UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA

DE MEXICO.

FACULTAD DE CIENCIAS.

RELACION ENTRE SIMETRIAS Y CONSTANTES DE MOVIMIENTO EN SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES Y EN SISTEMAS LAGRANGIANOS.

T E S I S

Que para obtener el título de:

F I S I C O

Presenta:

FEDERICO ZERTUCHE MONES.

México D.F. 1983.

U N I V E R S I D A D N A C I O N A L A U T O N O M A

D E M E X I C O .

FACULTAD DE CIENCIAS.

RELACION ENTRE SIMETRIAS Y CONSTANTES DE MOVIMIENTO EN SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES Y EN SISTEMAS LAGRANGIANOS.

T E S I S

Que para obtener el título de:

F I S I C O

Presenta:

FEDERICO ZERTUCHE MONES.

México D.F. 1983.

I N D I C E

página

CONVENCIONES EMPLEADAS i

INTRODUCCION ii

CAPITULO I.- SIMETRIAS EN LA TEORIA LAGRANGIANA. 1

1) Principios variacionales y el Teorema de Noether. 1

a) La variación de la acción. 1

b) Principios variacionales y las ecuaciones de Euler-Lagrange. 3

c) Transformaciones de Norma. 7

d) Transformaciones de Simetría de Noether. 7

e) El Teorema de Noether. 11

2) Lagrangianos S-Equivalentes y el Teorema de las Trazas. 12

a) Teorema de S-Equivalencia. 14

b) Transformaciones de S-Equivalencia. 17

3) Formulación de Primer Orden. 19

a) Lagrangianos de Primer Orden. 19

b) Problema inverso del cálculo de variaciones en primer orden. 22

c) Teorema de las Trazas en primer orden. 29

d) Teorema inverso de Noether. 32

4) Simetrías de S-Equivalencia y constantes de movimiento 33

CAPITULO II.-SIMETRIAS DE LAS ECUACIONES DE MOVIMIENTO. 37

CAPITULO III.-SIMETRIAS DE S-EQUIVALENCIA Y SIMETRIAS DE LAS ECUACIONES DE MOVIMIENTO. 41

1) Equivalencia entre las simetrías de S-Equiva-

lencia y las simetrías de las ecuaciones de movimiento. 41

2) Corolario. 46

3) Simetrías y constantes de movimiento. 47

4) Condición para que una simetría de las ecuaciones de movimiento sea de Noether para un lagrangiano dado. 50

CAPITULO IV.- ELEMPLOS. 54

1) Ejemplo 1. 54

2) Ejemplo 2. 61

CAPITULO V.- CONCLUSION. 67

BIBLIOGRFIA 69

CONVENCIONES EMPLEADAS.

1) Los índices latinos i,j,k,r,s,t, etc. toman valores de 1 a n donde n es el número de grados de libertad del sistema.

2) Los índices latinos a,b,c,d, etc. toman valores de 1 a 2n.

3) Los índices griegos α , β , γ , μ , ν , etc. toman valores de cero a 2n.

4) Los índices repetidos en un mismo término indican suma sobre todos sus posibles valores.

5) La posición de los índices es irrelevante y sólo sirve para aplicar la convención de suma. Esto es, siempre se sumará un subíndice con un superíndice.

6)

$$\delta_\alpha^\beta = \begin{cases} 1 & si \quad \alpha=\beta \\ 0 & si \quad \alpha \neq \beta \end{cases}$$

7) Los puntos sobre cualquier cantidad indican derivada temporal salvo que se indique lo contrario, así:

$$\dot{q}^i \equiv \frac{dq^i}{dt} \quad , \quad \dot{x}^a \equiv \frac{dx^a}{dt} .$$

8) La coma después de una cantidad significa derivada parcial respecto a las coordenadas, así:

$$C^b_{,a} \equiv \frac{\partial C^b}{\partial x^a} \quad , \quad g^\alpha_{,\beta} \equiv \frac{\partial g^\alpha}{\partial x^\beta} \quad , \quad \eta_{\alpha\beta,\gamma} \equiv \frac{\partial \eta_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma} \quad \text{etc.}$$

INTRODUCCION

La relación entre simetrías y cantidades conservadas juega un papel muy importante en la física teórica moderna. El teorema fundamental que establece esta conexión fue formulado por E. Noether en 19[illegible]. Este teorema establece la posibilidad de construir en for[illegible] simple una cantidad conservada asociada con cada transformación de simetría del lagrangiano que describe al sistema dinámico en consideración.[1,2]

En general se puede decir que existen diversas definiciones de simetrías, algunas aplicables a sistemas de ecuaciones diferenciales[3] y otras definidas sólo para sistemas lagrangianos. Las definiciones precisas de ellas aparecen en los capítulos de este trabajo, y por el momento nos permitiremos referirnos a ellas sin preocuparnos por el rigor.

Recientemente se han definido simetrías más generales que las consideradas en el teorema de Noether (y que las incluyen) que tienen la ventaja de poder asociar varias cantidades conservadas a una transformación de simetría. Estas transformaciones las llamaremos de s-equivalencia para distinguirlas de la noetherianas.[4,5]

En el presente trabajo vamos a mostrar que las simetrías de las ecuaciones de movimiento son completamente equivalentes a las simetrías de s-equivalencia, y a partir de esto vamos a demostrar algunos teoremas mediante los cuales se pueden hallar constantes de movimiento a partir de las simetrías.

El contenido general de este trabajo es el siguiente:

En el capítulo I se hace una revisión relacionada con las simetrías en la teória lagrangiana, como son: el teorema de Noether, la formulación de primer orden[6,7] (de la que haremos uso en el resto del trabajo), la teoría de s-equivalencia[8,9], el teorema de las trazas y las simetrías de s-equivalencia.[4,5]

En el capítulo II se definen, para un sistema descrito en la formulación de primer orden, las simetrías de las ecuaciones de movimiento y se deduce el sistema de ecuaciones diferenciales parciales que satisfacen[3].

En el capítulo III se demuestra la equivalencia de las simetrías de s-equivalencia y las simetrías de las ecuaciones de movimiento, y como una consecuencia de esto, se encuentra un corolario y dos teoremas que permiten asociar constantes de movimiento a las simetrías de las ecuaciones de movimiento.[1] Finalmente se hace un estudio preliminar para intentar hacer una clasificación de las simetrías.

En el capítulo IV se presentan dos ejemplos que ilustran el contenido del capítulo III. El primer ejemplo trata de la partícula libre en una dimensión y el segundo ejemplo corresponde a un sistema de dos ecuaciones diferenciales de segundo orden que no poseen lagrangiano, pero que al ser transformadas en un sistema de primer orden mediante un cambio de variables es posible hallar un lagrangiano para ellas.

Finalmente, en el capítulo V presentamos a modo de conclusión los resultados principales de este trabajo y discutimos brevemente algunos puntos que quedan por aclararse.

I.- SIMETRIAS EN LA TEORIA LAGRANGIANA.

1) Principios variacionales y el teorema de Noether.

a) La variación de la acción.

En mecánica clásica la descripción del movimiento se puede hacer mediante un conjunto de coordenadas independientes $\{q^i\}$ llamadas coordenadas generalizadas. La solución al problema del movimiento consiste en hallar a éstas como funciones de un parámetro llamado tiempo. Así:

$$q^i = Q^i(t) \qquad i=1,\ldots,n \tag{1.1}$$

Al número de coordenadas q^i requeridas para describir el movimiento de un sistema se le llama número de grados de libertad del sistema mecánico.

En la formulación lagrangiana se pretende caracterizar a los sistemas mecánicos mediante una función

$$L = L(q^i, \dot{q}^i, t). \tag{1.2}$$

llamada función lagrangiana.(+) .

Las ecuaciones diferenciales, cuyas soluciones son las fun-

(+) q^i y $\dot{q}^i$ representan al conjunto $\{q^i, \dot{q}^i\}$ y en algunos casos sólo se escribirá $L = L(q, \dot{q}, t)$.

I.- SIMETRIAS EN LA TEORIA LAGRANGIANA.

1) Principios variacionales y el teorema de Noether.

a) La variación de la acción.

En mecánica clásica la descripción del movimiento se puede hacer mediante un conjunto de coordenadas independientes $\{q^i\}$ llamadas coordenadas generalizadas. La solución al problema del movimiento consiste en hallar a éstas como funciones de un parámetro llamado tiempo. Así:

$$q^i = Q^i(t) \qquad i=1,\ldots,n \tag{1.1}$$

Al número de coordenadas q^i requeridas para describir el movimiento de un sistema se le llama número de grados de libertad del sistema mecánico.

En la formulación lagrangiana se pretende caracterizar a los sistemas mecánicos mediante una función

$$L = L(q^i, \dot{q}^i, t) \tag{1.2}$$

llamada función lagrangiana.(+)

Las ecuaciones diferenciales, cuyas soluciones son las fun-

(+) q^i y $\dot{q}^i$ representan al conjunto $\{q^i, \dot{q}^i\}$ y en algunos casos sólo se escribirá $L = L(q, \dot{q}, t)$.

ciones (1.1), las vamos a encontrar a partir de la funcional de acción $\mathcal{S}$ definida por:[1,10-13]

$$\mathcal{S} = \int_{t_1}^{t_2} L(q^i, \dot{q}^i, t)\, dt \qquad (1.3)$$

que depende de la forma funcional de las coordenadas $q^i(t)$ como funciones del tiempo. Es decir, depende de la trayectoria específica que siga el sistema en el espacio de las q^i (espacio de configuración).

Consideremos una transformación infinitesimal de las coordenadas y el tiempo. Las velocidades se verán afectadas como consecuencia de la transformación. De este modo tendremos[(+)]

$$\left.\begin{aligned} \bar{q}^i(\bar{t}) &= q^i(t) + \delta q^i(t) \\ \dot{\bar{q}}^i(\bar{t}) &= \dot{q}^i(t) + \delta \dot{q}^i(t) \\ \bar{t} &= t + \delta t(t) \end{aligned}\right\} \qquad (1.4)$$

donde las δq^i, $\delta \dot{q}^i$ y δt son funciones infinitesimales de primer orden. En términos de esta transformación se define a la variación funcional de la acción $\mathcal{S}$ como:

$$\delta\mathcal{S} = \int_{\bar{t}_1}^{\bar{t}_2} L(\bar{q}^i, \dot{\bar{q}}^i, \bar{t})\, d\bar{t} - \int_{t_1}^{t_2} L(q^i, \dot{q}^i, t)\, dt \qquad (1.5)$$

Desarrollando en serie de Taylor y usando la regla de la cadena en la primera integral se obtiene:

$$\delta\mathcal{S} = \int_{t_1}^{t_2} \left[L(q, \dot{q}, t) + \frac{\partial L}{\partial q^i}\delta q^i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\delta \dot{q}^i + \frac{\partial L}{\partial t}\delta t \right] \frac{d\bar{t}}{dt}\, dt - \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t)\, dt$$

(+) Es importante notar que en este caso $\dot{\bar{q}}^i(\bar{t}) \equiv d\bar{q}^i / d\bar{t}$.

Donde sólo se han conservado términos de primer orden.(+) De (1.4) se tiene que

$$\frac{d\bar{t}}{dt} = 1 + (\delta t)^{\cdot} \tag{1.6}$$

por lo que tenemos,

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left[L(q,\dot{q},t)(\delta t)^{\cdot} + \frac{\partial L}{\partial q^i}\delta q^i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\delta \dot{q}^i + \frac{\partial L}{\partial t}\delta t \right] dt \tag{1.7}$$

Definamos los cambios "locales" $\delta_* q^i$ y $\delta_* \dot{q}^i$ de las coordenadas y velocidades como

$$\left.\begin{aligned} \delta_* q^i &\equiv \bar{q}^i(t) - q^i(t) \\ \delta_* \dot{q}^i &\equiv \dot{\bar{q}}^i(t) - \dot{q}^i(t) \end{aligned}\right\} \tag{1.8}$$

donde es claro que,

$$(\delta_* q^i)^{\cdot} = \delta_* \dot{q}^i \tag{1.9}$$

Usando (1.4) vemos que:

$$\delta q^i(t) \equiv \bar{q}^i(\bar{t}) - q^i(t) = \bar{q}^i(t) - q^i(t) + \dot{q}^i\,\delta t \equiv \delta_* q^i + \dot{q}^i\,\delta t$$

y

$$\delta \dot{q}^i(t) \equiv \dot{\bar{q}}^i(\bar{t}) - \dot{q}^i(t) = \dot{\bar{q}}^i(t) - \dot{q}^i(t) + \ddot{q}^i\,\delta t \equiv \delta_* \dot{q}^i + \ddot{q}^i\,\delta t$$

(+) En lo sucesivo se despreciarán infinitésimos de órdenes mayores que el primero.

$$\therefore \quad \left.\begin{aligned} \delta q^i &= \delta_* q^i + \dot{q}^i \delta t \\ \delta \dot{q}^i &= \delta_* \dot{q}^i + \ddot{q}^i \delta t \end{aligned}\right\} \tag{1.10}$$

Sustituyendo (1.10) en (1.7) tenemos

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \Big[L (\delta t)^{\cdot} + \frac{\partial L}{\partial q^i} \delta_* q^i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \delta_* \dot{q}^i + + \left\{ \frac{\partial L}{\partial q^i} \dot{q}^i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \ddot{q}^i + \frac{\partial L}{\partial t} \right\} \delta t \Big] dt$$

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{d}{dt}\left(L \delta t\right) + \frac{\partial L}{\partial q^i} \delta_* q^i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \delta_* \dot{q}^i \right] dt$$

Usando (1.9) podemos integrar por partes el tercer término del integrando obteniendo

$$\delta S = \left[L \delta t + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \delta_* q^i \right] \Bigg|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right] \delta_* q^i \, dt$$

Volviendo a hacer uso de (1.10) se obtiene:

$$\delta S = \left[L \delta t - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \dot{q}^i \delta t + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \delta q^i \right] \Bigg|_{t_1}^{t_2} - - \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial L}{\partial q^i} \right] \left(\delta q^i - \dot{q}^i \delta t \right) dt$$

y finalmente tenemos para la variación funcional de S que:

$$\delta S = \left[p_i \delta q^i - \mathcal{H} \delta t \right] \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} L_i (\delta q^i - \dot{q}^i \delta t)\, dt \tag{1.11}$$

donde

$$p_i \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \tag{1.12}$$

es el momento canónico conjugado a q^i,

$$\mathcal{H} \equiv p_i \dot{q}^i - L \tag{1.13}$$

es la función de Hamilton y

$$L_i \equiv \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial L}{\partial q^i} \tag{1.14}$$

se conoce con el nombre de derivada lagrangiana, que también designaremos por $E_i L$; donde E_i representa al operador diferencial

$$E_i \equiv \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial}{\partial q^i} \tag{1.15}$$

b) Principios variacionales y las ecuaciones de Euler-Lagrange.

Las ecuaciones diferenciales que satisfacen las coordenadas generalizadas $q^i(t)$ se pueden ahora obtener a partir de un principio variacional. Dos de los más usados son, el principio de Hamilton y el principio de Weiss.

En el principio de Hamilton[1,10-13] se considera el caso especial de transformación de coordenadas en el que

$$\delta t = 0 \quad y \quad \delta q^i(t_1) = \delta q^i(t_2) = 0 \tag{1.16}$$

Haciendo uso de esto en la ecuación (1.11) se obtiene que

$$\delta S = -\int_{t_1}^{t_2} L_i \, \delta q^i \, dt \tag{1.17}$$

El principio de Hamilton establece entonces, que la trayectoria real que sigue el sistema en el espacio de configuración es aquella para la que

$$\delta S = 0$$

para toda elección de t_1, t_2 y para δq^i arbitrarios, sujetos sólo a la condición (1.16). De (1.17) y por el lema fundamental del cálculo de variaciones[12,14,15] se tiene:

$$\boxed{L_i = 0} \tag{1.18}$$

Estas son las ecuaciones diferenciales ordinarias y en general de segundo orden que al ser integradas proporcionan las ecuaciones (1.1) y son conocidas con el nombre de ecuaciones de Euler-Lagrange o ecuaciones de movimiento.

Por otro lado, el principio de Weiss[10] considera la variación general de coordenadas (1.4) y establece que la trayectoria real que sigue el sistema en el espacio de configuración es aquella en la cual la variación funcional de S dada por (1.11) es sólo función de los puntos extremos t_1 y t_2. Lo cual de nuevo conduce a que se debe de tener $L_i = 0$.

c) Transformaciones de norma.

Dado un sistema de ecuaciones de movimiento como el (1.18), el lagrangiano que da origen a ellas no es único. Si los lagrangianos $L(q,\dot{q},t)$ y $\bar{L}(q,\dot{q},t)$ son tales que

$$E_i \bar{L} = E_i L \tag{1.19}$$

entonces es necesario y suficiente que

$$\bar{L}(q,\dot{q},t) = L(q,\dot{q},t) + \frac{d}{dt}\lambda(q,t) \tag{1.20}$$

donde $\lambda(q,t)$ es una función arbitraria de q^i y t.[2,16]

Este tipo de transformación del lagrangiano se conoce con el nombre de transformación de norma (gauge)[2] o transformación de divergencia[1]. El que L y $\bar{L}$ conduzcan a (1.19) se funda en el hecho de que:

$$E_i f(q,\dot{q},t) = 0 \iff f(q,\dot{q},t) = \frac{d}{dt}\lambda(q,t) \tag{1.21}$$

para una demostración detallada ver referencias 2 y/o 16.

d) Transformaciones de simetría de Noether.

Consideremos la transformación de coordenadas(+):

$$\begin{aligned} \bar{q}^i &= \bar{q}^i(q^j,t) \\ \bar{t} &= \bar{t}(t) \end{aligned} \tag{1.22}$$

(+) Llamadas transformaciones puntuales.

tal que

$$\det \frac{\partial \bar{q}^i}{\partial q^j} \neq 0 \quad y \quad \frac{d\bar{t}}{dt} \neq 0 \tag{1.23}$$

de modo que la transformación sea invertible.

Puesto que las $\bar{q}^i$ describen al mismo sistema mecánico que las q^j podemos pedir que:

$$\bar{S}(\bar{q}^i) = S(q^j) \tag{1.24}$$

de modo que el nuevo sistema de ecuaciones de Euler-Lagrange sea equivalente al primitivo.

Así las cosas el lagrangiano transforma de modo que

$$\bar{L}(\bar{q},\dot{\bar{q}},\bar{t})\, d\bar{t} = L(q,\dot{q},t)\, dt \tag{1.25}$$

y las ecuaciones de Euler-Lagrange de ambos lagrangianos están relacionadas por[2]

$$\bar{L}_r = \frac{dt}{d\bar{t}} \frac{\partial q^s}{\partial \bar{q}^r} L_s \tag{1.26}$$

De todos los tipos de transformaciones (1.22) nos interesan aquellos que tienen la propiedad de hacer que las nuevas ecuaciones de Euler-Lagrange en términos de $\bar{q}$, $\dot{\bar{q}}$ y $\bar{t}$ tengan la misma forma funcional que las antiguas. Estas transformaciones reciben el nombre de <u>transformaciones de simetría de norma</u> o de <u>simetría de Noether</u>(+).

(+) Como más adelante veremos éstas son un caso especial de las transformaciones de simetría de s-equivalencia.

Si las ecuaciones de movimiento en las nuevas variables han de tener la misma forma funcional que las antiguas, entonces el nuevo lagrangiano $\bar{L}$ definido por la ecuación (1.25) debe de estar relacionado con el antiguo de forma que(+):

$$\bar{L}(q,\dot{q},t) = L(q,\dot{q},t) + \frac{d}{dt}\Lambda(q,t) \tag{1.27}$$

Si en lugar de la transformación de coordenadas (1.22) consideramos una transformación infinitesimal tendremos:

$$\left.\begin{aligned} \bar{q}^i(\bar{t}) &= q^i(t) + \delta q^i(q^j, t) \\ \bar{t} &= t + \delta t(t) \end{aligned}\right\} \tag{1.28}$$

donde la transformación de las velocidades(++)

$$\dot{\bar{q}}^i(\bar{t}) = \dot{q}^i(t) + \delta \dot{q}^i(q^j, \dot{q}^j, t)$$

queda dada en términos de $\dot{q}^i$, δq^i y δt ya que

$$\dot{\bar{q}}^i(\bar{t}) = \frac{dt}{d\bar{t}}\frac{d}{dt}\left(q^i + \delta q^i\right) = \left[1 - (\delta t)^{\cdot}\right]\left[\dot{q}^i + (\delta q^i)^{\cdot}\right]$$

$$\Rightarrow \quad \delta \dot{q}^i \equiv \dot{\bar{q}}^i(\bar{t}) - \dot{q}^i(t) = (\delta q^i)^{\cdot} + \dot{q}^i(\delta t)^{\cdot} \underbrace{- (\delta t)^{\cdot}(\delta q^i)^{\cdot}}_{2^{\circ}\ \text{orden}}$$

$$\therefore \quad \delta \dot{q}^i = (\delta q^i)^{\cdot} - \dot{q}^i(\delta t)^{\cdot} \tag{1.29}$$

(+) De aquí el nombre de simetría de norma.

(++) Aquí $\dot{\bar{q}}^i(\bar{t}) \equiv \dfrac{d\bar{q}^i}{d\bar{t}}$

De (1.25) y la segunda de las (1.28) se tiene:

$$\bar{L}(\bar{q},\dot{\bar{q}},\bar{t}) = \frac{dt}{d\bar{t}} L(q,\dot{q},t) = \left[1-(\delta t)^{\cdot}\right] L(q,\dot{q},t)$$

Desarrollando $\bar{L}$ en serie de Taylor, y tomando en cuenta que

$$\frac{\partial \bar{L}}{\partial \bar{q}^i}\,\delta q^i \simeq \frac{\partial L}{\partial q^i}\,\delta q^i$$

y

$$\frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{\bar{q}}^i}\,\delta \dot{q}^i \simeq \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\,\delta \dot{q}^i$$

al despreciar términos de segundo orden se tiene:

$$\bar{L}(q,\dot{q},t) + \frac{\partial L}{\partial q^i}\,\delta q^i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\,\delta \dot{q}^i + \frac{\partial L}{\partial t}\,\delta t = L(q,\dot{q},t) - L(q,\dot{q},t)\,(\delta t)^{\cdot}$$

Así

$$\delta L \equiv L(q,\dot{q},t) - \bar{L}(q,\dot{q},t) = \frac{\partial L}{\partial q^i}\,\delta q^i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\,\delta \dot{q}^i + \frac{\partial L}{\partial t}\,\delta t + L\,(\delta t)^{\cdot}$$

Haciendo uso de (1.29), (1.12) y (1.13) se obtiene:

$$\boxed{\delta L = \frac{\partial L}{\partial q^i}\,\delta q^i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\,(\delta q^i)^{\cdot} + \frac{\partial L}{\partial t}\,\delta t - \mathcal{H}\,(\delta t)^{\cdot}} \qquad (1.30)$$

Este es el cambio funcional del lagrangiano L, producido por la transformación de coordenadas (1.28).

Si la transformación de coordenadas es de simetría de Noether, entonces se debe cumplir también la ecuación (1.27) para el cambio funcional de L. De este modo debemos tener

$$\delta L \equiv L(q,\dot{q},t) - \bar{L}(q,\dot{q},t) = -\,\frac{d\lambda(q,t)}{dt} \qquad (1.31)$$

Uniendo este resultado con (1.30) tenemos finalmente, que si la transformación es de simetría de Noether (de norma) se tiene

$$\boxed{\mu \equiv \delta L = \frac{\partial L}{\partial q^i}\delta q^i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}(\delta q^i)^{\cdot} + \frac{\partial L}{\partial t}\delta t - \mathcal{H}(\delta t)^{\cdot} = -\frac{d\lambda}{dt}} \qquad (1.32)$$

e) El teorema de Noether.

Si la transformación (1.28) es de simetría de Noether, tenemos de la ecuación (1.27) que:

$$L(\bar{q},\dot{\bar{q}},\bar{t})\, d\bar{t} = \left[\bar{L}(\bar{q},\dot{\bar{q}},\bar{t}) - \frac{d\lambda}{d\bar{t}}\right] d\bar{t}$$

sustituyendo (1.25) tenemos(+)

$$L(\bar{q},\dot{\bar{q}},\bar{t})\, d\bar{t} = \left[L(q,\dot{q},t) - \frac{d\lambda}{dt}\right] dt$$

integrando ambos miembros de esta ecuación se obtiene

$$\int_{\bar{t}_1}^{\bar{t}_2} L(\bar{q},\dot{\bar{q}},\bar{t})\, d\bar{t} = \int_{t_1}^{t_2} \left[L(q,\dot{q},t) - \frac{d\lambda}{dt}\right] dt$$

Sustituyendo este resultado en la ecuación (1.5) que define a la variación funcional de S se obtiene:

$$\delta S + \int_{t_1}^{t_2} \frac{d\lambda}{dt}\, dt = 0$$

haciendo uso de (1.11) y agrupando términos tenemos,

(+) $d\lambda/d\bar{t} \simeq d\lambda/dt$ al despreciar términos de órden mayor al primero.

$$\int_{t_1}^{t_2}\left[\frac{d}{dt}\left\{p_i\,\delta q^i-\mathcal{H}\,\delta t+\lambda\right\}-L_i\left(\delta q^i-\dot{q}^i\delta t\right)\right]dt=0$$

Esta igualdad es válida para todo t_1 y t_2 por lo que se debe tener que el integrando sea idénticamente cero, de este modo,

$$\frac{dI}{dt}=L_i\left(\delta q^i-\dot{q}^i\delta t\right) \tag{1.33}$$

donde

$$I(q,\dot{q},t)\equiv p_i\,\delta q^i-\mathcal{H}\,\delta t+\lambda \tag{1.34}$$

Si se cumplen las ecuaciones de movimiento se tiene que $L_i=0$ y de (1.33) obtenemos

$$\frac{dI}{dt}=0$$

de modo que I es una constante de movimiento.

Podemos entonces enunciar el teorema de Noether como sigue:

A toda transformación infinitesimal del tipo (1.28) que sea de simetría de norma (que cumpla con la ecuación (1.32)) podemos asociarle una constante de movimiento dada por (1.34).

2) Lagrangianos s-equivalentes y el teorema de las trazas.

Dos lagrangianos L y $\bar{L}$ pueden dar origen cada uno a ecuaciones de Euler-Lagrange distintas, esto es $L_i\neq\bar{L}_i$, y sin embargo es posible que los conjuntos de soluciones de estas ecuaciones sean iguales, de modo que ambos lagrangianos caracterizan al mismo sistema mecánico. De estos dos lagrangianos diremos que son s-equivalentes, ya que las soluciones de sus ecuaciones de Euler-Lagrange son las mismas.

Como ejemplo de dos lagrangianos s-equivalentes tomemos el problema de la partícula libre en una dimensión. El lagrangiano usual (con m=1) es

$$L = \frac{1}{2}\dot{q}^2 .$$

y su ecuación de Euler-Lagrange es

$$E_1 L = \ddot{q} = 0$$

cuya solución general está dada por

$$q = q_0 + \dot{q}_0 t$$

donde q_0 y $\dot{q}_0$ son la posición y velocidad iniciales respectivamente. El lagrangiano

$$\bar{L} = q\dot{q}^2 - \frac{1}{3}\dot{q}^3 t$$

tiene por ecuación de movimiento a

$$E_1\bar{L} = 2(q - \dot{q}t)\ddot{q} = 0$$

o sea

$$q - \dot{q}t = 0$$

y/o

$$\ddot{q} = 0$$

que también tiene por solución general a

$$q = q_0 + \dot{q}_0 t$$

a) Teorema de s-equivalencia.

La derivada lagrangiana de un lagrangiano L ;

$$L_r = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^r} - \frac{\partial L}{\partial q^r}$$

la podemos escribir de forma más explícita como

$$L_r(q^s, \dot{q}^s, \ddot{q}^s, t) = W_{rs}\ddot{q}^s + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^r \partial q^s}\dot{q}^s + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^r \partial t} - \frac{\partial L}{\partial q^r} \tag{1.35}$$

donde

$$W_{rs} = W_{sr} \equiv \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^r \partial \dot{q}^s} \tag{1.36}$$

Si

$$\det W_{rs} \neq 0 \tag{1.37}$$

diremos que el lagrangiano L es <u>no singular</u>(+) y entonces será posible despejar las aceleraciones $\ddot{q}^s$ para obtener las ecuaciones de movimiento en la forma

$$\ddot{q}^r = f^r(q^s, \dot{q}^s, t) \tag{1.38}$$

Dado dos lagrangianos L y $\bar{L}$ no singulares, diremos que $\bar{L}$ está subordinado a L si:

$$\{L_r = 0\} \Longrightarrow \{\bar{L}_s = 0\} \tag{1.39}$$

El teorema de s-equivalencia afirma entonces lo siguiente[8,9]:

Si $\bar{L}$ está subordinado a L entonces L está subordinado a $\bar{L}$, de modo que ambos lagrangianos son s-equivalentes, y entonces:

$$\boxed{\bar{L}_r = \Lambda_r{}^s(q, \dot{q}, t)\, L_s} \tag{1.40}$$

donde

$$\det \Lambda \neq 0$$

y las trazas de las potencias enteras de Λ son constantes de movimiento; así

$$\left.\frac{d}{dt} tr(\Lambda)^K\right|_{L_r=0} = 0 \qquad K = 1, 2, \ldots \tag{1.41}$$

(+) También se dirá que es regular ó no degenerado.

Para una demostración del teorema, consultar las ref. 8,9 . Más adelante cuando veamos la formulación de primer orden, daremos una demostración de (1.41) para lagrangianos de primer orden. Hay que señalar que las trazas de las distintas potencias de Λ no necesariamente son independientes unas de otras, y de hecho para una matriz de nxn como Λ hay un máximo de n trazas independientes debido al teorema de Cayley-Hamilton[17]. Por otra parte también puede suceder que las n primeras trazas no sean funcionalmente independientes ó que sólo sean constantes numéricas.

Si escribimos las ecuaciones de Euler-Lagrange de dos lagrangianos s-equivalentes L y $\bar{L}$ en la forma (1.35) tendremos, usando (1.40) que:

$$\overline{W}_{rs}\,\ddot{q}^s + \frac{\partial^2 \bar{L}}{\partial \dot{q}^r \partial q^s}\dot{q}^s + \frac{\partial^2 \bar{L}}{\partial \dot{q}^r \partial t} - \frac{\partial \bar{L}}{\partial q^r} = \Lambda_r^{\ s}\left[W_{st}\,\ddot{q}^t + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^s \partial q^t}\dot{q}^t + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^s \partial t} - \frac{\partial L}{\partial q^s}\right]$$

Esta igualdad debe ser válida para todos los valores de q, $\dot{q}$, $\ddot{q}$ y t ; por lo que podemos separar a los únicos términos que contienen aceleraciones, así:

$$\overline{W}_{rs}\,\ddot{q}^s = \Lambda_r^{\ s}\, W_{st}\,\ddot{q}^t$$

$$\overline{W}_{rs} = \Lambda_r^{\ t}\, W_{ts}$$

$$\boxed{\Lambda_r^{\ s} = \overline{W}_{rt}\, U^{ts}} \qquad (1.42)$$

donde U^{ts} es la matriz inversa de W_{rt} que sabemos que existe, ya que por hipótesis $\det W \neq 0$. Así:

$$W_{rt}\; U^{ts} = \delta_r^{\ s} \qquad (1.43)$$

b) Transformaciones de s-equivalencia.

Dados dos lagrangianos $L(q,\dot q,t)$ y $\overline{L}(q,\dot q,t)$ no singulares cualesquiera, siempre será posible tener:

$$\overline{L}(q,\dot q,t) = \rho L(q,\dot q,t) + \ell(q,\dot q,t) \qquad \rho \neq 0 \qquad (1.44)$$

donde $\ell(q,\dot q,t)$ es una función elegida de modo que la igualdad se lleve a cabo. Si los lagrangianos L y $\overline{L}$ son s-equivalentes, se tendrá que:

$$\ell_r = \overline{L}_r - \rho L_r = \Lambda_r^{\ s} L_s - \rho L_r$$

$$\therefore \quad \ell_r = \left(\Lambda_r^{\ s} - \rho\,\delta_r^{\ s}\right) L_s = \Omega_r^{\ s} L_s \qquad (1.45)$$

donde

$$\Omega_r^{\ s} \equiv \Lambda_r^{\ s} - \rho\,\delta_r^{\ s} \qquad (1.46)$$

y diremos que ℓ es un "lagrangianito" [9].

De la ecuación (1.45) vemos que ℓ está subordinado a L, esto es

$$\{L_r = 0\} \Longrightarrow \{\ell_s = 0\}$$

lo cual no implica que L sea subordinado a ℓ, ya que es posible que

$$\det \Omega = 0$$

Si

$$\det \Omega \neq 0 \tag{1.47}$$

entonces ℓ será un lagrangiano s-equivalente a L.

De lo anterior tenemos entonces que: Si L y $\bar{L}$ son s-equivalentes, entonces ℓ, definido por (1.44), está subordinado a ellos (es un lagrangianito) y diremos que la transformación (1.44) es de s-equivalencia.

Un caso particular de (1.44) es aquel en el que $\rho = 1$ y

$$\ell(q,\dot{q},t) = \frac{d}{dt}\lambda(q,t)$$

dando origen a una transformación de norma (ver sección I.1.c.). De (1.21) tendremos que

$$\ell_r \equiv 0 \tag{1.48}$$

lo que implica que las ecuaciones de Euler-Lagrange sean idénticas

$$\bar{L}_r \equiv L_r$$

3) Formulación de primer orden.

a) Lagrangianos de primer orden.

Consideremos las ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden de la forma:

$$\ddot{q}^i = F^i(q^k, \dot{q}^k, t) \tag{1.49}$$

Si hacemos el cambio de variables

$$\begin{aligned} x^i &= q^i \\ x^{i+n} &= \dot{q}^i \end{aligned} \tag{1.50}$$

obtenemos el sistema de 2n ecuaciones de primer orden equivalente al (1.49) dado por

$$\begin{aligned} \dot{x}^i &= x^{i+n} \\ \dot{x}^{i+n} &= F^i(x^i, x^{i+n}, t) \end{aligned} \tag{1.51}$$

que podemos escribir en forma abreviada como:

$$\dot{x}^a = f^a(x^b, t) \qquad a, b = 1, 2, \ldots, 2n \tag{1.52}$$

Nos interesaría ahora considerar lagrangianos tales que sus ecuaciones de Euler-Lagrange conduzcan a sistemas de ecuaciones diferenciales de primer orden similares al (1.52).

Un ejemplo lo proporciona el lagrangiano dado por:

$$\bar{L}(q^i, \dot{q}^i, p_i, t) = p_i \dot{q}^i - H(q^i, p_i, t) \tag{1.53}$$

3) Formulación de primer orden.

a) Lagrangianos de primer orden.

Consideremos las ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden de la forma:

$$\ddot{q}^i = F^i(q^k, \dot{q}^k, t) \tag{1.49}$$

Si hacemos el cambio de variables

$$\begin{aligned} x^i &= q^i \\ x^{i+n} &= \dot{q}^i \end{aligned} \tag{1.50}$$

obtenemos el sistema de 2n ecuaciones de primer orden equivalente al (1.49) dado por

$$\begin{aligned} \dot{x}^i &= x^{i+n} \\ \dot{x}^{i+n} &= F^i(x^i, x^{i+n}, t) \end{aligned} \tag{1.51}$$

que podemos escribir en forma abreviada como:

$$\dot{x}^a = f^a(x^b, t) \qquad a, b = 1, 2, \ldots, 2n \tag{1.52}$$

Nos interesaría ahora considerar lagrangianos tales que sus ecuaciones de Euler-Lagrange conduzcan a sistemas de ecuaciones diferenciales de primer orden similares al (1.52).

Un ejemplo lo proporciona el lagrangiano dado por:

$$L(q^i, \dot{q}^i, p_i, t) = p_i \dot{q}^i - H(q^i, p_i, t) \tag{1.53}$$

donde

$$\left.\begin{aligned} p_i &= \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \\ \mathcal{H}(q^i, p_i, t) &= p_i \dot{q}^i - L(q^i, \dot{q}^i, t) \end{aligned}\right\} \qquad (1.54)$$

cuyas coordenadas generalizadas son ahora q^i y p_i(+). Sus ecuaciones de Euler-Lagrange son:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial \bar{L}}{\partial q^i} = \dot{p}_i + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q^i} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{p}_i} - \frac{\partial \bar{L}}{\partial p_i} = -\dot{q}^i + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} = 0$$

O sea:

$$\left.\begin{aligned} \dot{p}_i &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q^i} \\ \dot{q}^i &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \end{aligned}\right\} \qquad (1.55)$$

que son las conocidas ecuaciones de Hamilton, y son 2n ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden en las variables q^i y p_i.

Para que las ecuaciones de Euler-Lagrange de un lagrangiano $L(x^a, \dot{x}^a, t)$ dadas por

$$L_a \equiv \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^a} - \frac{\partial L}{\partial x^a} = 0 \qquad (1.56)$$

(+) Es importante hacer notar que a diferencia de la transformación de coordenadas (1.50) donde los x^{i+n} son las velocidades $\dot{q}^i$, aquí las p_i no necesariamente son velocidades.

o sea

$$L_a = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^a \partial \dot{x}^b}\ddot{x}^b + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^a \partial x^b}\dot{x}^b + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^a \partial t} - \frac{\partial L}{\partial x^a} = 0 \qquad (1.57)$$

conduzcan a un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden de la forma (1.52) es necesario en primer lugar que:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^a \partial \dot{x}^b} = 0 \qquad (1.58)$$

para todo $\dot{x}^a$ y $\dot{x}^b$. Integrando esta ecuación se obtiene que el lagrangiano debe ser de la forma:

$$L(x^a, \dot{x}^a, t) = l_b(x^a, t)\dot{x}^b + l_o(x^a, t) \qquad (1.59)$$

esto es, debe ser lineal en las velocidades.

Sustituyendo (1.59) en (1.56) o (1.57) obtenemos para la derivada lagrangiana que:

$$L_a = \left(\frac{\partial l_a}{\partial x^b} - \frac{\partial l_b}{\partial x^a}\right)\dot{x}^b + \frac{\partial l_a}{\partial t} - \frac{\partial l_o}{\partial x^a} \qquad (1.60)$$

o sea:

$$L_a = \eta_{ab}\dot{x}^b + \eta_{ao} \qquad (1.61)$$

donde

$$\eta_{ab} \equiv \frac{\partial l_a}{\partial x^b} - \frac{\partial l_b}{\partial x^a} \qquad (1.62)$$

$$\eta_{ao} \equiv \frac{\partial l_a}{\partial t} - \frac{\partial l_o}{\partial x^a} \qquad (1.63)$$

Para que el sistema de ecuaciones

$$\eta_{ab}\dot{x}^{b} + \eta_{a0} = 0 \tag{1.64}$$

sea equivalente al sistema

$$\dot{x}^{a} = f^{a}(x^{b};t) \tag{1.65}$$

es necesario pedir que η_{ab} sea invertible, de modo que debemos pedir:

$$\det \eta_{ab} \neq 0 \tag{1.66}$$

Definiendo a η^{bc} como la matriz inversa de η_{ab} tenemos:

$$\eta_{ab}\eta^{bc} = \delta_{a}^{c} \tag{1.67}$$

Usando esta ecuación en (1.64) y sustituyendo en (1.65) tenemos

$$\eta^{ab}\eta_{b0} = -f^{a}(x^{c};t) \tag{1.68}$$

b) Problema inverso del cálculo de variaciones en primer orden.

El sistema de ecuaciones (1.68) es un sistema de ecuaciones diferenciales parciales para los $\ell_a(x^b;t)$ y $\ell_0(x^b;t)$. El problema de determinar las condiciones bajo las cuales (1.68) tiene soluciones, y sus soluciones mismas, recibe el nombre de problema inverso del cálculo de variaciones en primer orden(+). Se puede demostrar que (1.68) siempre tiene solución[6,18], la cual proporcio-

---

(+)El problema inverso en la formulación de segundo orden es más complicado ya que el lagrangiano puede no existir (ver ref. 6,7); de ahí el que utilicemos una formulación de primer orden.

na todos los lagrangianos s-equivalentes de primer orden (1.59) que dan origen a las ecuaciones de movimiento (1.52).

Hojman y Urrutia [6] mostraron una forma explícita de construir la solución general de (1.68) en términos de las 2n constantes de movimiento funcionalmente independientes que posee el sistema de ecuaciones

$$\dot{x}^a = f^a(x^b, t) \tag{1.69}$$

Con el objeto de simplificar la notación, vamos a definir que:

$$\left.\begin{aligned} x^0 &\equiv t \\ f^0 &\equiv 1 \end{aligned}\right\} \tag{1.70}$$

de modo que podemos escribir para las ecuaciones (1.69)

$$\dot{x}^\alpha = f^\alpha(x^\beta) \qquad \alpha, \beta = 0, 1, \ldots, 2n \tag{1.71}$$

De ahora en adelante, los índices griegos tomarán valores de cero a 2n y los latinos de uno a 2n.

Usando esta notación el lagrangiano (1.59) lo podemos escribir como

$$L = l_\mu(x^\nu)\dot{x}^\mu \tag{1.72}$$

y sus ecuaciones de Euler-Lagrange (1.60) como:

$$L_\alpha \equiv \eta_{\alpha\beta}\dot{x}^\beta = 0 \tag{1.73}$$

donde

$$\eta_{\alpha\beta} \equiv \frac{\partial l_\alpha}{\partial x^\beta} - \frac{\partial l_\beta}{\partial x^\alpha} \qquad (1.74)$$

Un cálculo directo muestra que

$$L_0 = -L_b \dot{x}^b \qquad (1.75)$$

de modo que en (1.73) sólo tenemos 2n ecuaciones independientes.

Debido al hecho de que $\eta_{\alpha\beta}$ es antisimétrica

$$\eta_{\alpha\beta} = -\eta_{\beta\alpha} \qquad (1.76)$$

y a que su dimensión es impar (2n+1), tenemos que

$$\det \eta_{\alpha\beta} = 0 \qquad (1.77)$$

pero por la ecuación (1.66) sabemos que

$$\det \eta_{ab} \neq 0 \qquad (1.78)$$

de modo que el rango de $\eta_{\alpha\beta}$ es 2n. De (1.73) se tiene entonces que los vectores con valor propio cero de $\eta_{\alpha\beta}$ son proporcionales a[6] f^α. Así:

$$\eta_{\alpha\beta} A^{\beta} = 0 \Longleftrightarrow A^{\beta} = a(x^{\nu}) f^{\beta} \qquad (1.79)$$

con $a(x^{\nu})$ una función arbitraria.

Si invertimos las soluciones del sistema de ecuaciones diferenciales (1.71),

$$x^{a} = x^{a}(c^{b}, t) \qquad (1.80)$$

obtenemos un sistema de 2n constantes de movimiento funcionalmente independientes; así

$$c^{a} = c^{a}(x^{b}, t) \qquad (1.81)$$

y

$$\det \frac{\partial c^{a}}{\partial x^{b}} = \det c^{a}_{,b} \neq 0 \qquad (1.82)$$

Donde las c^{a} cumplen con la condición:

$$\dot{c}^{a}\Big|_{\dot{x}^{\nu} = f^{\nu}} = c^{a}_{,\mu} f^{\mu} = 0 \qquad (1.83)$$

De las ecuaciones(1.81) y (1.82) vemos que podemos considerar a las c^{a} como un nuevo sistema de coordenadas [6,7].

De la ecuación (1.25) con $\bar{t} = t$ tenemos entonces:

$$\tilde{L}(c^{a}, \dot{c}^{a}, t) = L(x^{b}, \dot{x}^{b}, t)$$

y de (1.72) tenemos

$$\tilde{L}(C^{\alpha}, \dot{C}^{\alpha}) = \tilde{l}_{\mu}(C^{\alpha})\, \dot{C}^{\mu} \tag{1.84}$$

donde

$$\tilde{l}_{\mu}(C^{\alpha}) = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial C^{\mu}}\, l_{\nu}(x^{\alpha}) \tag{1.85}$$

y se ha definido

$$C^{0} \equiv x^{0} = t \tag{1.86}$$

Es importante notar que en vista de (1.82) se tiene

$$\det \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial C^{\beta}} = \det \frac{\partial x^{a}}{\partial C^{b}} \neq 0 \tag{1.87}$$

de modo que es posible invertir la matriz $\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial C^{\beta}}$ para obtener $C^{\alpha}_{,\beta}$ donde es claro que

$$C^{\alpha}_{,\mu} \frac{\partial x^{\mu}}{\partial C^{\beta}} = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial C^{\mu}}\, C^{\mu}_{,\beta} = \delta^{\alpha}_{\beta} \tag{1.88}$$

La derivada lagrangiana de $\tilde{L}$ está dada por

$$\tilde{L}_{\alpha} = \xi_{\alpha\beta}\, \dot{C}^{\beta} \tag{1.89}$$

donde

$$\xi_{\alpha\beta} \doteq \frac{\partial \tilde{l}_{\alpha}}{\partial C^{\beta}} - \frac{\partial \tilde{l}_{\beta}}{\partial C^{\alpha}} \tag{1.90}$$

y en vista de (1.26) se tiene

$$\eta_{\alpha\beta}(z^\alpha) = C^\gamma_{,\alpha} C^\delta_{,\beta}\, \xi_{\gamma\delta}(C^\mu) \tag{1.91}$$

Vamos a ver ahora las condiciones que debe cumplir el lagrangiano (1.84) para dar origen a las ecuaciones (1.71). En primer lugar es posible hacer una transformación de norma (ec. (1.20)) en el lagrangiano (1.84); así

$$\tilde{L} \longrightarrow \tilde{L} - \frac{d\lambda(C^\alpha)}{dt} = \tilde{l}_\alpha \dot{C}^\alpha - \frac{\partial\lambda}{\partial C^\alpha}\dot{C}^\alpha =$$

$$= \left(\tilde{l}_a - \frac{\partial\lambda}{\partial C^a}\right)\dot{C}^a + \tilde{l}_0 - \frac{\partial\lambda}{\partial t}$$

y podemos elegir λ de modo que

$$\frac{\partial\lambda}{\partial t} = \tilde{l}_0$$

para obtener

$$\tilde{L} = \tilde{l}_a(C^\mu)\,\dot{C}^a \tag{1.92}$$

donde se ha hecho abuso del lenguaje tomando

$$\tilde{l}_a - \frac{\partial\lambda}{\partial C^a} \longrightarrow \tilde{l}_a$$

Por otro lado debemos pedir que si se cumplen las ecuaciones de movimiento (1.71), lo cual equivale a pedir que

$$\dot{C}^a = 0 \tag{1.93}$$

se tenga

$$\tilde{L}_a = 0$$

Haciendo uso de (1.89) tenemos:

$$\tilde{L}_a = \xi_{ab}\dot{c}^b + \xi_{a0} = 0$$

y pidiendo que se cumpla (1.93) se obtiene

$$\xi_{a0} = \frac{\partial \tilde{l}_a}{\partial c^0} = \frac{\partial \tilde{l}_a}{\partial t} = 0 \tag{1.94}$$

de modo que los $\tilde{l}_a$ no son funciones explícitas del tiempo;

$$\tilde{l}_a = \tilde{l}_a(c^b) \tag{1.95}$$

con lo que se obtiene

$$\boxed{\tilde{L}(c^a, \dot{c}^a) = \tilde{l}_b(c^a)\,\dot{c}^b} \tag{1.96}$$

con ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\tilde{L}_a = \xi_{ab}\dot{c}^b = 0 \tag{1.97}$$

donde se ha hecho uso de (1.94).

Finalmente tenemos que pedir que si se cumple (1.97) se cumpla (1.71) o, lo que es equivalente

$$\dot{c}^b = 0$$

esto claramente impone la restricción sobre los $\tilde{l}_a(c^b)$, de que sean tales que:

$$\det \xi_{ab} \equiv \det\left(\frac{\partial \tilde{l}_a}{\partial c^b} - \frac{\partial \tilde{l}_b}{\partial c^a}\right) \neq 0 \qquad (1.98)$$

Esta restricción se puede implementar de un número infinito de maneras como se muestra con detalle en las ref. 6 y 7.

De este modo, hemos visto, que dado un sistema de ecuaciones de movimiento de primer orden

$$\dot{x}^\alpha = f^\alpha(x^\beta) \qquad (1.71)$$

existen infinitos lagrangianos dados en términos de las constantes de movimiento por (1.96) con la restricción sobre los $\tilde{l}_a$ de que cumplan con (1.98). Debido a esta ventaja en la formulación de primer orden sobre la de segundo orden — en la cual dado un sistema de ecuaciones el lagrangiano puede ser único o incluso no existir[6,7] — en lo que resta de este trabajo sólo vamos a trabajar con sistemas mecánicos descritos por ecuaciones diferenciales de primer orden de la forma (1.71).

c) Teorema de las trazas en primer orden.[5,6]

Consideremos dos lagrangianos L y $\bar{L}$ de primer orden dados por:

$$\left.\begin{aligned} L &= l_a(x^b, t)\dot{x}^a + l_0(x^b, t) \\ \bar{L} &= \bar{l}_a(x^b, t)\dot{x}^a + \bar{l}_0(x^b, t) \end{aligned}\right\} \qquad (1.99)$$

Si estos lagrangianos son s-equivalentes, sus derivadas lagrangianas estarán relacionadas por (ver ec. (1.40)):

$$\bar{L}_a = \Lambda_a^{\ b} L_b \tag{1.100}$$

o, de forma más explícita(+)

$$\bar{\eta}_{ab} \dot{x}^b + \bar{\eta}_{a0} = \Lambda_a^{\ c} \left[\eta_{cb} \dot{x}^b + \eta_{c0} \right]$$

Igualando por separado a los únicos términos que contienen las velocidades $\dot{x}^b$ tenemos:

$$\bar{\eta}_{ab} = \Lambda_a^{\ c} \eta_{cb}$$

y por las ecuaciones (1.66) y (1.67) se obtiene que

$$\boxed{\Lambda_a^{\ b} = \bar{\eta}_{ac} \eta^{cb}} \tag{1.101}$$

o en notación matricial

$$\Lambda = \bar{\eta} \eta^{-1} \tag{1.102}$$

Haciendo una transformación al sistema de coordenadas de las constantes de movimiento (1.81), tenemos por (1.91) y (1.94) que:

$$\bar{\eta}_{ab} = C^a_{\ ,a} C^d_{\ ,b} \bar{\xi}_{cd}(C^m) \tag{1.103}$$

(+) Ver ecuaciones (1.73) y (1.74) ó (1.61), (1.62) y (1.63) y

$$\eta_{ab} = C^{c}_{,a} C^{d}_{,b}\, \xi_{cd}(C^{m}) \tag{1.104}$$

Usando notación matricial tenemos que

$$\bar{\eta} = C\, \bar{\xi}\, C^{t} \tag{1.105}$$

$$\eta = C\, \xi\, C^{t} \tag{1.106}$$

que al sustituir en (1.102) nos da:

$$\Lambda = C\, \bar{\xi}\, C^{t} \left(C\, \xi\, C^{t}\right)^{-1}$$

$$\Lambda = C\, \bar{\xi}\, C^{t} \left(C^{-1}\right)^{t} \xi^{-1} C^{-1}$$

$$\Lambda = C\, \bar{\xi}\, \xi^{-1} C^{-1}$$

elevando a la potencia k

$$\Lambda^{K} = C \left(\bar{\xi}\, \xi^{-1}\right)^{K} C^{-1}$$

y, finalmente tomando la traza se obtiene;

$$tr\, \Lambda^{K} = tr\left[C\left(\bar{\xi}\, \xi^{-1}\right)^{K} C^{-1}\right] = tr\left[C^{-1} C \left(\bar{\xi}\, \xi^{-1}\right)^{K}\right]$$

$$tr\, \Lambda^{K} = tr\left(\bar{\xi}\, \xi^{-1}\right)^{K} \tag{1.107}$$

que es sólo función de constantes de movimiento, de este modo:

$$\frac{d}{dt} tr \Lambda^{K} \Big|_{L_a = 0} = 0 \qquad K = 1, 2, \ldots \tag{1.108}$$

que coincide con (1.41)(+).

d) Teorema inverso de Noether.

Dada una constante de movimiento de un sistema descrito por un lagrangiano de primer orden, nos interesaría conocer (en caso de que exista) la transformación de simetría de Noether (de norma) dada por las funciones δx^a y δt .

Las transformaciones de simetría de norma, sabemos que generan constantes de movimiento dadas por (1.34) y que tiene por ecuación de movimiento a (1.33), así, en la notación de primer orden tenemos

$$\frac{dI}{dt} = L_a \left(\delta x^a - \dot{x}^a \delta t \right)$$

o sea

$$\frac{\partial I}{\partial x^b} \dot{x}^b + \frac{\partial I}{\partial t} = \left[\eta_{ab} \dot{x}^b + \eta_{a0} \right] \left[\delta x^a - \dot{x}^a \delta t \right]$$

Por sustitución directa se puede ver que esta ecuación tiene solución para(++)

$$\delta x^a = -\eta^{ab} \frac{\partial I}{\partial x^b} + f^a \delta t \tag{1.109}$$

(+) Es de hacer notar que dado que aquí en primer orden es una matriz de 2nx2n el número máximo de trazas funcionalmente independientes es de 2n.

(++) En las referencias 2 y 5 se demuestra esto para el caso particular en que $\delta t = 0$.

donde δt es una función arbitraria, η^{ab} es la inversa de η_{ab} que suponemos que existe (ver ec. (1.66)) y $f^{a}(x^{b}, t)$ está definido por (1.71).

De este modo vemos que toda constante de movimiento tiene asociada una trasformación de simetría de norma dada por (1.109) con δt arbitrario.

4) Simetrías de s-equivalencia y constantes de movimiento.

En la sección 1.d de este capítulo vimos que para una transformación infinitesimal de coordenadas(+)

$$\left.\begin{aligned} \bar{x}^{a} &= x^{a} + \delta x^{a} \\ \bar{t} &= t + \delta t \end{aligned}\right\} \tag{1.110}$$

el cambio en la forma funcional del lagrangiano está dado por:

$$\mu \equiv \delta L \equiv L(x^{a}, \dot{x}^{a}, t) - \bar{L}(x^{a}, \dot{x}^{a}, t)$$

$$\mu = \frac{\partial L}{\partial x^{a}} \delta x^{a} + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^{a}} (\delta x^{a})^{\cdot} + \frac{\partial L}{\partial t} \delta t - H (\delta t)^{\cdot} \tag{1.111}$$

Si (1.110) es una transformación de simetría de Noether

$$\mu = -\frac{d}{dt} \lambda(x^{a}, t) \tag{1.112}$$

y entonces las ecuaciones de Euler-Lagrange del lagrangiano $\bar{L}$ ($\bar{L} = L + d\lambda/dt$) serán las mismas que las de L :

(+) En este caso estamos trabajando en la formulación de primer orden.

El concepto de s-equivalencia introducido en la sección 2 de este capítulo nos permite extender el concepto de transformación de simetría en la teoría lagrangiana, y considerar transformaciones infinitesimales de la forma (1.110), bajo las cuales pidamos, no invariancia de las ecuaciones de Euler-Lagrange (que se obtienen de $\mathcal{L}$); mas sí invariancia en el conjunto de soluciones obtenidas de éstas [4,5]. Para que esto suceda, (1.110) debe de transformar al lagrangiano $\mathcal{L}$ de modo que μ dado por (1.111) sea un lagrangianito [9] y por (1.45) tendremos:

$$E_a \mu \Big|_{L_b=0} \equiv \mu_a \Big|_{L_b=0} = 0 \qquad (1.113)$$

O lo que es equivalente

$$\mu_a \Big|_{\dot{x}^b = f^b} = 0 \qquad (1.114)$$

donde

$$\dot{x}^a = f^a(x^b; t) \qquad (1.115)$$

son las ecuaciones de movimiento. Y diremos que la transformación de coordenadas (1.110) es de simetría de s-equivalencia.

Si la transformación de coordenadas (1.110) es de simetría de Noether se cumplirá la ecuación (1.112), y debido a (1.21) o (1.48):

$$\mu_a \equiv 0 \qquad (1.116)$$

sin necesidad de que se cumplan las ecuaciones de movimiento (1.115).

De este modo, podemos considerar a las simetrías de Noether como un caso particular de las simetrías de s-equivalencia: aquél en el cual el lagrangianito μ resulta ser una derivada total de una función de las coordenadas y el tiempo.

Debido al teorema de las trazas (ec. (1.108)), a la transformación de simetría de s-equivalencia podemos asociarle las constantes de movimiento dadas por:

$$\operatorname{tr} \Omega^{K} \qquad K=1,2,\ldots \tag{1.117}$$

donde (ver ec. (1.45) y (1.46))

$$\left.\begin{aligned} \mu_a &= \Omega_a^{\ b} L_b \\ \Omega_a^{\ b} &= \Lambda_a^{\ b} - \rho\, \delta_a^{\ b} \end{aligned}\right\} \tag{1.118}$$

que como ya hemos dicho no necesariamente son todas funcionalmente independientes e incluso pueden resultar ser constantes numéricas.

Además de las (1.117) se puede obtener otra constante de movimiento dada por(+)

$$I(x^a, t) = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^a}\,\delta x^a - H\,\delta t + \lambda \tag{1.119}$$

donde

$$H = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^a}\,\dot{x}^a - L$$

(+) Para una demostración completa de lo siguiente ver ref. 5.

y $\lambda(x^a;t)$ satisface a la ecuación diferencial:

$$\frac{\partial \lambda}{\partial x^a} f^a + \frac{\partial \lambda}{\partial t} + \mu \Big|_{\dot{x}^a = f^a} = 0 \qquad (1.120)$$

Así, hemos visto que dada una transformación de coordenadas (1.110) que sea de simetría de s-equivalencia - o sea, que μ dado por (1.111) cumpla con (1.114) - podemos asociarle las constantes de movimiento dadas por (1.117) y (1.119).

II.- SIMETRIAS DE LAS ECUACIONES DE MOVIMIENTO.

Consideremos el sistema de ecuaciones de movimiento

$$\dot{x}^\alpha = f^\alpha(x^\beta) \qquad \alpha,\beta = 0,1,\ldots,2n \tag{2.1}$$

donde

$$\left.\begin{array}{l} x^0 \equiv t \\ f^0 \equiv 1 \end{array}\right\} \tag{2.2}$$

y consideremos la transformación infinitesimal de coordenadas(+)

$$\bar{x}^\alpha = x^\alpha + g^\alpha(x^\beta) \tag{2.3}$$

Nos interesa conocer cuáles son las condiciones de invariancia de las ecuaciones (2.1) bajo esta transformación, esto es, qué condiciones deben cumplir los g^α para que las nuevas coordenadas $\bar{x}^\alpha$ también sean soluciones de las ecuaciones (2.1), esto es:

$$\frac{d\bar{x}^\alpha}{d\bar{t}} = f^\alpha(\bar{x}^\beta) \tag{2.4}$$

Cuando esto suceda diremos que (2.3) es una transformación de

---

(+) Se está haciendo un cambio de notación en el que $g^\alpha \equiv \delta x^\alpha$.

simetría de las ecuaciones de movimiento [3].

De (2.4) tenemos

$$\frac{d\bar{x}^{\alpha}}{d\bar{t}} = \frac{d\bar{x}^{\alpha}}{dt}\frac{dt}{d\bar{t}} = f^{\alpha}(\bar{x}^{\beta}) \tag{2.5}$$

usando (2.3) y desarrollando f^{α} en serie de Taylor se obtiene:

$$\dot{x}^{\alpha} + \dot{g}^{\alpha} = (1 + \dot{g}^{0})\left(f^{\alpha}(x^{\beta}) + f^{\alpha}_{,\beta}\, g^{\beta}\right)$$

desarrollando el producto se tiene

$$\dot{x}^{\alpha} + g^{\alpha}_{,\beta}\,\dot{x}^{\beta} = f^{\alpha} + \dot{g}^{0} f^{\alpha} + f^{\alpha}_{,\beta}\, g^{\beta}$$

donde sólo se han conservado términos de primer orden. Finalmente, sustituyendo las ecuaciones (2.1) se obtiene:

$$\boxed{g^{\alpha}_{,\beta} f^{\beta} - f^{\alpha}_{,\beta}\, g^{\beta} = \dot{g}^{0} f^{\alpha}} \tag{2.6}$$

que son las ecuaciones que proporcionan todas las transformaciones de simetría de las ecuaciones de movimiento (2.1) [3].

Es importante hacer dos observaciones en torno a las $2n + 1$ ecuaciones (2.6). La primera es que la componente g^{0} de la transformación de coordenadas es completamente arbitraria, ya que tomando $\alpha = 0$ en (2.6) tenemos

$$g^{0}_{,\beta} f^{\beta} - f^{0}_{,\beta}\, g^{\beta} = \dot{g}^{0} f^{0}$$

y por (2.2) se tiene $f^{0}_{,\beta} = 0$, de modo que

$$g^{0}_{,\beta} f^{\beta} \equiv \dot{g}^{0}$$

que es una identidad. Como vemos, esto tiene su origen en que en las 2n + 1 ecuaciones de movimiento (2.1) también tenemos una identidad $\left(f^{0} \equiv 1\right)$. La segunda observación, es que la transformación de coordenadas dada por

$$g^{\alpha} = \lambda(x^{\beta}) f^{\alpha} \tag{2.7}$$

con λ una función arbitraria, es una simetría de las ecuaciones de movimiento. En efecto, sustituyendo (2.7) en (2.6) tenemos

$$\frac{\partial \lambda}{\partial x^{\beta}} f^{\beta} f^{\alpha} + \lambda f^{\alpha}_{,\beta} f^{\beta} - \lambda f^{\alpha}_{,\beta} f^{\beta} = \dot{g}^{0} f^{\alpha} \equiv (\lambda f^{0})^{\cdot} f^{\alpha} = \dot{\lambda} f^{\alpha}$$

$$\Longrightarrow \frac{\partial \lambda}{\partial x^{\beta}} f^{\beta} f^{\alpha} \equiv \dot{\lambda} f^{\alpha}$$

que es una identidad. Puesto que las ecuaciones (2.6) son lineales, tenemos que si g^{α} es una solución de ellas entonces

$$\tilde{g}^{\alpha} \equiv g^{\alpha} - g^{0} f^{\alpha} \tag{2.8}$$

también será solución de ellas; con la particularidad de que

$$\tilde{g}^{0} = g^{0} - g^{0} f^{0} \equiv 0 \tag{2.9}$$

Así, vemos que es trivial construir una solución de (2.6) cuya componente cero se anule.

De (2.8) y (2.6) vemos que:

$$\tilde{g}^{\alpha}_{,\beta}\, f^{\beta} - f^{\alpha}_{,\beta}\, \tilde{g}^{\beta} = 0 \qquad (2.10)$$

III.- SIMETRIAS DE S-EQUIVALENCIA Y SIMETRIAS DE LAS ECUACIONES DE MOVIMIENTO.

1) Equivalencia entre las simetrías de s-equivalencia y las simetrías de las ecuaciones de movimiento.

Consideremos la transformación de coordenadas

$$\bar{x}^{\alpha} = x^{\alpha} + g^{\alpha}(x^{\beta}) \qquad \alpha,\beta = 0,1,\dots,2n \tag{3.1}$$

y el lagrangiano de primer orden

$$L(x^{\alpha}, \dot{x}^{\alpha}) = \ell_{\mu}(x^{\alpha})\, \dot{x}^{\mu} \tag{3.2}$$

Su cambio funcional debido a (3.1) está dado por (ver ec. (1.30)):

$$\mu = \frac{\partial L}{\partial x^{a}} g^{a} + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^{a}} \dot{g}^{a} + \frac{\partial L}{\partial t} g^{0} - \mathcal{H}\, \dot{g}^{0}$$

o sea

$$\mu = \frac{\partial L}{\partial x^{a}} g^{a} + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^{a}} g^{a}_{,\beta}\, \dot{x}^{\beta} + \frac{\partial L}{\partial t} g^{0} - \mathcal{H}\, g^{0}_{,\beta}\, \dot{x}^{\beta} \tag{3.3}$$

donde

$$\mathcal{H} = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^{a}} \dot{x}^{a} - L$$

Usando (3.2) tenemos

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x^\alpha} &= l_{\beta,\alpha}\,\dot{x}^\beta \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha} &= l_\alpha \\ \mathcal{H} &= -l_0 \end{aligned}\right\} \tag{3.4}$$

y sustituyendo en (3.3) se obtiene:

$$\mu = \left(l_{\beta,\alpha}\, g^\alpha + l_\alpha\, g^\alpha_{,\beta}\right)\dot{x}^\beta \tag{3.5}$$

Sea

$$\dot{x}^\alpha = f^\alpha(x^\beta) \tag{3.6}$$

el sistema de ecuaciones de movimiento del sistema mecánico. La derivada lagrangiana de (3.2) está dada por:

$$L_\alpha = \eta_{\alpha\beta}\,\dot{x}^\beta \tag{3.7}$$

donde

$$\eta_{\alpha\beta} = l_{\alpha,\beta} - l_{\beta,\alpha} \tag{3.8}$$

y si sustituimos en ella a las ecuaciones de movimiento (3.6) se tiene

$$\eta_{\alpha\beta}\, f^\beta \equiv 0 \tag{3.9}$$

La derivada lagrangiana de μ está dada (usando la ec. (3.5)) por:

$$\mu_\alpha = \tilde{\eta}_{\alpha\beta}\, \dot{x}^\beta \tag{3.10}$$

donde

$$\tilde{\eta}_{\alpha\beta} \equiv \tilde{l}_{\alpha,\beta} - \tilde{l}_{\beta,\alpha} . \tag{3.11}$$

y

$$\tilde{l}_\alpha \equiv l_{\alpha,\gamma}\, g^\gamma + l_\gamma\, g^\gamma_{,\alpha} \tag{3.12}$$

Haciendo explícitamente los cálculos tenemos:

$$\tilde{\eta}_{\alpha\beta} = l_{\alpha,\gamma\beta}\, g^\gamma + l_{\alpha,\gamma}\, g^\gamma_{,\beta} + l_{\gamma,\beta}\, g^\gamma_{,\alpha} + l_\gamma\, g^\gamma_{,\alpha\beta} -$$

$$- l_{\beta,\gamma\alpha}\, g^\gamma - l_{\beta,\gamma}\, g^\gamma_{,\alpha} - l_{\gamma,\alpha}\, g^\gamma_{,\beta} - l_\gamma\, g^\gamma_{,\beta\alpha}$$

$$\Longrightarrow \tilde{\eta}_{\alpha\beta} = (l_{\alpha,\beta} - l_{\beta,\alpha})_{,\gamma}\, g^\gamma + (l_{\gamma,\beta} - l_{\beta,\gamma})\, g^\gamma_{,\alpha} + (l_{\alpha,\gamma} - l_{\gamma,\alpha})\, g^\gamma_{,\beta}$$

y usando (3.8) se obtiene

$$\tilde{\eta}_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta,\gamma}\, g^\gamma + \eta_{\gamma\beta}\, g^\gamma_{,\alpha} + \eta_{\alpha\gamma}\, g^\gamma_{,\beta}$$

ó

$$\tilde{\eta}_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta,\gamma}\, g^\gamma + \eta_{\alpha\gamma}\, g^\gamma_{,\beta} - \eta_{\beta\gamma}\, g^\gamma_{,\alpha} \tag{3.13}$$

donde se ha hecho uso de la antisimetría de $\eta_{\alpha\beta}$. Sustituyendo en (3.10) tenemos para la derivada lagrangiana de μ :

$$\boxed{\mu_{\alpha} = \left(\eta_{\alpha\beta,\gamma}\, g^{\gamma} + \eta_{\alpha\gamma}\, g^{\gamma} - \eta_{\beta\gamma}\, g^{\gamma}_{,\alpha}\right) \dot{x}^{\beta}} \tag{3.14}$$

Si evaluamos esta derivada cuando se cumplen las ecuaciones de movimiento (3.6) tenemos

$$\begin{aligned} \mu_{\alpha}\Big|_{\dot{x}^{\rho}=f^{\rho}} &= \left(\eta_{\alpha\beta,\gamma}\, g^{\gamma} + \eta_{\alpha\gamma}\, g^{\gamma}_{,\beta} - \eta_{\beta\gamma}\, g^{\gamma}_{,\alpha}\right) f^{\beta} \\ &= \left(\eta_{\alpha\beta} f^{\beta}\right)_{,\gamma} g^{\gamma} - \eta_{\alpha\beta}\, f^{\beta}_{,\gamma}\, g^{\gamma} + \eta_{\alpha\gamma}\, g^{\gamma}_{,\beta}\, f^{\beta} + \eta_{\gamma\beta}\, f^{\beta} g^{\gamma}_{,\alpha} \end{aligned}$$

Haciendo uso de (3.9) vemos que el primer y cuarto términos se anulan idénticamente, por lo que tenemos:

$$\mu_{\alpha}\Big|_{\dot{x}^{\rho}=f^{\rho}} = \eta_{\alpha\beta}\left(g^{\beta}_{,\gamma} f^{\gamma} - f^{\beta}_{,\gamma}\, g^{\gamma}\right) \tag{3.15}$$

Si la transformación de coordenadas (3.1) es de simetría de s-equivalencia, entonces por la ecuación (1.114) se tiene

$$\eta_{\alpha\beta}\left(g^{\beta}_{,\gamma} f^{\gamma} - f^{\beta}_{,\gamma}\, g^{\gamma}\right) = 0 \tag{3.16}$$

y el vector

$$g^{\beta}_{,\gamma} f^{\gamma} - f^{\beta}_{,\gamma}\, g^{\gamma}$$

resulta ser vector propio con valor propio cero de la matriz $\eta_{\alpha\beta}$. Por (1.79) tenemos entonces que

$$\boxed{g^{\alpha}_{,\beta} f^{\beta} - f^{\alpha}_{,\beta} g^{\beta} = \lambda f^{\alpha}} \tag{3.17}$$

que coincide con la ecuación (2.6) donde $\lambda = \dot{g}^{o}$ es una función arbitraria de x^{α}, y por lo tanto la transformación de coordenadas (3.1) resulta ser una simetría de las ecuaciones de movimiento (3.6).

Si por el contrario, suponemos que (3.1) es una simetría de las ecuaciones de movimiento (3.6) se tendrá que las g^{α} satisfacen a la ecuación (3.17); sustituyendo en (3.15) y usando (3.9) tenemos:

$$\mu_{a}\Big|_{\dot{x}^{\beta}=f^{\beta}} = \eta_{a\beta}\lambda f^{\beta} = \lambda \eta_{\alpha\beta} f^{\beta} \equiv 0$$

por lo que μ resulta ser un lagrangianito y por ello tenemos que (3.1) es una simetría de s-equivalencia.

Con esto hemos probado que:

La transformación de coordenadas

$$\bar{x}^{\alpha} = x^{\alpha} + g^{\alpha}(x^{\beta})$$

es una transformación de simetría de s-equivalencia si y sólo si es una transformación de simetría de las ecuaciones de movimiento.

2) Corolario.

Consideremos la transformación de coordenadas generada por

$$g^{\alpha} = \delta^{\alpha}_{\nu} \tag{3.18}$$

donde $\nu = 0, 1, \ldots, 2n$ es un índice fijo. Si sustituimos en las ecuaciones (3.17) obtenemos:

$$f^{\alpha}_{,\nu} = 0 \tag{3.19}$$

Que es la condición que debemos de pedirle a las ecuaciones de movimiento para que g^{α} dado por (3.18) sea una simetría de las ecuaciones de movimiento. Si esto sucede, por lo demostrado en la sección anterior, (3.18) será también una simetría de s-equivalencia, y por (3.3):

$$\mu = \frac{\partial L}{\partial x^{\nu}} \tag{3.20}$$

será un lagrangianito.

De este modo tenemos que: Si

$$\frac{\partial f^{\alpha}}{\partial x^{\nu}} = 0$$

para algún $\nu = 0, 1, \ldots, 2n$, entonces

$$\mu = \frac{\partial L}{\partial x^{\nu}}$$

es un lagrangianito. Y usando el teorema de las trazas (ec. (1.108)) podemos encontrar, en principio, constantes de movimiento del sistema mecánico.

3) Simetrías y constantes de movimiento.

Vamos a mostrar dos formas de construir constantes de movimiento mediante el uso de transformaciones de simetría de las ecuaciones de movimiento.

i) Si g^{α}_{1} y g^{α}_{2} son dos simetrías de las ecuaciones de movimiento, entonces la cantidad

$$K_{12} \equiv \eta_{\alpha\beta}\, g^{\alpha}_{1}\, g^{\beta}_{2} \tag{3.21}$$

es una constante de movimiento.

Demostración:

Escribamos las ecuaciones (2.6) en la forma

$$\dot{g}^{\alpha} = f^{\alpha}_{,\beta}\, g^{\beta} + \dot{g}^{0} f^{\alpha} \tag{3.22}$$

y notemos que la matriz

$$\eta_{\alpha\beta} \equiv l_{\alpha,\beta} - l_{\beta,\alpha} \tag{3.23}$$

satisface la identidad de Jacobi:

$$\eta_{\alpha\beta,\gamma} + \eta_{\beta\gamma,\alpha} + \eta_{\gamma\alpha,\beta} = 0 \tag{3.24}$$

como se puede ver por sustitución directa de (3.23) en (3.24).

Tomemos la derivada total respecto al tiempo de (3.21) cuando se cumplen las ecuaciones de movimiento (ecs. (3.6)):

$$\left.\frac{dK_{12}}{dt}\right|_{\dot{x}^\alpha=f^\alpha}=\eta_{\alpha\beta,\gamma}\,f^\gamma g_1^\alpha g_2^\beta+\eta_{\alpha\beta}\,\dot{g}_1^\alpha g_2^\beta+\eta_{\alpha\beta}\,g_1^\alpha \dot{g}_2^\beta$$

usando (3.22) y (3.24) tenemos

$$\left.\dot{K}_{12}\right|_{\dot{x}^\alpha=f^\alpha}=\left[\eta_{\gamma\beta,\alpha}+\eta_{\alpha\gamma,\beta}\right]f^\gamma g_1^\alpha g_2^\beta+\eta_{\alpha\beta}\left[f^\alpha_{,\gamma}\,g_1^\gamma+\dot{\overset{\circ}{g}}_1 f^\alpha\right]g_2^\beta+$$
$$+\eta_{\alpha\beta}\left[f^\beta_{,\gamma}\,g_2^\gamma+\dot{\overset{\circ}{g}}_2 f^\beta\right]g_1^\alpha$$

$$\left.\dot{K}_{12}\right|_{\dot{x}^\alpha=f^\alpha}=\left[\eta_{\gamma\beta,\alpha}+\eta_{\alpha\gamma,\beta}\right]f^\gamma g_1^\alpha g_2^\beta+\left[\eta_{\gamma\beta}\,f^\gamma_{,\alpha}+\eta_{\alpha\gamma}\,f^\gamma_{,\beta}\right]g_1^\alpha g_2^\beta+$$
$$+\eta_{\alpha\beta}\,f^\alpha\,\dot{\overset{\circ}{g}}_1\,g_2^\beta+\eta_{\alpha\beta}\,f^\beta\,\dot{\overset{\circ}{g}}_2\,g_1^\alpha$$

Debido a (3.9) los dos últimos términos se anulan y agrupando términos se tiene:

$$\left.\dot{K}_{12}\right|_{\dot{x}^\alpha=f^\alpha}=\left[\eta_{\gamma\beta,\alpha}f^\gamma+\eta_{\gamma\beta}\,f^\gamma_{,\alpha}+\eta_{\alpha\gamma,\beta}\,f^\gamma+\eta_{\alpha\gamma}\,f^\gamma_{,\beta}\right]g_1^\alpha g_2^\beta$$
$$=\left[\left(\eta_{\gamma\beta}f^\gamma\right)_{,\alpha}+\left(\eta_{\alpha\gamma}f^\gamma\right)_{,\beta}\right]g_1^\alpha g_2^\beta$$

haciendo uso nuevamente de (3.9) se obtiene

$$\left.\dot{K}_{12}\right|_{\dot{x}^\alpha=f^\alpha}=0$$

Por lo que K_{12} es una constante de movimiento.

Es importante notar que K_{12} puede resultar ser una constante numérica, así por ejemplo, si

$$g_1^{\alpha} = g_2^{\alpha}$$

se tendrá

$$K_{12} \equiv 0$$

ii) Si g^{α} es una simetría de las ecuaciones de movimiento y C es una constante de movimiento, entonces:

$$h \equiv \frac{\partial C}{\partial x^{\alpha}} g^{\alpha} \tag{3.25}$$

es una constante de movimiento.

Demostración:

Tomando la derivada total respecto al tiempo de h cuando se cumplen las ecuaciones de movimiento tenemos:

$$\left.\frac{dh}{dt}\right|_{\dot{x}^{\alpha}=f^{\alpha}} = C_{,\alpha\beta}\, g^{\alpha} f^{\beta} + C_{,\alpha}\, \dot{g}^{\alpha}$$

sustituyendo (3.22) se tiene

$$\left.\dot{h}\right|_{\dot{x}^{\alpha}=f^{\alpha}} = C_{,\alpha\beta}\, f^{\alpha} g^{\beta} + C_{,\alpha}\left(f^{\alpha}_{,\beta}\, g^{\beta} + \dot{\overset{\circ}{g}} f^{\alpha}\right)$$

$$= \left(C_{,\alpha\beta} f^{\alpha} + C_{,\alpha} f^{\alpha}_{,\beta}\right) g^{\beta} + \dot{\overset{\circ}{g}}\, C_{,\alpha} f^{\alpha}$$

$$= \left(C_{,\alpha} f^{\alpha}\right)_{,\beta} g^{\beta} + \dot{\overset{\circ}{g}}\, C_{,\alpha} f^{\alpha}$$

puesto que C es una constante de movimiento

$$C_{,\alpha} f^{\alpha} = 0$$

de modo que

$$\left.\frac{dh}{dt}\right|_{\dot{x}^{\alpha}=f^{\alpha}} = 0$$

con lo que queda demostrado que h es constante de movimiento. Por supuesto que h no es necesariamente funcionalmente independiente de C, o incluso puede resultar ser una constante numérica.

4) Condición para que una simetría de las ecuaciones de movimiento sea de Noether para un lagrangiano dado.

En la sección III.1 vimos que para una transformación infinitesimal de coordenadas

$$\bar{x}^{\alpha} = x^{\alpha} + g^{\alpha}(x^{\beta}) \tag{3.26}$$

el cambio funcional de un lagrangiano

$$L(x^{\alpha}, \dot{x}^{\alpha}) = l_{\mu}(x^{\alpha}) \dot{x}^{\mu} \tag{3.27}$$

de primer orden está dado por (ec. (3.5))

$$\mu = \left(l_{\beta\alpha}\, g^{\alpha} + l_{\alpha}\, g^{\alpha}_{,\beta}\right) \dot{x}^{\beta} \tag{3.28}$$

y su derivada lagrangiana por:

$$\mu_\alpha = \tilde{\eta}_{\alpha\beta}\, \dot{x}^\beta \tag{3.29}$$

donde

$$\tilde{\eta}_{\alpha\beta} \equiv \eta_{\alpha\beta,\gamma}\, g^\gamma + \eta_{\alpha\gamma}\, g^\gamma_{,\beta} - \eta_{\beta\gamma}\, g^\gamma_{,\alpha} \tag{3.30}$$

(ecs. (3.10), (3.13) y (3.14)), utilizando la identidad de Jacobi (ec. (3.24)) se tiene

$$\tilde{\eta}_{\alpha\beta} = \eta_{\gamma\beta,\alpha}\, g^\gamma + \eta_{\alpha\gamma,\beta}\, g^\gamma + \eta_{\alpha\gamma}\, g^\gamma_{,\beta} - \eta_{\beta\gamma}\, g^\gamma_{,\alpha}$$

$$\tilde{\eta}_{\alpha\beta} = \left[\eta_{\alpha\gamma,\beta}\, g^\gamma + \eta_{\alpha\gamma}\, g^\gamma_{,\beta}\right] - \left[\eta_{\beta\gamma,\alpha}\, g^\gamma + \eta_{\beta\gamma}\, g^\gamma_{,\alpha}\right]$$

$$\tilde{\eta}_{\alpha\beta} = \left[\eta_{\alpha\gamma}\, g^\gamma\right]_{,\beta} - \left[\eta_{\beta\gamma}\, g^\gamma\right]_{,\alpha}$$

Definiendo a

$$g_\alpha \equiv \eta_{\alpha\gamma}\, g^\gamma \tag{3.31}$$

se obtiene

$$\boxed{\tilde{\eta}_{\alpha\beta} = g_{\alpha,\beta} - g_{\beta,\alpha}} \tag{3.32}$$

y las ecuaciones (3.29) se escriben entonces como

$$\mu_\alpha = \left(g_{\alpha,\beta} - g_{\beta,\alpha} \right) \dot{x}^\beta \tag{3.33}$$

Si la transformación (3.26) es una simetría de Noether se tendrá que

$$\mu_\alpha \equiv 0 \tag{3.34}$$

sin necesidad de que se cumplan las ecuaciones de movimiento (ver ec. (1.116)). Esto es, la condición (3.34) se debe de dar para cualesquiera valores de las $\dot{x}^\beta$, lo cual implica que:

$$g_{\alpha,\beta} - g_{\beta,\alpha} = 0 \tag{3.35}$$

cuando (3.26) es una simetría de Noether.

De la definición de las g_α (ec. (3.31)) vemos que la condición (3.35) depende del lagrangiano en cuestión, ya que depende de $\eta_{\alpha\beta}$. Así, el hecho de que (3.35) se satisfaga para un lagrangiano (que (3.26) sea de Noether para ese lagrangiano) no implica que se satisfaga para otro lagrangiano s-equivalente al primero. Lo único que se puede asegurar es que la transformación (3.26) seguirá siendo de simetría de s-equivalencia, que como ya hemos visto involucra a las simetrías de Noether como un caso particular. En el siguiente capítulo se mostrará esta situación.

Por el lema inverso de Poincaré [19], de (3.35) tenemos que debe de existir una función

$$F = F(x^\alpha) \tag{3.36}$$

tal que

$$g_\alpha = \frac{\partial F}{\partial x^\alpha} \qquad (3.37)$$

Además, esta función es una constante de movimiento, ya que, por las ecuaciones (3.9) y (3.31) tenemos:

$$g_\alpha f^\alpha = \eta_{\alpha\beta}\, g^\beta f^\alpha = g^\beta \eta_{\alpha\beta} f^\alpha \equiv 0$$

y de (3.37) se obtiene

$$g_\alpha f^\alpha = \frac{\partial F}{\partial x^\alpha} f^\alpha = 0$$

por lo que F es una constante de movimiento.

IV.- EJEMPLOS.

Por comodidad en la notación a lo largo de todo este capítulo usaremos subíndices en lugar de superíndices, así:

$$x_\alpha \equiv x^\alpha$$

$$f_\alpha \equiv f^\alpha$$

$$g_\alpha \equiv g^\alpha$$

y en ningún momento deberá entenderse que g_α se refiere a la ecuación (3.31).

1) Ejemplo 1.

Vamos a mostrar para el problema de la partícula libre en una dimensión cómo una simetría de sus ecuaciones de movimiento en primer orden, resulta ser de Noether para un lagrangiano del problema y de s-equivalencia para otro lagrangiano s-equivalente al primero. También vamos a hallar constantes de movimiento mediante el uso del corolario de la sección III.2.

De la segunda ley de Newton tenemos que para la partícula libre en una dimensión, su ecuación de movimiento es:

$$\ddot{q} = 0 \tag{4.1}$$

Mediante la transformación de coordenadas:

$$\left.\begin{array}{l} r = q \\ p = \dot{q} \end{array}\right\} \qquad (4.2)$$

obtenemos el sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden

$$\left.\begin{array}{l} \dot{r} = p \\ \dot{p} = 0 \end{array}\right\} \qquad (4.3)$$

que es equivalente a (4.1).

La solución general de (4.3) es

$$\left.\begin{array}{l} r = At + B \\ p = A \end{array}\right\} \qquad (4.4)$$

por lo que dos constantes funcionalmente independientes son

$$\left.\begin{array}{l} A = p \\ B = r - pt \end{array}\right\} \qquad (4.5)$$

Las simetrías de las ecuaciones de movimiento (4.3) son proporcionadas por el sistema de ecuaciones diferenciales parciales

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial g_1}{\partial t} + \dfrac{\partial g_1}{\partial r} p - g_2 = \dot{g}_0 p \\[2ex] \dfrac{\partial g_2}{\partial t} + \dfrac{\partial g_2}{\partial r} p = 0 \end{array}\right\} \qquad (4.6)$$

como se puede ver a partir de (4.3) y (2.6).

Una solución del sistema (4.6) es:

$$
\begin{aligned}
g_0 &= 0 \\
g_1 &\equiv \delta r = r - 2pt \\
g_2 &\equiv \delta p = -p
\end{aligned}
\tag{4.7}
$$

Por otro lado consideremos los lagrangianos

$$L = p\dot{r} - \frac{1}{2}p^2 \tag{4.8}$$

y

$$\bar{L} = \left[\frac{1}{3}(r-pt)^3 + (r-pt)\right]\dot{p} \tag{4.9}$$

de ellos se tiene,

$$
\left.
\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial r} &= 0 \\
\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} &= p \\
\frac{\partial L}{\partial p} &= \dot{r} - p \\
\frac{\partial L}{\partial \dot{p}} &= 0
\end{aligned}
\right\}
\tag{4.10}
$$

y

$$\frac{\partial \bar{L}}{\partial r} = \left[(r-pt)^2+1\right]\dot{p}$$
$$\frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{r}} = 0$$
$$\frac{\partial \bar{L}}{\partial p} = -\left[(r-pt)^2+1\right]\dot{p}\,t \tag{4.11}$$
$$\frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{p}} = \frac{1}{3}(r-pt)^3+(r-pt)$$

Sus ecuaciones de Euler-Lagrange son:

$$\left.\begin{aligned} L_r &\equiv \dot{p} = 0 \\ L_p &\equiv -(\dot{r}-p) = 0 \end{aligned}\right\} \tag{4.12}$$

y

$$\left.\begin{aligned} \bar{L}_r &\equiv -\left[(r-pt)^2+1\right]\dot{p} = 0 \\ \bar{L}_p &\equiv \left[(r-pt)^2+1\right](\dot{r}-p) = 0 \end{aligned}\right\} \tag{4.13}$$

Ambos sistemas de ecuaciones de Euler-Lagrange tienen por solución general a (4.4), de modo que los lagrangianos L y $\bar{L}$ son s-equivalentes y describen a la partícula libre.

El cambio funcional de L (ec. (1.111)) debido a la simetría de las ecuaciones de movimiento (4.7) es:

$$\mu = -\frac{d}{dt}\left(p^2 t\right) \tag{4.14}$$

de modo que la simetría (4.7) resulta ser de Noether para este lagrangiano. La constante de movimiento asociada la podemos hallar fácilmente usando (1.34) obteniendo:

$$I_1(r,p,t) = p\,(r - pt) \tag{4.15}$$

que es cláramente el producto AB (ec.(4.5)).

El cambio funcional de $\bar{L}$ debido a (4.7) es

$$\bar{\mu} = \frac{2}{3}(r - pt)^3\,\dot{p} \tag{4.16}$$

que no es la derivada total respecto al tiempo de una función de las coordenadas y el tiempo. De este modo, (4.7) no es una simetría de Noether para $\bar{L}$. De (4.16) tenemos que:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial\bar{\mu}}{\partial r} &= 2(r-pt)^2\,\dot{p} \\ \frac{\partial\bar{\mu}}{\partial\dot{r}} &= 0 \\ \frac{\partial\bar{\mu}}{\partial p} &= -2(r-pt)^2\,\dot{p}\,t \\ \frac{\partial\bar{\mu}}{\partial\dot{p}} &= \frac{2}{3}(r-pt)^3 \end{aligned}\right\} \tag{4.17}$$

y las derivadas lagrangianas de $\bar{\mu}$ son

$$\left.\begin{aligned} \bar{\mu}_r &\equiv -2(r-pt)^2\,\dot{p} \\ \bar{\mu}_p &\equiv 2(r-pt)^2(\dot{r}-p) \end{aligned}\right\} \tag{4.18}$$

Si se cumplen las ecuaciones de movimiento (4.2) o igualmente las ecuaciones (4.13) vemos que

$$\bar{\mu}_r = 0$$
$$\bar{\mu}_p = 0$$

de modo que $\bar{\mu}$ es un lagrangianito y por ello (4.7) resulta ser de simetría de s-equivalencia para el lagrangiano $\bar{L}$.

La matriz Ω (ec. (1.118)) donde

$$\bar{\mu}_a = \Omega_a{}^b \bar{L}_b$$

resulta ser:

$$\Omega = \frac{2(r-pt)}{(r-pt)^2+1}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{4.19}$$

y las trazas de sus dos primeras potencias son

$$\left.\begin{aligned} tr\,\Omega &= \frac{4(r-pt)}{(r-pt)^2+1} \\ tr\,\Omega^2 &= \frac{8(r-pt)^2}{\left[(r-pt)^2+1\right]^2} \end{aligned}\right\} \tag{4.20}$$

o, en términos de (4.5)

$$\left.\begin{aligned} tr\,\Omega &= \frac{4B}{B^2+1} \\ tr\,\Omega^2 &= \frac{8B^2}{(B^2+1)^2} \end{aligned}\right\} \tag{4.21}$$

por lo que claramente son constantes de movimiento.

De las ecuaciones de movimiento (4.3) , donde

$$\left.\begin{aligned} f_1 &= p \\ f_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (4.22)$$

vemos que

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial t} &= \frac{\partial f_2}{\partial t} = 0 \\ \frac{\partial f_1}{\partial r} &= \frac{\partial f}{\partial r} = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (4.23)$$

Usando el corolario de la sección III.2 tenemos que

$$\psi \equiv \frac{\partial \bar{L}}{\partial r} = \left[(r-pt)^2+1\right]\dot{p} \qquad (4.24)$$

y

$$\phi \equiv \frac{\partial \bar{L}}{\partial t} = -\left[(r-pt)^2+1\right]p\dot{p} \qquad (4.25)$$

son lagrangianitos. Sus derivadas lagrangianas se pueden calcular directamente obteniéndose:

$$\left.\begin{aligned} \psi_r &\equiv -2(r-pt)\dot{p} \\ \psi_p &\equiv 2(r-pt)(\dot{r}-p) \end{aligned}\right\} \qquad (4.26)$$

$$\begin{aligned} \phi_r &\equiv 2(r-pt)p\dot{p} \\ \phi_p &\equiv -2(r-pt)p(\dot{r}-p) \end{aligned} \qquad (4.27)$$

y las matrices Ω_ψ y Ω_ϕ que relacionan a (4.26) y (4.27) respecivamente con (4.13) son:

$$\Omega_\psi = \frac{2(r-\psi t)}{[(r-\psi t)^2+1]} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{4.28}$$

y

$$\Omega_\phi = -\frac{2(r-\psi t)\psi}{(r-\psi t)^2+1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{4.29}$$

Las trazas de Ω_ψ y Ω_ϕ en términos de (4.5) son:

$$Tr\,\Omega_\psi = \frac{4B}{B^2+1} \tag{4.30}$$

$$Tr\,\Omega_\phi = -\frac{4AB}{B^2+1} \tag{4.31}$$

y es de notarse que (4.30) y (4.31) son funcionalmente independientes.

2) Ejemplo 2.

Usando las ecuaciones (3.21) , (3.25) y dos simetrías de las ecuaciones de movimiento vamos a hallar algunas constantes de movimiento del sistema de ecuaciones diferenciales de segundo orden:

$$\left.\begin{aligned} \ddot{x} + \dot{y} &= 0 \\ \ddot{y} + y &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{4.32}$$

Se puede mostrar [6] que no existe un lagrangiano que de origen a estas ecuaciones de segundo orden. Sin embargo, haciendo un cambio de variables para obtener un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden equivalente al (4.32) el lagrangiano existe [6,7] como ya hemos visto en la sección I.3.b. .

Efectuando la transformación

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= x \\ x_2 &= y \\ x_3 &= \dot{x} \\ x_4 &= \dot{y} \end{aligned}\right\} \qquad (4.33)$$

se obtiene el sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_3 \\ \dot{x}_2 &= x_4 \\ \dot{x}_3 &= -x_4 \\ \dot{x}_4 &= -x_2 \end{aligned}\right\} \qquad (4.34)$$

Las simetrías de este sistema son proporcionadas (ecs. (2.6) y/o (3.22)) por el sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} \left.\frac{dg_1}{dt}\right|_{\dot{x}=f} - g_3 &= x_3\, \dot{g}_0 \\ \left.\frac{dg_2}{dt}\right|_{\dot{x}=f} - g_4 &= x_4\, \dot{g}_0 \\ \left.\frac{dg_3}{dt}\right|_{\dot{x}=f} + g_4 &= -x_4\, \dot{g}_0 \\ \left.\frac{dg_4}{dt}\right|_{\dot{x}=f} + g_2 &= -x_2\, \dot{g}_0 \end{aligned}\right\} \qquad (4.35)$$

Dos soluciones posibles a (4.35) son

$$\left.\begin{aligned} g_0 &= 0 \\ g_1 &= x_2(t\cos t - \operatorname{sen} t) - x_4(t\operatorname{sen} t + \cos t) \\ g_2 &= 0 \\ g_3 &= x_2\cos t - x_4\operatorname{sen} t \\ g_4 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (4.36)$$

y

$$\left.\begin{aligned} h_0 &= 0 \\ h_1 &= x_2(t\operatorname{sen} t + \cos t) + x_4(t\cos t - \operatorname{sen} t) \\ h_2 &= 0 \\ h_3 &= x_2\operatorname{sen} t + x_4\cos t \\ h_4 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (4.37)$$

como se puede comprobar por sustitución directa de (4.36) y (4.37) en (4.35) y haciendo uso de (4.34).

Un lagrangiano posible para el sistema (4.34) es(+):

$$L = (x_2 + x_3)\dot{x}_1 + x_4\dot{x}_3 + \tfrac{1}{2}\left(x_4^2 - 2x_2x_3 - x_3^2\right) \quad (4.38)$$

(+) En la ref. 6 se muestra de forma explícita la construcción de (4.38) a partir de (4.34) y de las constantes de movimiento del problema.

y sus ecuaciones de Euler-Lagrange son

$$\left.\begin{aligned} L_1 &\equiv \dot{x}_2 + \dot{x}_3 = 0 \\ L_2 &\equiv -\dot{x}_1 + x_3 = 0 \\ L_3 &\equiv \dot{x}_4 - \dot{x}_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ L_4 &\equiv -\dot{x}_3 - x_4 = 0 \end{aligned}\right\} \tag{4.39}$$

que son equivalentes al sistema (4.34).

Usando la notación (ec. (1.59))

$$L = l_a(x^b, t)\,\dot{x}^a + l_0(x^b, t) \tag{4.40}$$

para el lagrangiano, tenemos:

$$\left.\begin{aligned} l_0 &= \tfrac{1}{2}(x_1^2 - 2x_2 x_3 - x_3^2) \\ l_1 &= x_2 + x_3 \\ l_2 &= 0 \\ l_3 &= x_4 \\ l_4 &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{4.41}$$

Por lo que la matriz (ec. (1.74))

$$\eta_{\alpha\beta} = \frac{\partial l_\alpha}{\partial x^\beta} - \frac{\partial l_\beta}{\partial x^\alpha} \qquad \alpha, \beta = 0, 1, \ldots, 2n \tag{4.42}$$

resulta ser:

$$\eta = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\chi_3 & -(\chi_2+\chi_3) & \chi_4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ \chi_3 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ (\chi_2+\chi_3) & -1 & 0 & 0 & 1 \\ -\chi_4 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.43}$$

Utilizando la ecuación (3.21)

$$K_{12} = \eta_{\alpha\beta}\, g^{\alpha}_{1}\, g^{\beta}_{2} . \tag{4.44}$$

y sustituyendo (4.36), (4.37) y (4.43) se obtiene

$$K_{12} = \chi_2^{2} + \chi_4^{2} \tag{4.45}$$

Su derivada total respecto al tiempo es

$$\dot{K}_{12} = 2\chi_2\dot{\chi}_2 + 2\chi_4\dot{\chi}_4 \tag{4.46}$$

y sustituyendo las ecuaciones de movimiento (4.34) se obtiene

$$\dot{K}_{12}\Big|_{\dot{x}=f} = 0 \tag{4.47}$$

por lo que K_{12} es una constante de movimiento.

De la primera de las ecuaciones (4.39) vemos que

$$C \equiv x_2 + x_3 \qquad (4.48)$$

es una constante de movimiento. Utilizando la ecuación (3.25)

$$h = \frac{\partial C}{\partial x^\alpha} g^\alpha \qquad (4.49)$$

y sustituyendo en ella a (4.48) y a (4.36) se obtiene:

$$h = x_2 \cos t - x_4 \operatorname{sen} t \qquad (4.50)$$

que es otra constante de movimiento. Si ahora sustituimos (4.48) y(4.37) en (4.49) se obtiene:

$$\bar{h} = x_2 \operatorname{sen} t + x_4 \cos t \qquad (4.51)$$

que también es una constante de movimiento, y de hecho:

$$K_{12} = h^2 + \bar{h}^2 \qquad (4.52)$$

V.- CONCLUSION.

En este trabajo hemos estudiado la relación existente entre las simetrías de los lagrangianos y aquellas de sus ecuaciones de movimiento, para el caso de ecuaciones diferenciales de primer orden. También vimos diversas formas de relacionar las transformaciones de simetría con cantidades conservadas asociadas a los problemas en cuestión.

Uno de los principales resultados encontrados en esta tesis es el de la equivalencia entre simetrías de las ecuaciones de movimiento y aquellas de los lagrangianos asociados a ellas.

A continuación listamos en detalle los resultados nuevos que hemos encontrado:

En el capítulo III demostramos la equivalencia entre las transformaciones de simetría de los lagrangianos (simetrías de s-equivalencia) y las transformaciones de simetría de las ecuaciones de movimiento para sistemas descritos en la formulación de primer orden. Esto nos permite establecer una mayor conexión entre simetrías y constantes de movimiento mediante el uso del teorema de Noether (ver sección I.1.e.) y el teorema de las trazas (sección I.3.c.). Un ejemplo de esto lo lo proporciona el corolario estudiado en la sección III.2., el cual muestra que, cuando las ecuaciones de movimiento del sistema no dependen de alguna coordenada en particular, las translaciones a lo largo de esa coordenada son transformaciones de simetría de s-equivalencia. Queda aun pendiente la obtención de un método práctico para hallar soluciones del sistema de ecuaciones de las simetrías de las ecuaciones de movimiento (ecs. (2.6)) lo que nos permitiría obtener constantes de movimiento del sistema (en la ref. 3 se muestra un método para resolver (2.6) pero requiere del conocimiento de las constantes de movimiento del sistema).

En la sección III.3. demostramos dos teoremas que permiten hallar constantes de movimiento a partir de las simetrías de las ecuaciones de movimiento. Uno de ellos requiere del conocimiento de dos simetrías y el otro de una simetría y una constante de movimiento.

En la sección III.4. mostramos que la condición que debe cumplir una transformación de simetría de las ecuaciones de movimiento, para ser una simetría de Noether (ec. (3.35), depende del lagrangiano al que le aplicamos la transformación, de modo que la transformación puede resultar de simetría de Noether para un lagrangiano y de s-equivalencia para otro. Como lo mostramos explícitamente en el ejemplo 1 de la sección IV.1. De esto se hace evidente que una clasificación de las simetrías debe tomar en cuenta de alguna forma el lagrangiano que se está usando para caracterizar al sistema mecánico. Una pregunta que surge es si ¿existirán transformaciones de simetría que sean de s-equivalencia para todos los lagrangianos asociados a un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden como los que hemos estudiado?

Creemos que una forma de atacar estos problemas es mediante en estudio del sistema de ecuaciones diferenciales que deben cumplir los $\mathcal{J}_\alpha$ definidos por la ecuación (3.31).

B I B L I O G R A F I A

1) Hill, E.L; "Hamilton's Principle and the Conservation theorems of Mathematical Physics", Rev. Mod. Phys., 23, 253 (1951).

2) Oset, E. y Tarrach, R; "Simetrías y Teorema de Noether en Mecánica Clásica", Gift 9/74. Depto. de Física Teórica, Universidad de Barcelona.

3) Kobussen, J.A; "On Symetries and First Integrals", Hadronic J. 5, 1451 (1982).

4) Hojman, S. and Gómez, J; "First Order Equivalent Lagrangian and Conservation Laws". (enviado a publicación).

5) Gómez, J.J; "Simetrías y Cantidades Conservadas en primer orden en Mecánica Clásica" Tesis Profesional. UNAM. (1981).

6) Hojman, S. and Urrutia, L.F; "On the Inverse Problem of the Calculus of Variations", J. Math. Phys., 22 (9), 1896 (1981).

7) Hojman, S. y Shepley, L; "Lagrangianos Equivalentes", Rev. Mex. Fis., 28 (2), 149 (1982).

8) Hojman, S. and Harleston, H; "Equivalent Lagrangians: Multidimensional Case", J. Math. Phys. 22, 1414 (1981).

9) Harleston, H; "Lagrangianos Equivalentes en Mecánica Clásica". Tesis Profesional. UNAM. (1980).

10) Sudarshan, E.C.G; Mukunda, N; "Classical Dynamics: A Modern Perspective"; John Wiley and Sons, New York. (1974).

11) Landau, L.D. y Lifshitz, E.M; "Mecánica", (Vol. I del Curso de Física Teórica); Editorial Reverté, S.A. Barcelona, (1970).

12) Goldstein, H; "Classical Mechanics", Addison Wesley Publishing Co., Reading, Mass. 2nd. Ed. (1980).

13) Sommerfeld, A; "Mechanics". Lectures on Theoretical Physics Vol. I. Academic Press, New York. (1964).

14) Santilli, R.M; "Foundations of Classical Mechanics I ", Sprin

ger-Verlag, New York, (1978).

15) Elsgolts. L; "Differential Equations and the Calculus of Variations", Mir. Moscow. (1977).

16) Saletan, E.J. and Cromer, A.H.; "Theoretical Mechanics", John Wiley and Sons, Inc; New York. (1971).

17) Maltsev, A.I.; "Fundamentos de Algebra Lineal". Siglo XXI editores, S.A. (1970).

18) Havas, P.; "The Connection between Conservation Laws and Invariance Groups: Folklore, Fiction, and Fact", Acta. Phys. Aust. 38, 145 (1973).

19) Lovelock, D. and Rund, H.; "Tensor Differential Forms and Variational Principles". John Wiley and Sons, Inc; New York (1975).