UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

CONSTRUCCION DE LAGRANGIANOS Y HAMILTONIANOS PARA SISTEMAS AUTONOMOS DISIPATIVOS EN UNA DIMENSION REDUCIBLES A LOS USUALES.

Tesis Profesional

Que para obtener el Título de

F I S I C O

p r e s e n t a

JAVIER IGNACIO HERNANDEZ ALBIS

México, D. F. 1984

C O N S T R U C C I O N   D E   L A G R A N G I A N O S
Y   H A M I L T O N I A N O S   P A R A   S I S T E M A S
A U T O N O M O S   D I S I P A T I V O S   E N   U N A
D I M E N S I O N   R E D U C I B L E S   A   L O S
U S U A L E S .

T E S I S   P R O F E S I O N A L

JAVIER IGNACIO HERNANDEZ ALBIS

R E S U M E N

Primeramente se hace ver la importancia, en general, que represénta el Problema Inverso de la Mecánica para la Física. Se dá (capítulo II) una breve revisión bibliográfica-histórica de lo que ha sido este problema en general. Se presentan (capítulo III) los métodos de Kobussen y Yan para la construcción de Lagrangianos, para sistema autónomos unidimensionales (siendo éstos las referencia principal del presente trabajo).

La parte medular del trabajo está en el capítulo IV. En éste capítulo, primeramente se dan las ecuaciones características que a veces permiten hallar una Constante de Movimiento (para sistemas disipativos, ésta constante se busca que sea reducible a la Energía usual). Dada esta Constante de Movimiento, se encuentra la expresión integral para el Lagrangiano, dada por Kobussen, y la expresión integral para el Momento Generalizado, dada por Yan . La equivalencia entre las formulaciones de Kobussen y Yan es dada en forma inmediata .

Finalmente (capítulo V), se dán algúnos ejemplos ilustrativos.

INDICE

C A P I T U L O   I

I N T R O D U C C I O N

Se ha encontrado en muchas ramas de la Física que la solución de una variedad de problemas puede ser grandemente simplificada si las ecuaciones básicas pueden ser expresadas en la forma de un principio variacional; el principio de Fermat en óptica y el principio de Hamilton en mecánica son dos bien conocidos ejemplos.

Una formulación variacional de la Mecánica, fué dada por Lagrange. Sus ecuaciones :

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \qquad i = 1, 2, \ldots, n. \qquad \text{(I.1)}$$

son una consecuencia del principio variacional de Hamilton

$$\delta \int L(q_i, \dot{q}_i, t)\, dt = 0 \qquad \text{(I.2)}$$

donde $\dot{q}_i \equiv \frac{dq_i}{dt}$ y L se denomina "Lagrangiano".

Normalmente, el Lagrangiano está dado por:

$$L = T - V \qquad \text{(I.3)}$$

donde T es la "Energía Cinética" y V es la "Energía Potencial" y están dadas por:

$$T = \sum_{i=1}^{3} \frac{1}{2} m \dot{q}_i^{2} \qquad \text{(I.4)}$$

$$V = \sum_{i=1}^{3} V_i(q_j) \qquad i, j = 1, 2, 3. \qquad \text{(I.5)}$$

Entonces, sustituyendo (I.4) y (I.5) en (I.3), el Lagrangiano es :

$$L = \sum_{i=1}^{3} \frac{1}{2} m \dot{q}_i^{2} - \sum_{i=1}^{3} V_i(q_j) \qquad \text{(I.6)}$$

Sustituyendo este Lagrangiano (I.6) en (I.1) se generan las ecuaciones de movimiento de una partícula en la Mecánica de Newton :

$$m\ddot{q}_i = F_i \qquad i = 1,2,3. \qquad \text{(I.7)}$$

donde $F_i = \frac{\partial}{\partial q_i} V_i(q_j)$.

La formulación de Lagrange es también posible en el caso de las ecuaciones de movimiento de una partícula en la Relatividad Especial de Einstein. Sin embargo, las ecuaciones de Newton o las ecuaciones de Einstein pueden ordinariamente ser puestas en la forma (I.1) sólo si las fuerzas son derivables de un potencial V que es una función de las coordenadas q_i y del tiempo t ,pero no de las $\dot{q}_i$.

El método de Lagrange puede ser extendido para incluir fuerzas F_i dependientes de la velocidad y la aceleración para las cuales uno puede encontrar una función U tal que

$$F_i = \frac{d}{dt}\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial U}{\partial q_i}$$

El ejemplo mejor conocido de tal fuerza es la fuerza de Lorentz de la electrodinámica.

Una extensión similar del formalismo es posible para ciertas fuerzas dependientes de derivadas superiores de las q_i y por métodos especiales (por ejemplo, uso de cuasicoordenadas) a otros casos , el formalismo puede también ser extendido a sistemas continuos (campos) en cuyo caso, las ecuaciones de Euler-Lagrange del principio variacional se transforman en ecuaciones diferenciales parciales.

Además de la bien conocida utilidad del método de Lagrange para el planteamiento de las ecuaciones de movimiento, hay dos ventajas más : Un conocimiento del Lagrangiano permite obtener el Hamiltoniano, el cual está en las bases para la aplicación de la mecánica estadística de Gibbs ya que las funciones de partición están definidas a través de los Hamiltonianos y entonces, los Hamiltonianos mismos y no las ecuaciones de movimiento , vienen a ser importantes en mecánica estadística; igualmente está en las bases para la cuantización de sistemas discretos o continuos .A un nivel de mecánica cuántica, la fuerza responsable para la estructura atómica, la fuerza de Coulomb, es sabido que es derivable de un potencial; entonces el Hamiltoniano produce una representación completamente satisfactoria de la fenomenología atómica. La situación es algo diferente al nivel nuclear. Las representaciones corrientes de las fuerzas nucleares como derivables de un potencial, se sabe que producen un excelente acuerdo con los datos experimentales. Sin embargo, la naturaleza de las fuerzas nucleares es un problema abierto todavía, mientras que el estudio de procesos nucleares no conserva -

tivos se ha incrementado últimamente. La situación es aún más diferente al nivel de la estructura de los hadrones, esto es, las partículas de interacción fuerte tales como mesones, nucleones, etc., donde es concebible la necesidad de fuerzas más generales que las atómicas y nucleares, y su estudio en cualquier caso, recomendable. A un nivel de teoría cuántica del campo, estructuras de densidades Lagrangianas del tipo :

$$\mathcal{L}^{o}_{TOT} = \mathcal{L}_{LIBRE}(\varphi^{K}, \partial_{\mu}\varphi^{K}) + \mathcal{L}_{INT}(\varphi^{K}, \partial_{\mu}\varphi^{K})$$

$$K = 1, 2, \ldots, N. \quad \partial_{\mu}\varphi^{K} = \frac{\partial\varphi^{K}}{\partial x^{\mu}} \quad \mu = 0,1,2,3,\ldots \quad x^{o} = ct \quad \vec{x} = \vec{r}$$

se sabe que producen una representación física efectiva de las interacciones electromagnéticas. La misma estructura una vez implementada en el contexto de las llamadas teorías de norma, ha producido también una unificación física efectiva de las interacciones débiles y electromagnéticas. Sin embargo, el problema de si la misma estructura puede también producir una representación física efectiva de las interacciones fuertes está todavía abierto.

Es por lo tanto de gran importancia saber qué sistemas de fuerzas o campos pueden ser tratados por el método de Lagrange.

C A P I T U L O I I

ANTECEDENTES DEL PROBLEMA INVERSO

El Problema Inverso del cálculo de variaciones puede ser formulado como sigue :

Dada la totalidad de soluciones

$$y(x) = \{ y^1(x), \ldots, y^n(x) \}$$

de un sistema de n ecuaciones diferenciales ordinarias de orden $2r$,

$$R_K(x, y^{(0)}, y^{(1)}, \ldots, y^{(2r)}) = 0 \qquad \text{(II.1)}$$

$$y^{(i)} = \frac{d^i y}{dx^i} \qquad i = 1, 2, \ldots, 2r. \quad K = 1, 2, \ldots, n.$$

determinar si existe una funcional

$$A(y) = \int_{x_1}^{x_2} dx\, L(x, y^{(0)}, \ldots, y^{(r)}) \qquad \text{(II.2)}$$

tal que admita tales soluciones como extremales.

Este problema está basado en el estudio de las condiciones bajo las cuales existe una función

$$L(x, y^{(0)}, y^{(1)}, \ldots, y^{(r)})$$

tal que las ecuaciones de Euler de la funcional(II.2), tengan la misma solución que el sistema (II.1), esto es :

$$\sum_{i=0}^{r} (-1)^i \frac{d^i}{dx^i} \frac{\partial L}{\partial y^{K(i)}} = R_j D^{jK}(x, y^{(0)}, y^{(1)}, \ldots, y^{(2r-1)})$$

Desde el punto de vista físico, la significación primaria del Problema Inverso descansa en el hecho de que las fuerzas actuantes del sistema Newtoniano:

$$R_K(t, q, \dot{q}, \ddot{q}) = 0$$

$$\dot{q} = \frac{dq}{dt} \quad \ddot{q} = \frac{d^2q}{dt^2} \quad q = \{q^K(t)\}$$

$$K = 1, 2, \ldots, n.$$

no necesariamente necesitan ser derivables de un potencial. Por lo tanto, el Problema Inverso permite estudiar las representaciones Lagrangianas de sistemas con fuerzas Newtonianas arbitrarias (generalmente no conservativas pero locales).

A continuación se darán los trabajos de varios autores tomados de Santilli [41] (1979):

Las condiciones necesarias y suficientes para la existencia de una solución L del sistema :

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^K} - \frac{\partial L}{\partial q^K} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^K \partial \dot{q}^i}\ddot{q}^i + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^K \partial q^i}\dot{q}^i\right) + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^K \partial t} - \frac{\partial L}{\partial q^K} \qquad \text{(II.3)}$$

$$= R_K(t, q, \dot{q}, \ddot{q}) \quad K = 1, 2, \ldots, n.$$

fueron por primera vez formuladas por Helmholtz [13] (1887). Helmholtz no consideró una dependencia explícita de las ecuaciones de movimiento respecto del tiempo. Subsecuentes estudios indicaron que sus resultados eran insensibles a tal dependencia. En esencia el punto de partida de Helmholtz fué la propiedad de auto-adjuntez (*) de las ecuaciones de Lagrange ó de Euler-Lagrange (esto es, su sistema de formas variacionales coincide con el sistema auto-adjunto). Esta es una propiedad estudiada por Jacobi [14] (1837). Sin dar una prueba

* La definición de la auto-adjuntez está en Santilli [41].

rigurosa, Helmholtz indicó que la condición necesaria y suficiente para la existencia de una solución L del sistema (II.3) es que $R_K=0$ sea auto-adjunto.

Mayer[15] (1896) intentó la primera prueba de suficiencia.

Hirsch[16][17] (1897 y 1898) y Bohem[18] (1900) aparentemente llevaron a cabo los primeros estudios para $n>1$ y $r>2$.

El primer relato detallado y exhaustivo sobre el problema fué dado por Könisberger[19] (1901).

Hamel[20] (1903) y Kurshak[21] (1906) hicieron también contribuciones.

Davis[22][23][24] (1928, 1929 y 1931) dió probablemente el mejor tratamiento de suficiencia, y uno de los primeros estudios de las representaciones indirectas, esto es, las representaciones de sistemas equivalentes mas bien que de los sistemas originales dados.

de Donder[25] (1935) escribió uno de los pocos tratados en el cálculo de variaciones con un tratamiento del Problema inverso.

Rapoport[26] (1938) aparentemente por primera vez confronta en una manera directa, el problema de construir un Lagrangiano una vez que su existencia es asegurada por las condiciones de auto-adjuntez.

Todos estos estudios posteriores a Helmholtz proveen mayores contribuciones hacia la prueba de que la condición de Helmholtz, o sea, la condición de auto-adjuntez variacional para el sistema $R_K = 0$, era en verdad a la vez necesaria y suficiente no solo para el caso $n > 1$ y $r = 2$ sino también para el caso general de dimensionalidad finita y orden arbitrarios del sistema.

Un enfoque algo diferente pero más bien laborioso fué subsecuentemente dado por Douglas[27] (1941). Este autor más bien que usar las condiciones de auto-adjuntez, usó la teoría de Riquier de las ecuaciones diferenciales parciales para el caso de un sistema con $n = r = 2$, reduciéndolo a un sistema completamente integrable.

Estudios más recientes sobre el Problema Inverso son los de Dedecker[28][29] (1949 y 1950). Este autor llevó a cabo un análisis detallado del método de prolongación previamente introducido por Bateman[30] (1931).

Havas[1] (1957) realizó un estudio del caso de representaciones indirectas considerablemente extenso. Debe indicarse que este estudio tiene una significación central desde el punto de vista práctico, ya que las ecuaciones de movimiento de Newton son generalmente no auto-adjuntas. El problema de la existencia de su representación Lagrangiana es entonces reducida al problema de encontrar formas auto - adjuntas equivalentes. También proporciona uno de los muy pocos relatos del Problema Inverso en la literatura de la Física.

Klein (31) (1962) lleva a cabo aparentemente el pri - mer intento exhaustivo a una interpretación geométrica de las condiciones de integrabilidad para la existencia de un Lagrangiano, como fueron identificadas por Helmholtz. El contexto es el de la geometría diferéncial métrica, con referencia particular a ciertas aplicaciones de la teoría generali - zada de variedades de Finsler a la mecánica analítica vía el uso del cálculo de formas diferenciales. La significación de esta memoria para el Problema Inverso es que reduce las con - diciones de integrabilidad para la existencia de un Lagran - giano a conceptos geométricos primitivos.

Vainberg (32) (1964) escribió aparentemente el primer intento operacional de las condiciones de integrabilidad para la existencia de una funcional de acción dentro del contexto del análisis funcional moderno. La naturaleza generalmente no lineal de los operadores considerados es tratable con la teoría convencional de operadores lineales sobre es - pacios de funciones vía el uso de la derivada de Frechét . Una significación de este trabajo para el Problema Inverso es que proporciona una base para el estudio de la relación entre las aproximaciones variacional y operacional a la auto-adjuntez.

El estudio de Vainberg (32) sobre las condiciones de integrabilidad del Problema Inverso, fué considera - blemente abstracto, al punto de permanecer o bien, inaccesible a la amplia audiencia de matemáticos aplicados . El mérito de Tonti (35) (1968), es haber reconocido la significación de los estudios de Vainberg, desarrollando una reformulación de la aproximación operacional al - Problema Inverso de considerable aplicabilidad práctica . Una significación de la memoria de este autor, es que las condiciones de integrabilidad para la existencia de - una funcional de acción, derivadas dentro del contexto de la aproximación operacional, coinciden con las de Helmholtz. Esto hace que las dos aproximaciones, sean equivalentes.

Edelen (33) (1969) trabajó en el caso de sistemas continuos.

Horndeski (36) (1974) inició el uso en el Problema Inverso de la teoría de cohomología y de las co-cadenas complejas. Un punto que es significativo es que las condiciones de integrabilidad para la existencia de un Lagrangiano que emergen, otra vez coinciden con esas obtenidas con la aproximación variacional a la autoadjuntez. Esto indica que las mismas condiciones de integrabilidad pueden ser expresadas en una variedad de lenguajes matemáticos diferentes pero equivalentes.

Atherton y Homsey[38] (1975), hicieron significativas contribuciones en el contexto de la aproximación operacional al Problema Inverso. También hicieron un resumen de contribuciones previas sobre las mismas líneas de estudio.

Allcock[39] (1975) consideró el problema de la existencia de una funcional de acción desde un marco geométrico-algebráico consistente en la reducción de una forma diferencial lineal Pfaffiana sobre una variedad a una forma Hamiltoniana local vía el uso de ciertas propiedades de los paréntesis de Lagrange. Esta aproximación, que es equivalente a la aproximación variacional a la autoadjuntez para campos vectoriales sobre una variedad, es particularmente significativa, por ejemplo, para la extensión del Problema Inverso al caso de constricciones subsidiarias no integrables.

Edelen[34] (1977) da un estudio detallado de sistemas no holonómicos no conservativos en términos del cálculo de formas diferenciales.

Santilli (40) (1977) estudio el Problema Inverso en las teorías clásicas y relativistas del campo e inició el estudio de la aplicación de este problema a la teoría de - transformación. Sus artículos están basados en una aproxi - mación variacional a la auto-adjuntez complementada por el uso del cálculo de formas diferenciales en general y el in- verso del Lema de Poincaré en particular, tomando en cuenta la conocida efectividad de estas últimas herramientas mate- máticas en el estudio de las condiciones de integrabilidad. Una vez asegurada la auto-adjuntez de las ecuaciones de movi- miento, muestra la construcción del Lagrangiano correspon - diente.

D.G. Currie y E. J. Saletan (44) (1966) encuentra La- grangianos no equivalentes y Hamiltonianos, los cuales dan las mismas órbitas en el espacio de configuración pero en ge- neral, distintas órbitas en el espacio de fases .

W. Sarlet (45) (1978) muestra que para toda invariancia en las ecuaciones de movimiento, se puede encontrar un Lagran- giano y una constante de movimiento que poseen también dicha invariancia. Considera una clase general de transformaciones lineales.

Leubner (6) (1981) dá una expresión integral para el Lagrangiano en términos de dos constantes de movimiento. Por estar directamente relacionado con el presente trabajo, se hará una breve exposición de su desarrollo :

Para la ecuación de movimiento $m\ddot{x} = F(x,\dot{x},t)$ (II.4) es suficiente el conocimiento de dos constantes de movimiento independientes para construir un conjunto no numerable de Lagrangianos no equivalentes.

Se tiene la identidad de Euler-Lagrange:

$$\frac{\bar{d}}{dt} L_{\dot{x}} = L_x \qquad \text{(II.5)}$$

en donde $L_{\dot{x}} = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}$, $L_x = \frac{\partial L}{\partial x}$ y $\frac{\bar{d}}{dt} = \frac{F}{m}\frac{\partial}{\partial \dot{x}} + \dot{x}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t}$ (II.5a)

Diferenciando (II.5) con respecto a $\dot{x}$ y haciendo $m=1$, se tiene :

$$F L_{\dot{x}\dot{x}\dot{x}} + \dot{x} L_{\dot{x}x\dot{x}} + L_{\dot{x}t\dot{x}} = -F_{\dot{x}} L_{\dot{x}\dot{x}} \qquad \text{(II.6)}$$

donde los subíndices, como es usual, denotan derivadas parciales. Definiendo $L_{\dot{x}\dot{x}} = \Lambda$, esta ecuación (II.6) se escribe como:

$$\frac{\bar{d}}{dt}\Lambda = -F_{\dot{x}}\Lambda \qquad \text{(II.7)}$$

En este punto, Leubner nota que la ecuación (II.7) puede ser integrada si se conoce una variable dinámica particular $E(x,\dot{x},t)$ del sistema (II.4) que satisface, suponiendo que $m=1$, la siguiente relación :

$$\frac{\bar{d}}{dt} E = F E_{\dot{x}} + \dot{x} E_x + E_t = F_{\dot{x}} \qquad \text{(II.8)}$$

Por tanto, se resuelve primero la ecuación auxiliar (II.8) y se observa que existen dos familias de curvas características de la ecuación homogénea asociada a (II.8) y nos dan, dos constantes de movimiento funcionalmente independientes $\xi = \xi(x, \dot{x}, t)$, $\eta = \eta(x, \dot{x}, t)$, que por definición satisfacen:

$$F \xi_{\dot{x}} + \dot{x} \xi_x + \xi_t = 0 \qquad \text{(II.9a)}$$

$$F \eta_{\dot{x}} + \dot{x} \eta_x + \eta_t = 0 \qquad \text{(II.9b)}$$

Dadas dos de tales constantes de movimiento se puede verificar que la solución general de la ecuación (II.8) está dada por :

$$E(x, \dot{x}, t) = -\ln\left[\Phi(\xi, \eta)\, \varphi\right] \qquad \text{(II.10)}$$

donde Φ es una función arbitraria de sus argumentos ξ y η , y φ puede ser alternativamente representada por:

$$\varphi = \frac{1}{\dot{x}} \left| \frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(\dot{x}, t)} \right| = \left| \frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, \dot{x})} \right| \qquad \text{(II.11)}$$

donde $\left|\frac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(\dot{x},t)}\right|$ denota el jacobiano $\xi_{\dot{x}}\eta_t - - \xi_t\eta_{\dot{x}}$ y la segunda forma resulta de la dependencia lineal de $\begin{pmatrix}\xi_x\\ \eta_x\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}\xi_t\\ \eta_t\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}\xi_{\dot{x}}\\ \eta_{\dot{x}}\end{pmatrix}$ que surge de las ecuaciones (II.9a,b). Integrando la ecuación (II.7) con ayuda de las ecuaciones (II.8,9,10 y 11) encontramos:

$$L_{\dot{x}\dot{x}} = \Phi(\xi,\eta)\frac{1}{\dot{x}}\left|\frac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(\dot{x},t)}\right| \tag{II.12}$$

donde la constante de integración se incluye en Φ. Con la ayuda de un conveniente par de funciones independientes $\alpha(\xi,\eta)$, $\beta(\xi,\eta)$ se puede representar $\Phi(\xi,\eta)$ también como un jacobiano, $\Phi(\xi,\eta) = \left|\frac{\partial(\alpha,\beta)}{\partial(\xi,\eta)}\right|$.

Así, (II.12) se convierte en:

$$L_{\dot{x}\dot{x}} = \frac{1}{\dot{x}}\left|\frac{\partial(\alpha,\beta)}{\partial(\dot{x},t)}\right| \tag{II.13}$$

Finalmente, integrando esta ecuación dos veces respecto de $\dot{x}$ y, sujetando el resultado a la identidad de Euler-Lagrange (II.5) se encuentra después de una integración por parte y con ayuda de la ecuación (II.8)

$$L(x,\dot{x},t) = \int_{v_0}^{\dot{x}} \frac{\dot{x}-v}{v}\left|\frac{\partial(\alpha,\beta)}{\partial(v,t)}\right| dv + \tag{II.14}$$
$$+ \int_{x_0}^{x} F(\bar{x},v_0,t)\frac{1}{v_0}\left|\frac{\partial(\alpha,\beta)}{\partial(v,t)}\right|_{\substack{v=v_0\\ x=\bar{x}}} d\bar{x} + \frac{d}{dt}\Omega(x,t)$$

que excepto cuadraturas, nos da los Lagrangianos explícitos deseados, explícitamente en términos de cualesquiera dos - constantes de movimiento linealmente independientes $\alpha(x,\dot{x},t)$ y $\beta(x,\dot{x},t)$ del sistema.

Como ejemplo, Leubner toma la siguiente ecuación de movimiento:

$$\ddot{x} = -g - \gamma\dot{x} \qquad \dot{x} \geqslant 0 \tag{II.15}$$

Integrando (II.15) una vez, obtenemos una primera constante de movimiento:

$$\xi = \dot{x} + \gamma x + gt \tag{II.16}$$

Integrando esta ecuación diferencial de primer orden y eliminando ξ con ayuda de (II.16), tenemos una segunda constante de movimiento funcionalmente independiente:

$$\eta = \gamma^{-2}(\gamma\dot{x} + g)\exp(\gamma t) \tag{II.17}$$

Como una primera elección, sustituímos $\alpha = \xi$ y $\beta = \eta$ en (II.14) y encontramos el Lagrangiano:

$$L = \exp(\gamma t)\left(\tfrac{1}{2}\dot{x}^2 - gx\right)$$

Tomando una elección alternativa, $\alpha = \xi$, $\beta = -\eta\exp(-\gamma\xi/g)$ en (II.14) se llega al siguiente Lagrangiano:

$$L = \left(\frac{g}{\gamma}\right)^2 \exp\left[-\gamma(\dot{x} + \gamma x)/g\right]$$

Finalmente, sustituyendo en (II.14) la elección $\alpha = \xi$, $\beta = \left(\frac{g}{\gamma}\right) \ln(\gamma\eta) - \xi$ se llega al Lagrangiano :

$$L(x,\dot{x},t) = \left(\dot{x} + \frac{g}{\gamma}\right) \ln\left(\dot{x} + \frac{g}{\gamma}\right) - \gamma x$$

Para que el lector tenga un marco de comparación de lo que hizo Darboux (12) (1891), en una dimensión, respecto al trabajo que se desarrollará más adelante, se expondrá brevemente su trabajo :

Considérese un sistema uni-dimensional general caracterizado por la siguiente ecuación de movimiento :

$$\ddot{x} = F(t,x,\dot{x}) \tag{II.18}$$

en donde $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$.

La ecuación de Euler-Lagrange está dada por :

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = 0 \tag{II.19}$$

o, desarrollando la derivada total $\frac{d}{dt}$, se tiene :

$$\ddot{x}\,\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^2} + \dot{x}\,\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial \dot{x}} + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x} \partial t} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \tag{II.20}$$

sustituyendo (II.18) en (II.20) y derivando el resultado respecto de la variable $\dot{x}$, se tiene :

$$F(t,x,\dot{x})\frac{\partial M}{\partial \dot{x}} + \dot{x}\,\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} M = 0 \tag{II.21}$$

en donde se ha definido M como $M = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^2}$ (II.22)

Dado que la solución de la ecuación diferencial, siempre existe, entonces para el sistema (II.18) siempre existe su Lagrangiano. La solución de la ecuación (II.21) se obtiene integrando el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$\frac{dt}{1} = \frac{dx}{\dot{x}} = \frac{d\dot{x}}{F(t,x,\dot{x})} = \frac{-dM}{M\,\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}} \qquad \text{(II.23)}$$

Si se conoce la solución de (II.18), podemos tener dos primeras integrales del sistema dadas por :

$$\alpha = \psi_1\,(t,\,x,\,\dot{x}) \qquad \text{(II.24a)}$$

$$\beta = \psi_2\,(t,\,x,\,\dot{x}) \qquad \text{(II.24b)}$$

con lo cual se tiene que $\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}$ es función de las dos constantes α , β y del tiempo t i.e.

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} = \theta\,(t,\alpha,\beta) \qquad \text{(II.25)}$$

de esta manera, del primer y del último términos de (II.23), se encuentra M por una cuadratura:

$$\frac{dM}{M} + \theta(t,\alpha,\beta)\,dt = 0 \qquad \text{(II.26)}$$

Una vez obtenida M , de la relación (II.22) haciendo una doble cuadratura respecto de la variable $\dot{x}$, se obtiene el Lagrangiano general dado por :

$$L = L_0 + \lambda(t,x)\mathring{x} + \mu(t,x) \qquad \text{(II.27)}$$

en donde $$L_0 = \int^{v} d\xi \int^{\xi} d\sigma \, M(t,x,\sigma) \qquad \text{(II.28)}$$

y las funciones $\lambda(t,x)$, $\mu(x,t)$ son obtenidas sustituyendo (II.27) en la ecuación de Euler-Lagrange (II.19) .

C A P I T U L O   I I I

TRABAJOS DE KOBUSSEN Y YAN

Kobussen[3] (1979) muestra para sistemas autónomos con $K=1$ y $i=2$ un método alternativo de construcción de Lagrangianos. (Darboux llegó a la conclusión de que generalmente cualquier sistema de la forma $K=1$ y $i=2$ con una adecuada elección del factor de integración puede ser escrito en la forma de una ecuación de Lagrange). Kobussen parte de la ecuación :

$$m\ddot{x} = F(x,\dot{x}) \qquad \text{(III.1)}$$

y de :

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial L}{\partial x} - \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial \dot{x}}\dot{x} - \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^2}\ddot{x} = 0 \qquad \text{(III.2)}$$

Sustitución de (III.1) en(III.2)da la ecuación diferencial parcial :

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial \dot{x}}\dot{x} - \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^2}\frac{F(x,\dot{x})}{m} = 0 \qquad \text{(III.3)}$$

Kobussen toma como "anzatz" para (III.3):

$$L = \dot{x}\, Y(x,\dot{x}) \qquad \text{(III.4)}$$

y determina una ecuación para $\frac{\partial Y}{\partial \dot{x}} = G$: (III.5)

$$\dot{x}\, G_x + \frac{F(x,\dot{x})}{m} G_{\dot{x}} = -\frac{2}{\dot{x}}\, g(x,\dot{x})\, G \qquad \text{(III.6)}$$

La solución de (III.6) es :

$$G(e,\dot{x}) = \frac{B(e)}{\dot{x}^2} \qquad \text{(III.7)}$$

donde $B(e)$ es cualquier función arbitraria de e y $e(x,\dot{x})$

satisface :

$$\frac{\bar{d}}{dt}\, e(x,\dot{x}) = \frac{F}{m} e_{\dot{x}} + \dot{x}\, e_x = 0 \qquad \text{(III.8)}$$

en otras palabras, $e(x,\dot{x})$ es una constante de movimiento no explícitamente dependiente del tiempo.

entonces, de (III.4,5 y 7) se obtiene :

$$L(x,\dot{x}) = \dot{x} \int^{\dot{x}} \frac{1}{y^2}\, B(e(x,y))\, dy \qquad \text{(III.9)}$$

Kobussen exhibe la existencia de un número infinito de Lagrangianos no equivalentes.

Yan (7) (1981) para sistemas autónomos con $K=1$, $i=2$ considera la ecuación de movimiento :

$$m\dot{v} = F(x,v) \qquad \text{(III.10)}$$

y la función $K(x,v)$ constante de movimiento explícitamente independiente del tiempo tal que :

$$\frac{\bar{d}K}{dt} = \frac{F}{m}\frac{\partial K}{\partial v} + v\frac{\partial K}{\partial x} = 0 \qquad \text{(III.11)}$$

Supone posteriormente la existencia del momento canónico $p = p(x,v)$, relación de la cual supone que se puede despejar la velocidad $v = v(x,p)$. Entonces :

$$K(x,v) = K(x, v(x,p)) = H(x,p) \qquad \text{(III.12)}$$

donde $H(x,p)$ debe ser el Hamiltoniano y escribe las ecuaciones de Hamilton en términos de K .

Posteriormente define el momento canónico p como :

$$p = \int^{v} y^{-1}\left(\frac{\partial K(x,y)}{\partial y}\right)_x dy + A(x) \qquad \text{(III.13)}$$

donde $A(x)$ es una función arbitraria de X solamente.
Yan verifica que el momento (III.13) así definido satisface las ecuaciones de Hamilton en términos de K.
De donde Yan obtiene una fórmula integral para calcular el momento canónico directamente a partir de las ecuaciones de movimiento. Despejando la velocidad en términos de p y sustituyendo en la primera integral de movimiento K, obtiene un Hamiltoniano.

Es importante observar que Leubner, Darboux (CAP. II), no hacen uso de la auto-adjuntez, así como tampoco Kobussen y Yan. Se hace énfasis en que en el trabajo que se desarrollará en el capítulo siguiente, tampoco se hará uso de la auto-adjuntez.

C A P I T U L O I V

DERIVACION ALTERNATIVA DE LAS FORMULAS DE KOBUSSEN Y YAN Y SU EQUIVALENCIA

1. Introducción

Es conocido que en un sistema conservativo, el Hamiltoniano es una constante de movimiento y representa la energía total.

Para sistemas disipativos, la importancia de encontrar un Hamiltoniano y un Lagrangiano reducibles a los conservativos usuales cuando el parámetro que caracteriza la fuerza disipativa tiende a cero, fué mostrada por Havas [1,2]. También mostró que un Lagrangiano y un Hamiltoniano para estos sistemas, no necesariamente dependen explícitamente del tiempo.

El concepto de reducibilidad es el siguiente :

Para el caso de un sistema disipativo en una dimensión, caracterizado por la ecuación de movimiento

$$\ddot{x} = (x, \dot{x}, \alpha) \tag{IV.1}$$

donde α es el parámetro que caracteriza a la fuerza disipativa $F(x,\dot{x},\alpha)$. Si la función $F(x,\dot{x},\alpha)$ satisface el siguiente límite:

$$F(x,\dot{x},\alpha) \xrightarrow[\alpha \to 0]{} F(x) \tag{IV.2}$$

siendo F cierta función que sólo depende de la posición entonces se dirá que el sistema disipativo (IV.1) es reducible al conservativo caracterizado por la ecuación de movimiento

$$\ddot{x} = F(x) \tag{IV.3}$$

Si se encuentra una Constante de Movimiento $K(x,\dot{x},\alpha)$, un Lagrangiano $L(x,\dot{x},\alpha)$, un Momento Generalizado $p(x,\dot{x},\alpha)$ y un Hamiltoniano $H(x,\dot{x},\alpha)$ para el sistema disipativo (IV.1), se dirá que éstos son reducibles a los conservativos si se satisfacen los siguientes límites :

$$K(x,\dot{x},\alpha) \xrightarrow[\alpha\to 0]{} E(x,\dot{x}) \tag{IV.4a}$$

$$L(x,\dot{x},\alpha) \xrightarrow[\alpha\to 0]{} L(x,\dot{x}) \tag{IV.4b}$$

$$p(x,\dot{x},\alpha) \xrightarrow[\alpha\to 0]{} p(x,\dot{x}) \tag{IV.4c}$$

$$H(x,\dot{x},\alpha) \xrightarrow[\alpha\to 0]{} H(x,\dot{x}) \tag{IV.4d}$$

en donde las funciones $E(x,\dot{x})$, $L(x,\dot{x})$, $p(x,\dot{x})$ y $H(x,\dot{x})$ representan la Energía Total, el Lagrangiano, el Momento Generalizado y el Hamiltoniano respectivamente del sistema conservativo (IV.3).

El problema de encontrar un Hamiltoniano que sea constante de movimiento y un Lagrangiano, reducibles a los conservativos para el sistema de una partícula con fuerza de fricción cuadrática en la velocidad :

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x}^2 - f(x) = 0$$

fué resuelto completamente por Havas[1].

Para sistemas autónomos en una dimensión, Kobussen [3] encontró una expresión integral para calcular el Lagrangiano explícitamente independiente del tiempo, a partir de una constante de movimiento. Esta expresión integral fué también usada por Okubo [4,5] y reencontrada por Leubner [6].

Posteriormente, Yan [7] dió una expresión integral para calcular el Momento Generalizado p a partir de una constante de movimiento. Encontró para el caso :

$$m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + \beta = 0$$

un Hamiltoniano que no es reducible al conservativo usual.

Aquí se dará una derivación alternativa de las formulaciones de Kobussen y de Yan y se mostrará su equivalencia. Se darán también algunos ejemplos.

2. La Constante de Movimiento

Considérese un sistema autónomo general en una dimensión y sea $F(x,\dot{x})$ la fuerza que actúa sobre el sistema. La ecuación de movimiento está dada por:

$$m\ddot{x} = F(x,\dot{x}) \qquad \text{(IV.5)}$$

Se definirá $v=\dot{x}$ de aquí en adelante. La constante de movimiento del sistema (IV.5) es una función que satisface:

$$\frac{d}{dt}K = 0 \qquad \text{(IV.6)}$$

entonces (IV.6) se expresa como la siguiente ecuación diferencial parcial homogénea:

$$\frac{F(x,v)}{m}\frac{\partial K}{\partial v} + v\frac{\partial K}{\partial x} = 0 \qquad \text{(IV.7)}$$

Las superficies integrales K de la ecuación (IV.7) se deducen de las ecuaciones para las curvas características[8,9] dadas por :

$$\frac{dv}{F/m} = \frac{dx}{v} = \frac{dK}{0} \qquad \text{(IV.8)}$$

De los dos primeros términos se encuentra la curva característica $C(x,v)$. De tal manera, la solución general de (IV.7) está dada por:

$$K(x,v) = K\left(C(x,v)\right) \qquad \text{(IV.9)}$$

donde K es cualquier funcionalidad de C.

Para sistemas disipativos esta funcionalidad puede ser escogida de tal manera que la constante de movimiento se reduzca a la Energía del sistema conservativo correspondiente. Esta constante de movimiento será fundamental en el desarrollo subsiguiente.

3. Solución de la Ecuación para el Lagrangiano, dada la Constante de Movimiento, a través de la Transformación de Legendre.

Dada la constante de movimiento K por (IV.9) se deduce (por definición), la función Lagrangiana como las superficies integrales de la ecuación diferen - cial parcial no homogénea dada por :

$$v \frac{\partial L}{\partial v} - L = K(x,v) \qquad \text{(IV.10)}$$

La ecuación para las curvas características está dada en este caso por :

$$\frac{dx}{0} = \frac{dv}{v} = \frac{dL}{L+K} \qquad \text{(IV.11)}$$

Debido al primer término en(IV.11), $x = cte.$ para este sistema de ecuaciones diferenciales acopladas y se puede tratar a la variable x como un parámetro en la integración.

La ecuación a resolver es :

$$\frac{dL}{dv} = \frac{L+K}{v} \qquad \text{(IV.12)}$$

Esta ecuación es lineal de coeficientes varia - bles del tipo :

$$\frac{dy}{dx} + \phi(x)\, y = \psi(x)$$

La solución general de esta clase de ecuaciones viene dada en la referencia (10), por lo que la solución para (IV.12) es :

$$L(x,v) = v \int \frac{K(x,v')}{v'^2} dv' + A(x)\, v \qquad \text{(IV.13)}$$

en donde $A(x)$ es la constante que resulta de la integración.

Ya que $K(x,v)$ no depende explícitamente del tiempo, tampoco $L(x,v)$ va a depender explícitamente del tiempo.

Se puede eliminar el término $A(x)v$ de ahora en adelante ya que por representar la norma en las ecuaciones de Euler-Lagrange, genera Lagrangianos equivalentes.

La fórmula (IV.13) es justamente la fórmula encontrada por Kobussen[3] y Leubner[7] (fórmula (III.9) Cap. III). El método para derivar la fórmula (IV.13) aquí presentado es más simple que el de Kobussen .

Se puede demostrar, con ayuda de (IV.5), (II.5a) y (IV.7) que $L(x,v)$, dado por (IV.13), es realmente un Lagrangiano:

$$\frac{\bar{d}}{dt}\frac{\partial L}{\partial v}-\frac{\partial L}{\partial x}=\frac{1}{v}\left(\frac{F}{m}\frac{\partial K}{\partial v}+v\frac{\partial K}{\partial x}\right)=\frac{1}{v}\frac{\bar{d}K}{dt}=0$$

para $v\neq 0$.

La función Momento Generalizado:

$$p=p(x,v) \qquad \text{(IV.14)}$$

es obtenida de la conocida relación:

$$p=\frac{\partial L}{\partial v} \qquad \text{(IV.15)}$$

y el Hamiltoniano $H(x,p)$ (siempre que sea posible obtener de (IV.14), $v=v(x,p)$*) está dado por:

$$H(x,p)=K(x,\,v(x,p)) \qquad \text{(IV.16)}$$

* Esto es posible siempre que se satisfaga el Teorema de la función implícita.

4. Reducibilidad del Lagrangiano

De (IV.13) se puede ver que si :

$$K(x,v,\alpha) \xrightarrow[\alpha\to 0]{} T+V$$

siendo T la Energía Cinética y V la Energía Potencial, entonces para el Lagrangiano se tiene :

$$L \xrightarrow[\alpha\to 0]{} T-V$$

y por lo tanto, la condición para que L sea reducible al conservativo usual es que la Constante de Movimiento $K(x,v,\alpha)$ sea reducible a la Energía usual cuando el parámetro α tiende a cero.

De (IV.9 y 13) se observa también que existe un conjunto infinito de Lagrangianos explícitamente independientes del tiempo no equivalentes, para la ecuación (IV.5), del cual se puede extraer al menos uno que sea reducible al Lagrangiano conservativo usual $L=T-V$, como hace ver Kobussen.

5. La Relación entre la Constante de Movimiento $K(x,v)$ y el Momento Generalizado $p(x,v)$.

De las ecuaciones de Hamilton :

$$\frac{\partial H}{\partial x} = -\dot{p} \tag{IV.17a}$$

$$\frac{\partial H}{\partial p} = v \tag{IV.17b}$$

y de las relaciones (IV.5,16) y (II.5a) , se obtiene para las ecuaciones (IV.17a, b) las siguientes expresiones:

$$K_v \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_p + K_x = -\left[\frac{E}{m}\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_x + v\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_v\right] \quad \text{(IV.18a)}$$

$$K_v \left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_x = v \quad \text{(IV.18b)}$$

donde se ha definido $K_x = \frac{\partial K}{\partial x}$, $K_v = \frac{\partial K}{\partial v}$ y el subíndice de las derivadas parciales explícitas entre paréntesis significa que esta variable es tomada como constante.

Sustituyendo K_v de (IV.18b) y $\frac{E}{m}$ de (IV.7) en (IV.18a), se obtiene :

$$v\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_x \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_p + K_x = \left[-v\,\frac{K_x}{K_v}\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_x + v\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_v\right] \quad \text{(IV.19)}$$

Ahora, haciendo uso en (IV.19) de la conocida relación para la derivación de la función implícita:

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_p = -\frac{\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_v}{\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_x}$$

y cancelando términos iguales de la igualdad resultante, se obtiene :

$$1 = \frac{v}{K_v}\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_x \quad \text{(IV.20)}$$

la cual se puede integrar para p dando :

$$p = \int \frac{K_v}{v}\,dv + A(x) \quad \text{(IV.21)}$$

que es la relación postulada por Yan[7] (fórmula (III.13) Cap. III).

Esta misma expresión (IV.21), puede ser obtenida de (IV.13 y 15) integrando por partes, por lo que la formulación dada por Yan es consecuencia de la de Kobussen. Realizando el proceso inverso, de la relación (IV.21) se llega a la (IV.13), por lo que la formulación dada por Kobussen es consecuencia de la de Yan. Por lo que ambas formulaciones son equivalentes.

5. Reducibilidad para el Momento Generalizado

Se puede ver que la condición de reducibilidad para el Momento Generalizado p dada a través de (IV.21) es la misma condición para la reducibilidad del Lagrangiano dado por (IV.13), es decir, si $K(x,v,\alpha)$ se reduce a la Energía $T+V$, entonces $K_v \xrightarrow[\alpha\to 0]{} mv$ y por lo tanto p tiende al Momento Generalizado conocido $p = mv$.

CAPITULO V

EJEMPLOS

A. Consideremos el sistema de una partícula de masa m sometida a la acción de una fuerza constante $-\beta$ y fuerza de fricción lineal $-\alpha v$:

$$m\ddot{x} = -\beta - \alpha v \qquad (V.1)$$

De (IV.8), se tiene :

$$\frac{-m\,dv}{\beta+\alpha v} = \frac{dx}{v}$$

Integrando esta ecuación, se obtiene la siguiente curva característica:

$$C(x,v) = -m\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 \ln\left(1+\frac{\alpha}{\beta}v\right) + \frac{\beta}{\alpha}mv + \beta x \qquad (V.2)$$

Haciendo el desarrollo en series de Taylor de el logaritmo y tomando el límite cuando el parámetro tiende a cero, se obtiene la Energía del caso conservativo asociado a (V.1). Con esta constante de movimiento, sustituyendo en (IV.13, 15 y 16), se obtiene :

$$L(x,v) = m\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)\left[\left(v+\frac{\beta}{\alpha}\right)\ln\left(1+\frac{\alpha v}{\beta}\right)-v\right]-\beta x \qquad (V.3a)$$

$$p = m\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)\ln\left(1+\frac{\alpha}{\beta}v\right) \qquad (V.3b)$$

$$H(x,p) = -\frac{\beta}{\alpha}p + m\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2\left[\exp\left(\frac{\alpha}{m\beta}p\right)-1\right]+\beta x \qquad (V.3c)$$

Todas estas funciones se reducen a las conservativas cuando α tiende a cero .

Para este mismo ejemplo, Yan[7] y Leubner[6], dan una Constante de Movimiento que no se reduce a la Energía. El primero obtiene un Momento y un Hamiltoniano que no se reducen a los usuales. El segundo obtiene un Lagrangiano que no se reduce al usual. Las expresiones que ellos dan son las siguientes :

$$C = mv - \left(\frac{m\beta}{\alpha}\right) \ln(\alpha v + \beta) + \alpha X \qquad \text{(V.4a)}$$

$$p = m \ln(\alpha v + \beta) + A(x) \qquad \text{(V.4b)}$$

$$H = \frac{m}{\alpha}\left[\exp\left(\frac{1}{m}(p-A)\right) - \beta\right] - \frac{\beta}{\alpha}(p-A) + \alpha X \qquad \text{(V.4c)}$$

$$L = \left(v + \frac{\beta}{\alpha}\right) \ln\left(v + \frac{\beta}{\alpha}\right) - \alpha X \qquad \text{(V.4d)}$$

B. Consideremos el caso relativista de fuerza constante β y fuerza de fricción arbitraria dependiente de la velocidad $g(v)$.

La ecuación de movimiento es :

$$m\frac{d}{dt}\frac{v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \beta - \alpha\, g(v) \qquad \text{(V.5)}$$

donde α y β son constantes.

La ecuación para las curvas características (IV.8) Cap. IV es :

$$\frac{dv}{\left[\frac{\beta}{m} - \frac{\alpha}{m} g(v)\right]\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}} = \frac{dx}{v}$$

y la curva característica es :

y la curva característica es :

$$C = m\int \frac{v\,dv}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}\left[1-\frac{\alpha}{\beta}g(v)\right]} - \beta X \qquad (V.6)$$

Una superficie integral está dada por $K = C$.

Se puede ver que:

$$K \xrightarrow[\alpha \to 0]{} \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - \beta X \qquad (V.7)$$

que es la Energía Relativista usual.

Sustituyendo (IV.6) en (IV.13) se tiene :

$$L = mv\int \frac{dv}{v^2}\left[\int \frac{v'dv'}{\left(1-\frac{v'^2}{c^2}\right)^{3/2}\left[1-\frac{\alpha}{\beta}g(v')\right]} - \beta X\right] \qquad (V.8)$$

El Lagrangiano (V.8) se reduce, cuando $\alpha \to 0$ a :

$$L \xrightarrow[\alpha \to 0]{} mv\int \frac{dv}{v^2}\left[\int \frac{v'dv'}{\left(1-\frac{v'^2}{c^2}\right)^{3/2}} - \beta X\right] \qquad (V.9)$$

Integrando (V.9) se obtiene :

$$L = -mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} + \beta X \qquad (V.10)$$

que es el Lagrangiano Relativista usual.

C. Consideremos ahora una partícula de masa m bajo la acción de una fuerza arbitraria de la posición y fuerza de fricción cuadrática en la velocidad.

La ecuación de movimiento viene dada por :

$$m\ddot{x} = f(x) - \alpha v^2 \qquad (V.11)$$

De la ecuación (IV.8) para las curvas características y de la relación (V.11) tenemos :

$$\frac{dv}{\frac{f(x)}{m} - \frac{\alpha}{m} v^2} = \frac{dx}{v}$$

La integración de ésta ecuación nos dá la siguiente curva característica:

$$C = v^2 e^{\frac{2\alpha x}{m}} - \frac{2}{m}\int f(x) e^{\frac{2\alpha x}{m}} dx \qquad \text{(V.12)}$$

Claramente, la Constante de Movimiento reducible a la Energía usual es $K = \frac{m}{2} C$, es decir:

$$K = \frac{1}{2} m v^2 e^{\frac{2\alpha x}{m}} - \int f(x) e^{\frac{2\alpha x}{m}} dx \qquad \text{(V.13)}$$

De (IV.13) y de (V.13) se obtiene :

$$L = \frac{1}{2} m v^2 e^{\frac{2\alpha x}{m}} + \int f(x) e^{\frac{2\alpha x}{m}} dx \qquad \text{(V.14)}$$

Ahora, de (V.14) y utilizando (IV.15) y (IV.21) se tiene la expresión para el Momento Generalizado dada por :

$$p = m v e^{\frac{2\alpha x}{m}} \qquad \text{(V.15)}$$

De las relaciones (V.13) y (V.15) obtenemos el siguiente Hamiltoniano :

$$H(x,p) = \frac{p^2}{2m} e^{-\frac{2\alpha x}{m}} - \int f(x) e^{\frac{2\alpha x}{m}} dx \qquad \text{(V.16)}$$

La Constante de Movimiento (V.13), el Lagrangiano (V.14), el Momento Generalizado (V.15) y el Hamiltoniano (V.16), coinciden con los dados por Havas[1].

D. En este ejemplo se estudia el oscilador armónico con fuerza de fricción lineal :

$$m\ddot{x} = - m\omega^2 x - \alpha v \qquad (V.17)$$

De (IV.8) , se obtiene la ecuación:

$$- \frac{dv}{\omega^2 x + \frac{\alpha}{m} v} = \frac{dx}{v}$$

Definiendo ω_0 como $\omega_0 = \frac{\alpha}{2m}$ e integrando esta ecuación (ver referencia (11)) se obtienen las siguientes curvas características:

Para $\omega^2 > \omega_0^2$:

$$C = \frac{1}{2} \ln(v^2 + \omega^2 x^2 + 2\omega_0 x v) - \frac{\omega_0}{\sqrt{\omega^2 - \omega_0^2}} \arctan \frac{\omega_0 + \frac{v}{x}}{\sqrt{\omega^2 - \omega_0^2}} \qquad (V.18)$$

Para $\omega^2 = \omega_0^2$:

$$C = \frac{1}{2} \ln(v^2 + \omega^2 x^2 + 2\omega_0 x v) + \frac{\omega_0}{\omega_0 + \frac{v}{x}} \qquad (V.19)$$

Para $\omega^2 < \omega_0^2$:

$$C = \frac{1}{2} \ln(v^2 + \omega^2 x^2 + 2\omega_0 x v) - \frac{\omega_0}{2\sqrt{\omega_0^2 - \omega^2}} \ln \frac{\frac{v}{x} + \omega_0 - \sqrt{\omega_0^2 - \omega^2}}{\frac{v}{x} + \omega_0 + \sqrt{\omega_0^2 - \omega^2}} \qquad (V.20)$$

Tomando el límite en que α tiende a cero en (V.18), (V.19) y (V.20), se puede ver que una Constante de Movimiento reducible a la Energía para los tres casos anteriores es :

$$K = \frac{m}{2} e^{2C} \qquad (V.21)$$

Escribiendo explícitamente las Constantes de Movimiento (V.21) se tiene :

Para $\omega^2 > \omega_0^2$:

$$K=\left(\frac{mv^2}{2}+\frac{m\omega^2x^2}{2}+m\omega_0xv\right)\exp\left\{\frac{-2\omega_0}{\sqrt{\omega^2-\omega_0^2}}\arctan\frac{\omega_0+\frac{v}{x}}{\sqrt{\omega^2-\omega_0^2}}\right\} \quad (V.22)$$

Para $\omega^2 = \omega_0^2$:

$$K=\left(\frac{mv^2}{2}+\frac{m\omega^2x^2}{2}+m\omega_0xv\right)\exp\left\{\frac{2\omega_0}{\omega_0+\frac{v}{x}}\right\} \quad (V.23)$$

Para $\omega^2 < \omega_0^2$:

$$K=\left(\frac{mv^2}{2}+\frac{m\omega^2x^2}{2}+m\omega_0xv\right)\left[\frac{\frac{v}{x}+\omega_0-\sqrt{\omega_0^2-\omega^2}}{\frac{v}{x}+\omega_0+\sqrt{\omega_0^2-\omega^2}}\right]^{-\frac{\omega_0}{\sqrt{\omega_0^2-\omega^2}}} \quad (V.24)$$

Utilizando (IV.21, 22, 23 y 13)

se obtienen respectivamente los siguientes Lagrangia - nos :

Para $\omega^2 > \omega_0^2$:

$$L=v\int dv\left[\frac{m}{2}+\frac{m\omega^2x^2}{2v^2}+\frac{m\omega_0x}{v}\right]\exp\left\{\frac{-2\omega_0}{\sqrt{\omega^2-\omega_0^2}}\arctan\frac{\omega_0+\frac{v}{x}}{\sqrt{\omega^2-\omega_0^2}}\right\} \quad (V.25)$$

Para $\omega^2 = \omega_0^2$:

$$L=v\int dv\left[\frac{m}{2}+\frac{m\omega^2x^2}{2v^2}+\frac{m\omega_0x}{v}\right]\exp\left\{\frac{2\omega_0}{\omega_0+\frac{v}{x}}\right\} \quad (V.26)$$

Para $\omega^2 < \omega_0^2$:

$$L=v\int dv\left[\frac{m}{2}+\frac{m\omega^2x^2}{2v^2}+\frac{m\omega_0x}{v}\right]\left[\frac{\frac{v}{x}+\omega_0-\sqrt{\omega_0^2-\omega^2}}{\frac{v}{x}+\omega_0+\sqrt{\omega_0^2-\omega^2}}\right]^{-\frac{\omega_0}{\sqrt{\omega_0^2-\omega^2}}} \quad (V.27)$$

El caso $\omega^2 > \omega_0^2$ coincide con el obtenido por Kobussen[3] .

C O N C L U S I O N E S

Se ha visto que las formulaciones de Yan y Kobussen son equivalentes. Así, de la formulación de Yan podemos sacar las mismas conclusiones que las de Kobussen, es decir: Existe un conjunto infinito no numerable de Momentos Generalizados no equivalentes que son explícitamente independientes del tiempo.

Además, se ha mostrado que para una dimensión, existe al menos una Constante de Movimiento K, un Lagrangiano L y un Momento p reducibles a los conocidos cuando el parámetro de fricción tiende a cero.

Se ha señalado también que en sistemas autónomos unidimensionales, es siempre posible seguir cualquier dirección de las flechas del siguiente diagrama :

$$\begin{tikzcd} & E.M. \arrow[dl, leftrightarrow] \arrow[dr, leftrightarrow] & \\ K \arrow[rr, leftrightarrow] & & L \end{tikzcd}$$

donde $E.M.$ significa: Ecuación de Movimiento .

Se debe señalar que el proceso usual en los cursos de Mecánica consiste en que, dadas las Ecuaciones de Movimiento para sistemas conservativos autónomos, se construye el Lagrangiano y con esto, la Constante de Movimiento (Energía), el Hamiltoniano y el Momento Generalizado, son de inmediato obtenibles. Para sistemas autónomos en general, este proceso no es trivial realizarlo .

El camino que siguen Kobussen y Yan y que se siguió aquí para sistemas autónomos uni-dimensionales en general es el siguiente : De las Ecuaciones de Movimiento, se encuentra una Constante de Movimiento, con ésta se construye el Lagrangiano, el cual se puede escoger de un conjunto infinito de Lagrangianos para sistemas autónomos en una dimensión .

BIBLIOGRAFIA

1. P. Havas, Suppl. Nuovo Cimento 5, Ser. 10, 363. 1957 .
2. P. Havas, Acta Physica Austriaca 38, 145 167. 1973 .
3. J.A.Kobussen, Acta Physica Austriaca 51, 293. 1979 .
4. S. Okubo, Phys. Rev. A 23, 2776 . 1981 .
5. S. Okubo, Phys. Rev. D 22, 919 . 1980 .
6. C. Leubner, Phys. Letters 86 A, 2, 68 . 1981 .
7. C. C. Yan, Am. J. Phys., 49, 269 . 1981 .
8. F. John. Partial Differential Equations . Springer Verlag N.Y. 1974.
9. R. Courant, D. Hilbert. Methods of Mathemathical Physics Vol. II. Interscience Publishers. 1962 .
10. E.L.Ince. Ordinary Differential Equations. 1956 .
11. I.S.Gradshteyn, I. M. Ryzhik. Table of Integrals, Series and Products. pag. 68. Fórmulas (2.172),(2.175(1)). 1980.
12. Darboux G : Lecons sur la Théorie Générale des Surfaces, Gauthier - Villars, Paris. 1891.
13. Helmholtz H : J. Reine Angew. Math. 100, 137 . 1887.
14. Jacobi C G : Zur Theorie der Variationensrechnung und der Differentualgleichungen. 1837.
15. Mayer A : Ber. Ges. Wiss. Leipzig, Phys. Cl. 519. 1896.
16. Hirsch A : Math. Ann. 49, 49. 1897.
17. Hirsch A : Math. Ann. 50, 429. 1898.
18. Bohem K : J. Reine. Angew. Math. 121, 124. 1900.
19. Kõnisberger L : Die Prinzipien der Mechanik, Teubner, Leipzig. 1901.
20. Hamel G : Math. Ann. 57, 231 . 1903.
21. Kurshak J : Math. Ann. 60, 157, 317 . 1906.
22. Davis DR : Trans. Am. Math. Soc. 30, 710. 1928.
23. Davis DR : Bull. Am. Math. Soc. 35, 371. 1929.

24. Davis DR : Trans. Am. Math. Soc. 33, 244. 1931.
25. de Donder Th : Théorie Invariantive du Calcul des Variations . Gauthier. Villars, Paris. 1935.
26. Rapoport I M : C.R. Acad. Sci. U.S.S.R. 18, 131. 1938.
27. Douglas J : Trans. Am. Math. Soc. 50, 71. 1941.
28. Dedecker P : Bull. Acad. R. Belg., Cl. Sc. 35, 774. 1949.
29. Dedecker P : Bull. Acad. R. Belg., Cl. Sci. 36, 63. 1950
30. Bateman H : Phys . Rev. 38. 815. 1931
31. Klein J : Espaces Variationnels et Mécanique, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 12. 1962.
32. Vainberg M M : Variational Methods for the Study of Nonlinear Operators, Holden & Day, San Francisco. 1964.
33. Edelen D G B : Nonlocal Variations and Local Invariance of Fields, American Elsevier, New. York. 1969.
34. Edelen D G B : Lagrangian Mechanics of Nonconservative Nonholonomic Systems, Noordhoff, Leden. 1977.
35. Tonti E : Variational Principles, Tamburini, Milano. 1968.
36. Horndeski G W : Tensor, New. Ser. 28, 303. 1974.
37. Horndeski G W : Tensor, New. Ser. 29, 21. 1975.
38. Atherton R W and Homsey G M : Stud. Appl. Math. 54, 31.1975.
39. Allcock G. R. : Philos. Trans. Roy Soc. London, A. Math. Phys. Sci. 279, 487. 1975.
40. Santilli R M : Am. Phys. 103, 354 (a), 409 (b) y 105, 227 (c). 1977.
41. Santilli R M : Foundations of Theoretical Mechanics I. The inverse Problem in Newtonian Mechanics. 1979.
42. Kobussen J A : Acta Physica Austriaca 51, 293-309 (1979).
43. Yan C C : Am. J. Phys. 49 (3), 269, Marzo 1981.
44. D. G. Currie and E. J. Saletan : J. Math. Phys. 7, 967. 1966.
45. W. Sarlet : J. Math. Phys. 19, 5, 1049. 1978