$: $\{D(A), D(E), D(B), \ldots\}$ tal que G es homorfico sobre $\bar{G}$. Entonces existe una correspondencia $A \rightarrow D(A)$ y la condición $D(A)D(B)=D(AB)$ queda satisfecha para cualquier par de elementos del grupo. Si elementos diferentes son representados por matrices diferentes entonces $G \rightarrow \bar{G}$ es un isomorfismo.

Como ejemplo de una representación del grupo D_3 tenemos al conjunio de matrices:

$$D(E)=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad D(A)=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D(B)=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \qquad D(C)=\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D(D)=\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad D(F)=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \qquad (I.1)$$

ya que satisfacen

$$D(A)D(B)=D(AB)=D(D)$$

y lo mismo sucede para cualesquiera de los elementos del grupo.

Varias clases de representaciones son importantes. La representación trivial o identidad es aquella en que cada uno de los elementos es representado por la matriz identidad. Una representación se dice que es fiel si la correspondencia grupo $\leftrightarrow$ representación es un isomorfismo. La representación (I.1) de D_3 es fiel, mientras que la trivial no lo es.

Una representación D de un grupo G es unitaria si satisface la condición

$$D^+(R)\,D(R) = I \qquad \forall R \in G$$

donde $D^+(R)$ es la matriz hermitiana conjugada de $D(R)$. Este tipo de representaciones son muy importantes en mecánica cuántica como veremos más adelante.

Dadas dos representaciones $D1(R)$ y $D2(R)$ de G construimos otra representación $\{\Delta(R)\}$ de G cuyas matrices D_1 y D_2 son suma directa, es decir

$$\Delta(R) = \left[\begin{array}{c|c} D_1(R) & \\ \hline & D_2(R) \end{array}\right] \qquad R \in G$$

Una representación $\{D(R)\}$ para la cual no existe alguna transformación de semejanza que de a todos las matrices $D(R)$ una forma de suma directa de matrices se dice que es irreducible. En cambio una representación como $\Delta(R)$ es reducible y su descomposición en forma de suma directa de representaciones irreducibles es única, hasta una transformación de semejanza.

Dos representaciones $D^1(R)$ y $D^2(R)$, se dice que son equivalentes si existe una matriz M no singular tal que:

$$D^2(R) = M D^1(R) M^{-1} \qquad \forall R \in G$$

Se presentan a continuación algunos teoremas de representaciones irreducibles unitarias.

El lema de Schur: Si una matríz conmuta con todas las matrices de una representación irreducible unitaria de dimensión finita de un grupo, tal matríz debe ser una matríz escalar[23]. Así también dada una cierta representación irreducible $D(R)$ se puede demostrar que sólo matrices escalares conmutan con ella.

El segundo teorema es el de la ortogonalidad para los elementos de las matrices de una representación irreducible unitaria de dimensión finita. Sean $\{D^{(1)}(R)\}$ y $\{D^{(2)}(R)\}$ dos representaciones irreducibles unitarias del grupo finito G, con dimensión $l_1, \ldots l_2$, respectivamente. Si las representaciones no son equivalentes

$$\sum_R D_{\mu\nu}^{(1)*}(R)\, D_{\mu'\nu'}^{(2)}(R) = 0$$

donde las $D^{(j)}(R)$ son las C representaciones irreducibles inequivalentes y unitarias de un grupo finito G, $(j=1,2,\ldots c)$ y l_j es la dimensión de $D^{(j)}(R)$. Se tiene además que la suma de los cuadrados de las dimensiones de todas las representaciones irreducibles inequivalentes de un grupo finito es igual al orden del grupo.

$$\sum_{j=1}^{c} l_j^2 = g$$

Otro concepto de mucha utilidad e importancia dentro de la teoría de grupos es el de caracteres de una representación. Dada una representación $\{D(R)\}$ de dimensión l de un grupo finito de G, la traza de la matriz $D(R)$ se llama la característica de R y se indica con $X(R)$. El conjunto de g números $\left\{ X(A_1), \ldots, X(A_g) \right\}$ se llama el carácter de la representación y este concepto tiene propiedades importantes como:

i) Dos representaciones equivalentes de un grupo tienen el mismo carácter.

ii) Los elementos de un grupo que pertenecen a la misma clase tienen la misma característica.

El carácter de una representación es, por tanto una función de clases. Si el grupo tiene k clases $C_1, \ldots C_k$ la característica de la clase C_p: $X(C_p)$ X_p. El carácter asociado a una representación irreducible D^j se llama carácter simple. Los caracteres simples satisfacen la relación de ortogonalidad:

$$\sum_{\rho=1}^{k} \sqrt{g_\rho/g}\, \chi_\rho^{(j)} \sqrt{g_\rho/g}\, \chi_\rho^{(j)*} = \delta_{jj'} \qquad \text{(I.2)}$$

donde g_p es el número de elementos que tiene la clase p ésima y g es el orden del grupo.

La ecuación (I.2), si consideramos a los k números complejos $\left\{\sqrt{g_1/g}\,\chi_1^{(j)}, \sqrt{g_2/g}\,\chi_2^{(j)}, \ldots, \sqrt{g_k/g}\,\chi_k^{(j)}\right\}$ como las componentes de un vector, nos indica que

$$c \leq k \qquad \text{(I.3)}$$

donde c es el número de representaciones irreducibles y k es el número de clases. Más adelante veremos que $k \leq c$ lo que implica $k = c$.

Las matrices de una representación reducible $\{A(R)\}$

de un grupo, pueden llevarse por medio de una transformación de semejanza M a la forma de suma directa como sigue:

$$M\Delta(R)M^{-1} = \Delta(R) = \begin{bmatrix} D^{(a)}(R) & & & 0 \\ & D^{(b)}(R) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & D^{(n)}(R) \end{bmatrix} \qquad (I.4)$$

donde las matrices irreducibles $D^{(i)}$ (R) pueden repetirse varias veces digamos a_j veces. Si denotamos $X_1, X_2, \ldots X_k$ al carácter de la representación $\{\Delta(R)\}$, tomando la traza de la ecuación matricial (I.4) se obtiene

$$X_\rho = \sum_{\rho=1}^{k} a_j X_\rho^{(j)} \quad ; \quad \rho = 1,2 \ldots k \qquad (I.5)$$

El número de veces que aparece la representación irreducible j, pueden determinarse utilizando (I.5) y la relación de ortogonalidad entre los carácteres simples i.e.

$$a_j = \sum_{\rho=1}^{k} g_\rho / g \, X_\rho^{(j)} X_\rho^{(j)*} \qquad \rho = 1, 2, \ldots, k \qquad (I.6)$$

Una representación de gran utilidad es la llamada representación regular que está formada por matrices $D(A_k)$ de dimensión igual al orden del grupo que satisfacen la condición

$$D_{\mu\nu}(A_k) = \delta(A_\mu, A_k, A_\nu); \quad \mu\nu k = 1,2 \ldots g \quad \text{con}$$

$$\delta(A,B) = \begin{cases} 1 \text{ si } A = B \\ 0 \text{ si } A \neq B \end{cases}$$

y ocurre para cualquier μ que

$$D_{\mu\mu}(A_k) = \begin{cases} 1 & \text{si } A_k = E \\ 0 & A_k \neq E \end{cases}$$

y ya que el elemento identidad E es una clase del grupo $C_1:\{E\}$ el carácter de la representación regular está dado por $\chi_1=g, \chi_2=\chi_3=\ldots\ldots \chi_k=0$.

El número de veces que la representación regular contiene a la representación irreducible $D^{(j)}$ es a_j está dado por $a_j = \chi_1^{(j)*} = \chi^{(j)*}(E)$ (Ver ecuación (I.6)) y puesto que el elemento identidad queda representado por la matríz unidad se tiene que $a_j=\ell_j$ que es la dimensión de la representación $D^{(j)}$.

Se concluye que la representación regular puede llevarse a una forma explícitamente reducida en la cual aparecen todas las representaciones irreducibles y además cada matriz $D^{(j)}$ de dimensión ℓ_j, aparece repetida ℓ veces∴ La suma del cuadrado de las dimensiones de todas las representaciones irreducibles es igual a la dimensión de la representación regular, la cual es igual al orden del grupo como se vió anteriormente. Además del teorema de ortogonalidad de los caracteres simples dado en la ecuación (I.2) se tiene otra relación dada por

$$\sum_{j=1}^{c} \sqrt{g_\rho/g}\, \chi_\rho^{(j)} \sqrt{g_\rho/g}\, \chi_{\rho'}^{(j)*} = \delta_{\rho\rho'} \qquad \text{(I.7)}$$

Esta relación nos dice que si los c números complejos $\{\sqrt{g_\rho/g}\,\chi_\rho^{(1)}, \ldots, \sqrt{g_\rho/g}\,\chi_\rho^{(c)}\}$ se consideran como las componentes de un vector $Z^{(p)}$ entonces los k vectores $\underline{Z}^{(1)}, \ldots\ldots \underline{Z}^{(k)}$, son mutuamente ortogonales en un espacio vectorial de dimensión c, se sigue entonces que $k \leq c$ y comparando con la ecuación (I.3) se concluye que $k=c$. i.e. el número de R.I. es igual al número de clases de un grupo.

Una tabla de caracteres de un grupo finito es una tabla numérica de kxk, en la cual aparecen las componentes de los caracteres simples del grupo, los números en cada renglón de la tabla son las componentes de un caracter simple del grupo.

Los dos teoremas de ortogonalidad (I.2) y (I.7) permiten la construcción de la tabla de caracteres, imponiendo (en caso de ambigüedad) que los resultados obtenidos sean consistentes con la tabla de multiplicación del grupo, por ejemplo la tabla de caracteres simples de D_3 es:

FI/clases	$\{E\}$	$\{A, B, C\}$	$\{D, F\}$
$j=1$	1	1	1
$j=2$	1	-1	1
$j=3$	2	0	-1

El producto directo de dos representaciones irreducibles de un grupo $\{D^{(1)}(R)\}$ y $\{D^{(2)}(R)\}$ de dimensión ℓ_1 y ℓ_2 respectivamente se expresa como el producto directo de las matrices $D^{(1)}(R) \times D^{(2)}(R)$ y este conjunto de matrices constituyen una representación del mismo grupo que se llama producto de Kronecker[23].

La característica del elemento R en la representación de Kronecker es :

$$\chi(R)=\sum_{i=1}^{l_1}\sum_{r=1}^{l_2}\left[D^{(1)}(R)\times D^{(2)}(R)\right]_{ir,ir}=\sum_{i}\sum_{r}D_{ii}^{(1)}(R)D_{rr}^{(2)}(R)=\chi^{(1)}\chi^{(2)},$$

Hasta ahora hemos tratado con grupos finitos, es decir grupos que consisten de un número finito de elementos.

La simetría en muchos sistemas físicos está dada por grupos infinitos más que por grupos finitos, como por ejemplo el hamiltoniano de un electrón en un campo central que es invariante bajo cualquier rotación. Por lo tanto a continuación mencionare algunos resultados de la teoría de representaciones de grupos con un número infinito de elementos. Estos son generalizaciones de los teoremas discutidos anteriormente, para grupos finitos, en la mayoría de los casos es suficiente sustituir la sumas finitas (Σ) sobre el grupo por una suma infinita o integral.

Los grupos infinitos pueden ser discretos o continuos. Un grupo discreto es por ejemplo el conjunto de las transformaciones (traslaciones) de la forma

$$R_n : x' = x + n$$

donde n es un entero, además un parámetro es suficiente para nombrar los elementos. Un grupo se dice continuo si una condición de cercanía se impone en los elementos de la variedad del grupo. Como ejemplo daremos el grupo de transformaciones

$$x' = ax + b$$

donde a y b varían de menos infinito a más infinito y se dice que constituyen un grupo continuo de dos parámetros.

En un grupo continuo de r parámetros los elementos están caracterizados por r parámetros reales que varían continuamente. Las transformaciones en un espacio de configuraciones de n dimensiones podrán escribirse como:

$$x_i' = f_i(x_1, \ldots, x_n; a_1, \ldots, a_r) \qquad i = 1, \ldots, n$$

para los cuales las f_i son funciones analíticas de los r parámetros. Algunos ejemplos de los grupos de Lie son las siguientes. El grupo de rotaciones en dos dimensiones. Consideremos las transformaciones lineales de la forma

$$x' = a_1 x + a_2 y$$
$$y' = a_3 x + a_4 y$$

que deja invariante x^2+y^2, entonces:

$$x'^2 + y'^2 = (a_1 x + a_2 y)^2 + (a_3 x + a_4 y)^2 = x^2 + y^2$$

$$a_1^2 + a_3^2 = 1 \qquad a_2^2 + a_4^2 = 1 \qquad a_1 a_2 + a_3 a_4 = 0$$

Los cuatro parámetros a_1, a_2, a_3 y a_4 están sujetos a tres relaciones funcionales así que tenemos un grupo de un parámetro.

Este grupo puede considerarse constituido por rotaciones alrededor del eje Z, entonces su parametrización puede escribirse como sigue

$$x' = x\cos\phi - y\,\mathrm{sen}\,\phi$$
$$y' = x\,\mathrm{sen}\,\phi + y\cos\phi \qquad 0 \leq \phi \leq 2\pi \tag{I.8}$$

El grupo es abeliano ya que el ángulo correspondiente al resultado de dos transformaciones sucesivas es la suma de los ángulos de las dos transformaciones. De tal manera que tiene únicamente representaciones irreducibles unidimensionales. Si $X(\phi)$ es el carácter (representaciones) de la rotación a través de un ángulo ϕ, entonces se debe tener que

$$\chi(\phi_1)\,\chi(\phi_2) = \chi(\phi_1 + \phi_2) \tag{I.9}$$

y

$$\chi(2\pi) = \chi(0) = 1 \tag{I.10}$$

De las relaciones anteriores se concluye que las representaciones son

$$\chi(\phi) = e^{im\phi} \tag{I.11}$$

donde

$$m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Dada una función de onda $\psi(x,y,z)$, una rotación finita alrededor de Z nos lleva de $\psi(x,y,z) \rightarrow \psi(x',y',z')$ con X', Y' dadas por (I.8). Si se realiza una rotación infinitisimal alrededor de Z es decir ec. (I.8) $\phi \rightarrow 0$ y sen$\phi \sim \epsilon$ entonces $\psi(x,y,z) \rightarrow \psi(x+\epsilon y,\, y-\epsilon x,\, z)$

$$\equiv \psi(x,y,z) + \epsilon\left(y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}\right)\psi(x,y,z)$$

Así en la transformación se obtiene el operador infinitesimal de rotaciones respecto a Z dado por

$$L_z = x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}$$

Otro ejemplo es el grupo ortogonal en tres dimensiones O(3) que está formado por las transformaciones lineales que dejan invariante $x^2+y^2+z^2$. Esta condición de invariancia impone sus condiciones sobre los nueve parámetros. Así tenemos un grupo de tres parámetros y para revisar sus representaciones recurrimos al grupo de rotaciones axiales de tres dimensiones.

Aunque las rotaciones finitas se comportan en forma diferente, es bien conocido que las rotaciones infinitesimales se suman vectorialmente, entonces un operador de rotación infinitesimal alrededor del eje η está dado por

$$\bar{L}_\eta = l\,\hat{L}_x + m\,\hat{L}_y + n\,\hat{L}_z$$

donde (l,m,n) son los cosenos directores del eje η y L_x, L_y, L_z son las componentes del momento angular alrededor de los ejes $\underline{X}$, $\underline{Y}$, $\underline{Z}$ respectivamente. Además puede demostrarse que una rotación finita de un ángulo θ alrededor del eje puede escribirse así

$$R_{\theta\eta} = e^{-i\theta\hat{L}_\eta}$$

con la interpretación igual del operador exponencial[14].

Los operadores infinitesimales de rotación $\hat{L}_x$, $\hat{L}_y$ y $\hat{L}_z$ satisfacen las relaciones de conmutación $[\hat{L}_x, \hat{L}_y] = i\hat{L}_z$ si $\hbar = 1$ y los obtenidos por permutación cíclica de los índices. A este conjunto de operadores se les llama generadores del algebra de Lie de O(3) i.e. del grupo de transformaciones infinitesimales de rotación en tres dimensiones en la vecindad del elemento idéntidad.

Así, denotamos por $\psi_{\ell m}$ a las eigenfunciones de $L^2=L_x^2+L_y^2+L_z^2$ y L_z cuyos eigenvalores son $\ell(\ell+1)$ y m respectivamente, estas funciones bajo las operaciones de rotación finita $R = e^{-i\theta(\bar{n}.\bar{L})}$ darán lugar a su vez a eigenfunciones de L^2 pues $e^{-i\theta(\bar{n}.\bar{L})}$ conmuta con L^2 (14). Pero este hecho no ocurre con L_z en general de modo que $R\psi_{\ell m}$ es una combinación lineal de estas, o sea

$$R\psi_{\ell m}=\sum_{m'} (j m' / e^{-i\theta(\bar{n}.\bar{L})} / j m)\psi_{\ell m'} \qquad (I.12)$$

Utilizando la parametrización de los ángulos de Euler una rotación arbitraria R puede expresarse como el producto de las rotaciones

$$R=R_\gamma R_\beta R_\alpha = e^{-i\alpha L_z} e^{-i\beta L_y} e^{-i\gamma L_z} \qquad (I.13)$$

donde α da la rotación alrededor del eje Z, β alrededor del eje y y γ alrededor del eje z.

A través de la ecuación (I.13) podemos representar la ec. (I.12) como sigue:

$$R\psi_{\ell m} = \sum_{m'} D^{\ell}_{m'm}(\alpha,\beta,\gamma)\,\psi_{\ell m'}$$

donde

$$D^{\ell}_{m'm}(\alpha\beta\gamma)= e^{-im\alpha}\, d^{\ell}_{mm'}\, e^{-im\gamma}$$

$$d^{\ell}_{m'm} = (\ell m' / e^{-i\beta L_y} / \ell m)$$

El análisis anterior muestra que las $D^{\ell}_{m'm}$ constituyen una representación de dimensión $(2\ell+1)$ del grupo $O(3)$ de rotaciones y utilizando la forma explícita de las $D^{\ell}_{m'm}$ (α,β,γ) y el lema de Schur se puede demostrar que es una R.I.

Estas representaciones matriciales $D^{\ell}_{m'm}$ (α,β,γ) de $O(3)$ satisfacen las propiedades de ortonormalidad análogas a aquellos pra grupos finitos como

$$\sum D^{\ell *}_{m'n} (\alpha,\beta,\gamma)\, D^{\ell}_{m'm} (\alpha,\beta,\gamma) = \delta_{m'm''}$$

y

$$\int\int\int D^{\ell' *}_{m'n'} (\alpha,\beta,\gamma)\, D^{\ell}_{mn} (\alpha,\beta,\gamma) \,\mathrm{sen}\,\beta\, d\alpha\, d\beta\, d\gamma$$

$$= \frac{8\pi^2}{2\ell+1} \delta_{\ell\ell'} \delta_{mm'} \delta_{nn'}$$

Las clases y caracteres del grupo de rotación se obtiene fácilmente ya que si $R(S)$ lleva el vector η' en η i.e.

$$R^{-1}(S) R_{\phi\eta} R_S = R_{\phi\eta'}$$

entonces todas las rotaciones a través del mismo ángulo pertenecen a la misma clase. Estos resultados ilustran una de las frecuentes diferencias con las propiedades de los grupos finitos esto es que tenemos un número infinito de clase.

Entonces los caracteres simples se pueden obtener de una rotación alrededor del eje Z en este caso $D^{\ell}_{m'm}(\alpha\beta\gamma)$ está dado por la matriz diagonal

$$D^{(l)}(\alpha) = \begin{pmatrix} e^{-il\alpha} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{-i(l-1)\alpha} & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \cdots & e^{il\alpha} \end{pmatrix}$$

y el carácter es $\chi^{(l)}_{(\alpha)} = \mathrm{Tr}\, D^{(l)}_{(\alpha)} = e^{-il\alpha} + \ldots + e^{il\alpha}$

por ser está una serie geométrica:

$$\chi^{(l)}(\alpha) = e^{-il\alpha} \sum_{k=0}^{2l} (e^{i\alpha})^k = \frac{e^{i(l+1/2)\alpha} - e^{-i(l+1/2)\alpha}}{e^{i\alpha/2} - e^{-i\alpha/2}}$$

$$= \frac{\operatorname{sen}(l+1/2)\alpha}{\operatorname{sen}\alpha/2}$$

Estos caracteres simples de la R.I de O(3) satisfacen las relaciones de ortonormalidad

$$\int_0^{2\pi} \chi^{l'*}(\alpha)\, \chi^{l}(\alpha)\, \operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2}\, d\alpha = \pi\, \delta_{ll'}$$

El efecto de operaciones físicas realizadas sobre un sistema físico (operaciones, reflexiones traslaciones, etc.) puede denotarse como $\underline{X}' = R\underline{X}$ donde R es una matriz no singular que mapea el espacio de configuraciones en sí mismo. Estas operaciones físicas representadas por matrices R constituyen un grupo bajo la regla de multiplicación de matrices.

Se introduce un grupo de operadores Pr isomorfico al grupo de transformaciones R. Estos operadores Pr, se definen por su acción sobre una función escalar arbitraria f(x) como; $P_r f(\underline{x}) = f'(\underline{x})$ con $f'(\underline{x})\big|_{x=x_0} = f(\underline{x})\big|_{x=R^{-1}x_0}$

Un ejemplo es el operador Pa asociado a una traslación del sistema por una distancia a, este operador debe satisfacer la condición

$$P_a f(\underline{x})/_{\underline{x}=\underline{x}_0} = f'(\underline{x})/_{\underline{x}=\underline{x}_0} = f(\underline{x})/_{\underline{x}=\underline{x}_0-\underline{a}}$$

de esta expresión se deduce fácilmente que

$$P_a = e^{-\bar{a}\cdot\bar{\nabla}} = e^{-i/\hbar\, \bar{a}\cdot\bar{p}}$$

introduciendo el operador cuántico de momento lineal $p = \hbar/i\, \bar{\nabla}$

Considerando ahora un operador H(X,P), relacionado con algunas observables del sistema que se estudie. Veamos la forma en que se transforma H(X,P) bajo la acción de una transformación física R. Considerese primero transformaciones puntuales lineales de las coordenadas X_i,

$$x_i' = R_{ij} x_j \qquad , \qquad R_{ij} = \frac{\partial x_i'}{\partial x_j}$$

y las cantidades de movimiento

$$P_i' = R_{ij}^{-1} P_j$$

así el Hamiltoniano se transforma como

$$P_r\, H(x,p) P_r^{-1} = H(R^{-1}x, Rp)$$

Si para cualquier R ocurre $P_R H(X,P) P_R^{-1} = H(X,P)$ se dice que el operador es invariante bajo ese grupo de simetrias. Otra forma de escribir esta condición de invariancia es

$$[P_r, H(x,p)] = 0$$

ó sea, el operador $H(X,P)$ es invariante bajo el grupo R si conmuta con todos los elementos del grupo isomorfico $\{P_r\}$. Tomemos a $H(X,P)$ como el Hamiltoniano de un sistema físico y denotemos a sus eigenfunciones por (x), esto es, cumple con la ecuación de eigenvalores $H\psi = E\psi$ (Schrödinger). Además suponemos que $H(X,P)$ es invariante ante el grupo de transformaciones $\{R\}$ por lo tanto aplicando P_r a la ecuación de Schrödinger se tiene

$$P_R H\psi = HP_r\psi = E(P_r\psi)$$

Suponiendo que E es un eigenvalor degenerado con ℓ eigenfunciones $\psi_1, \psi_2 \ldots \psi_\ell$, linealmente independiente. De la ecuación anterior podemos ver que $P_r\psi_i$ es también eigenfunción de H asociada a E por tanto debe ser combinación lineal de ellas i.e.

$$P_r\psi_i(x) = \sum_{j=1}^{\ell} D_{ji}(R)\,\psi_j(x) \qquad (I.14)$$

donde D_{ij} son componentes de una matriz $D(R)$ de dimensión $\ell \times \ell$. Se tiene además, bajo la acción de P_s sobre la ecuación anterior que

$$P_s P_r \psi_i(x) = \sum_{j=1}^{\ell} D_{ji}(R) \sum_{k=1}^{\ell} D_{kj}(s)\,\psi_k(x) =$$

$$= \sum_{j,k} D_{ji}(R) D_{kj}(s)\,\psi_k(x) = D_{ki}(sR)\,\psi_k(x)$$

por lo tanto se concluye que el conjunto de matrices $D(R)$ de dimensión $\ell x \ell$ definidas por la ec. (I.14) constituyen una representación del grupo $\{R\}$, de dimensión ℓ.

Además se dice que las $\psi_1, \ldots \psi_l$ asociadas al eigenvalor E portan o constituyen una base para la representación D(R) del grupo de simetrias $\{R\}$ del hamiltoniano H y ya que las eigenfunciones pueden ortonormalizarse las representaciones que portan estas funciones ortonormales son matrices unitarias.

Se ha visto hasta ahora que la simetría se manifiesta por un grupo de operadores que conmutan con el hamiltoniano del sistema. Este hamiltoniano está restringido por el lema de Schur, la restricciones son:[3]

i) La no existencia de elementos de matriz del Hamiltoniano que conecten funciones de onda de distintos tipos de simetría

ii) todos los operadores correspondientes a una representación irreducible tienen el mismo eigenvalor.

Considerense las k representaciones irreducibles unitarias inequivalentes $\{D^{(1)}(R)\}, \ldots, \{D^{(k)}(R)\}$ de un grupo finito G cuyas dimensiones son $l_1, \ldots l_k$, respectivamente. Si para todo elemento R de G las l_j funciones $f_1^{(j)}(x) \ldots f_{l_j}^{(j)}(x)$, satisfacen

$$P_r f_\mu^{(j)}(x) = \sum_{\lambda=1}^{l_j} D_{\lambda\mu}^{(j)}(R)\, f_\lambda^{(j)}(x) \qquad \mu = 1, 2, \ldots, l_j \tag{I.15}$$

se dice que las f's portan la representación irreducible $D^{(j)}$ o que las f's son funciones asociadas a las representaciones irreducibles de $D^{(j)}$ y $F_\mu^{(j)}$ (R) pertenecen al renglón μ de esa representación, puede demostrarse[23] que para una $f(X)$ arbitraria sobre la cual pueden aplicarse P_R, el conjunto de funciones

$$\mathcal{M} f_\lambda^{(j)}(\underline{x}) = \frac{l_j}{g} \sum_K D_{\lambda\mu}^{(j)*}(R)\, P_R\, f(x) \qquad \lambda = 1, 2, \ldots l_j \tag{1.16}$$

pertenecen a una base para las representaciones irreducibles (R.I). Además si damos a μ los valores diferentes que puede tomar, se generan l_j conjuntos de funciones que portan las R.I unitarias $D^{(j)}$ de G. Supongase que se tienen los conjuntos de funciones $\{\psi_\mu^{(j)}\}$ y $\{\psi_\mu^{j}\}$ de la unitariedad de P_R se tiene

$$(\psi_{\mu'}^{(j')}, \phi_\mu^{(j)}) = (P_R \psi_{\mu'}^{(j')}, P_R \phi_\mu^{(j)}) = \sum_\lambda \sum_{\lambda'} D_{\lambda'\mu'}^{(j')} D_{\lambda\mu}^{(j)} (\psi_{\lambda'}^{(j')}, \phi_\lambda^{(j)})$$

sumando sobre todos los elementos del grupo y usando el Teorema de ortogonalidad de las $D^{(j)}$ se obtiene:

$$(\psi_{\mu'}^{(j')}, \phi_\mu^{(j)}) = \delta_{jj'} \delta_{\mu\mu'} \frac{1}{l_j} \sum_{\lambda=1}^{l_j} (\psi_\lambda^{(j)}, \phi_\lambda^{(j)})$$

ahora si $j = j'$ y $\mu = \mu'$ se obtiene

$$(\psi_\mu^{(j')}, \phi_\mu^{(j)}) = \frac{1}{l_j} \sum_{\lambda=1}^{l_j} (\psi_\lambda^{(j)}, \phi_\lambda^{(j)}) \tag{1.17}$$

de esta relación se concluye que el producto escalar de funciones que pertenecen al mismo renglón de una R.I tiene siempre el mismo valor, no importa que renglón se considere, i.e.

$$(\psi_{\mu'}^{(j)}, \phi_\mu^{(j)}) = \delta_{jj'} \delta_{\mu\mu'}\, n(j) \tag{1.18}$$

con $(n_j$) coeficiente numérico independiente de .

Sea $\{\phi_\mu\}$ un conjunto de funciones que portan la R.I $D^{(j)}$. Usando el teorema de ortogonalidad (I.18) en los sistemas $\{\psi_\mu^{(j')}\}$ y $\{H\phi_\mu^{(j)}\}$ se obtiene una fórmula para los elementos de matriz del operador invariante H bajo G, con respecto a funciones que portan las R.I. Este teorema es

$$(\psi_{\mu'}^{(j')}, H\phi_\mu^{(j)}) = \delta_{jj'}\delta_{\mu\mu'}h(j)$$

con h(j) independiente de μ. Este teorema se conoce como el Teorema de Wigner.

Daré a continuación un ejemplo de la aplicación de la Teoría de grupos en la Mecánica Cuántica, específicamente en la teoría de perturbaciones.

De lo visto anteriormente las ecs. (I.14) satisfechas por las ψ^l asociadas a Eo (eigenvalor de multiplicidad l de Ho) nos indican que estas l eigenfunciones de Ho portan las representaciones del grupo (G) de simetrías del hamiltoniano Ho.

Esta representación puede ser irreducible en cuyo caso decimos que el grupo G explica totalmente el origen de la degeneración pero si la representación es reducible, esto sugiere que existe un grupo $\bar{G}$ que contiene a G como subgrupo, para el cual todos los estados correspondientes a energías definidas portan una representación irreducible de $\bar{G}$. Generalmente G puede obtenerse de transformaciones geométricas que dejan invariante el hamiltoniano que se está estudiando, pero $\bar{G} \supset G$ requiere de transformaciones canónicas y por lo tanto el grupo $\bar{G}$ no se puede deducir tan directamente como G. Como en muchos problemas de mecánica cuántica la G se sabía directamente, pero la $\bar{G}$ se requirió muchos años para encontrarse, las degeneraciones asociadas con $\bar{G}$ no tuvieron explicación inmediata. Por ello recibieron frecuentemente el nombre de degeneraciones accidentales.

Deseamos resolver la ec. de Schrödinger

$$(H_o+V)\phi = E\phi \tag{I.19}$$

Ho es el Hamiltoniano no perturbado e invariante bajo G y el operador de perturbación V es también invariante ante G. Escogemos a $\psi^{(j)}_{\mu n}$ como las funciones que partan la representación I standard de G se tiene

$$H_o \psi^{(j)}_{\mu n} = E_o(j,n)\, \psi^{(j)}_{\mu n}$$

De acuerdo a la teoría de perturbaciones en Mecánica Cuántica las correcciones de primer orden al eigenvalor $E_o(j,n$ estan dadas por los eigenvalores de la matriz $\| V \|$ cuyos elementos son

$$(\psi^{(j)}_{\mu n},\, V \psi^{(j)}_{\mu n})$$

Pero por el Teorema de Wigner

$$V_{\mu'\mu} = (\psi^{(j)}_{\mu' m},\, V \psi^{(j)}_{\mu m}) = \delta_{\mu\mu'}\, V(j,n)$$

es decir la matriz $\|V\|$ es un múltiplo de la matriz unidad con eigenvalores iguales; y por tanto a primer orden $E_o(j,n)$ se desplaza pero conserva su degeneración, a cualquier orden ocurre lo mismo pues Ho + V es también invariante bajo G y por tanto el eigenvalor E de (I.19) presenta la degeneración normal que se espera de la invariancia bajo G.

Si el operador V es invariante sólo bajo un subgrupo H del grupo G que deja a H_0 invariante, entonces el Teorema de Wigner no puede aplicarse para calcular

$$(\psi_{\mu' n}^{(j)}, V \psi_{\mu n}^{(j)})$$

y puesto que V no es invariante ante G se utilizaran combinaciones lineales apropiadas de las $\psi_{\mu n}^{(j)}$ que porten R.I del subgrupo H y así poder aplicar el Teorema de Wigner con relación al subgrupo H.

En los capítulos siguientes se verá la aplicación directa de los conceptos de Teoría de Grupos que se discutieron en este capítulo.

CAPITULO II
EFECTO ZEEMAN PARA UNA PARTICULA EN UN POTENCIAL DEL OSCILADOR ARMONICO

La exploración de las simetrías por medio de teoría de grupos es reconocido como un método que permite resolver problemas con mayor facilidad como es el caso de problemas de partículas en potenciales centrales donde la simetría esférica se manifiesta por un grupo de operadores lineales que conmutan con el Hamiltoniano del sistema. Claramente cada sistema presenta degeneración característica en su espectro de energía, cuya multiplicidad se prescribe por la dimensionalidad de alguna representación irreducible de su grupo de simetría. En la Teoría de Grupos no existe restricción alguna que prevenga de la existencia de una mayor multiplicidad que la prevista por el aparente grupo de simetría. En muchos sistemas fundamentales hay mayor simetría que la esperada como en el caso de Potencial coulombiano y el oscilador armónico. A esta mayor simetría inexplicable se le llama degeneración "accidental", esta es una simetría no necesariamente de naturaleza geometrica que conjuntamente con las simetrías ya conocidas llevan a un grupo suficientemente grande cuya representación irreducible da lugar a la degeneración observada en los niveles del espectro de energía del sistema.

El átomo de Hidrógeno siendo un problema de fuerzas centrales posee simetría esférica. La simetría esférica es conocida por la degeneración en el número cuántico m, es decir por las diferentes (2l+1) renglones de la R.I l del grupo de simetría O(3). Mientras que la energía de los niveles del átomo de Hidrógeno como es bien conocido depende únicamente del número cuántico principal n y es independiente del número cuántico de momento angular total l. El resultado encontrado es una degeneración de n^2 para el nivel de energía en lugar de la degeneración (2l+1) que nos indica O(3). Es decir, la degeneración es mayor que la esperada por la simetría esférica. En el caso del oscilador armónico sucede lo mismo puede esperarse una degeneración de los niveles de energía correspondiente a la simetría esférica sin embargo se encuentra que los estados con la misma energía estan asociado con una representación totalmente simétrica del grupo unimodular unitario U(3)[2]. A estas simetrías ocultas en muchos textos se les conoce como simetrías dinámicas ya que surgen de formas particulares de la ley de la fuerza.

En cambio bajo la acción de un campo magnético cte en el espectro de una partícula sujeta a un potencial central los niveles de energía se desdoblan, este desdoblamiento varía con la intensidad del campo. Físicamente se puede entender como la pérdida de isotropía del espacio pues ya no es valido cualquier orientación del momento angular sino que solamente existen orientaciones específicas con respecto al campo magnético. A este fenómeno se le conoce como efecto Zeeman.

Si una partícula está sujeta a un campo central bajo la acción de un campo magnético constante la degeneración se rompe y en general desaparece completamente, algunas excepciones son el oscilador armónico y el átomo de Hidrógeno. Estas excepciones se deben a que en estos casos el campo central puro tiene un grupo mayor de simetría que el de rotaciones en tres dimensiones como es el grupo unitario de tres dimensiones U(3) en el caso del oscilador armónico y el grupo ortogonal de cuatro dimensiones para el átomo de Hidrógeno y está degeneración residual se observa al considerar los sistemas anteriores en presencia de un campo magnético constante.

Esta tesis tiene como objetivo encontrar el grupo de simetría responsable de la degeneración residual en el espectro de energía para una partícula sujeta a un potencial de oscilador armónico en tres dimensiones en presencia de un campo magnético débil.*

Mostraré que el grupo que se obtiene es mayor que el grupo ortogonal de dos dimensiones O(2) asociado a una partícula sujeta a un campo central más un campo magnético constante. En el proceso de derivar las algebras de Lie, muestro que en el límite clásico es posible obtener transformaciones canónicas que nos llevan de hamiltonianos asociados con el efecto Zeeman a nuevos hamiltonianos donde la existencia del grupo de simetría es obvia.

Empezaré indicando por $X_i'', P_i'' = -i\hbar\,\partial/\partial X_i''$, $i=1,2,3$ las coordenadas y momentos de el electrón en unidades standard. Denotando por X_i', P_i' a los observables adimensionales en unidades atónicas i.e.

---

* O sea considerando solamente el factor lineal de intensidad del campo.

$$X_i' = (m_0 e^2/\hbar^2) X_i'' \quad , \quad P_i' = (\hbar/m_0 e^2) P_i'' \tag{2.1}$$

donde mo, e son respectivamente la carga y masa del electrón.

La función Hamiltoniana de un electrón en un potencial central puede escribirse como

$$H'' = (P''^2/2m_0) + V(r'') , \tag{2.2}$$

donde p" es el momento canónico conjugado a r".

Si además el electrón está en presencia de un campo magnético es bien conocido que[3] tiene que sustituirse

$$\underset{\sim}{P}'' \longrightarrow \underset{\sim}{P}'' + (e/c)\underset{\sim}{A}'' \tag{2.3}$$

donde

$$A'' = (1/2)(\underset{\sim}{\mathcal{H}} \times \underset{\sim}{r}'') \tag{2.4}$$

es el potencial vectorial de un campo magnético constante. Escogiendo al eje x_3 como la dirección del campo magnético, el Hamiltoniano está dado por

$$H'' = (\hbar^2/m_0)[-(1/2)\nabla''^2 + (\beta^2/\hbar) L_3' + (1/2)\beta^4 \rho''^2] + V(r'') \tag{2.5}$$

donde se usó la regla standard de cuantización de Pauli, las relaciones

$$\beta^2 \equiv (e\mathcal{H}/2\hbar c), \rho''^2 = X_1''^2 + X_2''^2, r''^2 = \rho''^2 + X_3''^2, \tag{2.6}$$

y en el cual ∇''^2 es el laplaciano en las coordenadas X''_i $i=1,2,3$.

Introduciendo las variables X'_i, P'_i de (2.1) y expresando H" en unidades de energía de Bohr es decir

$$H' = H''/E_0 \quad , \quad E_0 = (m_0 e^4/\hbar^2), \tag{2.7a,b}$$

se obtiene

$$H' = -(1/2)\nabla'^2 + b^2 L'_3 + (1/2) b^4 \rho'^2 + E_0^{-1} V(ar') \;, \tag{2.8}$$

donde ∇'^2 es el laplaciano en términos de X_i $a = (\hbar^2/m_0 e^2)$ es el radio de Bohr y

$$L'_3 = -i\,(X'_1\, \partial/\partial X'_2 - X'_2\, \partial/\partial X'_1),\ \rho'^2 = X'^2_1 + X'^2_2,\ r'^2 = \rho'^2 + X'^2_3 \tag{2.9,a,b,c}$$

además b^2 es la constante adimensional

$$b^2 = a^2\beta^2 = (\hbar^3 \mathcal{H}/2m_0^2 c\, e^3) \tag{2.10}$$

Para estudiar el valor de b^2, definimos por b_0^2 al correspondiente a un campo magnético (Ho) de un Kilogauss. De los valores numéricos de e , m_0, c, h obtenemos[8]

$$b^2 = (\mathcal{H}/\mathcal{H}_0) b_0^2 = 0.2 \times 10^{-6}\,(\mathcal{H}/\mathcal{H}_0) \tag{2.11}$$

Para comparar los efectos de los términos $b^2 L'_3$ y $(b^4/2)\,\rho'^2$ que aparecen en el Hamiltoniano (2.8) se considerará al electrón moviéndose en un potencial coulombiano es decir $E_0^{-1} V(ar') = -1/r'$.

Así, en este caso la ec. (2.8) se reduce a

$$H_0' = -1/2\,\nabla'^2 - 1/r' \qquad (2.12)$$

Resolviendo la ecuación de Schrödinger

$$H_0'\Psi = E\Psi \qquad (2.13)$$

se encuentra[1] que la energía está dada por $E = -1/2n^2$ $n=1,2,3$ y Ψ son las funciones de onda del átomo de Hidrógeno en unidades atómicas. El valor esperado de b^2L_3' con respecto a esas eigenfucniones es del orden de 10^{-6} si el campo magnético considerado es de un kilogauss, los valores esperados de $(b^4/2)\rho^2$ son del orden de 10^{-12}.

Por lo tanto para campos magnéticos débiles (los usuales en laboratorios) el hamiltoniano (2.8) se puede escribir como sigue:

$$H' = -1/2\,\nabla'^2 + b^2L_3' + E_0^{-1}V(ar')$$

a) El oscilador armónico en coordenadas cilíndricas.

En este trabajo se estudiará la degeneración residual en presencia de un campo magnético externo, presente en el espectro de energía, cuando el potencial central en el que se mueve el electrón es de oscilador armónico

$$V(r'') = 1/2\,m_0\omega^2 r''^2$$

que en el sistema de unidades atómicas toma la forma

$$E_0^{-1} V(ar') = 1/2 (\hbar\omega/E_0)^2 r'^2 \qquad (2.14)$$

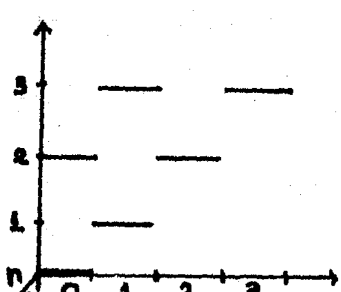
Además para trabajar más comodamente se efectúa el cambio de variable

$$X_i = (\hbar\omega/E_0)^{1/2} \qquad X_i' = \epsilon X_i \qquad i=1,2,3$$

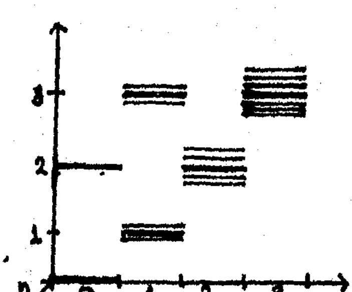
ya que en estas variables el Hamiltoniano está dado por

$$\mathcal{H} = H'/\epsilon^2 = 1/2 (-\nabla^2 + r^2) + b/\epsilon^2 L_3, \qquad (2.15)$$

donde ∇^2, r son el laplaciano y la variable radial en las coordenadas X_i y $L_3 = -i(X_1\partial/\partial X_2 - X_2\partial/\partial X_1)$. El Hamiltoniano da lugar a una degeneración "accidental" residual como se ilustra en la siguiente figura donde graficamos la energía caracterizada por el número cuántico n vs. valores del momento angular l y su proyección m en ausencia de campo magnético a) y en presencia de este (efecto Zeeman) con degeneración b).



(a)



(b)

Estudiando la figura (2.b) se hace notar lo siguiente: dra un número total de cuantos $n=2$ los niveles están degenerados cuando el eigenvalor m de L_3 es cero, para $n=3$ sucede lo mismo si $m=0,\pm 1$ y en general para una n arbitraria hay una degeneración remanente para $m = 0\pm,1,\pm 2,\ldots\pm(n-2)$.

También se observa que el número de niveles con la misma energía para valores fijos de m y n es $\frac{1}{2}(n-|m|)+1$ si $(n-|m|)$ es par y $\frac{1}{2}(n-|m|-1)+1$ si $(n-|m|)$ es impar.

Para entender el origen de esta degeneración accidental empezaré discutiendo el hamiltoniano (2.16) en coordenadas cilíndricas

$$H=1/2\left(-1/\rho\,\partial/\partial\rho\,\rho\,\partial/\partial\rho-1/\rho^2\,\partial^2/\partial\varphi^2+\rho^2\right)+1/2\left(-\partial^2/\partial z^2+z^2\right)+B/\omega^2\,i\,\partial/\partial\varphi \qquad (2.16)$$

donde

$$\rho=(X_1^2+X_2^2)^{1/2},\; z=X_3 \;\;\text{y}\;\; \varphi=\text{ang tan}(X_2/X_1) \qquad (2.17a,b,c)$$

El primer término de (2.16) es el hamiltoniano de un oscilador de dos dimensiones, el segundo término un oscilador de una dimensión y el último término es la componente tres del momento angular. Así los eigenestados de H pueden denotarse por un Ket[9] que es el producto de las eigenfunciones de cada término y tiene la forma

$$|\nu n_0 m\rangle = R_{\nu|m|}(\rho)\,(2\pi)^{1/2}\exp(im\varphi)\,\chi_{n_0}(z) \qquad (2.18)$$

$R_{\nu}^{(m)}$ es la solución normalizada de la parte radial[9] de un oscilador armónico en dos dimensiones y está dada por

$$R_{\nu|m|}(\rho) = [\,2(\nu!)/(\nu+|m|+1)\,]^{1/2}\,\rho^{|m|}\,e^{-\rho^2/2}\,L_{\nu}^{|m|}(\rho^2) \qquad (2.19)$$

en donde $L_{\nu}^{(m)}$ es un polinomio de Laguerre y $\chi_{n_0}(Z)$ es la solución de un oscilador armónico en una dimensión y está dado por

$$\chi_{n_0}(z) = \pi^{-1/4}\,(2^{n_0}\,n_0!)^{-1/2}\,H_{n_0}(z)\,e^{-z^2/2} \qquad (2.20)$$

con $H_{n_0}(Z)$ un polinomio de Hermite, finalmente $(2\pi)^{-1/2}\exp(im\varphi)$ es eigenfunción de L_3. Los eigenvalores asociados con el Ket (2.18) están dados por la suma de los eigenvalores de las eigenfunciones de los tres términos de H así toman la forma

$$E_{\nu n_0 m} = (2\nu+|m|+1) + (n_0+1/2) + b^2/e^2 m \qquad (2.21)$$

$E_{\nu n_0 m}$, no cambia cuando $2\nu+n_0$ permanece constante es decir, si ocurren las transiciones simultáneas

$$\nu \longrightarrow \nu\pm 1 \quad , \quad n_0 \longrightarrow n_0\mp 2 \qquad (2.22)$$

y claramente esto implica degeneración (varios estados con la misma energía).

b) Generadores del algebra de Lie de Simetría.

Ahora encontraré los operadores cuánticos que conectan los diferentes estados con la misma energía es decir que produzcan las transiciones (2.22) al actuar sobre el Ket(2.18). Para esto es conveniente introducir los operadores de creación y aniquilación que se definen en términos de coordenadas y momentos como sigue:

$$\eta_i = (1/\sqrt{2})(X_i - i P_i) \,, \quad \xi_i = (1/\sqrt{2})(X_i + i P_i) \quad i=1,2,3 \tag{2.23}$$

Más específicamente buscamos operadores η_q y ξ_q con $q = 0,+,-$ que son combinación η_i ξ_i y que ante rotaciones tienen propiedades de transformación bien definidas, así tenemos

$$\eta_{\pm} = \mp 1/\sqrt{2}\,(\eta_1 \pm i\eta_2) \,, \quad \eta_0 = \eta_3 \quad \xi^q = \eta_q^+ \tag{2.24}$$

El Hamiltoniano (2.3) toma la forma

$$H = [N + 3/2] + b^2/\epsilon^2 M \tag{2.25}$$

donde

$$N = N_+ + N_0 + N_- \quad y \quad M = L_3 = N_+ - N_- \tag{2.26a,b}$$

con

$$N_+ = \eta_+ \xi^+ \,, \quad N_0 = \eta_0 \xi_0 \quad N_- = \eta_- \xi^- \tag{2.27a,b,c}$$

que son los operadores de número ya que en cada una de las direcciones +, - y o.

Los eigenestado de H están dados por

$$|n_+ n_o n_-\rangle = (n_+!\, n_o!\, n_-!)^{-1/2}\, \eta_+^{n_+}\, \eta_o^{n_o}\, \eta_-^{n_-}|0\rangle \qquad (2.28)$$

donde $|0\rangle$ es el estado base que tiene la forma

$$|0\rangle = \pi^{-3/4} \exp[-1/2(\rho^2+z^2)] \qquad (2.29)$$

Los números cuánticos $n_+ n_o n_-$ están relacionados con ν, m por medio de

$$n_+ + n_o = 2\nu + |m| \qquad n_+ - n_- = m \qquad (2.30)$$

y n_o tiene el mismo significado que en (2.18) y (2.21).

Dos posibles operadores que relacionan los estados (2.28) para los cuales N y M tienen eigenvalores fijos son $\eta_+\eta_-\xi^{o2}$ y $\eta_o^2\,\xi^+\xi^-$, con el segundo Hermitiano conjugado del primero, ya que

$$\eta_+\eta_-\xi^{o2}|n_+ n_o n_-\rangle = [(n_+ +1)(n_- +1)\, n_o(n_o-1)]^{1/2}|n_+ +1, n_o-2, n_- +1\rangle \qquad (2.31a)$$

$$\eta_o^2\,\xi^+\xi^-|n_+ n_o n_-\rangle = [n_+ n_- (n_o+1)(n_o+2)]^{1/2}|n_+ -1, n_o+2, n_- -1\rangle \qquad (2.31b)$$

y los nuevos estados todavía tienen eigenvalores $n_+ + n_o + n_-$, $n_+ - n_-$ para N, M. Este resultado sugiere que tenemos operadores de escalera para un algebra de Lie de SU(2).

Para encontrar la forma explícita de algebra de SU(2), tenemos que primeramente reemplazar los números cuánticos n_+, n_-, n_0 por j, μ, m de tal forma que los generadores de SU(2) actuen sobre $j, \mu = j, j-1, \ldots, -j$ en la forma standard de los operadores de momento angular. Para lograr este propósito notamos que los operadores (2.31) actuando sobre $|\nu n_0 m\rangle$ los cambian a $|\nu \pm 1, n_0 \pm 2, m\rangle$. Así el algebra de Lie no mezcla estados pares con impares de n_0. Por tanto es conveniente llevar la discusión separada para estados pares e impares de n_0 y para este propósito introducimos la notación

$$n_0 = 2\tau + \lambda \; ; \; \lambda = 0, 1 ; \; \tau = 0, 1, 2 \ldots \tag{2.32a}$$

es decir $n_0 \equiv \lambda \bmod 2$. Denotamos por n el número total de cuantos

$$n = n_+ + n_0 + n_- = 2\nu + |m| + n_0 \tag{2.32b}$$

De (2.19a) y el lado derecho de (2.19b) se tiene que es par (impar) cuando n_0 es par (impar) es decir

$$n - |m| \equiv \lambda \bmod 2 \tag{2.32c}$$

Ahora definimos j y μ por

$$j = 1/4\,(n - |m| - \lambda) = (1/4)\,[(n_+ + n_-) - |n_+ - n_-| + 2\tau] \tag{2.33a}$$

$$\mu = 1/4\,(n - |m| - \lambda) - \tau = 1/4\,[(n_+ + n_-) - |n_+ - n_-| - 2\tau] \tag{2.33b}$$

mientras que m tiene la definición $m=n_+ - n_-$ de (2.30).

Es claro que j y μ son enteros o semienteros y además para $\tau = 0$, $\mu = j$ mientras que si nosotros aumentamo. τ en saltos de uno en uno, μ toma los valores $\mu = j, j-1, \ldots, -j$. Si $\mu < -j$ entonces $\mu + j < 0$ y de (2.33) se ve que implica una contradicción $(n_+ + n_-) < |n_+ - n_-|$, cuando n_+, n_- son enteros no negativos.

Los estados (2.28) pueden denotarse por

$$|n_+ n_0 n_- > = |j \mu m), \qquad (2.33c)$$

donde se tiene en mente que las definiciones (2.33a,b) de j, μ son diferentes para n_0 para que para n_0 impar.

El siguiente paso es encontrar los operadores de escalera $J_\pm = J_1 \pm i J_2$ y $J_0 = J_3$ que actuen sobre los estados $|j \mu m)$ en la forma

$$J_\pm |j \mu m) = [(j \mp \mu)(j \pm \mu + 1)]^{1/2} |j, \mu \pm 1, m), \qquad (2.34a)$$

y

$$J_0 |j \mu m) = \mu |j \mu m) \qquad (2.34b)$$

De (2.31) y (2.34) y la definición de $N, M, N_\pm, N_0$ y teniendo en mente que el número cuántico τ es el eigenvalor del operador $(1/2)(N_0 - \lambda)$ se encuentra que los operadores que satisfacen (2.34a) tiene la forma

$$J_+ = J_-^\dagger = \eta_+ \eta_- \xi^{02} \left\{ \frac{(N_0 - \lambda)[(1/2)(N_+ + N_-) - (1/2)|N_+ - N_-| + 1]}{2(N_+ + 1)(N_- + 1) N_0 (N_0 - 1)} \right\}^{1/2}$$

(2.35a)

pues J_+ es hermitiano conjugado de J_- así

$$J_- = \eta_0^2 \xi^+ \xi^- \left\{ \frac{(N_0-\lambda+2)[1/2(N_+ + N_-) - 1/2|N_+ - N_-|]}{2N_+ N_- (N_0+1)(N_0+2)} \right\}^{1/2} \qquad (2.35b)$$

y

$$J_0 = (1/4)\left[(N_+ + N_-) - |N_+ - N_-| - (N_0 - \lambda)\right] \qquad (2.35c)$$

La aparición de raices y potencias inversas en los operadores $N_\pm$, N_0 no es un problema pues actuan en la base $|n_+ n_0 n_-\rangle$ en la cual son diagonales. Cabe notar que tenemos dos formas en los operaodres (2.35) para valores pares ($\lambda = 0$) e impares ($\lambda = 1$) de $n - |m|$. Tenemos entonces los generadores explícitos del algebra de Lie SU(2) asociada con la degeneración del Hamiltoniano para una partícula en un potencial de oscilador armónico y bajo un campo magnético constante.

Es bien sabido[2] que una algebra de Lie de simetría SU(2) aparece también en un problema de un oscilador armónico de dos dimensiones. Es entonces interesante especular si un hamiltoniano para una partícula en un oscilador de tres dimensiones, sujeto a un campo magnético externo, puede por medio de una transformación canónica ser llevado a otro que involucre un oscilador armónico en dos de los grados de libertad más un término función del tercer grado de libertad únicamente. Para probar esto primero encontraré los operadores de escalera que se asocian a los números cuánticos ν y n_0 que aparecen en (2.18).

c) *Operadores de Escalera para ν y n_0.*

Empezaré fijándome en el primer término del Hamiltoniano (2.16) que corresponde a un oscilador en dos dimensiones y cuyas eigenfunciones son $R_{\nu|m|}(\rho)(2\pi)^{-1/2}\exp(im\varphi)$ *con* $R_{\nu|m|}(\rho)$ *dada en (2.6). Se introducen los operadores*[9]

$$I_1 = 1/4\left(-1/\rho\,\partial/\partial\rho\,\rho\,\partial/\partial\rho + m^2/\rho^2 - \rho^2\right), \qquad (2.36a)$$

$$I_2 = 1/2i\left(\rho\,\partial/\partial\rho + 1\right), \qquad (2.36b)$$

$$I_3 = 1/4\left(-1/\rho\,\partial/\partial\rho\,\rho\,\partial/\partial\rho + m^2/\rho^2 + \rho^2\right) \qquad (2.36c)$$

Estos son los generadores de un algebra de Lie de SU(1,1) pues satisfacen las relaciones de conmutación[16]

$$[I_1, I_2] = -i\,I_3, \quad [I_3, I_1] = i\,I_2, \quad [I_2, I_3] = i\,I_1 \qquad (2.37a,b,c)$$

Además $R_{\nu|m|}(\rho)$ *son eigenestado de* I_3 *es decir*

$$I_3\,R_{\nu|m|}(\rho) = [\nu + (|m|+1)/2]\,R_{\nu|m|}(\rho), \qquad (2.38a)$$

donde el eigenvalor proviene del primer parentesis reducido de (2.21). Definimos los operadores $I_\pm = I_1 \pm I_2$ *y de la propiedad de los polinomios de Laguerre tenemos que*[9]

$$I_\pm\,R_{\nu|m|}(\rho) = \{[\nu + |m| + (1/2) \pm (1/2)][\nu + (1/2) \pm (1/2)]\}^{1/2} R_{\nu\pm1|m|}(\rho) \qquad (2.38b)$$

además $[I_\pm, I_3] = \mp I_\pm$.

Los operadores $I_\pm$ son entonces operadores de ascenso y descenso, para ν en $R_{\nu|m|}(\rho)$, pero es más conveniente tratar con operadores que actuan como operadores ordinarios de creación y aniquilación $\bar{\eta}_1$, $\bar{\xi}_1$ con respecto a ν, es decir

$$\bar{\eta}_1 R_{\nu|m|}(\rho) = (\nu+1)^{1/2} R_{\nu+1|m|}(\rho), \quad \bar{\xi}_1 R_{\nu|m|}(\rho) = \nu^{1/2} R_{\nu-1|m|}(\rho)$$

(2.39)

con η hermitiano conjugado de $\bar{\xi}_1$ además en analogía con el momento angular el operador de Casimir de SU(1,1) es

$$I^2 = I_1^2 - I_2^2 - I_3^2$$

De (2.38) se ve que [10]

$$\bar{\eta}_1 = [I_3 + (|m|-1)/2]^{-1/2} I_+ , \quad \bar{\xi}_1 = I_- [I_3 + (|m|-1)/2]^{-1/2} \qquad (2.40a)$$

Si se reemplaza m en (2.16) por $i\,\partial/\partial\varphi$ y escribimos los operadores I_i $i=1,2,3$ en coordenadas x_1, x_2, p_1, p_2 momentos cartesianos y de allí en términos de operadores de creación y aniquilación (2.23), (2.24) se llega a

$$\bar{\eta}_1 = [(1/2)(N_+ + N_- + |M|)]^{-1/2} \eta_+ \eta_- , \quad \bar{\xi}_1 = \xi^+ \xi^- [(1/2)(N_+ + N_- + |M|)]^{-1/2}$$

(2.41,a,b)

y como $I_3 = (1/2)(N_+ + N_- + 1)$ y $I_+ = \eta_+ \eta_-$

Tenemos además que si

$$\bar{\eta}_1 \bar{\xi}_1 = [I_3 + (|m|-1)/2]^{-1/2} I_+ I_- [I_3 + (|m|-1)/2]^{-1/2}$$

$$I_+ I_- = [I_3 + (|M|-1)/2][I_3 - (|M|-1)/2]$$

nos queda

$$\bar{\eta}_1 \bar{\xi}_1 = [I_3 - (|m|+1)/2] = 1/2\,(H-|m|-1)$$

es decir

$$H = 2\bar{\eta}_1 \bar{\xi}_1 + |m| + 1 = 4\,(N_+ + N_- + |M|)^{-1} N_+ N_- + |M| + 1 \tag{2.42}$$
$$= N_+ + N_- + 1$$

El Hamiltoniano en el primer paréntesis redondo de (2.16) corresponde de (2.23, 2.24) al lado derecho de (2.42) y de (2.21) su eigenvalor es $2\nu + |m| + 1$ *. Viendo el lado izquierdo de (2.42) se ve que el eigenvalor de* $|M|$ *es* $|m|$ *, y el correspondiente a* $\bar{\eta}_1 \bar{\xi}_1$ *es* ν *.*

En la ecuación (2.22) se indicó que la degeneración accidental del problema está asociada con n_0 *que es el eigenvalor de* $\eta_0 \xi_0$ *y con* ν *que es eigenvalor de* $\bar{\eta}_1 \bar{\xi}_1$ *, como acaba de verse.*

Si la proyección del momento angular M (que depende solamente de φ *a través de* $M = -i\,\partial/\partial\varphi$ *) se separa de los demás grados de libertad podemos esperar inicialmente que* $\eta_0 \xi_0$*,* $\bar{\eta}_1 \bar{\xi}_1$ *, proporcionan el oscilador de dos dimensiones que se está buscando, lo cual no es correcto pues en (2.21) los eigenvalores del Hamiltoniano (2.16)* n_0*,* ν *aparecen en la combinación* $2\nu + n_0$ *. Así requerimos de un procedimiento por el cual* $\eta_0 \xi_0$ *se transforme en* $2\bar{\eta}_2 \bar{\xi}_2$ *para que el Hamiltoniano (2.16) pueda contener el término* $2(\bar{\eta}_1 \bar{\xi}_1 + \bar{\eta}_2 \bar{\xi}_2)$ *que tiene obviamente un algebra de Lie SU(2).*

La transformación de $\eta_0 \xi_0$ *en* $2\bar{\eta}_2 \bar{\xi}_2$ *es claramente una en la cual se va de un oscilador de una fre-*

cuencia dada a uno de doble frecuencia. Este cálculo se llevó a cabo en otra publicación [11] en la cual los operadores de creación y aniquilación están dados por

$$\bar{\eta}_{2\lambda} = [2(\eta_0 \xi^0 - 1 + \lambda)]^{-1/2} \eta_0^2 \quad \bar{\xi}_{2\lambda} = \xi^{02} [2(\eta_0 \xi^0 - 1 + \lambda)]^{-1/2} \quad \lambda = 0,1 \tag{2.43}$$

Se nota en este punto [11] que la correspondencia entre los niveles de un oscilador frecuencia 1 y uno de frecuencia 2 no es uno a uno sino 2 a 1. Esto se indica por el índice λ que toma los valores $\lambda = 0, 1$. Para $\lambda = 0$ (1) tenemos el mapeo de todos los niveles de número de cuántos par (impar) en el caso de frecuencia 1 a todos los niveles de frecuencia 2. El hecho es que de (2.43) obtenemos

$$2\bar{\eta}_{2\lambda} \bar{\xi}_{2\lambda} = \eta_0 \xi_0 - \lambda \tag{2.44}$$

donde el índice λ añadido a $\bar{\eta}_2, \bar{\xi}_2$ sirve para indicar el carácter de este mapeo [11].

De (2.26b), (2.42) y (2.44) se obtiene que el hamiltoniano (2.16) de una partícula en un potencial de oscilador armónico sujeto a un campo magnético externo puede escribirse como

$$H = 2(\bar{\eta}_1 \bar{\xi}_1 + \bar{\eta}_{2\lambda} \bar{\xi}_{2\lambda} + [|M| + \lambda + (b^2/6^2)N + 3/2] \tag{2.45}$$

donde se nota que las dos formas de este Hamiltoniano dependen de si tratamos con número de cuantas n_0 par ($\lambda = 0$) ó impar ($\lambda = 1$) para el oscilador en la variable 2.

Ya que el primer paréntesis en H de (2.45) es un Hamiltoniano de un oscilador de dos dimensiones, es obvio inmediatamente que el problema tiene una algebra de Lie de simetría SU(2) cuyos generadores son:

$$J_+ = \bar{\eta}_1 \bar{\xi}_{2\lambda} \qquad J_0 = 1/2\,(\bar{\eta}_1 \bar{\xi}_1 - \bar{\eta}_{2\lambda} \bar{\xi}_{2\lambda}) \, , \; J_- = \bar{\eta}_{2\lambda} \bar{\xi}_1 , \qquad (2.46)$$

donde, al igual que en (2.35), tenemos dos versiones de estos generadores ($\lambda = 0, \lambda = 1$) : De (2.41) y (2.43) obtenemos

$$J_+ = J_-^{+} = \eta_+ \eta_- \xi^{o2} \{ 2(N_0 - 1 + \lambda) [(1/2)(N_+ + N_-) + (1/2)|N_+ - N_-| + 1] \}^{-1/2} \qquad (2.47a)$$

$$J_0 = (1/4)\,[(N_+ + N_-) - |N_+ - N_-| - (N_0 - \lambda)] \qquad (2.47b)$$

donde en (2.47a) se pasa al lado derecho de $\eta_+ \eta_- \xi^{o2}$ todos los operadores que dependen de N_+, N_-, N_0 cambiandolos apropiadamente.

A simple vista (2.47) no se ve idéntica a (2.35) pero si discutimos separadamente los casos $\lambda = 0$ y $\lambda = 1$ y usamos el hecho de que $|N_+ - N_-| = N_0 - N_-$ si $n_+ \geq n_-$ mientras $|N_+ - N_-| = N_- - N_+$ si $n_+ \leq n_-$ es fácil ver que tenemos el mismo operador.

Se obtiene así el mismo grupo de simetría que en la sección anterior a pesar del diferente punto de partida. Ahora interesan las relaciones (2.41) y (2.43) en el límite clásico, que por el principio de correspondencia, nos permitan reemplazar los operadores N_+, N_0, N_- por sus observables clásicos, despreciando los números tales como que serán pequeños en comparación con los eigenvalores.

Las relaciones (2.41), (2.43) proporcionan transformaciones canónicas que nos llevan de un Hamiltoniano para una partícula en un potencial de oscilador armónico a uno correspondiente al oscilador en dos dimensiones más un rotor en el plano asociado con la observable P_φ. En el último es el Hamiltoniano aparece en forma obvia el grupo SU(2)

d) Transformación canónica en el límite clásico.

Aunque podría decirse que los operadores lineales, sus grupos de simetría y degeneraciones son propios de la mecánica cuántica es común que en discusiones las constantes de movimiento y las transformaciones canónicas se discutan dnetro del esquema de la mecánica clásica y la forma de relacionar los resultados de las dos mecánicas, está dada por el principio de correspondencia. Debe recordarse que históricamente la simetría ha jugado un papel muy importante en la mecánica clásica, principalmente a través del uso de grupos de transformaciones continuas más que en sus representaciones matriciales. El concepto básico es el de transformación canónica (transformación del espacio fase) que deja invariable la forma Hamiltoniana de las ecuaciones de movimiento. Entre estas transformaciones existen los que dejan invairable el Hamiltoniano mismo.

El Hamiltoniano clásico es coordenadas esféricas (de una partícula bajo un campo magnético externo) tiene la forma

$$H = (1/2)(P_\rho^2 + \rho^{-2} P_\varphi^2 + \rho^2) + (1/2)(P_z^2 + z^2) + b^2/\epsilon^2 P_\varphi \qquad (2.48)$$

donde P_ρ, P_φ, P_z son las variables canónicamente conjugadas de ρ, φ, z . Mostraré que existe una transformación canónica que nos lleva de las observables $\rho, \varphi, z, P_\rho, P_\varphi$ y P_z a $\bar{X}_1, \bar{X}_2, \bar{X}_3, \bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{P}_3$ en las cuales el Hamiltoniano tiene la forma

$$H = (\bar{P}_1^2 + \bar{X}_1^2) + (\bar{P}_2 + \bar{X}_2) + |\bar{P}_3| + b^2/\epsilon^2 \bar{P}_3 \qquad (2.49)$$

donde se ve claramente la existencia del algebra de SU(2).

Para encontrar esta transformación canónica se relacionan los operadores creación y aniquilación $\bar{\eta}_1, \bar{\xi}_1$ de (2.41) y $\bar{\eta}_{2\lambda}\ \bar{\xi}_{2\lambda}$, $\lambda = 0, 1$ de (2.43) con nuevos operadores de coordenadas y momentos $\bar{X}_i, \bar{P}_i$ $i=1,2$ bajos las relaciones estandares

$$\bar{\eta}_1 = 1/\sqrt{2}(\bar{X}_i - i\bar{P}_i)\ , \ \bar{\xi}_i = 1/\sqrt{2}(\bar{X}_i + i\bar{P}_i)\ i=1,2 \qquad (2.50)$$

Escribiendo todas las expresiones que aparecen en el lado derecho de (2.31) y (2.43) en términos de X_i, P_i $i=1,2,3$ asociadas con las coordenadas cartesianas originales y momentos (2.14) se tiene las siguientes relaciones

$$_3 = (1/\sqrt{2})(\bar{X}_1 - i\bar{P}_1) = (1/2)\left[(P_1^2+P_2^2+X_1^2+X_2^2)-2+2|X_1P_2-X_2P_1|\right]^{-1/2}\left[(P_1^2+P_2^2-X_1^2-X_2^2)+i(X_1P_1+P_1X_1+X_2P_2+P_2X_2)\right] \quad (2.51a)$$

$$\bar{\eta}_1 = 1/\sqrt{2}(\bar{X}_2 - i\bar{P}_2) = (P_3^2+X_3^2-3+2\lambda)^{-1/2}(1/2)\left[-(P_3^2-X_3^2)-i(X_3P_3+P_3X_3)\right] \quad (2.51b)$$

Por el principio de correspondencia los números $2, 3, 2\lambda$ $(\lambda = 0, 1)$ se desprecian, notando que todas las observables son reales y reemplazando en el lado derecho de (2.51) las coordenadas cartesianas X_i, P_i $i = 1, 2, 3$ por los cilíndricos ρ, φ, z P_ρ, P_φ, P_z obtenemos

$$\bar{X}_1 = (1/\sqrt{2})(P_\rho^2+\rho^{-2}P_\varphi^2+\rho^2+2|P_\varphi|)^{-1/2}\,(P_\rho^2+\rho^{-2}P_\varphi^2-\rho^2) \quad (2.52a)$$

$$\bar{P}_1 = -\sqrt{2}\,(P_\rho^2+\rho^{-2}P_\varphi^2+\rho^2+2|P_\varphi|)^{-1/2}\,\rho\,P_\rho \quad (2.52b)$$

$$\bar{X}_2 = -(1/\sqrt{2})\,(P_z^2+z^2)^{-1/2}(P_z^2-z^2), \quad (2.52c)$$

$$\bar{P}_2 = \sqrt{2}\,(P_z^2+z^2)^{-1/2}\,z\,P_z \quad (2.52d)$$

Agregamos a $\bar{X}_i, \bar{P}_i$ $i = 1, 2$ las variables definidas por $\bar{X}_3, \bar{P}_3$

$$\bar{X}_3 = \varphi + w(\rho, P_\rho, |P_\varphi|), \quad (2.52e)$$

$$\bar{P}_3 = P_\varphi, \quad (2.52f)$$

donde w está indeterminada todavía.

Las coordenadas $\bar{X}_i\,,\ \bar{P}_i \quad i=1,2,3$ deben satisfacer las relaciones siguientes de los paréntesis de Poisson

$$\{\bar{X}_i,\bar{X}_j\}=0\ ,\quad \{\bar{P}_i,\bar{P}_j\}=0\ ,\quad \{\bar{X}_i,\bar{P}_j\}=\delta_{ij} \tag{2.53}$$

donde el paréntesis de Poisson de F,G en coordenadas cilíndricas está dado por

$$\{F,G\}=\partial F/\partial\rho\,\partial G/\partial P_\rho-\partial F/\partial P_\rho\,\partial G/\partial\rho+\partial F/\partial\varphi\,\partial G/\partial P_\varphi-\partial F/\partial P_\varphi\,\partial G/\partial\varphi+\partial F/\partial z\,\partial G/\partial P_z-\partial F/\partial P_z\,\partial G/\partial z \tag{2.54}$$

Se espera que (2.53) sea satisfecha para $i=1,2$ por le principio de correspondencia y las relaciones de conmutación de $\eta_1,\ \xi_1\ \eta_2,\ \xi_2,$ pero también lo mostraré más adelante.

Las relaciones de paréntesis de Poisson que evaluaré primero, son aquellas de (2.53) en las cuales $i,j=1,2$. Como $\bar{X}_1,\bar{P}_1$ dependen sólo de $\rho,\ P_\rho,\ |P_\varphi|$ mientras que $\bar{X}_2,\bar{P}_2$ son funciones de Z, P_z obtenemos

$$\{\bar{X}_1,\bar{X}_2\}=\{\bar{X}_1,\bar{P}_2\}=\{\bar{P}_1,\bar{X}_2\}=\{\bar{P}_1,\bar{P}_2\}=0 \tag{2.55a}$$

se puede checar fácilmente de (2.5?,c,d) y (2.54) que

$$\{\bar{X}_2,\bar{P}_2\}=\partial X_2'/\partial z\ \partial P_2'/\partial P_z-\partial X_2'/\partial P_z\ \partial P_2'/\partial z=1 \tag{2.55b}$$

Nos queda solamente por evaluar $\{\bar{X}_1,\bar{P}_1\}$ para lo cual es conveniente escribir

$$\bar{X}_1 = (2Q)^{-1/2} U, \qquad \bar{P}_1 = -(2/Q)^{1/2} V, \tag{2.55c,d}$$

donde

$$U = (P_\rho^2 + \rho^{-2} P_\varphi^2 - \rho^2), \quad V = \rho P_\rho \tag{2.55e,f}$$

$$Q = P_\rho^2 + \rho^{-2} P_\varphi^2 + \rho^2 + 2|P_\varphi| \tag{2.55g}$$

Del hecho de que $\bar{X}_i, \bar{P}_i$ *es función únicamente de* $\rho, |P_\rho|, |P_\varphi|$ *y la definición (2.54) del paréntesis de Poisson tenemos*

$$\{\bar{X}_1, \bar{P}_1\} = Q^{-3}[Q^2\{V, U\} - (1/2)VQ\{Q, U\} - 1/2\, U Q\{V, Q\}] \tag{2.55h}$$

Como se obtiene de (2.55e,f) que

$$\{V, U\} = 2Q - 4|P_\varphi| \tag{2.55i}$$

$$\{Q, U\} = 8V \tag{2.55j}$$

$$\{V, Q\} = 2Q - 4|P_\varphi| - 4\rho^2 \tag{2.55k}$$

se tiene, substituyendo en (2.55h) que

$$\{\bar{X}_1, \bar{P}_1\}$$

Además como $\bar{X}_i, \bar{P}_i$ $i = 1, 2$ *no dependen de* φ *es claro que*

$$\{\bar{P}_3, \bar{P}_i\} = 0 = \{\bar{P}_3, \bar{X}_i\}, \; i = 1, 2, \tag{2.55l}$$

y también por la forma de

$$\{\bar{X}_3, \bar{P}_3\} = 1 \tag{2.56}$$

Además

$$\{\bar{X}_3, \bar{X}_2\} = \{\bar{X}_3, \bar{P}_2\} = 0 \tag{2.57}$$

como $\bar{X}_2, \bar{P}_2$ depende solo de Z, P_Z mientras w en (2.52e) es función de $\rho, P_\rho, |P_\varphi|$. Los únicos paréntesis de Poisson que quedan por demostrar son

$$\{\bar{X}_3, \bar{X}_1\} = 0 \;, \{\bar{X}_3, \bar{P}_1\} = 0, \tag{2.58}$$

que de (2.54) lleva a las ecuaciones

$$\partial w/\partial \rho \;\; \partial \bar{X}_1/\partial P_\rho - \partial w/\partial P_\rho \; \partial \bar{X}_1/\partial \rho = - \partial \bar{X}_1/\partial P_\varphi \,, \tag{2.59a}$$

$$\partial w/\partial \rho \;\; \partial \bar{P}_1/\partial P_\rho - \partial w/\partial P_\rho \; \partial \bar{P}_1/\partial \rho = - \partial \bar{P}_1/\partial P_\varphi \,, \tag{2.59b}$$

De las expresiones (2.52a,b) para $\bar{X}_1, \bar{P}_1$ y las ecuaciones (2.59) se nota que $\partial w/\partial \rho$ $\partial w/\partial P_\rho$ satisfacen un sistema de dos ecuaciones lineales no homogeneas cuyo determinante es la expresión a la mitad de (2.55h) y tiene valor 1. Se puede escribir

$$\partial w/\partial \rho = \partial \bar{X}_1/\partial P_\varphi \; \partial \bar{P}_1/\partial \rho - \partial \bar{X}_1/\partial \rho \; \partial \bar{P}_1/\partial P_\varphi \tag{2.59c}$$

$$\partial w/\partial P_\rho = \partial \bar{X}_1/\partial P_\varphi \; \partial \bar{P}_1/\partial P_\rho - \partial \bar{X}_1/\partial P_\rho \; \partial \bar{P}_1/\partial P_\varphi \tag{2.59d}$$

y de (2.55c,d) y (2.55e,f) se obtiene

$$\partial \bar{X}_1/\partial P_\varphi = (1/\sqrt{2})\, Q^{-3/2}\, [\pm 2Q\rho^{-2}|P_\varphi| \mp u(\rho^{-2}|P_\varphi|+1)] \qquad (2.59e)$$

$$\partial \bar{P}_1/\partial P_\varphi = \pm\sqrt{2}\; Q^{-3/2}\, v\, (\rho^{-2}|P_\varphi|+1), \qquad (2.59f)$$

con el signo $\pm$ proviniente del hecho que $\partial|P_\varphi|/\partial P_\varphi = P_\varphi/|P_\varphi| = \pm 1$ dependiendo si P_φ es positiva o negativo.

Puede verse que $dW = \partial W/\partial\rho\, d\rho + \partial W/\partial P_\rho\, dP_\rho$ es integrable, es decir

$$\partial^2 W/\partial P_\rho \partial\rho = \partial^2 W/\partial\rho\partial P_\rho \qquad (2.60)$$

De (2.52a,b) para $\bar{X}_1, \bar{P}_1$ obtenemos

$$\partial W/\partial P_\rho = \mp 1/Q\, (|P_\varphi|/\rho + \rho) \qquad (2.61a)$$

$$\partial W/\partial\rho = \mp P_\rho/Q\, (|P_\varphi|/\rho^2 - 1) \qquad (2.61b)$$

donde $\mp$ depende de si P_φ es positivo o negativo y en el cual está dada por (2.55a).

Y se tiene la diferencia exacta

$$dW = \mp Q^{-1} P_\rho (\rho^{-2}|P_\varphi| - 1)d\rho \mp Q^{-1}(\rho^{-1}|P_\varphi| + \rho)dP_\rho \qquad (2.62)$$

Considerando un desplazamiento en la dirección P_ρ en el plano fase (ρ, P_ρ), a lo largo del cual ρ, P_φ tienen valores fijos, se tiene

$$W = \mp \int \frac{(\rho^{-1}|P_\varphi| + \rho)\, dP_\rho}{P_\rho^2 + (\rho^{-1}|P_\varphi| + \rho)^2} = \text{arg tan}\left[(|P_\varphi| + \rho^2/\rho P_\rho\right] \qquad (2.63)$$

y puede checarse inmediatamente que este valor de W satisface la ecuación (2.51).

Las expresiones (2.42) para $\bar{X}_i, \bar{P}_i$ $i=1,2,3$ donde W toma el valor (2.63), proveen de una tranformación canónica que lleva de las variables $\rho, \varphi, z, P_\rho, P_\varphi, P_z$ a $\bar{X}_i, \bar{P}_i$ $i=1,2,3$ por sus valores (2.52) se obtiene el Hamiltoniano (2.48). Por lo tanto el Hamiltoniano de una partícula en un potencial de oscilador armónico tridimensional con un campo magnético externo puede mapearse por medio de una transformación canónica en un oscilador de dos dimensiones $(\bar{P}_1^2 + \bar{P}_2^2 + \bar{X}_1^2 + \bar{X}_2^2)$ más un rotor en el plano asociado con $\bar{P}_3$. En la última fórmula es obvio que el problema tiene una algebra de Lie SU(2).

CAPITULO III
EL OSCILADOR ARMONICO EN COORDENADAS ESFERICAS

En esta sección se verá que el problema de oscilador armónico discutido en las secciones anteriores puede resolverse con exactitud en coordenadas esféricas. En estas coordenadas se pueden tomar como integrales de movimiento al cuadrado del momento angular L'^2 y su proyección L'_3 donde el efecto de campo magnético se visualiza fácilmente.

En esta sección daré expresiones análogas a $J_\pm, J_0$ de (2.35). El procedimiento en esta sección será muy similar al de la parte en coordenadas cilíndricas.

Se definen las coordenadas $\bar{x}_i$ como en (2.1) para que el Hamiltoniano H sea (2.2) es decir

$$H = H_0 + b^2/\epsilon^2 L_3 \tag{3.1}$$

donde

$$H_0 = 1/2\,(-\nabla^2 + r^2) \qquad L_3 = -i\,\partial/\partial\varphi \tag{3.2a,b}$$

con ∇^2 dado en términos de coordenadas esféricas

Los eigenestados de H se designarán ahora por el Ket

$$|\nu l m\rangle = R_{\nu l}(r)\, Y_{lm}(\theta, \varphi) \tag{3.3}$$

donde $Y_{\ell m}$ es un harmonico esférico y

$$R_{\nu\ell}(r) = \{2(\nu!)/\Gamma(\nu+\ell+3/2)]\}^{1/2} r^{\ell} e^{-r^2/2} L_{\nu}^{\ell+1/2}(r^2), \qquad (3.4)$$

con $L_{\nu}^{\ell+1/2}$ siendo un polinomio de Laguerre.

Los correspondientes eigenvalores de H son:

$$E_{\nu\ell m} = [n+(3/2)+b^2/\epsilon^2 m; \quad n = 2\nu+\ell \qquad (3.5a,b)$$

Se tiene que hay degeneración residual, es decir estados con la misma energía cuando

$$\nu \longrightarrow \nu \pm 1 \quad , \quad \ell \longrightarrow \ell \pm 2, \qquad (3.6a,b)$$

el número total de cuanta n de (3.5b) no cambia al igual que m.

Se sabe del capítulo anterior que la degeneración se debe a un algebra de Lie de SU(2), pero se quiere encontrar la realización de ésta en coordenadas esféricas. Para llevar a cabo este propósito reemplazaré ν, ℓ, m en (3.3) por j, μ, m donde los generadores de SU(2) actúan en la parte j, μ. Para empezar cabe notar que $n-|m|$ puede ser entero par ó impar no negativo, como se indicó en (2.32c), $n-|m| = \lambda \bmod 2$, con $\lambda = 0,1$. De (3.5b) se ve que $n-\ell$ es par así que $\ell-|m| = \lambda \bmod 2$ además ℓ está en el intervalo $n \geq \ell \geq |m|$. Se define

$$j \equiv (1/4)(n-|m|-\lambda), \mu \equiv (1/2)(\ell-|m|-\lambda)-(1/4)(n-|m|-\lambda), \qquad (3.7a,b)$$

donde j coincide con la definición (2.33a) en coordenadas cilíndricas mientras es diferente de (2.33b) aunque aún toma los valores $\mu = j, j-1, \ldots, -j$

El Ket $|\nu l m\rangle$ puede expresarse en la forma

$$|\nu l m\rangle = |n l m\} \to |j \mu m), \tag{3.8}$$

con la relación entre los números cuánticos dados por (3.5b) y (3.7). Ahora se denotarán los generadores de SU(2) por J_q, $q = 1, 0, -1$ en componentes esféricos como

$$J_{\pm 1} = (\mp 1/\sqrt{2}) J_{\pm} = (\mp J_1 \pm i J_2), \quad J_0 = J_3 \tag{3.9}$$

y como no deben cambiarse los números cuánticos n, m se requiere que

$$[J_q, H_0] = 0 \;, \; [J_q, L_3] = 0 \tag{3.10}$$

Además, como son generadores de un algebra de Lie de SU(2) en la base $|j \mu m)$, se tiene que[14]

$$(j \mu' m | J_q | j \mu m) = [j(j+1)]^{1/2} \langle j\mu, 1q | j\mu' \rangle, \tag{3.11}$$

donde el último bracket es un coeficiente de Clebsch Gordon

Como los operadores J_q actuan en el subconjunto de estados $|n l m\}$ de n, m fijos es natural suponer que serán funciones de los generadores de U(3) de H_0 que actúa únicamente en los estados con n fija. Estos generadores estan dados por[15]

$$C_q^{q'} = \eta_q \xi^{q'} \quad q', q = 1, 0, -1 \tag{3.12a}$$

donde los operadores de creación y aniquilación tienen la forma

$$\eta_{\pm 1} = (\mp 1/\sqrt{2})(\eta_1 \pm i\eta_2) \quad \eta_0 = \eta_3 \quad \xi^q = \eta_q^+ \tag{3.12b,c}$$

con η_i , $i = 1,2,3$ se define por (2.10).

Es conveniente expresar $C_q^{q'}$ como tensores irreducibles de Racah[14] lo cual puede hacerse a través de las definiciones

$$T_{k\sigma} = \sum_{q,q'} \langle 1q', k\sigma | 1q \rangle \, C_q^{q'} \, , \quad k = 0, 1, 2 \tag{3.13a}$$

se ve entonces que[15]

$$T_{00} = H_0 - (3/2) \, , \; T_{1\sigma} = (1/\sqrt{2}) L_\sigma , \; T_{2\sigma} = Q_\sigma \tag{3.13b,c,d}$$

donde H_0 está dado por (3.2a), L_σ, $\sigma = 1, 0, -1$ son los componentes esféricas del momento angular y Q_σ, $\sigma = 2, 1, 0, -1, -2$ son los componentes del tensor cuadrupolar de Elliots[16] se define también al tensor de Racah

$$(L \times Q)_{2\sigma} \equiv \sum_{q,t} \langle 1q, 2t | 2\sigma \rangle L_q Q_t = -\sqrt{3/2}\, Q_\sigma - (24)^{-1/2} [L^2, Q] ,$$

(3.13e)

donde la equivalancie con la expresión del lado derecho se checa fácilmente como se muestra a continuación. Usando

$$L^2 = \sum_q (-1)^q L_q L_{-q} \quad , \quad L_q = L_0 L_+ L_-$$

Entonces

$$[L^2, T_{20}] = \sum_q (-1)^q [L_q L_{-q}, T_{20}] = \sum_q (-1)^q \{[L_q, T_{20}] L_{-q} + L_q [L_{-q}, T_{20}]\}$$ (3.13f)

Del hecho que (3.13g)

$$[J_\mu, T_{L\mu}] = \sum_{M'} \langle LM1\mu | LM' \rangle (L(L+1))^{1/2} T_{L\mu'}$$

de (3.13f) se sigue que

$$[L^2, Q] = 6 \sum_{m'm} \sum_{nq} (-)^{q+1} \langle 20, 1q | 2m' \rangle \langle 2m' 1 -q | 2m'' \rangle T_{2m'} - 2\sqrt{6} \sum_{m'q} \langle 1q, 2m' | 20 \rangle L_q T_{2m'}$$ (3.13h)

$$[L^2, Q] = -6Q - 2\sqrt{6}\,[L \times Q]_{2\sigma}$$ (3.13i)

Despejando $[L \times Q]_{2\sigma}$ de (3.13i) se tiene (3.13e). Los operadores (3.13c,d,e) conmutan con H_0 y para $\sigma = 0$, también con L_3. Así las relaciones de conmutación (3.10) se satisfacen si tomamos para J_q las expresiones:

$$J_q = \alpha_q L_0 + \beta_q Q_0 + \gamma_q (L \times Q)_{20} \quad ; \quad q = 1, 0, -1$$ (3.14)

donde la ecuación (3.11) nos permitirá determinar los coeficientes. Como Q_σ, $(L \times Q)_{2\sigma}$ son tensores de Racah de orden 2 con paridad par, relacionan estados $|n\ell m\rangle$ sólo consimismo ó con $|n\,\ell\pm 2\;m\}$. Por ejemplo, si $q=1$ obtenemos de (3.11) las ecuaciones

$$\beta_1\{n\ell+2\,m|Q_0|n\ell m\}+\gamma_1\{n\ell+2m|(L\times Q)_{20}|n\ell m\}=(-3/\sqrt{8})\,[(n-\ell)(\ell-|m|-\lambda+2)]^{1/2},$$

(3.15a)

$$\beta_1\{n\ell-2\,m|Q_0|n\ell m\}+\gamma_1\{n\ell-2m|(L\times Q)_{20}|n\ell m\}=0 \qquad (3.15b)$$

$$\beta_1\{n\ell m|Q_0|n\ell m\}+\gamma_1\{n\ell m|(L\times Q)_{20}|n\ell m\}=-\alpha_1 m \qquad (3.15c)$$

En (3.13) se usa el hecho

$$\{n\ell' m|L_0|n\ell m\}=m\,\delta_{\ell'\ell} \qquad (3.15d)$$

al igual que la expresión explícita de los coeficientes de Clebsch-Gordon que aparece en la ecuación (3.11) en la cual $q=1$ y j,μ toman los valores (3.7). Los elementos de matriz

$$\{n\ell' m|Q_0|n\ell m\} \qquad (3.15e)$$

son bien conocidos[16] pero los derivaré a continuación.

De la definición de Q_0 en la sección 3 se sigue que

$$\langle n\ell' m|Q_0|n\ell m\rangle=\sum_{\ell''}\sum_{m''qq'}\langle 1q',2 0|1q\rangle\langle n\ell' m|\eta_q|n{+}1\,\ell'' m''\rangle\langle n{+}1\,\ell'' m''|\xi^{q'}|n\ell m\rangle$$

(3.15f)

Usando el hecho de que $\eta^{+}_{q'} = \xi^{q'}$, el teorema de Wigner-Eckort y la definición de coeficiente de Racah[14] se obtiene

$$\langle nl'm|Q_0|nlm\rangle = \sum_{l''} [3(2l+1)]^{1/2}\, W(l'l''2l;1l)\,\langle lm,20|l'm\rangle \langle nl'||\eta||n+1\,l''\rangle\langle nl||\eta||n-1\,l''\rangle \qquad (3.15g)$$

donde l', l'' toma los valores $l' = l\pm 2,\ l,\ l'' = l\pm 1$

Los elementos de matriz reducidos están dados por[22]

$$\langle n+1\,l'||\eta||nl\rangle = \left[\frac{(n+l+3)(l+1)}{(2l+3)}\right]^{1/2}\delta_{l'l+1} + \left[\frac{(n-l+2)\,l}{(2l-1)}\right]^{1/2}\delta_{l'l-1} \qquad (3.15h)$$

y finalmente se obtiene

$$\langle n\,l+2\,m|Q_0|nlm\rangle = \frac{3}{(2l+3)}\left\{\frac{(n+l+3)(n-l)[(l+2)^2-m^2][(l+1)^2-m^2]}{10(2l+1)(2l+5)}\right\}^{1/2} \qquad (3.15i)$$

$$\langle n\,l-2\,m|Q_0|nlm\rangle = \frac{3}{(2l-1)}\left\{\frac{(n+l+1)(n-l+2)(l^2-m^2)[(l-1)^2-m^2]}{10(2l-3)(2l+1)}\right\}^{1/2} \qquad (3.15j)$$

$$\langle nlm|Q_0|nlm\rangle = \frac{(2n+3)[3m^2-l(l+1)]}{\sqrt{10}\,(2l-1)(2l+3)} \qquad (3.15k)$$

Los de $(L\times Q)_{20}$ se obtienen de las ecuaciones anteriores (3.13e) y de (3.15) da los coeficientes $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ y en forma similar se obtienen aquellos para $q = q-1$ así todos los coeficientes son:

$$\alpha_1 = \frac{(2n+3)[3m^2-\ell(\ell+1)]}{24m}\left\{\frac{2(\ell-|m|-\lambda+2)(2\ell+5)}{(n+\ell+3)(2\ell+1)[(\ell+1)^2-m^2][(\ell+2)^2-m^2]}\right\}^{1/2}$$

$$\beta_1 = \frac{(2\ell+3)(\ell-2)}{6}\left\{\frac{5(\ell-|m|-\lambda+2)(2\ell+5)}{(n+\ell+3)(2\ell+1)[(\ell+1)^2-m^2][(\ell+2)^2-m^2]}\right\}^{1/2}$$

$$\gamma_1 = \frac{(2\ell+3)}{4}\left\{\frac{10}{3}\,\frac{(\ell-|m|-\lambda+2)(2\ell+5)}{(n+\ell+3)(2\ell+1)[(\ell+1)^2-m^2][(\ell+2)^2-m^2]}\right\}^{1/2}$$

$$\alpha_0 = \frac{(2\ell-n-|m|-\lambda)}{m}\ ,\quad \beta_0 = 0\ ,\quad \gamma_0 = 0$$

$$\alpha_{-1} = -\frac{(2n+3)[3m^2-\ell(\ell+1)]}{24m}\left\{\frac{2(\ell-|m|-\lambda)(2\ell-3)}{(n+\ell+1)(2\ell+1)[\ell^2-m^2][(\ell-1)^2-m^2]}\right\}^{1/2}$$

$$\beta_{-1} = \frac{(\ell+3)(2\ell-1)}{6}\left\{\frac{5(\ell-|m|-\lambda)(2\ell-3)}{(n+\ell+1)(2\ell+1)[\ell^2-m^2][(\ell-1)^2-m^2]}\right\}^{1/2},$$

$$\gamma_{-1} = \frac{(2\ell-1)}{4}\left\{\frac{10(\ell-|m|-\lambda)(2\ell-3)}{3(n+\ell+1)(2\ell+1)[\ell^2-m^2][(\ell-1)^2-m^2]}\right\}^{1/2}, \qquad (3.16)$$

Para expresar J_q $q = 1, 0, -1$ como los generadores de SU(2) se escribe

$$J_q = L_0\,\hat{\alpha}_q + Q_0\,\hat{\beta}_q + (L\times Q)_{20}\,\hat{\gamma}_q \qquad (3.17)$$

donde los operadores $\hat{\alpha}_q$, $\hat{\beta}_q$, $\hat{\gamma}_q$ están dados por α_q, β_q, γ_q de (3.16) en donde se reemplaza

$$n \to H_0 - 3/2 \quad \ell \to \mathcal{I} \pm (L^2+1/4)^{1/2} - 1/2 \quad m \to L_3 \qquad (3.18)$$

ya que los eigenvalores de estos operadores son los números cuánticos indicados. De manera análoga al caso de coordenadas cilíndricas, la aparición de raíces de operadores no es problema cuando actúan en los estados $|n\ell m\}$ respecto a los cuales son diagonales.

Se tiene también en este caso las versiones de operadores J_q dependiendo de $\lambda=0,1$ al igual que en el caso cilíndrico.

CONCLUSION

En las páginas anteriores derivé explícitamente los generadores del algebra de Lie de Simetría responsable de la degeneración residual para una partícula en un potencial de oscilador armónico sujeta a un campo magnético débil. También se derivó en el límite clásico la transformación canónica que nos lleva de un Hamiltoniano a otro donde el algebra de Lie de Simetría se hace evidente.

El principal argumento utilizado fue que para el oscilador, en ausencia de campo magnético, el algebra de Lie de Simetría es U(3). Si se introduce el campo magnético los niveles de energía siguen caracterizándose por el número cuántico magnético m y así la simetría debe corresponder a una algebra de Lie menor aunque su realización sea más compleja debido a las restricciones impuestas al fijar el valor de m.

Debo hacer notar que el análisis utilizado en este trabajo puede tener un número extenso de aplicaciones como los movimientos colectivos de un sistema de n-cuerpos y que no obstante la relativa sencillez del problema, éste nunca se había resuelto.

BIBLIOGRAFIA

1. V. Fock, Z. Phys. 98 (1935) 145;
   V. Bargmann, Z. Phys. 99 (1936) 576.

2. J.M. Jauch and E.L. Hill, Phys. Rev. 57 (1940) 641.

3. H.V. McIntosh, "Symmetry and Degeneracy" in "Group Theory and Applications", Vol. II. Editor E.M. Loebl (Academic Press, NY, 1971) pp. 75-144.

4. M. Moshinsky, Found. Phys. 13 (1983) 73.

5. M. Moshinsky and C. Quesne, Ann. Phys. (NY) (in press).

6. J.W.B. Hughes, J. Phys. A: Math. Nucl. Gen. 6 (1973) 48.

7. D. Kleppner, M.G. Littman, M.L. Zimmerman, "Highly excited atoms", Scientific American.

8. Review of Particle Properties, Phys. Lett. 111B (1982) 23.

9. M. Moshinsky, T.H. Seligman and K.B. Wolf, J. Math. Phys. 13, (1972) 901.

10. P.A. Mello and M. Moshinsky, J. Math. Phys. 16 (1975) 2017.

11. J.D. Louck, M. Moshinsky and K.B. Wolf, J. Math. Phys. 14 (1973) 692.

12. M. Moshinsky and J.L. Patera, J. Math. Phys. 16 (1975) 1866.

13. E. Chacón, M. Moshinsky and V. Vanagas, J. Math. Phys. 22 (1981) 605.

14. M.E. Rose, "Elementary Theory of Angular Momentum", (Wiley & Sons, New York, 1957) pp. 61,82-89, 110.

15. M. Moshinsky, "Group Theory and the Many-Body Problem", (Gordon & Breach (1968)), p. 10.

16. J.P. Elliott, Proc. Roy. soc. London A 245, 128 (1958).

17. J.D. Talman, Special Functions: A Group Theoretic Approach, (Benjamin, New York 1968) pp. 189-214.

18. P.M. Morse and H. Feshbach, "Methods of Theoretical Physics", Vol. II. (McGraw-Hill Book Co., Inc. 1953) p. 1467.

19. R. Loudon, Am. J. Phys. 27, 649 (1959).

20. I.S. Gradshteyn and I.M. Ryzhik, "Table of Integrals, Series and Products", (Academic Press, New York and London 1965).

21. O. Castaños, E. Chacón, A. Frank, P. Hess and M. Moshinsky J. Math. Phys. 23 (1982) 2537;
M. Moshinsky, J. Math. Phys. (Submitted for publication).

22. M. Moshinsky, "The Harmonic Oscillator in Modern Physics: From Atoms to Quarks", (Gordon & Breach, New York 1969).

23. E. Chacón "Introducción a la Teoría de los grupos y sus aplicaciones a la Mecánica Cuántica", (Instituto de Física, 1975).