

24  
27



# Universidad Nacional Autónoma de México

FACULTAD DE CIENCIAS

DETERMINACION EXACTA DE LA RADIACION EMITIDA  
POR DOS PLACAS DE MATERIA EN CAIDA LIBRE

## TESIS PROFESIONAL

Que para obtener el Título de  
F I S I C O  
P r e s e n t a

ERIK ANDRES MARTINEZ HERRERA



Universidad Nacional  
Autónoma de México



## **UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso**

### **DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## CONTENIDO

— Introducción	1
— Problema electromagnético modelo	8
— Problema gravitatorio estático	12
— Problema gravitatorio dinámico	32
— Existencia de radiación gravitacional	43
— Conclusiones y sugerencias	62
— Apéndice	64
— Referencias	68

## INTRODUCCION

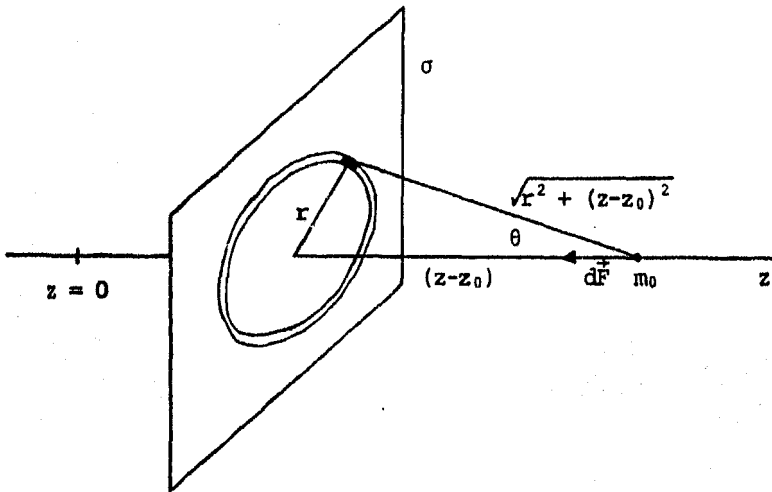
El problema de dos cuerpos ha sido objeto de estudio prácticamente desde los inicios de la relatividad general. Los primeros esfuerzos por resolverlo incluyen los de Weyl y Levi-Civita, quienes buscaron, con resultados negativos, la solución para el caso estático de dos cuerpos con simetría axial. En vista del carácter atractivo de la gravitación el problema de dos cuerpos es necesariamente dependiente del tiempo, a menos que se encuentren presentes otras fuerzas encargadas de balancear los efectos de la gravedad, pero la posibilidad de encontrar una solución exacta dependiente del tiempo parece aun muy remota. Por ello todos los intentos subsecuentes se han basado en diferentes situaciones de valores iniciales. En la década de los 30, además de varias estimaciones de valores iniciales y métodos de aproximación, surgió el modelo, formulado por Einstein y Rosen, de dos masas representadas por puentes no euclidianos que conectan espacios asintóticamente planos. Este modelo ha sido hasta el momento el más utilizado, a partir de la determinación — realizada por Misner en 1960 — de los valores iniciales para el problema de los dos cuerpos en vacío. Posteriormente Brill y Lindquist generalizaron estos datos para el caso de  $N$  puentes en vacío, y Hahn y Lindquist realizaron el primer intento para lograr una solución numérica de

la evolución de los datos iniciales enfrentándose, entre otros problemas, a la imposibilidad de integrar esos datos para tiempos muy grandes en el futuro. Desde entonces se han producido muchos trabajos en torno a las posibilidades de resolver la colisión de hoyos negros en computadora. Algunos de estos estudios indican que las soluciones obtenidas aplicando la teoría no lineal son indistinguibles de las que se obtienen usando métodos perturbativos [ para una revisión de los trabajos y sus resultados véase, por ejemplo, Smarr ( 1976 ) y Smarr ( 1979 ) ].

Este trabajo tiene como propósito estudiar la posible emisión de radiación gravitacional debida a la caída — originada por la atracción mutua — de un par de placas paralelas de materia. La posible importancia del problema radica en dos puntos: en primer lugar, es interesante investigar si puede asociársele radiación gravitacional a un sistema con simetría plana ( recuérdese que el Teorema de Birkhoff asegura que cuerpos que posean simetría esférica no emiten radiación y que, por ejemplo, Thorne ha demostrado que una nube de polvo con simetría axial que se colapsa produce radiación gravitacional ). El conjunto formado por las dos placas con igual densidad de masa constituye un modelo simple de tal tipo de sistemas. En segundo lugar, el caso de las dos placas puede utilizarse para efectuar un modelo de la colisión de hoyos negros reales.

Como mencionamos anteriormente, la complejidad de este problema ha obligado a someterse a soluciones numéricas, por lo que un modelo que admita una solución analítica y que permita calcular la radiación emitida durante la colisión puede aclarar el problema de alguna forma. En este sentido vamos a demostrar a continuación que una placa infinita con densidad superficial de masa  $\sigma$  posee cierta característica que permite clasificarla como un "hoyo negro plano"; para ello basta analizar la placa desde el punto de vista newtoniano ( que además nos será de gran utilidad en el desarrollo del problema relativista ).

Supóngase que la placa ( de densidad  $\sigma$  [gm/cm<sup>2</sup>] ) esté situada en  $z = z_0$ . Gráficamente tenemos:



Por la simetría del problema el único componente distinto de cero de la fuerza gravitacional está dirigido a lo largo del eje  $z$ , y viene dado por:

$$dF_z = - \frac{G dm_0 m_0}{(z-z_0)^2 + r^2} \cos \theta = - \frac{2\pi G m_0 \sigma r dr}{[(z-z_0)^2 + r^2]^{3/2}} (z-z_0).$$

De esta manera:

$$F_z = - 2\pi G m_0 \sigma (z-z_0) \int_0^{\infty} \frac{r dr}{[(z-z_0)^2 + r^2]^{3/2}} = - 2\pi G m_0 \sigma \operatorname{sgn}(z-z_0).$$

Si definimos el potencial tal que  $F_z = - m_0 \frac{\partial \phi}{\partial z}$  tenemos:

$$\phi = 2\pi G \sigma |z-z_0|.$$

( de aquí en adelante haremos  $G = c = 1$  por comodidad ).

Hagamos ahora un cálculo clásico ( parecido al que realizó Laplace para cuerpos esféricos ) de la velocidad de escape ne cesaria para que un cuerpo pueda librarse del campo gravitacional de la placa ( en otras palabras, busquemos la velocidad que requiere una partícula situada originalmente en  $z = z_1$  para llegar a infinito con velocidad  $v(\infty) = 0$  ). Supongamos que  $z_1 > z_0$ . La conservación de la energía nos asegura que:

$$E = \frac{1}{2} m v^2 + U(z) = \text{constante.}$$

Podemos encontrar la velocidad de escape en  $z = z_1$  igualando los valores de la energía en  $z_1$  y en  $\infty$ . Como la energía potencial está dada por:

$$U(z_2) - U(z_1) = - \int_{z_1}^{z_2} \vec{F} \cdot d\vec{l} = - \int_{z_1}^{z_2} F_z dz$$

la energía potencial en  $\infty$  será:

$$U(\infty) = - \int_{z_1}^{\infty} -(2\pi \sigma m_0) dz + U(z_1) = \infty - 2\pi \sigma m_0 z_1 + U(z_1)$$

Como queremos que en  $z = \infty$ ,  $v(\infty) = 0$  tenemos la siguiente relación:

$$\infty = 2\pi\sigma_0 z_1 + U(z_1) = \frac{1}{2} m v_{\text{escape}}^2(z_1) + U(z_1).$$

Es decir:

$$v_{\text{escape}}(z_1) = \infty.$$

La velocidad de escape es así infinita ( y por tanto mayor que  $c$  ) para cualquier valor finito del eje  $z$ . Esto sugiere el hecho [ véase el capítulo III ] de que  $z = \infty$  ( y equivalentemente  $z = -\infty$  ) equivale al " radio de Schwarzschild " de la placa. En otras palabras, podemos pensar que la placa constituye un hoyo negro plano cuyo " interior " contiene a todo el universo; ello es lo que sugiere que la solución para el caso de las dos placas puede servir como modelo para la colisión de dos hoyos negros ( olvidándose del problema de que la radiación gravitacional quede siempre dentro del horizonte ).

Nuestro propósito en este trabajo incluía el encontrar y resolver analíticamente las ecuaciones de Einstein para las dos placas y posteriormente discutir ciertos criterios para determinar la presencia de radiación gravitacional. Hemos resuelto satisfactoriamente la geometría estática para las placas, pero desafortunadamente no es fácil encontrar soluciones analíticas para el problema dinámico. Sin embargo, existe una condición de norma que permite hallar, sin mayores problemas, tal solución analítica, condición que hemos estudiado ampliamente, llegando a la conclusión de que, si bien es singular para el problema de las placas de materia, permite generar



ondas gravitacionales de choque. Para ciertas otras normas hemos dejado la solución en forma de ecuaciones integrales.

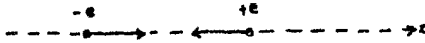
La tesis consta de cuatro secciones: a manera de preámbulo discutimos en el capítulo I el problema equivalente de las dos placas en electrodinámica. En el capítulo II se encuentran las ecuaciones de Einstein para el problema de una placa en relatividad general y se especifica la norma. A partir de ello y a pesar de que se presentan ciertos problemas con las singularidades, no es difícil obtener la expresión de la métrica para una placa, que en principio generalizamos a dos placas. La métrica resultante servirá como condición inicial en el caso dinámico. Este último se examina en el capítulo III. Aunque la ecuación diferencial dinámica para la variable  $\psi$  es difícil de resolver, la norma especial usada en la sección II - permite hallar  $\psi$  sin resolver dicha ecuación explícitamente. Desafortunadamente esta norma obliga a que las hipersuperficies que representan las placas sean hipersuperficies nulas, por lo cual la solución que presentamos pasa a representar ondas gravitacionales de choque [ véase el final del capítulo IV ] En el capítulo IV se discute el origen de las dificultades para definir la radiación gravitacional y se desarrolla el criterio de Pirani, que es usado para confirmar la presencia de los frentes de radiación. Por último, para evitar la singularidad de la norma y recuperar las dos placas en colisión sugerimos en

el apéndice el camino a seguir, que desgraciadamente no permitió la determinación directa de la radiación gravitacional. Sin embargo, ahí se proponen las soluciones finales al problema de la caída de las placas por medio de ecuaciones integrales.

PROBLEMA ELECTROMAGNETICO MODELO

El propósito de esta sección consiste en determinar la radiación electromagnética emitida en la dirección z ( dirección perpendicular a la superficie de las placas; por razones de simetría la única dirección relevante ) por los sistemas:

---- Dos partículas cargadas que se atraen mutuamente.



---- Dos planos cargados que se atraen entre sí.

El primer caso es el equivalente a una " colisión de hoyos negros reales ", mientras que el segundo constituye el problema modelo en electromagnetismo al problema de dos placas en relatividad general.

RADIACION PRODUCIDA POR UNA CARGA ACELERADA

Bajo la norma de Lorentz, la solución general de las ecuaciones de Maxwell tiene la forma:

$$\phi(\vec{r}, t) = \int_V d^3r' \frac{\rho(\vec{r}', t - \frac{R(\vec{r}, \vec{r}')}{c})}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (1.1a)$$

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \int_V d^3r' \frac{\vec{J}(\vec{r}', t - \frac{R(\vec{r}, \vec{r}')}{c})}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (1.1b)$$

con

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \quad (1.2a)$$

$$\vec{E} = -\nabla\phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (1.2b)$$

donde  $(\vec{E}, \vec{B})$  representan los campos y  $(\phi, \vec{A})$  los potenciales electromagnéticos ( Jackson (1975) § 6.6 ).

Para una carga puntual, las densidades de carga y corriente están

dadas por: 
$$\rho(\vec{r}, t) = e \delta(\vec{r} - \vec{r}_e(t)) \tag{1.3a}$$

$$\vec{J}(\vec{r}, t) = e \dot{\vec{r}}_e(t) \delta(\vec{r} - \vec{r}_e(t)) \tag{1.3b}$$

(  $\vec{r}_e(t)$  representa la trayectoria de la partícula ).

Si se sustituyen las ecuaciones (1.3) en (1.1), se obtienen los potenciales retardados de Lienard - Wiechert ( Jackson § 14.1 ):

$$\phi(\vec{r}, t) = \frac{e}{[R - \vec{\rho} \cdot \vec{R}]} \tag{1.4a}$$

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{e [\vec{\beta}]}{[R - \vec{\rho} \cdot \vec{R}]} \tag{1.4b}$$

donde  $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}_e$  y  $\vec{\beta} = \frac{\dot{\vec{r}}_e}{c}$  ; el corchete indica que la cantidad encerrada debe valorarse a tiempo retardado.

A través de las ecuaciones ( 1.2 ) podemos encontrar los campos asociados a una carga puntual. Estos campos tienen dos contribuciones: una dependiente de  $1/r^2$  y otra de  $1/r$  ; sólo esta última contribuye a la radiación. En el problema que nos ocupa ( colisión de dos cargas o-puestas ), la dirección de la línea que une las partículas coincide con la de la velocidad y la aceleración. En este caso,  $\vec{\beta} \parallel \vec{a}$  , los campos de radiación toman la forma ( Marion ( 1980 ) § 7.7 ):

$$\vec{E}_a = \left[ \frac{e}{c^2 (R - \vec{\rho} \cdot \vec{R})} \left\{ (\vec{R} \cdot \vec{a}) \vec{R} - R^2 \vec{a} \right\} \right] \tag{1.5a}$$

$$\vec{B}_a = \left[ \frac{eR}{c^2 (R - \vec{\rho} \cdot \vec{R})} (\vec{a} \times \vec{R}) \right] \tag{1.5b}$$

Si llamamos  $\theta$  al ángulo formado entre  $\vec{a}$  y  $\vec{R}$  , la potencia radiada por unidad de ángulo sólido ( Jackson § 14.3 ) resulta ser ( Marion § 7.7 ):

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{e^2 a^2 \sin^2 \theta}{4\pi c^3 (1 - \beta \cos \theta)^5} \tag{1.6}$$

Recordemos que estamos interesados únicamente en la radiación emitida en la dirección de la línea que une ambas partículas; ésto es,  $\theta = 0$ . Tenemos entonces, por ( 1.6 ):

$$\frac{dP}{d\Omega} = 0 \quad ( 1.7 )$$

Concluimos entonces que dos partículas cargadas que se atraen mutuamente no emiten radiación electromagnética en la dirección de la línea que las une.

#### RADIACION PRODUCIDA POR UNA PLACA ACELERADA EN LA DIRECCION Z

Para la placa cargada, las densidades de carga y corriente están dadas por:

$$\rho(\vec{r}, t) = \sigma \delta(z - z_0(t)) \quad ( 1.8a )$$

$$\vec{J}(\vec{r}, t) = \sigma \dot{z}_0(t) \delta(z - z_0(t)) \hat{k} \quad ( 1.8b )$$

donde  $z_0(t)$  indica la trayectoria de la placa.

Como la aceleración es debida a la presencia de otra plano con densidad superficial de carga  $-\sigma$ ,  $z_0(t)$  es solución de la ecuación diferencial:

$$\left| \ddot{z}_0 \right| = \frac{2\pi\sigma^2}{\mu} \quad ( 1.9 )$$

(  $\mu$  = densidad superficial de masa ).

Como se puede ver por ( 1.8b ), la corriente de la placa es únicamente longitudinal ( es decir,  $\nabla \times \vec{J} = 0$ ; Jackson § 6.5 ). Esto sugiere que se simplificaría notablemente el cálculo de los campos electromagnéticos si usáramos la norma de Coulomb (  $\vec{A}_t = 0$ ;  $\vec{A} \cdot \vec{A}_t$  ). Bajo esta norma, un sistema de ecuaciones equivalente al de Maxwell es ( Jackson § 6.5 ):

$$\nabla^2 \phi = -4\pi\rho \quad ( 1.10a )$$

$$\square^2 \vec{A} = -\frac{4\pi}{c} \vec{J}_t \quad ( 1.10b )$$

Si sustituimos ( 1.8 ) tenemos:

$$\nabla^2 \phi = -4\pi\sigma \delta(z-z_0(t)) \quad (1.11a)$$

$$\square^2 \bar{A} = 0 \quad (1.11b)$$

La ecuación ( 1.11b ) señala que podemos tener radiación electro - magnética, pero que ésta no está asociada a la placa. Podemos entonces, sin pérdida de generalidad, hacer  $\bar{A} = 0$  . Así, de ( 1.2a ) obtenemos:

$$\bar{B} = 0 \quad (1.12)$$

Es de esperarse, por la simetría del problema, que  $\phi$  sólo sea - función de  $z$  ; (1.11a) pasa a ser entonces:

$$\frac{d^2 \phi}{dz^2} = -4\pi\sigma \delta(z-z_0(t))$$

Así, de ( 1.2b ) :  $\bar{E} = -\frac{d\phi}{dz} \hat{k} = \left\{ 4\pi\sigma \Theta(z-z_0(t)) + c \right\} \hat{k}$  .

Como buscamos una solución simétrica con respecto a la placa,  $c = -2\pi\sigma$  ; es decir,

$$\bar{E} = \left\{ 4\pi\sigma \Theta(z-z_0(t)) - 2\pi\sigma \right\} \hat{k} \quad (1.13)$$

Los campos electromagnéticos son idénticos a los asociados a una configuración estática, a saber,  $\bar{B} = 0$  y  $|\bar{E}| = 4\pi\sigma$  entre las placas y  $\bar{E} = 0$  fuera de ellas; concluimos entonces que las dos placas aceleradas en dirección perpendiculares a su superficie no emitirán radiación electromagnética.

## PROBLEMA GRAVITATORIO ESTÁTICO

En esta sección obtendremos la métrica producida por una placa en reposo. Como veremos, podemos generalizar esta métrica para encontrar la geometría asociada a dos placas estáticas, geometría que usaremos en la siguiente sección como condición inicial para el problema dinámico.

### MÉTRICA ASOCIADA A UNA PLACA

La métrica utilizada por Einstein y Rosen [ Einstein y Rosen ( 1937 ) ] para estudiar ondas gravitacionales cilíndricas ha sido modificada por Gowdy — por medio de un cambio de topología — con el propósito de lograr una geometría con simetría toroidal [ Gowdy ( 1974 ) ]. A partir de ésta puede hallarse una geometría con simetría plana si se redefinen adecuadamente las coordenadas [ véase p.ej. Centrella & Matzner (1970) ]. Esta nueva métrica, que usaremos como la métrica asociada a una placa, tiene la forma general:

$$ds^2 = - N^2 dt^2 + e^{(\gamma - \psi)} dz^2 + \lambda^2 e^{-\psi} dy^2 + e^{\psi} dx^2 \quad ( 2.1 )$$

donde  $z$  constituye el eje de simetría y  $N$ ,  $\lambda$ ,  $\gamma$  y  $\psi$  son funciones escalares de  $z$  y  $t$  ( en el caso estático son únicamente funciones de  $z$  ).

ECUACIONES DE EINSTEIN Y CONSTRICCIONES

Conocida ya la forma de la métrica, el siguiente paso con siste en encontrar las ecuaciones que deben satisfacer los coeeficientes  $\lambda$ ,  $\gamma$ ,  $\psi$  y  $N$ . Para ello podemos en principio apli - car directamente las ecuaciones de Einstein en vacío. Sin em - bargo, existe en relatividad general un formalismo canónico si milar al formalismo de Hamilton que permite establecer — al - dividir el espacio-tiempo en regiones espacialoides relaciona - das entre sí por funciones escalares — un principio variacio - nal de manera simple y que utilizaremos aquí por comodidad. En este formalismo [ denominado ADM; Arnowitt - Deser - Misner ( 1962 ) ] se construyen una integral de acción y un superha - miltoniano que dependen únicamente de la geometría espacial y que pueden escribirse en términos de los elementos  $g_{ij}$  de la métrica y de sus momentos canónicos conjugados  $\pi_{ij} = \frac{\delta S}{\delta g_{ij}}$ . Las ecuaciones de Einstein se obtienen variando la acción con respecto a  $g_{ij}$  y  $\pi_{ij}$  y las ecuaciones de valores iniciales va - riando la acción con respecto a las funciones de " lapso "  $N$  y de " corrimiento "  $N_i$ , funciones responsables de relacionar mutuamente las regiones espacialoides ( dichas ecuaciones de - terminan así las constricciones a las que están sujetos  $g_{ij}$  y  $\pi_{ij}$  entre sí en la hipersuperficie con  $t = \text{cte.}$  ). Para una explicación detallada del formalismo ADM véanse MIW (1973) Cap. 21, Arnowitt, Deser y Misner ( 1962 ) y Kuchar ( 1971 ).



El formalismo canónico ha sido aplicado a una métrica con simetría cilíndrica por K. Kuchar [ Kuchar ( 1971 ) ] con el fin de determinar las ecuaciones de Einstein y las constricciones entre  $g_{ij}$  y  $\pi_{ij}$  para el caso de ondas cilíndricas. Hemos repetido dicho procedimiento usando una métrica con simetría plana equivalente a ( 2.1 ) [ véase Lapedes ( 1977 ) para una explicación detallada de la aplicación del formalismo ADM a geometrías con simetría plana ], teniendo como resultado el siguiente sistema de ecuaciones que deben satisfacer los coeficientes de la métrica — ecuaciones que constituyen el punto de partida para determinar la métrica asociada a una placa:

— Ecuaciones de Einstein

- Ecuaciones dinámicas para  $\psi$ ,  $\lambda$  y  $\gamma$  :

$$\dot{\psi} - N e^{(\psi-\gamma)/2} \frac{\pi_{\psi}}{\lambda} = 0 \quad ( 2.2a )$$

$$\dot{\lambda} + N e^{(\psi-\gamma)/2} \pi_{\lambda} = 0 \quad ( 2.2b )$$

$$\dot{\gamma} + N e^{(\psi-\gamma)/2} \pi_{\gamma} = 0 \quad ( 2.2c )$$

- Ecuaciones dinámicas para  $\pi_{\psi}$ ,  $\pi_{\lambda}$  y  $\pi_{\gamma}$  :

$$-\dot{\pi}_{\psi} + (N e^{(\psi-\gamma)/2} \lambda \psi')' = 0 \quad ( 2.3a )$$

$$-\dot{\pi}_{\lambda} - (2N e^{(\psi-\gamma)/2})'' + N e^{(\psi-\gamma)/2} \frac{\pi_{\psi}^2}{2\lambda^2} - (N e^{(\psi-\gamma)/2} \gamma')' - N e^{(\psi-\gamma)/2} \frac{\psi'^2}{2} = 0 \quad ( 2.3b )$$

$$-\dot{\pi}_{\gamma} - (N e^{(\psi-\gamma)/2} \lambda')' = 0 \quad ( 2.3c )$$

-- Constricciones

$$\frac{\pi_\psi^2}{2\lambda} - \pi_\gamma \pi_\lambda + 2\lambda'' - \gamma' \lambda' + \frac{\lambda \psi'^2}{2} = 0 \quad (2.4a)$$

$$- 2\pi_\gamma' + \gamma' \pi_\gamma + \psi' \pi_\psi + \lambda' \pi_\lambda = 0 \quad (2.4b)$$

[ el punto y la coma indican derivación parcial con respecto a  $t$  y con respecto a  $z$  ].

Las ecuaciones para el problema estático son un caso particular de ( 2.2 ), ( 2.3 ) y ( 2.4 ) cuando:

$$\dot{\psi} = \dot{\lambda} = \dot{\gamma} = \dot{\pi}_\psi = \dot{\pi}_\lambda = \dot{\pi}_\gamma = 0 \quad (2.5)$$

NORMA ( PROBLEMA ESTÁTICO )

Dado que en relatividad general el sistema de coordenadas usado es totalmente arbitrario, podemos redefinir las coordenadas espaciales y temporales de tal manera que los coeficientes de la métrica tomen la forma más simple, siempre y cuando respetemos la simetría plana. Debemos usar esta posibilidad de redefinir  $z$  y  $t$  para reducir a dos las cuatro funciones originales que tenemos que determinar —  $\lambda$ ,  $N$ ,  $\psi$  y  $\gamma$ . La norma que utilizaremos para el problema estático fija directamente  $N$  y  $\lambda$  y su validez radica en que el sistema de ecuaciones resultante es autoconsistente. Proponemos así la norma:

$$N = e^{(\gamma-\psi)/2} \quad (2.6)$$

Veremos que establecer ( 2.6 ), unido al hecho de fijar cierta constante A nos determina directamente el valor de  $\lambda$ .

**ECUACIONES DE EINSTEIN Y CONSTRICCIONES PARA  
EL PROBLEMA ESTÁTICO**

Sustituyendo ( 2.5 ) y ( 2.6 ) en ( 2.2 ), ( 2.3 ) y ( 2.4 ) obtenemos las expresiones para el caso estático:

— Ecuaciones de Einstein

$$\pi_{\psi} = 0 \quad ( 2.7a )$$

$$\pi_{\gamma} = 0 \quad ( 2.7b )$$

$$\pi_{\lambda} = 0 \quad ( 2.7c )$$

$$\lambda \psi'' + \lambda' \psi' = 0 \quad ( 2.8a )$$

$$\gamma'' + \frac{\psi'^2}{2} = 0 \quad ( 2.8b )$$

$$\lambda'' = 0 \quad ( 2.8c )$$

— Constricciones

$$\lambda'' - \gamma' \frac{\lambda'}{2} + \frac{\lambda \psi'^2}{4} = 0 \quad \text{Usando ( 2.8c ) tendremos:}$$

$$\gamma' \lambda' - \frac{\lambda \psi'^2}{2} = 0 \quad ( 2.9 )$$

[ La otra restricción ( es decir, ( 2.4b ) ) sólo lleva a una identidad ].

No es difícil cerciorarse que las ecuaciones ( 2.7 ), ( 2.8 ) y ( 2.9 ) son consistentes entre sí.

DETERMINACION DE  $\lambda$ ,  $\psi$  Y  $\gamma$ 

Claramente tenemos, dada ( 2.8c ) y el hecho de que  $\dot{\lambda} = 0$ ,  
que:

$$\lambda = Az + B \quad ; \quad A, B \text{ constantes} \quad ( 2.10 )$$

Como veremos en la siguiente sección podemos fijar  $A = 1$  como parte de nuestra selección de norma, simplificando considerablemente los cálculos. Sin embargo no es necesario que fijemos en esta sección el valor de  $A$ .

Podemos obtener la ecuación para  $\psi$  sustituyendo ( 2.10 ) en ( 2.8a ):

$$( Az + B )\psi'' + A\psi' = 0 \quad . \quad \text{Es decir:}$$

$$\psi'' + \frac{A}{Az + B} \psi' = 0 \quad ( 2.11 )$$

Es posible resolver esta ecuación directamente haciendo  $g = \psi'$  tal que  $g' + \frac{A}{Az + B} g = 0$ . Por tanto:

$$\ln g = - \ln ( Az + B ) + C' \quad . \quad \text{Así:}$$

$$g = \frac{C}{Az + B} = \psi' \quad ; \quad C \text{ constante.} \quad ( 2.12 )$$

Integrando llegamos a la expresión para  $\psi$ :

$$\psi = \frac{C}{A} \ln ( Az + B ) + D' \quad , \quad \text{es decir:}$$

$$\psi = \ln [ D ( Az + B )^E ] \quad ; \quad D \text{ constante} \quad ( 2.13 )$$

$$\text{donde} \quad E = \frac{C}{A} \quad ( 2.14 )$$

Por último, debemos sustituir ( 2.10 ) y ( 2.12 ) en ( 2.9 ):

$$\gamma'A - \frac{(Az + B)}{2} \left( \frac{C}{Az + B} \right)^2 = 0. \text{ Es decir:}$$

$$\gamma' = \frac{C^2}{2A(Az + B)}$$

Integrando tenemos:

$$\gamma = \frac{C^2}{2A^2} \ln(Az + B) + K' \quad . \text{ Por tanto :}$$

$$\gamma = \ln [ K (Az + B)^{E^2/2} ] \quad ; \quad K \text{ constante} \quad (2.15)$$

Tenemos así, por medio de ( 2.10 ), ( 2.13 ) y ( 2.15 ) los coeficientes de la métrica para una configuración estática. Además,  $\gamma - \psi$  está dado por:

$$\gamma - \psi = \ln [ F(Az + B)^{-E} + E^2/2 ] \quad (2.16)$$

$$\text{donde } F = \frac{K}{D} \quad (2.17)$$

Sustituyendo finalmente ( 2.6 ), ( 2.10 ), ( 2.13 ) y ( 2.16 ) en ( 2.1 ) obtenemos la métrica:

$$ds^2 = F(Az + B)^{E(\frac{E}{2} - 1)} [ -dt^2 + dz^2 ] + \frac{1}{D}(Az + B)^{2-E} dy^2 + D(Az + B)^E dx^2 \quad (2.18)$$

Esta última expresión constituye la solución general para el caso estático y en principio debe representar la geometría asociada a un número finito de placas en reposo ( siempre y cuando separemos esta geometría en regiones ).

Si normalizamos  $z, x, y, t$  y definimos  $\alpha = E(\frac{E}{2} - 1)$  en

( 2.18 ), podemos escribir la métrica de una placa como:

$$ds^2 = (Az + B)^\alpha [-dt^2 + dz^2] + (Az + B)^{1-\sqrt{1+2\alpha}} dy^2 + (Az + B)^{1+\sqrt{1+2\alpha}} dx^2 \quad ( 2.19 )$$

Notemos que ( 2.19 ) presenta dos singularidades: cuando  $z = \infty$  y cuando  $z = -\frac{B}{A}$ . Vamos a calcular las componentes del tensor de Riemann con respecto a un marco de referencia ortonormal estático localizado en esos puntos para saber si las singularidades son reales. Por medio del método variacional expuesto en la referencia 10514.4 encontramos los símbolos de Christoffel asociados a ( 2.19 ); éstos resultan ser:

$$\begin{aligned} \Gamma^x_{xz} &= \frac{A}{2}(1+\sqrt{1+2\alpha})(Az+B)^{-1} & ; & \Gamma^z_{xx} = -\frac{A}{2}(1+\sqrt{1+2\alpha})(Az+B)^{\sqrt{1+2\alpha}-\alpha} \\ \Gamma^y_{yz} &= \frac{A}{2}(1-\sqrt{1+2\alpha})(Az+B)^{-1} & ; & \Gamma^z_{yy} = -\frac{A}{2}(1-\sqrt{1+2\alpha})(Az+B)^{-\sqrt{1+2\alpha}-\alpha} \\ \Gamma^t_{tz} &= \Gamma^z_{tt} = \Gamma^z_{zz} = \frac{A\alpha}{2}(Az+B)^{-1} \end{aligned} \quad ( 2.20 )$$

De aquí se obtienen directamente las seis componentes distintas de cero del tensor de Riemann:

$$\begin{aligned} R_{txtx} &= \frac{A^2\alpha}{4}(1+\sqrt{1+2\alpha})(Az+B)^{\sqrt{1+2\alpha}-1} \\ R_{tyty} &= \frac{A^2\alpha}{4}(1-\sqrt{1+2\alpha})(Az+B)^{-\sqrt{1+2\alpha}-1} \\ R_{tztz} &= -\frac{A^2\alpha}{2}(Az+B)^{-2+\alpha} \\ R_{zyzy} &= -\frac{A^2\alpha}{4}(1+\sqrt{1+2\alpha})(Az+B)^{-\sqrt{1+2\alpha}-1} \\ R_{zxzx} &= -\frac{A^2\alpha}{4}(1-\sqrt{1+2\alpha})(Az+B)^{\sqrt{1+2\alpha}-1} \\ R_{xyxy} &= \frac{A^2\alpha}{2}(Az+B)^{-\alpha} \end{aligned} \quad ( 2.21 )$$

En la base ortonormal propia:

$$\omega^{\hat{t}} = (Az+B)^{\alpha/2} dt, \quad \omega^{\hat{x}} = (Az+B)^{\frac{1}{2}(1+\sqrt{1+2\alpha})} dx,$$

$$\omega^{\hat{z}} = (Az+B)^{\alpha/2} dz, \quad \omega^{\hat{y}} = (Az+B)^{\frac{1}{2}(1-\sqrt{1+2\alpha})} dy,$$

( 2.20 ) y ( 2.21 ) pasan a ser:

$$\Gamma^{\hat{x}\hat{x}\hat{z}} = -\Gamma^{\hat{z}\hat{x}\hat{x}} = \frac{A}{2}(1+\sqrt{1+2\alpha})(Az+B)^{-\frac{\alpha}{2}-1}$$

$$\Gamma^{\hat{y}\hat{y}\hat{z}} = -\Gamma^{\hat{z}\hat{y}\hat{y}} = \frac{A}{2}(1-\sqrt{1+2\alpha})(Az+B)^{-\frac{\alpha}{2}-1} \quad ( 2.20' )$$

$$\Gamma^{\hat{t}\hat{t}\hat{z}} = \Gamma^{\hat{z}\hat{t}\hat{t}} = \frac{A\alpha}{2}(Az+B)^{-\frac{\alpha}{2}-1}, \quad \Gamma^{\hat{z}\hat{z}\hat{z}} = 0$$

y

$$R_{\hat{t}\hat{x}\hat{x}\hat{t}} = -R_{\hat{y}\hat{z}\hat{z}\hat{t}} = \frac{A^2\alpha}{4}(1+\sqrt{1+2\alpha})(Az+B)^{-2-\alpha}$$

$$R_{\hat{t}\hat{y}\hat{y}\hat{t}} = -R_{\hat{z}\hat{x}\hat{x}\hat{t}} = \frac{A^2\alpha}{4}(1-\sqrt{1+2\alpha})(Az+B)^{-2-\alpha} \quad ( 2.21' )$$

$$R_{\hat{x}\hat{y}\hat{y}\hat{x}} = -R_{\hat{t}\hat{z}\hat{z}\hat{t}} = \frac{A^2\alpha}{2}(Az+B)^{-2-\alpha}$$

Ahora bien, de la propia definición de  $\alpha$  [  $\alpha = E(\frac{E}{2} - 1)$  con  $E = \text{constante}$  ] se deduce que  $\alpha$  tiene que ser mayor o igual a  $-1/2$ . Por tanto,  $-\frac{\alpha}{2} - 1$  y  $-2 - \alpha$  ( las potencias de  $(Az+B)$  en las  $\Gamma^{\hat{\alpha}\hat{\beta}\hat{\gamma}}$  y las  $R_{\hat{\alpha}\hat{\beta}\hat{\gamma}\hat{\delta}}$  respectivamente ) son siempre menores que cero. Esto nos lleva a lo siguiente: en  $z = \infty$  tenemos un observador en caída libre ( pues por ( 2.20' )  $\Gamma^{\hat{\alpha}\hat{\beta}\hat{\gamma}} = 0$  cuando  $z = \infty$  ) que además no encuentra fuerzas de marea ( ya que a pesar de que  $R_{\hat{\alpha}\hat{\beta}\hat{\gamma}\hat{\delta}}$  no es cero en  $z = \infty$ , para un observador estático situado en  $z = \infty$  el tensor de Riemann  $R_{\hat{\alpha}\hat{\beta}\hat{\gamma}\hat{\delta}}$  es ce

ro en virtud de ( 2.21' ) ). Lo anterior nos conduce a establecer que en  $z = \infty$  el espacio-tiempo es efectivamente plano ( véase MTW § 11.5 ). Notemos también que para un observador situado en  $z = -\frac{B}{A}$  las fuerzas de marea se tornan infinitas ( ya que  $R_{\alpha\beta\gamma\delta} = \infty$  en  $z = -\frac{B}{A}$  ); por lo tanto la singularidad en  $z = -\frac{B}{A}$  es real.

Resumiendo, debemos reconocer lo siguiente:

- 1) La singularidad en  $z = \infty$  representa únicamente una falla en nuestro sistema de coordenadas pues  $R_{\alpha\beta\gamma\delta} \neq \infty$  cuando  $z \rightarrow \infty$ . Es natural encontrar esta singularidad en el sistema de coordenadas pues en el cálculo de la velocidad de escape para cuerpos con simetría plana que hicimos en la Introducción hallamos que para cualquier valor finito de  $z$  esa velocidad era infinita ( y por tanto mayor que  $c$  ). En otras palabras,  $z = \infty$  equivale al " radio de Schwarzschild " de una placa.
- 2) La singularidad en  $z = -\frac{B}{A}$  es real pues en este punto  $R_{\alpha\beta\gamma\delta} = \infty$ .
- 3) Cuando  $\alpha = 0$ ,  $R_{\alpha\beta\gamma\delta} = 0$ ; es decir,  $\alpha = 0$  representa espacio-tiempo plano sin importar que la métrica no tome la forma  $( -1, 1, 1, 1 )$ . Por tanto  $\alpha$  debe ser proporcional a la densidad de masa  $\sigma$  de la placa ( o al menos una función que sea cero cuando  $\sigma = 0$  ) pues es de esperarse que el espacio-tiempo sea plano si no existe la placa de materia.



DETERMINACION DE A, B y  $\alpha$ 

Necesitamos fijar ahora las constantes en ( 2.19 ) en base a consideraciones físicas. En primer lugar, como mencionamos en páginas anteriores, es posible hacer  $A = 1$  escogiendo apropiadamente la norma. En segundo lugar, sabemos que en  $z = -\frac{B}{A} = -B$  tenemos una singularidad real que por la naturaleza del problema sólo puede originarse en la placa; es decir, si llamamos  $z_0$  a la posición de la placa, podemos fijar  $z_0 = -B$ . Con ésto ( 2.19 ) toma la forma:

$$g_{tt} = -(z-z_0)^\alpha, g_{zz} = (z-z_0)^\alpha, g_{xx} = (z-z_0)^{1+\sqrt{1+2\alpha}}$$

$$g_{yy} = (z-z_0)^{1-\sqrt{1+2\alpha}} \quad ( 2.22 )$$

Desafortunadamente fijar  $\alpha$  no es tan sencillo. Para ello debemos encontrar el límite newtoniano de ( 2.20 ); éste debe hallarse en donde el campo gravitacional sea lo suficientemente débil para que  $g_{tt}$  tome la forma [ véase MFW 17.4 ]:

$$g_{tt} = -1 - 2\phi \quad , \quad \text{con} \quad |\phi| \ll 1 \quad ( 2.23 )$$

La dificultad radica en que el espacio-tiempo es prácticamente plano cerca de  $z = \infty$  ( véase ( 2.21' ) ) pero en ese punto tenemos una singularidad del sistema de coordenadas que impide que  $g_{\mu\nu}$  tome la forma adecuada  $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ . Debemos señalar aquí lo siguiente: en virtud de ( 2.20 ) podemos calcular las ecuaciones de movimiento para una partícula de prueba ( ecuación de geodésicas  $\ddot{x}^\mu + \Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta = 0$  ).

Si mantenemos  $x$  y  $y$  constantes, encontramos que:

$$\ddot{t} = - \dot{t} \dot{z} \frac{\alpha}{(z-z_0)}$$

$$\ddot{z} = - \frac{1}{2} \frac{\alpha}{(z-z_0)} \dot{z}^2 - \frac{1}{2} \frac{\alpha}{(z-z_0)} \dot{t}^2$$

( el punto indica derivación con respecto a  $\tau$  )

La ecuación relativista de "fuerza" se obtiene si sustituimos  $\dot{z} = \left( \frac{dz}{dt} \right) \dot{t}$ ,  $\ddot{z} = \frac{d^2z}{dt^2} \dot{t}^2 + \frac{dz}{dt} \ddot{t}$  en las ecuaciones anteriores; el resultado es:

$$\frac{d^2z}{dt^2} = - \frac{\alpha}{2(z-z_0)} \left( \frac{dz}{dt} \right)^2 - \frac{\alpha}{2(z-z_0)} + \frac{\alpha}{(z-z_0)} \left( \frac{dz}{dt} \right)^2 \quad ( 2.24 )$$

Como nos interesa comparar con el caso newtoniano, debemos usar partículas a bajas velocidades; por tanto ( 2.24 ) será:

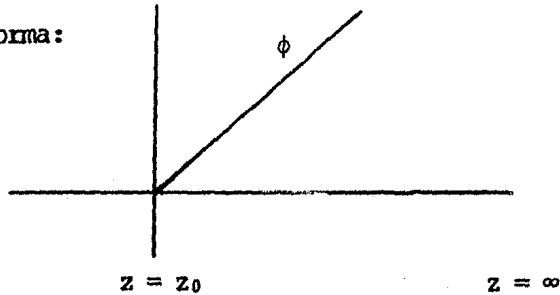
$$\frac{d^2z}{dt^2} = - \frac{\alpha}{2(z-z_0)} \quad ( 2.25 )$$

Observemos que la fuerza puede compararse con la fuerza newtoniana  $\frac{d^2z}{dt^2} = - 2\pi\sigma$  [ véase la Introducción ] — permitiendo fijar  $\alpha$  — en un punto dado por  $z = z_0 + 1$ ; en este punto la métrica ( 2.22 ) pasa a ser ( -1,1,1,1 ). Sin embargo, existe el peligro de creer que  $z = z_0 + 1$  representa un punto donde, por alguna razón física, hallamos un "límite newtoniano", algo que es falso pues el límite newtoniano auténtico debe estar en las cercanías de  $\infty$  [ véase ( 2.21' ) ]. Todos estos inconvenientes surgen de un sistema de coordenadas defectuoso. En el siguiente párrafo intentaremos cambiar  $z \rightarrow z'$  para que se puedan hacer las comparaciones en la proximidad de  $z' = \infty$ .

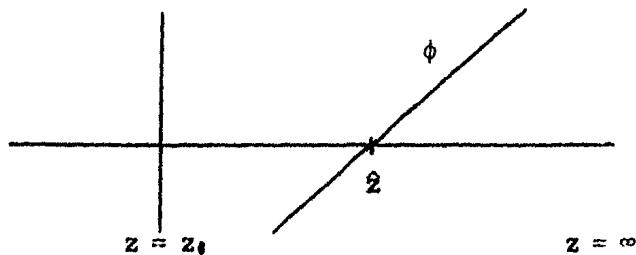
Para resolver el problema necesitamos revisar nuestra definición del potencial newtoniano. En la Introducción vimos

que éste viene dado ( a la derecha de la placa ) por:

$\phi = 2\pi\sigma (z-z_0)$  ; resulta claro que dicho potencial es cero sobre la placa (  $z = z_0$  ) e infinito en  $z = \infty$ . Gráficamente tiene la forma:



La singularidad de la métrica en  $z = \infty$  es debida a que tenemos un potencial infinito en ese punto. Obviamente no es fácil encontrar un límite newtoniano donde  $|\phi|$  es mucho mayor que 1. Sin embargo, podemos cambiar a voluntad el cero de potencial sin alterar la expresión de la fuerza. Si hacemos que  $\phi(z=\hat{z}) = 0$  tendremos:



El potencial adquiere la forma  $\phi = 2\pi\sigma(z-\hat{z})$  pero sigue siendo singular en infinito. Como buscamos un potencial que sea muy pequeño a grandes distancias de la placa, lo ideal sería correr  $\hat{z}$  hasta  $\infty$ , para tener  $\phi = 2\pi\sigma(z - \infty)$ . Sin embargo, no es fácil hacer esto pues  $\phi$  sería  $-\infty$  para cualquier  $z$  menor que  $\infty$ . Pero volvamos al caso relativista. Estamos buscando que lejos de la placa, donde el campo gravitacional es débil,  $g_{tt}$  tome la forma  $g_{tt} = -1 - 2\phi$ . Hagamos el

cambio de coordenadas  $z = 1 + z_0 + z' - \hat{z}$ , donde  $z'$  es nuestra nueva coordenada y  $\hat{z}$  es cualquier valor finito del eje  $z$  al igual que en el caso newtoniano ( posición que puede estar tan lejos de la placa como queramos ). Con ésto la métrica ( 2.22 ) toma la forma:

$$g_{tt} = - ( 1 + z_0 + z' - \hat{z} - z_0 )^\alpha = - ( 1 + ( z' - \hat{z} ) )^\alpha$$

y ( 2.25 ) pasa a ser:

$$\frac{d^2 z'}{dt^2} = - \frac{\alpha}{2} ( 1 + ( z' - \hat{z} ) )^{-1} .$$

Cuando  $z'$  es muy cercana a  $\hat{z}$ , las ecuaciones anteriores resultan:

$$g_{tt} = - 1 - \alpha ( z' - \hat{z} ) \quad \text{y} \quad \frac{d^2 z'}{dt^2} \approx - \frac{\alpha}{2} .$$

Como el potencial newtoniano es  $\phi = 2\pi\sigma (z' - \hat{z})$  y la fuerza newtoniana es  $\frac{d^2 z'}{dt^2} = - 2\pi\sigma$ , concluimos que

$$\alpha = 4\pi\sigma \quad ( 2.26 )$$

Podemos resumir lo anterior en lo siguiente: por medio de un cambio del eje  $z$  es posible llevar la métrica y la fuerza relativista a la forma newtoniana en cualquier punto del espacio y tan lejos como se quiera de la placa. Con ésto nos quitamos los problemas de conciencia que tendríamos al obtener el límite cuando  $z = z_0 + 1$ . Sin embargo, para resolver rigurosamente el problema, deberíamos todavía llevar  $\hat{z}$  a  $\infty$ . Para lograrlo hay que hacer un cambio de coordenadas estilo  $z = z ( z', t' )$ ,  $t = t ( z', t' )$ . Como todo este problema es esencialmente matemático y tiene su origen únicamente en cambios de coordenadas, no pensamos que valga la pena detenerse más en

él.

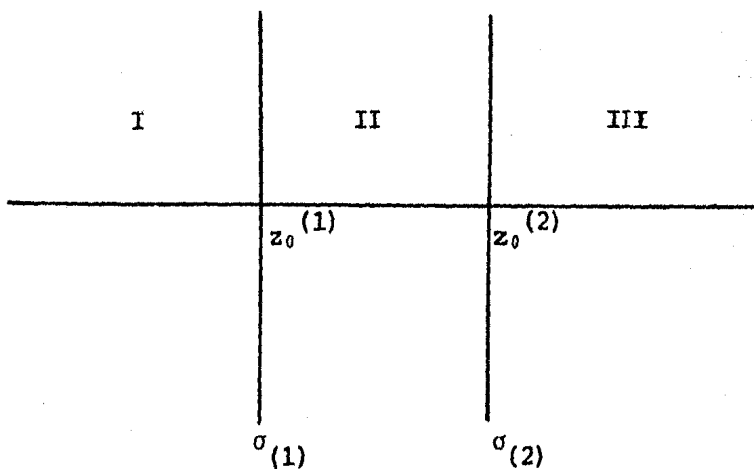
Finalmente llegamos a la métrica de una placa. Como  $A = 1$ ,  $B = -z_0$  y  $\alpha = 4\pi\sigma$ , ( 2.19 ) es:

$$ds^2 = - (z - z_0)^{4\pi\sigma} dt^2 + (z - z_0)^{4\pi\sigma} dz^2 + \\ + (z - z_0)^{1+\sqrt{1+8\pi\sigma}} dx^2 + (z - z_0)^{1-\sqrt{1+8\pi\sigma}} dy^2 \quad ( 2.27 )$$

( por simetría, basta cambiar  $z$  por  $|z|$  para obtener la métrica a la izquierda de la placa ).

#### LA METRICA PARA DOS PLACAS EN REPOSO

Consideremos por ahora dos placas situadas en  $z_0^{(1)}$  y  $z_0^{(2)}$  y con densidades de masa respectivas  $\sigma_{(1)}$  y  $\sigma_{(2)}$ . Para que podamos generalizar la métrica ( 2.19 ) debemos separar al eje  $z$  en regiones de la siguiente manera:



Para simplificar el problema tomaremos el origen de coord-

denadas en un punto situado en la región II a igual distancia de ambas placas; es decir:

$$z_0^{(1)} = - z_0^{(2)} = - z_0 \quad ( 2.28 )$$

Como vimos al inicio de este capítulo, solamente fue necesario encontrar el valor de  $\lambda$  para conocer los valores de  $\psi$  y  $\gamma$ ; por tanto considereremos en lo que sigue que la ecuación ( 2.8c ) [  $\lambda'' = 0$  ] para  $\lambda$  es la ecuación fundamental. Aún más, dado que  $\lambda'' = 0$  es lineal, vamos a suponer que la solución de esta ecuación para dos placas es la suma de las soluciones para cada placa. Por lo tanto, redefiniendo la escala como en la sección anterior, tendremos que en la región III:

$$\lambda = [ z - z_0^{(1)} ] + [ z - z_0^{(2)} ]$$

En virtud de ( 2.28 ) obtenemos:

$$\lambda = 2z \quad ( 2.29 )$$

La métrica ( 2.19 ) toma entonces la forma:

$$ds^2 = - (2z)^\alpha dt^2 + (2z)^\alpha dz^2 + (2z)^{1+\sqrt{1+2\alpha}} dx^2 + (2z)^{1-\sqrt{1+2\alpha}} dy^2 \quad ( 2.30 )$$

Como tenemos libertad para escoger el sistema de coordenadas, podemos quitar el 2 que aparece en todos los coeficientes de la métrica definiendo:

$$z' = 2^{\frac{\alpha}{2+\alpha}} z, \quad t' = 2^{\frac{\alpha}{2+\alpha}} t, \quad x' = 2^{\frac{1+\sqrt{1+2\alpha}}{2+\alpha}} x, \quad y' = 2^{\frac{1-\sqrt{1+2\alpha}}{2+\alpha}} y \quad ( 2.31 )$$

( 2.30 ) se reduce así a :

$$ds^2 = - (z')^\alpha dt'^2 + (z')^\alpha dz'^2 + (z')^{1+\sqrt{1+2\alpha}} dx'^2 + (z')^{1-\sqrt{1+2\alpha}} dy'^2 \quad ( 2.32 )$$

Por simplicidad nos olvidaremos de las primas ( en el viejo sistema de coordenadas la posición de la placa de la derecha es  $z = z_0$  . En términos del nuevo su posición estará dada por  $z_0' \equiv z'_{\text{placa}} = 2^{\alpha/2+\alpha} z_0$  ; en adelante la denotaremos por  $z_0$  pues omitiremos las primas ).

Si calculamos la fuerza relativista asociada a la métrica ( 2.32 ) que se ejerce sobre una partícula de prueba a baja velocidad ( obteniendo primero las ecuaciones de movimiento por medio del método variacional ) encontramos que ésta viene dada por:

$$\frac{d^2z}{dt^2} = - \frac{\alpha}{2z} \quad .$$

Cerca de  $z = 1$  el espacio-tiempo es plano [ véase ( 2.32 ) ] y supondremos que  $z = z_0 \ll z = 1$  ( cabe señalar que aquí sucede algo similar a lo que pasó en la página 23: no debe pensarse que el origen físico del límite newtoniano radica en  $z = 1$  ya que por medio de un cambio apropiado de coordenadas puede llevarse dicho límite a cualquier punto del eje  $z$  ). En este caso la fuerza es:

$$\frac{d^2z}{dt^2} = - \frac{\alpha}{2} \quad ( 2.33 )$$

Como para dos placas la fuerza newtoniana ( en la región III ) es :

$$\frac{d^2z}{dt^2} = - 2\pi(\sigma_{(1)} + \sigma_{(2)}) \quad , \quad ( 2.34 )$$

comparando ( 2.33 ) con ( 2.34 ) obtenemos:

$$\alpha = 4\pi(\sigma_{(1)} + \sigma_{(2)}) \quad ( 2.35 )$$

Sustituyendo ( 2.35 ) en ( 2.32 ) hallamos la métrica en la región III (  $z > z_0$  ):

$$ds^2 = - (z)^{4\pi[\sigma_1 + \sigma_2]} dt^2 + (z)^{4\pi[\sigma_1 + \sigma_2]} dz^2 + \\ + (z)^{1+\sqrt{1+8\pi[\sigma_1 + \sigma_2]}} dx^2 + (z)^{1-\sqrt{1+8\pi[\sigma_1 + \sigma_2]}} dy^2 \quad ( 2.36 )$$

( por razones de simetría, basta cambiar  $z$  por  $|z|$  para tener la métrica en la región I (  $z < -z_0$  ) ).

Por último, vamos a suponer que las dos placas poseen igual densidad de masa; es decir,  $\sigma_{(1)} = \sigma_{(2)} = \sigma$ . Sustituyendo esto en ( 2.36 ) se llega a la forma final de la métrica en la región III:

$$ds^2 = - (z)^{8\pi\sigma} dt^2 + (z)^{8\pi\sigma} dz^2 + (z)^{1+\sqrt{1+16\pi\sigma}} dx^2 + \\ + (z)^{1-\sqrt{1+16\pi\sigma}} dy^2 \quad ( 2.37 )$$

Vamos a calcular ahora la métrica en la región II, ocupándonos directamente del caso  $\sigma_{(1)} = \sigma_{(2)} = \sigma$ . Nuevamente hagamos  $\lambda = Az + B$ . La fuerza newtoniana entre las dos placas es cero y sabemos que la fuerza relativista que se ejerce sobre partículas a bajas velocidades es:

$$\frac{d^2z}{dt^2} = - \frac{1}{2} \frac{\alpha A}{(Az + B)}$$

Si consideramos que las dos placas se encuentran muy separadas, la fuerza relativista debe ser igual a la fuerza newtoniana; es



necesario entonces que  $\alpha = 0$  ó  $A = 0$ . Por la nota 3) página 21,  $\alpha = 0$  implica espacio plano, lo que sucede igualmente cuando  $A = 0$ , pues la métrica toma en este caso la forma

$$g_{tt} = - (z_1)^\alpha = \text{constante} ; \quad g_{zz} = (z_1)^\alpha = \text{constante} ;$$

$$g_{xx} = + (z_1)^{1+\sqrt{1+2\alpha}} = \text{constante} ; \quad g_{yy} = (z_1)^{1-\sqrt{1+2\alpha}} = \text{constante}$$

( donde  $z_1$  y  $\alpha$  son constantes ).

[ véase asimismo como las componentes del tensor de curvatura (2.21') son cero cuando  $\alpha = 0$  ó  $A = 0$  ].

Como ambas igualdades dan el mismo resultado, escogeremos  $A = 0$  pues nos permite, cambiando la escala para tener  $z_1 \rightarrow z_0$ , lograr continuidad en la métrica. Así, la forma final de la métrica en la región II es:

$$ds^2 = - (z_0)^{8\pi\sigma} dt^2 + (z_0)^{8\pi\sigma} dz^2 + (z_0)^{1+\sqrt{1+16\pi\sigma}} dx^2 +$$

$$+ (z_0)^{1-\sqrt{1+16\pi\sigma}} dy^2 \quad ( 2.38 )$$

Resumiendo, ( 2.37 ) y ( 2.38 ) representan la geometría en las regiones I y III y en la región II asociada a dos placas en reposo con igual densidad de masa y serán usadas en el siguiente capítulo como condiciones iniciales para el problema dinámico. Pero no debemos olvidar que es físicamente imposible mantener en reposo a dos placas de materia colocadas una frente a la otra, a menos que se introduzcan fuerzas que, al tener asociado un tensor de energía - esfuerzos, debe

rían incorporarse a las ecuaciones de Einstein, dando como resultado una métrica diferente a ( 2.37 ) y ( 2.38 ). En otras palabras, ( 2.37 ) y ( 2.38 ) no constituyen una solución física. Sin embargo, ésto no debe preocuparnos pues sólo utilizaremos a ( 2.37 ) y ( 2.38 ) como condiciones iniciales para el problema dinámico.

No obstante, para terminar, debemos señalar un hecho curioso: ( 2.37 ) no es singular en  $z = z_0$  y  $z = -z_0$  ( es decir, sobre las placas ). Si calculamos el tensor de Riemann por regiones, obtendremos espacio plano en la región II y expresiones del estilo  $R_{\alpha\beta\gamma\delta} \propto (z)^{-2-8\pi\sigma}$  en la región III. En otras palabras, sólo se presenta una discontinuidad y no una singularidad de la curvatura sobre las placas. Veremos en el último capítulo si ésto ocasiona alguna dificultad.

## PROBLEMA GRAVITATORIO DINAMICO

Contamos ya con la geometría para  $t = 0$  asociada a dos placas. El siguiente paso consiste en resolver las ecuaciones (2.2), (2.3) y (2.4) para el caso dinámico, seleccionando adecuadamente la norma.

### NORMA

Al igual que en el caso estático, podemos escoger libremente al sistema de coordenadas siempre y cuando respetemos la simetría plana. Debemos aprovechar esta libertad para simplificar las ecuaciones de movimiento y los coeficientes de la métrica —  $\lambda$ ,  $N$ ,  $\psi$  y  $\gamma$ . La norma que ahora elijamos fija  $N$  y  $\lambda$ , y su validez radica en que nuevamente son autoconsistentes las ecuaciones resultantes para el sistema.

$$\text{Propongamos así:} \quad N = e^{(\gamma - \psi)/2} \quad (3.1a)$$

$$\pi_\gamma = -1 \quad (3.1b)$$

Veremos que  $\pi_\gamma = -1$ , unido al hecho de fijar cierta constante  $A$  (es decir,  $A = 1$ ) nos determina el valor de  $\lambda$ .

### ECUACIONES DE EINSTEIN Y CONDICIONES

Sustituyendo (3.1) en (2.2), (2.3) y (2.4), obtenemos

mos las ecuaciones de movimiento y las constricciones para el problema dinámico:

--- ECUACIONES DE EINSTEIN

$$\dot{\psi} = \frac{\pi_{\psi}}{\lambda} \quad (3.2a)$$

$$\dot{\lambda} = 1 \quad (3.2b)$$

$$\dot{\gamma} = -\pi_{\lambda} \quad (3.2c)$$

$$-\dot{\pi}_{\psi} + \lambda' \psi' + \lambda \psi'' = 0 \quad (3.3a)$$

$$-\dot{\pi}_{\lambda} + \frac{\pi_{\psi}^2}{2\lambda^2} - \gamma'' - \frac{\psi'^2}{2} = 0 \quad (3.3b)$$

$$\lambda'' = 0 \quad (3.3c)$$

--- CONSTRICCIONES

$$\frac{\pi_{\psi}^2}{2\lambda} + \pi_{\lambda} - \gamma' \lambda' + \frac{\lambda \psi'^2}{2} = 0 \quad (3.4a)$$

$$-\gamma' + \psi' \pi_{\psi} + \lambda' \pi_{\lambda} = 0 \quad (3.4b)$$

Como en el caso estático, el sistema formado por ( 3.2 ), ( 3.3 ) y ( 3.4 ) es autoconsistente.

DETERMINACION DE LOS COEFICIENTES  $\lambda$ ,  $\psi$ , y  $\gamma$

Claramente, de ( 3.2b ),  $\lambda = t + F(z)$ . De ( 3.3c )  $\lambda''=0$ , es decir  $F(z) = Az$  ( escogemos la constante de integración i-

igual a cero pues nuestro origen de coordenadas se encuentra en  $z = t = 0$ ). Por lo tanto, la solución más general para  $\lambda$  es:

$$\lambda = Az + t \quad (3.5)$$

Podemos hacer  $A = 1$  como parte de nuestra selección de norma. Como veremos, hacer  $A = 1$  no ocasiona contradicciones en las ecuaciones dinámicas, probando así la validez de la norma.

(Fijar  $A = 1$  simplifica enormemente los cálculos. En el apéndice se presenta la solución de  $\psi$  en forma de ecuaciones integrales para valores de  $A \neq 1$ . Dado que la ecuación por resolver para  $\psi$  no es separable en  $z$  y  $t$  si  $A \neq 1$ , las condiciones iniciales para  $\psi$  implican integrales de funciones trigonométricas multiplicadas por funciones Bessel que no se pueden evaluar fácilmente. Además, el concepto de radiación gravitacional debe ser independiente de la selección del sistema de coordenadas o del movimiento del observador si queremos que posea realidad física. Es decir, los resultados que obtengamos en cuanto a radiación emitida cuando  $A = 1$  deben en principio ser equivalentes a los que se obtendrían con cualquier otro valor de  $A$ ).

Tenemos entonces:

$$\lambda = z + t \quad (3.6)$$

Obtenemos la ecuación diferencial para  $\psi$  de la siguiente forma: de (3.2a)  $\pi_\psi = \lambda \dot{\psi}$ , es decir,  $\dot{\pi}_\psi = \dot{\lambda} \dot{\psi} + \lambda \ddot{\psi}$ . Sustituyendo lo anterior en (3.3a) se tiene:

$$\begin{aligned} -\dot{\lambda} \dot{\psi} - \lambda \ddot{\psi} + \lambda' \psi' + \lambda \ddot{\psi} &= 0 \\ -\ddot{\psi} - \frac{\dot{\lambda}}{\lambda} \dot{\psi} + \psi'' + \frac{\lambda'}{\lambda} \psi' &= 0 \end{aligned}$$

La ecuación general será ( usando  $\dot{\lambda} = 1$ ,  $\lambda' = A$ ,  $\lambda = Az + t$  ):

$$\psi'' - \ddot{\psi} + \frac{A}{Az + t} \psi' - \frac{1}{Az + t} \dot{\psi} = 0 \quad (3.7)$$

A primera vista podríamos obtener  $\gamma'$  directamente de sustituir ( 3.4a ) en ( 3.4b ). Sin embargo, como veremos más adelante, cuando  $A = 1$  esta sustitución nos proporciona una condición que deben satisfacer las derivadas de  $\psi$  pero no sirve para encontrar  $\gamma'$ . A pesar de ello podemos hacer lo siguiente: de ( 3.4b ):  $\gamma' = \psi' \pi_{\psi} + \lambda' \pi_{\lambda}$ . Sustituyendo ( 3.2c ) tenemos:  $\gamma' = \psi' \pi_{\psi} - \lambda' \dot{\gamma}$ . Como por ( 3.2a )  $\pi_{\psi} = \lambda \dot{\psi}$  :

$$\gamma' + \lambda' \dot{\gamma} = \lambda \psi' \dot{\psi} \quad (3.8)$$

En vista de todo lo anterior, parece que basta resolver la ecuación ( 3.7 ) para  $\psi$  y a partir de ello encontrar  $\gamma$  por medio de cuadraturas usando ( 3.8 ).

Escribamos ahora nuestras condiciones iniciales sobre  $\lambda$ ,  $\psi$  y  $\gamma$ , que obtendremos de los resultados de la sección anterior. A partir de ( 2.1 ) vemos que:

$$\lambda^2 = g_{xx} g_{yy} ; \quad e^{\psi} = g_{xx} ; \quad e^{\gamma} = g_{xx} g_{zz} \quad (3.9)$$

Así, EN LA REGION II, ( 2.38 ) implica que en  $t = t_0 = 0$  :

$$\begin{aligned} \lambda &= z_0 \\ \psi &= ( 1 + \sqrt{1 + 16\pi\sigma} ) \ln z_0 \\ \gamma &= ( 1 + 8\pi\sigma + \sqrt{1 + 16\pi\sigma} ) \ln z_0 \end{aligned} \quad (3.10)$$

EN LA REGION III, ( 2.37 ) nos dice que en  $t = t_0 = 0$ :

$$\lambda = z$$

$$\psi = ( 1 + \sqrt{1 + 16\pi\sigma} ) \ln z \quad ( 3.11 )$$

$$\gamma = ( 1 + 8\pi\sigma + \sqrt{1 + 16\pi\sigma} ) \ln z$$

Debemos señalar aquí algo importante: las constricciones nos restringen las condiciones iniciales. Por ejemplo, la - constricción ( 2.9 ) para el caso estático (  $t = t_0 = 0$  ) nos dice que:  $\gamma' \lambda' - \frac{\lambda \psi'^2}{2} = 0$  . Si sustituimos esto

en la constricción completa ( 3.4a ) obtenemos, en  $t = t_0 = 0$ :

$$\frac{\pi^2 \psi^2}{2 \lambda} = - \pi \lambda \quad . \quad \text{Por ( 3.2a ) } \pi_\psi = \lambda \dot{\psi}$$

y por ( 3.2c )  $-\pi_\lambda = \dot{\gamma}$  ; tenemos así la siguiente restricción:

$$\dot{\gamma} |_{t=t_0=0} = \frac{\lambda \dot{\psi}}{2} |_{t=t_0=0} \quad ( 3.12 )$$

Si sustituimos ( 2.9 ) en la otra constricción ( es decir, en ( 3.4b ) ), y usamos ( 3.2a ) y ( 3.2c ) nos resulta ( en  $t = t_0 = 0$  ):

$$-\frac{\lambda \psi'^2}{2 \lambda'} + \psi' \lambda \dot{\psi} - \lambda' \dot{\gamma} = 0 \quad . \quad \text{Con ( 3.12 ) obtenemos:}$$

$$-\frac{\psi'^2}{2 \lambda'} + \psi' \dot{\psi} - \frac{\lambda' \dot{\psi}}{2} = 0$$

$$\psi'^2 - 2 \lambda' \dot{\psi} \psi' + \dot{\psi} \lambda'^2 = 0 \quad . \quad \text{Es decir:}$$

$$( \psi' - \dot{\psi} \lambda' )^2 = 0$$

La otra restricción es entonces:

$$\psi' \Big|_{t=t_0=0} = \dot{\psi} \lambda' \Big|_{t=t_0=0} \quad ( 3.13 )$$

En la región II esta última restricción se satisface automáticamente, pues  $\lambda' = \psi' = 0$  en  $t = t_0 = 0$  ( véase 3.10 ). No es de extrañar el hecho de que  $\dot{\psi}$  pueda tomar cualquier valor - pues ( ya que  $\psi$  determina esencialmente la métrica del espacio tridimensional ) se puede empezar con espacio plano e introducir momentos ( en virtud de 3.2a ) que lo hagan evolucionar en espacio curvo. Sin embargo, hemos supuesto que la región entre las placas está vacía y por lo mismo no existe nada que pueda originar esos momentos. Podemos hacer entonces  $\dot{\psi} \Big|_{t=t_0=0} = 0$  en la región II, lo que además implica, por ( 3.12 ), que:

$\dot{\gamma} \Big|_{t=t_0=0} = 0$ . Si observamos las ecuaciones ( 3.2 ), ( 3.3 ) y ( 3.4 ), tenemos nuevamente la configuración estática y por tanto  $\lambda$ ,  $\psi$ ,  $\gamma$  y  $\gamma$  deben mantener la misma forma que tenían en el caso estático, es decir, el espacio tiempo permanece plano. La métrica en la región II para el problema dinámico es exactamente igual a ( 2.38 ):

$$ds^2 = - ( z_0 )^{8\pi\sigma} dt^2 + ( z_0 )^{8\pi\sigma} dz^2 + ( z_0 )^{1 + \sqrt{1 + 8\pi\sigma}} \cdot dx^2 + ( z_0 )^{1 - \sqrt{1 + 8\pi\sigma}} dy^2 .$$

Vayamos ahora a estudiar la región III. Como ya mencionamos, haremos  $A = 1$  y  $\lambda$  tendrá la forma ( 3.6 ), es decir,  $\lambda = z + t$ . Hagamos en este momento lo que insinuamos al inicio de la página 35 : despejemos primero  $\pi_\lambda$  de ( 3.4a ):



$$\pi_\lambda = -\frac{\lambda \dot{\psi}^2}{2} + \gamma' \lambda' - \frac{\pi^2 \psi}{2\lambda} = -\frac{\lambda \dot{\psi}^2}{2} + \gamma' \lambda' - \frac{\lambda \dot{\psi}^2}{2}$$

Si sustituimos lo anterior en ( 3.4b ) resulta:

$$-\gamma' + \psi' \lambda \dot{\psi} - \frac{\lambda \lambda' \dot{\psi}^2}{2} + \gamma' \lambda'^2 - \frac{\lambda \lambda' \dot{\psi}^2}{2} = 0$$

SOLAMENTE CUANDO  $\lambda' = A = 1$  la ecuación anterior puede reducirse a:

$$\frac{\dot{\psi}^2}{2} - \psi' \dot{\psi} + \frac{\dot{\psi}^2}{2} = 0 ,$$

es decir,  $(\psi' - \dot{\psi})^2 = 0$  .

Por lo tanto, cuando  $A = 1$ , la condición ( 3.13 ) es válida para todo tiempo:

$$\psi' = \dot{\psi} \quad ( 3.14 )$$

Por otro lado, siempre podemos escribir la solución

$\psi = \psi(z, t)$  de la ecuación ( 3.7 ) como función de dos variables  $u, v$  dadas por:

$$\begin{aligned} \psi = \psi(u, v) \quad \text{con} \quad u &= z + t \\ v &= z - t \end{aligned} \quad ( 3.15 )$$

De esta forma:  $\dot{\psi} = \frac{\partial \psi}{\partial u} - \frac{\partial \psi}{\partial v}$  ;  $\psi' = \frac{\partial \psi}{\partial u} + \frac{\partial \psi}{\partial v}$

y la ecuación ( 3.14 ) se reduce a

$$\frac{\partial \psi}{\partial v} = 0 \quad ( 3.16 )$$

es decir,  $\psi$  es únicamente función de  $z + t$ . Aún más, si introducimos  $\psi = \psi(z + t)$  en ( 3.7 ), -- haciendo  $A = 1$  -- encontraremos que cualquier función de  $z + t$  es solución. Resumiendo, ya encontramos la solución más general para  $\psi$  en el caso  $A = 1$  sin necesidad de resolver explícitamente la ecuación diferen -

cial ( 3.7 ); esta solución tiene la forma:

$$\psi = \psi ( z + t ) \quad ( 3.17 )$$

Podemos ahora calcular  $\gamma$  a partir de ( 3.8 ). Tenemos así:

$$\gamma' + \dot{\gamma} = ( z + t ) \psi'^2 \quad . \text{ Si hacemos } \gamma = \gamma(u,v), \text{ és$$

ta ecuación se reduce a:

$$2 \frac{\partial \gamma}{\partial u} = u \left( \frac{d\psi}{du} \right)^2 \quad . \text{ Es decir:}$$

$$\gamma = \int \frac{u}{2} \left( \frac{d\psi}{du} \right)^2 du + G(v) \quad ( 3.18 )$$

La solución final en la región III se obtiene igualando — en  $t = t_0 = 0$  — ( 3.17 ) y ( 3.18 ) con ( 3.11 ). De esta ma  
nera:

$$\lambda = z + t$$

$$\psi = ( 1 + \sqrt{1 + 16\pi\sigma} ) \ln ( z + t )$$

Con éstos:

$$\gamma = \int \frac{u}{2} ( 1 + \sqrt{1 + 16\pi\sigma} )^2 \frac{1}{u} du + G(v) =$$

$$\gamma = \frac{1}{2} ( 1 + \sqrt{1 + 16\pi\sigma} )^2 \ln u + G(v)$$

Igualando en  $t = 0$ :

$$( 1 + 8\pi\sigma + \sqrt{1 + 16\pi\sigma} ) \ln z = \frac{1}{2} ( 1 + \sqrt{1 + 16\pi\sigma} )^2 \ln z + G(z)$$

$$\text{Por tanto: } ( 1 + 8\pi\sigma + \sqrt{1 + 16\pi\sigma} - \frac{1}{2} - \sqrt{1 + 16\pi\sigma} - \frac{1}{2} - 8\pi\sigma ) \cdot \ln z = G(z)$$

Es decir

$$G(z) = 0 .$$

La solución es entonces:

$$\begin{aligned}\lambda &= z + t \\ \psi &= (1 + \sqrt{1 + 16\pi\sigma}) \ln(z + t) \quad (3.19) \\ \gamma &= (1 + 8\pi\sigma + \sqrt{1 + 16\pi\sigma}) \ln(z + t)\end{aligned}$$

Con ésto, la métrica en la región III para el problema dinámico es ( véanse 2.1 y 3.1a ):

$$\begin{aligned}ds^2 &= - (z + t)^{8\pi\sigma} dt^2 + (z + t)^{8\pi\sigma} dz^2 + \\ &+ (z + t)^{1 + \sqrt{1 + 16\pi\sigma}} dx^2 + \\ &+ (z + t)^{1 - \sqrt{1 + 16\pi\sigma}} dy^2 \quad (3.20)\end{aligned}$$

Por último vamos a " juntar " la solución en la región II con la solución en la región III. Para ello pediremos la continuidad de la métrica sobre la placa ( es decir, en  $z = z_p$  ). Si se compara ( 2.38 ) con ( 3.20 ), se deduce que debemos exigir  $z_p + t = z_0$  . En otras palabras, la posición de la placa está dada por  $z_p = z_0 - t$ . Esto implica que la placa cae con una velocidad igual a la unidad y que, si empezamos en reposo a  $t = 0$ , la colisión de las placas sucederá a  $t = z_0$  ( es decir, cuando  $z_p = 0$  ). Para  $t > z_0$ , se alcanza de nuevo el caso estático y la métrica resulta ser ( en  $z > 0$  ):

$$\begin{aligned}ds^2 &= - (z + z_0)^{8\pi\sigma} dt^2 + (z + z_0)^{8\pi\sigma} dz^2 + \\ &+ (z + z_0)^{1 + \sqrt{1 + 16\pi\sigma}} dx^2 + \\ &+ (z + z_0)^{1 - \sqrt{1 + 16\pi\sigma}} dy^2 \\ &(\text{ para } z < 0 \text{ basta hacer } z + |z| ).\end{aligned}$$

Definiendo  $z' = z + z_0$  podemos obtener la métrica para una placa que vimos en el capítulo anterior ( fórmula ( 2.27 ), en donde lógicamente  $z_0 = 0$  ).

Regresando al párrafo anterior, puede parecer extraño que la placa caiga con la velocidad 1. Sin embargo debemos recordar que en vista de la arbitrariedad del sistema de coordenadas usado ello no implica que la placa esté cayendo a la velocidad de la luz. No obstante lo anterior, no estaría mal que investigáramos si la placa define una hipersuperficie espacialoide ( lo que sería de esperarse ), temporaloide o nula [ una hipersuperficie de tres dimensiones en el espacio-tiempo es espacialoide, temporaloide o nula si su vector normal es temporaloide, espacialoide o nulo respectivamente ]. Tenemos entonces que calcular el vector normal a la hipersuperficie que representa la placa. Como vimos anteriormente, esta hipersuperficie viene dada por:

$$f = z + t - z_0 = 0$$

( en nuestra norma ésta es la condición que debe satisfacer la posición de la placa ). Su vector normal será entonces:

$$\vec{n} \propto \vec{\nabla} f.$$

Es decir:

$$n_{\mu} = h f_{,\mu} \quad ( h = \text{cte.} ). \quad \text{En particular:}$$

$$n_t = h ; n_z = h ; n_x = n_y = 0 .$$

Llegamos con ésto a una conclusión muy interesante. El vector normal a la hipersuperficie definida por la placa es nulo ( dado que  $\vec{n} \cdot \vec{n} = 0$  ). Sorprendentemente dicha hipersuperficie es nula . Esto levanta ciertas sospechas que examinaremos después de analizar la radiación gravitacional presente.

## EXISTENCIA DE RADIACION GRAVITACIONAL

En este momento ya conocemos la solución exacta de las ecuaciones de Einstein en vacío para el problema de las dos placas en caída libre ( fórmulas ( 2.38 ) y ( 3.20 ) ). El paso final consiste en determinar si dicha métrica constituye una solución radiativa o si representa simplemente un campo gravitacional estático. Desgraciadamente nos enfrentamos aquí con un problema que hasta la fecha no ha sido resultado satisfactoriamente: ¿ cómo establecer de manera covariante la presencia de radiación gravitacional ? El concepto de radiación gravitacional está bien establecido y es sencillamente un reflejo de la idea que tenemos de radiación en electromagnetismo: decimos que el campo electromagnético de una fuente finita es radiativo si decae asintóticamente como el inverso de la distancia; de esta manera se obtiene un flujo finito de energía a través de una superficie cerrada lejana que rodea a la fuente. Por lo tanto, diremos en relatividad general que una métrica es o no radiativa dependiendo de si tiene asociado un transporte no inductivo de energía. Desafortunadamente es muy difícil saber en casos específicos si se tiene o no radiación ( la única situación donde es indudable la presencia de radiación la constituyen los campos gravitacionales débiles ( MIW Caps. 18 y 35 ). En estos casos es posible escribir ecuaciones de onda

para la métrica y obtener soluciones en forma de integrales - retardadas, donde la semejanza con las soluciones electromagnéticas permite determinar la existencia de radiación [ Zakharov ( 1973 ) Cap. 1 ]. Para campos no débiles se han intentado aproximaciones no lineales a las ecuaciones de Einstein inspiradas en los logros de la teoría lineal. Sin embargo todos los métodos tienen deficiencias fundamentales entre las que se encuentra el hecho de que presuponen la selección de un sistema de coordenadas ( véase Zakharov Cap. 1 ) ).

La dificultad que existe para determinar la presencia de radiación gravitacional radica, según palabras de Zakharov, en lo siguiente:

" Desde el punto de vista de la teoría de ecuaciones diferenciales, la dificultad del problema se origina en la complejidad de la estructura no lineal de las ecuaciones de Einstein y en la ausencia de condiciones de frontera universales para las mismas. Desde el punto de vista geométrico - diferencial la dificultad radica en la ausencia de un operador - d'Alembertiano covariante que surja explícitamente de las ecuaciones de Einstein. Finalmente, desde el punto de vista físico, el problema viene de que la ausencia de una expresión covariante para la energía del campo gravitacional en relatividad general hace difícil abordar el tema de la posible transferencia de energía por ondas gravitacionales, así como la descripción de las propias ondas en términos de la transferencia libre de la energía del campo ". ( Zakharov § 3.1 )

Sin embargo, se han construido hasta el momento muchos criterios que pretenden resolver el problema. La mayor parte de ellos se basan en la analogía algebraica que existe entre la relatividad general y el electromagnetismo ( véase Zakharov y las referencias ahí citadas ). Esta analogía consiste esquemáticamente en lo siguiente ( Zakharov Caps. 3 y 4 ): los campos electromagnéticos se pueden separar algebraicamente en radiativos o no radiativos dependiendo de si los invariantes del campo son o no cero. Por medio de la clasificación de Petrov también se pueden clasificar algebraicamente los campos gravitacionales. Desgraciadamente la analogía no es perfecta pues los campos gravitacionales no se subdividen en dos tipos sino en cinco, por lo que existen muchos criterios para establecer la correspondencia con los campos electromagnéticos. Como nuestro objetivo no es analizar a fondo el problema de la radiación ( para ello véase Zakharov y las referencias citadas ) únicamente veremos uno de estos criterios ( el criterio de Pirani ). Igualmente repasaremos brevemente la manera de clasificar los campos por medio de la clasificación de Petrov.

Debemos recordar, sin embargo, que ninguno de los criterios actuales constituye un criterio definitivo ya que ninguno es exhaustivo ni se ha podido comprobar dada la falta de soluciones radiativas exactas y de experimentos. Además, no podemos confiar ciegamente en las comparaciones entre el electromagnetismo y la relatividad general.



## CLASIFICACION DE PETROV

Como veremos más adelante, es necesario clasificar algebraicamente nuestro campo gravitacional ( 3.20 ) para determinar la existencia de radiación. Por ello mismo repasaremos aquí los pasos necesarios para clasificar un campo gravitacional en vacío ( es decir, cuando  $R_{\mu\nu} = 0$  ) sin detenernos en los fundamentos de la clasificación de Petrov ( para ésto véanse Petrov ( 1969 ) y Zakharov Cap. 3 ).

El primer paso consiste en escribir nuestro tensor  $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$  en un marco de referencia ortonormal propio. En virtud de la simetría  $R_{\alpha\beta\gamma\delta} = R[\hat{\alpha}\hat{\beta}][\hat{\gamma}\hat{\delta}]$ , cada par de índices sólo puede tomar los valores 23, 31, 12, 10, 20, 30. Podemos entonces definir los índices  $L, M = 1, 2, 3$  y  $L', M' = 1', 2', 3'$  bajo la condición:

$$\begin{array}{cccccc} \text{índices } \alpha\beta, \gamma\delta: & 23 & 31 & 12 & 10 & 20 & 30 \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ & 1 & 2 & 3 & 1' & 2' & 3' \\ \text{índices} & & & & & & \end{array}$$

Esto permite dividir al tensor de Riemann en 3 matrices simétricas ( debido a que  $R_{\hat{\alpha}\hat{\beta}\hat{\gamma}\hat{\delta}} = R_{\hat{\gamma}\hat{\delta}\hat{\alpha}\hat{\beta}}$  ) de  $3 \times 3$ :

-- tensor A cuyas componentes son  $R_{L'M'}$ . Por ejemplo:

$$A_{11} = R_{1'1'} = R_{1010}^{\hat{\alpha}\hat{\beta}\hat{\gamma}\hat{\delta}}; \quad A_{22} = R_{2'2'} = R_{2020}^{\hat{\alpha}\hat{\beta}\hat{\gamma}\hat{\delta}}; \quad A_{23} = R_{2'3'} = R_{2030}^{\hat{\alpha}\hat{\beta}\hat{\gamma}\hat{\delta}}$$

-- tensor B cuyas componentes son  $R_{LM}$ . Por ejemplo:

$$B_{11} = R_{11} = R_{2310}^{\hat{\alpha}\hat{\beta}\hat{\gamma}\hat{\delta}}; \quad B_{22} = R_{22} = R_{3120}^{\hat{\alpha}\hat{\beta}\hat{\gamma}\hat{\delta}}; \quad B_{31} = R_{31} = R_{1210}^{\hat{\alpha}\hat{\beta}\hat{\gamma}\hat{\delta}}$$

-- tensor  $C$  cuyas componentes son  $R_{LM}$ . Así:

$$C_{11} = R_{11} = R_{2323}^{\wedge\wedge\wedge\wedge}; C_{22} = R_{22} = R_{3131}^{\wedge\wedge\wedge\wedge}; C_{32} = R_{32} = R_{1231}^{\wedge\wedge\wedge\wedge} \text{ etc.}$$

Dado que  $R_{0123}^{\wedge\wedge\wedge\wedge} + R_{0312}^{\wedge\wedge\wedge\wedge} + R_{0231}^{\wedge\wedge\wedge\wedge} = 0$  | MTW Cap. 8 | tenemos  $\text{tr } B = 0$ . Como queremos además una solución en vacío y estamos trabajando en un marco ortonormal propio, tenemos que:

$$R_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} = \eta^{\mu\nu} R_{\hat{\mu}\hat{\alpha}\hat{\nu}\hat{\beta}} = 0 \quad (4.1)$$

Haciendo  $\hat{\alpha}\hat{\beta} = 23, 31, 12$  en (4.1) obtenemos  $A = -C$ , y haciendo  $\hat{\alpha}\hat{\beta} = 11, 22, 33$  vemos que:  $\text{tr } A = \text{tr } C = 0$ .

Tenemos así dos matrices  $C$  y  $B$  con traza cero, con las cuales podemos construir el tensor simétrico complejo  $D = C + iB$ , donde  $\text{tr } D = 0$ .

La clasificación de Petrov consiste en lo siguiente: hay que buscar los eigenvectores y los eigenvalores de  $D$ , es decir, resolver la ecuación  $D_{ij}n^j = \lambda n_i$  ( $n$  representa a los eigenvectores y  $\lambda = a + ib$  los eigenvalores. Como  $\text{tr } D = 0$  tenemos además que  $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$ ). De acuerdo con el número de eigenvectores y eigenvalores distintos se obtienen los tipos de Petrov:

TIPO	Número de eigenvectores distintos	Número de eigenvalores distintos *
I	3	3
D	3	2
II	2	2
N	2	1
III	1	1

\* : dado que  $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$ , cuando el número de eigenvalores distintos es igual a uno debe entenderse que todos los eigenvalores son iguales a cero.

Es posible definir los tipos de Petrov por medio de los vectores de Debever. Esto permite establecer más claramente el criterio de Pirani. Como por el momento sólo nos interesa clasificar nuestro campo gravitacional no nos detendremos en ese formalismo [ para una explicación detallada véase Zakharov Cap. 3 y referencias ahí citadas ].

#### CRITERIO DE PIRANI

Basado en la clasificación de Petrov, Pirani construyó en 1957 un criterio que pretende definir la radiación gravitacional de manera covariante. Tanto Pirani ( 1957 ) como Zakharov ( 1973 ) contienen un desarrollo completo del criterio y explican su origen en base a semejanzas con el electromagnetismo. Por lo mismo, nos conformaremos aquí con enunciarlo y con revisar brevemente sus aspectos más importantes.

El criterio de Pirani está basado en dos postulados, que pueden resumirse así:

- 1) El tensor de Riemann determina la presencia de radiación. Se supone así que la métrica  $g_{\mu\nu}$  no juega un papel fundamental en el análisis del problema de la radiación.
- 2) La radiación gravitacional se propaga con la velocidad -

dad de la luz en el espacio vacío. Por lo tanto, no es útil el criterio si quieren entenderse como radiativos a los fenómenos que viajen con velocidades menores que  $c$ .

Sin embargo, también necesitamos suponer que en gravitación sucede algo similar a lo que pasa en electromagnetismo: los campos radiativos solamente pueden ser campos isotrópicos. Es en este punto donde radica la esencia del criterio. Se dice que un campo electromagnético es isotrópico cuando los invariantes de  $F_{\mu\nu}$  son cero ( es decir,  $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = F_{\mu\nu}{}^*F^{\mu\nu} = 0$  ). Físicamente ésto significa que la energía de un campo isotrópico se propaga a la velocidad de la luz y por tanto podemos introducir la idea de que es imposible que un observador pueda " seguir " el campo. Es posible llevar esta definición a una forma matemática que luego permita generalizarla a la gravitación. Fijemonos en lo siguiente: se dice que un observador " sigue " el campo cuando el vector de Poynting es cero en su marco de referencia; esto implicaría ( escribiendo al vector de Poynting en términos del tensor de energía - esfuerzos  $\tau_{\mu\nu}$  del campo ) que el 4-vector temporaloide de velocidad del observador sea eigenvector de la matriz  $||\tau_{\mu\nu}||$  ( Zakharov Cap. 4 ). Sin embargo es imposible que un observador " siga " un campo isotrópico pues Lichnerowicz ( 1960 ) ha demostrado que la matriz  $||\tau_{\mu\nu}||$  de un campo isotrópico no puede tener eigenvectores temporaloides. Así, la definición matemática apropiada es la siguiente: un campo electromagnético es isotrópico si la -

matriz  $||\tau_{\mu\nu}||$  no tiene eigenvectores temporaloides.

La idea de Pirani consiste en definir un campo gravitacional isotrópico en una manera similar a la última definición que vimos para los campos electromagnéticos. Sin embargo ésto no es fácil de hacer pues no se tiene en relatividad general un tensor de energía - esfuerzos del campo gravitacional definido de manera covariante. Por lo tanto, Pirani trata de definir al campo isotrópico por medio de la idea de seguir el campo, introduciendo para ello los vectores principales de Riemann [ para ésto véase Pirani. ( 1957 ) ]. Baste decir que para campos gravitacionales del tipo I existe un vector principal ( que además es temporaloide ), para campos tipo D existen tres vectores, uno de los cuales es temporaloide y para cada uno de los campos tipo II, III y N existe un único vector principal no temporaloide. Pirani introduce entonces la siguiente definición: un observador estará " siguiendo " al campo gravitacional si su 4-vector de velocidad coincide con un vector principal de Riemann temporaloide. Por tanto, un observador sólo podrá " seguir " un campo gravitacional que tenga un vector temporaloide, es decir, sólo podrá seguir campos de los tipos I ó D. Pirani define entonces a los campos gravitacionales isotrópicos: un campo gravitacional es isotrópico si el tensor de curvatura  $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$  NO TIENE asociados vectores principales de Riemann temporaloides ( es decir, los campos isotrópicos son únicamente los que pertenecen a los tipos II, III y N ). Como Pi

rani supone que todos los campos gravitacionales radiativos son isotrópicos, llegamos por fin al CRITERIO DE PIRANI:

En una región dada del espacio - tiempo vacío existe radiación gravitacional si dentro de esa región el tensor de Riemann pertenece a los tipos II, N ó III de la clasificación de Petrov; si no sucede lo anterior, no existen ondas gravitacionales.

En este trabajo la detección de radiación gravitacional se va a basar en el criterio de Pirani. Por tanto, bastará - clasificar al tensor de Riemann asociado a ( 3.20 ) dentro de la clasificación de Petrov para saber si tenemos presente radiación gravitacional.

#### CLASIFICACION ALGEBRAICA DEL CAMPO ASOCIADO A LAS DOS PLACAS EN CAIDA LIBRE

Para que podamos utilizar la clasificación de Petrov y el criterio de Pirani, debemos calcular en primer término el tensor de Riemann. Bastará calcularlo en las regiones exteriores pues obviamente no esperamos radiación en la región II dado que el espacio-tiempo es plano entre las placas ( por simetría, las regiones I y III son físicamente iguales; por lo tanto sólo nos preocuparemos por ésta última ).

La fórmula ( 3.20 ) nos da la métrica en la región III pa-

ra el problema dinámico. En esta sección, y únicamente para coincidir con la notación usada por Zakharov ( 1973 ) y Pirani ( 1957 ), utilizaremos la convención del signo (-) para el tensor métrico; es decir  $g = (\omega^0)^2 - (\omega^1)^2 - (\omega^2)^2 - (\omega^3)^2$ . Bajo lo anterior, ( 3.20 ) pasa a ser:

$$\begin{aligned} g_{tt} &= (z+t)^{8\pi\sigma} & ; & \quad g_{zz} = - (z+t)^{8\pi\sigma} \\ g_{xx} &= - (z+t)^{1+\sqrt{1+16\pi\sigma}} & ; & \quad g_{yy} = - (z+t)^{1-\sqrt{1+16\pi\sigma}} \end{aligned} \quad ( 4.2 )$$

Podemos obtener los símbolos de Christoffel a través del método variacional desarrollado en la Box 14.4 MIW. Estos resultan ser:

$$\begin{aligned} \Gamma^x_{xz} &= \Gamma^x_{xt} = \frac{1}{2}(1+\sqrt{1+16\pi\sigma})(z+t)^{-1} \\ \Gamma^y_{yz} &= \Gamma^y_{yt} = \frac{1}{2}(1-\sqrt{1+16\pi\sigma})(z+t)^{-1} \\ \Gamma^t_{xx} &= -\Gamma^z_{xx} = \frac{1}{2}(1+\sqrt{1+16\pi\sigma})(z+t)^{\sqrt{1+16\pi\sigma}-8\pi\sigma} \\ \Gamma^t_{yy} &= -\Gamma^z_{yy} = \frac{1}{2}(1-\sqrt{1+16\pi\sigma})(z+t)^{-\sqrt{1+16\pi\sigma}-8\pi\sigma} \\ \Gamma^t_{tt} &= \Gamma^t_{zz} = \Gamma^z_{zz} = \Gamma^z_{tt} = \Gamma^t_{tz} = \Gamma^z_{zt} = 4\pi\sigma(z+t)^{-1} \end{aligned}$$

Existen entonces 6 componentes del tensor de Riemann diferentes de cero:

$$\begin{aligned} R_{txtx} &= R_{zxxz} = R_{txzx} = -4\pi\sigma\sqrt{1+16\pi\sigma}(z+t)^{\sqrt{1+16\pi\sigma}-1} \\ R_{tyty} &= R_{zyyz} = -R_{tyyz} = 4\pi\sigma\sqrt{1+16\pi\sigma}(z+t)^{-\sqrt{1+16\pi\sigma}-1} \end{aligned}$$

En la base ortonormal propia

$$\begin{aligned} \hat{\omega}^t &= (z+t)^{4\pi\sigma} dt & ; & \quad \hat{\omega}^z = (z+t)^{4\pi\sigma} dz & ; & \quad \hat{\omega}^x = (z+t)^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{1+16\pi\sigma}} dx \\ \hat{\omega}^y &= (z+t)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{1+16\pi\sigma}} dy \end{aligned} \quad \text{las 6 componentes del tensor}$$

de curvatura son:

$$\begin{aligned}
 R_{\text{txtx}}^{\wedge\wedge\wedge\wedge} &= -4\pi\sigma \sqrt{1+16\pi\sigma} (z+t)^{-2-8\pi\sigma} \\
 R_{\text{zxzx}}^{\wedge\wedge\wedge\wedge} &= -4\pi\sigma \sqrt{1+16\pi\sigma} (z+t)^{-2-8\pi\sigma} \\
 R_{\text{txzx}}^{\wedge\wedge\wedge\wedge} &= -4\pi\sigma \sqrt{1+16\pi\sigma} (z+t)^{-2-8\pi\sigma} \\
 R_{\text{tyty}}^{\wedge\wedge\wedge\wedge} &= +4\pi\sigma \sqrt{1+16\pi\sigma} (z+t)^{-2-8\pi\sigma} \\
 R_{\text{yzyz}}^{\wedge\wedge\wedge\wedge} &= +4\pi\sigma \sqrt{1+16\pi\sigma} (z+t)^{-2-8\pi\sigma} \\
 R_{\text{tyyz}}^{\wedge\wedge\wedge\wedge} &= -4\pi\sigma \sqrt{1+16\pi\sigma} (z+t)^{-2-8\pi\sigma}
 \end{aligned}
 \tag{4.3}$$

Debemos ahora construir, a partir de (4.3) los tres tensores tridimensionales A, B y C. Siguiendo las instrucciones de la página 46 y usando la notación  $x^0 = t$ ,  $x^1 = x$ ,  $x^2 = y$ ,  $x^3 = z$  tenemos lo siguiente (por comodidad haremos  $\epsilon = 4\pi\sigma \cdot \sqrt{1+16\pi\sigma} (z+t)^{-2-8\pi\sigma}$ ):

$$\begin{aligned}
 A_{ij} &= \begin{bmatrix} -\epsilon & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & B_{ij} &= \begin{bmatrix} 0 & \epsilon & 0 \\ \epsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 C_{ij} &= \begin{bmatrix} \epsilon & 0 & 0 \\ 0 & -\epsilon & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Claramente  $A = -C$ ,  $\text{tr } A = \text{tr } B = \text{tr } C = 0$ . Todo ello era de esperarse dado que nuestras ecuaciones están construidas para espacio vacío. Como ya conocemos C y B podemos formar  $D = C + iB$ , cuyas componentes serán:

$$D_{ij} = \begin{bmatrix} \epsilon & i\epsilon & 0 \\ i\epsilon & -\epsilon & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
 \tag{4.4}$$



Necesitamos resolver ahora la ecuación

$$D_{ij} \pi^j = \lambda \pi_i \quad (4.5)$$

Ya que buscamos soluciones no triviales debe cumplirse que:

$$| D_{ij} - \lambda \eta_{ij} | = 0$$

(donde  $\eta_{ij}$  representa la métrica espacial de Lorentz). Es de cir:

$$\begin{vmatrix} \epsilon + \lambda & i\epsilon & 0 \\ i\epsilon & -\epsilon + \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = 0. \quad \text{En otras palabras:}$$

$$\lambda(\lambda^2 - \epsilon^2 + \epsilon^2) = \lambda^3 = 0$$

Resulta así:  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ . Como todos los eigenvalores son iguales a cero debemos concluir [ véase página 48 ] que el número de eigenvalores distintos es igual a uno.

Por último, necesitamos encontrar el número de eigenvectores distintos asociados a (4.4). La ecuación (4.5) es ahora:

$$\begin{bmatrix} \epsilon & i\epsilon & 0 \\ i\epsilon & -\epsilon & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = 0.$$

Las ecuaciones que determinan las componentes de los eigenvectores serán:

$$\epsilon a + i\epsilon b = 0$$

$$i\epsilon a - \epsilon b = 0$$

$$0 \cdot c = 0$$

Como las dos primeras ecuaciones son dependientes, tenemos

que en general:

$$a = -ib$$

b y c arbitrarios.

Con estas condiciones sólo podemos construir dos eigenvec-  
tores independientes, a saber:

$$n_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad n_2 = \begin{bmatrix} -ib \\ b \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{con } b \text{ arbitrario.}$$

Resumiendo, nuestro campo gravitacional tiene asociados dos eigenvectores independientes con los tres eigenvalores iguales a cero. Por lo tanto, de acuerdo con la tabla de la página 47, estamos frente a un campo gravitacional TIPO N ( caso especial del Tipo II ).

Para mayor seguridad podemos comprobar lo anterior si utilizamos el formalismo de 6 dimensiones que introduce Pirani para estudiar al tensor de Riemann [ véase Pirani (1957) ].

Las componentes  $R^{\alpha\beta\gamma\delta}$  pasan a ser las componentes del tensor simétrico de 6 dimensiones  $R_{AB}$  si transformamos los pares de índices  $\alpha\beta$ ,  $\gamma\delta$  de acuerdo a:

$\alpha\beta$ :	23	31	12	10	20	30
A :	1	2	3	4	5	6

Por ejemplo:

$$R_{11} = R^{\alpha\beta\gamma\delta}_{2323} = R^{\alpha\beta\gamma\delta}_{yzyz} = \epsilon$$

$$R_{52} = R^{\alpha\beta\gamma\delta}_{2031} = R^{\alpha\beta\gamma\delta}_{ytzx} = 0$$

etc.

Haciendo ésto podemos escribir ( 4.3 ) como:

$$R_{AB} = \begin{bmatrix} \epsilon & 0 & 0 & 0 & \epsilon & 0 \\ 0 & -\epsilon & 0 & \epsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon & 0 & -\epsilon & 0 & 0 \\ \epsilon & 0 & 0 & 0 & \epsilon & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

Según Pirani [ Pirani ( 1957 ) ], la forma que deben tener los campos de tipo II es:

$$R_{AB} = \begin{bmatrix} -2\alpha & 0 & 0 & -2\beta & 0 & 0 \\ 0 & \alpha-\xi & 0 & 0 & \beta & \xi \\ 0 & 0 & \alpha+\xi & 0 & \xi & \beta \\ -2\beta & 0 & 0 & 2\alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & \xi & 0 & -(\alpha-\xi) & 0 \\ 0 & \xi & \beta & 0 & 0 & -(\alpha+\xi) \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

con  $\alpha$ ,  $\beta$ , y  $\xi$  funciones de las coordenadas.

No es difícil demostrar que si renombramos nuestras coordenadas en ( 4.6 ) de acuerdo a:

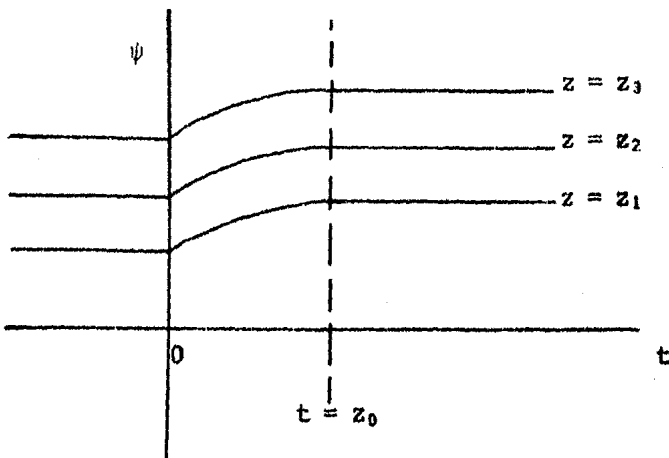
$$\begin{aligned} t &\equiv -x^0 \\ x &\equiv x^2 \\ y &\equiv x^3 \\ z &\equiv x^1 \end{aligned}$$

$R_{AB}$  tomará la forma:

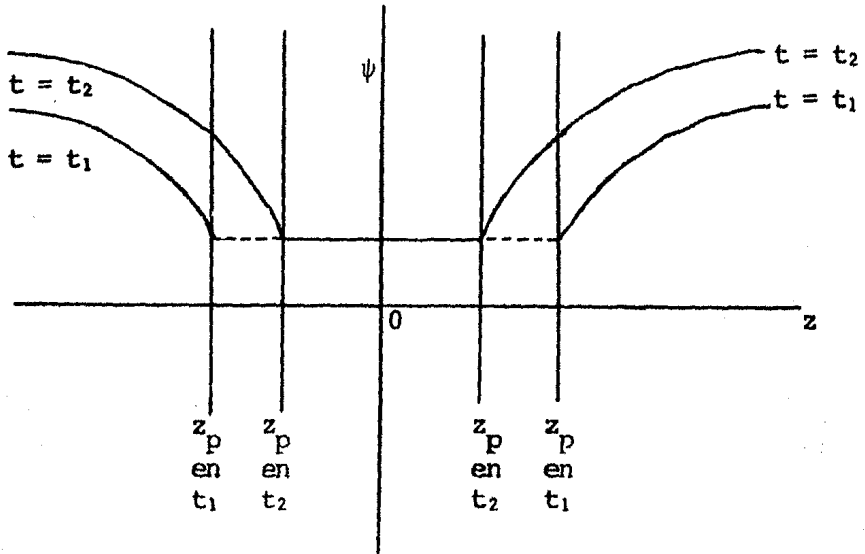
$$R_{AB} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon & 0 & 0 & 0 & -\epsilon \\ 0 & 0 & -\epsilon & 0 & -\epsilon & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\epsilon & 0 & -\epsilon & 0 \\ 0 & -\epsilon & 0 & 0 & 0 & \epsilon \end{bmatrix}$$

que coincide con la forma ( 4.7 ) dada por Pirani si hacemos  $\alpha = \beta = 0$  y  $\xi = -\epsilon$ , con lo que comprobamos que el campo gravitacional es de TIPO II. En vista de ello y del criterio de Pirani que vimos en páginas anteriores, parece justificado suponer que existe radiación gravitacional asociada al colapso de las dos placas de materia. Además, en este formalismo de seis dimensiones la dirección de propagación del frente de onda resulta ser  $x^1$  [ véase Pirani ( 1957 ) ]. Como podemos observar en la página anterior, la dirección  $x^1$  equivale al eje  $z$ ; es decir, la radiación se propaga a lo largo del eje  $z$ , lo cual esperábamos en virtud de la simetría del problema.

Sin embargo, debemos analizar con más cuidado estos resultados antes de llegar a una conclusión. No obstante el campo gravitacional es de tipo N existen dos argumentos que apoyan la idea de que la radiación no está asociada a las placas. El primero consiste en lo siguiente: hagamos una gráfica de  $\psi$  vs.  $t$  en la región III ( en esta región  $\psi$  viene dada por ( 3.11 ) y ( 3.19 ) ). El resultado es:



La caída de las placas se inicia en  $t = 0$  y termina en  $t = z_0$ . Podemos ver que los efectos de la caída se manifiestan en todas las posiciones al mismo tiempo; al no encontrar retardo - resulta difícil pensar en un pulso que se propague hacia  $z = \infty$ . Por otro lado, si graficamos  $\psi$  vs.  $z$  obtenemos:



Se tiene la impresión de que las placas, en su caída, arrastran al campo gravitacional. Parecería entonces más factible que la radiación se propagara "hacia adentro" (es decir, en el sentido negativo del eje  $z$ ). El segundo argumento demuestra esta idea: en el Zakharov Cap. 9 se prueba que la trayectoria de propagación de una onda gravitacional plana para campos tipo N está definida por el vector de Debever  $l^\alpha$ , vector que se puede obtener resolviendo la ecuación de Debever para campos tipo N:

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} l^\alpha = 0 \quad .$$

En nuestro caso  $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$  (en un marco no ortonormal) está dado

por:

$$\begin{aligned}
 R_{t_x t_x} &= R_{z x z x} = R_{t_x z x} = \mu \\
 R_{t_y t_y} &= R_{y z y z} = -R_{t_y y z} = \nu \\
 \text{donde} \quad \mu &= -4\pi\sigma\sqrt{1+16\pi\sigma} (z+t)^{\sqrt{1+16\pi\sigma} - 1} \quad \text{y} \\
 \nu &= +4\pi\sigma\sqrt{1+16\pi\sigma} (z+t)^{-\sqrt{1+16\pi\sigma} - 1} .
 \end{aligned}$$

Usando ésto podemos resolver fácilmente la ecuación de Debever, obteniendo:

$$l^z = -1 ; \quad l^t = 1 ; \quad l^x = l^y = 0 . \quad \text{Es decir:}$$

$$\underline{\hat{l}} = \hat{e}_t - \hat{e}_z .$$

Esto indica que la onda se propaga en el sentido negativo del eje z.

En virtud de estos argumentos parece que tenemos dos placas en caída libre que no emiten radiación gravitacional, acompañadas por ondas gravitacionales originadas desde  $t = -\infty$  que viajan hacia el origen. Esta situación es por demás extraña, dado que además las placas "arrastran" al campo de radiación. Para aclarar este problema debemos recordar un hecho importante que no hemos tomado en cuenta: al final del capítulo III encontramos que la hipersuperficie que representa la placa es una hipersuperficie nula. Como una hipersuperficie nula no puede representar materia "ponderosa" y tenemos además una discontinuidad de la curvatura sobre dicha hipersuperficie ( discontinuidad que no ha sido producida por un tensor de energía-esfuerzos ) debemos concluir que en  $z = z_p$  y  $z = -z_p$  se en -

cuentran los frentes de dos ondas gravitacionales de choque y no dos placas de materia [ véase MIW § 21.13 y Pirani - ( 1957 ) ]. Esto explica porque el campo parece ser arrastrado hacia el origen.

Resumiendo, hemos encontrado que, desafortunadamente, las métricas ( 2.38 ) y ( 3.20 ) no representan el espacio-tiempo asociado a dos placas de materia en caída libre sino la geometría producida por dos ondas gravitacionales de choque que viajan hacia el origen ( ondas que, en virtud de la métrica de la página 40 chocarán formando una singularidad plana estática a la que se le puede asignar cierta densidad de masa ). El origen de esta situación tan particular debe ser el siguiente: a primera vista podría parecer que el hecho de que careciéramos de placas de materia fuera debido a lo que comentamos a finales del capítulo II, es decir, a que no tenemos singularidades en la supuesta posición de las placas. Sin embargo esto puede corregirse sumando simplemente las constantes adecuadas a los coeficientes de la métrica - [ por ejemplo, haciendo que para dos placas en el caso estático, en la región III  $z \rightarrow z-z_0$  y en la región I  $z \rightarrow z+z_0$  ] y claramente esto no modifica el que las placas representen hipersuperficies nulas pues los vectores normales continúan siendo nulos [ véase el final del capítulo III ]. Pero si observamos la función que indica la posición de la placa, es decir,

$f = z + t + \text{cte} = 0$  notamos que su dependencia en  $z + t$  ( que origina el que la hipersuperficie sea nula ) es solamente una consecuencia de que las funciones  $\lambda$ ,  $\psi$  y  $\gamma$  sean funciones de  $z + t$ , lo que a su vez tiene su origen en la norma que utilizamos (  $A = 1$  ; véase ecuación ( 3.17 ) ). Es decir, la raíz del problema se encuentra en la selección de norma y debemos admitir entonces que  $A = 1$  constituye una norma singular para el problema y que fue prematuro asegurar su validez al inicio de los capítulos II y III.



## CONCLUSIONES Y SUGERENCIAS

Como vemos, el problema ha resultado más complejo e interesante de lo que se pensaba en un principio. Hemos resuelto completamente el caso de una y dos placas estáticas y poseemos las expresiones generales que deben satisfacer los coeficientes  $\lambda$ ,  $\psi$  y  $\gamma$  de la métrica en el caso dinámico de las dos placas [ ecuaciones ( 3.5 ), ( 3.7 ) y ( 3.8 ) ]. No obstante contamos con ello, debemos admitir que a esta altura no es posible afirmar si el campo gravitacional en las regiones I y III asociado a la caída de las placas es o no radiativo ( podemos asegurar, sin embargo, que el espacio-tiempo en la región II es plano ). A pesar de que la autoconsistencia de las ecuaciones dinámicas parecía indicar desde el inicio la validez de la norma  $\Lambda = 1$  que utilizamos para simplificar las expresiones, hemos demostrado que dicha norma no permite la existencia de placas de materia ( en vista de que las hipersuperficies establecidas por las placas constituyen hipersuperficies nulas ) por lo que debemos concluir que la métrica ( 3.20 ) representa la geometría asociada a un par de ondas gravitacionales de choque que viajan de  $z = \infty$  y  $z = -\infty$  a  $z = 0$ , resultado que se ve apoyado por el hecho de que dicha métrica constituye un campo del tipo N de Petrov. Además parece claro que lo que en un principio considerábamos como placas

representan bajo tal norma los frentes de onda de la radiación. Tenemos que aceptar entonces que  $A = 1$  es una norma singular para el problema original pero que permite generar el tipo de radiación libre que acabamos de mencionar.

En el Apéndice hemos desarrollado, para cuando  $A \neq 1$ , la solución general para  $\psi$  en forma de ecuaciones integrales [ ecuaciones ( A.3 ), ( A.4 ) y ( A.6 ) ]. Aparentemente no se encuentra muy lejos la solución final al problema de la caída libre de las dos placas, por lo que a continuación sugerimos algunos procedimientos que en nuestra opinión podrían ayudar a resolver satisfactoriamente el problema:

— Incorporar, en primer lugar, las singularidades en  $z = z_0$  y  $z = -z_0$  a la métrica producida por dos placas en el caso estático. Esto no debe presentar dificultades pues basta con sustituir  $\lambda = Az + t$  por  $\lambda = Az + t + \text{constantes}$ , con las constantes especificadas adecuadamente.

— En segundo lugar, resolver las ecuaciones ( A.3 ), ( A.4 ) y ( A.6 ) para  $\psi$ . Sustituir entonces  $\psi$  en las expresiones ( 3.2 ), ( 3.3 ) y ( 3.4 ) para hallar  $\gamma$  y la métrica final.

— Por último, utilizar el criterio que revisamos en el capítulo IV para determinar si la métrica asociada al problema dinámico representa una solución radiativa.

APENDICE

No es fácil determinar  $\psi$  cuando  $A \neq 1$ . Para empezar, debemos resolver explícitamente la ecuación ( 3.7 ). Según esta ecuación:

$$\psi'' - \ddot{\psi} + \frac{A}{Az + t} \psi' - \frac{1}{Az + t} \dot{\psi} = 0$$

Efectuamos el cambio de variables:  $x = Az + t$

$$y = \frac{z}{A} + t$$

Con ello:

$$\dot{\psi} = \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} ; \quad \ddot{\psi} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \quad ( A. 1 )$$

$$\psi' = A \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{1}{A} \frac{\partial \psi}{\partial y} ; \quad \psi'' = A^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} + \frac{1}{A^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}$$

En términos de  $x$  y  $y$  la ecuación diferencial es:

$$A^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{1}{A^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{A}{x} \left( A \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{1}{A} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) - \frac{1}{x} \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) = 0$$

es decir:

$$(A^2 - 1) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \left( \frac{1}{A^2} - 1 \right) \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{A^2 - 1}{x} \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0$$

Sea  $\psi = X(x)Y(y)$ . Entonces:

$$\left( \frac{1}{A^2} - 1 \right) \frac{d^2 Y}{dy^2} \frac{1}{Y} = \alpha$$

$$(A^2 - 1) \frac{d^2 X}{dx^2} \frac{1}{X} + \frac{A^2 - 1}{x} \frac{1}{X} \frac{dX}{dx} = -\alpha$$

Es decir:

$$\frac{d^2 Y}{dy^2} = \frac{\alpha Y}{\left( \frac{1}{A^2} - 1 \right)}$$

$$x^2 \frac{d^2 X}{dx^2} + x \frac{dX}{dx} + \frac{x^2}{A^2 - 1} X = 0$$

Supongamos que  $\Lambda < 1$  y  $u = -k^2 \left( \frac{1}{\Lambda^2} - 1 \right)$ . Las dos ecuaciones anteriores se reducen a:

$$\frac{d^2 Y}{dy^2} = -k^2 Y \quad (A.2)$$

$$x^2 \frac{d^2 X}{dx^2} + x \frac{dX}{dx} + \frac{k^2}{\Lambda^2} x^2 X = 0$$

Es bien conocida la solución de la primera ecuación:

$$Y(y) = C'(k) \operatorname{sen}(|k|y) + D'(k) \operatorname{cos}(|k|y) ,$$

mientras que la segunda constituye una forma especial de la ecuación de Bessel, y su solución tiene la forma:

$$X(x) = A(k) J_0\left(\frac{kx}{\Lambda}\right) + B(k) N_0\left(\frac{kx}{\Lambda}\right)$$

Como queremos que la solución sea finita en  $x = 0$  (es decir, en el origen  $z = t = 0$ ), pediremos que  $B(k) = 0$ .

Con esto, la solución completa para  $\psi$  es:

$$\psi = \int_{-\infty}^{\infty} [C(k) \operatorname{sen}(|k|y) + D(k) \operatorname{cos}(|k|y)] J_0\left(\frac{kx}{\Lambda}\right) dk$$

(donde  $C(k) = C'(k) A(k)$  y  $D(k) = D'(k) A(k)$ ). Así:

$$\begin{aligned} \psi &= \int_{-\infty}^0 -d|k| [C(-|k|) \operatorname{sen}(|k|y) + D(-|k|) \operatorname{cos}(|k|y)] J_0\left(\frac{|k|x}{\Lambda}\right) + \\ &+ \int_0^{\infty} d|k| [C(|k|) \operatorname{sen}(|k|y) + D(|k|) \operatorname{cos}(|k|y)] J_0\left(\frac{|k|x}{\Lambda}\right) = \\ &= \int_0^{\infty} d|k| [(C(|k|) + C(-|k|)) \operatorname{sen}(|k|y) + (D(|k|) + D(-|k|)) \cdot \\ &\quad \cdot \operatorname{cos}(|k|y)] J_0\left(\frac{|k|x}{\Lambda}\right) \end{aligned}$$

$$\psi = \int_0^{\infty} dk [\alpha(k) \operatorname{sen} ky + \beta(k) \operatorname{cos} ky] J_0\left(\frac{kx}{\Lambda}\right) \quad (A.3)$$

Como ésta es la solución para una placa en el caso dinámico

co, debemos pedir que:

$$\psi(z) \Big|_{t=t_0=0} = \psi(-z) \Big|_{t=t_0=0} \quad ; \text{ es decir,}$$

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} dk \left[ \alpha(k) \operatorname{sen} \left( \frac{kz}{A} \right) + \beta(k) \operatorname{cos} \left( \frac{kz}{A} \right) \right] J_0(kz) = \\ & = \int_0^{\infty} dk \left[ -\alpha(k) \operatorname{sen} \left( \frac{kz}{A} \right) + \beta(k) \operatorname{cos} \left( \frac{kz}{A} \right) \right] J_0(kz) \end{aligned}$$

Esto implica que debe cumplirse:

$$\int_0^{\infty} dk \alpha(k) \operatorname{sen} \left( \frac{kz}{A} \right) J_0(kz) = 0 \quad (A.4)$$

Debemos aplicar ahora las condiciones iniciales a la solución ( A.3 ). Como vimos en el capítulo III, éstas pueden resumirse en la expresión ( 3.13 ):

$$\psi' \Big|_{t=0} = \dot{\psi} \lambda' \Big|_{t=0} = A \dot{\psi} \Big|_{t=0}.$$

En términos de las nuevas variables  $x$  y  $y$ , esta condición resulta ser ( usando A.1 ):

$$\left( A \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{1}{A} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \Big|_{t=0} = \left( A \frac{\partial \psi}{\partial x} + A \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \Big|_{t=0} \quad . \text{ Es decir:}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \Big|_{t=0} = 0 \quad ( \text{condición inicial} ) \quad (A.5)$$

Aplicando ( A.5 ) a ( A.3 ) obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial y} \Big|_{t=0} &= \int_0^{\infty} dk k \left[ -\alpha(k) \operatorname{cos} \left( \frac{kz}{A} \right) + \beta(k) \operatorname{sen} \left( \frac{kz}{A} \right) \right] J_0(kz) = \\ &= 0 . \quad (A.6) \end{aligned}$$

Tenemos la solución ( A.3 ) para  $\psi$  pero debemos determinar  $\alpha(k)$  y  $\beta(k)$  a partir de ( A.4 ) y ( A.6 ). Aquí radica la di-

ficultad pues como vemos, estas condiciones están dadas en términos de funciones trigonométricas y de Bessel que dependen de la misma variable, por lo que no pueden utilizarse directamente transformadas de Bessel o de Fourier para obtener la solución general de  $\alpha(k)$  y  $\beta(k)$ . Desafortunadamente también resulta una ecuación integral difícil de resolver si escribimos la función  $J_0$  en términos de funciones trigonométricas. Resumiendo, si es posible encontrar las soluciones generales a las expresiones ( A.4 ) y ( A.6 ), basta sustituirlas en ( A.3 ) para obtener la solución general para  $\psi$  en el caso dinámico.

## REFERENCIAS

1. Arnowitt, R., S. Deser & C. W. Misner, 1962, " The dynamics of general relativity," in Gravitation: An Introduction to Current Research , Wiley, New York.
2. Centrella, J., & R. Matzner, 1979, *Astrophys. J.* 230, 361.
3. Einstein, A., & N. Rosen, 1937, " On gravitational waves," *J. Franklin Inst.* 223 , 43.
4. Gowdy, R. H., 1974, " Vacuum spacetimes with two-parameter spacelike isometry groups and compact invariant hypersurfaces: Topologies and Boundary conditions," *Ann. Phys.* 83 , 203.
5. Jackson, J. D., 1975, Classical Electrodynamics , Wiley, New York.
6. Kuchar, K., 1971, " Canonical quantization of cylindrical gravitational waves," *Phys. Rev. D* 4 , 955.
7. Lapedes, A. S., 1977, *Phys. Rev. D* 15 , 946.
8. Lichnerowicz, A., 1960, *Ann. Mat. pura ed appl.* 50 , 1.
9. Marion, J. B., 1980, Classical Electromagnetic Radiation ,

Academic Press, New York.

10. Misner, C. W., K. S. Thorne & J. A. Wheeler, 1973, Gravitation ,  
W. H. Freeman, San Francisco.
11. Petrov, A. Z., 1969, Einstein Spaces , Pergamon, New York.
12. Pirani, F. A. E., 1957, " Invariant formulation of gravitatio-  
nal radiation theory," Phys. Rev. 105 , 1089.
13. Snarr, L., A. Cadez, B. DeWitt & K. Eppley, 1976, " Collision  
of two black holes: Theoretical framework," Phys. Rev. D  
14 , 2443.
14. Snarr, L., ed., 1979, Sources of Gravitational Radiation ,  
Cambridge University Press, Cambridge.
15. Zakharov, V. D., 1973, Gravitational waves in Einstein's Theo-  
ry , Wiley, New York.