UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

# " LA MECANICA CUANTICA ESTOCASTICA EN SU VERSION RELATIVISTA ".

TESIS QUE PARA OBTENER EL TITULO DE FISICO PRESENTA :

CARLOS VILLARREAL LUJAN.

MAYO DE 1983.

UNAM
Universidad Nacional Autónoma de México

Biblioteca Central
Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**
**Tesis Digitales**
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

# Prólogo.

En esta tesis se explora la posibilidad de construir un principio variacional relativista dentro del marco de la mecánica cuántica estocástica, con el fin de deducir las ecuaciones de la mecánica cuántica relativista.

Se presenta primeramente el principio variacional desarrollado por Berrondo en el caso no relativista que da lugar a las ecuaciones de de la Peña y Cetto y posteriormente la generalización relativista de dicho principio.

PRINCIPIOS VARIACIONALES EN LA MECÁNICA CUÁNTICA ESTOCÁSTICA NO RELATIVISTA.

Los resultados obtenidos hasta aquí, han sido derivados en términos de una ecuación dinámica estocástica de la forma de la segunda ley de Newton y una ecuación de continuidad para la densidad de partículas. Se plantea entonces la posibilidad de construir al igual que en la Mecánica Clásica, formalismos equivalentes al de Newton, los cuales, como se sabe, son más eficaces en la solución de una gran variedad de problemas, pero sobre todo, permiten explorar la estructura interna de la teoría así como crear vínculos con otros esquemas. Esta posibilidad fue concretada por Bersohn[38] derivando las ecuaciones dinámicas estocásticas de de la Peña a partir de un principio variacional que generaliza el principio de Hamilton al caso estocástico. Con esto, es factible construir ecuaciones de Lagrange estocásticas e introducir transformaciones canónicas para variables markovianas que permiten obtener las correspondientes ecuaciones de Hamilton y de Hamilton-Jacobi estocásticas. Este formalismo es equivalente al propuesto por de la Peña y si se le generaliza adecuadamente, da lugar a la obtención de todas las ecuaciones de la mecánica cuántica.

De la Peña construyó una versión lagrangiana de su propio formalismo[39], pero no a partir de un pri

FORMULACIÓN LAGRANGIANA.

Se va a suponer en la misma forma que en los capítulos anteriores, que una partícula estocástica es descriptible en términos de dos velocidades cuasilocales: su velocidad sistemática $\vec{v}$ y su velocidad estocástica $\vec{u}$. Además, su evolución quedará determinada por las derivadas sistemática y estocástica $D_c$ y $D_s$.

A modo de tratar en forma simultánea los procesos cuánticos y clásicos, se definirá una cantidad $\epsilon$ tal que

$$\epsilon^2 = \begin{cases} 1 & \text{para un proceso clásico (estocástico)} \\ -1 & \text{para un proceso cuántico.} \end{cases} \qquad (0)$$

En el primer caso se tendrá que $\epsilon = 1$ y en el segundo que $\epsilon = i$. La operación de conjugación (denotada por $f \to f^*$) consiste en cambiar $\epsilon$ por $-\epsilon$. Las variables dinámicas se escriben en términos de este parámetro $\epsilon$ en la forma

$$\vec{v}_q = \vec{v} + \epsilon \vec{u}, \quad D_q = D_c + \epsilon D_s, \quad \vec{F}_q = \vec{F}^{(+)} + \epsilon \vec{F}^{(-)}; \qquad (1)$$

la fuerza $\vec{F}_q$ se considera como derivable de un potencial $V_q = V^{(+)} + \epsilon V^{(-)}$, donde $V^{(+)}$ y $V^{(-)}$ se refieren a los potenciales que dan lugar a fuerzas que cambian o no de signo ante inversiones temporales.

Para construir un principio de Hamilton hay que definir una acción estocástica markolliana: dado que las trayectorias son estocásticas, la acción no se puede definir por medio de una integral de Riemann como la funcional de una cierta lagrangiana.[41] Sin embargo, puede hacerse uso de la integral de Ito definida para variables estocásticas markollianas.[42] En términos de esta integral, la acción se escribe en la forma

$$S(t) = \int_{t_1}^{t_2} L(x^i, \delta_c x^i, t)\, dt \qquad (2)$$

(Por comodidad se introduce la notación $\delta_c f = \dot{f}$), y las ecuaciones de movimiento se obtienen a partir del principio variacional

$$\delta S(t) = 0. \qquad (3)$$

Aquí se entiende por variación a los cambios $\delta\langle x^i\rangle$ en la trayectoria media, la cual se obtiene considerando el promedio de un conjunto de trayectorias estocásticas con una cierta función de distribución. Estas variaciones inducen cambios en las trayectorias estocásticas mismas:

$$x^i \to x^i + \delta\langle x^i\rangle. \qquad (4)$$

La variación de la acción es entonces:

$$\delta S(t) = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \frac{\partial L}{\partial x_i}\delta x_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\delta \dot{x}_i + \frac{\partial L}{\partial t}\delta t \right\} dt.$$

El último término del integrando es idénticamente cero, ya que se supone que el tiempo no varía. La variación $\delta \dot{x}_i$ se puede calcular ~~notando~~ que el operador D está constituído solamente por operadores diferenciales pudiéndose intercambiar la variación con la derivada: $\delta \dot{x}_i = \dot{\delta x_i}$, pero $\delta x_i = \delta \bar{x}_i$ y $\delta \bar{x}_i$ es una variable diferenciable y no-estocástica, entonces $\delta \dot{x}_i = d\bar{x}_i/dt$. Consecuentemente se puede efectuar una integración por partes[21], de manera que la variación es:

$$\delta S(t) = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \frac{\partial L}{\partial x_i} - D\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right) \right\} \delta \bar{x}_i \, dt = 0.$$

El integrando de esta expresión debe ser necesariamente cero ya que las variaciones son arbitrarias. Entonces:

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} - D\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right) = 0, \qquad (5)$$

que son las ecuaciones de Euler-Lagrange estocásticas para sistemas conservativos y con constricciones holonómicas. Estas ecuaciones se convierten, por supuesto, en las ecuaciones de Euler-Lagrange en el límite no estocástico ($D \to d/dt$, $\dot{x}_i \to dx_i/dt$, $L \to L_{clásico}$).

Para verificar la compatibilidad de las ecuaciones

(5) con las obtenidas por de la Peña, se propone un lagrangiano:

$$L = \frac{m}{2}(D_q v_q)^2 - V(x_i) \qquad (6)$$

y en forma directa se obtiene usando las ecuaciones (5) que

$$m D_q v_q^i = -\frac{\partial V}{\partial x_i} \qquad (7)$$

que es la ecuación generalizada de Newton del problema. Si se toma la conjugada de (7):

$$m D_q^* v_q^{i*} = -\frac{\partial V^*}{\partial x_i} \qquad (8)$$

y se suman y restan ambas expresiones, se tiene:

$$m\left[D_c(v_i + iu_i) \pm D_s(v_i + iu_i) + D_c(v_i - iu_i) \pm D_s(v_i - iu_i)\right] = F_i^{(1)} + iF_i^{(2)} \pm F_i^{(1)} - iF_i^{(2)}$$

$$\therefore \quad m(D_c v_i - D_s u_i) = F_i^{(1)},$$

$$m(D_s v_i + D_c u_i) = F_i^{(2)},$$

que son las ecuaciones obtenidas por de la Peña. (6)

FORMULACIÓN HAMILTONIANA.

Así como un lagrangiano puede dar origen a las ecuaciones de de la Peña, se puede llevar adelante el formalismo para encontrar ecuaciones hamiltonianas estocásticas, equivalentes a las ecuaciones clásicas en el límite no estocástico. Para esto, es preciso definir una función hamiltoniana que dependa de las coordenadas $\vec{x}$ y de los momentos $\vec{p}_q$, definidos por:

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \qquad (9)$$

y el hamiltoniano se construye por medio de una transformación de Legendre

$$H(x_i,p_i,t) = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\dot{x}_i - L(x_i,\dot{x}_i,t)$$

$$= p_i \dot{x}^i - L(x_i,\dot{x}_i,t) \qquad (10)$$

Si se varía la funcional $H$, resulta la expresión

$$\delta H = \frac{\partial H}{\partial p_i}\delta p_i + \frac{\partial H}{\partial x_i}\delta x_i + \frac{\partial H}{\partial t}\delta t$$

$$= \dot{x}_i \delta p^i + p^i \delta \dot{x}_i - \frac{\partial L}{\partial x_i}\delta x_i - \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\delta \dot{x}_i - \frac{\partial L}{\partial t}\delta t \qquad (11)$$

Los términos segundo y cuarto en la última igualdad se anulan en virtud de las ecuaciones de Lagrange y entonces, al igualar los coeficientes de ambas ecuaciones, se debe cumplir que

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial p_i} &= \dot{x}_i = Dx_i, \\ \frac{\partial H}{\partial x_i} &= -\dot{p}_i = -Dp_i, \\ \frac{\partial H}{\partial t} &= -\frac{\partial L}{\partial t}, \end{aligned}\right\} \quad 12$$

Estas son las ecuaciones de Hamilton del sistema y son equivalentes a las ecuaciones de Lagrange ya ⑧.

ECUACIÓN DE HAMILTON-JACOBI

En forma análoga a la mecánica clásica, se puede derivar en este esquema, una ecuación estocástica de Hamilton-Jacobi. Pero para esto hay que contar con la noción de transformación canónica, i.e., cambios de variable que preserven la forma de las ecuaciones estocásticas de Hamilton. Se ha de tener además la debida precaución para que las variables resultantes de la transformación mantengan su carácter markoffiano, que es la aproximación en que se ha desarrollado la teoría estocástica.

De acuerdo al principio variacional, el lagrangiano original y el definido por las nuevas variables, deberán diferir a lo más, por la derivada $D$ de una función generadora $F$. Supóngase que el lagrangiano antiguo es $L = L(q_i, \dot{q}_i, t)$ y el nuevo es $L' = L'(Q_i, \dot{Q}_i, t)$. Para una función generatriz de segunda clase $F_2 = F_2(x_i, P_i, t)$ se tendrá,

( ) usando las convenciones usuales:

$$p_i \dot{x}_i - H(x_i, p_i, t) + \dot{X}_i P_i + K = D F_2(x_i, P_i, t), \quad (13)$$

donde $X_i, P_i$ y $K$ denotan a los nuevos coordenadas, momentos y hamiltoniano respectivamente. Al desarrollar el lado derecho de (13), se tiene

$$D F_2(x_i, P_i, t) = \frac{\partial F_2}{\partial t} + \frac{\partial F_2}{\partial x_i} \dot{x}_i + \frac{\partial F_2}{\partial P_i} \dot{P}_i + c D \frac{\partial^2 F_2}{\partial x_i^2} + D^{(1)} F_2, \quad (14)$$

① significa ... (13)

expresión en la que $\delta''F_2$ contiene derivadas parciales de $F_2$ respecto de $x_i$ multiplicadas por un momento derivado de orden superior al segundo, los cuales no se toman en cuenta, a modo de seguir en la aproximación markoffiana. Además, aparecen derivadas $\partial F_2/\partial P_i$ en el caso más general. Comparando términos en (13) y (14), se tiene

$$p_i = \frac{\partial F_2}{\partial x_i} \qquad (15)$$

$$X_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i}$$

y el nuevo hamiltoniano estocástico queda expresado en la forma

$$K = H + \frac{\partial F_2}{\partial t} + \epsilon D \frac{\partial^2 F_2}{\partial x_i^2} \qquad (16)$$

Puede escogerse este hamiltoniano como una constante, de modo que $\delta X_i = \delta P_i = 0$. Si en particular $K = 0$, se obtiene una ecuación estocástica de Hamilton-Jacobi para la función $F_2$:

$$H(x_i, \partial F_2/\partial x_i, t) + \frac{\partial F_2}{\partial t} + \epsilon D \frac{\partial^2 F_2}{\partial x_i^2} = 0 \qquad (17)$$

Aparte del carácter estadístico de las variables, esta ecuación difiere de la clásica tan sólo en el término laplaciano.

(18)

La función $F_\pm$ solución de la ecuación (17) es idéntica a la acción estocástica anteriormente definida ya que, por ser $\hat{V}_i = 0$ en este caso, las ecuaciones (6) y (17) implican que $DF_\pm = L$ y entonces $F_\pm$ es la integral de Ito del lagrangiano estocástico.

La ecuación (17) se puede linealizar si se introduce el cambio de variable

$$\psi_+ = \exp\{F_+/2mD\epsilon\} \qquad (18)$$

y su conjugada

$$\psi_- = \exp\{-F_-^*/2mD\epsilon\}. \qquad (19)$$

Tomando como hamiltoniano la expresión

$$H = \frac{p_i^2}{2m} + V(x_i), \qquad (20)$$

la ecuación de Hamilton-Jacobi en términos de las variables $\psi_\pm$ es

$$2mD^2\epsilon^2 \nabla^2\psi_\pm + V\psi_\pm \pm 2mD\epsilon\frac{\partial\psi_\pm}{\partial t} = 0; \qquad (21)$$

que en el caso en que el coeficiente de difusión sea $D = \hbar/2m$ y $\epsilon = i$, se torna en la ecuación de Schrödinger

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi + V\psi = i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} \qquad (22)$$

y su compleja conjugada.
La definición usual de la densidad de probabilidad es válida tanto para el proceso clásico como para el cuántico, i.e., si se define

$$\rho(\bar{x},t) = \psi_+\psi_- = \exp\left\{\frac{J_+ - J_+^*}{2mDc}\right\}, \qquad (23)$$

la función $\rho$ satisface la ecuación de continuidad

$$\nabla\cdot(\rho\dot{\bar{v}}) + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0,$$

lo cual es inmediato de la ecuación de Hamilton-Jacobi estocástica.
Si en la ecuación (21) se substituye ahora $\epsilon = 1$, se obtienen dos ecuaciones tipo Fokker-Planck para las amplitudes de probabilidad $\psi_+$ y $\psi_-$, esto es

$$D\nabla^2\psi_\pm + \frac{1}{2mD}V\psi_\pm = \mp\frac{\partial\psi_\pm}{\partial t}, \qquad (24)$$

donde $\psi_+$ y $\psi_-$ ya no están relacionados de manera sencilla como en el caso cuántico. Sin embargo, las ecuaciones (24) continúan siendo lineales ya que no contienen términos disipativos.
DISCUSIÓN.
El formalismo desarrollado es equivalente al propuesto por de la Peña (quien planteó una versión lagrangiana de su propia teoría) y se han usado esencialmente las mismas hipótesis. Sin embargo, aquí

se ha hecho mayor uso del aparato formal de la mecánica clásica, permitiendo igual que en ésta, plantear el problema cuántico (y clásico) estocástico de una manera mucho más simple y directa. Esto lo confirmaremos más ampliamente en las aplicaciones del formalismo que estudiaremos a continuación.

101 (1)

## PRINCIPIOS VARIACIONALES RELATIVISTAS. (A)

La extensión del método de Bersonda al caso relativista se realiza de manera muy sencilla por ser éste una generalización estocástica del aparato formal de la mecánica clásica, el cual es fácilmente traducible al lenguaje relativista.

CINEMÁTICA.

Para comenzar, se supondrá que existe un cierto parámetro $\tau$ que permite caracterizar la evolución de un ensemble en el espacio de Minkowski, definido,[41] en forma análoga a la situación no estocástica por:

$$d\tau = dt\sqrt{1-\frac{|\vec{V}_q|^2}{c^2}} = \frac{dt}{\gamma_q}, \qquad (1a)$$

con

$$\gamma_q = \left(1-\frac{|V_q|^2}{c^2}\right)^{-1/2}. \qquad (1b)$$

donde $\vec{V}_q = \vec{V} + \epsilon\vec{U}$ representa a la velocidad compleja introducida anteriormente con su parte sistemática y estocástica y $\epsilon$ el parámetro definido (B) ......... Esta definición coincide con la usual en el límite no estocástico, además de que en el límite no relativista se tiene $dt = d\tau$. Por otro lado, esta definición no coincide necesariamente con aquella dada por Hakim[31] (usada en los enfoques relativistas ya estudiados), ya que la presente supone un cierto promedio en las trayectorias del ensemble en el espacio de configuración para obtener $\vec{V}$ y $\vec{U}$, mientras que para Hakim, $\tau$ numera una familia parcialmente ordenada de

102

hipersuperficies espacialoides en el espacio de Minkowski donde cada hipersuperficie representa al espacio físico en un instante dado.

Se define la cuadrivelocidad de la partícula como:

$$V_q^\mu = (\gamma c, \gamma \vec{V}_q), \tag{2a}$$

~~instantáneamente~~ se puede expresar el operador de derivada en la manera siguiente[20]:

$$\mathcal{D}_q \equiv V_q^\mu \partial_\mu + \epsilon D \partial^\mu \partial_\mu, \tag{3}$$

donde D el coeficiente de difusión. En particular, si se aplica este operador al cuadrivector de posición $x^\mu = (ct, \vec{x})$, se tiene que

$$\mathcal{D}_q x^\mu = V_q^\mu. \tag{4}$$

Si ahora se multiplica $V_q^\mu$ por la masa de la partícula, se obtiene el cuadrivector de energía-momento[11]:

$$p_q^\mu \equiv m V_q^\mu = \left( \frac{mc}{(1-\vec{\beta}_q^2)^{1/2}}, \frac{m\vec{V}_q}{(1-\vec{\beta}_q^2)^{1/2}} \right), \tag{5}$$

con $\vec{\beta}_q \equiv \vec{V}_q / c$.

DINÁMICA.

Como en el caso no relativista, las ecuaciones de movimiento se obtienen de un principio variacional. Entonces, es preciso

(11)

(A) Hasta aquí, se han obtenido ecuaciones que describen el comportamiento de partículas en el caso translacional, rotacional y relativista y se ha derivado un principio variacional del cual se obtienen ecuaciones para los dos primeros casos. Queda sólo un hueco por llenar y es el de establecer un principio variacional estocástico relativista, que contenga como caso particular a un principio variacional clásico y que permita derivar tanto las ecuaciones brownianas relativistas (cualquiera que sea su significado), como las ecuaciones cuánticas relativistas, i.e., la ecuación de Klein-Gordon, la ecuación de Feynman-Gell-Mann y la ecuación de Dirac.

(B) en el capítulo (V), ecuación (0).

definir la acción estocástica markoffiana relativista. Sea $S$ una funcional tal que

$$S=\int_{s_1}^{s_2} L(x^\mu, \dot{x}^\mu, \tau)\,d\tau, \qquad (6)$$

con $\dot{x}^\mu = \mathcal{D}x^\mu$ y la integral es una integral de Ito[38,42], el principio variacional es:

$$\delta S = 0, \qquad (7)$$

donde por variación se entiende aquella que se realiza con respecto a la trayectoria promedio del ensemble de partículas, que se denota por $\langle\ \rangle$. Entonces:

$$\delta S = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \left\{ \frac{\partial L}{\partial x^\mu}\,\delta\langle x^\mu\rangle + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu}\,\delta \dot{x}^\mu + \frac{\partial L}{\partial \tau}\,\delta\tau \right\} d\tau . \qquad (8)$$

Al igual que en el caso no relativista, se supone que la variación del tiempo es nula y se calcula la variación en la cuadrivelocidad de manera análoga. Dado que la variación definida aquí conmuta con la derivada estocástica, puede escribirse que:

$$\delta \dot{x}^\mu = \mathcal{D}_+ \delta x^\mu = \mathcal{D}_+ \delta\langle x^\mu\rangle = \frac{d}{d\tau}\delta\langle x^\mu\rangle .$$

Como el término de la extrema derecha de esta última expresión es no estocástico, se puede realizar una integración por partes en (8)[38] y se tiene que:

$$\delta S = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \left\{ \frac{\partial L}{\partial x^\mu} - \mathcal{D}_+\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu}\right) \right\} \delta\langle x^\mu\rangle\, d\tau = 0$$

y dado que tanto las variaciones como el incremento temporal son arbitrarios, se tiene

$$\frac{\partial L}{\partial x^\mu} - \mathcal{D}_\tau\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu}\right) = 0 , \qquad (9)$$

que son las ecuaciones de Euler-Lagrange estocásticas relativistas.

Para mostrar la compatibilidad con los resultados de de la Peña, supongamos que una partícula se encuentra en interacción con un campo electromagnético. El lagrangiano es, en este caso:

$$L = m\left(\dot{x}^\mu \dot{x}_\mu\right)^{1/2} + \frac{e}{c} A^\mu(x^\mu)\dot{x}_\mu , \qquad (10)$$

de donde

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_\mu} = \frac{m\dot{x}^\mu}{(\dot{x}^\mu \dot{x}_\mu)^{1/2}} + \frac{e}{c} A^\mu$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_\mu} = \frac{e}{c}\dot{x}_\nu \partial^\mu A^\nu ,$$

y por lo tanto:

$$\mathcal{D}_\tau\left(p^\mu_s + \frac{e}{c}A^\mu\right) = \frac{e}{c}\dot{x}_\nu \partial^\mu A^\nu \qquad (11)$$

que son las ecuaciones obtenidas por de la Peña para derivar la ecuación de Klein-Gordon.

105

(5)

FORMULACIÓN HAMILTONIANA.[79]

Al igual que en el caso no relativista se puede construir la versión hamiltoniana del formalismo. Recordando que la descripción debe incluir al momento canónico conjugado, se define al cuadrimomento en la forma:

$$p_i^\mu = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_\mu} \qquad (11)$$

definición que coincide con(7) si se toma el lagrangiano de partícula libre. La función hamiltoniana estocástica está dada entonces por la expresión

$$H \equiv H(x^\mu, p_i^\mu, \tau) = p_i^\mu \dot{x}_\mu - L(x^\mu, \dot{x}^\mu, \tau). \qquad (12)$$

Para obtener las ecuaciones de movimiento, se realiza la variación de la expresión(12).

$$\delta H = \frac{\partial H}{\partial p_i^\mu}\delta p_i^\mu + \frac{\partial H}{\partial x^\mu}\delta\langle x^\mu\rangle + \frac{\partial H}{\partial \tau}\delta\tau$$

$$= (\delta p_i^\mu)\dot{x}_\mu + p_i^\mu\delta\dot{x}_\mu - \frac{\partial L}{\partial x^\mu}\delta\langle x^\mu\rangle - \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu}\delta\dot{x}^\mu - \frac{\partial L}{\partial \tau}\delta\tau.$$

Igualando coeficientes en ambas expresiones se llega a las ecuaciones de Hamilton estocásticas relativistas:

$$\frac{\partial H}{\partial p_\mu^i} = \dot{x}^\mu \qquad (13a)$$

$$-\frac{\partial H}{\partial x_\mu} = \dot{p}^\mu_q \qquad (13b)$$

$$\frac{\partial H}{\partial \tau} = -\frac{\partial L}{\partial \tau} \qquad (13c)$$

Las ecuaciones (13), conducen directamente a las ⓐ

[illegible]

que

[illegible]

(14)

---

ECUACION DE HAMILTON JACOBI.

Se puede establecer ahora la versión estocástica relativista de la ecuación de Hamilton - Jacobi, la cual permite derivar los resultados

(15)

(A) ecuaciones de Lagrange estocásticas relativistas (9). Tanto las ecuaciones (13) como las ecuaciones (9), tienen como límite no relativista (i.e., ($\gamma_{\dot q} \to 1$)) a las ecuaciones estocásticas de Lagrange y de Hamilton derivadas por Bervondo. A su vez, estas últimas ecuaciones tienen como límite no estocástico ($D \to 0, \bar{u} \to 0$) a las ecuaciones de Lagrange y de Hamilton de la mecánica clásica.

cuánticos (y los brownianos) de manera directa. Siguiendo en forma paralela la derivación no relativista, se procede a establecer las transformaciones canónicas que preservan tanto la forma hamiltoniana de las ecuaciones como el carácter markoffiano de las variables involucradas en la transformación.

Supóngase que la transformación está determinada por una función generatriz F que depende de las coordenadas viejas, los nuevos momentos y del tiempo propio: $F = F(x^\mu, P^\mu, \tau)$. Al igual que en el caso no estocástico, el principio de acción implica que el lagrangiano antiguo y el nuevo deberán diferir a lo más en la derivada estocástica de la función F. Entonces

$$p^\mu_r \dot{x}_\mu = H(x^\mu, p^\mu_r, \tau) + Y^\mu \dot{P}^r_\mu + K(X^\mu, P^r_\mu, \tau) = \mathcal{D}F(x^\mu, P^\mu_r, \tau)$$

donde K es el hamiltoniano en términos de las variables nuevas $X^\mu$ y $P^\mu_r$. Si se desarrolla la derivada de F en forma explícita se tiene

$$\mathcal{D}F(x^\mu, p^\mu_r, \tau) = \frac{\partial F}{\partial x^\mu}\dot{x}^\mu + \frac{\partial F}{\partial p^\mu_r}\dot{p}^\mu_r + cD\partial^\mu\partial_\mu F + \ldots$$

donde los términos de orden superior se deben despreciar para conservar la forma markoffiana de las variables. Si se comparan términos en (?) y (?) resultan las ecuaciones.

$$p^{\mu}_{\ \gamma} = \frac{\partial F}{\partial x_{\mu}} \qquad X^{\mu} = \frac{\partial F}{\partial P_{\mu}}, \qquad (17)$$

y el nuevo hamiltoniano estocástico es

$$K = H + cD\,\partial_{\mu}\partial^{\mu}F. \qquad (18)$$

Si se escoge a K idénticamente cero, de modo que con la transformación las ecuaciones de movimiento sean:

$$\dot{X}^{\mu} = 0 \quad , \quad \dot{P}^{\mu} = 0, \qquad (19)$$

se llega a la ecuación de Hamilton-Jacobi estocástica relativista, es decir

$$H(x^{\mu}, \partial^{\mu}F, \tau) + cD\,\partial^{\mu}\partial_{\mu}F = 0. \qquad (20)$$

Con esto se completa la generalización del aparato formal de la mecánica clásica al caso estocástico relativista. La teoría es válida sólo para tiempos mayores que un cierto mínimo al igual que en la teoría de de la Peña, sólo que permite establecer resultados y analogías con mayor facilidad, como se verá en las aplicaciones que se desarrollan a continuación.

1) ECUACIÓN DE KLEIN-GORDON.

Como una aplicación del formalismo propuesto, se va a derivar la ecuación de Klein-Gordon, la cual se obtuvo con anterioridad, sólo que ahora mediante un procedimiento más directo.

Supóngase que se tiene un ensemble de partículas relativistas en interacción con un campo electromagnético descrito por el cuadripotencial $A^\mu$. El lagrangiano estocástico que describe a este sistema es:

$$L = \frac{m}{2}(V^\mu_s V_\mu^s) + \frac{e}{c} A^\mu V_\mu^s. \tag{1}$$

El momento canónico conjugado es:

$$p^\mu_s = \frac{\partial L}{\partial V_\mu^s} = mV^\mu_s + \frac{e}{c} A^\mu. \tag{2}$$

Mediante una transformación de Legendre, se obtiene la función de Hamilton:

$$h = \frac{\partial L}{\partial V^\mu_s} V^\mu_s - L = mV^s_\mu V^\mu_s - \frac{m}{2} V^s_\mu V^\mu_s\,, \tag{3}$$

En términos del cuadrimomento (2) y usando la identidad $V_\mu^s V^\mu_s = c^2$, se obtiene el hamiltoniano estocástico

$$H = \frac{1}{2m}\left(p^\mu_s - \frac{e}{c} A^\mu\right)\left(p^s_\mu - \frac{e}{c} A_\mu^s\right) - \frac{1}{2} mc^2. \tag{4}$$

La correspondiente ecuación de Hamilton-Jacobi es

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial x^\mu} - \frac{e}{c}A_\mu\right)^2 + \epsilon D \frac{\partial^2 S}{\partial x^\mu \partial x_\mu} = \frac{1}{2}mc^2 \qquad (5$$

Efectuando el cambio de variable

$$\psi = \exp\{S/2mcD\} \qquad (6a$$

y su conjugada:

$$\psi_* = \exp\{-S^*/2mcD\} \qquad (6b$$

se tendrá, substituyendo las expresiones (6a) y (6b) en (5), que:

$$(-2mcD\partial^\mu - \frac{e}{c}A^\mu)\psi = m^2c^2\psi \qquad (7$$

y la correspondiente ecuación conjugada para $\psi_*$. En el caso cuántico, cuando $\epsilon = i$ y $D = \hbar/2m$, la ecuación (7) es la ecuación de Klein-Gordon:

$$(-i\hbar\partial^\mu - \frac{e}{c}A^\mu)^2\psi - \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\psi = 0 \qquad ($$

DISCUSIÓN.

La ecuación de Klein-Gordon se obtiene (sin) forma casi inmediata del formalismo propuest
El hamiltoniano del problema es idénticamente
cero en el caso en que no existe interacción con
campos externos, ya que se cumple la relaci

111 111)

$p^{\mu}_{a}\, \bar{p}^{*a}_{\mu} = m^2 c^2$

... Por otro lado las ecuaciones propuestas implican la existencia de energías positivas y negativas[50], ~~las~~ cuales tienen su origen en la ecuación relativista clásica $p^{\mu} p_{\mu} = m^2 c^2$ y no tienen que ver con que se esté realizando una descripción cuántica como usualmente se afirma cuando se estudia la ecuación de Dirac. El resultado se mantiene a través de la ecuación de Klein-Gordon y de las ecuaciones de Gell-Mann - Feynman[51] y de Dirac[16,44,51] que estudiaremos a continuación.

ECUACIÓN DE FEYNMAN-GELL-MANN.[51]

La imposibilidad aparente de interpretar en forma consistente los valores negativos de la energía predichos por la ecuación de Klein-Gordon, condujo a Dirac a desarrollar una nueva ecuación relativista. Suponía él que si obtenía una ecuación de primer orden en las derivadas podría darle la vuelta a esta dificultad. Dirac postuló la ecuación:

$$\gamma^{\mu}\left(i\hbar\partial_{\mu} - \frac{e}{c}A_{\mu}\right)\psi = mc\psi. \qquad (1)$$

En esta ecuación, $\gamma^{\mu}$ representa al cuadrivector formado por las matrices

$$\gamma^{0} = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix}, \quad \vec{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \qquad (2)$$

y $\psi$ es una función con cuatro componentes.

La ecuación de Dirac ha probado dar la descripción más exacta que se tiene del electrón. Sin embargo, contrariamente al intento original de Dirac, su ecuación conduce también a la existencia de valores negativos de la energía, los cuales ya han sido satisfactoriamente explicados. Y una cosa más: incorpora en forma natural el spin del electrón. Dado que el spin está presente en la ecuación de Dirac y ausente en la de Klein-Gordon, la cual anteriormente se pensaba que era incorrecta, con frecuencia se afirma que el spin es un efecto relativista. Este argumento es incorrecto, ya que la ecuación de Klein-Gordon ha comprobado su validez.[52]

Con frecuencia se afirma también que la ecuación de Dirac predice de manera natural el momento magnético del electrón $e\hbar/2mc$. Este

Ojo: la ecuación de Pauli predice el término $\frac{e}{2}\vec{\sigma}\cdot\vec{B}$ ... $g=2$. Este valor ... sólo [illegible] de la [illegible]

valor resulta también de la ecuación de Pauli si ésta es analizada cuidadosamente.[51]

De manera análoga en que la ecuación de Klein-Gordon puede considerarse como la forma cuadrivectorial de la ecuación de Schrödinger, a la ecuación de Dirac se le puede considerar como la forma cuadrivectorial de la ecuación de Pauli y se esperaría que la derivación estocástica de la ecuación de Dirac consistiera meramente en proponer un lagrangiano estocástico que fuera la forma covariante de aquel que condujo a la ecuación de Pauli. Si se hace esto, no se obtiene la ecuación de Dirac sino una equivalente a ella, que es la ecuación de Feynman-Gell-Mann:

$$\left[\gamma^\mu\left(-i\hbar\partial_\mu - \frac{e}{c}A_\mu\right)\right]^2\psi = m^2c^2\psi. \qquad (3)$$

La equivalencia se ~~[illegible]~~ obtiene fácilmente si se multiplica la ecuación (1) por el operador $\gamma^\mu(-i\hbar\partial_\mu - \frac{e}{c}A_\mu)$ y se utiliza de nuevo (1).

La ecuación de Feynman-Gell-Mann se puede reescribir de las siguientes maneras:[31]

$$\left[\left(-i\hbar\partial_\mu - \frac{e}{c}A_\mu\right)^2 - \frac{i}{2}\frac{e}{c}\gamma_\mu\gamma_\nu F^{\mu\nu}\right]\psi = m^2c^2\psi, \qquad (4)$$

$$\left[\left(-i\hbar\partial^\mu - \frac{e}{c}A^\mu\right)^2 + \vec{\sigma}\cdot\left(\vec{B} + i\vec{E}\right)\right]\varphi = m^2c^2\varphi, \qquad (5)$$

en notación bidimensional y $\varphi$ una función de dos componentes.

~~ECUACIÓN DE GELL-MANN-FEYNMAN~~ [18]

La ecuación de Gell-Mann-Feynman describe partículas cuánticas relativistas con spin arbitrario y a diferencia de la ecuación de Dirac es una ecuación de segundo orden en las derivadas.

~~Considerando que esta ecuación debe ser la generalización covariante de la ecuación de Pauli, ya que esta última se obtuvo como un caso particular~~ (5). Para obtener la ecuación de Feynman-Gell-Mann de la teoría estocástica, se propone un lagrangiano estocástico covariante para una partícula puntual que de alguna manera posee un momento magnético conjuntamente con su spin.

La forma covariante del lagrangiano utilizado en la ecuación de Pauli es [5,2]:

$$L = -mc\,(V^{\mu}_{+}V_{\mu}{}^{+})^{1/2} + \frac{e}{c}A^{\mu}V_{\mu}{}^{+} + \frac{1}{2}\sigma_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \qquad (5)$$

A esta expresión se le asocia un cuadrimomento dado por

$$p^{\mu}_{+} = \frac{\partial L}{\partial V_{\mu}{}^{+}} = mV^{\mu}_{+} + \frac{e}{c}A^{\mu}, \qquad (6)$$

y un hamiltoniano definido por

$$h = \frac{1}{2}mV^{\mu}_{+}V_{\mu}{}^{+} - \frac{1}{2}mc^{2} - \frac{1}{4}\sigma_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \qquad (7)$$

que en términos del cuadrimomento es:

$$H = \frac{1}{2m}\left(p^{\mu}_{q} - \frac{e}{c}A^{\mu}\right)\left(p_{\mu}^{q} - \frac{e}{c}A_{\mu}\right) - \frac{1}{2}mc^2 - \frac{1}{4}\sigma_{\mu\nu}F^{\mu\nu}. \quad (8)$$

De nuevo, se puede escribir la ecuación de Hamilton Jacobi:

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial x^{\mu}} - \frac{e}{c}A^{\mu}\right)\left(\frac{\partial S}{\partial x_{\mu}} - \frac{e}{c}A_{\mu}\right) - \frac{1}{2}mc^2 - \frac{1}{4}\sigma_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + 2\epsilon mD\partial_{\mu}\partial^{\nu}S = 0 \quad (9)$$

Aquí es conveniente sumar la cantidad nula $-\frac{mDe}{c}\partial^{\mu}A_{\mu}$, la cual es cero debido a que se cumple la norma de Lorentz $\partial^{\mu}A_{\mu} = 0$. La ecuación resultante, puede ser linealizada mediante el cambio de variable definido por:

$$\psi = \exp\{S/2m\epsilon D\} \quad (10)$$

Si se identifica de nuevo a $\epsilon = i$ y $D = \hbar/2m$, se obtiene de inmediato la ecuación de Gell-Mann-Feynman:[51]

$$\left(-i\hbar\partial^{\mu} - \frac{e}{c}A^{\mu}\right)^2 - \frac{m}{2}\sigma_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\psi = m^2c^2\psi. \quad (11)$$

(para Spin 1/2)

DISCUSIÓN.

La ecuación de Gell-Mann-Feynman es considerada como equivalente a la ecuación de Dirac[51,52] y es una consecuencia directa del formalismo estocástico relativista. Esta ecuación posee también la cualidad de poseer valores positivos y negativos

(12?)

de la energía, como puede verse al tomar el caso en que no hay interacción con campos electromagnéticos, obteniéndose la ecuación de Klein-Gordon.

0 ~~Ballentine, Rev. Mod. Phys., 42 (1970) 358~~

1 - A Sense of the Future
J. Bronowski
Ed. MIT, 5ª Edición

2 - Brody et al. Rev. Mex. Fís., 25 (1976) 31

3 - Introducción a la Mecánica Cuántica.
L. de la Peña
Ed. CECSA, México,

4 - De mis últimos años
A. Einstein
Ed. Aguilar

5 - Einstein, navegante solitario. Ensayo de L. de la Peña publicado en el libro: "Einstein"
Ed. Ciencia y Desarrollo, México

6 - Quantum Mechanics
P. A. M. Dirac
Ed. Oxford University Press, Oxford. (1978)

7 - L. de la Peña y A.M. Cetto, Rev. Mex. Fís 22 (1973) 43

8 - R. Fürth, Zeit. f. Phys. 81 (1933) 143

9 - I. Fényes, Zeit. f. Phys. 132 (1952) 81

10 - Weizel, Zeit. f. Phys. 134 (1953) 264; 135 (1953) 270; 136 (1954) 582.

11 - Kershaw, Phys. Rev. B 136 (1964) 1850.

12 - E. Nelson, Phys. Rev., 150 (1966) 1079.

* 13 - Uhlenbeck y Ornstein, Phys. Rev., 36 (1930) 823.

14 - A.M. Cetto y L. de la Peña, Rev. Mex. Fís., 24 (1975) 105.

15 - L. de la Peña, J. Math. Phys., 10 (1969) 1620

16 - L. de la Peña y A.M. Cetto, Found. of Phys., 5 (1975) 355
Ver también Found. of Phys. (1982)

17 - L. de la Peña, J. Math. Phys., 12 (1971) 453

18 - T.G. Dankel, J. Math. Phys., 18 (1977) 253

19 - Lehr y Park, J. Math. Phys., 18 (1977) 1235

20 - L. de la Peña, Rev. Mex. Fís.

21 - Petroni y Vigier, Phys. Lett., 81 A (1981) 12

22 A. Einstein, On The Theory of Brownian Movement.
Ed. Dover Publications, Inc., New York ( )

23: Doob, Stochastic Processes
Ed. John Wiley & Sons, Inc. New York (1953).

* 24: Wax, Selected Papers on Noise and Stochastic Process
Ed. Dover Publications, Inc. New York (1954).

25: H. A. Lemos. Comunicación del Instituto de Física de la Universidade Federal Fluminense, Brasil (1982).

26: Etim, Il Nuovo Cim, 51 A (1979) 405.

27: Gnedenko, The Theory of Probability,
Ed. Chelsea Publishing Company, New York.

28: Haken, Synergetics. An Introduction.
Ed. Springer-Verlag, Berlin (1978).

29: L. de la Peña y A. M. Cetto, Rev. Mex. Fís. 18 (1969) 323.

30: Herzberg, Atomic Spectra and Atomic Structure.
Ed. Dover Publications, Inc. New York. (1945).

31: Rémi Hakim, J. Math. Phys. 6 (1965) 1482.

32.- Rémi-Hakim, J. Math. Phys. 9 (1968) 1805.

33.- Jackson, Classical Electrodynamics.
Ed. John Wiley & Sons, New York (1975)

34.- Goldstein, Classical Mechanics.
Ed. Addison Wesley, Reading, Mass. (1950)

35.- Taylor y Wheeler, Space-Time Physics.
Ed. Freeman, San Francisco (1966)

36.- L. de la Peña y L. García-Colín, J. Math. Phys., 9 (1968) [illegible]

37.- Vigier, Lett. Nuovo Cim., 24 (1979) 265.

38.- M. Berrondo, Il Nuovo Cim., 18B (1975) 95.

39.- L. de la Peña y A. M. Cetto, Rev. Mex. Fís., 18 (1969) 253.

40.- E. Santos, Il Nuovo Cim., 51B (1969) 65.

41.- Landau y Lifshitz, Teoría Clásica de los Campos.
Ed. Reverté S.A., Barcelona (1973).

42.- Ito

43.- Good y Nelson, Classical Theory of Electric and Magnetic Fields.
Ed. Academic Press, Inc. New York (1971)

44.- L. de la Peña y A.M. Cetto, Rev. Mex. Fís., 18 (1969) 323.

45.- C. Frederick, Phys. Rev. D, 13 (1976) 3183.

46.- Roy, Il Nuovo Cim. 51B, (1979) 29.

47.- Namsrai, Sov. J. Part. Nucl, 12 (1981) 449.

48.- J. Leite López, Introducción a la Electrodinámica Cuántica.
Ed. Trillas, México (1977)

49.- Rohrlich, Classical Charged Particles.
Ed. Addison-Wesley, Reading, Mass. (1975)

50.- Feynman, Quantum Electrodynamics.
The Benjamin/Cummings Publishing Company, Inc., Reading, Mass. (1962)

51.- Feynman y Gell-Mann, Phys. Rev., 109 (1958) 193

52:- R.P. Feynman, Phys. Rev., 84 (1951) 123.

53:- Davydov, Quantum Mechanics,
Ed. Neo Press, Peaks Island, Maine (1966).

54:- Landau, Physical Kinetics
Ed. Pergamon Press

55:- Messiah, Mecánica Cuántica
Ed. Tecnos, Madrid (1973)

56:- Frieden, Int. J. of Theoretical Phys. 15 (1976) 389.

57:- Yasue, Phys. Rev. Lett., 40 (1978) 665.

58:- Ballentine, Rev. Mod. Phys. 42 (1970) 358

59:- Slater, J. Franklin Inst. 207 (1929) 449

60:- J. Von Neumann, Mathematical Foundations of
Quantum Mechanics,
Ed. Princeton University Press.

61:- Marshall, Proc. Roy. Soc. A273 (1963) 45

62:- L. de la Peña, A.M. Cetto, Found. of Phys. ___ (1975) 191

CONCLUSIONES.

En este trabajo se encontró que es posible postular un principio variacional estocástico relativista, a partir del cual, se pueden derivar las ecuaciones estocásticas relativistas de Lagrange, de Hamilton y de Hamilton-Jacobi. Estas, a su vez, dan lugar a las ecuaciones cuánticas de Klein-Gordon, de Feynman-Gell-Mann y de Dirac, así como a ecuaciones brownianas relativistas.

El principio variacional propuesto tiene como caso límite, para bajas velocidades, el principio estocástico ~~propuesto~~ por Rorrondo; en cambio, en el límite no estocástico, se recupera el Principio de Hamilton relativista.

Además de lo anterior, se presentó una introducción para los interesados en el tema.