



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

Facultad de Ciencias

METODOS MATEMATICOS EN LA ESTRUCTURA  
NUCLEAR Y SUS APLICACIONES.

T E S I S

Que para obtener la Licenciatura en:

F I S I C A

P r e s e n t a n :

Rubén Darío Santiago Acosta y

Ramón López Peña

1983



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

# TESIS CON FALLA DE ORIGEN

# INDICE

|  |    |
|--|----|
| INTRODUCCION   | 1  |
| PARTE 1. MODELO DE CAPAS NUCLEAR   |    |
| Capítulo I    MODELO DE PARTICULA INDEPENDIENTE  | 3  |
| 1. Introducción (Descripción del modelo)   | 3  |
| 2. Forma funcional del potencial común y movimiento del centro de masa   | 5  |
| 3. Funciones de onda en un campo central   | 7  |
| 4. Momento angular total de partículas con espín 1/2   | 14 |
| 5. Acoplamiento espín-órbita y predicción de los números mágicos   | 17 |
| 6. Momentos electromagnéticos  | 24 |
| 7. Transiciones electromagnéticas  | 30 |
| Bibliografía   | 38 |
| Capítulo II    SISTEMAS CON DOS PARTICULAS FUERA DE CAPA CERRADA   |    |
| 1. Dos partículas interactuantes en un campo central   | 40 |
| 2. Acoplamientos L-S y j-j   | 42 |
| 3. Equivalencia de protones y neutrones (Isoespín)   | 49 |
| 4. Interacción residual de dos cuerpos y operadores de intercambio   | 53 |
| 5. Método de la expansión tensorial de la interacción (Expansión de Slater)  | 59 |
| 6. Dos partículas en un potencial de oscilador armónico. Paréntesis de transformación entre las coordenadas referidas al centro del potencial, y las coordenadas relativa y del centro de masa | 63 |
| 7. Aplicaciones a núcleos con A=18   | 67 |
| Referencia   | 92 |



|              |  |     |
|--------------|--|-----|
| Capítulo III | Sistemas de tres o más partículas activas  |     |
| 1.           | Construcción de las funciones de onda antisimétricas para las configuraciones $j^3$ y $j^4$      | 94  |
| 2.           | Coefficientes de Parentesco Fraccional y la configuración $j^n$                                  | 99  |
| 3.           | Evaluación de los elementos de matriz de los operadores de uno y de dos cuerpos                  | 102 |
| 4.           | Estados antisimétricos y el acoplamiento L-S (104)   |     |
| 5.           | Esquema de Antigüedad (Pares de partículas acoplados a $J=0$ )                                   | 109 |
| 6.           | Coefficientes de Parentesco Fraccional y el esquema de Antigüedad                                | 125 |
| 7.           | Cálculo de elementos de matriz de operadores de uno y de dos cuerpos en el esquema de Antigüedad | 132 |
|              | Apéndice A. Coeficientes de acoplamiento y álgebra tensorial de Racah                            | 150 |
|              | Bibliografía   | 149 |

PARTE 2. TECNICAS DE TEORIA DE GRUPOS EN SISTEMAS DE MUCHOS CUERPOS

|             |   |     |
|-------------|---|-----|
| Capítulo IV | ELEMENTOS DE TEORIA DE GRUPOS   | 159 |
| 1.          | Resumen de resultados para grupos finitos   | 160 |
| 2.          | Resumen de resultados para grupos continuos   | 163 |
| 3.          | Representaciones de Grupos de Lie. Clasificación de estados de acuerdo a Representaciones Irreducibles de un grupo. | 170 |
| 4.          | Bases para Representaciones Irreducibles de Grupos Lineales en un espacio de dimensión $N$                          | 173 |
| 5.          | Esquema de Supermultiplete de Wigner  | 182 |
| 6.          | Modelo $SU(3)$ de Elliott   | 194 |
|             | Apéndice B. Descomposición de Representaciones Irreducibles de $SU(3)$ en Representaciones Irre-                    |     |

|              |   |     |
|--------------|---|-----|
|              | ducibles de $SU(2) \times U(1)$   | 206 |
|              | Bibliografía  | 211 |
| Capítulo V   | EL PROBLEMA DE MUCHOS CUERPOS Y<br>EL ESQUEMA DE SEGUNDA CUANTIZACION   |     |
|              | 1. El esquema de Segunda Cuantización   | 213 |
|              | 2. Operadores de uno o más cuerpos  | 217 |
|              | 3. El Hamiltoniano de $N$ fermiones y su relación<br>con la Teoría de Grupos  | 219 |
|              | 4. Clasificación de los estados de $N$ fermiones  | 222 |
|              | 5. Operadores de descenso   | 230 |
|              | 6. Estados con espín e isoespín definidos   | 241 |
|              | 7. Operadores de intercambio  | 245 |
|              | 8. Modelo de Interacción de Apareamiento  | 248 |
|              | Bibliografía  | 283 |
| Capítulo VI  | HAMILTONIANO DE $N$ FERMIONES EN LA CAPA $2s-1d$  |     |
|              | 1. Interacción central más general en la capa $2s-1d$   | 285 |
|              | 2. Generadores y operadores de Casimir de las<br>cadenas de subgrupos de $U(b)$ que contienen<br>a $O(3)$   | 289 |
|              | 3. Clasificación de los estados en la capa<br>nuclear $2s-1d$   | 291 |
|              | 4. Expresión del Hamiltoniano central más general<br>en la capa nuclear $2s-1d$ en términos de los o-<br>peradores de Casimir de las cadenas de subgru-<br>pos de $U(b)$ que contienen a $O(3)$ | 295 |
|              | 5. Límites exactos del modelo   | 302 |
|              | Bibliografía  | 305 |
| CONCLUSIONES |   | 306 |

## INTRODUCCION

El objetivo central de esta tesis es el de realizar una revisión cuidadosa de algunos de los métodos matemáticos de mayor interés en la elaboración de modelos de la estructura del núcleo atómico. Estos métodos incluyen aquéllos necesarios para la comprensión y utilización del Modelo de Capas Nuclear, que es sin lugar a dudas el esquema fundamental en que se basa el entendimiento de las propiedades nucleares. En la primera parte de este trabajo estudiamos el modelo en orden creciente de complejidad, empezando por el modelo de partícula independiente en el capítulo I, donde discutimos los principios físicos fundamentales del modelo e indicamos el esquema matemático en que se basa. En el capítulo II discutimos el problema de dos nucleones fuera de capas cerradas, que es el problema más simple posible que incluye ya la interacción residual entre los nucleones y los problemas derivados de la antisimetrización de las funciones de onda. Esto nos permite analizar en detalle diversas técnicas matemáticas necesarias para la realización de cálculos en el modelo, como son el de los acoplamientos L-S y j-j, la transformación entre éstos, el uso de paréntesis de transformación entre coordenadas en el laboratorio y coordenadas relativa y de centro de masa, etc. En la última sección de este capítulo aplicamos estas técnicas al cálculo de espectros de energía para los núcleos con  $A=18$ . En el último capítulo correspondiente a la primera parte (capítulo III) indicamos como generalizar el análisis de los capítulos anteriores a tres o más partículas, lo que hace necesario la introducción de los coeficientes de parentesco fraccional y del esquema de antigüedad (seniority) en la evaluación de elementos de matriz. Por último, en el apéndice A discutimos los elementos básicos del álgebra tensorial de Racah.

A pesar del éxito del modelo de capas en la descripción de las propiedades nucleares y la aceptación generalizada de que goza, es importante señalar que existen limitaciones prácticas en su aplicabilidad. En regiones "alejadas" a capas cerradas, donde el número de nucleones activos es relativamente grande, el número de configuraciones dentro del modelo crece en forma astronómica, lo que da lugar a matrices cuya dimensión es demasiado

grande para intentar hacer cálculos razonables. Por otra parte, existe evidencia experimental clara de que para dichos núcleos aparecen configuraciones dominantes en las excitaciones a bajas energías, como son, por ejemplo, las excitaciones "colectivas" de los nucleones en que el movimiento de éstos se realiza en forma coherente. En este caso, dichas configuraciones se ven favorecidas entre la totalidad de ellas debido al dominio de ciertas interacciones de largo alcance que aparecen en forma efectiva en la dinámica nuclear. En estas condiciones, resulta necesario introducir modelos nucleares que reflejen esta situación en forma simple, ya que el modelo de capas parte precisamente del concepto opuesto de movimientos independientes aunados a interacciones residuales entre los nucleones.

Dentro del área de Modelos Nucleares, son particularmente atractivos aquéllos que se basan en la existencia de simetrías de distinta índole en la dinámica nuclear, ya sean simetrías exactas o aproximadas. Estos modelos pueden describirse en el contexto de la Teoría de Grupos, que es la rama de las matemáticas que se adapta en forma natural a la descripción de sistemas que poseen estas simetrías. En la segunda parte de la tesis estudiamos entonces los elementos básicos de esta teoría y discutimos, en el capítulo IV, algunos modelos, como el del supermultiplete de Wigner y el SU(3) de Elliott, que han marcado la pauta a seguir en la aplicación de la Teoría de Grupos a la estructura nuclear. En el capítulo V analizamos el problema de muchos cuerpos en el esquema de segunda cuantización y discutimos su relación con la Teoría de Grupos, ejemplificando estas técnicas mediante el modelo de interacción de apareamiento. Por último, en el capítulo VI discutimos el caso de la capa nuclear  $2s-1d$ , generalizando en principio los análisis realizados por Moshinsky y sus colaboradores en esta región, escribiendo la interacción más general como una combinación de operadores invariantes de  $U(6)$  y sus subgrupos, más una interacción residual. Esta última parte constituye la contribución original de este trabajo y abre algunas perspectivas de investigación en esta área.

## CAPITULO I. MODELO DE PARTICULA INDEPENDIENTE.

## SECCION 1. INTRODUCCION.

Entre los problemas más interesantes que estudia la Física Nuclear se encuentra el de la estructura nuclear, en donde se comprenden los siguientes aspectos: movimiento de los nucleones dentro del núcleo, sus trayectorias en el espacio, cálculo de los momentos electromagnéticos, evaluación de energías de amarre y de excitación, y otras cantidades que determinan el comportamiento de los núcleos. El problema no es sencillo, y desde el punto de vista matemático implica la determinación exacta de la función de onda del núcleo. Como se mencionó en la introducción, aún en el caso de que conociéramos exactamente la interacción entre los nucleones, el problema de  $N$  cuerpos no sería soluble en forma exacta. El problema nuclear requiere entonces de métodos alternativos que incorporen los grados de libertad principales dentro del sistema. Para estudiarlo es necesario elaborar modelos que tengan un número de parámetros lo suficientemente pequeño como para permitir el análisis matemático, pero lo suficientemente grande como para predecir un cuadro bastante detallado, aunque posiblemente parcial, de las propiedades físicas observables de los núcleos.

Con esta finalidad introducimos en esta primera parte el Modelo de Partícula Independiente (MPI) <sup>1)</sup> y establecemos su relación con el Modelo de Capas Nuclear <sup>1)</sup>.

En el MPI se supone que los nucleones en los núcleos par-non se mueven en órbitas estacionarias y que se aparean en forma tal que los parámetros, y por ende las propiedades nucleares, son determinados exclusivamente por el nucleón no apareado. El modelo no considera los movimientos coherentes de varios nucleones ni las posibles interacciones residuales entre ellos, pero supone que el movimiento del nucleón no apareado se efectúa bajo la influencia de un campo central, que se produce como consecuencia de

El MCN representa una considerable extensión del MPI, ya que incorpora en su formalismo las posibles interacciones residuales entre los nucleones, en particular aquéllas entre los nucleones en las capas abiertas (o nucleones de "valencia"), aunque es posible considerar también interacciones con capas interiores a través del formalismo de partículas y agujeros. El hecho de que el núcleo pueda estudiarse en base a un modelo de esta naturaleza resulta a primera vista sorprendente por lo que ha sido sometido a innumerables investigaciones que lo han validado ampliamente.

El ejemplo más conocido de una estructura de capas es el de la estructura atómica <sup>2)</sup>, en donde los electrones se mueven bajo la influencia de la atracción coulombiana que ejerce el núcleo central, perturbados por la repulsión debida a los demás electrones. La tabla periódica de los elementos muestra claramente una estructura de capas; los elementos nobles son los que cierran las capas y, por tanto, los más difíciles de excitar.

En el problema nuclear las consideraciones son distintas ya que no hay un campo central producido por una fuente externa sino que se tienen únicamente las interacciones entre los nucleones. Sin embargo, en base a la evidencia experimental <sup>3)</sup>, es posible mostrar que el comportamiento de un nucleón en el núcleo bajo la atracción de los otros nucleones se puede aproximar por el de una partícula en un campo central promedio, si es que añadimos a esta descripción una interacción residual entre los nucleones que se parametriza apropiadamente <sup>4)</sup>. Esto es consecuencia esencialmente de los efectos del Principio de Exclusión de Pauli sobre las posibles interacciones nucleón-nucleón dentro del núcleo.

Tanto en el MPI como en el MCN es de gran importancia determinar cuál es la estructura del potencial central en el que se mueven los nucleones, así como el de la interacción residual en este último. Son estos aspectos del problema los que analizamos en la sección siguiente.

## SECCION 2. FORMA FUNCIONAL DEL POTENCIAL COMÚN Y MOVIMIENTO DEL CENTRO DE MASA.

Existe otra diferencia importante entre núcleos y átomos; cuando consideremos el movimiento de electrones en un átomo tenemos un punto de referencia natural: el núcleo, en cuyo campo se mueven los electrones y cuyo masa es muy grande comparada con estos <sup>2)</sup>. No hay tal punto de referencia en el núcleo, y a primera vista es difícil entender porque un potencial central es un buen punto de partida para un modelo nuclear.

La función de onda que describe al núcleo, formada por las funciones de onda de las partículas individuales, no se separa en un producto de funciones de onda que describen el movimiento del centro de masa y un movimiento interno. En la energía total se encuentra mezclada la energía debida a las fuerzas internas y la energía del centro de masa, que se debe al movimiento de este en un campo externo; la determinación de esta última energía y su campo asociado es suamente difícil. Esta dificultad surge, esencialmente, por considerar un sistema finito. En la materia nuclear infinita podemos usar ondas planas para la función de onda de un nucleón y este tipo de funciones son invariantes ante traslaciones, mientras que el núcleo finito es invariante solo con respecto a la traslación del centro de masa.

Podríamos formular el problema del núcleo finito en términos de las coordenadas de los nucleones con respecto al centro de masa, pero en este caso los  $A$  vectores  $\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_A$ , de posición de las partículas, no son independientes (cumplen  $\sum_{i=1}^A \vec{r}_i = \vec{0}$ ), y es difícil considerar la ecuación de Schroedinger en términos de variables dependientes.

Una segunda opción es introducir  $A-1$  vectores independientes  $\vec{r}_i$ ,  $i=2, \dots, A$ , para describir las coordenadas intrínsecas. Estas coordenadas podrían definirse de la siguiente manera :

$$T_n = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \vec{p}_i^2 \quad (2.1)$$

donde  $\vec{T}_n$  es el vector de la enésima partícula con respecto al centro de masa de las primeras  $n-1$  partículas, pero con estas variables se tiene un grave problema: no son simétricas en todos los nucleones y, en consecuencia, es difícil antisimetrizar las funciones de onda, lo que resulta imprescindible en la descripción de un sistema de fermiones.

La opción más viable para resolver el problema consiste en sumar al hamiltoniano nuclear

$$H = \sum_i T_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j} V_{ij} + U(R) \quad (2.2)$$

un potencial  $U(R)$  que actúe sobre el centro de masa del núcleo. Con este potencial confinamos al núcleo a una porción limitada del espacio sin cambiar su estructura intrínseca. Los efectos de este potencial ("estados espurios") pueden eliminarse posteriormente.<sup>4)</sup>

La ecuación de Schroedinger que tenemos en este caso es entonces

$$H' \Psi_R = \left[ \sum_i T_i + \sum_{i,j} V_{ij} + U(R) \right] \Psi_R(R, A) = E \Psi_R(R, A) \quad (2.3)$$

La elección  $U(R)$  es arbitraria pero podemos simplificar mucho el problema si consideramos el potencial de oscilador armónico, ya que este satisface la identidad:

$$R^2 = \left( \frac{1}{A} \sum_{i=1}^A \vec{r}_i \right)^2 = \frac{1}{A} \sum_{i=1}^A \vec{r}_i^2 - \frac{1}{A} \sum_{i,j=1}^A (\vec{r}_i - \vec{r}_j)^2 \quad (2.4)$$

que puede interpretarse en términos físicos como si fue: la fuerza armónica que actúa sobre el centro de masa es equivalente a fuerzas armónicas actuando sobre cada partícula ( $\sum_i \vec{r}_i^2$ ) mas una corrección de dos cuerpos ( $-\sum_{i,j} (\vec{r}_i - \vec{r}_j)^2$ ).

El hamiltoniano adquiere entonces la forma

$$H' = \sum_i \left( \frac{p_i^2}{2m} + \frac{1}{2} \mu \omega^2 r_i^2 \right) + \sum_{i,j} V_{ij} \quad (2.5)$$

Procedamos a estudiar el Modelo de Partícula Independiente en un potencial de oscilador armónico. Con las funciones de onda que aquí construyamos, derivaremos las funciones de onda de muchas partículas en los capítulos siguientes.



SECCION 3. FUNCIONES DE ONDA EN UN CAMPO CENTRAL.  
ORBITAS DE PARTICULA INDEPENDIENTE.

Estamos interesados en encontrar solución al problema de una partícula en un campo central de fuerzas descrito por el hamiltoniano

$$H(\vec{p}, \vec{r}) = \frac{1}{2m} P^2 + V(r) \quad (3.1)$$

Se harán claras las propiedades mas importantes del sistema usando los operadores de momento angular orbital, que en coordenadas cartesianas se definen como

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = -i\hbar \vec{r} \times \nabla \quad (3.2)$$

que satisfacen las reglas de conmutación

$$[\hat{L}_x, \hat{L}_y] = i\hbar \hat{L}_z \quad (3.3)$$

y permutaciones cíclicas, (p.c.).

A partir de (3.3) es fácil ver que el operador que describe el cuadrado del momento angular orbital:  $\hat{L}^2 = \hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 + \hat{L}_z^2$ , conmuta con cada una de las componentes de  $\vec{L}$

$$[\hat{L}^2, L_x] = 0 \quad \text{y p.c.} \quad (3.4)$$

En coordenadas esféricas ( $r, \theta, \phi$ ) definidas por las relaciones

$$\begin{aligned} x &= r \sin \theta \cos \phi, \\ y &= r \sin \theta \sin \phi, \\ z &= r \cos \theta \end{aligned} \quad (3.5)$$

los operadores  $\hat{L}_x, \hat{L}_y, \hat{L}_z$  y  $\hat{L}^2$  adquieren la forma

$$\begin{aligned} \hat{L}_z &= -i\hbar \left( x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right) = -i\hbar (r \sin \theta \cos \phi \frac{\partial}{\partial y} - r \sin \theta \sin \phi \frac{\partial}{\partial x}) \\ &= -i\hbar \left( \frac{\partial x}{\partial \phi} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \phi} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial \phi} \frac{\partial}{\partial z} \right) = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \phi} \end{aligned}$$

$$\hat{L}_x = i\hbar \left( \sin \phi \frac{\partial}{\partial \theta} + \cos \phi \cot \theta \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \quad (3.6)$$

$$\hat{L}_y = i\hbar \left( -\cos \phi \frac{\partial}{\partial \theta} + \sin \phi \cot \theta \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \quad \text{y}$$

$$\hat{L}^2 = -\hbar^2 \left( \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right)$$

De estas últimas relaciones notamos que los operadores de momento angular orbital involucran solo las coordenadas angulares y no dependen de la coordenada radial, de esto inferimos

$$[\hat{l}, V(r)] = 0, \quad [\hat{l}^2, V(r)] = 0. \quad (3.7)$$

De la relación (3.2) deducimos también que

$$[\hat{l}, p^2] = 0, \quad [\hat{l}^2, p^2] = 0, \quad (3.8)$$

por lo que el vector  $\hat{l}$  y el escalar  $\hat{l}^2$  conmutan con el hamiltoniano de campo central y, en consecuencia, son constantes de movimiento.

Los tres operadores  $H$ ,  $\hat{l}^2$  y  $\hat{l}_z$  conmutan entre si y nos proporcionan tres números cuánticos para la descripción del movimiento de una sola partícula: la energía, el cuadrado del momento angular, y la proyección del momento angular en el eje "z".

Utilizando las relaciones de conmutación se puede demostrar que los eigenvalores del operador  $\hat{l}^2$  son los números positivos  $\ell(\ell+1)$  donde  $\ell$  es un entero, y los eigenvalores de  $\hat{l}_z$  son los números enteros  $m$ , con la limitación  $|m| \leq \ell$ .

Es decir, para cada valor  $\ell$ , existen  $2\ell+1$  eigenfunciones  $\Psi(\ell, m) = |l, m\rangle$  de  $\hat{l}^2$ , todas con el mismo eigenvalor  $\ell(\ell+1)$  de  $\hat{l}^2$ , pero que pertenecen a distintos eigenvalores  $m$  de  $\hat{l}_z$ . Para obtener las funciones de onda  $\Psi(r, \theta, \phi) = \langle r, \theta, \phi | l, m \rangle$

que son eigenfunciones de  $H$ ,  $\hat{l}^2$  y  $\hat{l}_z$ , debemos resolver el sistema de ecuaciones diferenciales,

$$\begin{aligned} H \Psi(\vec{r}) &= E \Psi(\vec{r}) \\ \hat{l}^2 \Psi(\vec{r}) &= \ell(\ell+1) \Psi(\vec{r}) \\ \hat{l}_z \Psi(\vec{r}) &= m \Psi(\vec{r}) \end{aligned} \quad (3.9)$$

Proponiendo la solución  $\Psi(\vec{r}) = R_{\ell m}(r) \Theta_{\ell m}(\theta) \Phi_m(\phi)$  y escribiendo las ecuaciones (3.9) en coordenadas esféricas

tenemos

$$\frac{\hbar^2}{2m} \left[ \frac{d^2}{dr^2} P_{\ell m} + \frac{2}{r} \frac{dP_{\ell m}}{dr} \right] + \frac{1}{\Psi} \left[ E_{\ell m} - V(r) - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{r^2} \hat{l}^2 \right] \Psi(\vec{r}) = 0,$$

$$-\left[ \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} (\sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta}) + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial\phi^2} \right] \Theta_{\ell m}(\theta) \Phi_m(\phi) = \ell(\ell+1) \Theta_{\ell m}(\theta) \Phi_m(\phi), \quad (3.10)$$

$$-i \frac{\partial}{\partial\phi} \Phi_m(\phi) = m \Phi_m(\phi)$$

La tercera ecuación tiene la solución:

$$\Phi(\phi) = e^{im\phi} \quad (3.11)$$

En la segunda ecuación reconocemos la ecuación diferencial que satisfacen los polinomios asociados de Legendre, de modo que

$$P_{\ell m}(\cos\theta) = \frac{(-1)^m}{2^\ell \ell!} (\sin^2\theta)^{m/2} \frac{d^{\ell+m}}{d(\cos\theta)^{\ell+m}} \sin^{2\ell}\theta \quad (3.12)$$

El producto de las funciones (3.11) y (3.12) definen los armónicos esféricos  $Y_{\ell m}(\theta, \phi)$ , que normalizados sobre el ángulo sólido  $d\Omega$  adquieren la forma

$$Y_{\ell m}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{(2\ell+1)(\ell-m)!}{4\pi(\ell+m)!}} P_{\ell m}(\cos\theta) e^{im\phi} \quad (3.13)$$

y satisfacen la relación de ortogonalidad

$$\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sin\theta d\theta Y_{\ell m}^*(\theta, \phi) Y_{\ell' m'}(\theta, \phi) = \delta_{\ell\ell'} \delta_{mm'} \quad (3.14)$$

De aquí en adelante utilizaremos el potencial de oscilador armónico  $V(r) = \frac{1}{2} m \omega^2 r^2$ , y si además hacemos el cambio  $\psi(r) = \frac{1}{r} R(r)$  la primera ecuación en (3.10) se reduce a

$$\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 R_{\ell m}(r)}{dr^2} + \left[ E_{\ell m} - \frac{1}{2} m \omega^2 r^2 - \frac{\hbar^2 \ell(\ell+1)}{2m r^2} \right] R_{\ell m}(r) = 0 \quad (3.15)$$

Definiendo las cantidades  $\epsilon_{\ell m} = \frac{2m}{\hbar^2} E_{\ell m}$  y  $\gamma = \frac{1}{2} \frac{m\omega}{\hbar}$  obtenemos

$$\left( \frac{d^2}{dr^2} + \epsilon_{\ell m} - \gamma^2 r^2 - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \right) R_{\ell m}(r) = 0, \quad (3.16)$$

que para  $r$  grandes se reduce a

$$\left( \frac{d^2}{dr^2} - \gamma^2 r^2 \right) R_{\ell m}(r) = 0, \quad (3.17)$$

cuyas soluciones tienden asintóticamente a  $\exp(\pm \gamma r^2)$ . Como solo  $\exp(-\gamma r^2)$  nos da un comportamiento físicamente aceptable, proponemos

$$R_{\ell m}(r) = e^{-\gamma r^2} y_{\ell m}(r), \quad (3.18)$$

de donde obtenemos, substituyendo en (3.16)

$$\left( \frac{d^2}{dr^2} - \gamma^2 r^2 \frac{d}{dr} + \epsilon_{\ell m} - 2\gamma - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \right) y_{\ell m}(r) = 0 \quad (3.19)$$

con la condición  $y_{\ell m}(0) = 0$ . Ahora, proponemos a  $y_{\ell m}(r)$

como una serie de potencias de  $r$ .

$$y_{\ell m}(r) = r^s \sum_{q=0}^{\infty} a_q r^q, \quad a_0 \neq 0 \quad (3.20)$$

Substituyendo en (3.19), se tiene

$$\sum_{q=0}^{\infty} \left\{ (s+\gamma+2)(s+\gamma+1) a_{q+2} - \gamma^2 (s+\gamma) a_q + (\epsilon_{\ell m} - 2\gamma) a_q - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} a_q - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} a_{q+2} \right\} r^{s+2+q} + \left\{ s(s+1) - \ell(\ell+1) \right\} a_1 r^{s-1} + \left\{ s(s-1) - \ell(\ell-1) \right\} a_0 r^{s-2} = 0 \quad (3.21)$$

de donde inferimos que

$$S = -l \quad \text{ó} \quad S = l+1 \quad \text{si } a_0 \neq 0, \quad (\text{como en (3.20)})$$

$$S = -(l+1) \quad \text{ó} \quad S = l \quad \text{si } a_1 \neq 0, \quad (3.22)$$

$$\left\{ (S+l+2)(S+l+1) - l(l+1) \right\} a_{q+2} + \left\{ \epsilon_{k,l} - 2^2 \nu \left( l + \frac{1}{2} \right) \right\} a_l = 0$$

De la condición de que  $a_0 \neq 0$  y  $y_{l,l}(0) = 0$ , tenemos que  $l_1 = 0$  y  $S = l+1$ , de donde

$$a_{q+2} = \frac{4\nu(l + \frac{1}{2} + q) - \epsilon_{k,l}}{(2+q)(2l+3+q)} a_q \quad (3.23)$$

Observamos de (3.23) que si  $\epsilon_{k,l}$  es tal que alguno de los coeficientes  $a_q$  no es cero para alguna  $q \in \mathbb{Z}^+$ , tenemos una serie infinita en la que

$$\frac{a_{q+2}}{a_q} \sim \frac{4\nu}{q} \quad \text{as } q \rightarrow \infty \quad (3.24)$$

Este comportamiento es el mismo que el de los coeficientes que aparecen en la expansión de  $\exp(2\nu p^2) = \sum_{p=0}^{\infty} c_{2p} p^{2p}$  donde  $c_{2p} = (2\nu)^p / p!$ , ya que

$$\frac{c_{2(p+1)}}{c_{2p}} = \frac{(2\nu)^{p+1}}{(p+1)!} \cdot \frac{p!}{(2\nu)^p} = \frac{2\nu}{p+1} \sim \frac{2\nu}{p} \quad \text{as } p \rightarrow \infty \quad (3.25)$$

De estos razonamientos concluimos que si  $y_{k,l}$  tiene un número infinito de términos su comportamiento asintótico está dominado por  $\exp(\nu p^2)$ , lo que es físicamente inaceptable, por lo que los casos de interés físico son aquellos para los que

$$\epsilon_{k,l} = 2(2\nu) \left( l + k + \frac{1}{2} \right) = \frac{2M\omega}{\hbar} \left( l + k + \frac{1}{2} \right) \quad (3.26)$$

de donde

$$E_{k,l} = \hbar \omega \left( k + l + \frac{1}{2} \right), \quad k \in \mathbb{Z}^+ \quad (3.27)$$

Tenemos en este caso que

$$a_{q+2} = \frac{4\nu(q-k)}{(2+q)(2l+3+q)} a_q \quad (3.28)$$

Notamos que  $k$  debe ser un entero par  $k = 2l$ ,  $l = 0, 1, 2, \dots$ , y de (3.28) obtenemos por iteración,

$$a_{2p} = \frac{(-1)^p (2\nu)^p n! (l+1)!}{l! (n-p)! (2+\frac{1}{2}+p)!} J_0 \quad (3.29)$$

donde la sumatoria sobre las  $p$ 's va desde cero hasta  $n$ , de uno en uno. Ahora como  $L_n^{2+1/2}(\omega)$

$$L_n^{l+1/2}(2\nu r^2) = \sum_{p=0}^n \frac{(-1)^p (n+l+1/2)!}{(n-p)! (2+\frac{1}{2}+p)! p!} (2\nu r^2)^p, \quad (3.30)$$

son los polinomios de Laguerre, concluimos que

$$Y_{n,l}(r) = r^{l+1} \left\{ \frac{a_0 n! (2+\frac{1}{2})!}{(n+l+1/2)!} L_n^{l+1/2}(2\nu r^2) \right\} \quad (3.31)$$

donde la constante  $J_0$  puede determinarse a partir de la condición de ortonormalización

$$\int d\tau |\Psi_{n,l}(r, \theta, \phi)|^2 = 1 = \int_0^\infty dr |R_{n,l}(r)|^2. \quad (3.32)$$

De esta manera obtenemos la expresión final para la parte radial

$$R_{n,l}(r) = \left\{ \frac{2(n!)(2\nu)^{l+1/2}}{(n+l+1/2)!} \right\}^{1/2} e^{-\nu r^2} r^{l+1} L_n^{l+1/2}(2\nu r^2). \quad (3.33)$$

De (3.27), la energía asociada a este estado es  $E_{n,l} = (2n+2l+3)\hbar\omega/2$   
 $n=0,1,2,\dots$

La sucesión de niveles de partícula independiente para el oscilador armónico la etiquetamos con el par de números  $(\bar{n}, l)$ , donde  $l$  es el momento angular del nivel y (por razones históricas) se hace corresponder los números  $l=0,1,2,\dots$  con las letras s,p,d,f, etc.. El índice  $\bar{n}$  se define como  $\bar{n}=n+l+1$  donde  $n$  es el índice que aparece en (3.33) y que corresponde al número de veces que  $l$  ha aparecido en el arreglo. Se tiene entonces la sucesión de niveles

$$1s; 1p; 2s, 1d; 2p, 1f; 3s, 2d, 1g; \text{ etc.} \quad (3.34)$$

Es útil observar que los niveles están separados en intervalos de energía iguales a  $\hbar\omega$  y que son altamente degenerados, pues todos los estados con el mismo valor de  $N=2n+l$  tienen la misma energía, fig.(3.1).

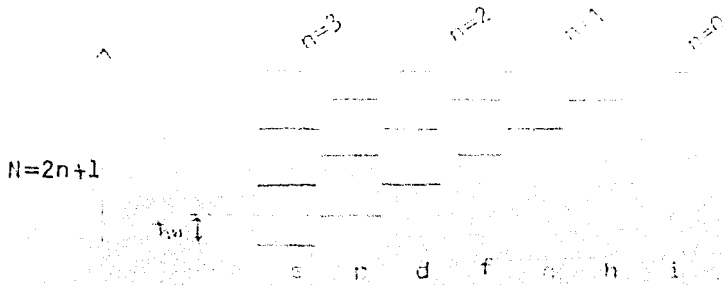


FIG. (3.1) Niveles de energía del potencial de oscilador armónico.

Para cada nivel existen además  $2l+1$  subestados degenerados, que corresponden a distintas orientaciones de momento angular (valores  $l, m_l$ ) por lo que de acuerdo con el Principio de Exclusión de Pauli, cada uno de estos subestados puede contener, a lo mas, dos nucleones de cada tipo (las dos orientaciones del espín), el nivel  $2s1d$  por ejemplo, puede contener  $2(1+5) = 12$  protones y 12 neutrones.

Aunque el potencial de oscilador armónico se extiende hasta el infinito y a su vez es infinitamente grande cuando  $r \rightarrow \infty$ , su principal efecto sobre las partículas en estados de bajas energías proviene de la parte cercana al origen. Este hecho lo mostramos calculando la integral de traslape de las funciones propias de dos potenciales de oscilador armónico diferentes. Si denotamos por  $\Psi_{n\ell m}(\rho, \phi)$  y  $\Psi'_{n'\ell' m'}(\rho, \phi)$  a las funciones propias correspondientes a los valores de las constantes de oscilador  $\nu$  y  $\nu'$ , respectivamente, tenemos que :

$$\begin{aligned}
 \int d\tau \Psi_{n\ell m}^*(\rho, \phi) \Psi'_{n'\ell' m'}(\rho, \phi) &= \int_0^\infty dr R_{n\ell} R'_{n'\ell'} \\
 &= \frac{2n!}{(n+\ell+\frac{1}{2})!} \left( \frac{\sqrt{\nu\nu'}}{\nu+\nu'} \right)^{\ell+\frac{1}{2}} \int_0^\infty dr (r^2)^{\ell+\frac{1}{2}} e^{-(\nu+\nu')r^2} L_n^{2\ell+1}(\nu r^2) \\
 &\quad \times L_{n'}^{2\ell'+1}(\nu' r^2) \quad (3.35) \\
 &= \frac{n!}{(n+\ell+\frac{1}{2})!} \left( \frac{\sqrt{\nu+\nu'}}{\nu+\nu'} \right)^{\ell+\frac{1}{2}} \int_0^\infty dr r^{2\ell+1} e^{-\nu r^2} L_n^{2\ell+1}(\nu r^2) L_{n'}^{2\ell'+1}(\nu' r^2)
 \end{aligned}$$

Utilizando la relación

$$\int_0^{\infty} e^{-bx} x^n L_n^m(\lambda x) L_n^m(\mu x) dx = \frac{\Gamma(n+1) \Gamma(n+1)}{m! n!} \frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma(\lambda+\mu)} \frac{\Gamma(\lambda+\mu)}{\Gamma(\lambda) \Gamma(\mu)} \times F \left[ -n, -n; -m-n-1; \frac{\lambda \mu}{(\lambda+\mu)^2} \right] \quad (3.36)$$

obtenemos

$$\int dz \Psi_{n\ell m}^* \Psi_{n\ell m} = \frac{(2n+\ell+1/2)! (-1)^n}{n! (n+\ell+1/2)!} \left\{ \frac{\nu-\nu'}{\nu+\nu'} \right\}^{2n} \left\{ \frac{\sqrt{\nu\nu'}}{\frac{1}{2}(\nu+\nu')} \right\}^{2\ell+1/2} \times F \left[ -n, -n; -2n-\ell-1/2; \left( \frac{\nu-\nu'}{\nu+\nu'} \right)^2 \right] \quad (3.37)$$

para  $\eta = 0$  se tiene

$$\int_0^{\infty} dr R_{0\ell}(r) P_{0\ell}(r) = \left\{ \frac{\sqrt{\nu\nu'}}{\frac{1}{2}(\nu+\nu')} \right\}^{2\ell+1/2} \quad (3.38)$$

Observemos que aún si  $\nu' = 2\nu$ , el traslape entre las dos funciones de arriba es aproximadamente 91% para  $\ell = 0$ , 87% para  $\ell = 1$ , 82% para  $\ell = 2$ , ... De esta forma, concluimos que el potencial a grandes distancias debe tener poca influencia sobre las funciones de onda reales, que están concentradas cerca del origen.

La forma del potencial nuclear promedio sigue, probablemente, la distribución de masa nuclear y, por lo tanto, no es muy diferente de la parte a bajas energías de un potencial armónico. Como las funciones radiales no son muy sensibles a pequeñas variaciones en los parámetros del potencial, podemos entender porqué en muchos problemas el potencial de oscilador armónico puede constituir una aproximación bastante buena del potencial nuclear real.

## SECCION 4 . MOMENTO ANGULAR ORBITAL DE PARTICULAS CON ESPIN 1/2.

Ciertas partículas, como los electrones y los nucleones, poseen un momento angular intrínseco, que no puede describirse en términos de un movimiento espacial interno por tener este un valor semientero, por lo que el espín del electrón se considera como una propiedad interna como su carga ó su masa. En consecuencia, el grado de libertad asociado al espín puede estar involucrado dinámicamente en las ecuaciones de movimiento; de aquí que solo el momento angular total, el de espín mas el orbital, se conserve para un sistema cerrado.

Una partícula con un espín intrínseco se describe por un conjunto de  $2S+1$  funciones. Estas funciones incluyen, además de las coordenadas espacial y temporal, un índice que especifica el estado interno al que pertenecen. Este índice se conoce como coordenada de espín, y los operadores que representan al espín interno operan sobre esta coordenada.

La matriz escalar  $S^2$  es diaqonal en cualquier esquema y tiene siempre los mismos eigenvalores  $S(S+1)$ , degenerados  $2S+1$  veces.

Denotaremos por

$$\Psi(S, l, m_s, m_l) \quad (4.1)$$

a la función de onda de una partícula con espín interno  $S$ , momento angular orbital  $l$ , y las correspondientes proyecciones en el eje  $z$ ,  $m_s$  y  $m_l$ . Como trataremos con partículas de espín 1/2 ( $S=1/2$ ), omitiremos en adelante el índice  $S$  en (4.1) y la proyección  $m_s$  tomará los valores  $m_s=1/2$  ó  $m_s=-1/2$ . Debido a que los momentos angulares orbital y de espín se refieren a grados de libertad diferentes en general podemos escribir como un producto

$$\Psi(l, m_s, m_l) = \Phi(l, m_l) \chi(m_s). \quad (4.2)$$

la función  $\chi(m_s)$  es la función de onda de espín, independiente de las coordenadas espaciales, y satisface, para partículas



de espín 1/2

$$S^2 \chi(m_s) = \frac{3}{4} \chi(m_s) \quad (4.3)$$

$$S_z \chi(m_s) = m_s \chi(m_s)$$

y la relación de ortogonalidad

$$\sum_{\text{coord. espín}} \chi^{\uparrow}(m_s) \chi^{\downarrow}(m_s) = \chi^{\uparrow}(m_s) \chi^{\downarrow}(m_s) + \chi^{\downarrow}(m_s) \chi^{\uparrow}(m_s) = \delta_{m_s, m_s'} + \delta_{m_s, -m_s'} \quad (4.4)$$

donde los subíndices  $\uparrow$  y  $\downarrow$  indican si el espín apunta hacia arriba ó hacia abajo. Las funciones de onda  $\chi^{\uparrow}(\vec{r}, m_s)$  satisfacen a su vez las ecuaciones

$$\begin{aligned} \nabla^2 \Psi &= \ell(\ell+1) \Psi \\ \hat{L}_z \Psi &= m_l \Psi \\ S^2 \Psi &= \frac{3}{4} \Psi \\ S_z \Psi &= m_s \Psi \end{aligned} \quad (4.5)$$

y cumplen la relación de ortogonalidad

$$\sum_{\text{coord. espín}} \chi^{\uparrow}(\vec{r}, m_s) \chi^{\downarrow}(\vec{r}, m_s') = \delta_{m_s, m_s'} \quad (4.6)$$

Los tres operadores de espín  $S_x$ ,  $S_y$  y  $S_z$  satisfacen las relaciones de conmutación de las tres componentes de un momento angular

$$[S_x, S_y] = i S_z \quad \text{y p.c.} \quad (4.7)$$

Como los operadores de espín y de momento angular orbital operan sobre diferentes espacios, conmutan entre si. Definiendo el operador  $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$  es claro que satisface las relaciones de conmutación

$$[J_x, J_y] = i J_z \quad (4.8)$$

Al operador  $\vec{J}$  se le conoce como operador de momento angular total y es fácil mostrar que son ciertas las siguientes relaciones:

$$[J^2, \ell^2] = [J^2, S^2] = [J_z, \ell^2] = [J_z, S^2] = 0 \quad (4.9)$$

y también

$$\begin{aligned} [J^2, \vec{r}] &= [\ell^2 + S^2 + 2(\vec{L} \cdot \vec{S}), \vec{r}] = 2[\vec{L}, \vec{r}] + 2[\vec{L}, S_x, \vec{r}] + 2[\vec{L}, S_y, \vec{r}] \\ &= 2[\ell_x, \vec{r}] S_x + 2[\ell_y, \vec{r}] S_y = -2i \ell_y S_x + 2i \ell_x S_y \\ &= 2i (\vec{r} \times \vec{S})_z \end{aligned}$$

$$[J^2, S_z] = 2i (\vec{S} \times \vec{r})_z \quad (4.10)$$

Concluimos que en un estado de momento angular bien definido el conjunto de operadores que conmutan entre si está constituido por los cuatro operadores:  $L_x$ ,  $L_y$ ,  $L_z$  y  $L^2$ . Una función que diagonaliza simultáneamente a estos operadores,  $\Psi(l, m)$ , es una combinación lineal de las funciones  $\psi_{l, m_1, m_2}$  con diferentes valores de  $m_1$  y  $m_2$ .

$$\Psi(l, m) = \sum_{m_1, m_2} \langle l, m_1, m_2 | l, m \rangle \psi_{l, m_1, m_2} \quad (4.11)$$

donde  $\langle l, m_1, m_2 | l, m \rangle$  son los coeficientes de Clebsch-Gordan.

Para el caso  $S = 1/2$  se tienen los siguientes coeficientes 8):

$$\begin{aligned} \langle \frac{1}{2}, m_s = \frac{1}{2} | l, m = \pm \frac{1}{2} \rangle &= \sqrt{\frac{l \pm \frac{1}{2} + 1}{2l + 1}} \\ \langle \frac{1}{2}, m_s = -\frac{1}{2} | l, m = \pm \frac{1}{2} \rangle &= \pm \sqrt{\frac{l \pm \frac{1}{2}}{2l + 1}} \end{aligned} \quad (4.12)$$

La función de onda con buen momento angular total tendrá entonces la forma:

$$\Psi(l, m = \pm \frac{1}{2}) = \sqrt{\frac{l \pm \frac{1}{2} + 1}{2l + 1}} \psi_{l, m = \pm \frac{1}{2}, \frac{1}{2}} \pm \sqrt{\frac{l \pm \frac{1}{2}}{2l + 1}} \psi_{l, m = \pm \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}} \quad (4.13)$$

que será muy útil en el cálculo de la interacción espín-órbita que se discute en la próxima sección.

## SECCION 5. ACOPLAMIENTO ESPIN-ORBITA Y REDUCCION DE LOS NUMEROS MAGICOS.

La dependencia de la energía de un nucleón respecto de su espín se manifiesta al tener en cuenta los términos relativistas que dependen de la velocidad de la partícula. El mayor de ellos es un término proporcional a la primera potencia de la velocidad. A partir de los tres vectores  $\vec{S}$  (espín),  $\hat{n} = \vec{r}/r$  y  $\vec{v}$ , se puede construir un escalar en sentido estricto:  $(\hat{n} \times \vec{v}) \cdot \vec{S}$ . Por ello, el operador del acoplamiento Espín-Orbita del nucleón en el núcleo tiene la forma

$$\hat{V}_{sO} = -\phi(r)(\hat{n} \times \vec{v}) \cdot \vec{S} = -f(r)\vec{L} \cdot \vec{S} \quad (5.1)$$

donde  $\phi(r)$  es una cierta función de  $r$ ,  $\vec{S} = \hbar \vec{\sigma}/2$ , y  $\vec{L} = \frac{m_p}{\hbar^2} (\vec{r} \times \vec{v})$  es el momento angular orbital de la partícula.

Es importante señalar que esta interacción es de primer orden respecto a  $v/c$ . Mientras que el acoplamiento Espín-Orbita del electrón en un átomo es un efecto de segundo orden<sup>(4)</sup>; esta diferencia cualitativa se debe a que las fuerzas nucleares dependen del espín ya en la aproximación no relativista, mientras que la interacción no relativista de los electrones (fuerzas coulombianas) no depende de los espines.

La energía de la interacción Espín-Orbita está concentrada esencialmente en la vecindad inmediata de la superficie del núcleo, es decir, la función  $\phi(r)$  decrece a medida que penetra en el mismo. En efecto, en la materia nuclear ilimitada una interacción de este tipo no podría existir, como es claro sin más que tener en cuenta que, en virtud del carácter homogéneo de un tal sistema, no existe en él ninguna dirección privilegiada a la que se pudiera asociar el vector  $\hat{n}$ .

La interacción (5.1) conduce al desdoblamiento del nivel de un nucleón con momento angular orbital  $\vec{l}$ , en dos niveles con momentos angulares  $J = (l \pm 1/2)$ . Dado que  $\vec{L} \cdot \vec{S}$  es diagonal para la función  $\psi(l, m_l) = |l, m_l\rangle$ , ec. (4.13), se tiene que:

$$\hat{L} \cdot \hat{S} |j m_j\rangle = \frac{1}{2} \hbar^2 (j(j+1) - l(l+1) - s(s+1)) |j m_j\rangle \quad (5.2)$$

de modo que para los dos casos posibles se encuentra :

$$\hat{L} \cdot \hat{S} |j m_j\rangle = \frac{1}{2} \hbar^2 \left\{ \begin{array}{ll} l & j = l + \frac{1}{2} \\ -(l+1) & j = l - \frac{1}{2} \end{array} \right\} |j m_j\rangle \quad (5.3)$$

según esta fórmula, el valor del desdoblamiento será

$$\Delta E = E_{l-1/2} - E_{l+1/2} = \overline{f(r)} (l + \frac{1}{2}) \quad (5.4)$$

donde  $\overline{f(r)}$  es el promedio de la función  $f(r)$  y se efectúa con relación a la parte radial de la función de onda del nucleón. Si  $f(r)$  se toma positiva, el nivel con  $j = l + \frac{1}{2}$  (vectores  $\vec{l}$  y  $\vec{s}$  paralelos) resulta ser mas bajo que el nivel con  $j = l - \frac{1}{2}$  (vectores  $\vec{l}$  y  $\vec{s}$  antiparalelos) ; los datos experimentales muestran que esto es precisamente lo que ocurre en los núcleos. Dado que  $f(r)$  disminuye rapidamente al penetrar en el núcleo, la contribución principal a  $\overline{f(r)}$  viene dada por la región cerca de la superficie de aquel. Por otro lado, el valor del desdoblamiento (5.4) crece al aumentar  $l$ , y ello no solamente por el factor  $l + \frac{1}{2}$ , sino también porque aumenta la probabilidad de encontrar el nucleón cerca de la superficie del núcleo.

El acoplamiento Espín-Orbita de un nucleón con el núcleo es relativamente débil comparado con su interacción con el campo central. Al mismo tiempo resulta ser, en general, grande comparado con la energía de la interacción directa de los nucleones en el núcleo, debido a que esta última decrece mas rapidamente al aumentar el peso atómico. Esa relación entre las energías de las diferentes interacciones conduce a que la clasificación de los niveles nucleares deba efectuarse según el esquema de acoplamiento J-J (capítulo 4) y no en el acoplamiento L-S (capítulo 3) en el que normalmente se clasifican los estados atómicos.

Como resultado del análisis de datos experimentales acerca de las propiedades de los núcleos, es posible establecer toda una serie de leyes relativas a la distribución de

los niveles nucleares <sup>5)</sup>. Se observa, por ejemplo, que la energía de los niveles de un nucleón crece al aumentar el momento angular  $l$ , lo cual está ligado con el hecho de que, al aumentar  $l$ , crece la energía centrífuga de la partícula, con lo que disminuye su energía de enlace.

Se observan también algunas reglas relativas a los espines de los estados fundamentales de los núcleos, estas reglas determinan como se componen los momentos angulares totales  $J$  de los nucleones individuales para formar el espín total del núcleo, en ellas se manifiesta la tendencia que tienen los protones y neutrones, que se encuentran en el núcleo en estados iguales, a aparearse (pares  $pp$  y  $nn$ ) a un momento angular total cero. El fenómeno tiene muchas consecuencias, por ejemplo: si el núcleo tiene un número impar de neutrones o de protones, todos encima de capas completas, en los mismos estados, el momento angular del núcleo coincide con el momento angular de un nucleón; todo ocurre como si después del apareamiento de todos los pares posibles de neutrones y protones, quedara tan solo un nucleón con momento angular no compensado.<sup>(1)</sup>

El estudio de la formación de las capas en los núcleos exigiría un análisis detallado de los datos experimentales que se poseen, y escapa, por lo extenso, a los límites de este trabajo. Presentamos, por ello, solo consideraciones de tipo general.

Al estudiar las propiedades de los átomos se encuentra que los estados electrónicos se pueden descomponer en grupos tales que cuando se llena uno de estos grupos y se pasa al siguiente, la energía de enlace del electrón disminuye.<sup>(2)</sup> Una relación análoga se presenta en los núcleos. Aquí se distribuyen los estados nucleónicos de manera tal que se forman los siguientes grupos:

|   | NUCLEONES |       |
|---|-----------|-------|
| $1s_{1/2}$  | 2         |       |
| $1p_{3/2}, 1p_{1/2}$  | 6         |       |
| $1d_{5/2}, 2s_{1/2}, 1d_{3/2}$                                | 12        |       |
| $1f_{7/2}$  | 8         | (5.5) |
| $2p_{3/2}, 1f_{5/2}, 2p_{1/2}, 1g_{9/2}$                      | 22        |       |
| $1g_{7/2}, 2d_{5/2}, 2d_{3/2}, 3s_{1/2}, 1h_{11/2}$           | 32        |       |
| $1h_{9/2}, 2f_{7/2}, 2f_{5/2}, 3p_{3/2}, 3p_{1/2}, 1i_{13/2}$ | 44        |       |

para cada grupo se da el número máximo de protones o de neutrones que se pueden tener. Hacemos notar que uno cualquiera de los grupos queda completo cuando el número total de protones  $Z$  ó de neutrones  $N$  en el núcleo es igual a uno de los siguientes números :

$$2, 8, 20, 28, 50, 82, 126. \quad (5.6)$$

Es decir, estos números cierran los grupos, y por ende las capas, es por eso que se les conoce como números mágicos.

Los diferentes estados en cada uno de los grupos (5.5), se han ordenado siguiendo, mas ó menos, el orden en que sucesivamente se ocupan en la serie de los núcleos.

Hemos discutido, por un lado, la existencia de una interacción Espín-Orbita en los núcleos, y por otro, el significado preciso que tienen los números mágicos. En principio solo se tiene una razón para pensar que la interacción Espín-Orbita juegue un papel importante en la formación de capas : el desdoblamiento de un nivel en dos. Sin embargo, no deja de ser importante el que se pueda reproducir los números mágicos con tan solo considerar un potencial de oscilador armónico con una interacción Espín-Orbita, fig.(5.1).

En efecto, el potencial de partícula independiente tiene la forma

$$V(r) = \frac{1}{2} m \omega^2 r^2 + \frac{2\hbar}{\pi^2} (\vec{L} \cdot \vec{S}) \quad \alpha = \alpha \hbar > 0 \quad (5.7)$$

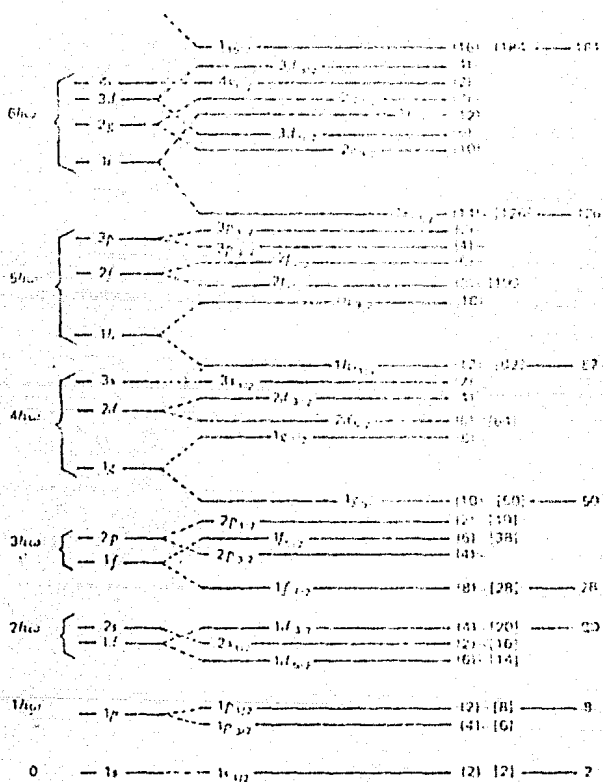


FIG. (5.1). Niveles de energía de un potencial de oscilador armónico mas una interacción del tipo Espín-Orbita, los números entre paréntesis redondos indican la degeneración de cada nivel, en tanto que los números entre paréntesis cuadrados indican los números de ocupación hasta la etapa considerada.

si trabajamos con las funciones de onda  $(l, m_j)$  se encuentra que la energía debida al potencial es

$$\tilde{E}_{n\ell j} = \hbar\omega (2n + \ell + \frac{3}{2}) + \alpha \begin{cases} -\ell & j = \ell + 1/2 \\ \ell + 1 & j = \ell - 1/2 \end{cases} \quad (5.8)$$

En particular, se obtienen las siguientes diferencias de energía con el estado base:

$$\begin{aligned} E_{n\ell, \ell+1/2} - E_{00, 1/2} &= \hbar\omega (2n + \ell) - \alpha\ell \\ E_{n\ell, \ell-1/2} - E_{00, 1/2} &= \hbar\omega (2n + \ell) + \alpha(\ell + 1) \end{aligned} \quad (5.9)$$

Si queremos considerar desviaciones en el espectro de partícula independiente debemos corregir el potencial (5.7)

con un término  $\hat{Q}^{(1,2)}$ , de hacerlo así tendríamos el potencial

$$V(r) = \frac{1}{2} m\omega^2 r^2 + \frac{\alpha}{2\hbar^2} \hat{L} \cdot \hat{S} + \frac{\beta}{\hbar^2} \hat{L} \cdot \hat{Q} \quad ; \quad \beta = \alpha k_e$$

con la energía

$$E_{n\ell j} = \hbar\omega (2n + \ell + \frac{3}{2}) + \alpha \begin{cases} -\ell & j = \ell + 1/2 \\ \ell + 1 & j = \ell - 1/2 \end{cases} + \beta \ell(\ell + 1) \quad (5.11)$$

Finalmente, queremos hacer notar que aún cuando en un principio introducimos el potencial  $\hat{Q} \cdot \hat{S}$  en forma fenomenológica, para reproducir los números mágicos, existe evidencia experimental de que es real, pero no se cuenta con una base teórica para explicarlo. Su gran magnitud implica que se debe a interacciones nucleares y no a interacciones electromagnéticas.



## SECCION 6 .MOMENTOS ELECTROMAGNETICOS.

Ya hemos dicho que las funciones de onda, que determinan el movimiento de una partícula independiente en un campo central, pueden dar una buena estimación de algunas propiedades nucleares. Esto es particularmente cierto para valores esperados de sumas de operadores de una sola partícula; para estos operadores la contribución de una partícula en un estado  $|j, m\rangle$  es igual en magnitud y de signo opuesto a la de una partícula en el estado  $|j, -m\rangle$ , por lo que pares de partículas con direcciones opuestas en las proyecciones de sus momentos angulares no contribuyen a los valores esperados de tales operadores.

Los operadores cuadrupolar eléctrico y dipolar magnético son operadores de una partícula que conviene estudiar con mayor profundidad; los analizaremos aquí y deduciremos algunos resultados interesantes sobre ellos, dejando para la próxima sección el tratamiento de los otros momentos electromagnéticos.

## a) OPERADOR DIPOLAR MAGNETICO.

Supongamos que tenemos una partícula cargada que se mueve en un campo central y que interactúa con un campo magnético externo. El operador que determina la respuesta de la partícula al campo, en una primera aproximación, es el operador de momento dipolar magnético que consiste de dos términos: el producido por la corriente generada por el movimiento de la carga y el que se deriva de corrientes intrínsecas en la partícula asociadas con el espín. Así

$$\vec{\mu} = \vec{\mu}_{orb} + \vec{\mu}_{espín} \quad (6.1)$$

donde

$$\vec{\mu}_{orb} = \vec{L} g_o \left( \frac{e\hbar}{2mc} \right) \quad (6.2)$$

$$\vec{\mu}_{espín} = \vec{S} g_s \left( \frac{e\hbar}{2mc} \right) \quad (6.3)$$

Aquí  $\vec{L}$  y  $\vec{S}$  son los momentos angulares orbital y de espín respectivamente y  $g_o, g_s$  son las razones giromagnéticas orbital y de espín, cuyos valores son:

## SECCION 6 .MOMENTOS ELECTROMAGNETICOS.

Ya hemos dicho que las funciones de onda, que determinan el movimiento de una partícula independiente en un campo central, pueden dar una buena estimación de algunas propiedades nucleares. Esto es particularmente cierto para valores esperados de sumas de operadores de una sola partícula; para estos operadores la contribución de una partícula en un estado  $|l, m\rangle$  es igual en magnitud y de signo opuesto a la de una partícula en el estado  $|\bar{l}, -m\rangle$ , por lo que pares de partículas con direcciones opuestas en las proyecciones de sus momentos angulares no contribuyen a los valores esperados de tales operadores.

Los operadores cuadrupolar eléctrico y dipolar magnético son operadores de una partícula que conviene estudiar con mayor profundidad; los analizaremos aquí y deduciremos algunos resultados interesantes sobre ellos, dejando para la próxima sección el tratamiento de los otros momentos electromagnéticos.

## a) OPERADOR DIPOLAR MAGNETICO.

Supongamos que tenemos una partícula cargada que se mueve en un campo central y que interactúa con un campo magnético externo. El operador que determina la respuesta de la partícula al campo, en una primera aproximación, es el operador de momento dipolar magnético que consiste de dos términos : el producido por la corriente generada por el movimiento de la carga y el que se deriva de corrientes intrínsecas en la partícula asociadas con el espín. Así <sup>(1)</sup>

$$\vec{\mu} = \vec{\mu}_{orb} + \vec{\mu}_{espín} \quad (6.1)$$

donde

$$\vec{\mu}_{orb} = \vec{l} g_o \left( \frac{e\hbar}{2m_e} \right) \quad (6.2)$$

$$\vec{\mu}_{espín} = \vec{s} g_s \left( \frac{e\hbar}{2m_e} \right) \quad (6.3)$$

Aquí  $\vec{l}$  y  $\vec{s}$  son los momentos angulares orbital y de espín respectivamente y  $g_o$ ,  $g_s$  son las razones giromagnéticas orbital y de espín, cuyos valores son :

$$g = \begin{cases} 1 & \text{para protones} \\ 0 & \text{para neutrones} \\ 5.5845 & \text{para protones} \end{cases} \quad (6.4)$$

$$g = \begin{cases} -3.8263 & \text{para neutrones} \end{cases} \quad (6.5)$$

y  $\frac{e\hbar}{2mc}$  es el magnetón nuclear (m.n.).

La energía de interacción está dada por

$$\delta E = \langle \vec{\mu} \cdot \vec{H} \rangle \quad (6.6)$$

mostraremos ahora que es posible definir un factor  $g$ , para una partícula en un estado con valor definido de  $J$ , que satisfice para toda orientación del campo  $\vec{H}$  la relación

$$\delta E = \langle (g_1 \vec{J} + g_2 \vec{I}) \cdot \vec{H} \rangle = g \langle \vec{J} \cdot \vec{H} \rangle. \quad (6.7)$$

Como  $\vec{H}$  es arbitrario, (6.7) se satisface solo si podemos encontrar un valor  $g$  tal que

$$g \langle \vec{J} \rangle = \langle g_1 \vec{J} + g_2 \vec{I} \rangle \quad (6.8)$$

Esta ecuación vectorial tiene tres componentes, en las componentes "X" y "Y" la igualdad se da trivialmente. En efecto, supongamos que  $|JM\rangle$  es eigenfunción de  $J_x, J_y, J_z, J^2$ , entonces

$$\langle JM | J_x | JM \rangle = \langle JM | [J_y, J_z] \frac{1}{i\hbar} | JM \rangle = \frac{1}{i\hbar} \langle JM | J_y J_z - J_z J_y | JM \rangle = \frac{1}{i\hbar} \langle JM | J_y J_z - J_z J_y | JM \rangle = 0$$

$$- \langle JM | J_z J_y | JM \rangle = 0 \quad (6.9)$$

y análogamente

$$\langle JM | J_y | JM \rangle = \langle JM | J_x | JM \rangle = 0 \quad (6.10)$$

por lo que

$$\langle JM | g_1 J_z + g_2 J_z | JM \rangle = 0 = \langle JM | g J_z | JM \rangle \quad (6.11)$$

Para la componente "Y" el análisis es idéntico.

El momento dipolar magnético del estado en cuestión se define como:

$$\mu = g \beta = \langle JM=J | \mu_z | JM=J \rangle, \quad (6.12)$$

es decir, es el valor esperado de la componente  $z$  de  $\vec{\mu}$  tomado en el subestado nuclear con la componente  $z$  de  $\vec{J}$  igual a  $J$ . Nuestro propósito es calcular este elemento de matriz.

Para ello, hacemos uso del teorema de Wigner-Eckart (A.40)

$$\langle JM | \vec{\mu} | JM \rangle = \frac{1}{J(J+1)} \langle JM | \vec{\mu} | JM \rangle \langle JM | \vec{J} | JM \rangle \quad (6.13)$$

con lo que la componente  $\mu_z$  de esta ecuación, en el caso  $\mu = \mu_B$  toma la forma:

$$\langle \mu_z | \mu_z | \mu \rangle = \frac{1}{j+1} \langle \mu_z | \vec{L} \cdot \vec{S} | \mu \rangle \quad (6.14)$$

Reemplazando  $\vec{V}$  y  $\vec{J}$  por  $\vec{L}$  y  $\vec{S} = \vec{L} + \vec{S}$ , encontramos

$$\mu = \langle \mu_z | \mu_z | \mu \rangle = \frac{1}{j+1} \langle \mu_z | \vec{L} \cdot \vec{L} + \vec{L} \cdot \vec{S} | \mu \rangle \quad (6.15)$$

y utilizando las identidades

$$\begin{aligned} 2\vec{J} \cdot \vec{L} &= j^2 + l^2 - s^2 \\ 2\vec{J} \cdot \vec{S} &= j^2 - l^2 + s^2 \end{aligned} \quad (6.16)$$

tenemos

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{1}{j+1} \left\{ g_1 \langle \mu_z | \vec{L} \cdot \vec{L} | \mu \rangle + g_2 \langle \mu_z | \vec{L} \cdot \vec{S} | \mu \rangle \right\} \\ &= \frac{1}{j+1} \left[ \frac{g_1}{2} (j(j+1) + l(l-1) - s(s-1)) + \frac{g_2}{2} (j(j+1) - l(l-1) + s(s-1)) \right] \quad (6.17) \\ &= \begin{cases} (j - 1/2) g_1 + 1/2 g_2 & \text{para } j = l + 1/2 \\ \frac{1}{j+1} \left[ (l + \frac{3}{2}) g_1 - \frac{1}{2} g_2 \right] & \text{para } j = l - 1/2 \end{cases} \end{aligned}$$

en unidades de m.n.

El valor de  $g$  viene dado entonces por

$$\begin{aligned} g &= \frac{(2j+1)g_1 + g_2}{2j}, & \text{si } j = l + 1/2 \\ g &= \frac{(2j+3)g_1 - g_2}{2(j+1)}, & \text{si } j = l - 1/2 \end{aligned} \quad (6.18)$$

Los valores (6.17) para los momentos magnéticos de un solo nucleón se conocen como valores de Schmidt y las líneas que se obtienen al considerar  $\mu$  como función de  $j$  se conocen como líneas de Schmidt. Observemos que para cada tipo de nucleón existen dos líneas, una que corresponde a los estados para los cuales el espín y el momento angular orbital son paralelos ( $j = l + 1/2$ ) y otro en el que son antiparalelos ( $j = l - 1/2$ ).

La curva para  $j = l + 1/2$  es una línea recta con pendiente  $g_1$ , y la línea para  $j = l - 1/2$  es una curva que tiende asintóticamente a una línea con pendiente  $g_2$ .

## b) MOMENTOS ELECTRICOS:

Si una partícula interactúa con un campo eléctrico

la energía de interacción estará dada por

$$W = e \langle \psi | V(\vec{r}) | \psi \rangle \quad (6.19)$$

donde  $V(\vec{r})$  es el potencial eléctrico que determina completamente al campo.

Desarrollando ahora  $V(\vec{r})$  alrededor de  $\vec{r}=0$ , se tiene

$$V(\vec{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l Q_{lm}(r) Y_{lm}(\theta, \phi) \quad (6.20)$$

donde  $(\theta, \phi)$  son las coordenadas angulares y  $r$  la coordenada radial de la partícula.

Una buena aproximación para  $Q_{lm}(r)$  es <sup>(10)</sup>

$$Q_{lm}(r) = r^l U_{lm}(r) \quad (6.21)$$

donde  $U_{lm}$  solo depende de la forma funcional de  $V(\vec{r})$ , pero es independiente de la coordenada radial. Esencialmente está conectada con las derivadas de  $V(\vec{r})$  calculadas en el origen, (desarrollando  $Q_{lm}(r)$  en serie de Taylor).

Introduciendo (6.21) en (6.20) obtenemos

$$\sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} Q_{lm} = e \langle \psi | r^l Y_{lm}(\theta, \phi) | \psi \rangle \quad (6.22)$$

donde las cantidades  $Q_{lm}$  son los momentos multipolares eléctricos de la partícula en el estado  $|\psi\rangle$ .

El estado  $|\psi\rangle$  está constituido por el acoplamiento de funciones de onda angulares  $|l, m\rangle = Y_{lm}(\theta, \phi)$  con las funciones de onda intrínsecas  $|S, M\rangle$ :

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} R_{nl}(r) \sum_{m, M} \langle l, m; S, M | J, M \rangle Y_{lm}(\theta, \phi) \psi_{SM}(r) \quad (6.23)$$

Introduciendo tal expansión en ambos lados del elemento de matriz de  $Q_{lm}$  obtenemos

$$Q_{l' m'} = e \left( \frac{4\pi}{2l'+1} \right)^{1/2} \sum_{m, M} \langle S, M; l', m' | J, M \rangle \langle l, m; S, M | J, M \rangle \langle l, m | Q_{lm} | l, m \rangle \quad (6.24)$$

donde

$$\langle r^2 \rangle_{nl} = \int_0^{\infty} r^2 |R_{nl}(r)|^2 r^2 dr \quad (6.25)$$

El elemento de matriz  $\langle l, m' | Q_{lm} | l, m \rangle$  se evalúa usando el resultado general <sup>(6)</sup>

$$\int Y_{l_1 m_1}^* Y_{l_2 m_2} Y_{l_3 m_3} d\Omega = \left[ \frac{(2l_1+1)(2l_2+1)}{4\pi(2l_3+1)} \right]^{1/2} \langle l_1 m_1; l_2 m_2 | l_3 m_3 \rangle \langle l_1 0; l_2 0 | l_3 0 \rangle \quad (6.26)$$

$$\langle l m' | Y_{lm} | l m \rangle = \left( \frac{2l'+1}{4\pi} \right)^{1/2} \langle l 0; l' 0 | l 0 \rangle \langle l m'; l' m | l m \rangle \quad (6.27)$$

Observemos que la ecuación (6.24) tiene  $2l+1$  componentes pero  $2l$  de ellas se anulan. en efecto, en (6.27) aparece un coeficiente de Clebsh-Gordan que se anula a menos que  $m=0$ .

Por lo tanto, (6.24)

$$Q_{20} = 2e \langle r^2 \rangle_{nl} \sum_{m_l, m_s} \langle 2m_l, m_s | 2, 0 \rangle \langle l, m_l | 2, 0 \rangle \langle l, m_l | 2, 0 \rangle$$

Y de la propiedad (A.2), sabemos que  $\langle l, m_l | 2, 0 \rangle$  se anula a menos que  $l \geq 2j$ . Esto significa que para una partícula con momento angular  $J$ , el máximo multipolo distinto de cero es de orden  $l = 2j$ .

Bajo la transformación  $\vec{r} \rightarrow -\vec{r}$  (reflexión espacial) los armónicos esféricos se transforman como  $Y_{lm} \rightarrow (-1)^l Y_{lm}$ , por lo que si las eigenfunciones tienen paridad definida, de (6.24), (6.27) y (6.28) se sigue que

$$Q_{lc} = 0 \quad \text{para } l \text{ impares} \quad (6.29)$$

Combinando (6.28) y (6.29) observamos que las interacciones eléctricas de una partícula en un estado de momento angular  $J$  se determinan completamente por los números

$$Q_{00}, Q_{20}, Q_{40}, \dots, Q_{2j,0} \quad (6.30)$$

Calculemos ahora el momento cuadrupolar eléctrico en el estado  $|JJ\rangle$ . De (6.28) es claro que

$$Q_{20} = 2e \langle r^2 \rangle_{nl} \sum_{m_l, m_s} \langle 2m_l, m_s | 2, 0 \rangle \langle l, m_l | 2, 0 \rangle \langle l, m_l | 2, 0 \rangle$$

y en el caso  $j = l + 1/2$ , (6.31) se reduce a

$$Q_{20} = 2e \langle r^2 \rangle_{nl} \langle 2020 | 00 \rangle \langle l l 20 | l l \rangle \quad (6.32)$$

Evaluando los coeficientes de Clebsch-Gordan por medio de (A.7) se tiene

$$\langle 0200 | 00 \rangle = -2 \left( \frac{2l+1}{2l+3} \right)^{1/2} \left( \frac{2l-2}{2l+2} \right)^{1/2} \frac{(l+1)!}{(l-1)!} \quad (6.33)$$

$$\langle l l 20 | l l \rangle = (2l)! \sqrt{\frac{(2l+1)}{(2l-2)!(2l+3)!}} \quad (6.34)$$

por lo que finalmente,

$$Q_{20} = -\frac{2e \langle r^2 \rangle_{nl} l}{(2l+3)} = -\frac{(2l-1)}{(2l+2)} e \langle r^2 \rangle_{nl} \quad (6.35)$$

En el caso  $j = l - 1/2$  es sencillo demostrar que  $Q_{20}$  tiene el mismo valor (6.35).

Substituyendo las ecuaciones radiales de oscilador armónico para estimar  $\langle r^2 \rangle_{nl}$ , se tiene

$$\begin{aligned} \langle r^2 \rangle_{nl} &= \frac{2n!}{(n+l+1/2)!} (2a)^{l+3/2} \int_0^\infty e^{-2a\rho^2} \rho^{2l+4} \left( \frac{2+1/2}{L_n} (2a\rho^2) \right)^n d\rho \\ &= \frac{n!}{(n+l+1/2)!} (2a)^{l+3/2} \int_0^\infty e^{-2a\rho^2} \rho^{2l+4} \left( \frac{2+1/2}{L_n} (2a\rho^2) \right)^n d\rho \end{aligned}$$

$$\langle P^2 \rangle_{ne} = \frac{n!}{(n+1/2)!} \int_0^{\infty} x^{2n+2} e^{-x} \{L_n(x)\}^2 dx$$

Utilizando la relación (6.35)

$$\int_0^{\infty} x^{m+1} e^{-x} \{L_n(x)\}^2 dx = -\frac{(n-m-1)!}{(n-m)!} \quad (6.36)$$

obtenemos

$$\langle P^2 \rangle_{ne} = \frac{(n!)^2 (2n-2+1/2)}{(n+1/2)! (n-2+1/2)!} \langle x^2 \rangle \quad (6.37)$$

y combinando (6.36) y (6.37) encontramos

$$Q_{20} = - \frac{e (2s-1) (n!)^2 (2n-2+1/2)}{(2s+2) (n+1/2)! (n-2+1/2)! \langle x^2 \rangle} \quad (6.38)$$

Esta es la fórmula del momento cuadrupolar de una partícula sometida a la acción de un potencial de oscilador armónico.

## SECCION 7 .TRANSICIONES ELECTROMAGNETICAS.

Átomos y núcleos que se encuentran en estados excitados, con bastante frecuencia se desexcitan interactuando con el campo electromagnético, en muchos casos siendo esta la única posibilidad de desexcitación.

Átomos aislados en estados excitados decaen a sus estados base produciendo radiación electromagnética o emitiendo electrones, comunmente conocidos como electrones Auger. Practicamente toda nuestra información sobre las características y propiedades de los átomos proviene del comportamiento de estos ante interacciones electromagnéticas. Por otra parte, núcleos que se encuentran en estados inestables pueden emitir partículas alfa, neutrones, protones, etc., y tambien pueden decaer a sus estados base emitiendo radiación electromagnética; mientras que las interacciones responsables de los primeros modos de decaimiento nuclear no son bien conocidas, la interacción electromagnética si lo es, y una gran cantidad de información sobre la constitución de los núcleos y muchas de sus propiedades se deduce de esta interacción.

Las radiaciones electromagnéticas vienen acompañadas por una transición en el sistema emisor, de un estado inicial  $|i\rangle$  a un estado final  $|f\rangle$ , ambos con un momento angular bien definido. Esta es una muy poderosa razón para estudiar transiciones radiativas, las cuales analizaremos en esta sección. Aquí no discutiremos la deducción formal de los operadores multipolares eléctrico y magnético, ni la formulación teórica de la probabilidad de transición, ecs. (7.1), (7.2) y (7.3) que se darán por conocidas, sino que nos concentraremos en el cálculo de los elementos de matriz de los operadores multipolares entre el estado  $|i\rangle$  y el estado  $|f\rangle$ . Para una discusión detallada de estos temas referimos al lector a la ref.(17).



En la aproximación de ondas largas, para la cual  $\omega \gg v/c$ , donde  $c$  es la velocidad de la luz y  $\omega$  la frecuencia angular asociada a la onda, de modo que  $\omega/c = 2\pi/\lambda$  y  $\lambda$  es la dimensión del sistema, la probabilidad de transición por unidad de tiempo está dada por

$$T(L) = \frac{4\pi}{c^3} \sum_{\mathbf{k}} \frac{e^2 \hbar^2 \omega^2}{2\epsilon_0 \hbar^2 \omega^2} |\langle \mathbf{k}, \lambda | \mathbf{P}(L) | \mathbf{k}', \lambda' \rangle|^2 \quad (7.1)$$

donde la razón de transición reducida  $\mathcal{B}$  está dada en términos de los multipolos eléctricos por

$$\mathcal{B}(E_{k\lambda}, L) = \frac{4\pi}{\epsilon_0 \hbar \omega^3} |\langle \mathbf{k}, \lambda | \mathbf{P}(L) | \mathbf{k}', \lambda' \rangle|^2 \quad (7.2)$$

mientras que para los operadores multipolares magnéticos

$$\mathcal{B}(M_{k\lambda}, L) = \frac{4\pi}{\epsilon_0 \hbar \omega^3} |\langle \mathbf{k}, \lambda | \frac{1}{2m} \nabla \times (\mathbf{p} \times \mathbf{p}) + c \nabla \times \mathbf{m}(\mathbf{r}) | \mathbf{k}', \lambda' \rangle|^2 \quad (7.3)$$

Aquí  $\nabla$  es el operador gradiente,  $|\mathbf{k}\rangle$  y  $|\mathbf{k}'\rangle$  caracterizan los estados inicial y final del sistema,  $L$  denota el grado de multipolaridad de la transición, se ha introducido el número de onda  $k = \omega/c$  para simplificar la notación y  $\mathbf{P}(\mathbf{r})$ ,  $\mathbf{m}(\mathbf{r})$  son los operadores asociados a la densidad de carga y densidad de corriente del sistema emisor. En el NPI debemos calcular (7.1) solo para una partícula de masa  $m$ , con carga  $e$  y momento magnético  $\mu \vec{\sigma}$ , de modo que si la partícula se encuentra en la posición  $\vec{r}_0$  tenemos

$$\rho(\vec{r}) = e \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) \quad (7.4)$$

$$\mathbf{j}(\vec{r}) = \frac{e}{m} \vec{p} \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) \quad (7.5)$$

$$\vec{m}(\vec{r}) = \mu \vec{\sigma} \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) \quad (7.6)$$

Observemos que para el caso de muchas partículas de masa  $m$ , cargas  $e_i$  y momentos magnéticos  $\mu_i \vec{\sigma}_i$ , situadas en las posiciones  $\vec{r}_i$  las expresiones anteriores solo se modifican introduciendo un símbolo de suma.

Substituyendo (7.4), (7.5) y (7.6) en (7.2) e integrando sobre todo el espacio, tenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(E_{k\lambda}, L) &= \frac{4\pi}{\epsilon_0 \hbar \omega^3} \langle \mathbf{k}, \lambda | \mathbf{P}(L) | \mathbf{k}', \lambda' \rangle \langle \mathbf{k}', \lambda' | \mathbf{P}(L) | \mathbf{k}, \lambda \rangle \\ &= \frac{4\pi}{\epsilon_0 \hbar \omega^3} \langle \mathbf{k}, \lambda | \mathbf{P}(L) | \mathbf{k}', \lambda' \rangle \langle \mathbf{k}', \lambda' | \mathbf{P}(L) | \mathbf{k}, \lambda \rangle \end{aligned} \quad (7.7)$$

Donde utilizamos el teorema de Wiener-Eckart para operadores tensoriales (A.40) y la relación de unitariedad para los coeficientes de Wigner (A.11).

En el cálculo de transiciones magnéticas encontramos

$$\begin{aligned} & \langle J_f M_f | \frac{1}{e(L+1)} \int \nabla(r^4 Y_{LM}) \cdot \vec{r} \times (\vec{r} + r \nabla \times \vec{a}) | J_i M_i \rangle \\ &= \frac{1}{e(L+1)} \langle J_f M_f | \nabla(r^4 Y_{LM}) \cdot \frac{\vec{r}}{r} \cdot \vec{r} | J_i M_i \rangle + \dots \quad (7.6) \\ &+ \frac{1}{e(L+1)} \langle J_f M_f | \int \nabla(r^4 Y_{LM}) \cdot \{ \vec{r} \times \nabla \times (\vec{r} \cdot \vec{r}) \} | J_i M_i \rangle \end{aligned}$$

con

$$\vec{r} = \vec{r} \times \vec{p}$$

La integral que aparece en el segundo sumando se reduce

$$\begin{aligned} \text{a} \\ \mathbb{I} &= \int \nabla(r^4 Y_{LM}) \cdot \vec{r} \times (\nabla \times \vec{r} \cdot \vec{a}) = \int \nabla(r^4 Y_{LM}) \cdot \nabla(r \cdot \vec{a}) - \vec{r} \cdot \nabla \times \vec{a} \\ &= \int \partial_i (r^4 Y_{LM}) \{ \partial_j (r_j r_k \vec{a}) - r_j \partial_j (r_k \vec{a}) \} \\ &= \int \{ \partial_i [ \partial_j (r^4 Y_{LM}) r_j r_k \vec{a} ] - [ \partial_i \partial_j (r^4 Y_{LM}) r_j r_k \vec{a} - \partial_j (r^4 Y_{LM}) r_k \vec{a} ] \\ &+ r_k \delta(\partial_j r_j) \partial_i (r^4 Y_{LM}) + [ \partial_j \partial_i (r^4 Y_{LM}) r_j r_k \vec{a} ] \} d^3x \end{aligned}$$

y, claramente

$$\int \partial_j (\partial_i (r^4 Y_{LM}) r_j r_k \vec{a}) d^3x = \int \partial_i (\partial_j (r^4 Y_{LM}) r_j r_k \vec{a}) d^3x = 0$$

por lo que

$$\mathbb{I} = - \int [ \vec{r} \cdot \vec{r} \delta(r - r_0) \nabla^2 (r^4 Y_{LM}) - \delta(r - r_0) \vec{r} \cdot \nabla (r^4 Y_{LM}) - (\vec{r} \cdot \nabla (\vec{r} \cdot \nabla (r^4 Y_{LM}))) ] \quad (7.9)$$

$$\text{Como } \nabla^2 (r^4 Y_{LM}) = 0 \text{ y } \vec{r} \cdot \nabla (r^4 Y_{LM}) = L^2 Y_{LM},$$

obtenemos finalmente

$$B(M_{ij}, L) = \frac{1}{(2J_i+1)} \left| \langle J_f M_f | \nabla(r^4 Y_{LM}) \cdot \left[ \frac{\vec{r}}{r} \cdot \vec{r} + \frac{1}{3} r^2 \vec{r} \right] | J_i M_i \rangle \right|^2 \quad (7.10)$$

Denotemos los números cuánticos de los estados de partícula independiente inicial y final por  $n_i, l_i, j_i$  y  $n_f, l_f, j_f$  respectivamente; si la partícula es un protón con  $m = m_p$  y  $\mu = \mu_p (e\hbar / L m_p c)$  obtenemos los resultados siguientes:

$$B(\text{elec}, L) = \frac{1}{2J_i+1} \left| \langle n_f, l_f, j_f | \nabla(r^4 Y_{LM}) | n_i, l_i, j_i \rangle \right|^2 \quad (7.11)$$



de donde se deduce que para todo vector  $\vec{V}$

$$\begin{aligned}
 V[r^L Y_{L-1}(\theta, \phi)] \cdot \vec{V} &= \sqrt{L(2L+1)} r^{L-1} (Y_{L-1}^{(L)}(\theta, \phi) \cdot \vec{V}) \\
 &= \sqrt{L(2L+1)} r^{L-1} \sum_{\mu, k} \langle L-1, \mu, k | L, 0 \rangle Y_{L-1, \mu}^{(k)}(\vec{r} \cdot \vec{V}) \\
 &= \sqrt{L(2L+1)} r^{L-1} \sum_{\mu, k} \langle L-1, \mu, k | L, 0 \rangle Y_{L-1, \mu}^{(k)}(\vec{r} \cdot \vec{V}) \\
 &= \sqrt{L(2L+1)} r^{L-1} [Y_{L-1}(\theta, \phi) \times \vec{V}]^{(L)}_{00} \quad (7.20)
 \end{aligned}$$

Utilizando (7.19) para transformar el elemento de matriz (7.12) encontramos

$$\begin{aligned}
 \langle n_f, l_f, j_f | \nabla [r^L Y_{L-1}(\theta, \phi)] \cdot \vec{V} | n_i, l_i, j_i \rangle &= \langle n_f, l_f, j_f | \nabla [r^L Y_{L-1}(\theta, \phi)] \cdot \vec{V} | n_i, l_i, j_i \rangle \\
 &= \frac{\hbar}{m_p c} \langle n_f, l_f, j_f | \nabla [r^L Y_{L-1}(\theta, \phi)] \cdot \vec{V} | n_i, l_i, j_i \rangle + \\
 &+ \frac{\hbar}{2m_p c} \left( \mu_f - \frac{1}{2} \right) \langle n_f, l_f, j_f | \nabla [r^L Y_{L-1}(\theta, \phi)] \cdot \vec{V} | n_i, l_i, j_i \rangle \\
 &= \frac{\hbar \sqrt{L(2L+1)}}{m_p c} \langle n_f, l_f, j_f | r^{L-1} [Y_{L-1}(\theta, \phi) \times \vec{V}]^{(L)}_{00} | n_i, l_i, j_i \rangle + \\
 &+ \frac{\hbar \sqrt{L(2L+1)}}{2m_p c} \left( \mu_f - \frac{1}{2} \right) \langle n_f, l_f, j_f | r^{L-1} [Y_{L-1}(\theta, \phi) \times \vec{V}]^{(L)}_{00} | n_i, l_i, j_i \rangle
 \end{aligned} \quad (7.21)$$

donde  $\vec{J} = \vec{L} + \frac{1}{2} \vec{\sigma}$  es el operador de momento angular total del protón. El primer término del lado derecho se evalúa utilizando la relación (A.56),

$$\begin{aligned}
 \langle n_f, l_f, j_f | r^{L-1} [Y_{L-1}(\theta, \phi) \times \vec{V}]^{(L)}_{00} | n_i, l_i, j_i \rangle &= \langle r^{L-1} \rangle \langle l_f, j_f | Y_{L-1} | l_i, j_i \rangle \times \\
 &\times \langle l_i, j_i | \vec{V} | l_i, j_i \rangle \sqrt{2L+1} (-1)^{j_f + l_i + L} \begin{Bmatrix} l_f & 1 & j_f \\ l_i & L & L \end{Bmatrix} \quad (7.22)
 \end{aligned}$$

con el valor  $\langle r^{L-1} \rangle$  ya definido por la relación (7.16).

De la relación (A.51) resulta claro que el segundo término del lado derecho adquiere el valor

$$\langle 0_f | \hat{r}_f | 0_i \rangle = \frac{1}{\sqrt{(2l_f+1)(2l_i+1)}} \begin{pmatrix} l_f & l_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (7.23)$$

ya que de (A.45)

$$\langle \frac{1}{2} || \hat{r} || \frac{1}{2} \rangle = 2 \langle \frac{1}{2} || \hat{r} || \frac{1}{2} \rangle = \sqrt{6} \quad (7.24)$$

mientras que de (A.58)

$$\langle l_f | \hat{r} || l_i \rangle = (-1)^{l_f + \frac{1}{2} + l_i + \frac{1}{2}} \langle l_i || \hat{r} || l_f \rangle \quad (7.25)$$

encontramos la relación

$$B(m_{\pm 1}, L) = \left( \frac{\pi}{m_p c} \right)^2 \langle r^{L+1} \rangle \langle l_f || \hat{r} || l_i \rangle^2 \frac{2(L+1)}{L} \times \left[ \frac{(-1)^{l_f + l_i + \frac{1}{2}}}{L+1} \sqrt{(2l_f+1)(2l_i+1)} + \sqrt{\frac{2}{L}} \left( -\mu_f - \frac{1}{L+1} \right) \times \dots \right] \quad (7.26)$$

En el caso particular en que  $l_f = l_i = L$  el resultado (7.26) se simplifica, ya que, de (A.15),  $\begin{pmatrix} L & L & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$ , por lo que

$$B(m_{\pm 1}, L) = \left( \frac{\pi}{m_p c} \right)^2 \langle r^{L+1} \rangle^2 \langle L || \hat{r} || L \rangle^2 (2L+1) \frac{(2L+1)(\frac{2}{L})}{L} \left( -\mu_f - \frac{1}{L+1} \right)^2 \times \begin{pmatrix} L & L & 0 \\ L & L & 0 \end{pmatrix}^2 \quad (7.27)$$

Las relaciones (7.1), (7.15) y (7.26) expresan la razón de emisión de radiación electromagnética de un protón moviendo se en un campo central. Esta razón depende de los momentos angulares inicial y final, de la multipolaridad de la radiación y la dimensión del sistema emisor. Combinando estas ecuaciones obtenemos para radiación multipolar eléctrica el siguiente resultado

$$T(elec, L) = \frac{e^2}{\hbar c} b^{2L+1} \langle r^{L+1} \rangle^2 \frac{2(L+1)}{L((2L+1)!!)^2} S(m_{\pm 1}, L) \quad (7.28)$$

y para radiación multipolar magnética en el caso  $|l_f - l_i| = 1$

$$T(Mag, L) = \frac{e^2}{\hbar c} b^{2L+1} \langle r^{L+1} \rangle^2 \left( \frac{\pi}{m_p c} \right)^2 \left( -\mu_f - \frac{1}{L+1} \right)^2 \frac{2(L+1)}{L((2L+1)!!)^2} S(m_{\pm 1}, L) \quad (7.29)$$

donde

$$S(\text{elec}) = (2L+1) \frac{L(L+1)}{L} \left( \frac{2}{L} \right)^2 \left( \frac{L(L+1)}{L} \right) \quad (7.30)$$

$$y \quad S(\text{Mag}) = (2L+1) \frac{L(L+1)}{L} \left( \frac{2}{L} \right)^2 \left( \frac{L(L+1)}{L} \right) \quad (7.31)$$

son los denominados factores estadísticos.

A continuación obtenemos algunas propiedades de las transiciones analizando estas últimas relaciones.

De las propiedades de triángulo (A.15) y (A.16) de los coeficientes  $6J$ , resulta claro que las transiciones multipolares eléctricas y magnéticas son permitidas si se cumple la desigualdad

$$J_c + J_f \geq L \geq |J_c - J_f| \quad (7.32)$$

En otras palabras, la transición es permitida si se conserva el momento angular.

De la relación (7.14) se tiene

$$\langle J_f || Y_L || J_c \rangle = F \langle J_c m_c || Y_{LM} || J_c m_c \rangle = F \langle J_c m_c \rangle$$

con esta fórmula se puede demostrar que en el caso en que se tenga  $T + J_c + J_f = 0$ , el elemento de matriz reducido tiene el valor cero, i.e.,

$$\langle J_f || Y_L || J_c \rangle = 0 \quad \text{si} \quad T + J_c + J_f = 0 \quad (7.33)$$

Observemos que la transición de un solo protón es más probable entre más pequeña sea la  $L$ , independientemente de si la radiación es eléctrica ó magnética debido al factor  $L^{2L+1}$  y que  $L < 1/2$ . Para transiciones de un neutrón moviéndose en un campo central, la razón de radiación magnética está dada por la ecuación (7.29) reemplazando  $L/L_c - 1/(L+1)$  por  $L/\mu_n$ , pero no existe radiación debida a transiciones neutrónicas eléctricas, por lo menos en esta aproximación, (de cualquier modo la contribución sería despreciable).

Aunque las relaciones para transiciones protónicas y neutrónicas que hemos derivado aquí solo son válidas para nucleones independientes, cuando se tiene un número mayor de partículas se tienen practicamente las mismas razones de transición; esto se debe fundamentalmente a que la interacción del núcleo con el campo electromagnético es la suma de las

interacciones de cada un de los nucleones con el campo, ó en otras palabras, la amplitud de probabilidad para la emisión de radiación electromagnética de un sistema de muchos nucleones es la suma de las amplitudes de probabilidad para la radiación que es emitida por cada uno de los nucleones.

Hacemos finalmente una observación: el MSL y el MCN no solo establecen en cuales órbitas se mueven los nucleones y en que sucesión de niveles se arreglan, sino que predice también el tipo de radiación que emite cada núcleo con mayor frecuencia; acláramos este punto con el ejemplo que sigue: consideremos un núcleo cualquiera cuyo número de protones se encuentre comprendido entre los números 40 y 50 (40  $\leq$   $Z$   $\leq$  50); en estos núcleos esperamos que los protones ocupen preferencialmente los niveles  $2p_{1/2}$ ,  $1d_{3/2}$  y como resultado de las excitaciones nucleónicas mas bajas esperamos observar transiciones entre estos estados, por lo que la radiación que emite el núcleo será magnética y del tipo  $L=4$ , lo que es verificado experimentalmente. (1)

## Bibliografía

- 1.- S. Moszkowski, Models of nuclear structure en Handbuch der Physick, Vol. 39, Springer-Verlag, (Berlin 1957), pags. 441-469.
- M.A. Preston, Physics of the nucleus, Addison Wesley, (Mass. 1962),
- A. de Shalit y H. Feshbach, Theoretical nuclear physics, Vol. 1, John Wiley and Sons, (New York 1974), pags. 191-375.
- A. de Shalit e I. Talmi, Nuclear Shell Theory, Academic Press, (New York 1963), pags. 12-244.
- 2.- L.D. Landau y E.M. Lifschitz, Mecánica Cuántica no Relativista, Vol. 3 del curso de Física Teórica, Reverté S.A., (Barcelona, 1972) cap. X, pags. 267-311.
- 3.- A. de Shalit y H. Feshbach, op. cit., pags. 251-256.
- 4.- A. de Shalit y H. Feshbach, op. cit., pags. 251-268, 537-538.
- 5.- C. Cohen-Tannoudji, B. Diu y F. Laloe, Quantum Mechanics, Vols. 1 y 2, John Wiley and Sons, (New York, 1977), pags. 649, 968-973.
- 6.- G. Arfken, Mathematical Methods for Physicists, Academic Press, (New York, 1970), pags. 559, 571, 620.
- 7.- J.P. Elliott y A.M. Lane, The Nuclear Shell Model en Handbuch der Physick, Springer Verlag, (Berlin 1957), Vol. 39, pags. 368-388.
- 8.- E. Rose, Elementary Theory of Angular Momentum, John Wiley and Sons, (New York, 1957), pags. 40, 61.
- 9.- A. de Shalit y H. Feshbach, op. cit., pag. 215.
- 10.- Eisenberg J. y W. Greiner, Nuclear Theory, North Holland, (Amsterdam 1970). Vol. 1, nuclear models.
- 11.- A. de Shalit e I. Talmi, op. cit., pags. 52-55.
- 12.- I. Gradshteyn e I. Ryzhik, Table of integrals, series and products, Academic Press, (New-York, 1980.) pag. 844.
- 13.- A. de Shalit e I. Talmi, op. cit., pags. 52-55, 56.
- A. de Shalit y H. Feshbach, op. cit., pags. 241-244.
- 14.- L. Landau et. al., op. cit., pags. 286-291.



- 15.-A. de Shalit y H. Feshbach, op. cit., págs. 53-55.
- 16.-A. de Shalit e I. Talmi, op. cit., págs. 163, 158-169.
17. -J. Eisenberg and W. Greiner, Nuclear Theory, North Holland.  
(Amsterdam 1970), Vol. 2, caps. 1,2,3.

## CAPITULO II. SISTEMAS DE DOS PARTICULAS FUERA DE CAPA CERRADA.

## SECCION 1. DOS PARTICULAS INTERACTUANTES EN UN CAMPO CENTRAL.

En el Modelo de Capas se considera a los núcleos atómicos como sistemas de nucleones moviéndose en un potencial central común. En base a esta descripción podemos asociar a cada núcleo una configuración en la que existen algunas capas, para protones y para neutrones, completamente llenas (capas cerradas), y algunas partículas adicionales en capas que aún no se han llenado (capas activas); el número total de partículas que ocupan una capa cerrada está determinado por el Principio de Exclusión de Pauli. Entre estas configuraciones se encuentran las de partícula-agujero (se dice que se tiene un agujero cuando a una capa le falta sólo una partícula para ser cerrada).

La configuración del estado base de un núcleo se obtiene acomodando todos los nucleones en los niveles más bajos posibles, de manera que sea compatible con el principio de Exclusión. Así, los niveles de energía más bajos se originan promoviendo los nucleones activos a niveles más energéticos dentro de la misma capa; el proceso que lleva a la creación de una configuración partícula-agujero (rompimiento de un par acoplado en la configuración del estado base) requiere más energía, por lo que esperamos que para configuraciones de baja energía no haya que tomar a éstas en consideración. De ahora en adelante, sólo nos ocuparemos de estados de baja energía.

Las capas cerradas de la configuración del estado base no contribuyen al espín ni a los momentos electromagnéticos del núcleo porque son esféricamente simétricas; en consecuencia, estas características pueden discutirse en términos de las partículas que se encuentren en las capas activas. Para estas partículas, una interacción central común de partícula independiente no puede reemplazar completamente las interacciones reales que existen entre ellas; por esto, es natural tomar en cuenta algunas correc-

ciones al campo central, como interacciones residuales efectivas entre las partículas.

Por lo tanto, estamos interesados en resolver la ecuación de Schrödinger

$$(H_0 + H_1) \Psi(x_1, y_1, \dots, x_N, y_N) = E \Psi(x_1, y_1, \dots, x_N, y_N), \quad (1.1)$$

donde  $H_0$  es el Hamiltoniano del campo central

$$H_0 = \sum_{i=1}^N [T_i + U(x_i)]$$

y  $H_1$  es todo lo que tenga que agregársele para hacerlo más realista, pudiendo incluir correcciones al potencial de partícula independiente  $U(x_i)$  tanto como interacciones adicionales entre las partículas. La función de onda  $\Psi(x_1, y_1, \dots, x_N, y_N)$  es antisimétrica en las  $N$  partículas que se encuentran en las capas activas. Puesto que el principal término en  $H_1$  es una interacción de dos cuerpos<sup>1)</sup>, dedicaremos este capítulo al estudio de sistemas de dos partículas moviéndose en un campo central.

Existen pocos casos en los cuales la ecuación de Schrödinger (1.1) puede resolverse analíticamente y en la mayor parte de las ocasiones tenemos que recurrir al uso de métodos de aproximación para resolver el problema, incluso para el caso de dos partículas.

Nos restringiremos por el momento al uso de la teoría de perturbaciones<sup>2)</sup> para resolver (1.1), y generalmente nos conformaremos con las primeras aproximaciones. Empero, para que los desarrollos sean aplicables a otros métodos de aproximación, no se harán suposiciones específicas sobre las interacciones residuales entre las partículas.

En general, los estados de dos partículas que no interactúan entre sí, moviéndose en un campo central, estarán degenerados. Esto es debido a que la energía de una partícula en la órbita  $(l \frac{1}{2} m_l m_s)$  no depende de la proyección del momento angular orbital ( $m_l$ ) sobre el eje Oz, ni de la proyección de espín intrínseco ( $m_s$ ) sobre el mismo eje. De manera que si la función de onda  $\Phi_{n l \frac{1}{2} m_l m_s}(x)$  satisface

los estados del es. uema-m<sup>3</sup>)

estarán degenerados en energía para los distintos valores de las proyecciones de los momentos angulares, siendo  $M_{z_1} + M_{z_2}$  este valor propio de  $H_0$ .

En la teoría de perturbaciones, las correcciones a primer orden en las energías del sistema de dos partículas se obtienen diagonalizando la submatriz de la perturbación  $H_1$ , correspondiente al espacio de los estados degenerados<sup>4</sup>); es decir, debemos diagonalizar la matriz

$$\langle n_1, l_1, m_{l_1}, m_{s_1}, n_2, l_2, m_{l_2}, m_{s_2} | H_1 | n_1', l_1', m_{l_1}', m_{s_1}', n_2', l_2', m_{l_2}', m_{s_2}' \rangle \quad (1.3)$$

La solución exacta implicaría en cambio la diagonalización de la matriz completa

$$\langle n_1, l_1, m_{l_1}, m_{s_1}, n_2, l_2, m_{l_2}, m_{s_2} | (H_0 + H_1) | n_1', l_1', m_{l_1}', m_{s_1}', n_2', l_2', m_{l_2}', m_{s_2}' \rangle$$

## SECCION 2. ACOPLAMIENTOS L-S & j-j.

Podemos reducir considerablemente el problema de diagonalizar la matriz (1.3) eligiendo como base algunas combinaciones lineales apropiadas de las funciones definidas en (1.2).

A fin de hacer esta elección, tomaremos en cuenta que la perturbación  $H_1$  debe ser una función escalar tanto de las coordenadas espaciales como de las coordenadas de espín de las dos partículas. Por tal motivo,  $H_1$  conmuta con el momento angular total de las dos partículas,  $J = J_1 + J_2 = J_x + J_y + J_z$ , y los elementos de matriz entre estados con distintos valores de  $J$  y/o  $M_J$  son cero.

Entonces, los estados que buscamos, y que denotamos como

$$\Phi(r, r', \alpha JM) \equiv \sum_{\substack{m_1, m_2 \\ m_{s_1}, m_{s_2}}} \alpha^{JM} \Phi(r_1, m_{l_1}, m_{s_1}, r_2, m_{l_2}, m_{s_2}) \quad (2.1)$$

deberán satisfacer

$$J^2 \Phi(r, r', \alpha JM) = J(J+1) \Phi(r, r', \alpha JM),$$

$$J_z \Phi(r, r', \alpha JM) = M \Phi(r, r', \alpha JM).$$

El número cuántico adicional  $\alpha$  que aparece, sirve para especificar completamente los distintos estados que se puedan construir

con los mismos valores de  $(l, m, j)$ .

Con la introducción de la nueva base (2.1), el problema de diagonalizar (1.3) se reduce al problema de diagonalizar el conjunto de matrices

$$\langle \Phi | W_i^{(2M)} | \Phi \rangle \in \langle R, R, M | W_i | R, R, M \rangle. \quad (2.2)$$

Observemos que puesto que  $W_i$  es una función escalar de las coordenadas de las dos partículas, sus valores propios no dependen de  $M$ , y es suficiente diagonalizar sólo las matrices (2.2) que se obtienen para los posibles valores de  $J$  tomando un valor específico de  $M$  en cada caso.

Para la construcción explícita de las funciones de onda (2.1) se acostumbra usar dos esquemas de acoplamiento, que representan dos casos extremos: los acoplamientos L-S y j-j.

El esquema de acoplamiento L-S, o acoplamiento Russel-Saunders<sup>5)</sup>, está determinado por las ecuaciones de acoplamiento

$$\begin{aligned} L &= L_1 + L_2, \\ S &= S_1 + S_2, \\ J &= L + S. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Las constantes del movimiento son en este caso, aparte de  $L^2, S^2, J^2, \xi_1^2, \xi_2^2,$

$$L_1^2, S_1^2, J_1^2, J_2^2, \quad (2.3')$$

siendo  $L(L+1)$ ,  $S(S+1)$ ,  $J(J+1)$  y  $M$  sus respectivos valores propios. El caso del acoplamiento L-S está caracterizado por un fuerte acoplamiento entre  $L_1$  y  $S_1$ , y entre  $L_2$  y  $S_2$ ; por ejemplo, cuando existe una interacción  $V(r_{12})$  que depende exclusivamente de la distancia entre las partículas  $r_{12} = |r_1 - r_2|$ , tenemos acoplamiento entre  $L_1$  y  $S_1$ .

Notamos que la matriz que hay que diagonalizar para obtener los corrimientos en la energía a primer orden es, en efecto, de orden menor que en (1.3). Se puede tomar únicamente los valores 0 y 1. Para  $S=0$ ,  $L=J$ , y obtenemos el estado  $\Phi(R, R, [S=0, L=J] J M)$ . Para  $S=1$ ,  $L$  puede tener los valores  $J+1$ ,  $J$  y  $J-1$ , obteniendo de esta manera tres estados:  $\Phi(R, R, [S=1, L=J+1] J M)$  y  $\Phi(R, R, [S=1, L=J] J M)$ .

Vemos así que existe un máximo de ciertos estados para el momento angular total  $J$  en la configuración  $(\lambda, \mu, J)$ , y que las matrices (2.2) son, a lo más, de dimensión cuatro.

Consideremos ahora el caso de dos partículas equivalentes, esto es,  $n_1 = n_2 = n$  y  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ . Las funciones de onda se pueden escribir entonces como

$$\Psi_{JM}(\rho, \sigma, \Omega) = \sum_{M_1 M_2} \langle L M_1 M_2 | J M \rangle \Psi_{JM}(\rho, L M_1) \chi_{JM}(\sigma, S M_2), \quad (2.3)$$

donde hemos definido

$$\Psi_{JM}(\rho, L M_1) \equiv \sum_{m_1 m_2} \langle \lambda m_1 \lambda m_2 | L M_1 \rangle \Psi_{JM}(\rho, m_1) \Psi_{JM}(\rho, m_2),$$

$$\chi_{JM}(\sigma, S M_2) \equiv \sum_{m_1 m_2} \langle \lambda m_1 \lambda m_2 | S M_2 \rangle \chi_{JM}(\sigma, m_1) \chi_{JM}(\sigma, m_2).$$

Usando la propiedad de simetría de los coeficientes de Clebsch-Gordan (A.5), obtenemos que

$$\begin{aligned} \Psi_{J, \lambda}(\rho, L M_1) &= (-1)^{L-\lambda} \Psi_{J, \lambda}(\rho, L M_1), \\ \chi_{J, \lambda}(\sigma, S M_2) &= (-1)^{S-\lambda} \chi_{J, \lambda}(\sigma, S M_2). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Como  $\lambda$  es un entero, vemos que  $\Psi_{JM}(\rho, L M_1)$  es una función simétrica o antisimétrica de las coordenadas espaciales de acuerdo a si  $L$  es par o es impar. Análogamente para  $\chi_{JM}(\sigma, S M_2)$ : para  $S$  impar es una función simétrica de las coordenadas de espín, y para  $S$  par, es una función antisimétrica. Ya que la función (2.4) debe ser antisimétrica de acuerdo al principio de Exclusión, ante el intercambio de las coordenadas espaciales y de espín, vemos que esto será posible únicamente si  $L+S$  es par. De esta manera, si  $J$  es impar sólo existe un estado antisimétrico:  $\Psi(\rho, [S=1, L=J] JM)$ ; si  $J$  es par, habrá tres estados:  $\Psi(\rho, [S=0, L=J] JM)$  y  $\Psi(\rho, [S=1, L=J \pm 1] JM)$ . Con esto, hemos logrado reducir aún más el problema de diagonalizar (2.2) para el caso de dos partículas idénticas. Para  $J$  impar el corrimiento en la energía producido por la perturbación  $H_1$  es

$$\Delta E(A^1 J) = \langle 1 J M=J | H_1 | 1 J M=J \rangle;$$

en tanto que para  $J$  par, los corrimientos son los valores propios de la matriz

$$\begin{bmatrix} \langle 0 L=J J | H_1 | 0 L=J J \rangle & \langle 0 L=J J | H_1 | 1 L=J-1 J \rangle & \langle 0 L=J J | H_1 | 1 L=J+1 J \rangle \\ \langle 1 L=J-1 J | H_1 | 0 L=J J \rangle & \langle 1 L=J-1 J | H_1 | 1 L=J-1 J \rangle & \langle 1 L=J-1 J | H_1 | 1 L=J+1 J \rangle \\ \langle 1 L=J+1 J | H_1 | 0 L=J J \rangle & \langle 1 L=J+1 J | H_1 | 1 L=J-1 J \rangle & \langle 1 L=J+1 J | H_1 | 1 L=J+1 J \rangle \end{bmatrix}$$

donde hemos definido  $\langle R, R, L, S, JM | W_1 | R, R, L, S, JM \rangle$ ,  $\langle R, R, L, S, JM | W_1 | R, R, L, S, JM \rangle$ , y los demás elementos de matriz en forma análoga.

Regresando al caso de la configuración  $(n, l_1, l_2, S)$ , si  $W_1$  conmuta con  $L$  y con  $S$ , esto es, si  $W_1$  dá origen a una fuerza escalar, la matriz  $\langle R, R, L, S, JM | W_1 | R, R, L, S, JM \rangle$  es diagonal en  $L$  y en  $S$ , o sea, es diagonal en el esquema L-S. Los corrimientos en la energía del estado  $\Phi(R, L, S, JM) \equiv \Phi(2^{2L+1} L_S)$  están dados por

$$\Delta E(2^{2L+1} L_S) = \langle R, R, L, S, JM | W_1 | R, R, L, S, JM \rangle \quad (2.6)$$

siendo las funciones de onda correspondientes

$$\Phi(R, R, L, S, JM) = \sum_{m_1, m_2, m_3} \langle R, m_1, R, m_2 | L, M_L \rangle \langle S, m_3, S, m_3 | S, M_S \rangle \times \langle R, L, S, JM | \Phi(R, m_1, m_2, S, m_3) \rangle. \quad (2.7)$$

Una propiedad importante de  $\Delta E(2^{2L+1} L_S)$  para las interacciones especiales que estamos considerando - tales que  $W_1$  conmuta con  $L$  y con  $S$  - es que, para un valor dado de  $L$  y  $S$ , es independiente de  $J$ . Para ver esto, observemos que el operador con las características requeridas puede escribirse en la forma

$$W_1 = \sum_{k=0,2,4} b_k V_k(r_{12}) (\xi_1 \cdot \xi_2)^k, \quad b_k \in \mathbb{R}.$$

En esta expresión  $k$  no excede a uno porque potencias mayores de  $(\xi_1 \cdot \xi_2)$  pueden expresarse como combinaciones lineales de  $W_1$  y  $(\xi_1 \cdot \xi_2)$  (más exactamente:  $(\xi_1 \cdot \xi_2)^k = \frac{1}{4k} (\sum_{s=0}^{k-1} (-1)^s (1-\xi_1 \cdot \xi_2)^s) + \frac{1}{4} (\xi_1 \cdot \xi_2)^{k-2}$ ). Entonces el elemento de matriz en (2.6) es una suma de productos de elementos de matriz escalares, uno operando sobre las coordenadas espaciales y otro operando sobre las coordenadas de espín; tomemos, como ejemplo, el segundo sumando y desarrollémoslo empleando los métodos del álgebra tensorial (Fór. (A.48)):

$\langle R, R, L, S, JM | V(r_{12}) (\xi_1 \cdot \xi_2)^2 | R, R, L, S, JM \rangle = (-1)^{J(J+1)} \sum_{M_1, M_2} \langle R, R, L, S, JM | V(r_{12}) W_2 | R, R, L, S, JM \rangle \langle S, S, S, JM | S, S, S, JM \rangle$   
de modo que resulta claro que  $\Delta E(2^{2L+1} L_S)$  es independiente de  $J$ , dados  $L$  y  $S$ .

Aún si la perturbación  $W_1$  no conmuta con  $L$  y  $S$ , el acoplamiento L-S puede ser utilizado. En este caso,  $W_1^{(JM)}$  ya no es diagonal en este esquema de acoplamiento. Sin embargo, los elementos de matriz no diagonales pueden ser pequeños; esto sucede si

$$|\langle R, R, L, S, JM | W_1 | R, R, L, S, JM \rangle| \ll |\langle R, R, L, S, JM | W_1 | R, R, L, S, JM \rangle|.$$

donde  $\langle W_1 \rangle_{L,SM} = \langle W_1 \rangle_{L,SM} | W_1 | P, S, L, SM \rangle$ . Cuando ésta condición se satisface, los valores propios de  $W_1^{(L,M)}$  van a diferir muy poco de sus elementos diagonales; de hecho, la corrección en las energías hasta el segundo orden es <sup>0)</sup>

$$\Delta E^{(2M, L, S)} = \langle W_1 \rangle_{L,SM} + \sum_{L', S'} \frac{\langle W_1 \rangle_{L', S'} \langle W_1 \rangle_{L, SM}}{\langle W_1 \rangle_{L, SM} - \langle W_1 \rangle_{L', S'}}.$$

Una interacción muy importante que no es diagonal en el esquema de acoplamiento L-S, es la interacción espín-órbita,

$$U_{so} = u(r_1) (\mathbf{L}_1 \cdot \mathbf{S}_1) + u(r_2) (\mathbf{L}_2 \cdot \mathbf{S}_2). \quad (2.8)$$

Su elemento de matriz en este esquema resulta ser, usando la ecuación (A.58):

$$\begin{aligned} \langle r_1, r_2, L, S, M | U_{so} | r_1, r_2, L, S, M \rangle &= (-)^{M+1} \sqrt{\frac{2L+1}{2L+3}} \sqrt{\frac{2S+1}{2S+3}} \langle L, M | L_1 | L, M \rangle \langle S, M | S_1 | S, M \rangle \\ &\times [(-)^{M+1} u_{so}(r_1) \langle L_1, M | L_1 | L, M \rangle + (-)^{M+1} u_{so}(r_2) \langle L_2, M | L_2 | L, M \rangle]. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Cuando existe un fuerte acoplamiento espín-órbita en los sistemas de dos partículas, se acostumbra usar el esquema de acoplamiento j-j, el cual está descrito por las ecuaciones de acoplamiento

$$\begin{aligned} \mathbf{j}_1 &= \mathbf{L}_1 + \mathbf{S}_1, \\ \mathbf{j}_2 &= \mathbf{L}_2 + \mathbf{S}_2, \\ \mathbf{J} &= \mathbf{j}_1 + \mathbf{j}_2. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Además de  $\mathbf{L}_1^2, \mathbf{L}_2^2, \mathbf{S}_1^2$  y  $\mathbf{S}_2^2$ , las constantes del movimiento son en este caso

$$\mathbf{j}_1^2, \mathbf{j}_2^2, \mathbf{J}^2, J_z \quad (2.1)$$

siendo  $j_1(j_1+1)$ ,  $j_2(j_2+1)$ ,  $J(J+1)$  y  $M$  sus valores propios,

Este esquema es el natural para calcular los elementos de matriz de las interacciones (2.8) porque la interacción espín-órbita conmuta con sus constantes de movimiento.

Las funciones de onda en el acoplamiento j-j están dadas por

$$\psi(r_1, r_2, j_1, j_2, JM) = \sum_{\substack{m_1, m_2, m_1', m_2', \\ m_1, m_2, m_1', m_2'}} \langle L_1, m_1, S_1, m_1' | j_1, m_1 \rangle \langle L_2, m_2, S_2, m_2' | j_2, m_2 \rangle \phi(L_1, m_1, m_1', L_2, m_2, m_2'). \quad (2.1)$$

mientras que los elementos de matriz de  $U_{so}$  en este esquema son

$$\langle r_1, r_2, j_1, j_2, JM | U_{so} | r_1, r_2, j_1, j_2, JM \rangle = \left[ \sum_{L_1, S_1} U_{so}(r_1) \frac{j_1(j_1+1) - L_1(L_1+1) - S_1(S_1+1)}{2} \right] \langle j_1, m_1, j_2, m_2 | \mathbf{L}_1 \cdot \mathbf{S}_1 | j_1, m_1, j_2, m_2 \rangle. \quad (2.1)$$

Supongamos que los elementos no diagonales de la interacción espín-órbita son pequeños en el esquema L-S, y veamos qué sucede



cuando agregamos esta término a la perturbación  $W_1$  que contiene únicamente fuerzas que conmutan con  $L$  y  $S$ , tal como se hizo anteriormente. Con  $W_1$ , todos los estados de la configuración  $(l, s)$  están degenerados en energía. Con la introducción de la interacción  $W_2$ , tenemos un corrimiento en energías del estado  $|(l, s, J, M)\rangle$  dado por  $\langle W_2 \rangle_{LSJM}$ , el cual puede ser distinto para diferentes valores de  $L$  y  $S$ ; pero una vez fijos éstos, este corrimiento es independiente de  $J$ . Los estados se dividen ahora en multipletes degenerados; cada multiplete comprende todos los estados con las mismas  $L$  y  $S$ , pero distintas  $J$  y  $M$ . Con la introducción de una interacción espín-órbita pequeña los estados con diferentes valores de  $J$  se van a separar dentro de cada multiplete, según vemos en (2.9).

Si la interacción espín-órbita no es pequeña, tenemos que calcular la matriz completa de la interacción perturbativa en el esquema L-S y diagonalizarla. También podríamos utilizar el esquema de acoplamiento j-j, en el cual  $U_0$  es diagonal, y tratar al resto de  $W_1$  como una perturbación. Sin embargo, una interacción de dos cuerpos  $V(r_{12}, r_{21})$  tendrá elementos de matriz no diagonales distintos de cero -esto lo veremos claramente cuando hayamos obtenido los coeficientes de transformación entre ambos acoplamientos posteriormente-. Para que el esquema j-j sea una buena aproximación a primer orden, es necesario que los elementos no diagonales en  $W_1^{(LSM)}$  sean pequeños respecto a las correspondientes diferencias de los elementos diagonales:

$$|\langle l_1 s_1, l_2 s_2, JM | W_1 | l_1 s_1, l_2 s_2, JM \rangle| \ll |\langle W_1 \rangle_{l_1 s_1, l_2 s_2, JM} - \langle W_1 \rangle_{l_1 s_1, l_2 s_2, JM}|.$$

Supongamos ahora que los elementos no diagonales de una interacción de dos cuerpos, que origina fuerzas que conmutan con  $L$  y  $S$ , son pequeños en el acoplamiento j-j. Al agregar al Hamiltoniano no perturbado la interacción  $U_0$ , la configuración  $(l_1, s_1)$  se va a dividir en cuatro configuraciones  $(l_1 s_1, l_2 s_2)$ ; cada una de estas configuraciones está compuesta de todos los estados con valores de  $J$  y  $M$  compatibles con  $|l_1 - l_2| \leq J \leq l_1 + l_2$  y  $-J \leq M \leq J$ ; estos

estados están degenerados. Cuando introducimos la interacción de dos cuerpos  $V_{12}$ , rompemos la degeneración, agregando a cada estado un corrimiento en las energías

$$\Delta E_{\pm} = \langle \psi_1, \psi_2, J, M | V_{12} | \psi_1, \psi_2, J, M \rangle.$$

En situaciones reales, aunque proponemos una perturbación de la forma

$$H_1 = \sum_{i=1,2} u(r_i) \{ \hat{L}_i \cdot \hat{S}_i \} + V_{12}.$$

ninguno de los esquemas de acoplamiento va a ser una buena aproximación a primer orden, y será necesario diagonalizar la perturbación completa en alguno de ellos -en estos caso se habla de un acoplamiento intermedio-. Para ésto es útil -y lo veremos más adelante- introducir los coeficientes de reacoplamiento entre ambos esquemas.

Tomemos cuatro sistemas independientes con momentos angulares  $\hat{J}_1, \hat{J}_2, \hat{J}_3, \hat{J}_4$ , y consideremos el problema de construir un estado con un momento angular total dado por  $\hat{J}_1$  y  $\hat{J}_2$ . Usando los coeficientes de Clebsch-Gordan, podemos acoplar  $\hat{J}_1$  y  $\hat{J}_2$  a  $\hat{J}_{12}$ , primero; después, acoplar  $\hat{J}_3$  y  $\hat{J}_4$  a  $\hat{J}_{34}$ , y finalmente acoplar  $\hat{J}_{12}$  y  $\hat{J}_{34}$  a  $\hat{J}$ . El estado que resulta es

$$\psi[\hat{J}_1, \hat{J}_2 (J_{12}), \hat{J}_3, \hat{J}_4 (J_{34}) J, M] = \sum_{M_{12}, M_{34}, M_1, M_2, M_3, M_4} \langle \hat{J}_1, \hat{J}_2, m_1, m_2 | J_{12}, M_{12} \rangle \langle \hat{J}_3, \hat{J}_4, m_3, m_4 | J_{34}, M_{34} \rangle \langle J_{12}, M_{12}, J_{34}, M_{34} | J, M \rangle \psi_{J_1, m_1}(\omega) \psi_{J_2, m_2}(\omega) \psi_{J_3, m_3}(\omega) \psi_{J_4, m_4}(\omega) \quad (2.1)$$

También se pueden construir los estados con momento angular total  $J$  de otras maneras. Por ejemplo, podemos acoplar, primero,  $\hat{J}_1$  y  $\hat{J}_3$  a  $\hat{J}_{13}$ ;  $\hat{J}_2$  y  $\hat{J}_4$  a  $\hat{J}_{24}$ , y después acoplar  $\hat{J}_{13}$  y  $\hat{J}_{24}$  a  $\hat{J}$ . De esta forma obtenemos la función de onda

$$\psi[\hat{J}_1, \hat{J}_3 (J_{13}), \hat{J}_2, \hat{J}_4 (J_{24}) J, M] = \sum_{M_{13}, M_{24}, M_1, M_2, M_3, M_4} \langle \hat{J}_1, \hat{J}_3, m_1, m_3 | J_{13}, M_{13} \rangle \langle \hat{J}_2, \hat{J}_4, m_2, m_4 | J_{24}, M_{24} \rangle \langle J_{13}, M_{13}, J_{24}, M_{24} | J, M \rangle \psi_{J_1, m_1}(\omega) \psi_{J_3, m_3}(\omega) \psi_{J_2, m_2}(\omega) \psi_{J_4, m_4}(\omega) \quad (2.1)$$

Sin embargo, como los conjuntos de funciones (2.13) y (2.14) forman una base completa para los estados con momento angular total  $J$  que se pueden construir a partir de estados de los cuatro sistemas considerados, debe existir una transformación unitaria entre ambas bases:

$$\psi[\hat{J}_1, \hat{J}_2 (J_{12}), \hat{J}_3, \hat{J}_4 (J_{34}) J, M] = \sum_{M_{13}, M_{24}, M_1, M_2, M_3, M_4} \langle \hat{J}_1, \hat{J}_3, m_1, m_3 | J_{13}, M_{13} \rangle \langle \hat{J}_2, \hat{J}_4, m_2, m_4 | J_{24}, M_{24} \rangle \langle J_{13}, M_{13}, J_{24}, M_{24} | J, M \rangle \psi_{J_1, m_1}(\omega) \psi_{J_3, m_3}(\omega) \psi_{J_2, m_2}(\omega) \psi_{J_4, m_4}(\omega) \quad (2.1)$$

Sustituyendo las dos expresiones anteriores en las últimas y utilizando la ortogonalidad de las funciones  $\Psi_{j_1, j_2, j_3, j_4, j_5, j_6}$

$$\langle j_1, m_1, j_2, m_2 | j_3, m_3 \rangle \langle j_1, m_1, j_2, m_2 | j_4, m_4 \rangle \langle j_1, m_1, j_2, m_2 | j_5, m_5 \rangle \langle j_1, m_1, j_2, m_2 | j_6, m_6 \rangle$$

$$= \sum_{j_{12}, j_{34}} \langle j_{12}, j_{24} | j_3, j_{34} \rangle \langle j_1, m_1, j_2, m_2 | j_{12}, m_{12} \rangle \langle j_3, m_3, j_4, m_4 | j_{34}, m_{34} \rangle \langle j_5, m_5, j_6, m_6 | j_{56}, m_{56} \rangle$$

Usando las relaciones de ortogonalidad de los coeficientes de Clebsch-Gordan, encontramos

$$\langle j_{12}, j_{24} | j_3, j_{34} \rangle = \sqrt{(2j_{12}+1)(2j_{24}+1)(2j_3+1)(2j_{34}+1)} \begin{Bmatrix} j_1, j_2, j_3 \\ j_4, j_5, j_6 \\ j_{12}, j_{24}, j \end{Bmatrix} \quad (2.16)$$

donde hemos introducido los coeficientes  $g-j$ :

$$\begin{Bmatrix} j_1, j_2, j_{12} \\ j_3, j_4, j_{34} \\ j_{12}, j_{34}, j \end{Bmatrix} = \sum_{m_1, m_2, m_3, m_4, m} \frac{(-)^{j_1+j_2+j_3+j_4-j_5-j_6+j_{12}+j_{34}+j}}{(2j_1+1)(2j_2+1)(2j_3+1)(2j_4+1)(2j_5+1)(2j_6+1)} \times$$

$$\langle j_1, m_1, j_2, m_2 | j_{12}, m_{12} \rangle \langle j_3, m_3, j_4, m_4 | j_{34}, m_{34} \rangle \langle j_5, m_5, j_6, m_6 | j_{56}, m_{56} \rangle$$

$$\times \langle j_1, m_1, j_2, m_2 | j_3, m_3 \rangle \langle j_1, m_1, j_2, m_2 | j_4, m_4 \rangle \langle j_5, m_5, j_6, m_6 | j, m \rangle$$

Entonces, la relación entre los esquemas de acoplamiento L-S y j-j está dada por

$$\Psi[LS, \Omega, Q, S, \Omega', JM] = \sum_j \sqrt{(2j+1)(2\Omega+1)(2\Omega'+1)} \begin{Bmatrix} L, S, j \\ L', S', j \\ L, S', j \end{Bmatrix} \Psi[RAM, \Omega, JM] \quad (2.17)$$

### SECCION 3. EQUIVALENCIA DE PROTONES Y NEUTRONES (ISOSPIN).

Las funciones de onda de dos protones y/o de dos neutrones, deben ser completamente antisimétricas ya que describen sistemas de dos fermiones.

Consideremos el estado de un protón y un neutrón

$$\Phi_{pn}(\Omega, j, JM) \equiv \sum_{m_1, m_2} \langle j_1, m_1, j_2, m_2 | JM \rangle \varphi_1^p(\Omega, j_1, m_1) \varphi_2^n(\Omega, j_2, m_2)$$

y el estado en el cual el protón está en la órbita  $j_2$  y el neutrón, en la órbita  $j_1$ ,  $\Phi_{np}(\Omega, j, JM)$ . Como las masas del neutrón y del protón son muy parecidas ( $M_n - M_p \approx 2.5 m_e$ , donde  $m_e$  es la masa del electrón), la energía cinética total en ambos estados es prácticamente la misma. Por otra parte, si la energía potencial resulta ser independiente de la carga, los estados estarían degenerados. En un núcleo, el potencial promedio que siente un protón es diferente del que siente un neutrón debido a la repulsión eléctrica que siente aquél por parte de los demás protones en el núcleo; sin embargo, las energías asociadas con las fuerzas coulombianas, especialmente en núcleos ligeros ( $A \leq 50$ ), son pequeñas comparadas a las asociadas a las fuerzas nucleares; ade-

más, sabemos que las fuerzas nucleares son idénticas entre dos neutrones que entre un neutrón y un protón en estados espaciales idénticos (independencia de carga), así como entre dos neutrones y dos protones (simetría de carga)<sup>8)</sup>; por lo tanto, parece razonable concluir, al menos para núcleos ligeros, que los dos estados considerados tienen, a una buena aproximación, la misma energía potencial en el campo central (las correcciones coulombianas pueden, en todo caso, considerarse como perturbación).

Para obtener los corrimientos en la energía a primer orden de estos dos estados en presencia de la interacción residual  $V_{12}$ , es necesario evaluar los valores propios de la matriz

$$\begin{bmatrix} \langle j_1^p j_2^p j_3 | V_{12} | j_1^p j_2^p j_3 \rangle & \langle j_1^p j_2^p j_3 | V_{12} | j_1^n j_2^p j_3 \rangle \\ \langle j_1^n j_2^p j_3 | V_{12} | j_1^p j_2^p j_3 \rangle & \langle j_1^n j_2^p j_3 | V_{12} | j_1^n j_2^p j_3 \rangle \end{bmatrix} \quad (3.)$$

Si  $V_{12}$  es simétrica ante el intercambio del protón y del neutrón,

$$\langle j_1^p j_2^p j_3 | V_{12} | j_1^n j_2^p j_3 \rangle = \langle j_1^n j_2^p j_3 | V_{12} | j_1^p j_2^p j_3 \rangle.$$

$$\langle j_1^p j_2^p j_3 | V_{12} | j_1^n j_2^n j_3 \rangle = \langle j_1^n j_2^n j_3 | V_{12} | j_1^p j_2^n j_3 \rangle.$$

En consecuencia, los corrimientos en la energía son

$$\Delta E^{(1)} = \langle j_1^p j_2^n j_3 | V_{12} | j_1^p j_2^n j_3 \rangle = \langle j_1^n j_2^n j_3 | V_{12} | j_1^n j_2^n j_3 \rangle. \quad (3.)$$

y los correspondientes estados propios,

$$\Psi_{pn}^{(1)}(j_1, j_2, j_3 M) \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{m_1, m_2} \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j_3 M \rangle [\varphi_1^p(r_1, m_1) \varphi_2^n(r_2, m_2) \pm \varphi_2^n(r_1, m_2) \varphi_1^p(r_2, m_1)].$$

Sin embargo, la identificación del protón como la partícula 1 y la del neutrón como la partícula 2 no tiene significado físico; podríamos haber tomado como la función de onda de los dos estados

$$\Psi'_{pn}{}^{(1)}(j_1, j_2, j_3 M) \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{m_1, m_2} \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j_3 M \rangle [\varphi_1^n(r_1, m_1) \varphi_2^p(r_2, m_2) \pm \varphi_2^p(r_1, m_2) \varphi_1^n(r_2, m_1)].$$

Las dos funciones de onda  $\Psi_{pn}^{(1)}$  y  $\Psi'_{pn}{}^{(1)}$  son ortogonales entre sí, puesto que  $\int d\tau_1 \varphi_1^n(r_1, m_1) \varphi_1^p(r_1, m_1) = 0$ . Por otra parte, si la interacción  $V_{12}$  no puede convertir un protón en un neutrón y viceversa (i.e., no es un potencial que incluya intercambio de carga<sup>9)</sup>), entonces

$$\int d\tau_1 \int d\tau_2 \Psi_{pn}^{(1)}(j_1, j_2, j_3)^* V_{12} \Psi'_{pn}{}^{(1)}(j_1, j_2, j_3) = 0 \quad (3.)$$

(la fuerza real entre un protón y un neutrón puede involucrar un intercambio de carga entre ellos; con tal interacción, la condi-

ción anterior ya no es válida; sin embargo, para las aplicaciones que nos interesan es posible considerar como verdadera la Ec. (3.3)). Podemos tomar como estados propios correspondientes a los corrimientos en la energía (3.2) cualquier combinación lineal de  $\Psi_{pn}^{(1)}$  y  $\Psi_{pn}^{(2)}$ ; pero al considerar un intercambio de carga, esta combinación deberá ser simétrica o antisimétrica respecto al intercambio de los números cuánticos de carga (i.e.,  $p \leftrightarrow n$  y  $n \rightarrow p$ ). Experimentalmente se ha encontrado que el sistema protón-neutrón es antisimétrico respecto al intercambio de todos los números cuánticos<sup>10)</sup>. Como los sistemas de dos protones y de dos neutrones también son antisimétricos, el sistema protón-neutrón puede considerarse como un caso especial del sistema general de dos nucleones. Con esta restricción, la combinación lineal de  $\Psi_{pn}^{(1)}$  y  $\Psi_{pn}^{(2)}$  que corresponde a los valores propios  $\epsilon_{pn}^{(1)}$  debe ser

$$\Psi_{pn}^{(1)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} [\Psi_{pn}^{(1)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) - \Psi_{pn}^{(2)}(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1)] \quad (3.4)$$

Ya que hemos supuesto que la dependencia de  $\Psi_{pn}^{(1)}$  en las coordenadas espaciales y de espín es la misma para un protón que para un neutrón, es conveniente escribir la función de onda de un nucleón en la forma de un producto de dos funciones

$$\psi_n(\mathbf{r}, m) = \phi(\mathbf{r}, m) \xi(n),$$

donde  $\xi(n)$  depende únicamente de las "coordenadas" de carga del nucleón (que pueden tomar sólo dos valores: protón y/o neutrón). Esto constituye un grado interno de libertad para el nucleón, análogo al espín del electrón; por esta analogía, se denomina al grado interno de libertad del nucleón espín isotópico, o más brevemente, isoespín (debe tenerse en mente que el espín del electrón es un grado interno de libertad en el espacio real, en tanto que el isoespín, lo es en el espacio de "carga").

Introducimos el operador análogo al espín  $I_y^{(N)}$ , con la convención de que el protón es el nucleón en un estado propio de  $I_y^{(N)}$  con valor propio 1/2, y el neutrón, aquél correspondiente a -1/2:

$$I_y^{(N)} \xi(p) = \frac{1}{2} \xi(p) \quad I_y^{(N)} \xi(n) = -\frac{1}{2} \xi(n) \quad (3.5)$$

Como  $I_x^{(N)}$ ,  $I_y^{(N)}$  e  $I_z^{(N)}$  actúan en el espacio de carga en completa

analogía a  $S_x$ ,  $S_y$  y  $S_z$ , deben obedecer las mismas relaciones de conmutación

$$[I_x^{(a)}, I_y^{(a)}] = i I_z^{(a)} \quad (3)$$

El operador  $I^{(a)}$  tiene todas las propiedades de un operador vectorial en el espacio de isoespín. Finalmente, hacemos notar que el operador

$$Q_n = I_z^{(n)} + \frac{1}{2} \quad (3)$$

mide la carga del nucleón.

Regresando a nuestro problema, vemos que (3.4) puede escribirse así:

$$\Psi_{pm}^{(+)}(j_a j_b J) = \frac{1}{2} \sum_{m_a m_b} \langle j_a m_a j_b m_b | JM \rangle [\varphi_1(m_a) \varphi_2(m_b) + \varphi_2(m_a) \varphi_1(m_b)] F_1(j_a) F_2(j_b)$$
 donde hemos definido  $\varphi_1(m) = \varphi_1(m, j_a, m_a)$ , y  $F_1(j)$  significa que la partícula 1 es un protón, por ejemplo. En forma similar, podemos escribir los estados antisimétricos de dos protones y de dos neutrones:

$$\begin{aligned} \Psi_{pp}(j_a j_b J) &= \frac{1}{2} \sum_{m_a m_b} \langle j_a m_a j_b m_b | JM \rangle [\varphi_1(m_a) \varphi_2(m_b) - \varphi_2(m_a) \varphi_1(m_b)] F_1(j_a) F_2(j_b) \\ \Psi_{nn}(j_a j_b J) &= \frac{1}{2} \sum_{m_a m_b} \langle j_a m_a j_b m_b | JM \rangle [\varphi_1(m_a) \varphi_2(m_b) - \varphi_2(m_a) \varphi_1(m_b)] F_1(j_a) F_2(j_b) \end{aligned}$$

Las partes dependientes del isoespín de las tres últimas expresiones tienen una interpretación simple en el formalismo de isoespín. Definiendo el isoespín total como  $I_3 = I_{31} + I_{32}$ , para un sistema de dos partículas las funciones de onda propias del isoespín total al cuadrado y su tercera componente serán

$$\xi(I_3^2 I_3) = \sum_{m_1 m_2} \langle \frac{1}{2} m_1 \frac{1}{2} m_2 | I_3 \rangle \xi_1(m_1) \xi_2(m_2) \quad (3.5)$$

Con esto, las cuatro funciones de onda para dos nucleones pueden escribirse como sigue:

$$\Psi_{pp}^{(+)}(j_a j_b JM) = \Psi^{(+)}(j_a j_b JM) \xi(I_3^2 00)$$

$$\Psi_{pp}^{(-)}(j_a j_b JM) = \Psi^{(-)}(j_a j_b JM) \xi(I_3^2 11)$$

$$\Psi_{nn}^{(+)}(j_a j_b JM) = \Psi^{(+)}(j_a j_b JM) \xi(I_3^2 10)$$

$$\Psi_{nn}^{(-)}(j_a j_b JM) = \Psi^{(-)}(j_a j_b JM) \xi(I_3^2 01)$$

donde  $\Psi^{(\pm)}(j_a j_b JM) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{m_a m_b} \langle j_a m_a j_b m_b | JM \rangle [\varphi_1(j_a m_a) \varphi_2(j_b m_b) \pm \varphi_2(j_a m_a) \varphi_1(j_b m_b)]$ .

Resumiendo, para una configuración de dos nucleones  $(j_a j_b)$ , los corrimientos en la energía a primer orden causados por una interacción  $V_2$  independiente de la carga están dados por

$$\Delta E(j_a j_b JM) = \langle j_a j_b JM | V_2 | j_a j_b JM \rangle$$

donde los estados son anti-simétricos respecto al intercambio de los dos nucleones. De nuestra suposición acerca de la interacción residual,  $[N_1, \dots, [J_1, J_2]]$ , y usando el teorema de Wigner-Eckart (A.40) dos veces, podemos evaluar la dependencia en  $M$  y  $M_I$  del corrimiento en la energía:

$$\Delta E_{J_1, J_2, J, M, M_I} = \frac{1}{4(2J_1+1)(2J_2+1)} \langle J_1, J_2, M, M_I | V_{12} | J_1, J_2, M, M_I \rangle \quad (3.3)$$

#### SECCION 4. INTERACCION RESIDUAL DE DOS CUERPOS Y OPERADORES DE INTERCAMBIO.

En esta sección vamos a estudiar en más detalle los corrimientos en la energía, a primer orden, para un sistema de dos partículas moviéndose en un potencial central común, con una interacción mutua  $V_{12}$ ,

$$\Delta E_J = \int d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 \Psi^{\dagger}(JM) V_{12} \Psi(JM), \quad (4.1)$$

donde los estados de momento angular total definido,  $\Psi(JM)$ , pueden expresarse en el esquema de acoplamiento L-S,  $\Psi(L, S, JM)$ , o en el esquema j-j,  $\Psi(l_1, l_2, j, JM)$ . También discutiremos la forma de la interacción residual más general de dos cuerpos, independiente de la carga, y que no incluye derivadas.

Consideremos primero dos partículas idénticas en el acoplamiento j-j. Si suponemos  $(l_1, j_1) \neq (l_2, j_2)$ , la función de onda anti-simétrica está dada por

$$\Psi_a(l_1, l_2, j, JM) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{m_1, m_2} \langle j_1, m_1, j_2, m_2 | JM \rangle [\Phi_1(l_1, m_1) \Phi_2(l_2, m_2) - \Phi_1(l_2, m_1) \Phi_2(l_1, m_2)].$$

Usando propiedades de simetría de los coeficientes de acoplamiento vectorial obtenemos

$$\Psi_a(l_1, l_2, j, JM) = \frac{1}{\sqrt{2}} [\Psi(l_1, l_2, j, JM) - (-1)^{j_1+j_2} \Psi(l_2, l_1, j, JM)], \quad (4.2)$$

donde

$$\Psi(l_1, l_2, j, JM) = \sum_{m_1, m_2} \langle j_1, m_1, j_2, m_2 | JM \rangle \Phi_1(l_1, m_1) \Phi_2(l_2, m_2)$$

denota la función de onda en la cual la partícula 1 está en la órbita  $(l_1, j_1)$ , la partícula 2, en la órbita  $(l_2, j_2)$ , y  $j_1$  y  $j_2$  están acopladas a  $J$ , en este orden.

Sustituyendo (4.2) en (4.1) obtenemos

$$\Delta E_{j_1, j_2} = \frac{1}{2} \left\{ \langle l_1, l_2, JM | V_{12} | l_1, l_2, JM \rangle + \langle l_2, l_1, JM | V_{12} | l_2, l_1, JM \rangle - (-1)^{j_1+j_2} \langle l_1, l_2, JM | V_{12} | l_2, l_1, JM \rangle - (-1)^{j_1+j_2} \langle l_2, l_1, JM | V_{12} | l_1, l_2, JM \rangle \right\}.$$





tribución del término de intercambio es también muy pequeña; esto es consecuencia de que la integral en el término de intercambio contiene el producto  $\psi_1^*(r_1, m_1) \psi_2(r_2, m_2)$  y un pequeño traslape de las órbitas significa que este producto es pequeño comparado con  $\psi_1^*(r_1, m_1) \psi_1(r_1, m_1)$  y  $\psi_2^*(r_2, m_2) \psi_2(r_2, m_2)$ , que aparecerían en el término directo; de manera que si las órbitas no se traslapan, la contribución del término directo al corrimiento en la energía es única.

Ahora, si las órbitas  $\psi_1$  y  $\psi_2$  se traslapan considerablemente, la contribución del término de intercambio se vuelve importante. Si consideramos interacciones independientes del espín, éstas serán diagonales en el esquema L-S; sin embargo, observamos en (4.5) que la contribución del término de intercambio tiene signos distintos para  $S=0$  y para  $S=1$ ; esto parece sorprendente ya que hemos supuesto que las interacciones son independientes del espín. Pero si recordamos que la función de onda total es antisimétrica, vemos que la parte espacial de la función de onda es simétrica o antisimétrica dependiendo de si  $S=0$  o  $S=1$ . Entonces, la elección de un valor para el espín total determina indirectamente las propiedades espaciales del estado considerado y, en consecuencia, el valor de  $\Delta E_{LS}$ .

Para el caso de partículas equivalentes, esto es, cuando  $n_1 = n_2 = n$  y  $l_1 = l_2 = l$ , las fórmulas anteriores tienen que modificarse. En (4.2) y (4.4) el factor de normalización  $1/\sqrt{2}$  tiene que reemplazarse por  $1/2$ . Para esta situación podemos entonces reescribir las ecuaciones mencionadas como

$$\psi_a(l^2 LSJM) = \sum_{\substack{m_1 m_2 \\ m_1 m_2}} \frac{1}{2} \langle L_1 m_1 L_2 m_2 | JM \rangle \langle l m_1 l m_2 | LM \rangle \langle l m_1 l m_2 | JM \rangle \psi_1(l m_1) \psi_2(l m_2) \chi_1(m_1) \chi_2(m_2) \quad (4.6)$$

para L+S par en el acoplamiento L-S, en tanto que en el acoplamiento j-j, donde la condición de partículas equivalentes es  $n_1 = n_2 = n$ ,  $l_1 = l_2 = l$  y  $j_1 = j_2 = j$ , obtenemos para J par

$$\psi_a(j^2 JM) = \sum_{\substack{m_1 m_2 \\ m_1 m_2}} \frac{1}{2} \langle j m_1 j m_2 | JM \rangle \langle l m_1 l m_2 | JM \rangle \langle l m_1 l m_2 | JM \rangle \psi_1(l m_1) \psi_2(l m_2) \chi_1(m_1) \chi_2(m_2) \quad (4.7)$$

Notamos que para partículas equivalentes el término de intercambio es igual al término directo. Tomando esto en cuenta en las

fórmulas (4.3) y (4.5), junto con el estado del sistema normalización, obtenemos para partículas idénticas los corrientes

$$\Delta E(\Psi_{LSJM}) = \langle \Psi_{LSJM} | V_{12} | \Psi_{LSJM} \rangle, \text{ para } L \text{ par};$$

$$\Delta E(\Psi^{\pm} J) = \langle \Psi^{\pm} JM | V_{12} | \Psi^{\pm} JM \rangle, \text{ para } J \text{ par.} \quad (4)$$

Si consideramos estados con I=0 (espin total nulo), requerimos funciones de onda en los espacios de coordenadas y de espin que sean simétricas; en analogía con las ecuaciones (4.2) y (4.4) tenemos entonces

$$\Psi_0(r_1, r_2, J, M) = \frac{1}{\sqrt{2}} [\Psi(r_1, r_2, J, M) + (-1)^{J+M} \Psi(r_2, r_1, J, M)] \quad (4)$$

$$\Psi_0(r_1, r_2, J, M) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{M_1, M_2} \langle M_1, M_2 | J, M \rangle [\Psi(r_1, r_2, M_1, M_2) + (-1)^{M_1+M_2} \Psi(r_2, r_1, M_1, M_2)] \chi(J, M) \quad (4)$$

Las demás fórmulas, análogas a las obtenidas para los estados antisimétricos, se encuentran introduciendo el cambio de signo que aparece en las expresiones anteriores en los lugares correspondientes. Por ejemplo, el corriente en la energía en un sistema de partículas equivalentes para funciones completamente simétricas es

$$\Delta E_s(\Psi_{LSJM}) = \langle \Psi_{LSJM} | V_{12} | \Psi_{LSJM} \rangle, \text{ para } L \text{ impar};$$

$$\Delta E_s(\Psi^{\pm} J) = \langle \Psi^{\pm} JM | V_{12} | \Psi^{\pm} JM \rangle, \text{ para } J \text{ impar.} \quad (4)$$

Hasta ahora hemos considerado únicamente interacciones que involucran intercambio de momento entre dos partículas; las fuerzas que se originan de este tipo de interacciones son denominadas fuerzas de Wigner. Sin embargo, los nucleones también poseen grados de libertad internos, como el espin o el isoespin, lo que nos hace pensar en la posible existencia de interacciones de intercambio, en las cuales las fuerzas entre partículas se deben al intercambio de espin o de isoespin (i.e., de carga); este tipo de fuerzas de intercambio se manifiesta claramente en los experimentos de dispersión n-p y n-n<sup>3</sup>). Si las interacciones de intercambio involucran intercambio de espin únicamente, la fuerza que originan se denomina fuerza de Bartlett; si involucran intercambio de isoespin o carga, fuerza de Heisenberg, y mientras que si entra en juego un intercambio simultáneo de carga

y de espín, fuerza de Majorana.

Si las cuatro fuerzas son derivables de potenciales, los potenciales posibles son

$$\begin{aligned} V_W &= F_W(|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|), \\ V_E &= \frac{1}{2} [1 + 4 \mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2] F_E(|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|), \\ V_N &= -\frac{1}{2} [1 + 4 \mathbf{L}_1 \cdot \mathbf{L}_2] F_N(|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|), \\ V_M &= -\frac{1}{4} [1 + 4 \mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2] [1 + 4 \mathbf{L}_1 \cdot \mathbf{L}_2] F_M(|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|). \end{aligned} \quad (4.12)$$

En (4.12) hemos introducido dos operadores. El primero es el operador de intercambio de espín:

$$P_S \equiv \frac{1}{2} [1 + \mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2], \quad (4.13)$$

que si se aplica a un estado simétrico en los dos espines ( $S=1$ ), lo deja invariante, en tanto que para un estado antisimétrico ( $S=0$ ), lo multiplica por  $-1$ . Después tenemos el operador de intercambio de carga:

$$P_I \equiv \frac{1}{2} [1 + 4 \mathbf{L}_1 \cdot \mathbf{L}_2], \quad (4.14)$$

con los valores propios  $+1$  para estados simétricos en el espacio de isoespín ( $I=1$ ), y  $-1$  para estados antisimétricos ( $I=0$ ).

Podemos definir otro operador de intercambio, el operador de intercambio espacial, como

$$P_X \Psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \Psi(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1), \quad (4.15)$$

de manera que sus valores propios son  $+1$  y  $-1$  correspondientes a funciones simétricas y antisimétricas espacialmente. Si tomamos en cuenta que la función de onda completa debe ser antisimétrica, al aplicarle los tres operadores simultáneamente la va a multiplicar por  $-1$ . Por lo tanto, cuando tratemos sólo con estados totalmente antisimétricos, tendremos que

$$P_X = -P_S P_I. \quad (4.16)$$

es decir, la fuerza de Majorana es equivalente a una fuerza producida por un intercambio espacial.

Podemos hacer dos observaciones:

- 1) Los operadores de intercambio conmutan con el isoespín total  $\mathbf{L}$  y con el espín total  $\mathbf{S}$ . Entonces los cuatro potenciales en (4.12) son los más generales que originan fuerzas escalares

dependiente de la carga.

2) Para sistemas de nucleones idénticos, esto es, sistemas neutrón-neutrón (n-n) y protón-protón (p-p), para los cuales  $I=1$ , sólo existen dos tipos de fuerzas escalares independientes, ya que las fuerzas de Heisenberg se reducen a las de Wigner, mientras que las fuerzas de Majorana se reducen a las de Bartlett.

Sin embargo, aunque las fuerzas nucleares sean independientes de la carga, no necesariamente deben restringirse a ser de carácter escalar<sup>11)</sup>. Por esto, debemos considerar interacciones más generales que las incluidas en (4.12). Estas interacciones deben conmutar con  $J$ , pero pueden no hacerlo con  $L_z$  y/o  $S_z$ .

Debido a que los operadores de espín son tensores de orden 1, a partir de  $S_1$  y  $S_2$  sólo podemos construir un operador escalar ( $S_1 \cdot S_2$ ), uno vectorial, como  $(S_1 \times S_2)^{(1)}$ , y uno tensorial de segundo orden, como  $(S_1 \times S_2)^{(2)}$ . Entonces existen las siguientes tres posibilidades para la dependencia de las interacciones de dos cuerpos en las coordenadas espaciales y de espín (que no incluyen derivadas):

a) Fuerzas escalares:-

$$V_1(r, z) = f_1(|r_1 - r_2|) + (S_1 \cdot S_2) f_2(|r_1 - r_2|).$$

b) Fuerzas vectoriales:-

$$V_2(r, z) = \{ (S_1 \times S_2)^{(1)} \cdot (r_1 - r_2) \} f_1(|r_1 - r_2|).$$

c) Fuerzas tensoriales:-

$$V_3(r, z) = \{ (S_1 \times S_2)^{(2)} \cdot [(r_1 - r_2) \times (r_1 - r_2)]^{(2)} \} f_1(|r_1 - r_2|).$$

Debe notarse que en las interacciones vectoriales y tensoriales no incluimos los términos

$$(S_1 \cdot S_2) \{ (S_1 \times S_2)^{(1)} \cdot z \} \quad \text{y} \quad (S_1 \cdot S_2) \{ (S_1 \times S_2)^{(2)} \cdot [z \times z]^{(2)} \}; \quad z \equiv r_1 - r_2,$$

debido a que estas interacciones no son distintas a las ya consideradas. Tomemos por ejemplo la primera de estas expresiones; podemos combinar los dos factores dependientes del espín; como uno de ellos es un escalar y el otro un vector, su producto debe ser un vector, y el único vector que se puede construir de  $S_1$  y  $S_2$  es  $(S_1 \times S_2)^{(1)}$ . Por la misma razón no obtenemos nada nuevo al in-

introducir el producto

$$\{ [L_1 \times S_1]^{(1)} \cdot [L_2 \times S_2]^{(1)} \cdot [L \times S]^{(0)} \}.$$

Introduciendo la dependencia de la carga a través del operador de intercambio de carga  $\mathcal{P}_1$ , obtenemos entonces la interacción

$$\begin{aligned} V(0,2) = & V_0(r) + \mathcal{P}_0 V_{00}(r) + \mathcal{P}_I V_{10}(r) + \mathcal{P}_0 \mathcal{P}_I V_{010}(r) \\ & + \{ [S_1 \times S_2]^{(0)} \cdot \mathcal{L} \} V_1(r) + \mathcal{P}_I \{ [S_1 \times S_2]^{(0)} \cdot \mathcal{L} \} V_{11}(r) \\ & + \{ [S_1 \times S_2]^{(2)} \cdot [L \times L]^{(0)} \} V_2(r) + \mathcal{P}_I \{ [S_1 \times S_2]^{(2)} \cdot [L \times L]^{(0)} \} V_{21}(r). \end{aligned} \quad (4.17)$$

Consideraciones de carácter más general<sup>12)</sup>, nos llevan a descartar las interacciones vectoriales en (4.17) y reemplazarlas por una interacción de espín-órbita de partícula independiente:

$$V^*(0,2) = \{ (S_1 \cdot S_2) \cdot [(r_1 - r_2) \times (r_1 - r_2)]^{(0)} \} V_3(|r_1 - r_2|),$$

lo que tiene su origen en la observación de que las interacciones fuertes conservan la paridad.

Finalizamos esta sección mencionando que a pesar de que no se conoce en forma exacta la interacción nuclear, a partir de consideraciones generales como las discutidas en esta sección, y los datos experimentales, sabemos que son fuerzas de corto alcance e independientes de la carga, que involucran operadores de espín y contienen, probablemente, fuerzas vectoriales y tensoriales.

## SECCION 5. METODO DE LA EXPANSION TENSORIAL DE LA INTERACCION (EXPANSION DE SLATER).

Consideremos la evaluación del elemento de matriz

$$\langle n_1 l_1 m_1 n_2 l_2 m_2 | V_{12}(|r_1 - r_2|) | n_1 l_1 m_1 n_2 l_2 m_2 \rangle,$$

donde  $V_{12}(|r_1 - r_2|)$  es una interacción arbitraria. Este problema presenta complicaciones debido a que  $V_{12}$  es una función de  $|r_1 - r_2|$  en tanto que el término  $\Psi^*(n_1 l_1 m_1 n_2 l_2 m_2) \Psi(n_1 l_1 m_1 n_2 l_2 m_2)$ , que allí aparece, es el producto de una función de  $r_1$  y una función de  $r_2$ .

La distancia  $|r_1 - r_2|$  es una función de  $r_1, r_2$  y el ángulo  $\omega_{12}$  entre  $r_1$  y  $r_2$  determinado por  $\cos \omega_{12} = (r_1 \cdot r_2) / r_1 r_2$ . Podemos por lo tanto desarrollar  $V_{12}(|r_1 - r_2|)$  en una serie de polinomios

de los operadores de los operadores:

$$V_{12}(r_1, r_2) = \sum_{k=0}^{\infty} V_k(r_1, r_2) P_k(\cos \omega_{12}) \quad (5.1)$$

donde los coeficientes de cada término en la expansión se determinan utilizando la ortogonalidad de los polinomios<sup>13)</sup>, resultando

$$V_k(r_1, r_2) = \frac{4\pi k!}{2} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} d(\cos \omega_{12}) P_k(\cos \omega_{12}) V_{12}(r_1, r_2).$$

Usando el teorema de adición de armónicos esféricos<sup>14)</sup> en (5.1), obtenemos entonces la ecuación

$$V_{12}(r_1, r_2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4\pi}{2k+1} \sum_{m=-k}^k V_k(r_1, r_2) Y_{k0}^*(\Omega_1) Y_{k0}(\Omega_2), \quad (5.2)$$

donde  $\Omega_i, i=1,2$ , denota las variables angulares de  $r_i$ . Por otra parte, la expresión explícita de los estados utilizados para calcular el valor esperado de  $V_{12}$  es<sup>15)</sup>

$$\psi(n_1, n_2, L, M) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} R_{n_1, l_1}(r_1) R_{n_2, l_2}(r_2) \sum_{m_1, m_2} \langle n_1, m_1, l_1, m_2 | L, M \rangle Y_{l_1, m_1}(\Omega_1) Y_{l_2, m_2}(\Omega_2). \quad (5.3)$$

Combinando este resultado con la expresión (5.2), resulta

$$\langle n_1, n_2, L, M | V_{12}(r_1, r_2) | n_1, n_2, L, M \rangle = \sum_{k=0}^L F^k \langle n_1, l_1, m_1 | \zeta_{1k}^*(\Omega_1) \cdot \zeta_{2k}(\Omega_2) | n_1, l_1, m_1 \rangle, \quad (5.4)$$

donde las integrales radiales  $F^k$ , conocidas como integrales de Slater, están dadas por

$$F^k = F^k(n_1, n_2, l_1, l_2) = \int dr_1 \int dr_2 V_k(r_1, r_2) |R_{n_1, l_1}(r_1) R_{n_2, l_2}(r_2)|^2, \quad (5.5)$$

y se ha definido el operador tensorial

$$\zeta_{k\mu}^*(\Omega) = \sqrt{\frac{4\pi}{2k+1}} Y_{k\mu}^*(\Omega). \quad (5.6)$$

Usando la relación (A.43), obtenemos la siguiente expresión para el elemento de matriz que involucra los ángulos en (5.4):

$$F_k = \langle n_1, l_1, m_1 | \zeta_{1k}^*(\Omega_1) \cdot \zeta_{2k}(\Omega_2) | n_1, l_1, m_1 \rangle = (-1)^{l_1+m_1} \begin{Bmatrix} l_1 & k & l_1 \\ m_1 & 0 & m_1 \end{Bmatrix} \langle n_1, l_1, m_1 | \zeta_{1k}^*(\Omega_1) | n_1, l_1, m_1 \rangle \langle n_2, l_2, m_2 | \zeta_{2k}(\Omega_2) | n_2, l_2, m_2 \rangle, \quad (5.7)$$

donde el elemento reducido de matriz puede calcularse a partir de (A.65), resultando

$$F_k = (-1)^{l_1+m_1} \begin{Bmatrix} l_1 & k & l_1 \\ m_1 & 0 & m_1 \end{Bmatrix} (n_1, l_1, m_1) (n_2, l_2, m_2) \begin{pmatrix} l_1 & k & l_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_2 & k & l_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.8)$$

Notamos que, debido a las propiedades de los coeficientes de Wigner (A.9), el elemento de matriz angular  $F_k$  se anula cuando no se satisfacen las condiciones:  $0 \leq k \leq 2l_1$ ,  $0 \leq k \leq 2l_2$ ,  $k$  par.

De esta forma, obtenemos que (5.4) se puede escribir

$$\langle n_1, n_2, l_1, l_2, L, M | V_{12}(r_1, r_2) | n_1, n_2, l_1, l_2, L, M \rangle = \sum_{k=0}^{2\min(l_1, l_2)} F_k F^k, \quad (5.9)$$

donde la suma se efectúa para los valores pares de  $k$ . Observemos que los números  $F_k$  dependen de los números cuánticos  $n_1, n_2, l_1, l_2, L, M$  y  $k$ .

$k$ , pero que son independientes de la forma específica de la interacción  $V_{12}(r_{12}, \sigma_1, \sigma_2)$ ; la estructura particular de  $V_{12}(r_{12}, \sigma_1, \sigma_2)$  afecta únicamente los valores de los  $F^k$ . Por otro lado, sabemos que la fórmula (5.9) expresa los corrientes a primer orden en la energía de los  $2R_1 + 1$  niveles de la configuración  $(R_1, R_2)$ , en términos de  $R_1 + 1$  parámetros  $F^k$  (suponiendo que  $R_1 \leq R_2$ ). Así, podemos ajustar (5.9) con los datos experimentales eligiendo apropiadamente los parámetros  $F^k$ , sin necesidad de hacer suposición alguna acerca del potencial de interacción residual.

El tratamiento anterior puede aplicarse también para estados antisimétricos. Combinando las ecuaciones (4.5) y (5.2) obtenemos

$$\Delta E_{L,S} = \sum_k C_k F^k + (-1)^{R_1 R_2 - L - S} \sum_{k'} g_{k'} G^{k'}, \quad (5.10)$$

donde  $C_k$  y  $F^k$  están definidos como antes, y los términos de intercambio, por

$$g_k \equiv (-1)^{k-S} \left\{ \begin{matrix} R_1 & R_2 & L \\ R_1 & R_2 & k \end{matrix} \right\} (2R_1+1) (2R_2+1) \begin{pmatrix} R_1 & k & R_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2, \quad (5.11)$$

$$G^{k'} \equiv G^{k'}(M_1, M_2, M_L) = \int d\tau_1 \int d\tau_2 V_{12}(r_{12}, \tau_1, \tau_2) R_{R_1, M_1}^{k'}(\tau_1) R_{R_2, M_2}^{k'}(\tau_2) R_{L, M_L}^{k'}(\tau_1, \tau_2), \quad (5.12)$$

donde la suma sobre el índice  $k'$  va desde  $|R_1 - R_2|$  hasta  $R_1 + R_2$ , sin estar limitada a valores pares de  $k'$ .

El método de desarrollo tensorial puede generalizarse para considerar interacciones dependientes del espín. Tomemos la interacción  $(\sigma_1 \cdot \sigma_2) V_{12}(r_{12}, \sigma_1, \sigma_2)$ ; procediendo como se hizo para una fuerza de Wigner obtenemos lo siguiente:

$$\langle M_1, M_2, R_1, L, S, M | (\sigma_1 \cdot \sigma_2) V_{12}(r_{12}, \sigma_1, \sigma_2) | M_1, M_2, R_1, L, S, M \rangle = \sum_k C_k' F^k, \quad (5.13)$$

donde ahora

$$C_k' = 2 \left[ S(S+1) - \frac{1}{2} \right] C_k^L (2R_1+1) (2R_2+1) \begin{pmatrix} R_1 & k & R_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_1 & k & R_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \left\{ \begin{matrix} R_1 & R_2 & L \\ R_1 & R_2 & k \end{matrix} \right\}. \quad (5.14)$$

Para obtener relaciones similares en el acoplamiento  $j-j$ , definimos un tensor  $T^{(1)k}$  como

$$T^{(1)k} \equiv [C_k \sigma_1 \cdot \sigma_2]^{(1)k} = \sum_{M, K} \langle 1, M, K, K | 1, S \rangle \sigma_{1M}^{(1)k} \sigma_{2K}^{(1)k} \quad (5.15)$$

Utilizando (A.22) y (A.39) se tiene entonces

$$(\sigma_1 \cdot \sigma_2) (C_k^x(1) \cdot C_k^x(2)) = \sum_T (-1)^{k+T+1} \left\{ T^{(1)k}(1) \cdot T^{(1)k}(2) \right\}, \quad (5.16)$$

de modo que la interacción considerada, dependiente del espín, se puede reescribir

$$V_{12}(1, 2) = \sum_{s_1, s_2} V_{s_1, s_2}(1, 2) \{ \underline{I}^{(s_1)r}(1) \cdot \underline{I}^{(s_2)r}(2) \}. \quad (5.1)$$

En general, cualquier interacción que dependa de las coordenadas espaciales y de espín de las partículas 1 y 2 se puede escribir en la forma<sup>10)</sup>

$$V_{12} = \sum_{s_1, s_2, r} V_{s_1, s_2, r}(1, 2) \{ \underline{I}^{(s_1)r}(1) \cdot \underline{I}^{(s_2)r}(2) \}, \quad (5.1)$$

donde el tensor irreducible de grado  $r$ ,  $\underline{I}^{(s)r}$ , se construye a partir de un tensor de orden  $s$ ,  $\underline{\Sigma}^{(s)}$ , en las coordenadas de espín y un tensor de orden  $k$ ,  $\underline{U}^{(k)}$ , en las coordenadas angulares (i.e.,  $\underline{I}^{(s)r} = [ \underline{\Sigma}^{(s)} \times \underline{U}^{(k)} ]^{(r)}$ ). De esta manera, tomando el valor esperado de (5.18) en el acoplamiento  $j$ - $j$  obtenemos el corrimiento en las energías a primer orden

$$\Delta E_{j_1, j_2} = \langle j_1, j_2, JM | V_{12} | j_1, j_2, JM \rangle = \sum_{s_1, s_2, r} F_{s_1, s_2, r} F^{s_1, s_2, r}, \quad (5.19)$$

donde hemos omitido los índices  $n_1$ ,  $n_2$ ,  $\rho_1$  y  $\rho_2$  para no complicar la notación,  $F^{s_1, s_2, r}$  está dado por una expresión similar a (5.5)

y

$$F_{s_1, s_2, r} = (-1)^{j_1 + j_2 + J} \langle \rho_1, j_1 || \underline{I}^{(s_1)r} || \rho_1, j_1 \rangle \langle \rho_2, j_2 || \underline{I}^{(s_2)r} || \rho_2, j_2 \rangle \left\{ \begin{matrix} j_1, j_2, J \\ j_1, j_2, J \end{matrix} \right\}.$$

Usando (A.51) resulta finalmente

$$F_{s_1, s_2, r} = (-1)^{j_1 + j_2 + J} (2j_1 + 1)(2j_2 + 1) \left\{ \begin{matrix} j_1, j_2, J \\ j_1, j_2, J \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} s_1, r, j_1 \\ s_1, r, j_1 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} s_2, r, j_2 \\ s_2, r, j_2 \end{matrix} \right\} \\ \langle \rho_1 || \underline{\Sigma}^{(s_1)} || \rho_1 \rangle \langle \rho_2 || \underline{\Sigma}^{(s_2)} || \rho_2 \rangle \langle \rho_1 || \underline{U}^{(r)} || \rho_1 \rangle \langle \rho_2 || \underline{U}^{(r)} || \rho_2 \rangle. \quad (5.2)$$

Veamos de los coeficientes  $j$ - $j$  que la suma sobre  $r$  en (5.19) está limitada por  $0 \leq r \leq 2j_1, 2j_2$ ; de manera que los niveles de energía en la configuración  $(j_1, j_2)$  están dados por un pequeño número de parámetros. También observamos que tanto  $s+k+r$  como  $s'+k'+r$  son pares.

La generalización al caso en que la función es antisimétrica es similar al del acoplamiento L-S.

Hemos visto en esta sección que el método de desarrollo tensorial de la interacción nos permite determinar los niveles de energía en una configuración dada, con una interacción arbitraria, en términos de un pequeño número de parámetros. Las únicas suposiciones que se han hecho son que la interacción residual efectiva es de dos cuerpos y que puede considerarse como una perturbación. Este método fue introducido por primera vez por Sla-



ter para el potencial coulombiano y su aplicación al caso atómico es directa. Sin embargo, para el caso nuclear no es claro que sea de tanta utilidad como en el caso anterior, debido a que las fuerzas nucleares no son bien conocidas y, por lo mismo, pueden considerarse interacciones más variadas <sup>12)</sup>.

SECCION 6. DOS PARTICULAS EN UN POTENCIAL DE OSCILADOR ARMONICO.  
 PARENTESIS DE TRANSFORMACION ENTRE LAS COORDEADAS  
 REFERIDAS AL CENTRO DEL POTENCIAL, Y LAS COORDEADAS  
 RELATIVA Y DEL CENTRO DE MASA.

Aunque la expansión de Slater es válida para potenciales arbitrarios de dos cuerpos, si el potencial central puede aproximarse mediante un potencial de oscilador armónico, existe otro método que puede simplificar más el cálculo de los niveles de energía. Esta aproximación siempre es válida cuando nos ocupamos únicamente del estado fundamental y los primeros niveles excitados, según se discutió en la sección 3 del capítulo anterior.

El potencial de oscilador armónico tiene la siguiente propiedad:

$$\frac{1}{2} m \omega^2 (x_1^2 + x_2^2) = \frac{1}{2} m \omega^2 (x' + R')^2, \quad (6.1)$$

conse se han definido las coordenadas relativa  $x'$  y de centro de masa  $R'$  de las dos partículas como

$$x' = \frac{1}{\sqrt{2}} (x_1 - x_2), \quad R' = \frac{1}{\sqrt{2}} (x_1 + x_2), \quad (6.2)$$

donde el factor  $1/\sqrt{2}$  en la definición del centro de masa aparece para que la transformación que se define sea ortogonal (la transformación que conecta  $x_1$  y  $x_2$  con  $x'$  y  $R'$ ). De la misma forma se definen los momentos lineales en el sistema de coordenadas relativa y de centro de masa (designado como r.c.m.):

$$p' = \frac{1}{\sqrt{2}} (p_1 - p_2), \quad P' = \frac{1}{\sqrt{2}} (p_1 + p_2). \quad (6.2')$$

Observemos que con estas definiciones se cumple el siguiente par de relaciones:

$$H_{c.p.} = \frac{1}{2} m (\dot{p}_1^2 + \dot{p}_2^2) + \frac{1}{2} m \omega^2 (x_1^2 + x_2^2) = \frac{1}{2} m (\dot{p}'^2 + \dot{P}'^2) + \frac{1}{2} m \omega^2 (x'^2 + R'^2) = H_{r.c.m.} \quad (6.3)$$

$$\frac{1}{2} c.p. = p_1 + p_2 = (x_1 \wedge p_1) + (x_2 \wedge p_2) = (x' \wedge p') + (R' \wedge P') = p' \wedge R' = \frac{1}{2} r.c.m. \quad (6.4)$$

Aquí, c.p. se refiere al sistema de coordenadas en el centro del oscilador.

Recordemos que la función de onda para una partícula sin espín en un pozo de oscilador armónico tiene la forma

$$\langle \nu, l, m \rangle \equiv \psi_{\nu l m}(r, \Omega) = \frac{1}{r} R_{\nu l}(r) Y_{lm}(\Omega),$$

donde las funciones de onda radiales están dadas por

$$R_{\nu l}(r) = \left\{ \frac{2\nu!}{\Gamma(\nu+1)} \right\}^{1/2} (2\nu)^{\nu+1/2} e^{-\nu r^2} r^{2\nu} L_{\nu}^{\nu+1/2}(2\nu r^2); \nu \equiv \frac{m\omega}{2\hbar},$$

siendo  $E_{\nu} = \hbar\omega(2\nu+1/2)$  los valores propios correspondientes. Análogamente, si al sistema c.p. le asociamos una función de onda caracterizada por los números cuánticos radiales  $n_1$  y  $n_2$ , y los números cuánticos angulares  $l_1$  y  $l_2$ , los estados propios pueden escribirse en la forma

$$\langle \nu_1, \nu_2 | n_1, n_2, l_1, l_2, \lambda, \mu \rangle \equiv \sum_{m_1, m_2} \langle n_1, m_1, l_1, n_2, m_2, l_2 | \lambda, \mu \rangle \frac{1}{r_1} R_{\nu_1 l_1}(r_1) R_{\nu_2 l_2}(r_2) Y_{l_1 m_1}(\Omega_1) Y_{l_2 m_2}(\Omega_2), \quad (b.5)$$

mientras que para el sistema r.c.m., si los números cuánticos radial y orbital  $n$  y  $l$  corresponden al movimiento relativo, y  $N$  y  $L$  al del centro de masa de las dos partículas, los estados propios pueden escribirse como

$$\langle \nu, \xi | n, l, N, L, \lambda, \mu \rangle \equiv \sum_{m, M} \langle n, m, l, N, M | \lambda, \mu \rangle \frac{1}{r} R_{nl}(r) \frac{1}{R} R_{NL}(R) Y_{lm}(\Omega_{rel}) Y_{LM}(\Omega_{cm}) \quad (b.6)$$

Debido a (b.3) y (b.4), en la expansión de los estados (b.5) en términos de aquellos en (b.6) se deben satisfacer las siguientes relaciones:

$$l_1 + l_2 = l = l' \Rightarrow \lambda = \lambda' \text{ y } \mu = \mu', \quad (b.7)$$

$$E_{\nu_1} + E_{\nu_2} = E_{\nu} = E_n + E_N \Rightarrow 2\nu_1 + 2\nu_2 + 1 = 2\nu + 1 = 2N + 2L + 1. \quad (b.8)$$

Los paréntesis de transformación de (b.5) en (b.6) se definen entonces por la relación

$$\langle \nu_1, \nu_2 | n_1, n_2, l_1, l_2, \lambda, \mu \rangle = \sum_{n, l, N, L} \langle n_1, n_2, l_1, l_2 | n, l, N, L, \lambda, \mu \rangle \langle \nu, \xi | n, l, N, L, \lambda, \mu \rangle, \quad (b.9)$$

donde la suma es finita porque los enteros no negativos  $n$ ,  $l$ ,  $N$  y  $L$  deben satisfacer (b.8) y también  $|l-L| \leq l \leq l+L$ , debido a (b.7).

Consideremos ahora una interacción  $V_{12}$  que depende únicamente de la coordenada relativa de las dos partículas. El elemento de matriz general para esta interacción puede simplificarse si utilizamos (b.9):

$\langle n_1, n_2, n_3, \lambda \mu | V_{12}(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|) | n_1', n_2', n_3', \lambda' \mu' \rangle$   
 $= \delta_{\lambda\lambda'} \delta_{\mu\mu'} \sum_{n_1, n_2, n_3} \langle n_1, n_2, n_3, \lambda | n_0, n_1, n_2, n_3, \lambda \rangle \langle n_1', n_2', n_3', \lambda' | n_0, n_1, n_2, n_3, \lambda \rangle \int_0^{\infty} dr R_{n_1}^{n_1}(r) V_{12}(r) R_{n_2}^{n_2}(r), \quad (0.1)$

donde se debe satisfacer, debido a (0.5), que

$$n^2 = n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 - (n_1 + n_2 + n_3)$$

si los estados están en la misma capa de niveles de energía. Veamos a partir de (0.10) que se ha reducido el problema de diagonalizar la interacción  $V_{12}$  en una configuración de dos partículas a hacer el cálculo para configuraciones de una sola partícula. Por último, se puede hacer una simplificación adicional en (0.10) con la introducción de las integrales de Talmi, como mostramos más adelante.

En la sección 4 del primer capítulo, encontramos que las funciones de onda radiales se pueden expresar mediante una serie de potencias:

$$\delta R_{n\ell}(r) \equiv \frac{1}{r} R_{n\ell}(r) = r^{\nu} \sum_{k=0}^{\infty} a_{n\ell k} r^{k\ell} e^{-\frac{1}{2}r^2}, \quad (0.11)$$

$$a_{n\ell k} = \frac{(-1)^k}{k!} \left\{ \frac{2n}{\Gamma(n\ell + \frac{3}{2})} \right\}^{1/2} \frac{\Gamma(n\ell + \frac{3}{2})}{(n-k)! \Gamma(k\ell + \frac{3}{2})}, \quad (0.12)$$

donde la distancia radial se expresa en unidades de  $b = (\hbar/m\omega)^{1/2}$

(en nuestras fórmulas, esto se hace poniendo  $2\nu = 1$ ). Con esto,

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} r^2 dr \delta R_{n_1 \ell_1}(r) V(r) \delta R_{n_2 \ell_2}(r) &= \sum_{k_1, k_2} \sum_{k_3} a_{n_1 \ell_1 k_1} a_{n_2 \ell_2 k_2} \int_0^{\infty} r^2 dr r^{2k_1 \ell_1 + 2k_2 \ell_2} V(r) e^{-r^2} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\ell=1/2, 3/2, \dots} a_{n_1 \ell_1, k-\ell/2} a_{n_2 \ell_2, k-\ell/2} \int_0^{\infty} dr r^{2k} e^{-r^2} V(r) \\ &= \sum_p B(n_1 \ell_1, n_2 \ell_2, p) I_p, \end{aligned} \quad (0.12)$$

donde hemos definido los coeficientes  $B(n_1 \ell_1, n_2 \ell_2, p)$  como

$$B(n_1 \ell_1, n_2 \ell_2, p) \equiv \frac{1}{2} \Gamma(p + \frac{3}{2}) \sum_{k_1, k_2} a_{n_1 \ell_1, k_1} a_{n_2 \ell_2, k_2} \int_0^{\infty} dr r^{2k_1 + 2k_2} V(r) e^{-r^2}, \quad (0.13)$$

y también las integrales de Talmi  $I_p$  por

$$I_p \equiv \frac{1}{\Gamma(p + \frac{3}{2})} \int_0^{\infty} dr r^{2p} V(r) e^{-r^2}. \quad (0.14)$$

Introduciendo (0.12) en (0.10) obtenemos

$$\begin{aligned} \langle n_1, n_2, n_3, \lambda \mu | V_{12}(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|) | n_1', n_2', n_3', \lambda' \mu' \rangle \\ = \sum_{n_1, n_2, n_3} \langle n_1, n_2, n_3, \lambda | n_0, n_1, n_2, n_3, \lambda \rangle \langle n_1', n_2', n_3', \lambda' | n_0, n_1, n_2, n_3, \lambda \rangle \sum_p B(n_1 \ell_1, n_2 \ell_2, p) I_p \\ = \sum_p \left\{ \sum_{n_1, n_2, n_3} \langle n_1, n_2, n_3, \lambda | n_0, n_1, n_2, n_3, \lambda \rangle \langle n_1', n_2', n_3', \lambda' | n_0, n_1, n_2, n_3, \lambda \rangle B(n_1 \ell_1, n_2 \ell_2, p) \right\} I_p, \end{aligned} \quad (0.15)$$

donde las constantes que aparecen entre corchetes son constantes universales, independientes de la interacción particular  $V(r)$ , en tanto que las integrales  $I_p$  se pueden considerar promedios de la interacción  $V(r)$ .

Para finalizar esta sección indicaremos la forma en que los paréntesis de transformación definidos en (0.9) fueron calculados explícitamente por Moshinsky<sup>13)</sup>. El primer paso consiste en expresar el estado de dos partículas (0.5) en términos de operadores de creación,

$$\hat{a}_\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{b}_\alpha - i \hat{p}_\alpha) ; \alpha = 1, 2,$$

con lo que toma la forma

$$|n_1, l_1, m_1, n_2, l_2, m_2, \lambda, \mu\rangle = A_{n_1, l_1, m_1} A_{n_2, l_2, m_2} (\hat{a}_{1,1}^\dagger)^{n_1} (\hat{a}_{1,2}^\dagger)^{n_2} [Y_{l_1}^{m_1}(\hat{a}_{1,1}^\dagger) \times Y_{l_2}^{m_2}(\hat{a}_{1,2}^\dagger)] |0\rangle \quad (0.1)$$

donde  $A_{n_1, l_1, m_1}, A_{n_2, l_2, m_2}$  son constantes de normalización. En (0.14) se han introducido los armónicos esféricos sólidos, definidos por

$$Y_{lm}(\hat{a}) = a^l Y_{lm}(\theta, \phi),$$

mientras que el estado vacío está dado por

$$|0\rangle = \pi^{-3/2} \exp\{-\frac{1}{2}[(\hat{x})^2 + (\hat{p})^2]\} = \pi^{-3/2} \exp\{-\frac{1}{2}[(\hat{x})^2 + (\hat{p})^2]\}. \quad (0.1)$$

Utilizando (0.2) y (0.2'), se expresan los operadores de creación en el sistema r.c.m. en términos de aquéllos en el sistema c.p. Introduciendo este resultado en (0.14) y (0.15) es posible obtener una expresión explícita para los paréntesis de transformación en el caso especial  $n_1 = n_2 = 0$ . Por último, utilizando la relación

$$|n_1, l_1, m_1, n_2, l_2, m_2, \lambda, \mu\rangle = \frac{A_{n_1, l_1, m_1} A_{n_2, l_2, m_2}}{A_{n_1, l_1, m_1}} (\hat{a}_{1,1}^\dagger)^{n_1} (\hat{a}_{1,2}^\dagger)^{n_2} |n_1, l_1, m_1, n_2, l_2, m_2, \lambda, \mu\rangle \quad (0.1)$$

se encuentra una fórmula recursiva que permite evaluar los paréntesis de transformación para  $n_1$  y  $n_2$  arbitrarias. Usando este procedimiento, Brody y Moshinsky<sup>19)</sup> calcularon los paréntesis de transformación para todos los casos de interés en la espectroscopia nuclear, hasta la capa  $i$ .

## SECCION 7. APLICACIONES.

En esta sección ilustraremos la forma de utilizar la teoría desarrollada en los dos capítulos anteriores para calcular propiedades de los núcleos. Para esto, elegimos núcleos con dos partículas fuera del carozo inerte  $O^{16}$ , ya que estos sistemas involucran un número considerable de partículas y tenemos la posibilidad de comprobar la validez del modelo de capas en un ejemplo bastante sencillo.

El hamiltoniano que describe al sistema, en el modelo de partícula independiente, es:

$$H_0 = \sum_{i=1}^2 \left( \frac{\vec{p}_i^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 \vec{r}_i^2 - \frac{a_i}{\hbar} l_i \cdot s_i - \frac{b_i}{\hbar^2} l_i^2 \right) \quad (7.1)$$

la estructura de las soluciones (estados propios) de este hamiltoniano es:

$$\bar{\Phi} = \bar{\phi}_1 \otimes \bar{\phi}_2 \quad (7.2)$$

donde las funciones de onda  $\phi_i$  ( $i=1,2$ ) son las asociadas al hamiltoniano de una sola partícula (estados de partícula independiente). Los parámetros  $\omega$ ,  $a_i$  y  $b_i$  se ajustan directamente de los espectros de los núcleos  $O^{17}$  y  $F^{17}$ . A continuación discutimos algunas características de estos núcleos

i)  $O^{17}$  y  $F^{17}$ .

Es bien sabido que los núcleos espejo  $O^{17}$  y  $F^{17}$  tienden a comportarse como núcleos con un carozo inerte ( $O^{16}$ ) y un nucleón fuera de capa cerrada. Según el modelo de capas, la mayor parte de las propiedades del núcleo se deben, esencialmente, a la dinámica de esta partícula. Es posible, por ello, determinar fácilmente los niveles de energía de excitación de los núcleos suponiendo que la partícula de valencia se encuentra sometida a la acción de un potencial de oscilador armónico, a una interacción espín-órbita y a una interacción del tipo  $l_i^2$ . De manera que el hamiltoniano que determina las características del núcleo es:

$$H_i = \frac{\vec{p}_i^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 \vec{r}_i^2 - \frac{a_i}{\hbar} l_i \cdot s_i - \frac{b_i}{\hbar^2} l_i^2 \quad (7.3)$$

La frecuencia  $\omega$  del oscilador se calcula a partir de las energías de amarra de los núcleos  $O^{17}$ ,  $O^{16}$  y  $O^{17}$ , de donde resulta que  $\hbar\omega = 14.88$  Mev.

Las constantes  $a_n$  y  $b_n$ , que aparecen en la expresión (7.3), son diferentes para protones y para neutrones; esto trae como consecuencia que los niveles de energía de partícula independiente para protones y para neutrones sean distintos. Estas constantes se determinan ajustando con ellas los tres primeros niveles de paridad positiva en los espectros de energía del  $O^{17}$ , para los neutrones, y del  $F^{17}$ , para los protones.

$$E_{1/2^+} - E_{3/2^+} = \frac{3a_n}{\hbar^2} + \frac{7b_n}{\hbar^2}$$

$$E_{3/2^+} - E_{5/2^+} = \frac{5}{2} \frac{a_n}{\hbar^2}$$

obteniéndose los siguientes valores:

$$a_n = 2.032 \text{ Mev.} \quad \& \quad b_n = -0.194 \text{ Mev.}$$

$$a_p = 2.040 \text{ Mev.} \quad \& \quad b_p = -0.257 \text{ Mev.}$$

(7.4)

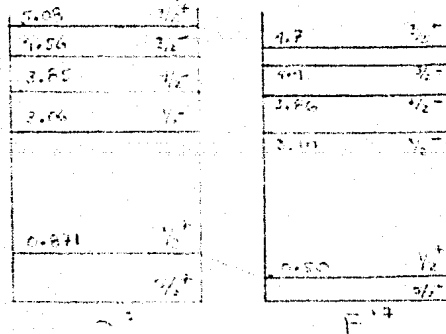


Fig. (7.1). Espectros experimentales de los núcleos  $O^{17}$  y  $F^{17}$ .

Una rápida observación de los espectros de los núcleos  $O^{17}$  y  $F^{17}$  muestra que las energías de sus primeros niveles con respecto a sus estados base son casi iguales, la diferencia que existe se debe, primordialmente, a que se tienen mas interacciones coulombianas del tipo protón-protón para el  $F^{17}$  que para el  $O^{17}$ .

ii) Interacción residual  $V_{12}(r)$ , cálculo de los elementos de matriz de  $V_{12}(r)$ .

El hamiltoniano (7.1) no describe correctamente la dinámica de núcleos con dos partículas fuera de capa cerrada, como puede observarse en la fig. (7.2). En dicha figura se muestran los espectros que predice el hamiltoniano (7.1) para los sistemas nn, pp y np, y los correspondientes espectros experimentales de los núcleos  $O^{18}$ ,  $N_2^{18}$  y  $F^{18}$ . No se observa ninguna semejanza en tales espectros, de ahí la necesidad de introducir, en nuestras consideraciones teóricas, una interacción residual  $V_{12}(r)$  entre los nucleones de valencia, que nos permita reproducir con mayor precisión los resultados experimentales.

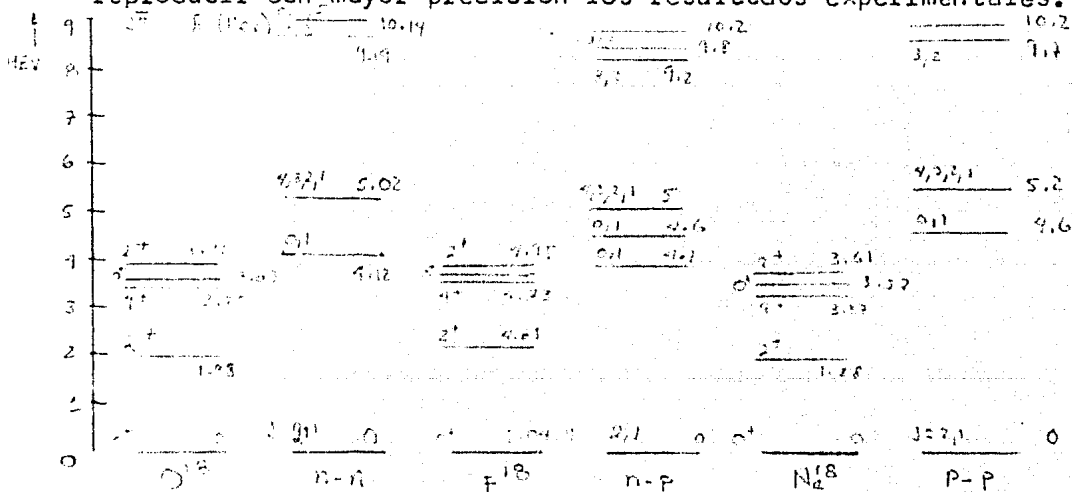


Fig. (7.2) . Espectros experimentales y teóricos, predichos por la ec. (7.1), de los núcleos  $O^{18}$ ,  $N_2^{18}$  y  $F^{18}$ .

Hemos mostrado, en secciones anteriores de este mismo capítulo, que el hamiltoniano

$$H = \sum_{i=1}^2 \left( \frac{p_i^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 r_i^2 - \frac{a_i}{r_i} + \frac{b_i}{r_i^2} \right) + V_{12}(r) \quad (7.5)$$

no es diagonal en los esquemas de acoplamiento j-j y l-s.

Sin embargo, debido a que la interacción  $V_{12}(r)$  es de tipo central se tiene que en el esquema j-j la matriz  $\langle n_1 l_1 j_1 n_2 l_2 j_2 | H | n_1 l_1 j_1 n_2 l_2 j_2 \rangle$  puede subdividirse en matrices mas pequeñas, cada una de las cuales, corresponde a un momento angular J bien definido.

Antes de determinar los elementos de matriz de la interacción residual  $V(r)$ , sintetizamos los resultados más importantes que se obtuvieron en el transcurso de este capítulo, con el objeto de que se comprenda más fácilmente el cálculo de dichos elementos.

La función de onda  $|n_1 l_1 m_1 l_2 m_2 \lambda \mu\rangle$  describe el comportamiento de un sistema de dos partículas sometidas ambas a un potencial de oscilador armónico, aquí los índices  $n_i, l_i, m_i$ , ( $i=1,2$ ) son números cuánticos asociados a la partícula  $i$  que denotan el número cuántico principal, el momento angular orbital y su proyección en el eje z, respectivamente; las etiquetas  $\lambda$  y  $\mu$  denotan el momento angular orbital total y su correspondiente proyección en el eje z.

En el sistema de coordenadas relativa,  $\vec{r} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$ , y de centro de masa,  $\vec{R} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\vec{r}_1 + \vec{r}_2)$ , la función de onda que describe al sistema es:  $|n \ell, N L, \lambda \mu\rangle$ , donde  $n \ell N L$  tienen significados similares a los precisados anteriormente.

Las funciones de onda anteriores, se conectan entre sí mediante los paréntesis de transformación de Brody y Moshinsky, de acuerdo con la siguientes fórmulas:

$$\begin{aligned} |n_1 l_1, n_2 l_2, \lambda \mu\rangle &= \sum_{n \ell N L} |n \ell, N L, \lambda \mu\rangle \langle n \ell, N L, \lambda | n_1 l_1, n_2 l_2, \lambda \rangle \\ |n \ell, N L, \lambda \mu\rangle &= \sum_{n_1 l_1, n_2 l_2} |n_1 l_1, n_2 l_2, \lambda \mu\rangle \langle n_1 l_1, n_2 l_2, \lambda | n \ell, N L, \lambda \mu \rangle \end{aligned} \quad (7.6)$$

El elemento de matriz diagonal,  $\langle n_1 l_1, n_2 l_2, \lambda \mu | V(r) | n_1 l_1, n_2 l_2, \lambda \mu \rangle$ , para una interacción central puede escribirse en términos de los elementos de matriz reducidos  $\langle n \ell || V(r) || n \ell \rangle$  en la forma siguiente<sup>(23)</sup>:

$$\begin{aligned} \langle n_1 l_1, n_2 l_2, \lambda \mu | V(r) | n_1 l_1, n_2 l_2, \lambda \mu \rangle &= \\ &= \sum_{n \ell N L} \left[ \langle n \ell, N L, \lambda | n_1 l_1, n_2 l_2, \lambda \rangle \right]^2 \langle n \ell || V(r) || n \ell \rangle \end{aligned} \quad (7.7)$$

Los elementos de matriz reducidos,  $\langle n \ell || V(r) || n \ell \rangle$ , se pueden escribir en términos de las integrales de Talmi,  $I_p$ ,

$$I_p = \frac{2}{\Gamma(p + \frac{1}{2})} \int_0^{\infty} r^{2p} e^{-r^2} V_{12}(r) r^2 dr \quad (7.8)$$

por

$$\langle n \ell || V(r) || n' \ell' \rangle = \sum_p \mathcal{E}(n \ell, n' \ell', p) I_p \quad (7.9)$$



donde los coeficientes  $\langle n'l'm' | f | n'l'm \rangle$  se encuentran tabulados en la ref. (22).

El elemento de matriz general  $\langle n_1 l_1 m_1 l_2 \lambda \mu | V_{12}(r) | n_1' l_1' m_1' l_2' \lambda \mu \rangle$  para una interacción central, puede escribirse como sigue:

$$\begin{aligned} & \langle n_1 l_1 m_1 l_2 \lambda \mu | V_{12}(r) | n_1' l_1' m_1' l_2' \lambda \mu \rangle = \\ & = \sum_P \sum_{n'lNL} \langle n'l, NL, \lambda | n_1 l_1 m_1 l_2, \lambda \rangle \\ & \quad \times \langle n'l', NL, \lambda | n_1' l_1' m_1' l_2', \lambda \rangle \\ & \quad \times B(nl, n'l, \rho) I_P \end{aligned} \quad (7.10)$$

Los elementos de matriz en el esquema j-j pueden reducirse a los escritos en acoplamiento l-s mediante la siguiente relación entre las funciones de onda correspondientes.

$$\begin{aligned} & |n_1 l_1 \frac{1}{2} j_1 ; n_2 l_2 \frac{1}{2} j_2 ; JM \rangle = \\ & = \sqrt{(2\lambda+1)(2s+1)(2j_1+1)(2j_2+1)} \begin{Bmatrix} l_1 & \frac{1}{2} & j_1 \\ l_2 & \frac{1}{2} & j_2 \\ \lambda & s & J \end{Bmatrix} \times \\ & \quad \times |n_1 l_1 m_1 l_2 s L : JM \rangle \end{aligned} \quad (7.11)$$

donde  $\left\{ \begin{matrix} l_1 & \frac{1}{2} & j_1 \\ l_2 & \frac{1}{2} & j_2 \\ \lambda & s & J \end{matrix} \right\}$  es un coeficiente 9-j, cuyos valores están tabulados en la ref. (24). Por ejemplo, el elemento de matriz diagonal para una fuerza central puede escribirse

$$\begin{aligned} & \langle n_1 l_1 \frac{1}{2} j_1 ; n_2 l_2 \frac{1}{2} j_2 ; J | V_{12}(r) | n_1 l_1 \frac{1}{2} j_1 ; n_2 l_2 \frac{1}{2} j_2 ; J \rangle = \quad (7.12) \\ & = \sum_{\lambda} \sum_{n'lNL} [(2\lambda+1)(2s+1)(2j_1+1)(2j_2+1)] \left\{ \begin{matrix} l_1 & \frac{1}{2} & j_1 \\ l_2 & \frac{1}{2} & j_2 \\ \lambda & s & J \end{matrix} \right\}^2 \langle n'l, NL, \lambda | n_1 l_1 m_1 l_2, \lambda \rangle^2 \langle n'l || V(r) || n'l \rangle \end{aligned}$$

y el elemento de matriz general se puede escribir en la forma

$$\begin{aligned} & \langle n_1' l_1' m_1' l_2' ; n_2 l_2 \frac{1}{2} j_2 ; JM | V_{12}(r) | n_1 l_1 \frac{1}{2} j_1 ; n_2 l_2 \frac{1}{2} j_2 ; JM \rangle = \quad (7.13) \\ & = \sum_{\lambda} \sqrt{(2j_1'+1)(2j_2'+1)(2j_2+1)(2j_1+1)} (2\lambda+1)(2s+1) \begin{Bmatrix} l_1 & \frac{1}{2} & j_1 \\ l_2 & \frac{1}{2} & j_2 \\ \lambda & \lambda & J \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} l_1' & \frac{1}{2} & j_1' \\ l_2 & \frac{1}{2} & j_2 \\ s & \lambda & J \end{Bmatrix} \\ & \quad \times \langle n_1' l_1' m_1' l_2' \lambda \mu | V_{12}(r) | n_1 l_1 m_1 l_2, \lambda \mu \rangle \end{aligned}$$

Hasta ahora nos ha sido necesario introducir el concepto de isoespín total en la descripción de sistemas formados por dos nucleones. Sin embargo, la necesidad de antisimetrizar totalmente las funciones de onda nos obliga a incorporar, a nuestro formalismo, dicho concepto. En efecto, si recordamos que el isoespín asociado a protones y neutrones es  $T = 1/2$  y  $-1/2$ , respectivamente, podemos concluir inmediatamente que: sistemas de dos protones ó de dos neutrones tienen isoespín total  $T=1$ , mientras que sistemas formados por un protón y un neutrón tienen isoespín total  $T=0$  ó  $1$ .<sup>(15)</sup>

En el caso en que  $T=0$ , la función de onda se ve obligada, por el Principio de Pauli, a ser simétrica. En el caso  $T=1$  la función debe ser antisimétrica.<sup>(25)</sup>

No es muy difícil demostrar que las funciones de onda antisimétricas,  $|l_a l_a l_b l_b : JM\rangle_A$ , en el caso  $l_a l_a = l_b l_b$ , vienen dadas por la fórmula siguiente:<sup>(25)</sup>

$$|l_a l_a l_b l_b : JM\rangle_A = \begin{cases} 0 & J \text{ impar} \\ |l_a l_a l_b l_b : JM\rangle & J \text{ par} \end{cases} \quad (7.14)$$

mientras que en el caso  $l_a l_a \neq l_b l_b$ , están dadas por:

$$|l_a l_a l_b l_b : JM\rangle_A = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ |l_a l_a l_b l_b : JM\rangle - (-1)^{J_a + J_b - J} |l_b l_b l_a l_a : JM\rangle \right\} \quad (7.15)$$

De las relaciones (7.14) y (7.15) es posible deducir la siguiente fórmula general para las funciones de onda antisimétricas:

$$|l_a l_a l_b l_b : JM\rangle_A = \frac{1}{\sqrt{2 - \delta_{l_a l_a, l_b l_b}}} \left\{ |l_a l_a l_b l_b : JM\rangle - (-1)^{J_a + J_b - J} (1 - \delta_{l_a l_a, l_b l_b}) \times |l_b l_b l_a l_a : JM\rangle \right\} \quad (7.16)$$

Evaluando los elementos de matriz diagonales con las funciones (7.16) se tiene que:

$$\begin{aligned} \langle l_a l_a l_b l_b : JM | V_{12}(r) | l_a l_a l_b l_b : JM\rangle_A &= \langle l_a l_a l_b l_b : JM | V_{12}(r) | l_a l_a l_b l_b : JM\rangle \\ &- (-1)^{J_a + J_b - J} (1 - \delta_{l_a l_a, l_b l_b}) \langle l_a l_a l_b l_b : JM | V_{12}(r) | l_b l_b l_a l_a : JM\rangle \end{aligned} \quad (7.17)$$

Para los elementos no diagonales se tiene la siguiente relación:

$$\langle l_a' l_a' l_b' l_b' : JM | V_{12}(r) | l_a l_a l_b l_b : JM\rangle_A = \langle l_a' l_a' l_b' l_b' : JM | V_{12}(r) | l_a l_a l_b l_b : JM\rangle$$

$$\begin{aligned}
& - (-1)^{j_a + j_b + T} (4 - \delta_{i_a i_a', i_b i_b'}) \langle l_a' j_a' l_b' j_b' : JM \rangle \langle l_a j_a l_b j_b : JM \rangle \\
& - (-1)^{j_a + j_b + T} (4 - \delta_{i_a i_a', i_b i_b'}) \langle l_a' j_a' l_b' j_b' : JM \rangle \langle l_a j_a l_b j_b : JM \rangle \\
& + (-1)^{j_a + j_b + T} (4 - \delta_{i_a i_a', i_b i_b'}) \langle l_a' j_a' l_b' j_b' : JM \rangle \langle l_a j_a l_b j_b : JM \rangle
\end{aligned} \quad (7.18)$$

La función de onda simétrica está dada por la relación <sup>(2.5)</sup>

$$\begin{aligned}
\langle l_a i_a l_b i_b : JM \rangle = \frac{1}{\sqrt{2 - \delta_{i_a i_a', i_b i_b'}}} & \left\{ \langle l_a i_a l_b j_b : JM \rangle + (-1)^{j_a + j_b - T} (4 - \delta_{i_a i_a', i_b i_b'}) \right. \\
& \left. \times \langle l_b j_b i_a i_a : JM \rangle \right\} \quad (7.19)
\end{aligned}$$

El elemento de matriz general evaluado con la función de onda simétrica se puede escribir de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
& \int \langle l_a' j_a' l_b' j_b' : JM \rangle V_{12}(r) \langle l_a i_a l_b i_b : JM \rangle = \langle l_a' j_a' l_b' j_b' : JM \rangle V_{12}(r) \langle l_a i_a l_b i_b : JM \rangle \\
& + (-1)^{j_a + j_b + T} (4 - \delta_{i_a i_a', i_b i_b'}) \langle l_a' j_a' l_b' j_b' : JM \rangle V_{12}(r) \langle l_b j_b i_a i_a : JM \rangle \\
& + (-1)^{j_a + j_b - T} (4 - \delta_{i_a i_a', i_b i_b'}) \langle l_b j_b i_a i_a : JM \rangle V_{12}(r) \langle l_a i_a l_b i_b : JM \rangle \\
& + (-1)^{j_a + j_b + T} (4 - \delta_{i_a i_a', i_b i_b'}) \langle l_b j_b i_a i_a : JM \rangle V_{12}(r) \langle l_b j_b i_a i_a : JM \rangle
\end{aligned} \quad (7.20)$$

Dos partículas en la capa 2s-1d pueden formar los seis estados siguientes :  $S_{1/2} S_{1/2}$ ,  $d_{3/2} d_{3/2}$ ,  $d_{3/2} d_{5/2}$ ,  $S_{3/2} d_{3/2}$ ,  $S_{3/2} d_{5/2}$  y  $d_{5/2} d_{5/2}$ . Los momentos angulares totales J a que se pueden acoplar tales estados se deducen de la relación

$$\vec{J} = (j_a + j_b), (j_a + j_b - 1), \dots, |j_a - j_b|. \quad (7.21)$$

y se muestran en la tabla (7.1).

De la tabla (7.1) observamos que el problema de diagonalizar la matriz completa del hamiltoniano (7.5) se reduce a diagonalizar las matrices de 3x3, 2x2, 5x5, 2x2, 2x2, asociadas a los momentos J=0,1,2,3,4, respectivamente, para el caso  $T=1$ ; y las matrices de 5x5, 3x3, 4x4, 1x1, 1x1, asociadas a los momentos J=1,2,3,4,5, respectivamente, para el caso  $T=0$ .

En el caso  $J=0$ ,  $T=1$ , la matriz que se debe diagonalizar es

$$\begin{pmatrix}
 \langle s_{1/2}^0 | H | s_{1/2}^0 \rangle & \langle s_{1/2}^0 | H | d_{3/2}^0 \rangle & \langle s_{1/2}^0 | H | d_{5/2}^0 \rangle \\
 \langle s_{1/2}^0 | H | d_{3/2}^0 \rangle & \langle d_{3/2}^0 | H | d_{3/2}^0 \rangle & \langle d_{3/2}^0 | H | d_{5/2}^0 \rangle \\
 \langle s_{1/2}^0 | H | d_{5/2}^0 \rangle & \langle d_{5/2}^0 | H | d_{5/2}^0 \rangle & \langle d_{5/2}^0 | H | d_{5/2}^0 \rangle
 \end{pmatrix}$$

(7.22)

Debido a que la matriz es simétrica los valores propios (energías) de esta matriz son números reales. <sup>(26)</sup>

| ESTADOS           | J totales  |            |
|-------------------|------------|------------|
|                   | T = 0      | T = 1      |
| $(s_{1/2})^2$     | 1          | 0          |
| $(d_{3/2})^2$     | 1, 3       | 0, 2       |
| $(d_{5/2})^2$     | 1, 3, 5    | 0, 2, 4    |
| $d_{3/2} d_{5/2}$ | 1, 2, 3, 4 | 1, 2, 3, 4 |
| $d_{1/2} s_{1/2}$ | 1, 2       | 1, 2       |
| $d_{5/2} s_{1/2}$ | 2, 3       | 2, 3       |

Tabla (7.1). Posibles momentos angulares a que se pueden acoplar estados de dos partículas.

Con el ejemplo siguiente discutimos el conjunto de pasos que se deben seguir para evaluar los elementos de matriz del Hamiltoniano (7.5).

EJEMPLO: Evaluar el elemento de matriz diagonal  $\langle s_{1/2}^0 | H | s_{1/2}^0 \rangle$ .  
 1er. paso. Con la fórmula (7.13) se determinan los elementos de matriz en el esquema l-s que son necesarios para evaluar el elemento de matriz en el esquema j-j.

$$\begin{aligned}
 \langle s_{1/2}^0 | V_{12}(r) | s_{1/2}^0 \rangle &= \langle 10 \frac{1}{2}, 10 \frac{1}{2}, 0 | V(r) | 10 \frac{1}{2}, 10 \frac{1}{2}, 0 \rangle \\
 &= \sum_{\lambda \mu} (2\lambda+1)(2\mu+1) \begin{Bmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ \lambda & \mu & 0 \end{Bmatrix}^2 \langle 10 \ 10, \lambda \mu | V_{12}(r) | 10 \ 10, \lambda \mu \rangle \\
 &= \langle 10 \ 10, 0 \ 0 | V_{12}(r) | 10 \ 10, 0 \ 0 \rangle
 \end{aligned}$$

(7.23)

De la ref. (29) se obtiene el símbolo 9j.

2o. paso. El elemento de matriz en el esquema 1-3 se evalúa usando las tablas de Brody y Moshinsky.<sup>(30)</sup>

En el caso que nos ocupa, la tabla (7.2) muestra una manera de efectuar el cálculo del elemento de matriz

La construcción de esta tabla incluye los siguientes pasos:

en la tabla de paréntesis de transformación para  $l_1 = l_2 = 1$ , pag. 71, se encuentra el grupo que corresponde a  $l_1 = l_2 = \lambda = 0$ ; este contiene todas las combinaciones de  $l_1, l_2, \lambda$  que son compatibles con los valores dados de  $l_1 = 1$  (máxima  $I_p = I_4$ ) y  $\lambda = 0$ , es decir, todos los términos de la suma.

Estas combinaciones se anotan en las primeras cuatro columnas de la tabla (7.2) y los cuadrados de los paréntesis de transformación correspondientes se anotan en la siguiente columna.

Podemos verificar los resultados sumando los cuadrados de los paréntesis de transformación. Por unitariedad<sup>(31)</sup>, debe resultar 1 salvo errores en la séptima cifra decimal.

En el siguiente paso se evalúan los productos de los cuadrados en la quinta columna por los valores de  $B(nl, n'l', p)$ , los cuales se disponen en columnas según el valor de  $p$ . Si no se satisface la condición  $l \leq p \leq l'$ <sup>(32)</sup>,  $B(nl, n'l', p)$  será 0, de modo que solo un cierto número de estos términos necesitan evaluarse. Estos pueden determinarse mediante la tabla de valores posibles del índice  $p$ ; en el grupo  $l=4, \lambda=0$ , pág. 129,<sup>(33)</sup> se encuentran las mismas seis combinaciones de  $n, n', l$  que ocurren en la tabla principal, y en el mismo orden. Junto con cada combinación se indican solamente aquellos valores de  $p$  que pueden ocurrir en el término correspondiente del elemento de matriz diagonal de una fuerza central.

Los valores de  $B(nl, n'l', p)$  se toman de la págs. 125-126.<sup>(34)</sup> Una segunda verificación de los cálculos se puede hacer en este momento. Al poner  $\sqrt{(\rho)}=1$  en la ec. (7.10), el elemento de matriz se vuelve igual a 1, y de la ec. (7.8) se ve que todos los  $I_p$  son también iguales a 1. Por lo tanto, la suma horizontal de las sumas de las columnas es 1.

Si no se supone ninguna forma particular de la dependen-

cia radial, podemos escribir el resultado en términos de las integrales de Talmi  $I_p$  como sigue:

$$\langle 4030, 0 | V_{12}(r) | 4030, 0 \rangle = 2.640325 I_0 - 1.645831 I_2 + 0.640324 I_4 - 0.240324 I_6 + 0.040324 I_8, \quad (7.24)$$

por lo que:

$$\langle S_{1/2}^3 0 | V_{12}(r) | S_{1/2}^3 0 \rangle = 0.640325 I_0 - 1.645831 I_2 + 0.640324 I_4 - 0.240324 I_6 + 0.040324 I_8. \quad (7.25)$$

| n <sub>1</sub> l <sub>1</sub> l <sub>2</sub> | $\langle l \rangle^2$    | I              |                |                |                |                |   |   |
|--|--------------------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|---|---|
|  |                          | 0              | 1              | 2              | 3              | 4              | 5 | 6 |
| 0020   | (-95643596) <sup>2</sup> | 1              |                |                |                |                |   |   |
| 0111   | (-6) <sup>2</sup>        |                | 1              |                |                |                |   |   |
| 0202   | (-79525592) <sup>2</sup> |                |                | 1              |                |                |   |   |
| 1010   | (.16666671) <sup>2</sup> | 2.5            |                |                |                |                |   |   |
| 1101   | (-6) <sup>2</sup>        |                | 2.5            |                |                |                |   |   |
| 2000   | (-45642546) <sup>2</sup> | 1.875          | -7.5           | 11.25000       |                |                |   |   |
|  | 1.0000000                | .640325        | -1.645831      | 0.640324       | -0.240324      | 0.040324       |   |   |
|  |                          | I <sub>0</sub> | I <sub>2</sub> | I <sub>4</sub> | I <sub>6</sub> | I <sub>8</sub> |   |   |

Tabla (7.2). Cálculo del elemento de matriz  $\langle 4030, 0 | V_{12}(r) | 4030, 0 \rangle$

3er. Paso. Teniendo el resultado (7.25), es muy sencillo obtener los elementos de matriz de  $H$  entre funciones antisimétricas. En efecto, de la fórmula (7.17) se tiene que

$$A \langle S_{1/2}^3 0 | H | S_{1/2}^3 0 \rangle_A = E(4\frac{1}{2}) + 0.640325 I_0 - 1.645831 I_2 + 0.640324 I_4 - 0.240324 I_6 + 0.040324 I_8. \quad (7.26)$$

El cálculo de elementos de matriz no diagonales se efectúa de manera similar. Ilustramos este hecho con el siguiente ejemplo:

EJEMPLO: Evaluar el elemento de matriz  $\langle S_{1/2}^3 0 | V_{12}(r) | S_{1/2}^3 0 \rangle$

En primer lugar determinamos los elementos de matriz en el esquema 1-s necesarios para evaluar  $\langle S_{1/2}^3 0 | V_{12}(r) | S_{1/2}^3 0 \rangle$

usamos para ello, la fórmula (7.13).

$$\begin{aligned} & \langle \sum_{\alpha} a_{\alpha} (1, \alpha) | \alpha \rangle \cdot \langle \alpha | \sum_{\beta} b_{\beta} (1, \beta) \rangle \\ & = \sum_{\alpha} a_{\alpha} b_{\alpha} (1, \alpha) \cdot (1, \alpha) \\ & = 0.77457666 \langle 1, 0 | \sum_{\alpha} a_{\alpha} (1, \alpha) \rangle \end{aligned} \quad (7.27)$$

Considérese, ahora, el elemento de matriz  $\langle 1010 | \sum_{\alpha} a_{\alpha} (1, \alpha) \rangle$

Aquí  $\rho=4$  y  $\lambda=0$  en ambos lados. El cálculo lo mostramos en la tabla (7.3). La tabla de valores posibles de  $p$  (págs 129-144), indica los espacios en que van términos por calcularse. La quinta columna de la tabla (7.3) contiene ahora los productos de paréntesis de transformación, tomados en dos grupos (1 0 1 0; 0) y (0 2 0 2; 0). Estos se encuentran en las secciones ( $\eta_1 = \eta_2 = 1$ ) y ( $\eta_1 = \eta_2 = 0$ ), respectivamente, de la tabla principal.

Al sumar esta columna debemos obtener el valor 0, según lo afirma la propiedad de ortogonalidad de los paréntesis de transformación. Los valores de  $\langle \alpha | \alpha \rangle$  se encuentran como antes, sus productos por los términos de la quinta columna se anotan en los espacios apropiados y los coeficientes de las  $I_p$  se obtienen como las sumas de las columnas. Por ortogonalidad, si hacemos  $V_{\alpha}^{(p)}=1$  debemos obtener como suma de los coeficientes de las  $I_p$  el valor 0.

| matr | $\langle \alpha   \alpha \rangle$    | $p$      | 1         | 2         | 3         | 4        |
|------|--------------------------------------|----------|-----------|-----------|-----------|----------|
| 0020 | $\cdot 75645576$<br>$\cdot 40824827$ | 1        |           |           |           |          |
| 0111 | $\cdot 0$<br>$\cdot 0$               |          | 1         |           |           |          |
| 0202 | $\cdot 74535578$<br>$\cdot 33215138$ |          |           | 1         |           |          |
| 1010 | $\cdot 75645576$<br>$\cdot 75645576$ | 1.5      | -3.000001 | -5.500001 |           |          |
| 1101 | $\cdot 0$<br>$\cdot 0$               |          | 2.5       | -5        | 3.5       |          |
| 2000 | $\cdot 75645576$<br>$\cdot 40824827$ | 1.875    | -7.5      | 16.250002 | -17.5     | 7.875    |
|      | 0                                    | 3.493856 | -1.025766 | 2.041532  | -3.262300 | 1.530638 |
|      |                                      | $I_0$    | $I_1$     | $I_2$     | $I_3$     | $I_4$    |

Tabla (7.3). Cálculo del elemento de matriz  $\langle 1010 | \sum_{\alpha} a_{\alpha} (1, \alpha) \rangle$

El resultado final es: (7.28)

$$\langle 4010,0 | V_{12}(r) | 4010,0 \rangle = \left\{ \begin{array}{l} 0.270635 T_0 - 0.793807 T_1 + 1.12793 T_2 \\ - 2.52570 T_3 + 1.12793 T_4 \end{array} \right\}$$

por lo que:

$$\langle s_{1/2}^0 | V_{12}(r) | d_{3/2}^0 \rangle = 0.270635 T_0 - 0.793807 T_1 + 1.12793 T_2 - 2.52570 T_3 + 1.12793 T_4 \quad (7.29)$$

Con la función de onda antisimétrica y la ec. (7.18) se tiene el resultado siguiente:

$${}^A \langle s_{1/2}^0 | H | d_{3/2}^0 \rangle = 0.270635 T_0 - 0.793807 T_1 + 1.12793 T_2 - 2.52570 T_3 + 1.12793 T_4 \quad (7.30)$$

Los elementos de matriz necesarios para diagonalizar la matriz asociada al hamiltoniano (7.5) se muestran en las tablas (7.4), en donde se han separado las matrices que corresponden a cada momento angular total  $J$  y a cada isoespín total  $T$ .

Las integrales de Talmi,  $I_p$ , que aparecen en las tablas (7.4) dependen de la interacción residual  $V_{12}(r)$  que se desee poner. Nosotros elegimos como interacción un potencial gaussiano ( $-V_0 e^{-r^2}$ ) por las siguientes dos razones:

- 1a. El potencial gaussiano se pueda aproximar al potencial nuclear real con bastante exactitud, ajustando apropiadamente la intensidad  $V_0$  y el alcance  $r$ , ver fig. (7.3).<sup>(24)</sup>
- 2a. Las integrales de Talmi,  $I_p$ , se simplifican notablemente y adquieren los siguientes valores:

$$I_p = \frac{-V_0}{(1+r^2)^{p+3/2}} \quad (7.31)$$

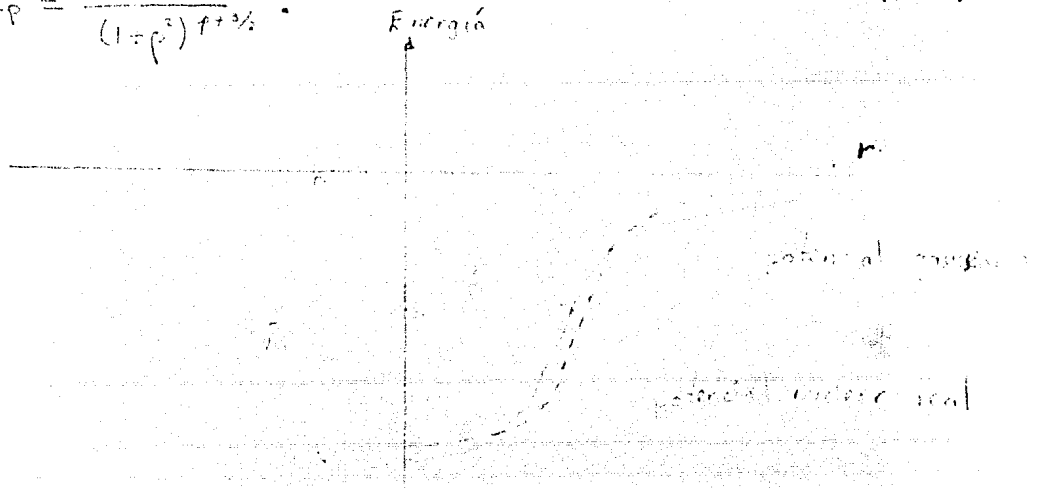


Fig. (7.3). Potencial nuclear real y potencial gaussiano.



Habiendo evaluado los elementos de matriz para fuerzas de Wigner, el cálculo de los elementos de matriz para una fuerza de intercambio de Rosenfeld,  $\hat{V}(r) = \{W + M \hat{P}_x + H \hat{P}_I + B \hat{P}_\sigma\} V(r)$ , resulta relativamente simple ya que sólo involucra algunos cambios de signo debidos a la acción de (4.13), (4.14) y (4.15) sobre los estados del sistema.

Veamos un ejemplo.

Para fuerzas de Wigner se tiene que

$$\begin{aligned}
 & \langle d_{5/2} d_{5/2} 2 | V(r) | d_{5/2} d_{5/2} 2 \rangle \\
 &= 36 \left[ 5 \left\{ \begin{matrix} 2 & 1/2 & 5/2 \\ 2 & 1/2 & 5/2 \\ 2 & 0 & 2 \end{matrix} \right\}^2 \sum_P \left\{ \sum_{\substack{M_P \\ N_L}} \langle n \ell N L 2 | 0 2 0 2 2 \rangle^2 B(n \ell, n \ell, p) \right\} I_p \right. \\
 & \quad + 9 \left\{ \begin{matrix} 2 & 1/2 & 5/2 \\ 2 & 1/2 & 5/2 \\ 1 & 1 & 2 \end{matrix} \right\}^2 \sum_P \left\{ \sum_{\substack{M_P \\ N_L}} \langle n \ell N L 1 | 0 2 0 2 1 \rangle^2 B(n \ell, n \ell, p) \right\} I_p \\
 & \quad \left. + 21 \left\{ \begin{matrix} 2 & 1/2 & 5/2 \\ 2 & 1/2 & 5/2 \\ 3 & 1 & 2 \end{matrix} \right\}^2 \sum_P \left\{ \sum_{\substack{M_P \\ N_L}} \langle n \ell N L 3 | 0 2 0 2 3 \rangle^2 B(n \ell, n \ell, p) \right\} I_p \right] \\
 &= 0.180 000 (I_0 + I_4) + 0.540 000 (I_1 + I_3) - 0.440 000 I_2
 \end{aligned}$$

Para fuerzas de intercambio de Rosenfeld obtenemos, suponiendo que el estado del sistema tiene isoespín  $I = 1$ , que

$$\begin{aligned}
 & \langle d_{5/2} d_{5/2} 2 | V(r) | d_{5/2} d_{5/2} 2 \rangle \\
 &= 36 \left[ 5 \left\{ \begin{matrix} 2 & 1/2 & 5/2 \\ 2 & 1/2 & 5/2 \\ 2 & 0 & 2 \end{matrix} \right\}^2 \sum_P \left\{ \sum_{\substack{M_P \\ N_L}} \langle n \ell N L 2 | 0 2 0 2 2 \rangle^2 B(n \ell, n \ell, p) \right\} I_p \right. \\
 & \quad + 9 \left\{ \begin{matrix} 2 & 1/2 & 5/2 \\ 2 & 1/2 & 5/2 \\ 1 & 1 & 2 \end{matrix} \right\}^2 \sum_P \left\{ \sum_{\substack{M_P \\ N_L}} \langle n \ell N L 1 | 0 2 0 2 1 \rangle^2 B(n \ell, n \ell, p) \right\} I_p \\
 & \quad + 21 \left\{ \begin{matrix} 2 & 1/2 & 5/2 \\ 2 & 1/2 & 5/2 \\ 3 & 1 & 2 \end{matrix} \right\}^2 \sum_P \left\{ \sum_{\substack{M_P \\ N_L}} \langle n \ell N L 3 | 0 2 0 2 3 \rangle^2 B(n \ell, n \ell, p) \right\} I_p \left. \right] (W+H) \\
 & + 36 \left[ -5 \left\{ \begin{matrix} 2 & 1/2 & 5/2 \\ 2 & 1/2 & 5/2 \\ 2 & 0 & 2 \end{matrix} \right\}^2 \sum_P \left\{ \sum_{\substack{M_P \\ N_L}} \langle n \ell N L 2 | 0 2 0 2 2 \rangle^2 B(n \ell, n \ell, p) \right\} I_p \right. \\
 & \quad \left. + 9 \left\{ \begin{matrix} 2 & 1/2 & 5/2 \\ 2 & 1/2 & 5/2 \\ 1 & 1 & 2 \end{matrix} \right\}^2 \sum_P \left\{ \sum_{\substack{M_P \\ N_L}} \langle n \ell N L 1 | 0 2 0 2 1 \rangle^2 B(n \ell, n \ell, p) \right\} I_p \right]
 \end{aligned}$$

$$+ 21 \left\{ \begin{matrix} 2 & 1/2 & 5/2 \\ 2 & 1/2 & 5/2 \\ 3 & 1 & 2 \end{matrix} \right\}^2 \sum_P \left\{ \sum_{M, M'} \langle n_1 n_2 | \mathcal{E} | n_1 n_2 \rangle \right\}^2 E(n_1, n_2, p) \} I_p \} (B-$$

El signo negativo del primer sumando del coeficiente de (B-M) se debe a la acción de P sobre un estado antisimétrico en el espín (S=0); en tanto que el signo negativo de M se debe a la igualdad (4.15). Continuemos.

$$\begin{aligned} & \langle d_{5/2} d_{5/2} 2 | v(r) | d_{5/2} d_{5/2} 2 \rangle \\ = & \left\{ 0.180\,000 (I_0 + I_4) + 0.540\,000 (I_1 + I_3) \right. \\ & \quad \left. - 0.440\,000 I_2 \right\} (W + H) \\ + & \left\{ -0.180\,000 (I_0 + I_4) + 1.100\,000 (I_1 + I_3) \right. \\ & \quad \left. - 1.800\,000 I_2 \right\} (B - M) \\ = & 0.180\,000 \{ W + H - B + M \} (I_0 + I_4) \\ + & \left\{ 0.540\,000 (W + H) + 1.100\,000 (B - M) \right\} (I_1 + I_3) \\ - & \left\{ 0.440\,000 (W + H) + 1.800\,000 (B - M) \right\} I_2 \end{aligned}$$

iii) Programa de ajuste de los parámetros de la interacción residual.

La dinámica de un sistema de dos partículas sometidas a la acción de un potencial central del tipo del oscilador armónico, a una interacción espín órbita, a una interacción  $L^2$ ; y que interactúan entre si por medio de un potencial residual de tipo gaussiano, y por medio de fuerzas de intercambio de Wigner (W), de Majorana (M), de Bartlett (B) y de Heisenberg (H), está descrito por el hamiltoniano

$$H = \sum_{i=1}^2 \left( \frac{L_i^2}{2I} + \frac{1}{2} m \omega R^2 - \frac{q_i}{R} L_i \cdot S_i - \frac{h_i}{R} L_i^2 \right) + e^{-\beta^2 r^2} (W + M \hat{\sigma}_1 \cdot \hat{\sigma}_2 + B \hat{\sigma}_1 \cdot \hat{\sigma}_2 + H \hat{\sigma}_1 \cdot \hat{\sigma}_2) \quad (7.32)$$

Hemos discutido, en párrafos anteriores, la imposibilidad de obtener directamente los valores propios (energías) del hamiltoniano (7.32). Con el objeto de determinar los valores propios de la ec. (7.32) que reproduzcan con mayor precisión los resultados experimentales se han diseñado dos programas de ajuste de los parámetros  $\beta, W, M, B$  y  $H$ .

Estos programas tienen las particularidades siguientes:

- 1.- Cada programa diagonaliza matrices distintas, uno de ellos ajusta las matrices con  $T=1$ , mientras que el otro hace el cálculo con las que tienen  $T=0$ .
- 2.- Los programas ajustan los cinco primeros niveles de energía de núcleos con  $A=18$ ,  $T=1$  y los seis primeros niveles de núcleos con  $A=18$ ,  $T=0$ .
- 3.- Como es muy posible que las dos partículas se muevan con mayor probabilidad en las órbitas  $2s_{1/2}$  ó  $1d_{5/2}$  que en la órbita  $1d_{3/2}$ , debido a que la brecha de energía que separa a estas órbitas es muy grande, el programa tiene la posibilidad de ajustar los parámetros de la interacción residual en el espacio completo ó en el espacio trunco, es decir, se pueden ajustar los parámetros diagonalizando todas las matrices ó diagonalizando solo una parte de ellas.
- 4.- De una región de variación de los parámetros ( $\beta, W, M, B, H$ ) los programas eligen el conjunto de ellos que reproduc-

can con mayor precisión los niveles de energía experimentales de los núcleos con  $A=18$ . El criterio que se usó para esta elección es el siguiente: se escoge el conjunto de parámetros que minimice la función.

$$\sum_{i=1}^n \left( \frac{E_{\text{teor } i}(t) - E_{\text{exp } i}(t)}{E_{\text{exp } i}(t)} \right)^2 \quad (7.33)$$

5.- Los programas cuentan con instrucciones que, al ser aplicadas, dan respuesta a preguntas como las siguientes: ¿ desea ajustar mayor número de niveles?, ¿ desea conocer la desviación lineal de cada nivel?, ¿ la desviación cuadrática?, ¿ la desviación de los niveles de cada núcleo?, etc.

Con este sistema de evaluación se encuentra que los parámetros que mejor ajustan los niveles experimentales son:

$$\begin{aligned} \beta &= 1.37 \quad (h/mc^2)^2 \quad (\text{en unidades del "parámetro de tamaño"}), \\ W &= -22.34 \text{ Mev} \\ M &= 4.005 \text{ Mev} \\ B &= 3.945 \text{ Mev} \\ H &= -22.06 \text{ Mev} \end{aligned} \quad (7.34)$$

Tanto los espectros teóricos predichos como los espectros experimentales se muestran en la fig.(7.4).

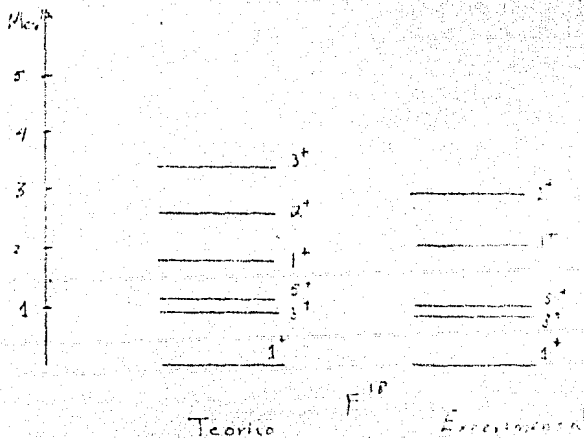


Figura (7.4a). Espectros experimental y teórico del  $F^{18}$ , con  $T=0$ .

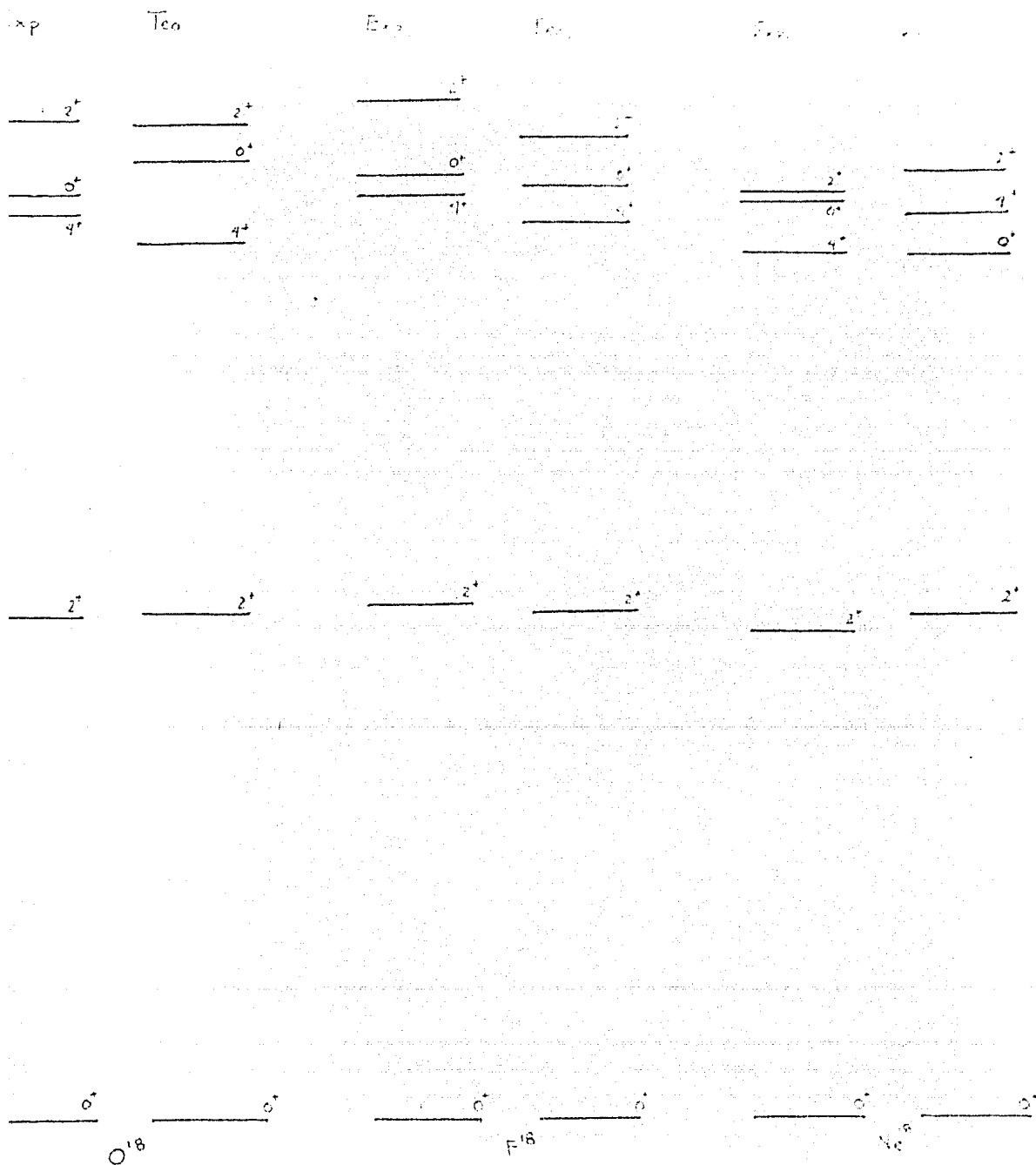


Figura (7.4b). Espectros experimentales y teóricos para  $O^{18}$ ,  $F^{18}$  y  $Ne^{18}$  con  $A=18$  y  $T=1$ .

En esta sección, hemos ajustado un potencial del tipo de Rosenfeld, con una interacción central gaussiana, para que reprodujera los niveles más bajos de energía (menos de 5 MeV arriba del estado base) de núcleos con  $A = 18$ .

Resultaría interesante analizar las funciones de onda de los niveles más bajos. Por ejemplo, podríamos estudiar la contribución del orbital  $d_{3/2}$  a cada uno de ellos (esperamos que sea muy baja en el estado base y que aumente conforme consideramos niveles más altos en energía). También podríamos calcular las razones de transición bipolar magnética y cuadrupolar eléctrica; sin embargo, los resultados obtenidos para esta última deben ser pobres ya que hemos partido de la hipótesis de un movimiento independiente de los nucleones de valencia bajo la acción de un carozo inerte.

Con los resultados que obtendremos en el siguiente capítulo resulta relativamente sencillo realizar cálculos similares para núcleos con  $A = 19, 20$  (en especial sería de interés el  $^{20}\text{Ne}$ , que ha sido muy estudiado con otros modelos). Todo lo que se necesita para ello (los C.P.F.  $j^2 \rightarrow j^4$  y los C.P.F.  $j^2 \rightarrow j^3$ ) serán calculados explícitamente en dicho capítulo. Si efectuamos los cálculos de espectros de energía con el potencial ajustado en esta sección, comparando con los espectros experimentales podríamos verificar qué tan realista fue la interacción obtenida.

Tabla 7.4 a. Matrices de la interacción para el caso  $T=1$  y  $J=0,1$ .

| $V(r) :  0 2 \frac{5}{2}, 0 2 \frac{3}{2}, 0\rangle$ |   | $ 0 2 \frac{3}{2}, 0 2 \frac{5}{2}, 0\rangle$ |            | $ 1 0 \frac{3}{2}, 1 0 \frac{5}{2}, 0\rangle$ |  |
|--|---|---|------------|---|--|
|  |   | $E(5/2, 5/2)$                                 |            |   |  |
| $ 0 2 \frac{5}{2}, 0 2 \frac{3}{2}, 0\rangle$        | $I_0$   | 0.787 500                                     |            |   |  |
|  | $I_1$   | -1.050 000                                    |            |   |  |
|  | $I_2$   | 1.525 000                                     |            |   |  |
|  | $I_3$   | -1.050 000                                    |            |   |  |
|  | $I_4$   | 0.787 500                                     |            |   |  |
|  |   | $E(3/2, 3/2)$                                 |            |   |  |
| $ 0 2 \frac{3}{2}, 0 2 \frac{5}{2}, 0\rangle$        | $I_0$   | 0.642 991                                     | 0.525 000  |   |  |
|  | $I_1$   | -2.286 190                                    | -0.116 667 |   |  |
|  | $I_2$   | 3.286 399                                     | 0.183 333  |   |  |
|  | $I_3$   | -2.286 190                                    | -0.116 667 |   |  |
|  | $I_4$   | 0.642 991                                     | 0.525 000  |   |  |
|  |   | $E(1/2, 1/2)$                                 |            |   |  |
| $ 1 0 \frac{3}{2}, 1 0 \frac{5}{2}, 0\rangle$        | $I_0$   | 0.270 633                                     | 0.220 971  | 0.640 625                                     |  |
|  | $I_1$   | -0.793 857                                    | -0.648 181 | -1.645 832                                    |  |
|  | $I_2$   | 1.912 473                                     | 1.561 528  | 4.010 415                                     |  |
|  | $I_3$   | -2.525 907                                    | -2.062 395 | -3.641 831                                    |  |
|  | $I_4$   | 1.136 658                                     | 0.928 078  | 1.640 624                                     |  |
|  |   | $E(5/2, 3/2)$                                 |            |   |  |
| $ 0 2 \frac{5}{2}, 0 2 \frac{3}{2}, 1\rangle$        | $I_0$   | 0.000 000                                     |            |   |  |
|  | $I_1$   | 1.750 000                                     |            |   |  |
|  | $I_2$   | -2.500 000                                    |            |   |  |
|  | $I_3$   | 1.750 000                                     |            |   |  |
|  | $I_4$   | 0.000 000                                     |            |   |  |
|  |   | $E(3/2, 1/2)$                                 |            |   |  |
| $ 0 2 \frac{3}{2}, 1 0 \frac{5}{2}, 1\rangle$        | $I_0$   |   | 0.0        |   |  |
|  | $I_1$   |   | 0.875 000  |   |  |
|  | $I_2$   |   | -0.745 000 |   |  |
|  | $I_3$   |   | 0.875 000  |   |  |
|  | $I_4$   |   | 0.0        |   |  |
| $V(r)$   | $ 0 2 \frac{5}{2}, 0 2 \frac{3}{2}, 1\rangle$ | $ 1 0 \frac{3}{2}, 1 0 \frac{5}{2}, 1\rangle$ |            |   |  |

|  |  |  |  |  |  |             |  |
|--|--|--|--|--|--|-------------|--|
|  | E(5/2, 5/2)                                |  |  |  |  |             |  |
| $\langle 02 \frac{5}{2} 02 \frac{5}{2}; 2 \rangle$ | I <sub>0</sub>                             | 0.180 000                                  |  |  |  |             |  |
|  | I <sub>1</sub>                             | 0.540 000                                  |  |  |  |             |  |
|  | I <sub>2</sub>                             | -0.440 000                                 |  |  |  |             |  |
|  | I <sub>3</sub>                             | 0.540 000                                  |  |  |  |             |  |
|  | I <sub>4</sub>                             | 0.180 000                                  |  |  |  |             |  |
|  |  |  | E(3/2, 3/2)                                |  |  |             |  |
| $\langle 02 \frac{3}{2} 02 \frac{3}{2}; 2 \rangle$ | I <sub>0</sub>                             | 0.137 477                                  | 0.105 000                                  |  |  |             |  |
|  | I <sub>1</sub>                             | -0.580 460                                 | 0.256 667                                  |  |  |             |  |
|  | I <sub>2</sub>                             | 0.885 965                                  | 0.276 667                                  |  |  |             |  |
|  | I <sub>3</sub>                             | -0.580 460                                 | 0.256 667                                  |  |  |             |  |
|  | I <sub>4</sub>                             | 0.137 477                                  | 0.105 000                                  |  |  |             |  |
|  |  |  |  | E(5/2, 3/2)                                |  |             |  |
| $\langle 02 \frac{5}{2} 02 \frac{3}{2}; 2 \rangle$ | I <sub>0</sub>                             | 0.127 279                                  | 0.097 211                                  | 0.090 000                                  |  |             |  |
|  | I <sub>1</sub>                             | -0.961 665                                 | -0.086 410                                 | 0.870 000                                  |  |             |  |
|  | I <sub>2</sub>                             | 1.668 772                                  | -0.021 603                                 | -0.920 000                                 |  |             |  |
|  | I <sub>3</sub>                             | -0.961 665                                 | -0.086 410                                 | 0.870 000                                  |  |             |  |
|  | I <sub>4</sub>                             | 0.127 279                                  | 0.097 211                                  | 0.090 000                                  |  |             |  |
|  |  |  |  |  | E(5/2, 1/2)                                |             |  |
| $\langle 02 \frac{5}{2} 10 \frac{1}{2}; 2 \rangle$ | I <sub>0</sub>                             | 0.125 499                                  | 0.095 851                                  | 0.088 741                                  | 0.187 500                                  |             |  |
|  | I <sub>1</sub>                             | -0.083 666                                 | -0.063 901                                 | -0.059 161                                 | 0.325 000                                  |             |  |
|  | I <sub>2</sub>                             | 0.167 332                                  | 0.127 802                                  | 0.118 322                                  | 0.575 000                                  |             |  |
|  | I <sub>3</sub>                             | -0.585 662                                 | -0.447 307                                 | -0.414 126                                 | -0.875 000                                 |             |  |
|  | I <sub>4</sub>                             | 0.376 497                                  | 0.287 554                                  | 0.266 224                                  | 0.787 500                                  |             |  |
|  |  |  |  |  |  | E(3/2, 1/2) |  |
| $\langle 02 \frac{3}{2} 10 \frac{1}{2}; 2 \rangle$ | I <sub>0</sub>                             | -0.102 470                                 | -0.078 262                                 | -0.072 457                                 | -0.153 093                                 | 0.125 000   |  |
|  | I <sub>1</sub>                             | 0.068 313                                  | 0.052 175                                  | 0.048 305                                  | 0.449 073                                  | 0.508 333   |  |
|  | I <sub>2</sub>                             | -0.136 626                                 | -0.104 350                                 | -0.096 609                                 | -1.081 858                                 | 0.133 333   |  |
|  | I <sub>3</sub>                             | 0.478 191                                  | 0.365 224                                  | 0.338 132                                  | 1.428 869                                  | -0.291 667  |  |
|  | I <sub>4</sub>                             | -0.307 409                                 | -0.234 787                                 | -0.217 371                                 | -0.642 991                                 | 0.525 000   |  |
| V(r)   | $ 02 \frac{5}{2} 02 \frac{5}{2}; 2\rangle$ | $ 02 \frac{3}{2} 02 \frac{3}{2}; 2\rangle$ | $ 02 \frac{5}{2} 02 \frac{3}{2}; 2\rangle$ | $ 02 \frac{5}{2} 10 \frac{1}{2}; 2\rangle$ | $ 02 \frac{3}{2} 10 \frac{1}{2}; 2\rangle$ |             |  |

Tabla 7.4.b. Matriz de la interacción en el caso T=1 y J=2.



|  |  |               |  |
|--|--|---------------|--|
|  |  | $E(5/2, 3/2)$ |  |
| $\langle 02\frac{5}{2} 02\frac{3}{2}; 3  $ | $I_0$                                    | 0.0           |  |
|  | $I_1$                                    | 0.5           |  |
|  | $I_2$                                    | 0.0           |  |
|  | $I_3$                                    | 0.5           |  |
|  | $I_4$                                    | 0.0           |  |
|  |  |               | $E(5/2, 1/2)$                            |
| $\langle 01\frac{5}{2} 40\frac{1}{2}; 3  $ | $I_0$                                    | 0.0           |  |
|  | $I_1$                                    | 0.875         |  |
|  | $I_2$                                    | -0.75         |  |
|  | $I_3$                                    | 0.875         |  |
|  | $I_4$                                    | 0.0           |  |
| $\sqrt{(\epsilon)}$                        | $ 02\frac{5}{2} 02\frac{3}{2}; 3\rangle$ |               | $ 02\frac{5}{2} 20\frac{1}{2}; 2\rangle$ |
|  |  | $E(5/2, 5/2)$ |  |
| $\langle 02\frac{5}{2} 02\frac{5}{2}; 4  $ | $I_0$                                    | 0.075         |  |
|  | $I_1$                                    | 0.4           |  |
|  | $I_2$                                    | 0.05          |  |
|  | $I_3$                                    | 0.4           |  |
|  | $I_4$                                    | 0.075         |  |
|  |  |               | $E(5/2, 3/2)$                            |
| $\langle 02\frac{5}{2} 02\frac{3}{2}; 4  $ | $I_0$                                    | 0.15          | 0.3                                      |
|  | $I_1$                                    | -0.2          | 0.1                                      |
|  | $I_2$                                    | 0.1           | 0.2                                      |
|  | $I_3$                                    | -0.2          | 0.1                                      |
|  | $I_4$                                    | 0.15          | 0.3                                      |
| $\sqrt{(\epsilon)}$                        | $ 02\frac{5}{2} 02\frac{3}{2}; 4\rangle$ |               | $ 02\frac{5}{2} 02\frac{3}{2}; 4\rangle$ |

Tabla 7.4.c. Matrices de la interacción en el caso de  $T=1$  y  $J=3,4$ .

|                                   |                           |                           |                           |                           |                           |        |        |       |        |     |
|-----------------------------------|---------------------------|---------------------------|---------------------------|---------------------------|---------------------------|--------|--------|-------|--------|-----|
| $\langle 025/2, 025/2, 1 \rangle$ | E(5/2, 5/2)               |                           |                           |                           |                           |        |        |       |        |     |
|                                   | I <sub>0</sub>            | 0.427                     | 500                       |                           |                           |        |        |       |        |     |
|                                   | I <sub>1</sub>            | 0.070                     |                           |                           |                           |        |        |       |        |     |
|                                   | I <sub>2</sub>            | 0.005                     |                           |                           |                           |        |        |       |        |     |
|                                   | I <sub>3</sub>            | 0.070                     |                           |                           |                           |        |        |       |        |     |
| $\langle 023/2, 023/2, 1 \rangle$ | E(3/2, 3/2)               |                           |                           |                           |                           |        |        |       |        |     |
|                                   | I <sub>0</sub>            | -0.308                    | 687                       | 0.315                     |                           |        |        |       |        |     |
|                                   | I <sub>1</sub>            | 1.396                     | 885                       | 0.070                     |                           |        |        |       |        |     |
|                                   | I <sub>2</sub>            | -2.176                    | 397                       | 0.230                     |                           |        |        |       |        |     |
|                                   | I <sub>3</sub>            | 1.396                     | 885                       | 0.070                     |                           |        |        |       |        |     |
| $\langle 101/2, 101/2, 1 \rangle$ | E(1/2, 1/2)               |                           |                           |                           |                           |        |        |       |        |     |
|                                   | I <sub>0</sub>            | 0.184                     | 877                       | -0.098                    | 821                       | 0.640  | 625    |       |        |     |
|                                   | I <sub>1</sub>            | -0.542                    | 307                       | 0.289                     | 875                       | -1.645 | 832    |       |        |     |
|                                   | I <sub>2</sub>            | 1.306                     | 468                       | -0.698                    | 336                       | 4.010  | 415    |       |        |     |
|                                   | I <sub>3</sub>            | -1.725                    | 523                       | 0.922                     | 331                       | -3.645 | 831    |       |        |     |
| $\langle 025/2, 025/2, 1 \rangle$ | E(5/2, 3/2)               |                           |                           |                           |                           |        |        |       |        |     |
|                                   | I <sub>0</sub>            | -0.476                    | 235                       | 0.148                     | 492                       | -0.279 | 508    | 0.945 |        |     |
|                                   | I <sub>1</sub>            | 1.481                     | 621                       | -0.131                    | 993                       | 0.819  | 891    | -1.89 |        |     |
|                                   | I <sub>2</sub>            | -2.010                    | 771                       | -0.032                    | 998                       | -1.975 | 193    | 2.89  |        |     |
|                                   | I <sub>3</sub>            | 1.481                     | 621                       | -0.131                    | 993                       | 2.608  | 746    | -1.89 |        |     |
| $\langle 023/2, 101/2, 1 \rangle$ | E(3/2, 1/2)               |                           |                           |                           |                           |        |        |       |        |     |
|                                   | I <sub>0</sub>            | -0.093                    | 541                       | 0.175                     |                           | 0.0    | -0.123 | 744   | 0.312  | 500 |
|                                   | I <sub>1</sub>            | 0.062                     | 361                       | -0.116                    | 667                       | 0.0    | 0.082  | 496   | -0.041 | 667 |
|                                   | I <sub>2</sub>            | -0.124                    | 722                       | 0.233                     | 333                       | 0.0    | -0.164 | 92    | 1.458  | 333 |
|                                   | I <sub>3</sub>            | 0.436                     | 527                       | -0.816                    | 667                       | 0.0    | 0.577  | 471   | -2.041 | 666 |
| I <sub>4</sub>                    | -0.280                    | 624                       | 0.525                     |                           | 0.0                       | -0.371 | 231    | 1.312 | 500    |     |
| V(r)                              | $ 025/2, 025/2, 1\rangle$ | $ 023/2, 023/2, 1\rangle$ | $ 101/2, 101/2, 1\rangle$ | $ 025/2, 025/2, 1\rangle$ | $ 023/2, 101/2, 1\rangle$ |        |        |       |        |     |

Tabla 7.4.d. Matriz de la interacción en el caso T=0 y J=1.

|                                   |                           |                           |                           |                           |             |  |
|-----------------------------------|---------------------------|---------------------------|---------------------------|---------------------------|-------------|--|
|                                   | E(5/2, 5/2)               |                           |                           |                           |             |  |
| $\langle 025/2, 025/2, 3 \rangle$ | I <sub>0</sub>            | 0.24                      |                           |                           |             |  |
|                                   | I <sub>1</sub>            | -0.18                     |                           |                           |             |  |
|                                   | I <sub>2</sub>            | 0.88                      |                           |                           |             |  |
|                                   | I <sub>3</sub>            | -0.18                     |                           |                           |             |  |
|                                   | I <sub>4</sub>            | 0.24                      |                           |                           |             |  |
|                                   |                           |                           | E(3/2, 3/2)               |                           |             |  |
| $\langle 023/4, 023/4, 3 \rangle$ | I <sub>0</sub>            | -0.09                     | 0.315                     |                           |             |  |
|                                   | I <sub>1</sub>            | 0.18                      | 0.07                      |                           |             |  |
|                                   | I <sub>2</sub>            | -0.18                     | 0.23                      |                           |             |  |
|                                   | I <sub>3</sub>            | 0.18                      | 0.07                      |                           |             |  |
|                                   | I <sub>4</sub>            | -0.09                     | 0.315                     |                           |             |  |
|                                   |                           |                           |                           | E(5/2, 3/2)               |             |  |
| $\langle 025/2, 023/4, 3 \rangle$ | I <sub>0</sub>            | -0.155 885                | -0.103 923                | 0.195                     |             |  |
|                                   | I <sub>1</sub>            | 0.484 974                 | 0.092 376                 | 0.026 667                 |             |  |
|                                   | I <sub>2</sub>            | -0.658 179                | 0.023 094                 | 0.556 667                 |             |  |
|                                   | I <sub>3</sub>            | 0.484 974                 | 0.092 376                 | 0.026 667                 |             |  |
|                                   | I <sub>4</sub>            | -0.155 885                | -0.103 923                | 0.195                     |             |  |
|                                   |                           |                           |                           |                           | E(5/2, 1/2) |  |
| $\langle 025/2, 101/2, 3 \rangle$ | I <sub>0</sub>            | 0.183 712                 | -0.030 619                | -0.141 421                | 0.312 500   |  |
|                                   | I <sub>1</sub>            | -0.122 475                | 0.020 412                 | 0.094 281                 | -0.041 667  |  |
|                                   | I <sub>2</sub>            | 0.244 949                 | -0.040 825                | -0.168 562                | 1.458 333   |  |
|                                   | I <sub>3</sub>            | -0.857 321                | 0.142 887                 | 0.659 966                 | -2.041 666  |  |
|                                   | I <sub>4</sub>            | 0.551 135                 | -0.091 856                | -0.424 264                | 1.312 500   |  |
| V(r)                              | $ 025/2, 025/2, 3\rangle$ | $ 023/4, 023/4, 3\rangle$ | $ 025/2, 023/4, 3\rangle$ | $ 025/2, 101/2, 3\rangle$ |             |  |

Tabla 7.4.e. Matriz de la interacción en el caso T=0 y J=3.

|   |                |   |   |   |      |
|---|----------------|---|---|---|------|
|   |                | E(5/2, 3/2)                               |   |   |      |
| $\langle 02\frac{1}{2}, 02\frac{3}{2}; 2 \rangle$ | I <sub>0</sub> | 0.375                                     |   |   |      |
|   | I <sub>1</sub> | -0.583                                    | 333                                       |   |      |
|   | I <sub>2</sub> | 1.416                                     | 667                                       |   |      |
|   | I <sub>3</sub> | -0.583                                    | 333                                       |   |      |
|   | I <sub>4</sub> | 0.375                                     |   |   |      |
|   |                | E(5/2, 1/2)                               |   |   |      |
| $\langle 02\frac{5}{2}, 10\frac{1}{2}; 2 \rangle$ | I <sub>0</sub> | 0.147                                     | 902                                       | 0.125                                     |      |
|   | I <sub>1</sub> | -0.098                                    | 601                                       | 0.508                                     | 333  |
|   | I <sub>2</sub> | 0.197                                     | 203                                       | 0.133                                     | 333  |
|   | I <sub>3</sub> | -0.690                                    | 209                                       | -0.291                                    | 667  |
|   | I <sub>4</sub> | 0.443                                     | 706                                       | 0.525                                     |      |
|   |                | E(3/2, 1/2)                               |   |   |      |
| $\langle 02\frac{3}{2}, 10\frac{1}{2}; 2 \rangle$ | I <sub>0</sub> | 0.181                                     | 142                                       | 0.153                                     | 093  |
|   | I <sub>1</sub> | -0.120                                    | 762                                       | -0.449                                    | 073  |
|   | I <sub>2</sub> | 0.241                                     | 523                                       | 1.081                                     | 858  |
|   | I <sub>3</sub> | -0.845                                    | 330                                       | -1.428                                    | 869  |
|   | I <sub>4</sub> | 0.543                                     | 427                                       | 0.642                                     | 991  |
|   |                |   |   | 0.187                                     | 500  |
|   |                |   |   | 0.325                                     |      |
|   |                |   |   | 0.575                                     |      |
|   |                |   |   | -0.875                                    |      |
|   |                |   |   | 0.787                                     | 500  |
| V(r)  |                | $ 02\frac{5}{2}, 02\frac{3}{2}; 2\rangle$ | $ 02\frac{5}{2}, 10\frac{1}{2}; 2\rangle$ | $ 02\frac{3}{2}, 10\frac{1}{2}; 2\rangle$ |      |
|   |                | E(5/2, 3/2)                               |   | E(5/2, 5/2)                               |      |
| $\langle 02\frac{5}{2}, 02\frac{3}{2}; 4 \rangle$ | I <sub>0</sub> | 0.375                                     |   | 0.375                                     |      |
|   | I <sub>1</sub> | 0.0                                       |   | 0.0                                       |      |
|   | I <sub>2</sub> | 0.25                                      |   | 0.25                                      |      |
|   | I <sub>3</sub> | 0.0                                       |   | 0.0                                       |      |
|   | I <sub>4</sub> | 0.375                                     |   | 0.375                                     |      |
|   |                | j=4                                       |   |   |      |
|   |                |   |   |   |      |
|   |                |   |   |   |      |
|   |                |   |   |   |      |
|   |                |   |   |   |      |
| V(r)  |                | $ 02\frac{5}{2}, 02\frac{3}{2}; 4\rangle$ |   | $ 02\frac{5}{2}, 02\frac{5}{2}; 5\rangle$ | V(r) |

J=2

J=4

Tabla 7.4.f. Matrices de la interacción en los casos T=0 y J=2,4,5.

Tabla 7.4.g.

Las cantidades no especificadas tienen los valores siguientes

|             | Neutrones          | Protones            | Neut-Prot.         |
|-------------|--------------------|---------------------|--------------------|
| E(5/2, 5/2) | 102.42 Mev.        | 103.16 Mev          | 102.79 Mev         |
| E(3/2, 3/2) | 112.58 Mev         | 113.36 Mev          | 112.97 Mev         |
| E(1/2, 1/2) | 104.16 Mev         | 104.16 Mev          | 104.16 Mev         |
| E(5/2, 3/2) | 107.50 Mev         | 108.26 Mev          | 107.88 Mev         |
| E(3/2, 1/2) | 108.37 Mev         | 108.76 Mev          | 108.57 Mev         |
| E(5/2, 1/2) | 103.29 Mev         | 103.66 Mev          | 103.48 Mev         |
|             | (O <sup>18</sup> ) | (Ne <sup>18</sup> ) | (F <sup>18</sup> ) |

## REFERENCIAS

- 1) DeShalit, Amos, y Feshbach, Herman, THEORETICAL NUCLEAR PHYSICS, VOLUME I: NUCLEAR STRUCTURE (John Wiley, 1974), pp. 273.  
DeShalit, Amos, y Talmi, Igal, THE NUCLEAR SHELL MODEL (Academic Press, 1963), pp. 170.
- 2) Merzbacher, Eugen, QUANTUM MECHANICS (John Wiley, 1970), Cap. 17.
- 3) DeShalit, Amos, y Talmi, Igal, op. cit., Cap. 24.
- 4) Merzbacher, Eugen, op. cit., pps. 425-429.
- 5) Rose, M.E., ELEMENTARY THEORY OF ANGULAR MOMENTUM (John Wiley, 1957), Cap. 35.
- 6) Merzbacher, Eugen, op. cit., pp. 419.
- 7) Matsunobu, Hiroyuki, y Takebe, Hisao, PROG. THEORET. PHYS. 14 (1955) 589-605.  
DeShalit, Amos, y Talmi, Igal, op. cit., pps. 121-127.
- 8) DeShalit, Amos, y Feshbach, Herman, op. cit., pps. 31-40.
- 9) ibid, pps. 11-16.
- 10) ibid, pp. 232.
- 11) DeShalit, Amos, y Talmi, Igal, op. cit., pp. 204.
- 12) Elliot, J. P., y Lane, A. M., THE NUCLEAR SHELL MODEL en HANDBUCH DER PHYSIK (Springer-Verlag, 1957), Vol. XXXIX, pps. 330-332.
- 13) Arfken, George, MATHEMATICAL METHODS FOR PHYSICISTS, (Academic Press, 1970), pps. 546-547.
- 14) ibid, pps. 581-583.
- 15) DeShalit, Amos, y Talmi, Igal, op. cit. pp. 209
- 16) ibid, pp. 213.
- 17) DeShalit, Amos, y Talmi, Igal, pp. 349.
- 18) Moshinsky, Marcos, THE HARMONIC OSCILLATOR IN MODERN PHYSICS: FROM ATOMS TO QUARKS, (Gordon & Breach, 1968), pps. 4-6.
- 19) Brody, Tomás A., y Moshinsky, M., TABLES OF TRANSFORMATION BRACKETS, (Gordon & Breach, 1967).

- 20.- A. de Shalit y H. Feshbach, op. cit., pags. 197-199, ellos evalúan  $\bar{h}_0$  utilizando la fórmula del radio cuadrático medio,  $\bar{h}_0 = \frac{2I}{A^2} M_p^2$ ,  $\bar{h}_0 = 15.5 \text{ fm}$  para nuestro caso.
- 21.- A. de Shalit y H. Feshbach, op.cit., pags. 26-31.
- 22.- T. Brody y M. Moshinsky, Tables of transformation brackets, Gordon and Breach, (New York, 1960), en nuestro trabajo discutimos el funcionamiento de estas tablas.
- 23.- M. Moshinsky, Nuclear Physics, 8, 19 (1958).  
M. Moshinsky, Nuclear Physics, 13, 104 (1959).
- 24.- H. Matzuno y H. Takebe, Tables U coefficients, Progress of Theoretical Physics, Vol.14, No. 6, 569-605, Dic. 1955.
- 25.- A. de Shalit e I. Talmi, op.cit., cap. 19, pags. 183-191.
- 26.- S. Lang, Álgebra Lineal, Fondo Editorial Latinoamericano, México, 1976, pág. 265.
- 27.- T. Brody y M. Moshinsky, op. cit., pags. 419, 422.
- 28.- T. Brody y M. Moshinsky, op. cit., pág. 420.
- 29.- A. de Shalit y H. Feshbach, op. cit., pág. 213.

## CAPITULO III. SISTEMAS DE TRES O MAS PARTICULAS ACTIVAS.

SECCION 1. CONSTRUCCION DE LAS FUNCIONES DE ONDA ANTISIMETRICAS PARA LAS CONFIGURACIONES  $j^3$  Y  $j^4$ .

Si deseamos describir el estado en el cual dos partículas equivalentes ( $n_1=n_2$ ,  $l_1=l_2$ ,  $j_1=j_2$ ), cada una con momento angular  $j$ , están acopladas de manera que su momento angular total  $J$  sea un buen número cuántico, deberemos considerar

$$\Psi_{12}(j_1 j_2 M) = \sum_{m_1 m_2} \langle j m_1 j m_2 | J M \rangle \{ \varphi_1(j m_1) \varphi_2(j m_2) - \varphi_1(j m_2) \varphi_2(j m_1) \} \quad (1.1)$$

donde  $\varphi(j m_2)$ , por ejemplo, indica que la partícula 1 se encuentra en un estado caracterizado por los números cuánticos  $(j m_2)$ . Sin embargo, debido a la simetría de los coeficientes de Clebsch-Gordan, Ec. (A.5), podemos cambiar  $m_1$  y  $m_2$  en el segundo sumando de (1.1) para obtener

$$\Psi_{12}(j_1 j_2 M) = \{ 1 - (-1)^{j_1+j_2} \} \sum_{m_1 m_2} \langle j m_1 j m_2 | J M \rangle \varphi_1(j m_1) \varphi_2(j m_2) \quad (1.2)$$

Este es el resultado familiar de que los únicos estados permitidos para dos partículas equivalentes de momento angular  $j$  semi-entero son aquéllos con un momento angular total  $J$  par.

Consideremos ahora tres partículas en órbitas caracterizadas por  $j^a$ ,  $j^b$  y  $j^c$ . Acoplamos  $j^a$  y  $j^b$  para formar  $J_{12}$ , el cual se acopla a su vez a  $j^c$  para formar la  $J$  total. Si la partícula 1 está en la órbita  $j^a$ , y la partícula 2 en la órbita  $j^b$ , obtenemos una función de onda que no es antisimétrica:

$$\Psi(j_1^a j_2^b(j_{12}) j_3^c J M) = \sum_{m_1 m_2 m_3} \langle j_1^a m_1 j_2^b m_2 | J_{12} M_{12} \rangle \langle J_{12} M_{12} j_3^c m_3 | J M \rangle \varphi_1(j_1^a m_1) \varphi_2(j_2^b m_2) \varphi_3(j_3^c m_3) \quad (1.3)$$

Para antisimetrizar esta función, le aplicamos el operador  $\sum_P (-1)^P \mathcal{P}$ , donde  $\mathcal{P}$  es un operador que permuta los índices de las partículas,  $(1 2 3) \xrightarrow{\mathcal{P}} (i_1 i_2 i_3)$ , la fase  $(-1)^P$  es +1 o -1 de acuerdo a si  $\mathcal{P}$  es una permutación par o impar, y la suma se efectúa sobre las 3! permutaciones  $\mathcal{P}$  de tres índices. De esta manera obtenemos

$$\begin{aligned} \sum_P (-1)^P \mathcal{P} \Psi(j_1^a j_2^b(j_{12}) j_3^c J M) &= \Psi(j_1^a j_2^b(j_{12}) j_3^c J M) \\ &- \Psi(j_1^a j_3^c(j_{12}) j_2^b J M) + \Psi(j_2^b j_1^a(j_{12}) j_3^c J M) - \Psi(j_2^b j_3^c(j_{12}) j_1^a J M) \\ &+ \Psi(j_3^c j_1^a(j_{12}) j_2^b J M) - \Psi(j_3^c j_2^b(j_{12}) j_1^a J M) \end{aligned} \quad (1.4)$$



Si  $j^a$ ,  $j^b$  y  $j^c$  son todas distintas, cualesquiera dos de las seis funciones de onda que aparecen en (1.4) son ortogonales entre sí. Por lo tanto, el factor de normalización de la función (1.4) es  $1/\sqrt{3!}$ .

Por otra parte, si  $j^a = j^b \equiv j$ , se tiene

$$\Psi[j_1^a, j_1^b, (j_{12})^c; JM] = -(-)^{j_{12}} \Psi[j_1^c, j_1^c, (j_{12})^c; JM].$$

Esto implica que (1.4) se anula para los valores impares de  $j_{12}$ , los cuales están prohibidos por el principio de exclusión [cf. (1.2)]. Para los valores pares permitidos de  $j_{12}$ , (1.4) se convierte en el doble de la suma

$$\Psi[j_{12}^2, (j_{12})^c; JM] = \Psi[j_{12}^2, (j_{12})^c; JM] + \Psi[j_{12}^2, (j_{12})^c; JM]. \quad (1.5)$$

donde, por ejemplo,  $j_{12}^2$  significa que las partículas 1 y 2 están en la órbita  $j$ , y  $j_{12} = j$  está acoplada a  $j_3 = j$  para formar  $j_{12}$ .

Si  $j^c \neq j$ , los tres términos en (1.5) son ortogonales; el factor de normalización en este caso es  $1/\sqrt{3!}$ .

Sin embargo, si  $j^c = j$ , los tres términos en (1.5) ya no son ortogonales; utilizando (A.13) podemos ver que el segundo término no es ortogonal al tercero:

$$\begin{aligned} & \int d\epsilon(1) d\epsilon(2) d\epsilon(3) \Psi^* [j_{12}^2, (j_{12})^c; JM] \Psi [j_{12}^2, (j_{12})^c; JM] \\ &= (-)^{2(j_{12} + j_{12} + j_{12} + j_{12})} \frac{\sqrt{(2j_{11} + 1)(2j_{11} + 1)} \left\{ \begin{matrix} j_3 & j_1 & j_{12} \\ j & j & j_{12} \end{matrix} \right\}}{\sqrt{(2j_{11} + 1)(2j_{11} + 1)} \left\{ \begin{matrix} j_3 & j_1 & j_{12} \\ j & j & j_{12} \end{matrix} \right\}} \\ &= -\sqrt{(2j_{11} + 1)(2j_{11} + 1)} \left\{ \begin{matrix} j_3 & j_1 & j_{12} \\ j & j & j_{12} \end{matrix} \right\}. \end{aligned}$$

En el caso de tres partículas equivalentes, (1.5) se convierte en

$$\begin{aligned} \Psi_{123} [j^2, (j_{12})^c; JM] &= \sum_{m_1 m_2 m_3} \left\{ \langle j m_1 j m_2 | j_{12} m_{12} \rangle \langle j_{12} m_{12} j m_3 | JM \rangle + \right. \\ & \quad \left. - \langle j m_1 j m_3 | j_{12} m_{12} \rangle \langle j_{12} m_{12} j m_2 | JM \rangle + \langle j m_1 j m_3 | j_{12} m_{12} \rangle \langle j_{12} m_{12} j m_1 | JM \rangle \right\} \\ & \quad \cdot \varphi_1(j m_1) \varphi_2(j m_2) \varphi_3(j m_3). \end{aligned} \quad (1.6)$$

Los estados  $\Psi [j^2, (j_{12})^c; JM]$  para diferentes valores de  $j_{12}$  son ortogonales entre sí, aún si  $(JM)$  son los mismos. Un cálculo directo muestra que

$$\int d\epsilon(1) d\epsilon(2) d\epsilon(3) \Psi^* [j^2, (j_{12})^c; JM] \Psi [j^2, (j_{12}')^c; JM] = - (2j_{12} + 1) \left\{ \begin{matrix} j & j & j_{12} \\ j & j & j_{12}' \end{matrix} \right\} \delta_{j_{12}, j_{12}'}$$

Esta propiedad se pierde después de la antisimetrización:

$$\begin{aligned} & \int d\epsilon(1) d\epsilon(2) d\epsilon(3) \Psi_{123}^* [j^2, (j_{12})^c; JM] \Psi_{123} [j^2, (j_{12}')^c; JM] \\ &= 3 \left\{ \delta_{j_{12}, j_{12}'} + \frac{\sqrt{(2j_{12} + 1)(2j_{12}' + 1)} \left\{ \begin{matrix} j & j & j_{12} \\ j & j & j_{12}' \end{matrix} \right\}}{\sqrt{(2j_{12} + 1)(2j_{12}' + 1)} \left\{ \begin{matrix} j & j & j_{12} \\ j & j & j_{12}' \end{matrix} \right\}} \right\}. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Este cálculo se hizo utilizando directamente (1.6) y quiere decir que tomando todos los valores posibles de  $J_{12}$  en (1.6) se producirá un conjunto redundante de funciones de onda antisimétricas para la configuración  $j^3$ .

Podemos obtener una expansión de la función de onda antisimétrica (1.6) —que si observamos, es (1.5) con  $j^c = j^-$ , en términos de las funciones de onda ortogonales  $\Psi_j [j^3(j_{12})]_3 JM$  aplicando la transformación (A.13):

$$\begin{aligned} \Psi_{123} [j^3(j_{12})]_3 JM &= \Psi [j_{12}^+ (j_{12})]_3 JM \\ &- \sum_{j_{12}'} \langle j_{12}^+ (j_{12}) | j_{12} (j_{12}') \rangle \Psi [j_{12}^+ (j_{12}')]_3 JM + \sum_{j_{12}'} \langle j_{12}^+ (j_{12}) | j_{12} (j_{12}') \rangle \Psi [j_{12}^+ (j_{12}')]_3 JM \\ &= \Psi [j_{12}^+ (j_{12})]_3 JM - \sum_{j_{12}'} \{1 + (-)^{j_{12}'}\} \langle j_{12}^+ (j_{12}) | j_{12} (j_{12}') \rangle \Psi [j_{12}^+ (j_{12}')]_3 JM. \end{aligned}$$

Y recordando que los valores impares de  $J_{12}$ ,  $J_{12}'$  nos dan funciones nulas, obtenemos:

$$\Psi_{123} [j^3(j_{12})]_3 JM = \sum_{j_{12}'} \left\{ \begin{matrix} j & j & j \\ j_{12} & j_{12}' & j_{12} \end{matrix} \right\} \Psi [j_{12}^+ (j_{12}')]_3 JM \quad (1.7)$$

Observemos que la función (1.8) es una función completamente antisimétrica, y al usarla no tenemos que preocuparnos de distinguir entre integrales directas y de intercambio, ya que no hay distinción entre éstas para partículas equivalentes. Para que la función de onda esté normalizada a la unidad, vemos de (1.7) que debemos multiplicarla por

$$\left[ 3 + 6 (2j_{12} + 1) \left\{ \begin{matrix} j & j & j \\ j & j & j_{12} \end{matrix} \right\} \right]^{-1/2}. \quad (1.8)$$

La expansión (1.8) puede escribirse, según hemos visto, en la forma

$$\Psi_{123} [j^3 \alpha JM] = \sum_{j_{12}'} [j^3(j_{12}')]_3 JM \Psi [j_{12}^+ (j_{12}')]_3 JM, \quad (1.9)$$

siendo  $\alpha$  un número cuántico adicional que sirve para especificar los varios estados antisimétricos posibles de la configuración  $j^3$  con el mismo valor de  $J$ . Los coeficientes de transformación son independientes de  $M$ , como puede demostrarse viendo el comportamiento de ambos miembros de (1.10) ante rotaciones<sup>1)</sup>. La transformación definida en (1.10) no es invertible porque mientras las funciones  $\Psi_{123} [j_{12}^+ (j_{12}')]_3 JM$  forman una base completa para las funciones de tres partículas equivalentes en la órbita  $j$ , las funciones  $\Psi_{123} [j^3 \alpha JM]$  son funciones muy particulares; ésto

se expresa mediante el signo  $\{\}$  insertado en el paréntesis de transformación. Los coeficientes de transformación, que, dicho sea de paso, son parte de una transformación unitaria, son llamados coeficientes de parentesco fraccional (C.P.F.); ésto debido a que cada estado  $\Psi[\{j_1^2, \{j\}^2, JM]\Psi$  puede considerarse como "pariente" del estado antisimétrico  $\Psi_{123}[\{j\}^2, JM]$ .

Obtenemos entonces para la configuración  $j^3$ , si hay únicamente un estado antisimétrico con un valor dado de  $J$ , que

$$[\{j^2 \alpha\} \{j\} \{j\} j^3] = \frac{[\delta_{j_1 j_2} + 2\sqrt{(2j_1+1)(2j_2+1)} \left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j \\ j_3 & j & j \end{matrix} \right\}]}{[3 + 6(2j_1+1) \left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j \\ j_3 & j & j \end{matrix} \right\}]^{1/2}} \quad (1.11)$$

En la mayoría de los casos prácticos, se pueden construir todos los estados permitidos de la configuración  $j^3$  con dos o tres valores de  $J_{12}$  en (1.8); a éstos se les conoce como "parientes principales". En (1.11), el pariente principal es  $J_0$ .

Para  $j^4$  aplicamos el método que utilizamos para  $j^3$ : comparamos la expresión dada por los coeficientes de parentesco fraccional con aquélla que se obtiene agregando una partícula más a una función ya antisimétrica y antisimetrizando la función total así obtenida. La primera expresión es:

$$\begin{aligned} \Psi[\{j^4, JM] &= \sum_{\alpha, j_1} [\{j^3(\alpha, j_1)\} \{j\} \{j\} j^4 \alpha j] \Psi[\{j_1^2, (\alpha, j_1) j_2, JM] \\ &= \sum_{\alpha, j_1} [\{j^3(\alpha, j_1)\} \{j\} \{j\} j^4 \alpha j] \sum_{m_1, m_2} \langle j_1, m_1, j_2, m_2 | JM \rangle \Psi_{123}[\{j^3, j_1, M_1, j_2, M_2\}] \varphi_4(j, m_4) \\ &= \sum_{\substack{\alpha, j_1, j_2, M_1, M_2 \\ m_1, m_2, m_3, m_4}} [\{j^3(\alpha, j_1)\} \{j\} \{j\} j^4 \alpha j] [\{j^2(\alpha, j_1) j_2, j_1\} \{j^3, \alpha, j_1, j_2\} \\ &\quad \langle j_1, m_1, j_2, m_2 | JM \rangle \langle j_2, M_2, j_3, m_3 | j_1, M_1 \rangle \langle j_3, m_3, j_4, m_4 | j_2, M_2 \rangle \\ &\quad \varphi_1(j, m_1) \varphi_2(j, m_2) \varphi_3(j, m_3) \varphi_4(j, m_4)]; \end{aligned} \quad (1.12)$$

en tanto que la forma permutacional es:

$$\begin{aligned} \Psi_{1234}[\{j^4, JM] &= \sum_P (-1)^{sp} \varphi \left\{ \sum_{\substack{m_1, m_2, m_3, m_4 \\ M_1, M_2}} \langle j_1, m_1, j_2, m_2 | j_2, M_2 \rangle \langle j_2, M_2, j_3, m_3 | j_1, M_1 \rangle \right. \\ &\quad \left. \langle j_3, m_3, j_4, m_4 | JM \rangle \varphi_1(j, m_1) \varphi_2(j, m_2) \varphi_3(j, m_3) \varphi_4(j, m_4) \right\} \\ &= \sum_{\substack{m_1, m_2, m_3, m_4 \\ M_1, M_2}} \langle j_1, m_1, j_2, m_2 | JM \rangle \langle j_2, M_2, j_3, m_3 | j_1, M_1 \rangle \langle j_3, m_3, j_4, m_4 | j_2, M_2 \rangle \\ &\quad \times \{ e^{-(23)} - (24) - (34) + (13)(24) + (132) + (142) \\ &\quad + (234) + (243) - (1342) - (1432) - (1423) \} \\ &\quad \times \varphi_1(j, m_1) \varphi_2(j, m_2) \varphi_3(j, m_3) \varphi_4(j, m_4), \end{aligned} \quad (1.13)$$

donde las permutaciones han sido escritas explícitamente en forma de ciclos, y se tiene, por ejemplo, que

$$(1342) \varphi_1(j_{m_1}) \varphi_2(j_{m_2}) \varphi_3(j_{m_3}) \varphi_4(j_{m_4}) = \varphi_1(j_{m_1}) \varphi_2(j_{m_2}) \varphi_3(j_{m_3}) \varphi_4(j_{m_4}).$$

Notemos que sólo aparecen  $\frac{1}{2}(4!)$  permutaciones debido a (1.2) para las partículas 1 y 2. Observemos también que esta función no está normalizada a la unidad. Utilizando las propiedades de ortogonalidad de los coeficientes de Clebsch-Gordan y las de los coeficientes de parentesco fraccional  $j^2 \rightarrow j^3$ , Schwartz y DeShalit<sup>2)</sup> obtienen que

$$\begin{aligned} [j^2(j_1) j^3(j_2) j^4(j_3)] &= N(j_2, j_3) \sqrt{(2j_2+1)(2j_3+1)(2j_2+1)} (-)^{j_1+j_2} \\ &\times \left\{ \frac{-3}{2j_2+1} \begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_2 & j_1 & j_3 \end{Bmatrix} \left[ \frac{1}{2j_2+1} + 2 \begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_2 & j_1 & j_3 \end{Bmatrix} \right] + 3 \begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_2 & j_1 & j_3 \end{Bmatrix} \left[ \frac{1}{2j_2+1} + 2 \begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_2 & j_1 & j_3 \end{Bmatrix} \right] \right. \\ &+ (-)^{j_1+j_2+j_3} \left\{ \begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_2 & j_1 & j_3 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_2 & j_1 & j_3 \end{Bmatrix} + (-)^{j_1+j_2+j_3} \begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_2 & j_1 & j_3 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_2 & j_1 & j_3 \end{Bmatrix} \right. \\ &\left. \left. + \begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_2 & j_1 & j_3 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_2 & j_1 & j_3 \end{Bmatrix} \right\} \right\}, \end{aligned} \quad (1.1)$$

donde  $N(j_2, j_3)$  es una constante de normalización que aún no ha sido determinada. Aquí existen dos parentescos:  $j_2$  y  $j_3$ ; sin embargo, en tanto que  $j_2$  es entero,  $j_3$  siempre es semi-entero.

Con frecuencia, es más conveniente comenzar con funciones de onda en las cuales las partículas 1 y 3 están acopladas a las partículas 2 y 4, respectivamente; en este caso, los coeficientes de parentesco fraccional se definen como:

$$\mathcal{N}(j^4 JM) \equiv \sum_{j_{12} j_{34}} [j^2(j_{12}) j^2(j_{34}) j^3(j_1 j_2) j^4(j_3 j_4)] \sum_{\substack{m_1 m_2 m_3 m_4 \\ M_{12} M_{34} M}} \langle j m_1 m_2 | j_{12} M_{12} \rangle \langle j m_3 m_4 | j_{34} M_{34} \rangle \langle j_{12} M_{12} j_{34} M_{34} | JM \rangle \varphi_1(j_{m_1}) \varphi_2(j_{m_2}) \varphi_3(j_{m_3}) \varphi_4(j_{m_4}). \quad (1.2)$$

Y comparando (1.13) con (1.13) pueden obtenerse los coeficientes  $[j^2(j_{12}) j^2(j_{34}) j^3(j_1 j_2) j^4(j_3 j_4)]$ . Sin embargo, Schwartz y DeShalit<sup>2)</sup> proceden de otra forma: intercambian las partículas 2 y 3, y piden que la función de onda resultante sea  $-1$  veces (1.13):

$$\begin{aligned} \Psi(j^4 JM) &= - \sum_{j_{12} j_{34}} [j^2(j_{12}) j^2(j_{34}) j^3(j_1 j_2) j^4(j_3 j_4)] \sum_{\substack{m_1 m_2 m_3 m_4 \\ M_{12} M_{34} M}} \langle j m_1 m_3 | j_{12} M_{12} \rangle \\ &\times \langle j m_2 m_4 | j_{34} M_{34} \rangle \langle j_{12} M_{12} j_{34} M_{34} | JM \rangle \varphi_1(j_{m_1}) \varphi_2(j_{m_3}) \varphi_3(j_{m_2}) \varphi_4(j_{m_4}). \end{aligned} \quad (1.3)$$

Comparando esta expresión con (1.13), se obtiene la relación

$$\begin{aligned} - \sum_{j_{12} j_{34}} \sqrt{(2j_{12}+1)(2j_{34}+1)(2j_{12}+1)(2j_{34}+1)} \begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_{12} \\ j_3 & j_4 & j_{34} \end{Bmatrix} \left\{ [j^2(j_{12}) j^2(j_{34}) j^3(j_1 j_2) j^4(j_3 j_4)] \right. \\ \left. = [j^2(j_{12}) j^2(j_{34}) j^3(j_1 j_2) j^4(j_3 j_4)] \right\}, \text{ para } j_{12}, j_{34} \text{ pares.} \end{aligned} \quad (1.4)$$

Y utilizando las igualdades

$$\begin{aligned} \sum_{j_{12} j_{34}} \begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_{12} \\ j_3 & j_4 & j_{34} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_{12} \\ j_3 & j_4 & j_{34} \end{Bmatrix} (2j_{12}+1)(2j_{34}+1) &= \frac{8j_1 j_2 j_3 j_4}{(2k+1)(2l+1)} (j_1 j_2)(j_3 j_4)(j_{12} j_{34}), \\ \sum_{j_{12} j_{34}} \begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_{12} \\ k & l & j \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_{12} \\ j_3 & j_4 & j_{34} \end{Bmatrix} (2j_{12}+1)(2j_{34}+1) (-)^{j_{12}+j_{34}} &= (-)^{j_1+j_2+j_3+j_4} \begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_{12} \\ k & l & j \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_{12} \\ j_3 & j_4 & j_{34} \end{Bmatrix}. \end{aligned}$$

obtienen la solución general de este sistema:

$$L^j(\alpha_{1,2})j^2(\alpha_{3,4})j^2j^2j^2j^2 \dots \left[ \frac{1}{\sqrt{K}} \frac{1}{\sqrt{L}} \right] \dots \quad (1.21)$$

siendo K y L los parientes principales del estado (obviamente que deben ser pares). La constante de normalización C(K,L) se determina mediante el requisito

$$\sum_{j_1, j_2} |L^j(\alpha_{1,2})j^2(\alpha_{3,4})j^2j^2j^2j^2 \dots|^2 = 1.$$

## SECCION 2. COEFICIENTES DE PARENTESCO FRACCIONAL Y CONFIGURACION $j^n$ .

El método utilizado en la sección anterior para construir estados antisimétricos de tres y cuatro partículas puede generalizarse para un número arbitrario n de partículas. En este caso, los coeficientes de parentesco fraccional para pasar de una función antisimétrica en la configuración  $j^{n-1}$  a una función antisimétrica en la configuración  $j^n$  se definen mediante la expresión

$$\Psi[j^n \alpha_j \beta_M] = \sum_{\alpha_1, j_1} [j^{n-1}(\alpha_1, j_1) j_1 j_1 j_1 \alpha_j \beta_M] \Psi[j_{1,2,\dots,n-1}(\alpha_1, j_1) j_n \beta_M]. \quad (2.1)$$

donde los números cuánticos  $\alpha$  y  $\alpha_1$  sirven para especificar completamente los varios estados posibles con los mismos valores de J y  $J_1$ . El desarrollo en (2.1) es posible debido a que las funciones de onda

$$\Psi[j_{1,2,\dots,n-1}(\alpha_1, j_1) j_n \beta_M] \quad \forall \alpha_1, j_1 \text{ permisibles} \quad (2.2)$$

constituyen una base completa para los estados de n partículas que son antisimétricas en las coordenadas de las n-1 primeras. Debido a la ortonormalidad de las funciones en (2.2) para distintos valores de  $\alpha_1$  y/o  $J_1$ , la normalización de (2.1) establece una condición sobre los C.P.F.:

$$\sum_{\alpha_1, j_1} [j^{n-1}(\alpha_1, j_1) j_1 j_1 j_1 \alpha_j \beta_M]^* [j^{n-1}(\alpha_1, j_1) j_1 j_1 \alpha_j \beta_M] = S_{\alpha \alpha}. \quad (2.3)$$

Los estados completamente antisimétricos forman un subespacio del espacio generado por  $\{\Psi[j_{1,2,\dots,n-1}(\alpha_1, j_1) j_n \beta_M] \forall \alpha_1, j_1 \text{ permisibles}\}$ ; por lo tanto, (2.1) puede considerarse como una proyección. Desde este punto de vista, la antisimetrización de la función

$$\Psi[j^{n-1}(\alpha, j) j_n \beta_M]$$

implica la transformación

$$\Psi[\sum_{\alpha, J} \Psi(\alpha, J) \delta_{\alpha, J} JM] = \sum_{\alpha, J} [\sum_{\alpha', J'} \langle \alpha', J' | \delta_{\alpha, J} \rangle] \Psi[\sum_{\alpha', J'} \Psi(\alpha', J') \delta_{\alpha', J'} JM]. \quad (2.4)$$

Los números  $[\alpha, J]$  se incluyen para hacer notar que el estado completamente antisimétrico se obtiene a partir de

$$\Psi[\sum_{\alpha, J} \Psi(\alpha, J) \delta_{\alpha, J} JM];$$

a esta función se le denomina el pariente principal de (2.4).

La proyección realizada en (2.4) también se puede lograr mediante un operador que, permutando la partícula n con las n-1 primeras y tomando combinaciones lineales de las funciones así obtenidas, dé como resultado un estado completamente antisimétrico; este operador es  $A_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{\alpha \in 1}^{n-1} (a_n)$ , o explícitamente,

$$A_n \Psi[\sum_{\alpha, J} \Psi(\alpha, J) \delta_{\alpha, J} JM] = \frac{1}{\sqrt{n}} \left( \Psi[\sum_{\alpha, J} \Psi(\alpha, J) \delta_{\alpha, J} JM] - \sum_{\alpha \in 1}^{n-1} \Psi[\sum_{\alpha, J} \Psi(\alpha, J) \delta_{\alpha, J} JM] \right) \quad (2.5)$$

Antes de proseguir, observemos que  $A_n \Psi[\sum_{\alpha, J} \Psi(\alpha, J) \delta_{\alpha, J} JM]$  debe ser proporcional a  $\Psi[\sum_{\alpha, J} \Psi(\alpha, J) \delta_{\alpha, J} JM]$ ; el factor de proporcionalidad se denotará  $N_{n, \alpha, J}$ . Ahora, a los distintos términos que aparecen en (2.5) les aplicamos permutaciones que llevan la n-ésima partícula a la última posición:

$$\begin{aligned} A_n \Psi[\sum_{\alpha, J} \Psi(\alpha, J) \delta_{\alpha, J} JM] &= \Psi[\sum_{\alpha, J} \Psi(\alpha, J) \delta_{\alpha, J} JM] - \sum_{\alpha \in 1}^{n-1} (-)^{\alpha} \Psi[\sum_{\alpha, J} \Psi(\alpha, J) \delta_{\alpha, J} JM] \\ &= \Psi[\sum_{\alpha, J} \Psi(\alpha, J) \delta_{\alpha, J} JM] - \sum_{\alpha \in 1}^{n-1} \left[ \sum_{\alpha, J_2} \langle \alpha, J_2 | \delta_{\alpha, J} \rangle \Psi[\sum_{\alpha, J_2} \Psi(\alpha, J_2) \delta_{\alpha, J_2} JM] \right] \\ &\quad \times \sum_{\alpha \in 1}^{n-1} (-)^{\alpha} \Psi[\sum_{\alpha, J_2} \Psi(\alpha, J_2) \delta_{\alpha, J_2} JM]; \end{aligned} \quad (2.6)$$

la segunda igualdad se obtuvo expresando  $\Psi[\sum_{\alpha, J} \Psi(\alpha, J) \delta_{\alpha, J} JM]$  en términos de las funciones  $\Psi[\sum_{\alpha, J_2} \Psi(\alpha, J_2) \delta_{\alpha, J_2} JM]$  mediante los C.P.F. apropiados. Para poder comparar (2.6) con (2.4), debemos acoplar la n-ésima partícula al final, de modo que aplicando el cambio de acoplamiento expresado en (A.13):

$$\begin{aligned} A_n \Psi[\sum_{\alpha, J} \Psi(\alpha, J) \delta_{\alpha, J} JM] &= \Psi[\sum_{\alpha, J} \Psi(\alpha, J) \delta_{\alpha, J} JM] - \sum_{\alpha \in 1}^{n-1} \left[ \sum_{\alpha, J_2} \langle \alpha, J_2 | \delta_{\alpha, J} \rangle \Psi[\sum_{\alpha, J_2} \Psi(\alpha, J_2) \delta_{\alpha, J_2} JM] \right] \\ &= \Psi[\sum_{\alpha, J} \Psi(\alpha, J) \delta_{\alpha, J} JM] - \sum_{\alpha \in 1}^{n-1} \left[ \sum_{\alpha, J_2} \langle \alpha, J_2 | \delta_{\alpha, J} \rangle \sum_{\alpha, J_3} \langle \alpha, J_3 | \delta_{\alpha, J_2} \rangle \Psi[\sum_{\alpha, J_3} \Psi(\alpha, J_3) \delta_{\alpha, J_3} JM] \right] \\ &\quad \times \left\{ \Psi[\sum_{\alpha, J_2} \Psi(\alpha, J_2) \delta_{\alpha, J_2} JM] - \sum_{\alpha \in 1}^{n-2} \Psi[\sum_{\alpha, J_3} \Psi(\alpha, J_3) \delta_{\alpha, J_3} JM] \right\} \end{aligned} \quad (2.7)$$

donde hemos obtenido la segunda igualdad efectuando las permutaciones que llevan a la (n-1)-ésima partícula a la posición de la q-ésima faltante. La expresión dentro del paréntesis se puede escribir como  $A_{n-1} \Psi[\sum_{\alpha, J_2} \Psi(\alpha, J_2) \delta_{\alpha, J_2} JM]$ , donde  $A_{n-1} = \frac{1}{\sqrt{n-1}} \sum_{\alpha \in 1}^{n-2}$ .

En vista de este resultado, podemos reescribir (2.7) como

$$\begin{aligned} \chi_n \psi [j^{n-1}(\alpha, j_1) j_2 j_3 \dots j_n] &= \chi_n \psi [j^{n-1}(\alpha, j_1) j_2 j_3 \dots j_n] \sum_{j_1, j_2, j_3, \dots, j_n} \langle j_1, j_2, j_3, \dots, j_n | j^{n-1}(\alpha, j_1) \rangle \\ &\times \langle j_1, j_2, j_3, \dots, j_n | j^{n-1}(\alpha, j_1) \rangle \chi_n \psi [j^{n-1}(\alpha, j_1) j_2 j_3 \dots j_n]. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Por otra parte, recordando que  $\chi_n$  y  $\chi_{n-1}$  son hermiticos, obtenemos

$$\begin{aligned} [j^{n-1}(\alpha, j_1) j_2 j_3 \dots j_n] \psi [j^{n-1}(\alpha, j_1) j_2 j_3 \dots j_n] &= \int d\alpha(\alpha) \dots d\alpha(n) \chi_n^* [j^{n-1}(\alpha, j_1) j_2 j_3 \dots j_n] \chi_n [j^{n-1}(\alpha, j_1) j_2 j_3 \dots j_n] \\ &= \frac{1}{n} \int d\alpha(\alpha) \dots d\alpha(n) \chi_n^* [j^{n-1}(\alpha, j_1) j_2 j_3 \dots j_n] \chi_n [j^{n-1}(\alpha, j_1) j_2 j_3 \dots j_n], \\ [j^{n-2}(\alpha, j_2) j_3 j_4 \dots j_n] \psi [j^{n-1}(\alpha, j_1) j_2 j_3 \dots j_n] &= \int d\alpha(\alpha) \dots d\alpha(n) \chi_n^* [j^{n-2}(\alpha, j_2) j_3 j_4 \dots j_n] \chi_n [j^{n-1}(\alpha, j_1) j_2 j_3 \dots j_n] \\ &= \frac{1}{n-1} \int d\alpha(\alpha) \dots d\alpha(n) \chi_{n-1}^* [j^{n-2}(\alpha, j_2) j_3 j_4 \dots j_n] \chi_n [j^{n-1}(\alpha, j_1) j_2 j_3 \dots j_n]. \end{aligned}$$

Multiplicando (2.8) por  $\chi_n^* [j^{n-1}(\alpha, j_1) j_2 j_3 \dots j_n]$ , integrando, y utilizando los dos resultados anteriores, junto con (A.13), tenemos finalmente

$$\begin{aligned} \chi_n [j^{n-1}(\alpha, j_1) j_2 j_3 \dots j_n] \psi [j^{n-1}(\alpha, j_1) j_2 j_3 \dots j_n] &= \delta_{n, n} \delta_{j_1, j_1} + (n-1) \sum_{\alpha, j_2} (-)^{j_1 + j_2} \sqrt{(2j_1 + 1)(2j_2 + 1)} \begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_1 \\ j & j & j \end{Bmatrix} \\ &\times [j^{n-2}(\alpha, j_2) j_3 j_4 \dots j_n] \psi [j^{n-1}(\alpha, j_1) j_2 j_3 \dots j_n]. \end{aligned} \quad (2.9)$$

La ecuación (2.9) es una fórmula de recurrencia para los C.P.F., por lo que, como los C.P.F. para las configuraciones  $j^3$  y  $j^4$  son reales, serán reales para cualquier configuración. Sin embargo, subsiste el problema de que las funciones  $\chi_n [j^{n-1}(\alpha, j_1) j_2 j_3 \dots j_n]$  con parientes principales distintos no son independientes<sup>3)</sup>. Por esto, es mejor utilizar un esquema que contenga números cuánticos que reemplacen a  $[j, j_1]$ <sup>3)</sup>.

Como veremos más adelante, para realizar cálculos en la base (2.1) es importante también expresar las funciones de onda antisimétricas de manera que dos partículas estén separadas del resto.

Si en el miembro derecho de (2.1) separamos la  $n-1$  partícula en la configuración  $j^{n-1}$  usando los C.P.F., resulta

$$\begin{aligned} \chi_n [j^n \alpha j M] &= \sum_{\alpha, j_1, \alpha_1, j_1} [j^{n-2}(\alpha, j_2) j_3 j_4 \dots j_n] \psi [j^{n-1}(\alpha, j_1) j_2 j_3 \dots j_n] \\ &\times \chi_n [j^{n-2}(\alpha, j_2) j_3 j_4 \dots j_n] \chi_n [j^{n-1}(\alpha, j_1) j_2 j_3 \dots j_n]. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Reacoplamos  $j_{n-1}$  y  $j_n$  a  $J'$  usando (A.22):

$$\begin{aligned} \langle j_2 j_3 (\alpha) j_3 | j_2, j_2' (\alpha') j \rangle &= \langle j_2, j_{n-1} (j_1) \otimes j_n (j_2) j | j_2, \alpha (j_2) j_2, j_2' (\alpha') j \rangle \\ &= (-)^{j_2 + j_2' + j} \sqrt{(2j_2 + 1)(2j_2' + 1)} \begin{Bmatrix} j_2 & j_2' & j \\ j & j & j \end{Bmatrix}. \end{aligned}$$

con lo que

$$\psi(j_1 \alpha J M) = \sum_{j_2, j_3, j_4} [j_1 + (j_2 j_3) j_4] j_1 j_2 j_3 j_4 [j_1 + (j_2 j_3) j_4] j_1 j_2 j_3 j_4 \psi(j_1 + (j_2 j_3) j_4) j_1 j_2 j_3 j_4. \quad (2.10)$$

Todos los términos en esta expresión con distintos valores de  $(j_2 j_3)$  y/o  $J'$  son ortogonales entre sí. También notemos que  $\psi(j_1 \alpha J M)$  es antisimétrica en las coordenadas de todas las partículas; en particular, es antisimétrica en las partículas  $n-1$  y  $n$ ; de manera que los únicos valores permitidos de  $J'$  en (2.10) son los pares.

Podemos entonces definir unos coeficientes de parentesco fraccional que permiten construir una función completamente antisimétrica como combinación lineal de funciones en las que las dos últimas partículas están separadas del resto y acopladas entre sí:

$$\psi(j_1 \alpha J M) = \sum_{j_2, j_3} [j_1 + (j_2 j_3) j_4] j_1 j_2 j_3 j_4 \psi(j_1 + (j_2 j_3) j_4) j_1 j_2 j_3 j_4. \quad (2.11)$$

habiendo definido los C.P.F. para pasar de la configuración  $j^n$  a la  $j^{n-2}$  como

$$[j_1 + (j_2 j_3) j_4] j_1 j_2 j_3 j_4 \psi(j_1 + (j_2 j_3) j_4) j_1 j_2 j_3 j_4 = \sum_{j_2, j_3} (-)^{j_1 + j_2 + j_3} \sqrt{(2j_1 + 1)(2j_2 + 1)} \left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_1 & j_2 & j_3 \end{matrix} \right\} \times [j_1 + (j_2 j_3) j_4] j_1 j_2 j_3 j_4 \psi(j_1 + (j_2 j_3) j_4) j_1 j_2 j_3 j_4. \quad (2.12)$$

### SECCION 3. EVALUACION DE ELEMENTOS DE MATRIZ DE LOS OPERADORES DE UNO Y DOS CUERPOS.

Como vimos en la sección anterior, el método de parentesco fraccional sirve para describir una configuración antisimétrica de un sistema de partículas idénticas ligadas a un potencial central. Para hacerlo, se considera a una o dos partículas en la configuración separadas del resto; el requisito de antisimetría se satisface dejando sin especificar los números cuánticos pertenecientes a la combinación de las partículas que no han sido privilegiadas y acoplando el momento angular del sistema de una o dos partículas que ha sido separado, a alguna combinación lineal particular de todos los estados permisibles de las partículas restantes. Los C.P.F. determinan esta combinación lineal pa-



ra alguna configuración particular. Este método es de gran utilidad porque, como veremos en esta sección, permite expresar directamente elementos de matriz de uno y dos cuerpos en una configuración  $j^n$  como combinaciones lineales de elementos de matriz en configuraciones de una y dos partículas, respectivamente.

Calculemos los elementos de matriz para operadores de un cuerpo  $\sum_{i=1}^n f_i$ . Debido a la simetría de  $\sum_{i=1}^n f_i$ ,

$$\langle j^{\alpha} \alpha J M | \sum_{i=1}^n f_i | j^{\alpha'} \alpha' J' M' \rangle = n \langle j^{\alpha} \alpha J M | f_n | j^{\alpha'} \alpha' J' M' \rangle, \quad (3.1)$$

donde hemos elegido  $f_n$  para utilizar (2.1); haciéndolo resulta

$$\langle j^{\alpha} \alpha J M | \sum_{i=1}^n f_i | j^{\alpha'} \alpha' J' M' \rangle = \sum_{\alpha_1 J_1, \alpha_1' J_1'} n [j^{\alpha_1}(\alpha, J_1) j J] [j^{\alpha'} \alpha' J']^* \times [j^{\alpha_1}(\alpha_1' J_1') j J] \langle j^{\alpha_1} \alpha_1 J_1 M_1 | f_n | j^{\alpha_1'} \alpha_1' J_1' M_1' \rangle. \quad (3.2)$$

Como las funciones de onda de  $n-1$  partículas con diferentes valores de  $(\alpha, J_1)$  y  $(\alpha_1' J_1')$  son ortogonales, los elementos de matriz en la ecuación anterior se anulan a menos que  $\alpha_1 = \alpha_1'$  y  $J_1 = J_1'$ . Si  $f_n$  es una componente de un operador tensorial  $f_{\alpha}^{(k)}(n)$ , podemos usar (A.58) para obtener

$$\langle j^{\alpha} \alpha J || \sum_{i=1}^n f_{\alpha}^{(k)}(i) || j^{\alpha'} \alpha' J' \rangle = \sum_{\alpha_1 J_1} n \langle j || f_{\alpha}^{(k)} || j \rangle (-)^{j_1+J_1+k} \sqrt{(2j_1+1)(2J_1+1)} \times [j^{\alpha_1}(\alpha, J_1) j J] [j^{\alpha'} \alpha' J']^* \left\{ \begin{matrix} j & j & j_1 \\ j & J & J_1 \\ & & k \end{matrix} \right\}. \quad (3.3)$$

Esta ecuación es la expresión de elementos de matriz de operadores de un cuerpo en la configuración  $j^n$  en términos de elementos de matriz de una partícula. Podemos hacer otra simplificación si el operador de un cuerpo es un escalar,  $k=0$ ; poniendo el valor del coeficiente de Racah se tiene

$$\langle j^{\alpha} \alpha J || \sum_{i=1}^n f_{\alpha}^{(0)} || j^{\alpha'} \alpha' J' \rangle = n \sqrt{\frac{2J+1}{2J'+1}} \langle j || f_{\alpha}^{(0)} || j \rangle \delta_{\alpha \alpha'} \delta_{J J'}. \quad (3.4)$$

Los elementos de matriz para operadores de dos cuerpos  $\sum_{i>j=1}^n g_{ik}$  se pueden calcular ahora usando directamente la expansión (2.12). Supongamos que  $g_{ik}$  es un operador escalar, de modo que los únicos elementos de matriz que no se anulan son aquéllos con  $J=J'$  y  $M=M'$ . También, a causa de la simetría de  $g_{ik}$ , únicamente tenemos que evaluar la contribución de  $g_{n-1, n}$  y multiplicarla por  $\frac{1}{2}n(n-1)$ , obteniendo

$$\langle j^{\alpha} \alpha J M | \sum_{i>j=1}^n g_{ik} | j^{\alpha'} \alpha' J' M' \rangle = \frac{n(n-1)}{2} \sum_{\alpha_1 J_1, \alpha_1' J_1'} [j^{\alpha_1}(\alpha, J_1) j J] [j^{\alpha'} \alpha' J']^* \times [j^{\alpha_1}(\alpha_1' J_1') j J] \langle j^{\alpha_1} \alpha_1 J_1 M_1 | g_{n-1, n} | j^{\alpha_1'} \alpha_1' J_1' M_1' \rangle. \quad (3.5)$$

Esta ecuación expresa los elementos de matriz en una configuración  $j^1$  en términos de los elementos de matriz en una configuración  $j^2$ , para un operador de dos cuerpos escalar. Para operadores tensoriales arbitrarios, podemos calcular expresiones análogas a (3.5).

#### SECCION 4. ESTADOS ANTISIMÉTRICOS Y EL ACOPLAMIENTO L-S.

Al estudiar configuraciones de  $n$  partículas en la misma órbita ( $n\ell$ ), es decir, configuraciones  $\ell^n$ , puede ser necesario construir funciones de onda antisimétricas de la configuración  $\ell^n$  a partir de combinaciones lineales de funciones obtenidas acoplando una partícula  $\ell$  a un estado completamente antisimétrico de la configuración  $\ell^{n-1}$ . Esto puede suceder cuando, por ejemplo, tenemos que calcular elementos de matriz para operadores de uno y dos cuerpos en dichas configuraciones. Sin embargo, en este caso cada partícula está caracterizada por dos momentos angulares independientes,  $\ell$  y  $s$ . Por esta razón, los estados antisimétricos de la configuración  $\ell^{n-1}$  están caracterizados por valores definidos de los momentos angulares orbital y de espín de las  $n-1$  partículas,  $L_{11}$  y  $S_{11}$ ; los vectores  $L_{11}$  y  $S_{11}$  están acoplados para formar un  $J_{11}$  total. Pero cuando agregamos la  $n$ -ésima partícula, tenemos que acoplar  $L_{11}$  a  $\ell_n$  para formar  $L_{12}$ ,  $S_{11}$  a  $s_n$  para formar  $S_{12}$ , y sólo entonces, acoplar  $L_{12}$  a  $S_{12}$  a la  $J$  total. Esto significa que para los estados de la configuración  $\ell^{n-1}$  tenemos que usar el esquema de acoplamiento en el que  $L_{11} S_{11} M_L M_S$  están bien definidos, en vez de aquél en el que  $L_{11} S_{11} J_{11} M_J$  son buenos números cuánticos; los estados de la configuración  $\ell^n$  estarán caracterizados por  $L S M_L M_S$ . Debido a que es muy sencillo pasar del esquema  $L S M_L M_S$  al esquema  $L S J M_J$ , vamos a restringirnos a funciones de onda caracterizadas por los valores  $\alpha L S M_L M_S$ , siendo  $\alpha$  un número cuántico adicional necesario para definir completamente cada estado.

La siguiente expresión, análoga a (2.1), define los coefi-

cientes de parentesco fraccional en el acoplamiento L-S para la expansión de una función de onda completamente antisimétrica de n partículas en términos de estados antisimétricos en las primeras n-1:

$$\psi [L^n (S_1)^{n-1} LS] \equiv \sum_{M_L, M_S} [L^n (S_1)^{n-1} (L_1 S_1) \rho_1 LS] \rho_2 [L^n (S_1)^{n-1} LS] + \psi [L^n (S_1)^{n-1} (L_1 S_1) \rho_1 (L_1 S_1) LS] \quad (4.1)$$

En esta expresión hemos eliminado los números cuánticos magnéticos  $M_L$  y  $M_S$  (o, en el esquema alternativo,  $J$  y  $M_J$ . Un cálculo directo muestra que en ambos esquemas, los C.P.F. son los mismos); también hemos incluido los números cuánticos adicionales  $\lambda$  y  $\kappa$  necesarios para distinguir entre distintos estados con los mismos valores de  $L$ ,  $S$  y  $L_1$ ,  $S_1$ . Como en el acoplamiento j-j, los C.P.F. definidos en (4.1) están normalizados a la unidad:

$$\sum_{M_L, M_S} [L^n (S_1)^{n-1} (L_1 S_1) \rho_1 LS] \rho_2 [L^n (S_1)^{n-1} LS]^* [L^n (S_1)^{n-1} (L_1 S_1) \rho_1 LS] \rho_3 [L^n (S_1)^{n-1} LS] = \delta_{\lambda, \lambda'} \delta_{\kappa, \kappa'} \quad (4.2)$$

De ahora en adelante, suprimiremos todas las indicaciones referentes al espín que no sean necesarias.

Los C.P.F. pueden ser calculados acoplando la partícula n al pariente principal en la configuración  $L^{n-1}$  y antisimetrizando. En el caso de tres partículas, el estado que se debe antisimetrizar es

$$\begin{aligned} & \psi [P_1 S_1, P_2 S_2 (L_2 S_2) P_3 S_3 LS] \\ &= \sum_{M_1, M_2, M_3, M_S} \langle L_2 M_2, P_3 m_3 | L M_L \rangle \langle S_2 M_2, S_3 m_3 | S M_S \rangle \\ & \quad \times \Phi_{11} (P_1^2 S_1^2 L_1 S_1) \Phi_{13} (P_3 m_3) \chi_3 (S_3 m_3) \end{aligned} \quad (4.3)$$

(Cf. ec. (2.4) del capítulo anterior). La expresión para

$$\psi_{123} [L^2 [L_1 S_1] LS]$$

que se obtiene es semejante a la que se obtuvo en la sección 1 para el acoplamiento j-j. Como en dicho caso, después de la antisimetrización reestablecemos el mismo orden de acoplamiento mediante una transformación que cambie el orden de éste; esto es, por ejemplo,

$$\begin{aligned} \psi [P_1 P_2 (L_1 S_1) P_3 LS] &= \sum_{L_1 S_1} \langle P_1 P_2 (L_1 S_1) P_3 LS | P_1 P_2 (L_1 S_1) P_3 LS \rangle \\ & \quad \times \psi [P_1 P_2 (L_1 S_1) P_3 LS]. \end{aligned} \quad (4.4)$$

donde debemos notar que la transformación que cambia el orden de

acoplamiento se efectúa sobre dos conjuntos independientes de momentos angulares; el de los orbitales y los de espín. De acuerdo que, usando (A.13) se tiene que

$$\begin{aligned} &\langle p_1 p_2 (L_1 S_1) p_1 LS | p_1 p_2 (L_1 S_1) p_2 LS \rangle \\ &= \langle p^2(L_1) p_L | p^2(L_1) p_L \rangle \langle (2S_1+1) S_1 (L_1) S_1 \rangle \\ &= (-1)^{2L_1+1+2S_1+1} \sqrt{(2L_1+1)(2L_1)(2S_1+1)(2S_1+1)} \left\{ \begin{matrix} p & p & L_1 \\ L & p & L_1 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} p & p & L_1 \\ L & p & L_1 \end{matrix} \right\} \end{aligned} \quad (4.6)$$

Introduciendo este resultado en la expresión para obtenemos

$$N \Psi[p^3(L_1 S_1) LS] = \sum_{L_1 S_1, p_1 p_2} [S_{L_1 S_1} + 2 \sqrt{(2L_1+1)(2L_1)(2S_1+1)(2S_1+1)} \left\{ \begin{matrix} p & p & L_1 \\ L & p & L_1 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} p & p & L_1 \\ L & p & L_1 \end{matrix} \right\}] \Psi[p^2(L_1 S_1) p_2 LS] \quad (4.6)$$

donde se ha introducido el factor de normalización N de manera que la función  $\Psi[p^3(L_1 S_1) LS]$  quede normalizada a la unidad. Considerando la antisimetrización como una operación de proyección (Cf. ec. (2.5)), calculamos fácilmente este factor:

$$\begin{aligned} 1 &= \int |\Psi[p^3(L_1 S_1) LS]|^2 = \int \Psi^* [p^3(L_1 S_1) LS] \left\{ \frac{1}{N} \Psi[p^2(L_1 S_1) p_2 LS] \right\} \\ &= \frac{1}{N} \int \left\{ \Psi^* [p^2(L_1 S_1) LS] \right\}^* \Psi[p^2(L_1 S_1) p_2 LS] \\ &= \frac{2}{N} \int \Psi^* [p^2(L_1 S_1) LS] \Psi[p^2(L_1 S_1) p_2 LS] \\ &= \frac{2}{N^2} [1 + 2(2L_1+1)(2S_1+1) \left\{ \begin{matrix} p & p & L_1 \\ L & p & L_1 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} p & p & L_1 \\ L & p & L_1 \end{matrix} \right\}]. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la expresión de los C.P.F. en el acoplamiento L-S para pasar de la configuración  $p^2$  a la  $p^3$  es

$$[p^2(L_1 S_1) p_1 S_1] \{ p^2(L_2 S_2) LS \} = \frac{S_{L_1 S_1} S_{L_2 S_2} + 2 \sqrt{(2L_1+1)(2L_1)(2S_1+1)(2S_1+1)} \left\{ \begin{matrix} p & p & L_1 \\ L & p & L_1 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} p & p & L_1 \\ L & p & L_1 \end{matrix} \right\}}{\sqrt{3 + 6(2L_1+1)(2S_1+1)} \left\{ \begin{matrix} p & p & L_1 \\ L & p & L_1 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} p & p & L_1 \\ L & p & L_1 \end{matrix} \right\}^{n-1}} \quad (4.7)$$

Para calcular los C.P.F. para ir de la configuración  $p^{n-1}$  a la  $p^n$ , vamos a utilizar un método alternativo al que se usó en la sección 2<sup>a</sup>. Utilizando (4.1) dos veces, tenemos en este caso

$$\begin{aligned} \Psi[p^n a LS] &= \sum_{a_1 L_1 S_1} \Psi[p^{n-1}(a_1 L_1 S_1) p_n LS] [p^{n-1}(a_1 L_1 S_1) p_1 LS] \Psi[a LS] \\ &= \sum_{\substack{a_1 L_1 S_1 \\ a_2 L_2 S_2}} \Psi[p^{n-2}(a_1 L_1 S_1) p_2 (L_2 S_2) p_n LS] [p^{n-2}(a_1 L_1 S_1) p_1 LS] \Psi[p^{n-1}(a_1 L_1 S_1) p_2 LS] \Psi[a LS] \end{aligned} \quad (4.8)$$

Utilizando ahora (A.13) para cambiar el orden de acoplamiento en esta expresión, es decir, sustituyendo

$$\Psi[p^{n-2}(L_1 S_1) p_2 (L_2 S_2) p_1 LS] = \sum_{L_2 S_2} \langle L_1 S_1, p_1 (L_2 S_2), LS | (L_1 S_1) p_2 (L_2 S_2) p_1 LS \rangle \times \Psi[p^{n-2}(L_1 S_1) p_2 (L_2 S_2) p_1 LS]$$

en (4.8) resulta

$$\Psi[\alpha LS] = \sum_{\substack{\alpha_1 L_1 S_1 \\ \alpha_2 L_2 S_2}}^{L_3, S_3} [e^{i\alpha_1(\alpha, L_1, S_1)} e^{i\alpha_2(\alpha, L_2, S_2)}] [e^{i\alpha(\alpha, L, S)} e^{i\alpha(\alpha, L, S)}] \Psi[e^{i\alpha(\alpha, L, S)}] \quad (4.9)$$

Si queremos que (4.9) sea un estado antisimétrico, los coeficientes de la función  $\Psi[e^{i\alpha(\alpha, L_1, S_1)}, e^{i\alpha(\alpha, L_2, S_2)}, e^{i\alpha(\alpha, L, S)}]$  deben anularse para cada valor prohibido de  $L_3$  y  $S_3$  (cf. ec. (2.5) del capítulo anterior). Por lo tanto, los C.P.F. deben satisfacer el sistema de ecuaciones

$$\sum_{\alpha_1 L_1 S_1} \langle L_1 S_1, \alpha_1(L_1 S_1), LS | (L_1 S_1) e^{i\alpha(\alpha, L_1 S_1)} e^{i\alpha(\alpha, L, S)} \rangle [e^{i\alpha_1(\alpha, L_1, S_1)} e^{i\alpha(\alpha, L, S)}] \times [e^{i\alpha(\alpha, L, S)}] = 0, \text{ para } L_3 + S_3 \text{ impar.} \quad (4.10)$$

Esta ecuación puede ser usada para obtener los C.P.F. en la configuración  $q^n$  una vez que conocemos los C.P.F. en la configuración  $q^{n-1}$ .

Los elementos de matriz en la configuración  $q^n$  para operadores de un cuerpo pueden expresarse en forma sencilla usando C.P.F. La expresión análoga a (3.2) es, en este caso,

$$\begin{aligned} &\langle \alpha^n \alpha LS M_L M_S | \sum_{i=1}^n f_i | e^{i\alpha(\alpha, L, S)} e^{i\alpha(\alpha, L, S)} \rangle \\ &= n \sum_{\alpha_1 L_1 S_1} [e^{i\alpha_1(\alpha, L_1, S_1)} e^{i\alpha(\alpha, L, S)}]^* [e^{i\alpha(\alpha, L, S)} e^{i\alpha(\alpha, L, S)}] \\ &\quad \times \langle (L_1 S_1) e_n L S M_L M_S | f_n | (L_1 S_1) e_n L S M_L M_S \rangle. \end{aligned} \quad (4.11)$$

La ecuación anterior puede simplificarse si  $f_n$  es el producto de una componente de un tensor irreducible de orden  $k_1$  que actúa sobre las coordenadas espaciales de la  $n$ -ésima partícula y una componente de un tensor de orden  $k_2$  que opera sobre las coordenadas de espín de la misma partícula; denotamos tal tensor como  $f_{\alpha_1 \alpha_2}^{(k_1, k_2)}(n)$ . Para esta situación, obtenemos de (4.11) una expresión análoga a (3.3):

$$\begin{aligned} &\langle \alpha^n \alpha LS || \sum_{i=1}^n f_i^{(k_1, k_2)} || e^{i\alpha(\alpha, L, S)} \rangle \\ &= n \sqrt{(2L+1)(2L'+1)(2S+1)(2S'+1)} \langle \frac{1}{2} || f_{\frac{1}{2}}^{(k_1, k_2)} || \frac{1}{2} \rangle \\ &\quad \times \sum_{\alpha_1 L_1 S_1} [e^{i\alpha_1(\alpha, L_1, S_1)} e^{i\alpha(\alpha, L, S)}]^* [e^{i\alpha(\alpha, L, S)} e^{i\alpha(\alpha, L, S)}] \\ &\quad \times (-1)^{L_1 + S_1 + k_1 + k_2} \begin{Bmatrix} L & L' & L \\ L_1 & L_1 & L_1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} S & S' & S \\ S_1 & S_1 & S_1 \end{Bmatrix}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

En general, un tensor doble como el definido aquí no necesita ser irreducible con respecto a rotaciones simultáneas en las coordenadas espaciales y de espín; la expresión para el elemen-

to de matriz reducido de  $\sum_{k_1, k_2} f^{(k_1, k_2)}(i)$  (i) en estados con momentos angulares totales J bien definidos no puede ser tan simple como en (4.12). Sin embargo, si f(i) es una componente

$$f_{\kappa}^{(k_1, k_2)} = \sum_{k_1, k_2} \langle k_1, k_1; k_2, k_2 | \kappa, \kappa \rangle f_{\kappa, \kappa}^{(k_1, k_2)}$$

de un tensor irreducible de orden k con respecto a la J total, de acuerdo a (A.51) tenemos

$$\langle \alpha^N \alpha_L S J || \sum_{i=1}^n f_{\kappa}^{(k_1, k_2)}(i) || \alpha^N \alpha'_L S' J' \rangle = \sqrt{(2J+1)(2J'+1)(2k+1)} \begin{Bmatrix} S & L & J \\ \alpha & \alpha' & \kappa \end{Bmatrix} \langle \alpha^N \alpha_L S || \sum_{i=1}^n f_{\kappa}^{(k_1, k_2)} || \alpha^N \alpha'_L S' \rangle. \quad (4.)$$

Consideramos ahora operadores de dos cuerpos  $\sum_{\alpha, \alpha'} g_{\alpha\alpha'}$ , donde suponemos que  $g_{\alpha\alpha'}$  es un operador escalar respecto a la J total.

Los elementos de matriz entre dos estados (4.1) son

$$\langle \alpha^N \alpha_L S | \sum_{\alpha, \alpha'} g_{\alpha\alpha'} | \alpha^N \alpha'_L S' \rangle = \frac{n!}{n! 2^{n(n-1)/2}} \sum_{\alpha, \alpha'} [ \alpha^N (\alpha, L, S) \alpha_L S ] \langle \alpha^N \alpha_L S | \sum_{\alpha, \alpha'} g_{\alpha\alpha'} | \alpha^N \alpha'_L S' \rangle. \quad (4.)$$

Este resultado se obtuvo de la siguiente forma: como  $\sum_{\alpha, \alpha'} g_{\alpha\alpha'}$  es simétrica, los  $\frac{1}{2} n(n-1)$  términos  $\sum_{\alpha, \alpha'} g_{\alpha\alpha'}$  contribuyen en la misma cantidad a (4.14); eligiendo las  $g_{\alpha\alpha'}$  que no operan en las coordenadas de la n-ésima partícula, se integra sobre las coordenadas de esa partícula; de esta forma se reemplazan los  $\frac{1}{2} n(n-1)$  términos de  $\sum_{\alpha, \alpha'} g_{\alpha\alpha'}$  por los  $\frac{1}{2} (n-1)(n-2)$  términos de  $\sum_{\alpha, \alpha'} g_{\alpha\alpha'}$  multiplicando esta última por  $n/(n-2)$ . Aplicando sucesivamente la ecuación (4.14), obtenemos los elementos de matriz de la interacción en la configuración  $\zeta^n$  en términos de los elementos de matriz de la interacción en la configuración  $\zeta^2$ .

Si además  $g_{\alpha\alpha'}$  es un escalar respecto a  $L_J$  y  $S_J$ , los elementos de matriz de  $\sum_{\alpha, \alpha'} g_{\alpha\alpha'}$  son diagonales en L y S, e independientes de  $M_L$  y  $M_S$ , o de J y  $M_J$ .

En general,  $g_{\alpha\alpha'}$  es la suma de productos de dos tensores dobles  $f_{\alpha\alpha'}^{(k_1, k_2)}(p)$  y  $f_{\alpha\alpha'}^{(k_1, k_2)}(m)$ , cada uno operando sobre las coordenadas de las partículas p y m. Ahora, separamos la dependencia espacial y de espín de estos tensores dobles:

$$f_{\alpha, \alpha'}^{(k_1, k_2)} = u_{\alpha, \alpha'}^{(k_1)} u_{\alpha, \alpha'}^{(k_2)}$$

Aquí,  $u_{\alpha, \alpha'}^{(k_1)}$  es un operador tensorial irreducible de orden  $k_1$  que opera sobre las coordenadas espaciales y  $u_{\alpha, \alpha'}^{(k_2)}$ , un tensor 1-

irreducible de orden  $k_2$  que opera sobre los acoplamientos de espín.

Puesto que  $\lambda_{em}$  es un escalar respecto a d. utilizamos transformaciones en el orden de acoplamiento para escribir  $\lambda_{em}$  en la

$$\text{forma } \lambda_{em} = \sum_k g_{em}^{(k)}, \text{ donde}$$

$$g_{em}^{(k)} = \sum_{\mu_1, \mu_2, \mu_3} \lambda_{\mu_1, \mu_2, \mu_3}^{(k)} [\underline{u}^{(\mu_1)}(\mathbf{r}_1) \underline{u}^{(\mu_2)}(\mathbf{r}_2)] \cdot [\underline{u}^{(\mu_3)}(\mathbf{r}_1) \underline{u}^{(\mu_4)}(\mathbf{r}_2)]. \quad (4.15)$$

Los tres valores posibles de  $k$  son 0, 1 y 2, correspondientes a interacciones escalares, vectoriales y tensoriales. En el caso  $k=0$ , (4.13) se reduce a la expresión<sup>5)</sup>

$$\langle \mathcal{P}^n \alpha LS | \sum_{em} g_{em}^{(k)} | \mathcal{P}^n \alpha' L'S'S' \rangle$$

$$= (-)^{L+S-3} \left\{ \begin{matrix} S & L & J \\ L' & S' & K \end{matrix} \right\} \langle \mathcal{P}^n \alpha LS || \sum_{em} \lambda_{em}^{(k)} || \mathcal{P}^n \alpha' L'S'S' \rangle. \quad (4.16)$$

El elemento de matriz reducido que aparece aquí, puede calcularse de (4.14) utilizando (A.58):

$$\langle \mathcal{P}^n \alpha LS || \sum_{em} g_{em}^{(k)} || \mathcal{P}^n \alpha' L'S'S' \rangle$$

$$= \frac{n!}{n_1!} \sqrt{(2L+1)(2L'+1)(2S+1)} \sum_{\mu_1, \mu_2, \mu_3} [C^{\mu_1 \mu_2 \mu_3}(\alpha LS) \beta \gamma \alpha' L'S'S'] [C^{\mu_1 \mu_2 \mu_3}(\alpha' L'S'S') \beta \gamma \alpha LS]$$

$$\times (-)^{L'+S'+1} \left\{ \begin{matrix} L & L' & k \\ L & L' & k \end{matrix} \right\} (-)^{S'+J+S} \left\{ \begin{matrix} S & L & J \\ S' & L' & K \end{matrix} \right\} \langle \mathcal{P}^n \alpha LS || \sum_{em} \lambda_{em}^{(k)} || \mathcal{P}^n \alpha' L'S'S' \rangle. \quad (4.17)$$

Como en el acoplamiento  $j-j$ , podemos introducir C.P.F.

$$q^n \rightarrow q^{n-2};$$

$$\Psi[\mathcal{P}^n \alpha LS] = \sum_{\mu_1, \mu_2, \mu_3} [C^{\mu_1 \mu_2 \mu_3}(\alpha LS), \alpha(\alpha LS), LS] \Psi[\mathcal{P}^n \alpha(\alpha LS), \alpha(\alpha LS), LS] \quad (4.18)$$

donde los coeficientes que aparecen en esta expresión están dados por<sup>6)</sup>

$$[C^{\mu_1 \mu_2 \mu_3}(\alpha LS), \alpha(\alpha LS), LS] \Psi[\mathcal{P}^n \alpha LS]$$

$$= \sum_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3} \langle \alpha LS, \alpha(\alpha LS), LS | \alpha LS \rangle [C^{\mu_1 \mu_2 \mu_3}(\alpha LS), \alpha_1(\alpha_1 LS), \alpha_2(\alpha_2 LS)] \Psi[\mathcal{P}^n \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3]$$

$$\cdot [C^{\mu_1 \mu_2 \mu_3}(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3), \alpha_3(\alpha_3 LS), LS] \Psi[\mathcal{P}^n \alpha_3 LS]. \quad (4.19)$$

Análogamente, los elementos de matriz para un operador de dos cuerpos pueden expresarse como

$$\langle \mathcal{P}^n \alpha LS | \sum_{em} g_{em} | \mathcal{P}^n \alpha' L'S'S' \rangle = \frac{n(n-1)}{2} \sum_{\mu_1, \mu_2, \mu_3} [C^{\mu_1 \mu_2 \mu_3}(\alpha LS), \alpha(\alpha LS), LS] \Psi[\mathcal{P}^n \alpha LS]$$

$$\cdot [C^{\mu_1 \mu_2 \mu_3}(\alpha' L'S'S'), \alpha'(\alpha' L'S'S'), L'S'S'] \Psi[\mathcal{P}^n \alpha' L'S'S']. \quad (4.20)$$

Más desarrollos para los C.P.F. en el esquema de acoplamiento  $L-S$  pueden encontrarse en la referencia<sup>6)</sup>.

## SECCION 5. ESQUEMA DE ANTIGÜEDAD (PARES DE PARTICULAS ACOPLADAS A $J = 0$ ).

Definición 5.1.- Decimos que una interacción de dos cuerpos  $V_{em}$

tiene la propiedad de apareamiento si:

a) en la configuración  $j^n$ , con  $n$  par, existe sólo un estado con  $J = 0$ , entonces

$$\langle j^n J=0 | \sum_{lcm} V_{lm} | j^n J=0 \rangle = \sum_{lcm} \langle j^n J=0 | V_{lm} | j^n J=0 \rangle;$$

b) en la configuración  $j^n$ , con  $n$  impar, existe un solo estado con  $J = j$ , entonces

$$\langle j^n J=j | \sum_{lcm} V_{lm} | j^n J=j \rangle = \frac{n+1}{2} \langle j^n J=0 | V_{lj} | j^n J=0 \rangle.$$

Examinemos un poco esta definición. Si existe sólo un estado  $| j^n J=0 \rangle$ , con  $n$  par, necesariamente debe ser el que se obtiene acoplando  $\frac{n}{2}$  pares de partículas a  $J=0$  cada uno; análogamente, si sólo existe un estado  $| j^n J=j \rangle$ , con  $n$  impar, no puede ser otro que el obtenido acoplando  $\frac{n-1}{2}$  pares a  $J=0$ . Luego, podemos pensar que las interacciones que satisfacen la Def. 5.1 cuentan de alguna manera el número de pares de partículas acoplados a  $J=0$ .

En esta sección vamos a distinguir estados en la configuración  $j^n$  con la misma  $J$  mediante el número de pares acoplados a  $J=0$  en cada uno de ellos; más precisamente, se propone un esquema de clasificación de los estados en la cual una interacción con la propiedad de apareamiento es diagonal. En la sección 7 demostraremos que toda interacción diagonal en el esquema propuesto puede expresarse como la suma de una interacción escalar y una interacción tensorial de orden impar. Esta es la razón de que, por el momento, nos dediquemos a estudiar algunas propiedades de las interacciones tensoriales impares.

Consideremos una interacción de dos cuerpos  $\mathcal{J}_{em}$  que es la suma de productos escalares de dos tensores irreducibles que operan sobre las coordenadas de las partículas  $l$  y  $m$ ; es decir,

$$\mathcal{J}_{em}^{(k)} = f_m^{(k)}(r) \cdot f_l^{(k)}(r),$$

donde  $f_m^{(k)}$  es un operador tensorial de orden  $k$ . Al evaluar los elementos de matriz de  $\sum_{lcm} \mathcal{J}_{em}$  dentro de la configuración  $j^n$ , se tienen que evaluar elementos de matriz de todos los  $f_m^{(k)}(r)$  entre estados de partícula independiente con la misma  $j$ ; uno de estos elementos de matriz es



$$\langle j^M \alpha JM | f_{\alpha}^{(k)}(\varphi) f_{\alpha}^{(k)}(m) | j^M \alpha JM \rangle \\ = \sum_{\alpha' j' M'} \langle j^M \alpha JM | f_{\alpha}^{(k)}(\varphi) | j' M' \alpha' JM' \rangle \langle j' M' \alpha' JM' | f_{\alpha}^{(k)}(m) | j^M \alpha JM \rangle.$$

En esta expresión, el operador  $f_{\alpha}^{(k)}(\varphi)$  podría cambiar de órbita a la partícula  $\alpha$ , llevándonos a una configuración distinta; sin embargo, el operador  $f_{\alpha}^{(k)}(m)$ , operando sobre otra partícula, no podría conectar esta configuración distinta con la original; por tanto, la configuración de los estados intermedios es la misma que la de los estados inicial y final; de aquí que podamos reemplazar  $f_{\alpha}^{(k)}$  por  $\langle j || f^{(k)} || j \rangle u_{\alpha}^{(k)}$ , donde  $u_{\alpha}^{(k)}$  es el operador tensorial unidad definido por

$$\langle j \alpha || u_{\alpha}^{(k)} || j' \alpha' \rangle = \delta_{j j'} \delta_{\alpha \alpha'}.$$

Usando este artificio podemos expresar  $\sum_{\alpha m} g_{\alpha m}^{(k)}$  dentro de la configuración  $j^n$  como

$$\sum_{\alpha m} g_{\alpha m}^{(k)} = \sum_{\alpha m} f_{\alpha}^{(k)}(\varphi) \cdot f_{\alpha}^{(k)}(m) = \langle j || f^{(k)} || j \rangle^2 \sum_{\alpha m} u_{\alpha}^{(k)}(\varphi) \cdot u_{\alpha}^{(k)}(m) \\ = \langle j || f^{(k)} || j \rangle^2 \frac{1}{2} \left\{ \sum_{\alpha m} u_{\alpha}^{(k)}(\varphi) \cdot \sum_{\alpha m} u_{\alpha}^{(k)}(m) - \sum_{\alpha m} u_{\alpha}^{(k)}(\varphi) \cdot u_{\alpha}^{(k)}(m) \right\}.$$

Definiendo  $U_{\alpha}^{(k)} \equiv \sum_{\alpha m} u_{\alpha}^{(k)}(\varphi)$  y utilizando (A.40), obtenemos

$$\sum_{\alpha m} g_{\alpha m}^{(k)} = \langle j || f^{(k)} || j \rangle^2 \frac{1}{2} \left\{ U_{\alpha}^{(k)} \cdot U_{\alpha}^{(k)} - \frac{n}{2j+1} \right\}. \quad (5.1)$$

Ya que si  $U_{\alpha}^{(k)}$  es diagonal en el esquema de clasificación propuesto,  $U_{\alpha}^{(k)} \cdot U_{\alpha}^{(k)}$  también lo es (para valores impares de  $k$ ), consideraremos en lo sucesivo operadores de partícula independiente  $U_{\alpha}^{(k)}$ , con  $k$  impar.

Proposición 5.1.- El operador tensorial impar  $U_{\alpha}^{(k)} \equiv u_{\alpha}^{(k)}(1) + u_{\alpha}^{(k)}(2)$ , satisface

$$\langle j^M \alpha JM | U_{\alpha}^{(k)} | j^M \alpha JM \rangle = 0, \quad k \text{ entero impar.}$$

Demostración:- De acuerdo al teorema de Wigner-Eckart, Ec. (A.40), los elementos de matriz en la expresión anterior se anularán a menos que  $J=k$  y  $M=\alpha$ . Sin embargo, como tratamos con partículas idénticas, el principio de exclusión sólo permite funciones de onda para valores pares de  $J$ , por lo que  $J \neq k$  Q.E.D.

Esta proposición es aún más general y se cumple aún si las dos partículas en la órbita  $j$  no son idénticas. Esto sucede porque un estado de la configuración  $j^2$  con un valor impar de  $J$  es simétrico; lo mismo sucede con el tensor  $U_{\alpha}^{(k)}$ . Por otra parte,

el estado  $j^2$  con  $J=0$  es antisimétrico. Por lo tanto, también en este caso se satisface la Prop. 5.1.

La Prop. 5.1 nos indica que no existe contribución a  $U_{\dots}^{(k)}$  proveniente de pares acoplados a  $J=0$ .

Consideremos ahora  $\psi[j^2 \alpha JM]$ ; si multiplicamos esta función de onda por la correspondiente a dos partículas adicionales acopladas a  $J=0$ , obtenemos el estado de  $n$  partículas

$$\psi[j_{1,2,\dots,n-2}^{n-2}(\alpha J) j_{n-1,n}^0(0) JM],$$

que tiene el mismo valor de  $J$  pero no es antisimétrico. La antisimetría de este estado la realizamos mediante el operador de antisimetrización

$$A \equiv e^{-\sum_{p=1}^{n-1} (p, n-1) - \sum_{p=1}^{n-2} (p, n) + \sum_{\substack{p < q \\ p, q \neq n-1, n}} (p, n-1)(q, n)}$$

Calculemos ahora los elementos de matriz de  $U_{\dots}^{(k)}$  entre las funciones de onda antisimétricas normalizadas

$$\frac{1}{N_{n-2}} A \psi[j^{n-2}(\alpha J) j_{n-1,n}^0(0) JM]$$

y otra función de onda normalizada  $\psi[j^{\alpha'} \alpha' J' M']$ :

$$\Xi \equiv \int \delta(\alpha_1) \dots \delta(\alpha_n) \left\{ \frac{1}{N_{n-2}} A \psi[j^{n-2}(\alpha J) j_{n-1,n}^0(0) JM] \right\}^* \left\{ \sum_{p=1}^n U_{\dots}^{(k)}(\alpha) \right\} \psi[j^{\alpha'} \alpha' J' M'].$$

Para evaluar esta integral, corremos  $A$  a la otra parte del integrando; aprovechamos en esto que  $U_{\dots}^{(k)}$  es simétrico ante cualquier permutación en las coordenadas de las partículas en tanto que  $\psi[j^{\alpha'} \alpha' J' M']$  es antisimétrico; de manera que

$$\Xi = \frac{1}{N_{n-2}} \binom{n}{2} \int \delta(\alpha_1) \dots \delta(\alpha_n) \psi^* [j^{n-2}(\alpha J) j_{n-1,n}^0(0) JM] \left\{ \sum_{p=1}^n U_{\dots}^{(k)}(\alpha) \right\} \psi [j^{\alpha'} \alpha' J' M'].$$

Desarrollamos  $\psi[j^{\alpha'} \alpha' J' M']$  en términos de C.P.F.  $j^n \rightarrow j^{n-2}$  y, haciendo uso de la Prop. 5.1 (que en este caso afirma  $\alpha =$

$$= \int \delta(\alpha_1) \delta(\alpha_2) \psi^* [j^{n-2}(\alpha J) j_{n-1,n}^0(0) JM] \left\{ U_{\dots}^{(k)}(\alpha_1) U_{\dots}^{(k)}(\alpha_2) \right\} \psi [j^{\alpha'} \alpha' J' M'],$$

obtenemos

$$\Xi = \frac{1}{N_{n-2}} \binom{n}{2} \sum_{\alpha_1, \alpha_2, J_1, J_2} [j^{n-2}(\alpha, J) j_{n-1,n}^0(0) JM] \left\{ \sum_{p=1}^{n-1} U_{\dots}^{(k)}(\alpha) \right\} \psi [j^{\alpha'} \alpha' J' M'] \int \delta(\alpha_1) \dots \delta(\alpha_n) \psi^* [j^{n-2}(\alpha J) j_{n-1,n}^0(0) JM] \times \left\{ \sum_{p=1}^{n-1} U_{\dots}^{(k)}(\alpha) \right\} \psi [j^{n-2}(\alpha, J) j_{n-1,n}^0(0) JM]$$

$$= \frac{1}{N_{n-2}} \binom{n}{2} \sum_{\alpha_1} [j^{n-2}(\alpha, J) j_{n-1,n}^0(0) JM] \left\{ \sum_{p=1}^{n-1} U_{\dots}^{(k)}(\alpha) \right\} \psi [j^{\alpha'} \alpha' J' M'] \int \delta(\alpha_1) \dots \delta(\alpha_n) \psi^* [j^{n-2}(\alpha J) JM] \times \left\{ \sum_{p=1}^{n-1} U_{\dots}^{(k)}(\alpha) \right\} \psi [j^{n-2}(\alpha, J) JM],$$

de manera que el elemento de matriz  $\Xi$  es distinto de cero si existe al menos un C.P.F.  $[j^{n-2}(\alpha, J) j_{n-1,n}^0(0) JM] \psi [j^{\alpha'} \alpha' J' M'] \neq 0$  para alguna  $\alpha$ ; y en este caso, las contribuciones en  $\Xi$  provienen de e-

elementos de matriz de  $U_{\alpha\alpha}^{(k)}$  en la configuración  $j^{n-2}$ .

Especificando las funciones de onda antisimétricas mediante los números cuánticos de los parientes principales, podemos expresar la propiedad especificada en la Prop. 5.1 en la configuración  $j^n$ :

$$\begin{aligned} \langle S^{\nu\alpha} J^{\nu} M^{\nu} | \sum_{\alpha=1}^n U_{\alpha}^{(k)}(r) | j^n [a J, 0] J M \rangle \\ = \frac{1}{N_{\text{max}}} \binom{n}{2} \sum_{\alpha_1} [j^{\nu\alpha_1} (a, J) j^{\nu} (a, J) j^{\nu} (a, J)] \langle S^{\nu\alpha} J^{\nu} M^{\nu} | \sum_{\alpha=1}^{n-2} U_{\alpha}^{(k)}(r) | j^{n-2} J M \rangle. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Si todos los C.P.F. en el miembro derecho de esta igualdad se anulan,  $\psi[j^{\nu\alpha} J^{\nu} M^{\nu}]$  no puede obtenerse del pariente principal  $\psi[j^{n-2} J^{\nu} M^{\nu}]$  agregándole un par acoplado a  $J=0$  y antisimetrizando. Si existe un C.P.F. distinto de cero en (5.2), podemos tratar de repetir la reducción de los elementos de matriz en la configuración  $j^{n-2}$ , y así sucesivamente.

En base a la discusión del párrafo anterior, podemos especificar el esquema en que el operador tensorial impar  $U_{\alpha\alpha}^{(k)}$  es diagonal: para cualquier valor de  $J$ , observamos la configuración  $j^n$  con el valor más bajo de  $n$  en la que aparece sólo un estado con este valor de  $J$ ; en este caso no existen pares acoplados a  $J=0$ , porque de otra manera existiría un estado con el mismo valor de  $J$  en la configuración  $j^{n-2}$ ; sea  $v$  el número de partículas en la configuración con un solo estado  $J$ , entonces,

Def. 5.2.- El estado  $\psi[j^{\nu\alpha} J]$  tiene antigüedad (seniority)  $v$  si

$$[S^{\nu-2} (a, J) j^{\nu} (a, J) j^{\nu\alpha} J] = 0 \text{ para toda } \alpha.$$

Podemos agregar al estado  $\psi[j^{\nu\alpha} J]$  un par de partículas acopladas a  $J=0$  y antisimetrizar, obteniendo así un estado antisimétrico en la configuración  $j^{v+2}$  con el mismo valor de  $J$ ; observamos que este estado tiene el mismo número  $v$  de partículas de las que no se puede extraer un par acoplado a  $J=0$ ; este estado también tendrá antigüedad  $v$ . Agregando más pares acoplados a  $J=0$  y antisimetrizando en cada ocasión, obtenemos los estados con los valores  $J$  y  $v$  en las configuraciones  $j^v$ ,  $j^{v+2}$ ,  $j^{v+4}$ , ... . De esta manera,

Def. 5.3.- El estado  $\psi[j^{\nu\alpha} J]$  tiene antigüedad  $v$  si puede obte-

nerse agregando sucesivamente pares de partículas acoplados a  $J=0$  al pariente principal  $\Psi[j^N \nu \alpha J]$ , especificados en la Def. 5.1 y antisimetrizando cada vez.

El esquema de antigüedad introduce un número cuántico adicional  $\nu$  para la clasificación de los estados; si existen varios estados con el mismo valor de  $J$  en la configuración  $j^n$ , pueden distinguirse mediante sus antigüedades. Sin embargo, puede suceder que en la configuración  $j^v$  existan varios estados con los mismos valores de  $J$  y  $\nu$ ; tendremos que distinguir entre estos estados mediante algún número cuántico adicional  $\alpha$ , y los denotaremos por  $\Psi[j^v \nu \alpha J]$ .

Proposición 5.2.- Cualesquiera dos funciones con antigüedades distintas son ortogonales.

Para demostrar esta proposición debemos probar primero

Lema 5.1.- La función de onda  $\Psi[j^v \nu \alpha J]$  es ortogonal a cada función  $\Psi[j^v \nu' \alpha' J]$  con antigüedad menor.

Demostración:- Por definición, la función de onda  $\Psi[j^v \nu' \alpha' J]$  ( $\nu' < \nu$ ) puede obtenerse a partir de un pariente principal  $\Psi[j^{\nu'-1} (\nu', \alpha', J)]$  antisimetrizando. Entonces,

$$\begin{aligned} \langle j^v \nu \alpha J | j^v \nu' \alpha' J \rangle &= \int d\omega_1 \dots d\omega_{\nu'} \Psi^* [j^v \nu \alpha J] \left\{ \frac{1}{N} \Psi [j^{\nu'-1} (\nu', \alpha', J)] j_{\nu'-1, \nu'}^1(\omega) \right\} \\ &= \frac{1}{N_{\nu'(\nu', \alpha', J)}} \binom{\nu}{\nu'} \int d\omega_1 \dots d\omega_{\nu'} \Psi^* [j^v \nu \alpha J] \Psi [j^{\nu'-1} (\nu', \alpha', J)] j_{\nu'-1, \nu'}^1(\omega) \\ &= \frac{1}{N_{\nu'(\nu', \alpha', J)}} \binom{\nu}{\nu'} [j^{\nu'-1} (\nu', \alpha', J)] j^{\nu'}(\omega) \Psi [j^v \nu \alpha J] \end{aligned}$$

El C.P.F. que aparece en esta igualdad se anula de acuerdo a la Def. 5.2 Q.E.D.

Dem. de la Prop. 5.2:- Vamos a demostrar que cualesquiera dos funciones obtenidas a partir de dos funciones ortogonales en la configuración  $j^n$  agregando un par acoplado a  $J=0$  y antisimetrizando, también son ortogonales. Para esto consideremos la integral

$$\begin{aligned} \eta &\equiv \int d\omega_1 \dots d\omega_{n+2} \left\{ \Psi [j^n (\alpha_1 J)] j_{n, n+1}^1(\omega) \right\}^* \left\{ \Psi [j^n (\alpha_2 J)] j_{n, n+1}^1(\omega) \right\} \\ &= \binom{n+2}{2} \int d\omega_1 \dots d\omega_{n+2} \Psi^* [j^n (\alpha_1 J)] j_{n, n+1}^1(\omega) \left\{ \Psi [j^n (\alpha_2 J)] j_{n, n+1}^1(\omega) \right\}. \end{aligned}$$

La antisimetrización que aparece en esta integral la efectuamos explícitamente:

$$\begin{aligned} & \star \psi [j^n (\alpha_j) j_{n+1, n+2}^2 (\omega) J] + \psi [j^n (\alpha_j) j_{n+1, n+2}^2 (\omega) J] \sum_{\substack{p, q \\ p+q=n+2}} \psi [j^p (\alpha_j) j_{n+1, n+2}^2 (\omega) J] \\ & - \sum_{\substack{p, q \\ p+q=n+2}} \psi [j^p (\alpha_j) j_{n+1, n+2}^2 (\omega) J] + \sum_{\substack{p, q \\ p+q=n+2}} \psi [j^p (\alpha_j) j_{n+1, n+2}^2 (\omega) J]. \end{aligned}$$

Puesto que las partículas n+1 y n+2 están acopladas en la función  $\psi^* [j^n (\alpha_j) j_{n+1, n+2}^2 (\omega) J]$ , es conveniente transformar la expresión anterior de forma que aparezcan funciones  $\psi [j^{n-1} (\alpha_j) j_{n+1, n+2}^2 (\omega) J]$ , en las que estas dos partículas aparezcan en uno de los pares  $j'(0)$  o  $j^2(j')$ . Para hacer esto, aplicamos una permutación que lleve a las partículas n+1 y/o n+2 a los últimos lugares en  $\psi [j^n \alpha_j]$ , y desarrollamos la función resultante usando C.F.F.  $j^{n-1} \rightarrow j^{n-2}$ . De esta manera resulta que

$$\begin{aligned} \psi [j^n (\alpha_j) j_{n+1, n+2}^2 (\omega) J] &= \psi [j^n (\alpha_j) j_{n+1, n+2}^2 (\omega) J] \\ &- \sum_{\substack{p, q \\ p+q=n+2}} (-)^{p+q} \sum_{\substack{p, q \\ p+q=n+2}} [j^{n-1} (\alpha_j) j_{n+1, n+2}^2 (\omega) J] \psi [j^{n-1} (\alpha_j) j_{n+1, n+2}^2 (\omega) J] \\ &+ \sum_{\substack{p, q \\ p+q=n+2}} (-)^{p+q} \sum_{\substack{p, q \\ p+q=n+2}} [j^{n-2} (\alpha_j) j_{n+1, n+2}^2 (\omega) J] \psi [j^{n-2} (\alpha_j) j_{n+1, n+2}^2 (\omega) J]. \end{aligned}$$

donde el índice p que aquí aparece es n si p=n y n-1 si p=n-1. A los términos de la segunda suma les aplicamos un cambio de acoplamiento de  $\psi [j_{p, n+1}^2 (j') j_{n+1, n+2}^2 (\omega) J']$  y  $\psi [j_{p, n+1}^2 (j') j_{n+1, n+2}^2 (\omega) J']$  a  $\psi [j_{p, q}^2 (j'') j_{n+1, n+2}^2 (j''') J']$ ; sólo el término con  $j''=0$  contribuirá a la integral  $\eta$ , de manera que los coeficientes de transformación involucrados están dados por (A.19), (A.22) y (A.25)

$$\begin{aligned} & \langle j_p j_{n+2} (j') j_{n+1} j_n (\omega) J' | j_p j_k (j') j_{n+1} j_{n+2} (\omega) J^2 \rangle \\ &= \langle j_p j_{n+1} (j') j_p j_{n+2} (\omega) J' | j_p j_k (j') j_{n+1} j_{n+2} (\omega) J' \rangle \\ &= (2j'+1) \begin{Bmatrix} j_p & j_{n+1} & j' \\ j_k & j_{n+2} & 0 \\ j' & 0 & j' \end{Bmatrix} = (-)^{j'+j} \sqrt{\frac{2j'+1}{2j+1}} \begin{Bmatrix} j & j' & j' \\ 0 & j & j' \end{Bmatrix} = \frac{1}{2j+1} \quad (5.3) \end{aligned}$$

Después de efectuar esta transformación, podemos integrar  $\eta$  sobre las coordenadas de las partículas n+1 y n+2, obteniendo

$$\begin{aligned} \eta &= \binom{n+2}{2} \int \delta(\omega) \dots \delta(\omega) \psi^* [j^n \alpha_j] \psi [j^n \alpha_j] + \\ &- \frac{2}{2j+1} \sum_{\substack{p, q \\ p+q=n+2}} (-)^{p+q} \sum_{\substack{p, q \\ p+q=n+2}} [j^{n-2} (\alpha_j) j_{n+1, n+2}^2 (\omega) J] \int \delta(\omega) \dots \delta(\omega) \psi^* [j^n \alpha_j] \psi [j^{n-2} (\alpha_j) j_{n+1, n+2}^2 (\omega) J] \\ &+ \sum_{\substack{p, q \\ p+q=n+2}} (-)^{p+q} \sum_{\substack{p, q \\ p+q=n+2}} [j^{n-1} (\alpha_j) j_{n+1, n+2}^2 (\omega) J] \int \delta(\omega) \dots \delta(\omega) \psi^* [j^n \alpha_j] \psi [j^{n-1} (\alpha_j) j_{n+1, n+2}^2 (\omega) J] \end{aligned}$$

Por otra parte, de (2.12) obtenemos que

$$\begin{aligned} (-)^{p+q} \int \delta(\omega) \dots \delta(\omega) \psi [j^n \alpha_j] \psi [j^{n-2} (\alpha_j) j_{n+1, n+2}^2 (\omega) J] &= [j^{n-2} (\alpha_j) j_{n+1, n+2}^2 (\omega) J] \psi [j^n \alpha_j], \\ (-)^{p+q} \sum_{\substack{p, q \\ p+q=n+2}} [j^{n-2} (\alpha_j) j_{n+1, n+2}^2 (\omega) J] \psi [j^{n-2} (\alpha_j) j_{n+1, n+2}^2 (\omega) J] &= \psi [j^n \alpha_j] \end{aligned}$$

y utilizando estas relaciones, obtenemos que para  $\eta$  la expresión

que resulta finalmente es

$$\int \delta(\omega) \dots \delta(\omega_{12}) \left\{ \psi[\mathcal{J}^n(\alpha, \mathcal{J})] \delta_{\alpha, \alpha'}^{\mathcal{J}^n}(\omega, \mathcal{J}) \right\}^* \left\{ \psi[\mathcal{J}^n(\alpha', \mathcal{J})] \delta_{\alpha', \alpha}^{\mathcal{J}^n}(\omega, \mathcal{J}) \right\} \\ = \binom{n}{2} \left\{ \delta_{\alpha, \alpha'} - \frac{2n}{2j+1} \delta_{\alpha, \alpha'} + \binom{n}{2} \sum_{\alpha''} [\mathcal{J}^n(\alpha, \mathcal{J})] \delta_{\alpha, \alpha''}^{\mathcal{J}^n}(\omega, \mathcal{J}) [\mathcal{J}^n(\alpha', \mathcal{J})] \delta_{\alpha', \alpha''}^{\mathcal{J}^n}(\omega, \mathcal{J}) \right\}. \quad (5.)$$

Usamos esta expresión para demostrar la ortogonalidad de estados con distintas antigüedades por el método de inducción. La base de la inducción la tenemos en el Lema 5.1. Ahora suponemos que la proposición se cumple para los parientes principales en la configuración  $j^{n-2}$  y mostraremos que se cumple también para la configuración  $j^n$ , con  $n > v, v'$ . En este caso, los estados caracterizados por  $(v\alpha)$  y  $(v\alpha')$  deben obtenerse agregando pares acoplados a  $J=0$  a los parientes principales en la configuración  $j^{n-2}$ ; de manera que, por ejemplo,

$$\psi[\mathcal{J}^n \alpha \mathcal{J}] = \frac{1}{N_{\alpha \alpha'}} \psi[\mathcal{J}^{n-2}(\alpha, \mathcal{J})] \delta_{\alpha, \alpha'}^{\mathcal{J}^n}(\omega, \mathcal{J}).$$

Si seleccionamos un conjunto completo de estados ortonormales  $\{\psi[\mathcal{J}^{n-2} \alpha, \mathcal{J}]\}_{\alpha}$  en la configuración  $j^{n-2}$ , de manera que  $\psi[\mathcal{J}^{n-2} \alpha, \mathcal{J}]$  pertenezca al conjunto, puesto que  $\psi[\mathcal{J}^{n-2} \alpha, \mathcal{J}]$ ,  $\alpha \neq \alpha'$ , inferimos de la hipótesis de inducción que  $\psi[\mathcal{J}^n \alpha \mathcal{J}]$  es ortogonal a todas las funciones  $\psi[\mathcal{J}^{n-2}(\alpha', \mathcal{J})] \delta_{\alpha', \alpha}^{\mathcal{J}^n}(\omega, \mathcal{J})$ ; por lo tanto, debido a la primera igualdad obtenida para  $\eta$ , todos los coeficientes de parentesco fraccional  $[\mathcal{J}^{n-2}(\alpha, \mathcal{J})] \delta_{\alpha, \alpha'}^{\mathcal{J}^n}(\omega, \mathcal{J})$  se anulan, a menos que  $\alpha \equiv \alpha'$ . Análogamente, si el estado  $\psi[\mathcal{J}^{n-2}(\alpha', \mathcal{J})] \delta_{\alpha', \alpha}^{\mathcal{J}^n}(\omega, \mathcal{J})$  es el pariente principal de  $\psi[\mathcal{J}^n \alpha' \mathcal{J}]$ , todos los C.P.F.  $[\mathcal{J}^n \alpha' \mathcal{J}] \delta_{\alpha', \alpha}^{\mathcal{J}^n}(\omega, \mathcal{J})$  se anulan, a menos que  $\alpha \equiv \alpha'$ . De esta manera, la suma en (5.4) se anula si  $\alpha \neq \alpha'$ . Q. E. D.

Obsérvese que en la demostración anterior no hemos hecho referencia explícita a la antigüedad  $v$  de cada estado, sino que la hemos incluido dentro del conjunto de números cuánticos  $\alpha$  que especifican completamente cada estado. Notemos también que si los estados  $\psi[\mathcal{J}^v \alpha, \mathcal{J}]$  con distintos valores de  $\alpha$  son ortogonales, las funciones obtenidas agregando pares acoplados a  $J=0$  y antisimetrizando serán ortogonales para los distintos valores de  $\alpha$ , de acuerdo a (5.4). El mismo número cuántico adicional  $\alpha$  definido en la configuración  $j^v$  puede usarse en la configuración  $j^n$ .

Este es el motivo de que, cuando se indican relaciones entre los estados de distintas configuraciones con los mismos valores de  $v$  y  $J$ , se evite referencia explícita a este número cuántico adicional en lo posible, ya que se sabrá que  $\alpha$  es el mismo.

Proposición 5.3.- El conjunto de funciones de onda clasificadas de acuerdo al esquema de antigüedad es completo.

Demostración:- Para probar la completitud de los estados en el esquema de antigüedad tenemos que mostrar que toda función de onda en una configuración  $j^n$  puede expresarse en términos de estados con antigüedades definidas.

Supongamos que existe en la configuración  $j^n$  un estado  $\Phi[j^n \alpha]$  que es ortogonal a todos los estados con antigüedades  $v < n$ ; esta función de onda también es ortogonal a todos los parientes principales  $\Psi[j^{n-1}(\alpha, j)j^1(\alpha)J]$  y por esto,  $\int \Psi[j^{n-1}(\alpha, j)j^1(\alpha)J] \Phi[j^n \alpha] = 0$  para toda  $\alpha$ . De acuerdo a la Def. 5.2, el estado  $\Phi[j^n \alpha]$  tiene antigüedad  $v=n$  Q.E.D.

Si existen varios estados con los mismos valores de  $v$  y  $J$ , para un valor dado del número cuántico adicional  $\alpha$  existe sólo un C.P.F.  $[j^{n-2}(\alpha' \alpha' j)j^1(\alpha)J]j^1 v \alpha J]$  distinto de cero, aquél con  $v' = v$  y  $\alpha' = \alpha$ .

Una aplicación sucesiva de (5.2) - con  $v$  reemplazando a  $\alpha$  -, separando pares acoplados a  $J=0$  de  $\Psi[j^{n-2} v j^1 M^2]$  o de  $\Psi[j^{n-1} v JM]$ , muestra que los elementos de matriz de  $U^{(k)}$ , con  $k$  impar, se anulan entre estados con antigüedades distintas. Entre estados con la misma antigüedad, estos elementos pueden escribirse como

$$E \equiv \langle j^n v J M^2 | \sum_{\alpha} U^{(k)}(\alpha) | j^n v JM \rangle \\ = \frac{1}{N_{nvJ}} \binom{n}{2} [j^{n-2}(\alpha' \alpha' j)j^1(\alpha)J]j^1 v \alpha J \langle j^{n-2} v j^1 M^2 | \sum_{\alpha} U^{(k)}(\alpha) | j^{n-2} v JM \rangle.$$

Por otra parte, tenemos

$$[j^{n-2}(\alpha' \alpha' j)j^1(\alpha)J]j^1 v \alpha J = \int d\alpha(n) \dots d\alpha(1) \Psi^* [j^{n-2}(\alpha' j)j^1(\alpha)J] \Psi [j^n v J] \\ = \int d\alpha(n) \dots d\alpha(1) \left\{ \binom{n}{2} \Psi [j^{n-2}(\alpha' j)j^1(\alpha)J] \right\}^* \Psi [j^n v J] \\ = \frac{N_{nvJ}}{\binom{n}{2}} \int d\alpha(n) \dots d\alpha(1) \Psi^* [j^{n-2}(\alpha' j)j^1(\alpha)J] \Psi [j^n v J];$$

por lo tanto

$$N_{nvJ} = \binom{n}{2} [j^{n-2}(\alpha' j)j^1(\alpha)J]j^1 v \alpha J. \quad (5.5)$$

La Ec. (5.5) no puede usarse directamente en la expresión  $\bar{E}$ , porque en la primera el coeficiente de normalización está conectado con el valor  $J$  mientras que en la segunda, está relacionado con  $J'$ . Sin embargo, podemos mostrar que  $N_{nvJ}$ , y el correspondiente C.P.F., es independiente de  $J$  - y también de  $\lambda$  -, y es una función de  $n$  y  $\nu$  solamente. De (5.5) inferimos que

$$\frac{1}{N_{nvJ}} [j^{n-2}(\nu J) j^2(\omega) J \{ j^n \nu J \}] = \frac{1}{N_{nvJ'}} [j^{n-2}(\nu J') j^2(\omega) J' \{ j^n \nu J' \}];$$

por otra parte, la expresión para  $\bar{E}$  puede obtenerse con el factor  $\frac{1}{N_{nvJ}} \binom{n}{2} [j^{n-2}(\nu J) j^2(\omega) J \{ j^n \nu J \}]$ ; por lo tanto, también

$$\frac{1}{N_{nvJ}} [j^{n-2}(\nu J) j^2(\omega) J \{ j^n \nu J \}] = \frac{1}{N_{nvJ'}} [j^{n-2}(\nu J') j^2(\omega) J' \{ j^n \nu J' \}]$$

y dividiendo las dos últimas igualdades miembro a miembro se tiene que  $N_{nvJ} = N_{nvJ'}$ . Ahora podemos sustituir (5.5) en  $\bar{E}$ , resultando

$$\langle j^n \nu J' M' | \sum_{k=1}^n u_k^{(k)}(\omega) | j^n \nu J M \rangle = \langle j^{n-2} \nu J' M' | \sum_{k=1}^{n-2} u_k^{(k)}(\omega) | j^{n-2} \nu J M \rangle. \quad (5.1)$$

Resumiendo, hemos visto que los operadores tensoriales impares son diagonales respecto al número cuántico de antigüedad y que sus elementos de matriz en el esquema de antigüedad no dependen de el número de partículas  $n$ .

Para obtener un valor explícito del coeficiente de normalización  $N_{nvJ}$  utilizamos (5.4) cuando  $\alpha = \alpha'$ :

$$\eta = \binom{n+1}{2} \left\{ 1 - \frac{2\eta}{2\delta+1} + \binom{n}{2} [j^{n-2}(\nu J) j^2(\omega) J \{ j^n \nu J \}]^2 \right\};$$

por otra parte, de la primera igualdad obtenida para  $\eta$  y de (5.5) se tiene que

$$\eta = N_{nvJ} \binom{n+1}{2} [j^n(\nu J) j^2(\omega) J \{ j^n \nu J \}] \left\{ \binom{n+1}{2} [j^n(\nu J) j^2(\omega) J \{ j^n \nu J \}]^2 \right\}^2$$

De estas dos expresiones para  $\eta$  obtenemos la siguiente fórmula de recurrencia:

$$\binom{n+1}{2} [j^n(\nu J) j^2(\omega) J \{ j^n \nu J \}]^2 = 1 - \frac{2\eta}{2\delta+1} + \binom{n}{2} [j^{n-2}(\nu J) j^2(\omega) J \{ j^n \nu J \}]^2. \quad (5.2)$$

Si definimos la función  $F(n) \equiv \binom{n}{2} [j^{n-2}(\nu J) j^2(\omega) J \{ j^n \nu J \}]^2$ ,

(5.7) nos dice que

$$F(n+2) = 1 - \frac{2\eta}{2\delta+1} + F(n).$$

La solución de esta ecuación la obtenemos por iteración, resultando así

$$F(n+2k) = k - \frac{2}{2\delta+1} \sum_{r=0}^{k-1} (n+2r) + F(n) \\ = n + 2k - \frac{2}{2\delta+1} \left\{ \frac{k(k-1)}{2} + n \right\} + F(n), \quad n \geq 0, \quad k \geq 0.$$



Como para  $n = v$ , la Def. 5.2 nos indica que  $f(v) = 0$ , obtenemos finalmente

$$f(m) = \frac{1}{2(2j+1)} \left\{ m - \left(1 + \frac{2j+1}{2}\right)^2 + \frac{2j+1}{3} \left\{1 - \frac{2}{2j+1}(1-v)\right\}^2 \right\}.$$

donde  $m = v, v+2, v+4, \dots, 2j+3-v$ . Observemos que el máximo de esta función es el entero más próximo a  $m_{\max} = 1 + \frac{2j+1}{2}$  y que es simétrica alrededor de la mitad de la capa:

$$f\left(\frac{2j+1}{2} + (k+2)\right) = f\left(\frac{2j+1}{2} - k\right).$$

Por lo tanto, si  $\psi(j^v \nu JM)$  no es idénticamente cero, existirán estados  $\psi(j^m \nu JM)$  distintos de cero con la misma antigüedad  $\nu$  y con  $n-v$  un entero par tal que  $0 \leq n-v \leq 2j+1-v$ . Configuraciones con  $n < v$  o  $n > 2j+1-v$  no contienen estados con antigüedad  $\nu$ .

Finalmente, poniendo  $n = v+2k$  en  $f(m)$  obtenemos que

$$\begin{aligned} f(m) &= \frac{n-v}{2} \left(1 - \frac{2}{2j+1}(v-1)\right) - \frac{2}{2j+1} \left(\frac{n-v}{2}\right)^2 + f(v) \\ &= \frac{n-v}{2} \left(\frac{2j+3-n-v}{2j+1}\right) \end{aligned}$$

y sustituyendo  $[j^{n-v}(\nu J)j^2(0)j]j^m \nu J$  obtenido en esta última ecuación en (5.5), resulta que

$$N_{\nu \nu J} = \left\{ \frac{2j+1}{4} \frac{(n-v)(2j+3-n-v)}{(2j+1)} \right\}^{1/2}. \tag{5.8}$$

Esta expresión resultará muy útil en la siguiente sección al calcular C.P.F. en el esquema de antigüedad.

**Teorema 5.1.-** Los operadores de dos cuerpos, tensoriales impares,

$$V_{12} \equiv \sum_{k \text{ impar}} f^{(k)}(1) \cdot f^{(k)}(2),$$

donde  $f^{(k)}$  es un tensor de orden impar, tienen la propiedad de apareamiento.

**Demostración:-** A partir de (5.1), y utilizando (5.0), tenemos

$$\begin{aligned} \langle j^m \nu J | \sum_{k \text{ impar}} V_{km} | j^m \nu J \rangle &= \sum_{k \text{ impar}} \langle j^m | f^{(k)} | j^m \rangle \langle j^m | f^{(k)} | j^m \rangle \langle j^m \nu J | (U^{(1)} \cdot U^{(2)}) | j^m \nu J \rangle - \frac{m}{2j+1} \left\{ \dots \right\} \\ &= \sum_{k \text{ impar}} \langle j^m | f^{(k)} | j^m \rangle^2 \langle j^m \nu J | (U^{(1)} \cdot U^{(2)}) | j^m \nu J \rangle - \frac{m}{2j+1} - \frac{m-v}{2j+1} \left\{ \dots \right\} \\ &= \langle j^m \nu J | \sum_{k \text{ impar}} V_{km} | j^m \nu J \rangle - \frac{m-v}{2} \left(\frac{1}{2j+1}\right) \sum_{k \text{ impar}} \langle j^m | f^{(k)} | j^m \rangle^2. \end{aligned}$$

Por otra parte, de la Ec. (5.19) del capítulo II tenemos

$$\langle j^2 \nu M | V_{12} | j^2 \nu M \rangle = (-)^{J+1} \sum_{k \text{ impar}} \langle j^2 | f^{(k)} | j^2 \rangle \left\{ \begin{matrix} j & j & J \\ j & j & k \end{matrix} \right\}$$

y para  $J=0$  encontramos, usando (A.19),

$$V_0 \equiv \langle j^2 \nu=0 J=0 | V_{12} | j^2 \nu=0 J=0 \rangle = \frac{1}{2j+1} \sum_{k \text{ impar}} \langle j^2 | f^{(k)} | j^2 \rangle^2,$$

por lo que

$$\langle j^n \nu \alpha J | \sum_{\tau \in m}^n V_{\tau m} | j^n \nu \alpha J \rangle = \langle j^n \nu \alpha J | \sum_{\tau \in m}^n V_{\tau m} | j^n \nu \alpha J \rangle + \frac{1}{2} \langle j^n \nu \alpha J | \dots \rangle \quad (5.9)$$

De este modo vemos que todos los elementos de matriz entre estados con distintas antigüedades se anulan y, para los casos en que  $J=0$ ,  $\nu=0$  y  $J=j$ ,  $\nu=1$ , (5.9) se reduce a las condiciones que satisface una interacción de apareamiento Q.F.D.

La Ec. (5.9) exhibe la utilidad del esquema de antigüedad para espectros nucleares; para fuerzas atractivas, como en el caso nuclear, los estados con menor antigüedad están más ligados. Así, los estados base en los núcleos deberán caracterizarse por tener las antigüedades más bajas posibles (los estados base para núcleos par-par tienen espín  $J=0$  y aquéllos de los núcleos impar-par en su mayoría poseen espín  $J=j$ , siendo  $j$  el momento angular total de un solo nucleón; al menos donde la configuración tratada no posea otros estados con estos momentos angulares, se cumplirá la afirmación anterior).

Se puede dar una interpretación interesante de la relación

$$\binom{n}{2} [j^{n-2}(\nu J)j^2(\alpha J) \{j^n \nu J\}]^2 = \frac{n \nu}{2} \binom{2j+3-n-\nu}{2j+1}.$$

Comenzamos definiendo en la configuración  $j^n$  el operador  $Q \equiv \sum_{\tau \in m}^n q_{\tau m}$ , donde

$$\langle j^2 JM | q_{\tau m} | j^2 J'M' \rangle \equiv (2j+1) S_{JJ'} S_{MM'} S_{J_0}. \quad (5.1)$$

define un operador de dos cuerpos que se anula en la configuración  $j^2$  a menos que el par esté acoplado a  $J=0$ ; el factor  $2j+1$  fue introducido para que los valores propios de  $Q$  sean enteros. Utilizando (3.5) y (5.10) obtenemos que el valor esperado de  $Q$  en la configuración  $j^n$  es

$$\begin{aligned} \langle j^n \nu JM | \sum_{\tau \in m}^n q_{\tau m} | j^n \nu JM \rangle \\ = \frac{n(n-1)}{2} [j^n \nu J \{j^{n-2}(\nu J)j^2(\alpha J) \} [j^{n-2}(\nu J)j^2(\alpha J) \{j^n \nu J\}] (2j+1) S_{\nu \nu} \end{aligned}$$

es decir, el operador  $Q$  es diagonal en el esquema de antigüedad. Comparando esta expresión con la que aparece inmediatamente antes de (5.10), observamos que los valores propios de  $Q$  son independientes de  $J$  (y de  $\alpha$ ), y están dados por

$$Q(n, \nu) = \frac{1}{2} (n-\nu)(2j+3-n-\nu)$$

Esta relación, que puede servir para calcular el número de anti-

gitud para una configuración determinada, también muestra la razón física de la independencia del C.P.F. en (p.v) de  $J$  (y de  $\lambda$ ): todos los estados con la misma antigüedad  $v$  tienen el mismo número de pares acoplados a  $J=0$ . También observamos que  $Q$  no posee la propiedad de apareamiento porque sus valores propios tienen términos cuadráticos en  $n$  y en  $v$ . El origen de este comportamiento lo podemos encontrar si hallamos una expresión adecuada para  $q_{12}$ ; de la Ec. (A.19.1) se tiene que

$$\sum_{k=0}^{2j} (-1)^{k+j} (2k+1) \left\{ \begin{matrix} j & j & j \\ j & j & k \end{matrix} \right\} = (2j+1) S_{j,0}.$$

Utilizando (A.48) y la definición de operadores tensoriales unidad, podemos reescribir esta identidad como

$$(2j+1) S_{j,0} = \sum_{k=0}^{2j} (-1)^{k+j} (2k+1) \langle j^2 JM | \underline{u}^{(k)}(1) \cdot \underline{u}^{(k)}(2) | j^2 JM \rangle.$$

En forma semejante, hallamos la siguiente expresión usando (A.48) y (A.19.2):

$$-1 = \sum_{k=0}^{2j} (2k+1) \left\{ \begin{matrix} j & j & j \\ j & j & k \end{matrix} \right\} = \sum_{k=0}^{2j} (-1)^j (2k+1) \langle j^2 JM | \underline{u}^{(k)}(1) \cdot \underline{u}^{(k)}(2) | j^2 JM \rangle.$$

Restando esta relación de la anterior obtenemos

$$(2j+1) S_{j,0} + 1 = -(-1)^j \sum_{k \text{ impar}} (2k+1) \langle j^2 JM | \underline{u}^{(k)}(1) \cdot \underline{u}^{(k)}(2) | j^2 JM \rangle.$$

Y comparando con (5.10) tenemos que

$$q_{12} = -1 - 2 \sum_{k \text{ impar}} (2k+1) (\underline{u}^{(k)}(1) \cdot \underline{u}^{(k)}(2)). \quad (5.11)$$

Es claro entonces que el operador  $q_{12}$  es una suma de dos términos: uno es una suma de productos escalares de tensores impares, diagonal en el esquema de antigüedad y que posee la propiedad de apareamiento, mientras que el otro es un término escalar  $(-1)$ , cuya contribución a  $Q$  es  $-\frac{1}{2} n(n-1)$  y que no posee la propiedad de apareamiento. Por lo tanto,  $Q + \frac{1}{2} n(n-1)$  sí posee la propiedad de apareamiento y podemos calcular sus valores propios usando (5.9):

$$\begin{aligned} Q(n,v) + \frac{n(n-1)}{2} &= Q(v,v) + \frac{v(v-1)}{2} + \frac{n-v}{2} \{ Q(2,0) + 1 \} \\ &= \frac{v(v-1)}{2} + \frac{n-v}{2} (2j+2), \end{aligned}$$

que concuerda con el resultado obtenido.

Para obtener  $\mathcal{H}[j^v v J]$  tenemos que agregar  $\frac{1}{2} (n-v)$  pares acoplados a  $J=0$  al pariente principal  $\mathcal{H}[j^v v J]$ . Sin embargo, los valores propios de  $Q = (2j+1) \sum_{k=0}^n S_{j,k,0}$  no son simplemente  $\frac{1}{2} (2j+1)(n-v)$

sino  $\frac{1}{2} (2j+3-n-v)(n-v)$ ; ésto sucede porque el principio de exclusión reduce la probabilidad de que los  $\frac{1}{2}(n-v)$  pares estén acoplados simultáneamente a  $J=0$ ; así, aunque comenzamos agregando  $\frac{1}{2}(n-v)$  pares acoplados a  $J=0$  al momento principal en la configuración  $j^v$ , la antisimetrización reduce el número de pares acoplados a  $J=0$  a  $\frac{1}{2}(n-v) \frac{2j+3-n-v}{2j+1}$ .

En analogía con el acoplamiento  $j-j$ , obtenemos el esquema de antigüedad en el acoplamiento L-S usando pares de partículas acoplados a  $J=0$ . Aunque en este caso existen dos estados en la configuración  $\rho^2$  con  $J=0$ ,  $^1S_0$  y  $^3P_0$ , usaremos sólo los pares  $^1S_0$  porque en ellos tanto  $L=0$  como  $S=0$ . De esta forma, la función de onda  $\Psi[\rho^2 \alpha \lambda S]$  tiene la misma antigüedad que  $\Psi[\rho^{v-2} \alpha \lambda S]$  si podemos obtener aquélla agregando un par  $^1S_0$  a ésta y antisimetrizando. Continuamos este proceso de sustracción de pares  $^1S_0$  hasta obtener una función  $\Psi[\rho^v \alpha \lambda S]$  que no puede ser construida agregando un par  $^1S_0$  a  $\Psi[\rho^{v-2} \alpha \lambda S]$  y antisimetrizando; el número  $v$  es llamado la antigüedad del estado.

Podemos obtener una fórmula análoga a (5.1) para el acoplamiento L-S utilizando (4.10). Con este propósito, escribimos los operadores que aparecen en (4.15) en términos de tensores dobles, usando la notación

$$\sum_{\rho \in M} g_{\rho m}^{(k)} = \sum_{\rho \in M} [(\chi_m^{(k)}(\rho) S_m^{(k)}(\rho)) \times (\chi_m^{(k')}(\rho) S_m^{(k')}(\rho))]^{(k, k')}$$

Reemplazamos  $\chi_m^{(k)}(\rho) S_m^{(k)}(\rho)$  por  $\langle \rho || \chi_m^{(k)} || \rho \rangle \langle \frac{1}{2} || S_m^{(k)} || \frac{1}{2} \rangle u_m^{(k, k)}(\rho)$ , siendo  $u_m^{(k, k)}$  un tensor unidad doble definido por

$$\langle \rho \frac{1}{2} \alpha || u_m^{(k_1 k_2)} || \rho' \frac{1}{2} \alpha' \rangle \equiv \delta_{\rho \rho'} \delta_{\alpha \alpha'};$$

con esto, la suma considerada puede escribirse como

$$\sum_{\rho \in M} g_{\rho m}^{(k)} = \langle \rho || \chi_m^{(k)} || \rho \rangle \langle \rho || \chi_m^{(k')} || \rho \rangle \langle \frac{1}{2} || S_m^{(k)} || \frac{1}{2} \rangle \langle \frac{1}{2} || S_m^{(k')} || \frac{1}{2} \rangle \times \frac{1}{2} \left\{ \left[ \sum_m u_m^{(k_1 k_2)} \times \sum_m u_m^{(k'_1 k'_2)} \right]^{(k, k')} \right\} \sum_{i=1}^n \left[ \sum_m U_m^{(k, k_1)}(i) \times \sum_m U_m^{(k', k'_1)}(i) \right]^{(k, k')} \quad (5.12)$$

La última suma en (5.12) es un operador de un cuerpo,  $\sum_{i=1}^n F^{(k, k')} (i)$ , y sus elementos de matriz reducidos están dados por (4.12). En la primera suma hemos definido  $U_m^{(k, k_1)} = \sum_{i=1}^n u_m^{(k, k_1)}(i)$  y de acuerdo a (A.20.1), el elemento de matriz de este término está dado por

$$\begin{aligned} & \langle \rho^{\alpha} \alpha L S \parallel [U_{x_1 x_1}^{(k_1 k_1)}(1), U_{x_2 x_2}^{(k_2 k_2)}(2)] \rho^{\beta} \beta \rangle \\ & = (-1)^{L+S} \sum_{\alpha_1 \alpha_2} \langle \rho^{\alpha} \alpha L S \parallel U_{x_1 x_1}^{(k_1 k_1)}(1) \rho^{\alpha_1} \alpha_1 \rangle \langle \rho^{\alpha_2} \alpha_2 L S \parallel U_{x_2 x_2}^{(k_2 k_2)}(2) \rho^{\beta} \beta \rangle \\ & \times \langle \rho^{\alpha} \alpha L S \parallel U_{x_1 x_2}^{(k_1 k_2)}(1, 2) \rho^{\beta} \beta \rangle \end{aligned}$$

De esta forma, es posible expresar el elemento de matriz de operadores de dos cuerpos en términos de elementos de matriz de operadores de un cuerpo en la configuración  $\rho^n$ .

Los operadores de un cuerpo, análogos a los tensores de orden impar en el acoplamiento  $j-j$ , son en este caso los tensores dobles impares; éstos son tensores dobles  $V_{x_1 x_2}^{(k_1 k_2)}$  para los cuales  $k_1+k_2$  es impar. Si construimos tensores irreducibles dobles de orden  $k$  respecto a  $j$ , sólo aquellos tensores con  $k$  impar tienen valores esperados no nulos; esto se infiere de (A.51):

$$\langle \rho^{\alpha} \alpha j \parallel V_{x_1 x_2}^{(k_1 k_2)} \parallel \rho^{\beta} \beta \rangle = \sqrt{2k+1} \begin{Bmatrix} j & j & k \\ j & j & k \end{Bmatrix} \langle \rho^{\alpha} \alpha j \parallel V_{x_1 x_2}^{(k_1 k_2)} \parallel \rho^{\beta} \beta \rangle;$$

el coeficiente  $j-j$  tiene dos renglones idénticos y se anula a menos que  $k_1+k_2+k$  sea par.

La propiedad importante de los tensores dobles impares

$$\langle \rho^{\alpha} \alpha L S \parallel \{ U_{x_1 x_1}^{(k_1 k_1)}(1) + U_{x_2 x_2}^{(k_2 k_2)}(2) \} \parallel \rho^{\beta} \beta \rangle = 0, \quad k_1+k_2 \text{ impar}, \quad (5.13)$$

se demuestra en la misma forma que la Prop. 5.1. La condición triangular exige que  $L=k_1$  y  $S=k_2$  para que el miembro izquierdo de (5.13) no se anule. Sin embargo,  $(-1)^{L+S} = (-1)^{k_1+k_2} = -1$ , de manera que  $\mathcal{N}[\rho^{\alpha} \alpha L S]$  es simétrica en las dos partículas. Puesto que  $u_{x_1 x_1}^{(k_1 k_1)}(1) + u_{x_2 x_2}^{(k_2 k_2)}(2)$  también es simétrico y ya que  $\mathcal{N}[\rho^{\beta} \beta L S]$  es antisimétrica, (5.13) se anula idénticamente.

De (5.13) inferimos que los tensores dobles impares  $U_{x_1 x_1}^{(k_1 k_1)} = \sum_{i=1}^n u_{x_1 x_1}^{(k_1 k_1)}(i)$  son diagonales en el esquema de antigüedad y que sus elementos de matriz en las configuraciones  $\rho^n$  son independientes de  $n$  usando C.P.F.  $\rho^n \rightarrow \rho^{n-2}$ ; obtenemos así el análogo de (5.0):

$$\begin{aligned} & \langle \rho^{\alpha} \alpha L S M_L M_S \parallel \sum_{i=1}^n U_{x_1 x_1}^{(k_1 k_1)}(i) \parallel \rho^{\beta} \beta L' S' M_L' M_S' \rangle \\ & = \langle \rho^{\alpha} \alpha L S M_L M_S \parallel \sum_{i=1}^n u_{x_1 x_1}^{(k_1 k_1)}(i) \parallel \rho^{\beta} \beta L' S' M_L' M_S' \rangle \delta_{\alpha \beta} \delta_{L L'} \delta_{S S'} \delta_{M_L M_L'} \delta_{M_S M_S'} \quad (5.14) \end{aligned}$$

Usando (5.14) para considerar interacciones de dos cuerpos construidas de tensores dobles impares, obtenemos que el primer término de (5.12) es independiente de  $n$ . En el caso de fuerzas

con  $k=0$ , el segundo término en (5.17) es una suma de  $n$  términos iguales de un cuerpo; en este caso, la interacción tiene la propiedad de apareamiento, en analogía a (5.7):

$$\begin{aligned} & \langle \rho^1 \nu \alpha | S_0 | \sum_{i=1}^n V_{13} | \rho^1 \nu \alpha' | S_0 \rangle \\ & = \langle \rho^1 \nu \alpha | S_0 | \sum_{i=1}^n V_{13} | \rho^1 \nu \alpha' | S_0 \rangle + \dots \end{aligned} \quad (5.1)$$

donde  $V_0 \equiv \langle \rho^1 S_0 | V_{12} | \rho^1 S_0 \rangle$ . Esta ecuación también es cierta para fuerzas con  $k=2$ , en cuyo caso  $V_0 \equiv 0$  (ya que  $(\frac{1}{2} \frac{1}{2} 2)$  no puede satisfacerse).

En el acoplamiento L-S también existe un operador  $Q \equiv \sum_{i,j} q_{ij}$  estrechamente relacionado con el esquema de antisimetría; el operador de dos cuerpos  $q_{ij}$  está definido, en analogía con (5.10), como

$$\langle \rho^1 L M | q_{12} | \rho^1 L' M' \rangle \equiv (2\rho+1) S_{L'L} S_{MM'} S_{L_0} \quad (5.1)$$

Los valores propios de  $Q$  se pueden calcular directamente de (5.1b) expresando  $q_{12}$  en términos de tensores dobles impares. Usando (A.48) en (A.19.1) obtenemos

$$\begin{aligned} (2\rho+1) S_{L_0} &= \sum_{j=0}^{2\rho} (-)^{j+2\rho} (2j+1) \left\{ \begin{matrix} \rho & \rho & L \\ \rho & \rho & S \end{matrix} \right\} = \sum_{k=0}^{2\rho} (-)^{k-1} (2k+1) \langle \rho^1 L M | \underline{u}^{(k)}(1) \cdot \underline{u}^{(k)}(2) | \rho^1 L M \rangle \\ &= \sum_{k=0}^{2\rho} (-)^k (2k+1) \langle \rho^1 L M | \underline{u}^{(k)}(1) \cdot \underline{u}^{(k)}(2) | \rho^1 L M \rangle. \end{aligned}$$

A partir de (A.19.2) tenemos que

$$(-)^{2\rho-1} = (-)^L = \sum_{k=0}^{2\rho} (2k+1) \langle \rho^1 L M | \underline{u}^{(k)}(1) \cdot \underline{u}^{(k)}(2) | \rho^1 L M \rangle$$

y restando esta última expresión de la anterior resulta que

$$(2\rho+1) S_{L_0} - (-)^L = -2 \sum_{k \text{ impar}} (2k+1) \langle \rho^1 L M | \underline{u}^{(k)}(1) \cdot \underline{u}^{(k)}(2) | \rho^1 L M \rangle.$$

Para estados antisimétricos,  $(-)^L = (-)^S$ , y como vimos en (4.12) del capítulo II,

$$(-)^S = -\frac{1}{2} [1 + 4(S_1 \cdot S_2)].$$

Introduciendo este resultado en la igualdad anterior y comparando con (5.1b) obtenemos que

$$q_{12} = -\frac{1}{2} - 2(S_1 \cdot S_2) - 2 \sum_{k \text{ impar}} (2k+1) (\underline{u}^{(k)}(1) \cdot \underline{u}^{(k)}(2)). \quad (5.1)$$

La parte tensorial impar tiene la propiedad de apareamiento (5.15), en tanto que la contribución de la constante  $-\frac{1}{2}$  en  $Q = \sum_{i,j} q_{ij}$  es  $-\frac{1}{2} \frac{n(n-1)}{2}$ . Ahora, usando (5.15) obtenemos

$$Q(v,v) + \frac{1}{2} \frac{n(n-1)}{2} = Q(v,v) + \frac{1}{2} \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n-1}{2} \left\{ Q(2,0) + \frac{1}{2} \right\}.$$

Poniendo  $Q(v,v)=0$  y  $Q(2,0)=2^{-1}$  en esta expresión resulta

$$j(n, \nu) = \frac{1}{4} (n-\nu) (4+4-n-\nu).$$

Usando (4.20) para calcular  $j(n, \nu)$  obtenemos, por otra parte, que

$$j(n, \nu) = \frac{n(n-1)}{2} [e^{-\nu/2} (\nu LS) e^{(\nu/2) LS}]^2 \quad (4.11)$$

y combinando esta igualdad con la anterior hallamos el C.P.F. involucrado en el coeficiente de normalización:

$$[e^{-\nu/2} (\nu LS) e^{(\nu/2) LS}]^2 = \left\{ \frac{(n-1)(4+4-n-1)}{2(2+1)(n-1)} \right\}^{1/2}. \quad (5.15)$$

SECCION 6. C.P.F. Y EL ESQUEMA DE ANTIGÜEDAD.

Si nos restringimos a considerar funciones de onda clasificadas de acuerdo al esquema de antigüedad, podemos obtener expresiones explícitas para los C.P.F. Obtendremos primero los coeficientes  $[j^{n-2}(\nu, j_1, j_2) j^{\nu} j^{\nu} j^{\nu} j^{\nu}]$  para todos los valores de  $n$  en términos de C.P.F. con un valor específico de  $n$ . Como resultado de esta reducción, en la siguiente sección veremos que podemos simplificar muchas expresiones para los elementos de matriz de operadores de uno y dos cuerpos.

Consideremos el C.P.F.  $j^{n+2} \rightarrow j^n$ :

$$\begin{aligned} [j^n(\nu, j_1, j_2) j^{\nu} j^{\nu} j^{\nu} j^{\nu}] &= \int d\omega \dots d\omega(n+2) \psi^* [j^{n+2} \nu j] \mathcal{N} [j^n(\nu, j_1, j_2) j^{\nu} j^{\nu} j^{\nu} j^{\nu}] \\ &= \int d\omega \dots d\omega(n+2) \psi^* [j^{n+2} \nu j] \left\{ \sum_{N_{n+2, j_1}} \mathcal{N} [j^{n+2}(\nu, j_1, j_2) j^{\nu} j^{\nu} j^{\nu} j^{\nu}] \right\} \\ &= \frac{1}{N_{n+2, j_1}} \binom{n}{2} \int d\omega \dots d\omega(n+2) \psi^* [j^{n+2} \nu j] \mathcal{N} [j^{n+2}(\nu, j_1, j_2) j^{\nu} j^{\nu} j^{\nu} j^{\nu}]. \end{aligned}$$

Ya que  $\psi^* [j^{n+2} \nu j]$  es completamente antisimétrica, al aplicarle cualquier permutación  $\sigma$  se tiene:  $\sigma \psi^* [j^{n+2} \nu j] = (-1)^\sigma \psi^* [j^{n+2} \nu j]$ .

Para evaluar la integral intercambiamos la partícula  $n-1$  con la  $n+1$ , y la  $n$  con la  $n+2$ , desarrollamos  $\psi^* [j^{n+2} \nu j]$  mediante C.P.F.  $j^{n+2} \rightarrow j^n$  e integramos sobre las coordenadas de las partículas  $n+1$  y  $n+2$ :

$$\begin{aligned} [j^n(\nu, j_1, j_2) j^{\nu} j^{\nu} j^{\nu} j^{\nu}] &= \frac{1}{N_{n+2, j_1}} \binom{n}{2} \int d\omega \dots d\omega(n+2) \psi^* [j^{n+2} \nu j] \mathcal{N} [j^{n+2}(\nu, j_1, j_2) j^{\nu} j^{\nu} j^{\nu} j^{\nu}] \\ &= \frac{1}{N_{n+2, j_1}} \binom{n}{2} \sum_{j_1, j_2, j_3} [j^{n+2} \nu j] \mathcal{N} [j^{n+2}(\nu, j_1, j_2) j^{\nu} j^{\nu} j^{\nu} j^{\nu}] \\ &= \frac{1}{N_{n+2, j_1}} \binom{n}{2} [j^n(\nu j) j^{\nu} j^{\nu} j^{\nu} j^{\nu}] \\ &\quad \times \int d\omega \dots d\omega(n) \psi^* [j^n \nu j] \mathcal{N} [j^{n+2}(\nu, j_1, j_2) j^{\nu} j^{\nu} j^{\nu} j^{\nu}]. \end{aligned}$$

Esta última integral tiene la misma forma que la de la primera igualdad para el C.P.F., sólo que con  $n$  en vez de  $n+2$ ; sustituyendo (5.8) y (5.10) en esta expresión encontramos la relación de recurrencia

$$\begin{aligned} & [J^2(u_2, J_2)]^2 (J^2) J^2 (J^{n+2} J^2) \\ &= \sqrt{\frac{n(n-1)(n+2-U)}{(n+2)(n+1)(n-U_2)} \frac{(2J+1-U)}{(2J+3-n-U)} } [J^2(u_2, J_2)]^2 (J^2) J^2 (J^{n+1}). \end{aligned} \quad (6.1)$$

Para proseguir, es necesario encontrar la relación entre  $U$  y  $J$ . Observemos que el estado de la configuración  $j^{n+2}$  con  $U$  y  $J$  se obtiene agregando un par de partículas acopladas a  $J'$  al pariente principal de la configuración  $j^n$  con  $U_2$  y  $J_2$  y antisimetrizando; la antisimetrización de  $\psi[\tilde{J}^{n+2}(u_2, J_2) J_2, J_2] J^2 J^2$  conduce a un estado que es combinación lineal de estados con una suma de valores para la antigüedad limitado (en el caso especial en que  $J'=0$ , el estado tiene antigüedad definida  $U = U_2$ , y  $J = J_2$ ). Recordemos que el estado con  $U_2$  y  $J_2$  en la configuración  $j^n$  se obtiene del pariente principal con  $u_2$  y  $J_2$  en la configuración  $j^0$  agregando  $\frac{1}{2}(n-U_2)$  pares acoplados a  $J=0$  y antisimetrizando cada vez que agregamos un par. El número de pares acoplados a  $J=0$  no decrece cuando agregamos un par acoplado a  $J' \neq 0$ ; luego, este número es  $\frac{1}{2}(n-U_2) = \frac{1}{2}(n+2)-(U_2+2)$ ; de aquí que la máxima antigüedad que puede aparecer en el estado de la configuración  $j^{n+2}$  sea  $U_2+2$ . También podríamos agregar primero el par acoplado a  $J' \neq 0$  al pariente principal  $\psi[\tilde{J}^{n+2}(u_2, J_2)]$  y después los  $\frac{1}{2}(n-U_2)$  pares acoplados a  $J=0$ . Por otra parte, usando C.P.F.  $j^0 \rightarrow j^{n+2}$  podemos expresar  $\psi[\tilde{J}^{n+2}(u_2, J_2)]$  como una combinación lineal de funciones  $\psi[\tilde{J}^{n+2}(u_2, J_2) J^2 (J^2) J_2]$ , con  $U_2+2=U_2$  necesariamente; agregando el par acoplado a  $J'$  encontramos las funciones  $\psi[\tilde{J}^{n+2}(u_2, J_2) J^2 (J^2) J_2 J^2 (J^2) J^2]$ ; cambiando el orden de acoplamiento hallamos las funciones  $\psi[\tilde{J}^{n+2}(u_2, J_2) J^2 (J^2) J^2 (J^2) J_2, J]$ ; si existe una función con  $J_3=J$  y  $J'=J''$ , podemos obtener una función  $\psi[\tilde{J}^{n+2}(u, J) J^2(0) J^2(0) O, J]$ . Después de la antisimetrización esta función dará origen a un estado con antigüedad  $U = U_2 - 2$ ; agregándole los otros  $\frac{1}{2}(n-U_2)$  pares acoplados a  $J=0$  y antisimetrizando obtenemos



mos una función de onda en la configuración  $j^{n+1}$  con anticomodidad  $\nu = \nu_2 - 2$ . Como no existen otras funciones que se puedan obtener al agregar un par de partículas a un estado con anticomodidad  $\nu$  y antisimetrizar que las mencionadas, inferimos que el estado resultante contendrá estados con anticomodidades  $\nu_2 - 2, \nu_2, \nu_2 + 2$ , por lo que los únicos valores de  $U$  para los cuales el C.P.F. en (6.1) no se anula son  $U = \nu_2, \nu_2 \pm 2$ .

Por iteración, obtenemos de (6.1) que

$$[j^{n-2}(\nu_2, j_2) j^2(j^2) j \{ j^{n+1} \nu j \}] = [j^{\nu+2}(\nu_2, j_2) j^2(j^2) j \{ j^{n+1} \nu j \}] \\ \times \left\{ \frac{(\nu+1)(\nu+3)}{n(n-1)} \frac{(n-\nu)(n-\nu-2)\dots}{(2+3-\nu)(3+4-\nu)\dots} \dots \right\}^{1/2}$$

de donde es fácil obtener, usando nuevamente (6.1) en el resultado anterior para obtener (6.3) y (6.4), que:

(i) si  $\nu_2 = \nu + 2$ , entonces

$$[j^{n-2}(\nu+2, j_2) j^2(j^2) j \{ j^{n+1} \nu j \}] \\ = \left\{ \frac{(\nu+1)(\nu+3)}{n(n-1)} \frac{(n-\nu)(n-\nu-2)}{4 \cdot 2} \right\}^{1/2} [j^{\nu+2}(\nu+2, j_2) j^2(j^2) j \{ j^{n+1} \nu j \}]; \quad (6.2)$$

(ii) si  $\nu_2 = \nu$ , entonces

$$[j^{n-2}(\nu, j_2) j^2(j^2) j \{ j^{n+1} \nu j \}] \\ = \left\{ \frac{(\nu+2)(\nu+1)}{n(n-1)} \frac{(n-\nu)}{2} \frac{2j_2+3-n-\nu}{j_2+1-2\nu} \right\}^{1/2} [j^{\nu}(\nu, j_2) j^2(j^2) j \{ j^{n+1} \nu j \}]; \quad (6.3)$$

(iii) si  $\nu_2 = \nu - 2$ , entonces

$$[j^{n-2}(\nu-2, j_2) j^2(j^2) j \{ j^{n+1} \nu j \}] \\ = \left\{ \frac{\nu(\nu-1)}{n(n-1)} \frac{(2j_2+3-n-\nu)(2j_2+3-n-\nu)}{(2j_2+3-2\nu)(2j_2+3-2\nu)} \right\}^{1/2} [j^{\nu-2}(\nu-2, j_2) j^2(j^2) j \{ j^{n+1} \nu j \}]; \quad (6.4)$$

Consideremos ahora el C.P.F.  $j^{n+2} \rightarrow j^{n+1}$ :

$$[j^{n+1}(\nu, j) j j \{ j^{n+2} \nu j \}] = \int d\alpha_1 \dots d\alpha_{n+2} \eta^* [j^{n+2} \nu j] \eta [j^{n+1}(\nu, j) j_{n+1,1} j]. \\ = \int d\alpha_1 \dots d\alpha_{n+2} \left\{ \frac{4j_1}{n+1,1, j_1} \eta^* [j^{n+1}(\nu, j) j_{n+1,1} j] \right\} \eta^* [j^{n+2} \nu j]. \\ = \frac{1}{n+1,1, j_1} \binom{n+1}{2} \int d\alpha_1 \dots d\alpha_{n+2} \eta^* [j^{n+2} \nu j] \eta [j^{n+1}(\nu, j) j_{n+1,1} j]. \\ = \frac{1}{n+1,1, j_1} \binom{n+1}{2} \sum_{j_2, j_3} [j^{n+2} \nu j \{ j^2(\nu, j_2) j^2(j^2) j \}] \\ \times \int d\alpha_1 \dots d\alpha_{n+2} \eta^* [j^{n+2}(\nu, j_2) j_{n+1,1} j] \eta [j^{n+1}(\nu, j) j_{n+1,1} j]. \\ = \frac{1}{n+1,1, j_1} \binom{n+1}{2} [j^{n+1}(\nu, j) j^2(j^2) j \{ j^{n+2} \nu j \}] \int d\alpha_1 \dots d\alpha_n \eta^* [j^{\nu} \nu j] \eta [j^{n+1}(\nu, j) j_{n+1,1} j].$$

Comparando la última integral con la primera igualdad e introduciendo (5.8) y (5.10) encontramos que

$$[j^{n+1}(\nu, j) j^2(j^2) j \{ j^{n+2} \nu j \}] = \left\{ \frac{n(n+2-\nu)(n+1-n-\nu)}{(n+2)(n+1-\nu)(2j_2+n-\nu)} \right\}^{1/2} [j^{\nu}(\nu, j) j^2(j^2) j \{ j^{n+2} \nu j \}]. \quad (6.5)$$

Para utilizar esta fórmula tenemos que encontrar la relación entre  $\nu_1$  y  $\nu$ . Si agregamos una partícula al estado  $\eta [j^{n+1}(\nu, j)]$  y

antisimetrizamos, el estado resultante va a ser una combinación lineal de estados con antigüedad definida. Como el estado  $\psi^{(u)}(j_1, \dots, j_n, J)$  se obtiene acoplado al pariente principal  $\frac{1}{2}(n-1-u)$  pares acoplados a  $J=0$  y antisimetrizando, la adición de otra partícula no puede disminuir el número de pares acoplados a  $J=0$ ; por lo tanto, el número de pares acoplados a  $J=0$  en la función es al menos  $\frac{1}{2}\{(n-1)-u\} = \frac{1}{2}\{n-(u+1)\}$ , por lo que la antigüedad de los estados  $\psi^{(u)}(j_1, \dots, j_n, J)$  es, a lo más,  $u+1$ . Sin embargo, el estado  $\psi^{(u)}(j_1, \dots, j_n, J)$  puede obtenerse acoplado primero  $j_n$  al pariente principal  $\psi^{(u)}(j_1, \dots, j_{n-1}, J)$  y después los  $\frac{1}{2}(n-1-u)$  pares acoplados a  $J=0$ ; el pariente principal puede desarrollarse mediante C.P.F.  $j^{u_1} \rightarrow j^{u_1-1}$  como una combinación lineal de las funciones  $\psi^{(u_1-1)}(j_1, \dots, j_{n-1}, J)$ , donde  $u_1 = u_1 - 1$  necesariamente; acoplamos  $j_n$  a estas funciones, resultando  $\psi^{(u_1-1)}(j_1, \dots, j_n, J)$ ; cambiamos el orden de acoplamiento y hallamos  $\psi^{(u_1-1)}(j_1, \dots, j_n, J)$ ; si existen funciones con  $J_2 = J$ , y en consecuencia  $J' = 0$ , podemos obtener, después de agregar  $\frac{1}{2}(n-1-u)$  pares acoplados a  $J=0$  y antisimetrizar, funciones de onda con antigüedad  $u_1 = u - 1$ .

De esta forma, hemos visto que al agregar una partícula al estado  $\psi^{(u)}(j_1, \dots, j_n, J)$  y antisimetrizar obtenemos una función que es una combinación lineal de estados con antigüedades  $u = u \pm 1$ , y sólo para estos valores los C.P.F. en (0.5) no se anulan.

Aplicando sucesivamente la formula recursiva (0.5) encontramos

$$\begin{aligned} [\psi^{(u)}(j_1, \dots, j_n, J)] [\psi^{(u)}(j_1, \dots, j_n, J)] &= [\psi^{(u+1)}(j_1, \dots, j_n, J)] [\psi^{(u-1)}(j_1, \dots, j_n, J)] \\ &\times \left\{ \frac{u+1}{n} \frac{(n-u)(n-u-1)\dots}{(n-u-1)(n-u-2)\dots(u+1-u)} \frac{(2j_1+u)(2j_1+u-1)\dots(2j_1-1-u)}{(2j_1+u-1)(2j_1+u-2)\dots(2j_1-u)} \right\} \end{aligned}$$

de donde obtenemos, usando una vez más (0.5) para hallar (0.7), que:

i) si  $u_1 = u+1$ , entonces

$$[\psi^{(u+1)}(j_1, \dots, j_n, J)] [\psi^{(u)}(j_1, \dots, j_n, J)] = \left\{ \frac{(u+1)(n-u)}{2n} \right\}^{1/2} [\psi^{(u+1)}(j_1, \dots, j_n, J)] [\psi^{(u-1)}(j_1, \dots, j_n, J)] \quad (0.6)$$

ii) si  $u_1 = u-1$ , entonces

$$[\psi^{(u-1)}(j_1, \dots, j_n, J)] [\psi^{(u)}(j_1, \dots, j_n, J)] = \left\{ \frac{u(2j_1+u-1)}{n(2j_1+2u)} \right\}^{1/2} [\psi^{(u-1)}(j_1, \dots, j_n, J)] [\psi^{(u)}(j_1, \dots, j_n, J)] \quad (0.7)$$

Observemos que en la relación (0.6), en el miembro derecho, apa-

recen C.P.F. de la configuración  $j^{v+2}$ , que no es la configuración mínima para las antigüedades  $v$  y  $v+1$ . Por esto, tratamos de expresar este C.P.F. en términos de la configuración  $j^{v+1}$ :

$$\begin{aligned} [j^{v+1}(v_1, j_1) j_2 j_3 \dots j_{v+2} v_j] &= \int d\zeta(v_1) \dots d\zeta(v_{v+2}) \psi^k [j^{v+1}(v_1, j_1) j_2 j_3 \dots j_{v+1} j_{v+2}] \psi [j^{v+2}(v_j)]. \\ &= \int d\zeta(v_1) \dots d\zeta(v_{v+2}) \psi^k [j^{v+1}(v_1, j_1) j_2 j_3 \dots j_{v+1} j_{v+2}] \left\{ \sum_{n_1, n_2, n_3} \psi [j^v(v_j) j_{n_1} j_{n_2} j_{n_3}] \right\} \\ &= \frac{1}{N_{v_1, v_j}} \int d\zeta(v_1) \dots d\zeta(v_{v+2}) \psi^k [j^{v+1}(v_1, j_1) j_2 j_3 \dots j_{v+1} j_{v+2}] \left\{ \psi [j^v(v_j) j_{v_1} j_{v_2} j_{v_3}] \right. \\ &\quad \left. - \sum_{k=1}^v (\psi [j^v(v_j) j_{k, v_1} j_{v_2}] - \psi [j^v(v_j) j_{k, v_2} j_{v_1}]) + \sum_{k=1}^v \psi [j^v(v_j) j_{k, v_3} j_{v_2}] \right\}. \end{aligned}$$

Sólo los dos primeros términos que aparecen entre llaves en esta última integral contribuyen; en los otros dos términos, dos de las primeras  $v+1$  partículas están acopladas a  $J=0$ , mientras que tales pares no existen en la función de onda  $\psi [j^{v+1}(v_1, j_1)]$ . Debido a que la función  $\psi [j^{v+1}(v_1, j_1)]$  es antisimétrica, las contribuciones en la integral de cada término  $\psi [j^v(v_j) j_{v_1} j_{v_2} j_{v_3}]$  son iguales a la contribución de  $\psi [j^v(v_j) j_{v_2} j_{v_1} j_{v_3}]$ . Ahora aplicamos una expansión en C.P.F. de  $\psi [j^{v+1}(v_1, j_1)]$  y un cambio de acoplamiento (utilizamos (A.13) y que:  $\langle j^v(j_1) j_2 j_3 | j^v(j'') j_2 j_3 \rangle = (-)^{j-j_1+j-j''} \langle j^v(j_1) j_2 j_3 | j^v(j'') j_2 j_3 \rangle$ ):

$$\begin{aligned} [j^{v+1}(v_1, j_1) j_2 j_3 \dots j_{v+2} v_j] &= \frac{v+1}{N_{v_1, v_j}} \int d\zeta(v_1) \dots d\zeta(v_{v+2}) \psi^k [j^{v+1}(v_1, j_1) j_2 j_3 \dots j_{v+1} j_{v+2}] \psi [j^v(v_j) j_{v_1} j_{v_2} j_{v_3}]. \\ &= \frac{v+1}{N_{v_1, v_j}} \sum_{j_1'} [j^{v+1}(v_1, j_1) j_2 j_3 \dots j_{v+1} j_{v+2}] \\ &\quad \times \int d\zeta(v_1) \dots d\zeta(v_{v+2}) \psi^k [j^v(v_j) j_{v_1}(j_1) j_{v_2} j_{v_3}] \psi [j^v(v_j) j_{v_1} j_{v_2} j_{v_3}], \\ &= \frac{v+1}{N_{v_1, v_j}} \sum_{j_1'} [j^v(v_j) j_1 j_2 j_3 \dots j_{v+1} v_j] (-)^{j-j_1+j''} \sqrt{\frac{(2j+1)(2j''+1)}{(2j_1+1)(2j_2+1)}} \left\{ \sum_{j_1''} \left\{ \sum_{j_2''} \left\{ \sum_{j_3''} \right\} \right\} \right\} \\ &\quad \times \int d\zeta(v_1) \dots d\zeta(v_{v+2}) \psi^k [j^v(v_j) j_{v_1}(j_1'') j_{v_2} j_{v_3}] \psi [j^v(v_j) j_{v_1} j_{v_2} j_{v_3}], \\ &= \frac{v+1}{N_{v_1, v_j}} [j^v(v_j) j_1 j_2 j_3 \dots j_{v+1} v_j] (-)^{j-j_1+j''} \sqrt{\frac{(2j+1)(2j''+1)}{(2j_1+1)(2j_2+1)}} \left\{ \sum_{j_1''} \left\{ \sum_{j_2''} \left\{ \sum_{j_3''} \right\} \right\} \right\} \end{aligned}$$

y sustituyendo (5.8) y (A.13) en la igualdad anterior hallamos

$$[j^{v+1}(v_1, j_1) j_2 j_3 \dots j_{v+2} v_j] = (-)^{j-j_1+j''} \sqrt{\frac{(2j+1)(2j''+1)}{(2j_1+1)(2j_2+1)}} \left\{ \sum_{j_1''} \left\{ \sum_{j_2''} \left\{ \sum_{j_3''} \right\} \right\} [j^v(v_j) j_1 j_2 j_3 \dots j_{v+1} j_{v+2}]. \right.$$

Al introducir este resultado en (6.6) obtenemos

$$[j^{v+1}(v_1, j_1) j_2 j_3 \dots j_{v+2} v_j] = (-)^{j-j_1+j''} \left\{ \frac{(2j+1)(2j''+1)}{\chi(2j_1+1)\chi(2j_2+1)} \right\}^{1/2} [j^v(v_j) j_1 j_2 j_3 \dots j_{v+1} j_{v+2}]. \quad (6.8)$$

Observemos que (6.7) y (6.8) nos dicen que al pasar de la configuración  $j^n$  a la  $j^{n+1}$  sólo debemos evaluar los C.P.F. con  $v=n+1$  porque todos los demás están dados en términos de los C.P.F. de las configuraciones precedentes.

Todos los resultados anteriores se establecieron sin referencia explícita a números cuánticos adicionales que sería necesari-

rios si el número cuántico de antigüedad  $U$  no fuera suficiente para especificar completamente los estados con una  $J$  dada en la configuración  $j^n$ ; esto se hizo porque todos los resultados son válidos aún en este caso. Por ejemplo, las relaciones (0.2), (0.3) y (0.4) dan la expresión del C.P.F.  $\{[j^{U_1}(\alpha_1, \nu_1, J_1)] j^{U_2}(\alpha_2, \nu_2, J_2)\} j^n \alpha \nu J$  en términos de  $\{[j^{U_1}(\alpha_1, \nu_1, J_1)] j^{U_2}(\alpha_2, \nu_2, J_2)\} j^{U_1+U_2} \alpha \nu J$ ; también (0.7) y (0.8) dan las relaciones entre  $\{[j^{U_1}(\alpha_1, \nu_1, J_1)] j^{U_2}(\alpha_2, \nu_2, J_2)\} j^n \alpha \nu J$  y  $\{[j^{U_1}(\alpha_1, \nu_1, J_1)] j^{U_2+1}(\alpha_2, \nu_2, J_2)\} j^n \alpha \nu J$ . por lo tanto, continuaremos omitiendo los números cuánticos adicionales  $\alpha$  en lo posible.

Ahora vamos a obtener las relaciones de ortogonalidad para C.P.F. con antigüedad definida, cuya importancia radica en el hecho de que pueden usarse para checar los valores de los C.P.F.

Para C.P.F.  $j^n \rightarrow j^{n-1}$ , la relación de ortogonalidad es (cf. Ec. (2.3)):

$$\sum_{\alpha, \nu, J} [j^n \alpha \nu J] j^{n-1}(\alpha, \nu, J) j^J [j^{n-1}(\alpha, \nu, J) j^J] j^n \alpha \nu J = \delta_{\alpha \alpha'} \delta_{\nu \nu'} \delta_{J J'} \quad (0.9)$$

Consideremos una suma similar a la anterior, para  $\nu = \nu'$ , restringida al valor  $U = U' - 1$ ; usando (0.7) obtenemos para ella,

$$\sum_{\alpha, J_1} [j^n \alpha \nu J] j^{n-1}(U-1, \alpha, J_1) j^{J_1} [j^{n-1}(U-1, \alpha, J_1) j^{J_1}] j^n \alpha \nu J \\ = \frac{U(U+3-n-U)}{n(J_1+3-2U)} \sum_{\alpha, J_1} [j^U \alpha \nu J] j^{U-1}(U-1, \alpha, J_1) j^{J_1} [j^{U-1}(U-1, \alpha, J_1) j^{J_1}] j^U \alpha \nu J.$$

Puesto que no existen estados con antigüedad  $U+1$  en la configuración  $j^{U-1}$ , esta última suma es igual a  $\delta_{\alpha \alpha'}$ :

$$\sum_{\alpha, J_1} [j^U \alpha \nu J] j^{U-1}(U-1, \alpha, J_1) j^{J_1} [j^{U-1}(U-1, \alpha, J_1) j^{J_1}] j^U \alpha \nu J = \frac{U(U+3-n-U)}{n(J_1+3-2U)} \delta_{\alpha \alpha'} \quad (0.1)$$

Sustrayendo esta ecuación de (0.9), con  $U = U'$ , tenemos que

$$\sum_{\alpha, J_1} [j^U \alpha \nu J] j^{U-1}(U+1, \alpha, J_1) j^{J_1} [j^{U-1}(U+1, \alpha, J_1) j^{J_1}] j^U \alpha \nu J = \frac{(n-U)(U+3-U)}{n(J_1+3-2U)} \delta_{\alpha \alpha'} \quad (0.1)$$

Para C.P.F.  $j^n \rightarrow j^{n-2}$ , la relación de ortogonalidad se expresa como

$$\sum_{\alpha, \nu, J_1, J_2} [j^n \alpha \nu J] j^{n-2}(U, \alpha, J_1, J_2) j^{J_1} j^{J_2} [j^{n-2}(U, \alpha, J_1, J_2) j^{J_1} j^{J_2}] j^n \alpha \nu J = \delta_{\alpha \alpha'} \delta_{\nu \nu'} \delta_{J J'} \quad (0.1)$$

Tomemos una suma semejante a la anterior, para  $\nu = \nu'$ , pero  $U = U - 2$ ; usando (0.4) resulta que

$$\sum_{\alpha, J_1, J_2} [j^n \alpha \nu J] j^{n-2}(U-2, \alpha, J_1, J_2) j^{J_1} j^{J_2} [j^{n-2}(U-2, \alpha, J_1, J_2) j^{J_1} j^{J_2}] j^n \alpha \nu J \\ = \frac{n(n-1)(U+3-n-U)(U+3-n-U)}{n(n-1)(J_1+3-2U)(J_2+3-2U)} \sum_{\alpha, J_1, J_2} [j^{U-2} \alpha \nu J] j^{U-2}(U-2, \alpha, J_1, J_2) j^{J_1} j^{J_2} [j^{U-2}(U-2, \alpha, J_1, J_2) j^{J_1} j^{J_2}] j^{U-2} \alpha \nu J$$

y como no existen estados con antigüedades  $U$  o  $U+2$  en la configuración  $j^{U-2}$ , esta última suma es  $\delta_{\alpha \alpha'}$ , por lo que

$$\sum_{\alpha, J_1, J_2} [j^n \alpha \nu J] j^{n-2}(U-2, \alpha, J_1, J_2) j^{J_1} j^{J_2} [j^{n-2}(U-2, \alpha, J_1, J_2) j^{J_1} j^{J_2}] j^n \alpha \nu J$$

Si ahora consideramos la relación en (7.12), para  $U = U'$ , restringida a  $U_2 = U$ , y utilizamos (7.3), obtenemos que

$$\sum_{a_1, a_2} [j^{U_2} v_{a_1} \{j^{U-2} (v_{a_1, a_2})\} \{j^{U-2} (v_{a_1, a_2})\} \{j^{U-2} v_{a_1}\}] = \frac{v(U-1)(U+1)(U)}{2n(U-1)(U+1-2U)} \sum_{a_1, a_2} [j^{U_2} v_{a_1} \{j^{U-1} (v_{a_1, a_2})\} \{j^{U-1} (v_{a_1, a_2})\} \{j^{U-1} v_{a_1}\}]$$

y observando que de (6.1) se tiene

$$\sum_{a_1, a_2} [j^{U+2} v_{a_1} \{j^{U+2} (v_{-2, a_1, a_2})\} \{j^{U+2} (v_{-2, a_1, a_2})\} \{j^{U+2} v_{a_1}\}] = \frac{v(U+1)(U+1+2U)}{(U+1)(U+2)(U+1-2U)} \sum_{a_1, a_2} [j^{U+2} v_{a_1} \{j^{U+1} (v_{-2, a_1, a_2})\} \{j^{U+1} (v_{-2, a_1, a_2})\} \{j^{U+1} v_{a_1}\}]$$

y que en la configuración  $j^U$  sólo existen estados con antigüedad  $U-2$  y  $U$ , resulta que

$$\sum_{a_1, a_2} [j^{U+2} v_{a_1} \{j^{U+2} (v_{-2, a_1, a_2})\} \{j^{U+2} (v_{-2, a_1, a_2})\} \{j^{U+2} v_{a_1}\}] - \frac{(U+1)(U+1+2U)(U+1)(U+1)}{2n(U+1)(U+2)(U+1-2U)} \sum_{a_1, a_2} [j^{U+2} v_{a_1} \{j^{U+1} (v_{-2, a_1, a_2})\} \{j^{U+1} (v_{-2, a_1, a_2})\} \{j^{U+1} v_{a_1}\}] \quad (6.14)$$

Si sustraemos (6.13) y (6.14) de (6.12), para  $U = U'$ , obtenemos una relación similar a las anteriores, con  $U_2 = U+2$ .

Otro tipo de relaciones de ortogonalidad lo hallamos al evaluar sumas de la forma

$$\sum_{a_1} (a_1+1) [j^{U+1} (v_{a_1, a_1}) \{j^{U+1} v_{a_1}\} \{j^{U+1} (v_{a_1, a_1})\} \{j^{U+1} v_{a_1}\}].$$

Para  $U_1 = U_2 = U+1$ , reducimos los C.P.F. mediante (6.5) y utilizamos la relación de ortogonalidad (6.10) en la configuración  $j^{U+1}$ ; de esta manera obtenemos

$$\sum_{a_1} (a_1+1) [j^{U+1} v_{a_1} \{j^{U+1} (v_{a_1, a_1})\} \{j^{U+1} v_{a_1}\} \{j^{U+1} (v_{a_1, a_1})\} \{j^{U+1} v_{a_1}\}] = \frac{(U+1)(U+1)}{2n(U+1-2U)} (a_1+1) \delta_{a_1, a_1} \quad (6.15)$$

De la misma forma procedemos cuando  $U_1 = U_2 = U-1$ : reducimos los C.P.F. usando (6.7) y mediante la ecuación anterior a (6.8) arreglamos la suma de manera que podamos utilizar (6.11):

$$\begin{aligned} & \sum_{a_1} (a_1+1) [j^{U+1} v_{a_1} \{j^{U+1} (v_{-1, a_1, a_1})\} \{j^{U+1} (v_{-1, a_1, a_1})\} \{j^{U+1} v_{a_1}\}] \\ &= \frac{v(U+1)(U+1)}{2n(U+1-2U)} \sum_{a_1} (a_1+1) [j^{U+1} v_{a_1} \{j^{U+1} (v_{-1, a_1, a_1})\} \{j^{U+1} (v_{-1, a_1, a_1})\} \{j^{U+1} v_{a_1}\}], \\ &= \frac{(U+1)(U+1)}{2n} \sum_{a_1} [j^{U+1} v_{-1, a_1, a_1} \{j^{U+1} (v_{a_1, a_1})\} \{j^{U+1} (v_{a_1, a_1})\} \{j^{U+1} v_{-1, a_1, a_1}\}], \\ &= \frac{(U+1)(U+1)}{2n} (2U+1) \frac{[v(U+1)(U+1)] \delta_{a_1, a_1}}{(U+1)(U+1-2(U-1))} \delta_{a_1, a_1} \end{aligned}$$

de modo que

$$\sum_{a_1} (a_1+1) [j^{U+1} v_{a_1} \{j^{U+1} (v_{-1, a_1, a_1})\} \{j^{U+1} (v_{-1, a_1, a_1})\} \{j^{U+1} v_{a_1}\}] = \frac{(U+1)(U+1)(U+1)}{2n(U+1-2U)} (a_1+1) \delta_{a_1, a_1} \quad (6.16)$$

Por último, en el caso en que  $U_1 = U-1$  y  $U_2 = U+1$ , usamos (6.7) y la ecuación anterior a (6.5) para reducir el C.P.F. de  $U_1$ , y (6.3), para el C.P.F. de  $U_2$ , y obtener la relación de ortogonalidad en la configuración  $j^{U+1}$ ; así encontramos que

$$\sum_{a_1} (a_1+1) [j^{U+1} v_{a_1} \{j^{U+1} (v_{-1, a_1, a_1})\} \{j^{U+1} (v_{-1, a_1, a_1})\} \{j^{U+1} v_{a_1}\}] = 0 \quad (6.17)$$

Usando la Ec. (5.3) podemos obtener relaciones de recurrencia

para los C.P.F. en el acoplamiento L-S, en el esquema de antigüedad, procediendo en la misma forma que en el acoplamiento j-j. Por esto, vamos a mencionar los resultados obtenidos sin demostrarlos<sup>7)</sup>.

De (5.13) obtenemos la relación de recurrencia

$$[L^{2j+1}(v, L, S), RLS] \{R^{2j} vLS\} = \left\{ \frac{(2j+1)(2j+2)(4j+1)(2j+1)}{2(2j+1)(2j+2)(2j+1)} \right\}^{1/2} [R^{2j+1}(v, L, S) R^{2j} vLS] \quad (6.1)$$

que es semejante a (6.5). Observemos que pudimos obtener (6.13) de (6.5) reemplazando  $2j+1$  por  $4l+2 = \{(2(1/2)+1)(2l+1)\}$ . Esto tiene su origen en que, como se vió en la sección anterior, los valores propios  $Q(n, v)$  difieren por un factor  $\frac{1}{2}$  en los esquemas de acoplamiento j-j y L-S, haciendo la sustitución mencionada. Como (6.5) y (6.13) involucran sólo cocientes de  $Q(n, v)$ , el factor extra desaparece, y de aquí lo simple de su relación.

La similitud va aún más lejos; por ejemplo, la relación análoga a la ecuación anterior a (6.3) es

$$[R^{2j+1}(v, L, S), RLS] \{R^{2j+2} vLS\} = (-1)^{2j+1+1+1-1-2} \left\{ \frac{(2j+1)(2j+1)2(2j+1)}{(2j+1)(2j+1)(2j+1)(2j+1-2j)} \right\}^{1/2} [R^{2j}(v, L, S) RLS] \{R^{2j+1} v, L, S\} \quad (6.14)$$

y notamos que esta relación se obtiene de su análoga reemplazando la fase  $(-)^j$  por  $(-)^{1+S}$  y sustituyendo  $(2S_1+1)(2L_1+1)$  por  $(2J_1+1)$ , además de realizar el cambio  $4l+2$  por  $2j+1$ . En consecuencia, todas las relaciones en el acoplamiento L-S para los C.P.F. en el esquema de antigüedad son las mismas que en el acoplamiento j-j si se hacen los cambios indicados.

## SECCION 7. CALCULO DE ELEMENTOS DE MATRIZ DE OPERADORES DE UNO Y DE DOS CUERPOS EN EL ESQUEMA DE ANTIGÜEDAD.

Primero derivaremos relaciones entre elementos de matriz de operadores de un cuerpo en diferentes configuraciones.

Para operadores tensoriales impares hemos obtenido que (Cf.

(5.6))

$$\langle j^m v \alpha j \parallel \sum_{i=1}^n \rho_{im}^{(k)}(i) \parallel j^m v \alpha' j' \rangle = \langle j^m v \alpha j \parallel \sum_{i=1}^n \rho_{im}^{(k)}(i) \parallel j^m v \alpha' j' \rangle_{\text{C.P.F.}}, k \text{ impar. (7.1)}$$

En el caso de tensores pares, podemos utilizar (3.3) en el esquema de antigüedad y mediante (A.53) obtenemos para ella la ex-

presión

$$\langle j^u v \alpha \mathbb{J} \parallel \sum_{k=1}^n f^{(k)}(\omega) \parallel j^u v, \alpha' \rangle = n \sum_{j_1} (-)^{j_1+3+3k} \sqrt{(2j_1+1)(2j_1+3)} \left\{ \begin{matrix} j & j & j_1 \\ j & j & j_1 \end{matrix} \right\} \times \langle j^u \mathbb{J} \parallel \sum_{k=1}^n f^{(k)}(\omega) \rangle [j^u v \alpha \{j^u v, \alpha, j_1\}] [j^{u-1}(\alpha, j_1) \{j^u v, \alpha, j_1\}]. \quad (7.2)$$

Puesto que  $v$  y  $v'$  difieren de  $u$  en una unidad,  $v = v'$  o  $v' = u+2$ .

Si  $v' = u-2$ , existe sólo una posibilidad para  $u_1$ , que  $u_1 = u-1 = v'+1$  y en este caso la suma en (7.2) es sólo sobre  $j_1$  (y en  $\alpha$ , si es necesario); usando las relaciones (6.6) y (6.7) obtenemos para este caso

$$\begin{aligned} \langle j^u v \alpha \mathbb{J} \parallel \sum_{k=1}^n f^{(k)}(\omega) \parallel j^u v, \alpha' \rangle &= n \sum_{j_1} (-)^{j_1+3+3k} \sqrt{(2j_1+1)(2j_1+3)} \left\{ \begin{matrix} j & j & j_1 \\ j & j & j_1 \end{matrix} \right\} \\ &\times \langle j^u \mathbb{J} \parallel \sum_{k=1}^n f^{(k)}(\omega) \rangle [j^u v \alpha \{j^u v, \alpha, j_1\}] [j^{u-1}(\alpha, j_1) \{j^u v, \alpha, j_1\}]. \\ &= n \left\{ \frac{u(2j_1+3-n-u)}{n(2j_1+3-2v)} \frac{(n-u+1)v}{2n} \right\}^{1/2} \sum_{j_1} (-)^{j_1+3+3k} \sqrt{(2j_1+1)(2j_1+3)} \left\{ \begin{matrix} j & j & j_1 \\ j & j & j_1 \end{matrix} \right\} \\ &\times \langle j^u \mathbb{J} \parallel \sum_{k=1}^n f^{(k)}(\omega) \rangle [j^u v \alpha \{j^u v, \alpha, j_1\}] [j^{u-1}(\alpha, j_1) \{j^u v, \alpha, j_1\}]. \end{aligned}$$

de donde, comparando la suma de esta última expresión con (7.2), obtenemos que

$$\begin{aligned} \langle j^u v \alpha \mathbb{J} \parallel \sum_{k=1}^n f^{(k)}(\omega) \parallel j^u v, \alpha' \rangle &= \left\{ \frac{(2j_1+3-n-u)(n-u+1)v}{2(2j_1+3-2v)} \right\}^{1/2} \langle j^u v \alpha \mathbb{J} \parallel \sum_{k=1}^n f^{(k)}(\omega) \parallel j^u v, \alpha' \rangle \sqrt{k}, \quad (7.3) \end{aligned}$$

ya que no existen estados con antigüedad  $u+1$  en la configuración  $j^{u-1}$ .

La otra posibilidad es que  $v' = u$  y, en este caso, la suma en (7.2) incluye términos con  $u_1 = u+1$ . Ya que una aplicación directa de (6.6) y (6.7) nos dá una expresión con C.P.F.  $j^{u+2} \rightarrow j^{u+1}$  y C.P.F.  $j^u \rightarrow j^{u-1}$  sin que la expresión resultante se reduzca a la configuración  $j^u$  como antes, usamos el siguiente procedimiento: utilizamos (3.2) para evaluar dicho elemento de matriz

$$\langle j^u v \alpha \mathbb{J} \parallel \sum_{k=1}^n f^{(k)}(\omega) \parallel j^u v, \alpha' \rangle = n \sum_{j_1} \langle j^u v \alpha \mathbb{J} \parallel \sum_{k=1}^n f^{(k)}(\omega) \parallel j^u v, \alpha' \rangle \times \left\{ [j^u v \alpha \{j^u v, \alpha, j_1\}] [j^{u-1}(\alpha, j_1) \{j^u v, \alpha, j_1\}] + (j^u v \alpha \{j^u v, \alpha, j_1\}) [j^{u-1}(\alpha, j_1) \{j^u v, \alpha, j_1\}] \right\}$$

La segunda suma en esta expresión se reduce a una suma en la configuración  $j^{u+2}$  mediante (6.6); para obtener la expresión completa del elemento de matriz en la configuración  $j^{u+2}$  tenemos que agregarle al término anterior una parte que puede reducirse a una suma de elementos de matriz en la configuración  $j^u$  usando (6.9); así se obtiene

$$\langle j^u v \alpha \mathbb{J} \parallel \sum_{k=1}^n f^{(k)}(\omega) \parallel j^u v, \alpha' \rangle =$$

$$= n \left\{ 1 - \frac{n-1}{2} \left( \frac{\sum_{i=1}^n \alpha_i}{\sum_{i=1}^n \alpha_i - n-1} \right) \right\} \langle j^{\nu+2} \nu \alpha \beta \parallel \sum_{i=1}^n f_{\alpha}^{(k)}(i) \parallel j^{\nu} \nu \alpha' \beta' \rangle$$

$$= \frac{n-1}{2} \langle j^{\nu+2} \nu \alpha \beta \parallel \sum_{i=1}^n f_{\alpha}^{(k)}(i) \parallel j^{\nu} \nu \alpha' \beta' \rangle + (1 - \frac{n-1}{2}) \langle j^{\nu+2} \nu \alpha \beta \parallel \sum_{i=1}^n f_{\alpha}^{(k)}(i) \parallel j^{\nu} \nu \alpha' \beta' \rangle. \quad (7.4)$$

de modo que

$$\langle j^{\nu+2} \nu \alpha \beta \parallel \sum_{i=1}^n f_{\alpha}^{(k)}(i) \parallel j^{\nu} \nu \alpha' \beta' \rangle = \frac{n-1}{2} \langle j^{\nu+2} \nu \alpha \beta \parallel \sum_{i=1}^n f_{\alpha}^{(k)}(i) \parallel j^{\nu} \nu \alpha' \beta' \rangle + (1 - \frac{n-1}{2}) \langle j^{\nu+2} \nu \alpha \beta \parallel \sum_{i=1}^n f_{\alpha}^{(k)}(i) \parallel j^{\nu} \nu \alpha' \beta' \rangle. \quad (7.4)$$

Esta ecuación es consistente con (3.4): utilizando (3.3) en

(7.4), para  $k=0$ , obtenemos

$$\langle j^{\nu+2} \nu \alpha \beta \parallel \sum_{i=1}^n f_{\alpha}^{(0)}(i) \parallel j^{\nu} \nu \alpha' \beta' \rangle = \left\{ \frac{n-1}{2} (\nu+2) + (1 - \frac{n-1}{2}) \sqrt{\frac{2\nu+1}{2\nu+3}} \right\} \langle \alpha \parallel f_{\alpha}^{(0)} \parallel \alpha' \rangle.$$

$$= \frac{n-1}{2} \langle j^{\nu+2} \nu \alpha \beta \parallel \sum_{i=1}^n f_{\alpha}^{(0)}(i) \parallel j^{\nu} \nu \alpha' \beta' \rangle. \quad (7.5)$$

Ahora expresaremos los elementos de matriz en la configuración  $j^{\nu+2}$  en términos de aquellos en la configuración  $j^{\nu}$  (sólo consideramos el caso  $k > 0$  debido a (7.5)); para este fin, calculemos el elemento de matriz

$$\langle j^{\nu+2} \nu \alpha \beta \parallel \sum_{i=1}^{\nu+2} f_{\alpha}^{(k)}(i) \parallel j^{\nu} \nu \alpha' \beta' \rangle$$

$$= \int \delta(\omega) \dots \delta(\omega_{\nu+2}) \psi^k [j^{\nu+2} \nu \alpha \beta] \sum_{i=1}^{\nu+2} f_{\alpha}^{(k)}(i) \left\{ \frac{1}{N_{\nu+1, \nu+2}} \psi [j^{\nu}(\nu \alpha')] j_{\nu+1, \nu+2}^{\nu} \nu \alpha' \beta' \right\}$$

$$= \frac{1}{N_{\nu+1, \nu+2}} \left( \frac{\nu+2}{2} \right) \int \delta(\omega) \dots \delta(\omega_{\nu+2}) \psi^k [j^{\nu+2} \nu \alpha \beta] \left\{ \sum_{i=1}^{\nu} f_{\alpha}^{(k)}(i) \psi [j^{\nu}(\nu \alpha')] j_{\nu+1, \nu+2}^{\nu} \nu \alpha' \beta' \right\}$$

$$+ \int \delta(\omega) \dots \delta(\omega_{\nu+2}) \psi^k [j^{\nu+2} \nu \alpha \beta] \left\{ f_{\alpha}^{(k)}(\nu+1) + f_{\alpha}^{(k)}(\nu+2) \right\} \psi [j^{\nu}(\nu \alpha')] j_{\nu+1, \nu+2}^{\nu} \nu \alpha' \beta'$$

La primera integral en la última igualdad se puede evaluar directamente usando C.F.P.  $j^{\nu+2} \rightarrow j^{\nu}$ , utilizando (5.5) después de integrar sobre las coordenadas de las dos últimas partículas:

$$\frac{1}{N_{\nu+1, \nu+2}} \left( \frac{\nu+2}{2} \right) \langle j^{\nu} \nu \alpha \beta \parallel \sum_{i=1}^{\nu} f_{\alpha}^{(k)}(i) \parallel j^{\nu} \nu \alpha' \beta' \rangle$$

$$= \langle j^{\nu} \nu \alpha \beta \parallel \sum_{i=1}^{\nu} f_{\alpha}^{(k)}(i) \parallel j^{\nu} \nu \alpha' \beta' \rangle.$$

La segunda integral puede escribirse como

$$\frac{1}{N_{\nu+1, \nu+2}} \left( \frac{\nu+2}{2} \right) \int \delta(\omega) \dots \delta(\omega_{\nu+2}) \left\{ \psi_{\nu+1} \psi [j^{\nu}(\nu \alpha')] j_{\nu+1, \nu+2}^{\nu} \nu \alpha' \beta' \right\}^*$$

$$\times \left\{ f_{\alpha}^{(k)}(\nu+1) + f_{\alpha}^{(k)}(\nu+2) \right\} \psi [j^{\nu}(\nu \alpha')] j_{\nu+1, \nu+2}^{\nu} \nu \alpha' \beta'.$$

Exhibimos explícitamente la antisimetrización que aparece:

$$\psi_{\nu+1} \psi [j^{\nu}(\nu \alpha')] j_{\nu+1, \nu+2}^{\nu} \nu \alpha' \beta' = \psi [j^{\nu}(\nu \alpha')] j_{\nu+1, \nu+2}^{\nu} \nu \alpha' \beta'$$

$$- \sum_{\lambda \neq \nu+1, \nu+2} \left\{ \psi [j^{\nu}(\nu \alpha')] j_{\lambda, \nu+1}^{\nu} \nu \alpha' \beta' \right\} \psi [j^{\nu}(\nu \alpha')] j_{\nu+1, \lambda}^{\nu} \nu \alpha' \beta' + \sum_{\lambda \neq \nu+1, \nu+2} \psi [j^{\nu}(\nu \alpha')] j_{\lambda, \lambda}^{\nu} \nu \alpha' \beta'.$$

Quando insertamos esta expresión en la anterior, la integral del primer término se anula para  $k > 0$  ya que  $j_{\nu+1}$  y  $j_{\nu+2}$  están acopladas a cero en ambas funciones y no es posible satisfacer la condición triangular; la integración de cada término en la





Sustituyendo este resultado en (7.6) e integrando en las coordenadas de las partículas  $v+1$  y  $h$ , vemos que se obtiene una suma de  $v$  integrales idénticas

$$\int \lambda_0(\omega) \dots \lambda_0(\omega_{i+2}) \psi^* [j^v \nu JM] \left( \sum_{\alpha} f_{\alpha}^{(k)}(\omega) \right) \psi [j^v \nu JM]$$

donde  $i$  es cualquier partícula que aparece en  $\psi [j^v \nu JM]$  (nombre cambiado el nombre a  $v+2$ ); con esto, (7.6) se convierte en

$$-\frac{4}{N_{v+1, vJ}} \sum_{\alpha} f_{\alpha}^{(k)}(\omega) \frac{1}{2^{v+1}} \langle j^v \nu JM | \sum_{\alpha} f_{\alpha}^{(k)}(\omega) | j^v \nu JM \rangle$$

$$= -\frac{4}{2^{v+1} - 2v} \langle j^v \nu JM | \sum_{\alpha} f_{\alpha}^{(k)}(\omega) | j^v \nu JM \rangle.$$

Por lo tanto, para operadores tensoriales pares ( $k > 0$ ) los elementos de matriz en la configuración  $j^{v+2}$  se pueden expresar como

$$\langle j^{v+2} \nu JM | \sum_{\alpha} f_{\alpha}^{(k)}(\omega) | j^v \nu JM \rangle = \left(1 - \frac{4}{2^{v+1} - 2v}\right) \langle j^v \nu JM | \sum_{\alpha} f_{\alpha}^{(k)}(\omega) | j^v \nu JM \rangle.$$

Usando este valor en la expresión para los elementos de matriz de la configuración  $j^n$ , (7.5), obtenemos finalmente que

$$\langle j^v \nu JM | \sum_{\alpha} f_{\alpha}^{(k)}(\omega) | j^n \nu JM \rangle = \frac{(2n-2m)}{2^{n-1} - 2v} \langle j^v \nu JM | \sum_{\alpha} f_{\alpha}^{(k)}(\omega) | j^n \nu JM \rangle, \quad k = 0 \text{ par. (7.7)}$$

Observemos que el valor de este elemento de matriz, en contraste con el comportamiento de los operadores tensoriales impares (Cf. (7.1)), depende de  $n$  dados  $v$ ,  $J$  y  $J'$ ; este valor decrece linealmente con  $n$ , invirtiendo su signo a la mitad de la capa (esto es evidente debido a que su valor para  $n = 2j+1-m$  tiene la misma magnitud, aunque signo opuesto, que para  $n = m$ ). Que los elementos de matriz para operadores tensoriales de orden  $k > 0$  par, se anulan para estados en la configuración  $j^{(2j+1)/2}$  con la misma antigüedad  $v < \frac{1}{2}(2j+1)$  está demostrado en (7.7); que lo mismo es cierto para  $v = \frac{1}{2}(2j+1)$  se demuestra en forma similar; si agregamos a la función  $\psi [j^v \nu JM]$ ,  $v = \frac{1}{2}(2j+1)$ , un par acoplado a  $J=0$  y antisimetrizamos, la nueva función debe anularse debido al principio de exclusión; de aquí se sigue que

$$\int \lambda_0(\omega) \dots \lambda_0(\omega_{i+2}) \left\{ \psi_{v+2} \psi [j^{v+2} (\nu, J) j_{v+1, v+2}^{(0)} (\omega) JM] \right. \\ \left. + \left\{ f_{\alpha}^{(k)}(\omega_{v+1}) + f_{\alpha}^{(k)}(\omega_{v+2}) \right\} \psi [j^v (\nu, J) j_{v+1, v+2}^{(0)} (\omega) JM] \right\} = 0$$

y usando el procedimiento que utilizamos para calcular (7.6) obtenemos en este caso

$$\frac{1}{2^{v+1}} \langle j^{v+2} \nu JM | \sum_{\alpha} f_{\alpha}^{(k)}(\omega) | j^v \nu JM \rangle = 0, \quad k > 0 \text{ par. (7.8)}$$

Por lo tanto,

$$D = \left\{ \sum_{k=0}^{2j+1-n} W_k \right\} \quad (7.6')$$

Las relaciones (7.1), (7.3), (7.6) y (7.6') muestran que, en el esquema de antigüedad, estados en la configuración  $j^n$  son iguales, excepto por una fase, a aquéllos en la configuración complementaria  $j^{2j+1-n}$  con los mismos números cuánticos  $J, \nu$  y  $J$ . De (7.1) y (7.7) podemos inferir que los estados en la configuración  $j^{2j+1-n}$ , con la misma  $W$ , tienen las mismas fases relativas que los estados correspondientes en la configuración  $j^n$ . Por otra parte, de (7.3) vemos que los elementos de matriz entre estados con antigüedades  $\nu-2$  y  $\nu$  tienen la misma fase en cualquier configuración  $j^n$ ; en el esquema  $m$ , los elementos de matriz para tensores impares en la configuración  $j^n$  tienen signo contrario a los correspondientes en la configuración  $j^{2j+1-n}$ ; por lo tanto, los estados de la configuración  $j^{2j+1-n}$  con antigüedades  $\nu$  y  $\nu-2$  tienen signos relativos opuestos a los estados correspondientes en la configuración  $j^n$ . También de (7.3) concluimos que la diferencia de fase de un estado con  $\nu$  par del estado con  $\nu=0$  es  $(-)^{\nu/2}$ . Acoplando  $\frac{1}{2}(2j+1)$  pares con  $J=0$  y anti-simetrizando obtenemos el estado  $J=0, \nu=0$  de la configuración  $j^{2j+1}$ ; la diferencia de fase que se encuentra entre este estado y el estado en el esquema  $m$   $\chi[j, j-1, \dots, -j+1, -j]$ , es<sup>9)</sup>:

$$\begin{aligned} & (-)^{(2j+1)/4} \text{ si } (2j+1)/4 \text{ es entero;} \\ & (-)^{(2j-1)/4}, \text{ si no lo es.} \end{aligned}$$

Para el estado con  $J=j, \nu=1$  la diferencia de fase que se halla es opuesta a la del caso  $\nu=0$ .

Ahora nos ocuparemos del cálculo de elementos de matriz para operadores de dos cuerpos en el esquema de antigüedad. Consideremos que es operador escalar de dos cuerpos está dado como una suma de productos escalares de operadores tensoriales,

$$V_{12} = \sum_k (f_k^{(1)}(1) \cdot f_k^{(2)}(2)).$$

En el esquema de antigüedad, la Ec. (5.1) puede reescribirse como

$$\langle j^{\nu} \nu j | \sum_{k=0}^{\infty} V_{km} | j^{\nu} \nu j \rangle = \sum_{k=0}^{\infty} V_{km} \langle j^{\nu} \nu j | U_{k0}^{(\nu)} | j^{\nu} \nu j \rangle \quad (1.9)$$

donde  $k > 0$  y  $U_{k0}^{(\nu)} = \frac{1}{2k} u^{(k)}(1)$ . Utilizando (A.10), (A.11) y (6.30) vemos que los elementos de matriz típicos que aparecen en esta expresión tienen la forma

$$\begin{aligned} & \langle j^{\nu} \nu j m | \sum_{k=0}^{\infty} V_{km} U_{k0}^{(\nu)} | j^{\nu} \nu j m \rangle \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} V_{km} \sum_{\nu', j', m'} \langle j^{\nu} \nu j m | U_{k0}^{(\nu)} | j^{\nu'} \nu' j' m' \rangle \langle j^{\nu'} \nu' j' m' | U_{k0}^{(\nu)} | j^{\nu} \nu j m \rangle \\ &= \sum_{\nu', j'} \frac{(-1)^{j-j'}}{2j+1} \langle j^{\nu} \nu j m | U_{k0}^{(\nu)} | j^{\nu'} \nu' j' m \rangle \langle j^{\nu'} \nu' j' m | U_{k0}^{(\nu)} | j^{\nu} \nu j m \rangle \end{aligned} \quad (7.1)$$

Por otra parte, las reglas de selección para elementos de matriz de operadores de un cuerpo (cf. párrafo posterior a la Ec. (7.2)), indican que  $\nu_1 = \nu = \nu'$  y/o  $\nu_1 = \nu + 2$  y  $\nu_1 = \nu - 2$ ; entonces, aparte de  $\nu = \nu'$ ,  $|\nu - \nu'| = 2$  o  $4$ . Consideraremos primero los casos  $\nu_1 = \nu + 4$  y  $\nu_1 = \nu - 4$  por ser más simples que aquél con  $\nu_1 = \nu$ .

Si  $\nu_1 = \nu + 4$ , entonces  $\nu_1 = \nu + 2$ ; sustituyendo (7.10) en (7.1) para este caso hallamos

$$\begin{aligned} & \langle j^{\nu} \nu j | \sum_{k=0}^{\infty} V_{km} | j^{\nu} \nu + 4, j \rangle \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2} \langle j^{\nu} \nu j m | U_{k0}^{(\nu)} | j^{\nu} \nu - 2, j \rangle \langle j^{\nu} \nu - 2, j m | U_{k0}^{(\nu)} | j^{\nu} \nu j m \rangle \end{aligned}$$

Ahora, si en la expresión anterior a (7.3) sustituimos

$$\begin{aligned} [j^{\nu} \nu + 4, j_1] j_2 j_3 j^{\nu} \nu j] &= \left\{ \frac{(2j+1)(2j+2\nu)}{2(2j+1-2\nu)} \right\}^{1/2} [j^{\nu} \nu + 4, j_1 j_2 j_3 j^{\nu} \nu j] \\ [j^{\nu} \nu + 4, j_1] j_2 j_3 j^{\nu} \nu - 2, j] &= \left\{ \frac{2\nu}{2\nu} \right\}^{1/2} [j^{\nu} \nu + 4, j_1] j_2 j_3 j^{\nu} \nu - 2, j] \end{aligned}$$

(relaciones que se obtienen de (6.5)), obtenemos

$$\begin{aligned} & \langle j^{\nu} \nu - 2, j m | \sum_{k=0}^{\infty} V_{km} | j^{\nu} \nu + 4, j \rangle \\ &= \left\{ \frac{(2j+1-2\nu)(2j+1)(2j+2\nu)}{4(2j+1-2\nu)} \right\}^{1/2} \langle j^{\nu} \nu + 4, j m | \sum_{k=0}^{\infty} V_{km} | j^{\nu} \nu + 4, j \rangle \end{aligned} \quad (7.1)$$

y empleando esta expresión y (7.3), encontramos la siguiente relación entre elementos de matriz en la configuración  $j^{\nu}$  y elementos de matriz en la configuración  $j^{\nu'}$ :

$$\begin{aligned} & \langle j^{\nu} \nu + 4, j m | \sum_{k=0}^{\infty} V_{km} | j^{\nu} \nu + 4, j \rangle \\ &= \left\{ \frac{(2j+1-2\nu)(2j+1)(2j+2\nu)(2j+1)(2j+2\nu)}{8(2j+1-2\nu)(2j+1)(2j+2\nu)} \right\}^{1/2} \\ & \langle j^{\nu} \nu + 4, j m | \sum_{k=0}^{\infty} V_{km} | j^{\nu} \nu + 4, j \rangle \end{aligned} \quad (7.1)$$

En el siguiente caso,  $\nu_1 = \nu - 2$ , los posibles valores de  $\nu_1$  son  $\nu$  y  $\nu - 2$ ; de acuerdo con esto, la suma en (7.10) se convierte en

$$\begin{aligned} & \sum_{j'} \frac{(-1)^{j-j'}}{2j+1} \left\{ \langle j^{\nu} \nu j m | U_{k0}^{(\nu)} | j^{\nu} \nu j, m \rangle \langle j^{\nu} \nu j, m | U_{k0}^{(\nu)} | j^{\nu} \nu - 2, j \rangle \right. \\ & \left. + \langle j^{\nu} \nu j m | U_{k0}^{(\nu)} | j^{\nu} \nu - 2, j, m \rangle \langle j^{\nu} \nu - 2, j, m | U_{k0}^{(\nu)} | j^{\nu} \nu - 2, j \rangle \right\} \end{aligned}$$

y sustituyendo (7.3), la expresión anterior a (7.7) y (7.7) misma directamente en esta igualdad obtenemos que

$$\langle j^{\nu} u \alpha J | \sum_{k,m} V_{km} | j^{\nu} u-2, \alpha' J \rangle = \frac{(j+1-n)}{2(j+1-2\nu)} \left( \frac{(j+1-n)(n-\nu+1)}{2(j+1-2\nu)} \right)^{1/2} \langle j^{\nu} u \alpha J | \sum_{k,m} V_{km} | j^{\nu} u-2, \alpha' J \rangle. \quad (7.13)$$

Estos elementos de matriz no sólo se anulan para  $n=(2j+1)/2$ , cuando  $u < (2j+1)/2$ , sino también para  $n = \nu = (2j+1)/2$ , debido a (7.8').

Consideremos ahora el caso en que  $\nu' = \nu$ , y, en consecuencia,  $u$ , puede tomar los valores  $\nu, \nu \pm 2$ . Comenzamos introduciendo directamente en (7.10) las expresiones para los elementos de matriz reducidos, dadas por (7.3) y (7.4) para tensores pares, y (7.1) para tensores impares, y sustituyendo lo que obtengamos en (7.9); de esta manera encontramos

$$\begin{aligned} \langle j^{\nu} u J | \sum_{k,m} V_{km} | j^{\nu} u J \rangle &= \sum_{k,m} \frac{1}{2} \langle j || f^{(k)} || j \rangle^2 \langle j^{\nu} u J | (U^{(k)} \cdot U^{(k)}) | j^{\nu} u J \rangle \\ &+ \sum_{k > 0, \text{pa.}} \frac{1}{2} \langle j || f^{(k)} || j \rangle^2 \sum_{j_1, j_2} \frac{(j+1-n)(j_1+1-n)(j_2+1-n)}{2(j+1-2\nu)} \langle j^{\nu+1} u J || U^{(k)} || j^{\nu+1} u+2, j_1 \rangle \\ &\times \langle j^{\nu+1} u+2, j_1 || U^{(k)} || j^{\nu} u J \rangle + \left( \frac{j+1-n}{2(j+1-2\nu)} \right)^2 \langle j^{\nu} u J || U^{(k)} || j^{\nu} u J \rangle \langle j^{\nu} u J || U^{(k)} || j^{\nu} u J \rangle \\ &+ \frac{(j+1-n)(j-n)(j-1-n)}{2(j+1-2\nu)} \langle j^{\nu} u J || U^{(k)} || j^{\nu} u-2, j_1 \rangle \langle j^{\nu} u-2, j_1 || U^{(k)} || j^{\nu} u J \rangle \} \\ &- \frac{n}{2(j+1)} \sum_{k > 0} \langle j || f^{(k)} || j \rangle^2 + \langle j^{\nu} u J | \sum_{k,m} (f^{(k)}(e) \cdot f^{(k)}(m)) | j^{\nu} u J \rangle. \end{aligned} \quad (7.14)$$

Trabajaremos por el momento con los términos entre corchetes; a éstos les vamos a sumar y restar el segundo sumando que allí aparece, sin el coeficiente, y lo mismo hacemos con el tercer sumando; obtenemos así

$$\begin{aligned} &\frac{(n-n)(j+1-n-n)}{2(j+1-2\nu)} \langle j^{\nu} u J || U^{(k)} || j^{\nu} u+2, j_1 \rangle \langle j^{\nu} u+2, j_1 || U^{(k)} || j^{\nu} u J \rangle \\ &- \frac{(n-n)(j+1-n-n)}{(j+1-2\nu)^2} \langle j^{\nu} u J || U^{(k)} || j^{\nu} u J \rangle \langle j^{\nu} u J || U^{(k)} || j^{\nu} u J \rangle \\ &+ \frac{(n-n)(j+1-n-n)}{2(j+1-2\nu)} \langle j^{\nu} u J || U^{(k)} || j^{\nu} u-2, j_1 \rangle \langle j^{\nu} u-2, j_1 || U^{(k)} || j^{\nu} u J \rangle \\ &+ \langle j^{\nu} u J || U^{(k)} || j^{\nu} u J \rangle \langle j^{\nu} u J || U^{(k)} || j^{\nu} u J \rangle + \langle j^{\nu} u J || U^{(k)} || j^{\nu} u-2, j_1 \rangle \\ &\times \langle j^{\nu} u-2, j_1 || U^{(k)} || j^{\nu} u J \rangle. \end{aligned} \quad (7.15)$$

Estos dos últimos sumandos, junto con el primero de (7.14) nos dan

$$\langle j^{\nu} u J | \sum_{k,m} V_{km} | j^{\nu} u J \rangle = \frac{\nu(\nu-1)}{2} \frac{\langle j || f^{(0)} || j \rangle^2}{2j+1} + \frac{n}{2(j+1)} \sum_{k > 0} \langle j || f^{(k)} || j \rangle^2;$$

en donde hemos utilizado que

$$\langle j^{\nu} u J | \sum_{k,m} (f^{(k)}(e) \cdot f^{(k)}(m)) | j^{\nu} u J \rangle = \frac{(n-1)n}{2} \frac{\langle j || f^{(0)} || j \rangle^2}{2j+1}.$$

Ya que (7.3) y (7.7) nos dicen que

$$\langle j^{\nu} u J || U^{(k)} || j^{\nu} u-2, j_1 \rangle = \left\{ \frac{(j+1-2\nu)}{4(j+1-2\nu)} \right\}^{1/2} \langle j^{\nu} u+2, j_1 || U^{(k)} || j^{\nu} u-2, j_1 \rangle.$$

$$\langle j^u u s | \underline{U}^{(u)} | j^u u s \rangle = \frac{2j+1}{2} \langle j^u u s | \underline{U}^{(u)} | j^u u s \rangle$$

los tres primeros sumandos en (7.13) también se pueden escribir como

$$\begin{aligned} & \frac{(n-u)(2j+1-u)}{2(2j-1-2u)} \langle j^u u s | \underline{U}^{(u)} | j^u u s \rangle + \frac{(n-u)(2j+1-u)}{2(2j-1-2u)} \langle j^u u s | \underline{U}^{(u)} | j^u u s \rangle \\ & - 4 \frac{(n-u)(2j+1-u)}{(2j-3-2u)^2} \langle j^u u s | \underline{U}^{(u)} | j^u u s \rangle + \frac{(n-u)(2j+1-u)}{4(2j+1-2u)} \langle j^u u s | \underline{U}^{(u)} | j^u u s \rangle \\ & + \frac{(n-u)(2j+1-u)}{4(2j+1-2u)} \langle j^u u s | \underline{U}^{(u)} | j^u u s \rangle + \frac{(n-u)(2j+1-u)}{4(2j+1-2u)} \langle j^u u s | \underline{U}^{(u)} | j^u u s \rangle \end{aligned}$$

Ahora, sumamos y restamos en esta expresión los elementos de matriz reducidos de los sumandos segundo y tercero, multiplicados por el factor del elemento de matriz reducido del primer sumando, resultando

$$\frac{(n-u)(2j+1-u)}{2(2j-1-2u)} \left\{ \sum_{u_1} \langle j^u u s | \underline{U}^{(u)} | j^u u s \rangle + \sum_{u_1} \langle j^u u s | \underline{U}^{(u)} | j^u u s \rangle - \sum_{u_1} \langle j^u u s | \underline{U}^{(u)} | j^u u s \rangle + \sum_{u_1} \langle j^u u s | \underline{U}^{(u)} | j^u u s \rangle \right\}$$

Usando todos estos resultados, vemos que (7.14) también puede escribirse como

$$\begin{aligned} \langle j^u u s | \sum_{lcm}^u V_{cm} | j^u u s \rangle &= \frac{u(u+1)}{2} \langle j || \underline{U}^{(u)} || j \rangle^2 + \frac{u}{2(2j+1)} \sum_{lcm} \langle j || \underline{U}^{(u)} || j \rangle^2 \\ &+ \frac{(n-u)(2j+1-u)}{2(2j-1-2u)} \left\{ \langle j^u u s | \sum_{lcm}^u V_{cm} | j^u u s \rangle - \langle j^u u s | \sum_{lcm}^u V_{cm} | j^u u s \rangle - \frac{2j+1}{2j+1} \langle j || \underline{U}^{(u)} || j \rangle^2 \right\} \\ &+ \frac{1}{2j+1} \sum_{k>0} \langle j || \underline{U}^{(u)} || j \rangle^2 + \frac{n(u)}{2} \langle j || \underline{U}^{(u)} || j \rangle^2 - \frac{n}{(2j+1)} \sum_{k>0} \langle j || \underline{U}^{(u)} || j \rangle^2 \end{aligned}$$

Finalmente, si definimos

$$E_0 = \frac{2j}{2j+1} \langle j || \underline{U}^{(u)} || j \rangle^2 - \frac{1}{2j+1} \sum_{k>0} \langle j || \underline{U}^{(u)} || j \rangle^2 \quad (7.)$$

obtenemos para (7.14):

$$\begin{aligned} \langle j^u u s | \sum_{lcm}^u V_{cm} | j^u u s \rangle &= \langle j^u u s | \sum_{lcm}^u V_{cm} | j^u u s \rangle + \frac{n-u}{2} E_0 \delta_{u,0} \\ &+ \frac{(n-u)(2j+1-u)}{2(2j-1-2u)} \left\{ \langle j^u u s | \sum_{lcm}^u V_{cm} | j^u u s \rangle - \langle j^u u s | \sum_{lcm}^u V_{cm} | j^u u s \rangle - E_0 \delta_{u,0} \right\} \quad (7.) \end{aligned}$$

Esta ecuación da cualquier elemento diagonal en el esquema de antigüedad para la configuración  $j^n$  como la suma del elemento diagonal correspondiente en la configuración  $j^u$  más términos lineal y cuadrático en  $n$  (en los que también aparece la configuración  $j^{u+2}$ ). El significado físico de la constante  $E_0$  introducida es fácil de identificar; si calculamos la energía de interacción de una capa  $j$  cerrada ( $n=2j+1$  y  $u=0$  en (7.17)), obtenemos que el valor esperado es  $\frac{2j+1}{2} E_0$ .

Teorema 7.1.- Las condiciones necesarias y suficientes para que

una interacción sea diagonal en el esquema de anti-idad, como que

$$\int \lambda(\omega) \dots \lambda(\omega_{12}) \psi^* [j^{u+1} u; \sigma] \left\{ \sum_{r,m} V_{r,m} [j^{u+1} u; \sigma] \right\} \psi [j^u u; \sigma] \dots \psi [j^1 u; \sigma] \dots \psi [j^1 u; \sigma]$$

Demostración: - Es evidente que éste es una condición necesaria.

Para demostrar que también es suficientes, evaluemos los elementos de matriz de la interacción en la configuración  $j^{u+1}$ :

$$\begin{aligned} & \langle j^{u+1} u; \sigma | \sum_{r,m} V_{r,m} [j^{u+1} u; \sigma] | j^u u; \sigma \rangle \\ &= \int \lambda(\omega) \dots \lambda(\omega_{12}) \psi^* [j^{u+1} u; \sigma] \left\{ \sum_{r,m} V_{r,m} [j^{u+1} u; \sigma] \right\} \psi [j^u u; \sigma] \dots \psi [j^1 u; \sigma] \dots \psi [j^1 u; \sigma] \\ &= \frac{1}{N_{j^{u+1}, u; \sigma}} \binom{u+1}{2} \int \lambda(\omega) \dots \lambda(\omega_{12}) \psi^* [j^{u+1} u; \sigma] \left\{ \sum_{r,m} V_{r,m} [j^{u+1} u; \sigma] \right\} \psi [j^u u; \sigma] \dots \psi [j^1 u; \sigma] \dots \psi [j^1 u; \sigma] \\ &= \frac{1}{N_{j^{u+1}, u; \sigma}} \binom{u+1}{2} \int \lambda(\omega) \dots \lambda(\omega_{12}) \sum_{r_1, m_1} V_{r_1, m_1} [j^{u+1} u; \sigma] \psi^* [j^{u+1} u; \sigma] \dots \psi [j^u u; \sigma] \dots \psi [j^1 u; \sigma] \dots \psi [j^1 u; \sigma] \\ &= \frac{1}{N_{j^{u+1}, u; \sigma}} \binom{u+1}{2} \left\{ \langle j^{u+1} u; \sigma | \sum_{r,m} V_{r,m} [j^{u+1} u; \sigma] | j^u u; \sigma \rangle \right. \\ & \quad \left. + \sum_{r=1}^u \int \lambda(\omega) \dots \lambda(\omega_{12}) \psi^* [j^{u+1} u; \sigma] \left\{ \sum_{r,m} V_{r,m} [j^{u+1} u; \sigma] \right\} \psi [j^u u; \sigma] \dots \psi [j^1 u; \sigma] \dots \psi [j^1 u; \sigma] \right\} \end{aligned}$$

Supongamos que la interacción es diagonal en el esquema de anti-idad; entonces, si usamos (7.5), resulta

$$\langle j^{u+1} u; \sigma | \sum_{r,m} V_{r,m} [j^{u+1} u; \sigma] | j^u u; \sigma \rangle = \langle j^u u; \sigma | \sum_{r,m} V_{r,m} [j^u u; \sigma] | j^u u; \sigma \rangle \dots \langle j^1 u; \sigma | \sum_{r,m} V_{r,m} [j^1 u; \sigma] | j^1 u; \sigma \rangle \quad (7.18)$$

Observemos que la expresión bajo el signo de integral es completamente simétrica respecto del intercambio de las coordenadas de las primeras  $u$  partículas, de manera que podemos restringirnos a las primeras  $u-1$  partículas, para  $u > 1$ , multiplicando el resultado por  $u/(u-1)$ ; de este modo encontramos

$$\begin{aligned} & \int \lambda(\omega) \dots \lambda(\omega_{12}) \psi^* [j^{u+1} u; \sigma] \left\{ \sum_{r,m} V_{r,m} [j^{u+1} u; \sigma] \right\} \psi [j^u u; \sigma] \dots \psi [j^1 u; \sigma] \dots \psi [j^1 u; \sigma] \\ &= \frac{u}{u-1} \sum_{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{u-1}} [j^{u+1} u; \sigma] \psi^* [j^{u+1} u; \sigma] \dots \psi [j^u u; \sigma] \dots \psi [j^1 u; \sigma] \dots \psi [j^1 u; \sigma] \\ & \quad \times \int \lambda(\omega) \dots \lambda(\omega_{12}) \psi^* [j^u u; \sigma] \left\{ \sum_{r,m} V_{r,m} [j^u u; \sigma] \right\} \psi [j^u u; \sigma] \dots \psi [j^1 u; \sigma] \dots \psi [j^1 u; \sigma] \\ &= \frac{u}{u-1} \sum_{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{u-1}} [j^{u+1} u; \sigma] \psi^* [j^{u+1} u; \sigma] \dots \psi [j^u u; \sigma] \dots \psi [j^1 u; \sigma] \dots \psi [j^1 u; \sigma] \\ & \quad \times \int \lambda(\omega) \dots \lambda(\omega_{12}) \psi^* [j^u u; \sigma] \left\{ \sum_{r,m} V_{r,m} [j^u u; \sigma] \right\} \psi [j^u u; \sigma] \dots \psi [j^1 u; \sigma] \dots \psi [j^1 u; \sigma] \quad (7.19) \end{aligned}$$

Luego, la integral en la configuración  $j^{u+2}$  en (7.18) se puede reducir a una suma de integrales similares en la configuración  $j^{u+1}$ ; a su vez, cualquiera de estas integrales puede reducirse a una suma de integrales semejantes, pero en la configuración  $j^u$ . Aplicando sucesivamente este proceso, inferimos que una condición suficiente para que una interacción sea diagonal en el es-

quema de antigüedad en todas las configuraciones  $j^3$  en que todas las integrales en (7.19) para  $U=1$  en la configuración  $j^3$  se anulen. Los valores posibles de  $U$  son en este caso  $U=1, 3$ ; sin embargo, en la Prop. 7.1 demostraremos que cualquier interacción que satisface las condiciones de este teorema puede expresarse como la suma de una interacción para la cual (7.19) se anula con  $U=U=1$  en la configuración  $j^3$ , y un término escalar que es diagonal en cualquier esquema. Por lo tanto, la única condición real para que (7.19) se anule es la que especifica el enunciado del teorema Q.E.D.

Proposición 7.1.- Cualquier interacción  $V_{12}$  que satisfaga la condición del teorema 7.1 puede descomponerse como la suma de una interacción  $V_{12}'$  con la propiedad de apareamiento, y una interacción escalar.

Demostración:- Desarrollamos la interacción  $V_{12}$  en términos de productos escalares de tensores irreducibles:

$$V_{12} = \sum_K \langle \mathbb{1} \| f_{\underline{u}}^{(K)} \| \mathbb{1} \rangle^2 (u_{\underline{u}}^{(K)}(1) \cdot u_{\underline{u}}^{(K)}(2)) = \sum_K F^K (u_{\underline{u}}^{(K)}(1) \cdot u_{\underline{u}}^{(K)}(2)). \quad (7.)$$

Ahora calculamos la integral en (7.19) para estados en la configuración  $j^3$  con  $U=U'=1$ :

$$\int d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \Psi^* [j^3, v=1, J=j] \left\{ \sum_K F^K u_{\underline{u}}^{(K)}(1) \cdot (u_{\underline{u}}^{(K)}(2) u_{\underline{u}}^{(K)}(3)) \right\} \Psi [j^3, v=1, J=j] \quad (7.)$$

Para poder efectuar la integración, expandemos  $\Psi [j^3, v=1, J=j]$  mediante C.P.F.  $j^3 \rightarrow j$ , y usamos (A.19), (A.48), (A.57) y (A.58) para obtener

$$\begin{aligned} & \sum_K F^K \sum_{J_1} [j^3, v=1, J=j] [j, J_1, J=j] \\ & \quad \times \int d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \Psi^* [j, J_1, J=j] \left\{ \sum_K u_{\underline{u}}^{(K)}(1) \cdot (u_{\underline{u}}^{(K)}(2) u_{\underline{u}}^{(K)}(3)) \right\} \Psi [j, J_1, J=j] \\ & = \sum_K F^K \sum_{J_1} [j, J_1, J=j] [j^3, v=1, J=j] (-)^{2j+J_1} \left\{ \begin{matrix} j & j & j \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} \right\} (-)^{2j+K} \sqrt{2j+1} \left\{ \begin{matrix} j & j & j \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} \right\} \\ & = \frac{2}{2j+1} \sum_{K \neq 0} F^K \frac{1}{\sqrt{2K+1}} [j, J_1, J=j] [j^3, v=1, J=j]. \end{aligned}$$

Para calcular los C.P.F. con  $U=1$ ,  $J=j$  en la configuración  $j^n$ , y en particular en la configuración  $j^3$ , nos fijamos en que los estados parientes deben tener  $U_1=0$  o  $U_1=2$ , caso éste que no ocurre en el C.P.F. que nos interesa; usando (0.6) y (0.7) encontramos que

$$[j^n, (U_1=0, J_1=0) j, J=j] [j^3, v=1, J=j] = \sqrt{\frac{2j+2n-1}{n(2j+1)}}.$$



$$[j^{v+1}(\nu_1=2, \nu_2=0)] \delta_{j^v} \{j^{v+1} \nu_1 \nu_2\} = \frac{1}{\sqrt{2\nu_1+1}} \sqrt{\frac{2\nu_1+2}{2\nu_1+1}} \sqrt{\frac{2\nu_1+1}{2\nu_1+1}}.$$

Introduciendo estos valores en la última igualdad obtenida para (7.21), tenemos que ésta toma la forma

$$\begin{aligned} & \int \delta(\alpha) \delta(\alpha) \delta(\alpha) \delta(\alpha) \{j^{v+1} \nu_1 \nu_2\} \{V_{11} + V_{12} + V_{13} + V_{14}\} \{j^v \nu_1 \nu_2\} \\ &= \frac{2}{2^{v+1}} \sqrt{\frac{2v-1}{3(2v+1)}} \left\{ F^0 - \frac{2}{2^{v+1}} \sum_{k>0, p, q} F^k \right\}. \end{aligned} \quad (7.22)$$

Por otra parte, la interacción (7.20) podemos escribirla como suma de dos interacciones

$$\begin{aligned} V_{11} &= \left( F^0 - \frac{2}{2^{v+1}} \sum_{k>0, p, q} F^k \right) \left( \underline{u}^{(0)}(1) \cdot \underline{u}^{(0)}(2) \right) \\ &+ \left\{ \frac{2}{2^{v+1}} \left( \sum_{k>0, p, q} F^k \right) \left( \underline{u}^{(0)}(1) \cdot \underline{u}^{(0)}(2) \right) + \sum_{k>0} F^k \left( \underline{u}^{(k)}(1) \cdot \underline{u}^{(k)}(2) \right) \right\}, \\ &\equiv F^0 \left( \underline{u}^{(0)}(1) \cdot \underline{u}^{(0)}(2) \right) + V_{11}', \end{aligned} \quad (7.23)$$

donde la definición de  $F^0$  resulta clara si decimos que

$$V_{11}' \equiv \frac{2}{2^{v+1}} \left( \sum_{k>0, p, q} F^k \right) \left( \underline{u}^{(0)}(1) \cdot \underline{u}^{(0)}(2) \right) + \sum_{k>0} F^k \left( \underline{u}^{(k)}(1) \cdot \underline{u}^{(k)}(2) \right). \quad (7.24)$$

Si calculamos la integral (7.21) para esta interacción, vemos que se anula debido a (7.22); la otra interacción es proporcional al producto de dos escalares con  $k=0$  y, por lo tanto, es diagonal en cualquier esquema ortogonal en la configuración  $j^n$ . La interacción  $\sum_{2cm}^n V_{11}'$  también es diagonal en el esquema de antigüedad, como podemos ver de las ecuaciones (7.13) y (7.19), debido a que (7.21) se anula (con esto  $\sum_{2cm}^n V_{11}'$  también es diagonal en el esquema de antigüedad). Aún más, la interacción  $V_{12}'$  tiene la propiedad de apareamiento: que (7.19) se anule para  $V_{12}'$  en la configuración  $j^3$  implica que estas integrales se anulan en cualquier configuración  $j^{v+2}$ ; por lo tanto, de (7.13) tenemos

$$\langle j^{v+1} \nu_1 \nu_2 | \sum_{2cm}^{v+1} V_{12}' | j^{v+1} \nu_1 \nu_2 \rangle = \langle j^v \nu_1 \nu_2 | \sum_{2cm}^v V_{12}' | j^v \nu_1 \nu_2 \rangle + V_{12}' \quad \text{Q. E. D. (7.25)}$$

**Teorema 7.2.**— Toda interacción diagonal en el esquema de antigüedad puede expresarse como la suma de una interacción escalar y una interacción tensorial impar.

Esta afirmación es consecuencia directa de las dos proposiciones que demostraremos a continuación.

**Proposición 7.2.**— Toda interacción diagonal en el esquema de antigüedad se puede expresar como la suma de una interacción escalar y una interacción de apareamiento.

Demostración:— La  $E_0$  definida en (7.16) puede expresarse, usando la misma notación que en (7.20), en la forma

$$E_0 = \frac{1}{2j+1} \left( (2j+1) F^0 - \sum_{\lambda \neq 0} F^\lambda \right).$$

También de (7.20) obtenemos, utilizando (A.13) y (A.43), que

$$\begin{aligned} V_0 &\equiv \langle j^0 0 | V_{12} | j^0 0 \rangle = \sum_{\lambda} F^\lambda \langle j^0 0 | U^{(\lambda)}(0) \cdot U^{(\lambda)}(0) | j^0 0 \rangle, \\ &= \sum_{\lambda} F^\lambda (-)^{2j} \left\{ \begin{matrix} j & j & 0 \\ j & j & 0 \end{matrix} \right\} \langle j^0 0 | U^{(\lambda)} | j^0 0 \rangle = \frac{1}{2j+1} \sum_{\lambda} (2j+1) F^\lambda. \end{aligned}$$

Si restamos la expresión anterior de la expresión para  $E_0$  tenemos

$$E_0 - V_0 = \frac{1}{2j+1} \left\{ (2j+1) F^0 - 2 \sum_{\lambda > 0, \text{ par.}} F^\lambda \right\} = \frac{2}{2j+1} F^2. \quad (7.2)$$

Por otro lado, mediante (7.23) y (7.25) encontramos que si  $V_{12}$  es diagonal en el esquema de antigüedad, entonces

$$\begin{aligned} \langle j^u u j | \sum_{m}^{u, 2} V_{em} | j^u u j \rangle &= \binom{u+2}{2} \frac{F^2}{2j+1} \\ &= \langle j^u u j | \sum_{m} V_{em} | j^u u j \rangle = \binom{u}{2} \frac{F^2}{2j+1} + V_0 = \frac{F^2}{2j+1}. \end{aligned}$$

Sustituyendo este resultado en (7.17), y usando (7.20), hallamos que

$$\begin{aligned} \langle j^u u j | \sum_{m}^{n, 2} V_{em} | j^u u j \rangle &= \langle j^u u j | \sum_{m} V_{em} | j^u u j \rangle + \frac{n-u}{2} F_0 + \frac{(n-u)(2j+1-n-u)}{2(2j+1-2u)} \left\{ \left[ \binom{u+1}{2} - \binom{u}{2} - 1 \right] \frac{F^2}{2j+1} + V_0 \right\}, \\ &= \langle j^u u j | \sum_{m} V_{em} | j^u u j \rangle + \frac{n-u}{2} V_0 + \frac{(n-u)(n-u-2)}{2(2j+1)} (E_0 - V_0). \end{aligned}$$

Esta es la forma que (7.17) toma en el caso de una interacción diagonal en el esquema de antigüedad. Por último, reescribimos esta ecuación de manera que muestre explícitamente la propiedad de apareamiento de  $V_{em}$  y el comportamiento proporcional a  $n(n-1)$  de la interacción escalar (Cf. Ecs. (7.23) y (7.24)):

$$\begin{aligned} \langle j^u u j | \sum_{m}^{n, 2} V_{em} | j^u u j \rangle &= \frac{n(n-1)}{2} \frac{F^2}{2j+1} \\ &= \langle j^u u j | \sum_{m} V_{em} | j^u u j \rangle - \frac{u(u-1)}{2} \frac{F^2}{2j+1} + \frac{n-u}{2} \left( V_0 - \frac{F^2}{2j+1} \right) \quad \text{Q. E. D. (7.)} \end{aligned}$$

Observación.— Si una interacción es diagonal en el esquema de antigüedad y no tiene la propiedad de apareamiento, entonces es una interacción escalar.

Proposición 7.3.— Toda interacción con la propiedad de apareamiento puede expresarse como una interacción tensorial de orden impar.

Demostración:— Consideremos una interacción de apareamiento en la configuración  $j^4$  para  $u=2$  y  $J > 0$ , par. Calculamos ahora las energías de interacción por medio de los C.P.F.  $j^4 \rightarrow j^2$ :

$$\langle j^4 u=2j | \sum_{\text{perm}}^4 V_{\text{perm}} | j^4 u=2j \rangle = \frac{1}{2} \sum_{j_1, j_2} \left[ (2j+1)(j_1+1) \left\{ \begin{matrix} j & j & j \\ 0 & j & j \end{matrix} \right\} + (2j-1)(j_1-1) \left\{ \begin{matrix} j & j & j \\ 0 & j & j \end{matrix} \right\} \right] V_{j_1, j_2} \quad (7.25)$$

Como vamos a comparar esta energía de interacción con la expresión que de ella obtenemos a partir de (7.27), tenemos que calcular el C.P.F. que aquí aparece. El cálculo de los C.P.F. lo hacemos directamente. Comenzamos agregando a  $\psi(j^4)$ , con  $J=0$ , par, un par de partículas acoplado a  $J=0$  y antisimetrizando:

$$\begin{aligned} A_4 \psi(j_{11}^2(j) j_{24}^2(0)j) &= \psi(j_{11}^2(j) j_{24}^2(0)j) - \psi(j_{11}^2(j) j_{24}^2(0)j) - \psi(j_{11}^2(j) j_{24}^2(0)j) \\ &\quad - \psi(j_{11}^2(j) j_{24}^2(0)j) - \psi(j_{11}^2(j) j_{24}^2(0)j) + \psi(j_{11}^2(j) j_{24}^2(0)j) \\ &= \psi(j_{11}^2(j) j_{24}^2(0)j) + \psi(j_{11}^2(0) j_{24}^2(j)j) \\ &\quad - \sum_{j_1, j_2} \left\{ 1 + (-)^{j_1} + (-)^{j_2} + (-)^{j_1+j_2} \right\} \langle j_{11}^2(j) j_{24}^2(0)j | j_{11}^2(j_1) j_{24}^2(j_2)j | j_{11}^2(j) j_{24}^2(0)j \rangle \end{aligned}$$

la última igualdad se obtuvo usando (A.22) y rearreglando el orden de acoplamiento. Mediante la misma (A.22), y (A.11.2) y (A.20) tenemos que

$$A_4 \psi(j_{11}^2(j) j_{24}^2(0)j) = \sum_{j_1, j_2, \text{perm}} \left[ \delta_{j_1, j_2} \delta_{j_1, 0} + \delta_{j_1, 0} \delta_{j_2, j} + 4 \sqrt{\frac{(2j+1)(2j+1)}{2j+1}} \left\{ \begin{matrix} j & j & j \\ 0 & j & j \end{matrix} \right\} \right] \psi(j_{11}^2(j) j_{24}^2(j_1)j)$$

El factor de normalización de esta función lo obtenemos por medio de (5.5):

$$N_{4 u=2j}^2 = 6 \left\{ 1 + 4 \sqrt{\frac{2j+1}{2j+1}} \left\{ \begin{matrix} j & j & j \\ 0 & j & j \end{matrix} \right\} \right\} = \frac{6(2j-3)}{(2j+1)}, \quad j > \frac{3}{2},$$

de modo que

$$[j^2(j_1)j^2(j_2)j] j^4 u=2j = \sqrt{\frac{(2j+1)}{6(2j+3)}} \left[ \delta_{j_1, j_2} \delta_{j_1, 0} + \delta_{j_1, 0} \delta_{j_2, j} + 4 \sqrt{\frac{(2j+1)(2j+1)}{2j+1}} \left\{ \begin{matrix} j & j & j \\ 0 & j & j \end{matrix} \right\} \right]$$

Sustituyendo estos valores en (7.23) resulta

$$\begin{aligned} \langle j^4 u=2j | \sum_{\text{perm}}^4 V_{\text{perm}} | j^4 u=2j \rangle &= \frac{2j-3}{2j+1} (V_0 + V_j) + \frac{16}{2j-3} \sum_{j_1, j_2, \text{perm}} (2j+1)(2j+1) \left\{ \begin{matrix} j & j & j \\ 0 & j & j \end{matrix} \right\}^2 V_{j_1, j_2} \\ &= \frac{2j-3}{2j+1} V_0 + \frac{2j-1}{2j-3} V_j + \frac{16}{2j-3} \sum_{j_1, j_2, \text{perm}} \sum_{j_1, j_2, j_3} (2j+1)(2j+1) \left\{ \begin{matrix} j & j & j \\ 0 & j & j \end{matrix} \right\}^2 V_{j_1, j_2} \end{aligned}$$

donde hemos definido  $V_j \equiv \langle j^2 j^2 || V_{12} || j^2 j \rangle$ . Ya que de (A.17) y (A.17.1) se tiene

$$\sum_{j_1, j_2, \text{par}} (2j+1) \left\{ \begin{matrix} j & j & j \\ 0 & j & j \end{matrix} \right\}^2 = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{(2j+1)} - \left\{ \begin{matrix} j & j & j \\ 0 & j & j \end{matrix} \right\} \right],$$

la expresión anterior a ésta también tiene la forma

$$\frac{2j-3}{2j+1} V_0 + \frac{2j-1}{2j-3} V_j + \frac{8}{(2j-3)(2j+1)} \sum_{j_1, j_2, \text{par}} (2j+1) V_{j_1, j_2} - \frac{8}{2j-3} \sum_{j_1, j_2, \text{par}} \left\{ \begin{matrix} j & j & j \\ 0 & j & j \end{matrix} \right\}^2 V_{j_1, j_2}$$

También de (A.17) y (A.17.1) podemos obtener

$$S_{j_1, j_2} = (-)^{j_1+j_2} (2j+1) \left\{ \begin{matrix} j & j & j \\ 0 & j & j \end{matrix} \right\} + 2(2j+1) \sum_{\text{simple}} (2j+1) \left\{ \begin{matrix} j & j & j \\ 0 & j & j \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} j & j & j \\ 0 & j & j \end{matrix} \right\}$$

usando esta expansión obtenemos que la última suma en la expresión anterior a ésta puede reescribirse como

$$\sum_{J_1 > 0, p_{q1}} (2J_1+1) \left\{ \begin{matrix} j & j & J_1 \\ j & j & J_1 \end{matrix} \right\} V_{J_1} \\ = \sum_{J_1 > 0, p_{q1}} (-)^{J_1} S_{J_1} V_{J_1} - 2 \sum_{\substack{J_1 > 0, p_{q1} \\ J_1 \text{ impar}}} (-)^{J_1} (2J_1+1) \left\{ \begin{matrix} j & j & J_1 \\ j & j & J_1 \end{matrix} \right\} V_{J_1} \\ + \frac{2}{(2J_1-1)(2J_1+1)} \sum_{J_1 > 0, p_{q1}} (2J_1+1) \left\{ \begin{matrix} j & j & J_1 \\ j & j & J_1 \end{matrix} \right\} V_{J_1} + \frac{16}{2J_1-1} \sum_{\substack{J_1 > 0, p_{q1} \\ J_1 \text{ impar}}} (2J_1+1) \left\{ \begin{matrix} j & j & J_1 \\ j & j & J_1 \end{matrix} \right\} V_{J_1} \quad (7.6)$$

de modo que la energía de interacción en la configuración  $J^4$  para  $U=2$  y  $J > 0$ , par, es

$$\langle J^4 U=2 J | \sum_{r \in m} V_{r m} | J^4 U=2 J \rangle = \frac{(2J-3)}{2J+1} V_0 + \frac{(2J-15)}{2J-1} V_2 \\ + \frac{8}{(2J-3)(2J+1)} \sum_{J_1 > 0, p_{q1}} (2J_1+1) V_{J_1} + \frac{16}{2J-1} \sum_{\substack{J_1 > 0, p_{q1} \\ J_1 \text{ impar}}} (2J_1+1) \left\{ \begin{matrix} j & j & J_1 \\ j & j & J_1 \end{matrix} \right\} V_{J_1} \quad (7.7)$$

Por otra parte, una interacción diagonal en el esquema de anti-guedad satisface (7.27); de la ecuación anterior a (7.29) encontramos

$$\langle J^4 U=2 J | \sum_{r \in m} V_{r m} | J^4 U=2 J \rangle = V_J + V_0 + \frac{2}{2J+1} F^{(0)} \quad (7.8)$$

Sin embargo, ya que la expresión (7.20) para  $F^{(0)}$  no es muy útil, buscaremos una expresión más apropiada a nuestros fines. Utilizando (5.19) para  $V_{12} = \sum_k (f^{(k)}(1) \cdot f^{(k)}(2))$  resulta

$$\Delta E_{JM} = \langle J^4 JM | V_{12} | J^4 JM \rangle = \sum_k (-)^{J_1+J_2} \left\{ \begin{matrix} j & j & J \\ j & j & k \end{matrix} \right\} F^k$$

por lo que, usando (A.19.1) y (A.19.2),

$$\sum_{JM} \Delta E_{JM} = \sum_{J \text{ par}} (2J+1) V_J = \sum_{J \text{ par}} (2J+1) \sum_k (-)^{J_1+J_2} \left\{ \begin{matrix} j & j & J \\ j & j & k \end{matrix} \right\} F^k \\ = \sum_k F^k \sum_J \frac{1}{2} [1 + (-)^J] (-)^{J_1+J_2} (2J+1) \left\{ \begin{matrix} j & j & J \\ j & j & k \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} \sum_k F^k [(2J+1) S_{L_0} - 1]$$

Luego, una expresión alternativa a (7.10) es

$$E_0 = \frac{2}{2J+1} \sum_{J \text{ par}} (2J+1) V_J,$$

de donde encontramos

$$F^{(0)} = \frac{2}{2J-1} \left\{ \sum_{J \text{ par}} (2J+1) V_J - \frac{2J-1}{2} V_0 \right\}.$$

Sustituyendo este resultado en (7.29) se halla

$$\langle J^4 U=2 J | \sum_{r \in m} V_{r m} | J^4 U=2 J \rangle = V_J + V_0 + \frac{2}{(2J-1)(2J+1)} \left\{ \sum_{J_1 > 0, p_{q1}} (2J_1+1) V_{J_1} - \frac{(2J-1)}{2} V_0 \right\}.$$

Igualando los miembros derechos de (7.29) y esta ecuación, obtenemos la siguiente igualdad para  $V_J$ ,  $J > 0$ :

$$V_J = \frac{4}{3(2J-1)(2J+1)} \sum_{J_1 > 0, p_{q1}} (2J_1+1) V_{J_1} + \frac{4}{3} \sum_{\substack{J_1 > 0, p_{q1} \\ J_1 \text{ impar}}} (2J_1+1)(2J+1) \left\{ \begin{matrix} j & j & J \\ j & j & J_1 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} j & j & J \\ j & j & J_1 \end{matrix} \right\} V_{J_1} \quad (7.9)$$

Para incluir el estado  $J=0$  en esta expresión, calculamos su contribución a la interacción cuando  $J=0$  y le agregamos la diferencia de esta contribución con  $V_0$  multiplicada por  $\frac{1}{2J+1}$  (Cf. Ec. (5.10)). Tomando  $J=0$  en (7.31)

$$\frac{4}{3(2J-1)(2J+1)} \sum_{J_1 > 0, p_{q1}} (2J_1+1) V_{J_1} \\ + \frac{4}{3(2J+1)} \sum_{J_1 > 0, p_{q1}} (2J_1+1) V_{J_1} \sum_{\substack{J_1 \text{ impar} \\ k}} (2J+1) \left\{ \begin{matrix} j & j & J \\ j & j & J_1 \end{matrix} \right\},$$

Ahora, como de (A.19.1) y (A.19.2) tenemos

$$\sum_{k \text{ impar}} (2k+1) \left\{ \begin{matrix} 2j+1 \\ 2j+1, 1 \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} \left\{ \begin{matrix} 2j+1 \\ 2j+1, 1 \end{matrix} \right\} + \frac{1}{2} \left\{ \begin{matrix} 2j+1 \\ 2j+1, 1 \end{matrix} \right\}$$

la expresión anterior a ésta se simplifica:

$$\frac{1}{3} \sum_{j_1 > 0, \text{par}} (2j_1+1) V_{j_1}$$

Con esto hallamos que

$$V_j = \left\{ V_j - \frac{2}{3(2j-1)} \sum_{j_1 > 0, \text{par}} (2j_1+1) V_{j_1} \right\} \frac{2j+1}{2j+1} + \frac{1}{2(2j-1)(2j+1)} \sum_{j_1 > 0, \text{par}} (2j_1+1) V_{j_1}$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{j_2 > 0, \text{par}} \sum_{k \text{ impar}} (2k+1) V_{j_2} (2k+1) \left\{ \begin{matrix} 2j+1 \\ 2j+1, 1 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} 2j+1 \\ 2j+1, 1 \end{matrix} \right\} V_{j_2}$$

Ya que en la expresión (5.11) encontramos que  $\rho_{12}$  puede desarrollarse en términos de operadores tensoriales impares y un término escalar, usando esta expresión y (A.43) podemos reescribir esta ecuación como

$$V_n = \frac{1}{2j-1} \left( \sum_{j_1 > 0, \text{par}} (2j_1+1) V_{j_1} - \frac{2j-1}{2} V_j \right) \left( U_m^{(1)}(1) \cdot U_m^{(1)}(2) \right)$$

$$- \frac{1}{2j-1} \left\{ V_j - \frac{2}{3(2j-1)} \sum_{j_1 > 0, \text{par}} (2j_1+1) V_{j_1} \right\} \sum_{k \text{ impar}} (2k+1) \left( U_m^{(k)}(1) \cdot U_m^{(k)}(2) \right)$$

$$- \frac{1}{3} \sum_{j_2 > 0, \text{par}} \sum_{k \text{ impar}} (2k+1) V_{j_2} \left\{ \begin{matrix} 2j+1 \\ 2j+1, 1 \end{matrix} \right\} (2k+1) \left( U_m^{(k)}(1) \cdot U_m^{(k)}(2) \right). \quad (7.32)$$

de modo que comparando esta igualdad con (7.23) tenemos el resultado que afirmamos en la proposición 4.3.5.

Ahora mencionaremos los resultados que se obtienen del cálculo de elementos de matriz para operadores de un cuerpo usando el esquema de antigüedad en el esquema L-S.

Habíamos visto en (5.14) que los operadores tensoriales dobles impares son diagonales en el esquema de antigüedad y sus valores esperados son independientes de  $n$ , en analogía con (7.1),

$$\langle \rho^n u \alpha L S \parallel \sum_{i=1}^m f^{(k_1 k_2)}(i) \parallel \rho^n v \alpha' L' S' \rangle = \langle \rho^v u \alpha L S \parallel \sum_{i=1}^m f^{(k_1 k_2)}(i) \parallel \rho^u v \alpha' L' S' \rangle S_T U. \quad (7.33)$$

siendo  $k_1+k_2$  impar. También, como hicimos para (7.3), podemos utilizar (6.17) para expresar los elementos de matriz entre estados en la configuración  $\rho^n$  con antigüedades  $U$  y  $U-2$ , en términos de estados en la configuración  $\rho^n$ :

$$\langle \rho^n u \alpha L S \parallel \sum_{i=1}^m f^{(k_1 k_2)}(i) \parallel \rho^n v-2, \alpha' L' S' \rangle = \sqrt{\frac{(2e+4-n-U)(n-U-1)}{2(2e+4-2U)}} \langle \rho^v u \alpha L S \parallel \sum_{i=1}^m f^{(k_1 k_2)}(i) \parallel \rho^{v-2}, \alpha' L' S' \rangle. \quad (7.34)$$

De la misma forma que obtuvimos (7.5) y (7.7), obtenemos sus análogos en el acoplamiento L-S:

$$\langle \rho^n v L S \parallel \sum_{i=1}^m f^{(l_1 l_2)}(i) \parallel \rho^n u L S \rangle = \frac{n}{U} \langle \rho^u v L S \parallel \sum_{i=1}^m f^{(l_1 l_2)}(i) \parallel \rho^u u L S \rangle,$$

$$= \eta \sqrt{\frac{(2e+1)(2l_1+1)}{2(2l_1+1)}} \langle \frac{1}{2} \rho \parallel f^{(l_1 l_2)} \parallel \frac{1}{2} \rho \rangle. \quad (7.35)$$

$$\langle \rho^{\mu} \sigma \alpha L S \parallel \sum_{i=1}^n f^{(00)}(i) \parallel \rho^{\mu} \sigma \alpha' L' S' \rangle$$

$$= \frac{4f^{(00)} - 3n}{4f^{(00)} - 2n} \langle \rho^{\nu} \sigma \alpha L S \parallel \sum_{i=1}^n f^{(00)}(i) \parallel \rho^{\nu} \sigma \alpha' L' S' \rangle, \quad k_1 + k_2 = 0, \text{ par. (7.)}$$

Como hemos podido observar, las fórmulas para elementos de matriz en el acoplamiento L-S se pueden obtener de sus análogos en el acoplamiento j-j haciendo los cambios indicados al final de la sección b; de hecho, puede demostrarse que esto también sucede para los elementos de matriz de operadores de dos cuerpos 10).

- 1) DeShalit, Amos, y Feshbach, Herman, THEORETICAL NUCLEAR PHYSICS, VOLUME I: NUCLEAR STRUCTURE, (John Wiley, 1974), pp. 335.
- 2) Schwartz, C., y DeShalit, A., MANY-PARTICLE CONFIGURATIONS IN A CENTRAL FIELD, Phys. Rev. 94 (1954) 1257-1266.
- 3) DeShalit, Amos, y Talmi, Igal, NUCLEAR SHELL THEORY, (Academic Press, 1963), pp.277.
- 4) Rose, M.E., ELEMENTARY THEORY OF ANGULAR MOMENTUM, (John Wiley, 1957), pps. 213-217.  
DeShalit, Amos, y Talmi, Igal, op. cit., pps. 123-129.
- 5) DeShalit, Amos, y Talmi, Igal, op. cit., pp.303.
- 6) Racah, Giulio, THEORY OF COMPLEX SPECTRA III, Phys. Rev. 63 (1943) 307-332.
- 7) Racah, Giulio, op. cit.  
DeShalit, Amos, y Talmi, Igal, op. cit., pps. 269-270.
- 8) DeShalit, Amos, y Talmi, Igal, op. cit., pp. 310.
- 9) ibid., pp. 317.
- 10) ibid., pp.372.

## APENDICE A.

COEFICIENTES DE ACOPLEMENTO Y  
ALGEBRA TENSORIAL DE RAHCH.

Los coeficientes de Clebsch-Gordan (C.G.) se definen como aquellos coeficientes que acoplan los estados  $|j_1 m_1\rangle$  y  $|j_2 m_2\rangle$ , que describen a dos sistemas A y B respectivamente, a un estado  $|JM\rangle$  de buen momento angular, por medio de la relación

$$|j_1 j_2 JM\rangle = \sum_{m_1, m_2} \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | JM \rangle |j_1 m_1\rangle |j_2 m_2\rangle \quad (\text{A.1})$$

en esta ecuación  $j_1$ ,  $j_2$  y  $J$  son momentos angulares y  $m_1$ ,  $m_2$  y  $M$  son sus respectivas proyecciones en el eje Z.

Los coeficientes C.G. tienen las siguientes propiedades:

## 1.-Unitariedad

$$\sum_{m_1, m_2} \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | JM \rangle \langle j_1 m_1' j_2 m_2' | J'M' \rangle = \delta_{JJ'} \delta_{MM'} \quad (\text{A.2})$$

$$\sum_{JM} \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | JM \rangle \langle j_1 m_1' j_2 m_2' | JM \rangle = \delta_{m_1' m_1} \delta_{m_2' m_2} \quad (\text{A.3})$$

## 2.-Simetría

$$\langle j_1 m_1 j_2 m_2 | JM \rangle = (-1)^{j_1 + j_2 - J} \langle j_1 - m_1 j_2 - m_2 | J - M \rangle \quad (\text{A.4})$$

$$= (-1)^{j_1 + j_2 - J} \langle j_2 m_2 j_1 m_1 | JM \rangle \quad (\text{A.5})$$

$$= (-1)^{j_1 - m_1} \left( \frac{2J+1}{2j_2+1} \right)^{1/2} \langle j_1 m_1 J - M | j_2 - m_2 \rangle \quad (\text{A.6})$$

Los coeficientes C.G. se pueden evaluar con la fórmula cerrada

$$\begin{aligned} \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | JM \rangle &= \delta_{m_1 + m_2, M} \left[ (j_1 + j_2 + J + 1)! \right]^{-1/2} \\ &\times \left[ (2J+1)(j_1 + j_2 - J)! (J + J_1 - j_2)! (j_1 + j_2 - J)! (j_1 + m_1)! (j_1 - m_1)! (j_1 + m_2)! (j_2 - m_2)! \right. \\ &\times (J + M)! (J - M)! \left. \right]^{1/2} \times \sum_{\nu} \frac{(-1)^{\nu}}{\nu!} \left[ (j_1 + j_2 - J - \nu)! (j_1 - m_1 - \nu)! (j_2 + m_2 - \nu)! \right. \\ &\times (J - j_2 + m_1 + \nu)! (J - j_1 - m_2 + \nu)! \left. \right]^{-1/2} \quad (\text{A.7}) \end{aligned}$$

de la cual es sencillo deducir la relación

$$\langle j_1 m_1, 00 | JM \rangle = \delta_{m_1, M} \delta_{J, J} \quad (\text{A.8})$$

Racah introdujo los coeficientes  $3J$ , que en términos de los coeficientes C.G. están dados por



$$\begin{pmatrix} J_1 & J_2 & J_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} = (-1)^{j_1 - j_2 - m_3} (2j_3 + 1)^{-1/2} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & -m_3 \end{pmatrix} \quad (A.9)$$

De (A.2), (A.3), (A.4), (A.5) y (A.6) es claro que

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j_2 & j_3 & j_1 \\ m_2 & m_3 & m_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j_3 & j_1 & j_2 \\ m_3 & m_1 & m_2 \end{pmatrix} = \dots = \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} \quad (A.10)$$

$$\sum_{m_1, m_2} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3' \end{pmatrix} = \frac{1}{2j_3 + 1} \delta_{m_3, m_3'} \quad (A.11)$$

$$\sum_{j_3, m_3} (2j_3 + 1) \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1' & m_2' & m_3' \end{pmatrix} = \delta_{m_1, m_1'} \delta_{m_2, m_2'} \quad (A.12)$$

Si consideramos tres momentos angulares  $J_1$ ,  $J_2$  y  $J_3$ , tenemos tres posibilidades de acoplarlos a un buen momento angular total  $J$ , a saber.

- 1.-  $J_1$  y  $J_2$  acoplados a  $J_{12}$  y este acoplado a  $J_3$ .
- 2.-  $J_2$  y  $J_3$  acoplados a  $J_{23}$  y luego  $J_{12}$  a  $J_1$ .
- 3.-  $J_1$  y  $J_3$  a  $J_{13}$  y después  $J_{12}$  a  $J_2$ .

La transformación que conecta los dos primeros esquemas está dada por:

$$\langle j_1, j_2 (j_{12}), j_3 ; J \mid j_1, j_2, j_3 (j_{23}) ; J \rangle = (-1)^{j_1 + j_2 + j_3 + J} \sqrt{2j_{12} + 1} \sqrt{2j_{23} + 1} \times \begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_{12} \\ j_3 & J & j_{23} \end{Bmatrix} \quad (A.13)$$

Las otras transformaciones están dadas en forma similar.

Los coeficientes  $\begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_{12} \\ j_3 & J & j_{23} \end{Bmatrix}$  se conocen como coeficientes  $6J$  y se relacionan con los coeficientes de Racah por

$$\begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ l_1 & l_2 & l_3 \end{Bmatrix} = (-1)^{j_1 + j_2 + l_1 + l_2} W(j_1, j_2, l_2, l_1; j_3, l_3) \quad (A.14)$$

Los coeficientes  $6J$  tienen las características de

- 1.-  $\begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ l_1 & l_2 & l_3 \end{Bmatrix} = 0$  si no se obedece alguna de las condiciones del triángulo  $\Delta(j_1, j_2, j_3)$ ,  $\Delta(j_1, l_1, l_2)$ ,  $\Delta(l_1, l_2, l_3)$  o  $\Delta(l_1, j_2, l_3)$

con  $\Delta(a, b, c)$  tal que  $a + b \geq c \geq |a - b|$ . (A.15)

2.- Simetría

$$\begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ l_1 & l_2 & l_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} j_2 & j_3 & j_1 \\ l_2 & l_3 & l_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} j_3 & j_1 & j_2 \\ l_3 & l_1 & l_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} j_2 & j_1 & j_3 \\ l_2 & l_1 & l_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ j_1 & j_2 & l_3 \end{Bmatrix} \quad (A.16)$$

3.- Unitariedad

$$\sum_{J_3} (2J_3+1) (2\ell_3+1) \left\{ \begin{matrix} J_1 & J_2 & J_3 \\ \ell_1 & \ell_2 & \ell_3 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} J_1 & J_2 & J_3 \\ \ell_1 & \ell_2 & \ell_3 \end{matrix} \right\} = \delta_{\ell_1, \ell_2} \delta_{\ell_3} \quad (\text{A.17})$$

$$4.- \sum_J (-1)^{J+J'+J''} (2J+1) \left\{ \begin{matrix} J_1 & J_2 & J' \\ J_3 & J_4 & J \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} J_1 & J_3 & J'' \\ J_1 & J_4 & J \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} J_1 & J_2 & J' \\ J_4 & J_3 & J'' \end{matrix} \right\} \quad (\text{A.17I})$$

Los coeficientes  $6J$  y  $3J$  se relacionan entre

$$\text{si por} \quad \left\{ \begin{matrix} J_1 & J_2 & J_3 \\ \ell_1 & \ell_2 & \ell_3 \end{matrix} \right\} = \sum_{m_1, m_2, m_3} (-1)^{\ell_1 - J_1 - J_2 - \ell_1 - J_3 - m_1 - m_2} \begin{pmatrix} J_1 & J_2 & J_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ell_1 & \ell_2 & \ell_3 \\ m_1' & m_2' & m_3' \end{pmatrix} \quad (\text{A.18})$$

un valor especial que se utiliza con bastante frecuencia es

$$\left\{ \begin{matrix} J_1 & J_2 & 0 \\ \ell_1 & \ell_2 & \ell_3 \end{matrix} \right\} = \frac{(-1)^{J_1 + \ell_1 + \ell_2}}{\sqrt{(2J_1+1)(2\ell_1+1)}} \delta_{\ell_1, \ell_2} \delta_{J_1, \ell_3} \quad (\text{A.19})$$

La fórmula cerrada para estos coeficientes es

$$\left\{ \begin{matrix} J_1 & J_2 & J_3 \\ \ell_1 & \ell_2 & \ell_3 \end{matrix} \right\} = \Delta(J_1, \ell_1, \ell_2) \Delta(\ell_1, \ell_2, \ell_3) \Delta(J_1, \ell_2, \ell_3) \times (-1)^{\ell_1 + \ell_2 - J_1 - J_2} \times \sum_k \frac{(-1)^{k+J_1+\ell_1+\ell_2} (k+1)!}{(k-J_1-J_2-\ell_3)! (k-\ell_1-\ell_2-\ell_3)! (k-J_1-\ell_2-\ell_3)! (k-J_2-\ell_1-\ell_3)!} \times \frac{1}{(J_1+\ell_1+\ell_2-k)! (J_1+\ell_2+\ell_3-k)! (\ell_1+\ell_2+\ell_3-k)!} \quad (\text{A.20})$$

donde  $\Delta$  es el coeficiente del triángulo, simétrico en sus argumentos

$$\Delta(a, b, c) = \left[ \frac{(a+b-c)! (a-b+c)! (-a+b+c)!}{(a+b+c+1)!} \right]^{1/2} \quad (\text{A.21})$$

Los coeficientes  $9J$  los introducimos como coeficientes de reacoplamiento al considerar distintas posibilidades de acoplar cuatro momentos angulares  $J_1, J_2, J_3$  y  $J_4$  a un momento angular  $J$ . Por ejemplo, la conexión entre el esquema  $J_1$  y  $J_2$  a  $J_{12}$ ,  $J_3$  y  $J_4$  a  $J_{34}$ ,  $J_{12}$  y  $J_{34}$  a  $J$ , y el esquema  $J_1, J_2$  a  $J_{12}$ ,  $J_3, J_4$  a  $J_{34}$  y finalmente  $J_{12}, J_{34}$  a  $J$ , está dada por la transformación

$$\langle J_{12} (J_{12}) J_{34} (J_{34}) : J \mid J_1 J_2 (J_{12}) J_3 J_4 (J_{34}) : J \rangle = \sqrt{(2J_{12}+1)(2J_{34}+1)(2J_{12}+1)(2J_{34}+1)} \begin{Bmatrix} J_1 & J_2 & J_{12} \\ J_3 & J_4 & J_{34} \\ J_{12} & J_{34} & J \end{Bmatrix} \quad (\text{A.22})$$

El factor marcado con llaves es el coeficiente  $9 J$ .

Los  $9 J$  satisfacen las relaciones siguientes:

1.-Unitariedad

$$\sum (2j_{13}+1)(2j_{24}+1) \begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_{12} \\ j_3 & j_4 & j_{34} \\ j_{13} & j_{24} & J \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j'_{12} \\ j_3 & j_4 & j'_{34} \\ j_{13} & j_{24} & J \end{Bmatrix} = \frac{(2j_{12}+1)(2j_{34}+1)}{(2j_{13}+1)(2j_{24}+1)} \quad (\text{A.23})$$

2.-Relación con los coeficientes  $3 J$

$$\begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_{12} \\ j_3 & j_4 & j_{34} \\ j_{13} & j_{24} & J \end{Bmatrix} = \sum_{m_1 m_2 m_3} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_{12} \\ m_1 & m_2 & m_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_3 & j_4 & j_{34} \\ m_3 & m_4 & m_{34} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_{12} & j_{34} & J \\ m_{12} & m_{34} & M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_1 & j_3 & j_{13} \\ m_1 & m_3 & m_{13} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} j_2 & j_4 & j_{24} \\ m_2 & m_4 & m_{24} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_{13} & j_{24} & J \\ m_{13} & m_{24} & M \end{pmatrix} \quad (\text{A.24})$$

3.-Relación con los coeficientes  $6 J$ .

$$\begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & J \\ j'_1 & j'_2 & J \\ k & k & 0 \end{Bmatrix} = \frac{(-1)^{j_1+j_2+k+J}}{\sqrt{(2j_1+1)(2k+1)}} \begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & J \\ j_1 & j_2 & J \\ j_1 & j_2 & J \end{Bmatrix} \quad (\text{A.25})$$

$$y \begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_{12} \\ j_3 & j_4 & j_{34} \\ j_{13} & j_{24} & J \end{Bmatrix} = \sum_k (-1)^{2k} (2k+1) \begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_{12} \\ j_{24} & J & k \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} j_2 & j_4 & j_{24} \\ j_3 & k & j_{34} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} j_{12} & j_{24} & J \\ k & J & J \end{Bmatrix} \quad (\text{A.26})$$

Después de resumir las propiedades de los coeficientes de acoplamiento y de reacoplamiento  $3 J$ ,  $6 J$  y  $9 J$  pasemos a sintetizar algunos resultados del álgebra de Racah.

Las rotaciones  $R$  en el espacio tridimensional se pueden especificar por los ángulos de Euler  $\alpha, \beta, \gamma$ :  $\alpha$  alrededor del eje "z",  $\beta$  alrededor del eje "y" y  $\gamma$  alrededor del eje "z".

Las coordenadas en el nuevo sistema se relacionan con las del sistema original por

$$\vec{r}' = R \vec{r} \quad (\text{A.27})$$

El operador unitario  $D(R)$ ,  
 $D(R) = D(\alpha, \beta, \gamma) = \exp(-i\alpha J_z) \exp(-i\beta J_y) \exp(-i\gamma J_z)$  (A.28)

relaciona  $\Psi(\vec{r})$  con  $\Psi(R\vec{r})$ , a través de la ecuación

$$\Psi(R\vec{r}) = D(R) \Psi(\vec{r}) \quad (\text{A.29})$$

La matriz  $D$  se forma al tomar elementos de matriz del operador  $\mathcal{D}$  con respecto a una representación irreducible del grupo de rotaciones de dimensión  $2J+1$ , la cual corresponde a momento angular  $J$ . Cada elemento de la representación la etiquetamos con los índices  $J$  y  $K$ . La matriz  $D_{m,m'}^{(J)}(\alpha, \beta, \alpha')$  se define por

$$D_{m,m'}^{(J)}(\alpha, \beta, \alpha') = \langle Jm | \mathcal{D}(\alpha, \beta, \alpha') | Jm' \rangle \quad (\text{A.30})$$

$$= \langle Jm | \exp(-i\alpha J_z) \exp(-i\beta J_y) \exp(-i\alpha' J_z) | Jm' \rangle$$

Las matrices  $D_{mm'}^{(J)}$  satisfacen la relación de ortogonalidad

$$\int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^\pi d\beta \sin\beta \int_0^{2\pi} d\alpha' D_{mm'}^{(J)}(\alpha, \beta, \alpha') D_{\mu\mu'}^{(J)}(\alpha, \beta, \alpha') = \frac{8\pi^2}{2J+1} \delta_{m,\mu} \delta_{m',\mu'} \delta_{J,J'} \quad (\text{A.31})$$

y su expresión explícita es

$$D_{m,m'}^{(J)}(\alpha, \beta, \alpha') = \exp(-im\alpha) d_{m,m'}^{(J)}(\beta) \exp(-im'\alpha') \quad (\text{A.32})$$

con

$$d_{m,m'}^{(J)}(\beta) = \left[ \frac{(J+m')!(J-m)!}{(J+m)!(J-m)!} \right]^{1/2} \times$$

$$\times \sum_k (-1)^k \frac{(\cos \frac{\beta}{2})^{2J+m'-m-2k} (-\sin \frac{\beta}{2})^{n-m'+2k}}{(J-m-k)!(J+m'-k)!(k+m-m')!k!} \quad (\text{A.33})$$

Los armónicos esféricos son un caso particular de

las matrices  $D_{mm'}^{(J)}$ , ya que,

$$D_{m0}^{(L)}(\alpha, \beta, \alpha') = \sqrt{\frac{2L+1}{4\pi}} Y_{Lm}(\beta, \alpha) \quad (\text{A.34})$$

y

$$Y_{Lm}(\hat{r}') = \sum_m Y_{Lm}(\hat{r}) D_{m,m'}^{(L)}(R) \quad (\text{A.35})$$

Un operador tensorial irreducible de rango  $L$  se define como un conjunto de  $2L+1$  funciones  $T_{LM}$ ,  $M = +L, +L-1, \dots, -L$ , los cuales se transforman bajo la representación de dimensión  $2L+1$  del grupo de rotaciones

$$R T_{LM} R^{-1} = \sum_{M'} D_{M'M}^{(L)}(\alpha, \beta, \alpha') T_{LM'} \quad (\text{A.36})$$

Obsérvese que esta definición afirma que los tensores irreducibles de rango  $L$  se transforman como los armónicos esféricos de rango  $L$ .

En el álgebra de tensores irreducibles es posible definir varios tipos de productos tensoriales. Guiados por el ejemplo de acoplamiento de dos momentos angulares definimos el producto tensorial de orden  $K$  por la ecuación

$$X_Q^{(K)} = \sum_{q_1, q_2} T_{q_1}^{(k_1)} U_{q_2}^{(k_2)} \langle k_1, q_1, k_2, q_2 | K, Q \rangle \quad (\text{A.37})$$

La unitariedad de los coeficientes C.G. nos permite deducir de (A.37) que :

$$T_{q_1}^{(k_1)} U_{q_2}^{(k_2)} = \sum_{Q} X_Q^{(K)} \langle K, Q | k_1, q_1, k_2, q_2 \rangle \quad (\text{A.38})$$

De acuerdo con la definición (A.37), es lógico definir un producto escalar  $X_Q^{(K)}$  como :

$$\langle T^{(k)} | U^{(K)} \rangle = \sum_Q C_Q T_{-Q}^{(k)} U_Q^{(K)} = C_Q \langle J \| T^{(k)} \| J' \rangle X_Q^{(K)} \quad (\text{A.39})$$

Los operadores tensoriales irreducibles de rango  $k$ , obedecen el teorema de Wigner-Eckart

$$\langle JM | T_{q_1}^{(k)} | J' M' \rangle = (-1)^{J-M} \begin{pmatrix} J & k & J' \\ -M & q_1 & M' \end{pmatrix} \langle J \| T^{(k)} \| J' \rangle \quad (\text{A.40})$$

Esta ecuación divide las propiedades físicas del tensor, que son descritas por  $\langle J \| T^{(k)} \| J' \rangle$ , de sus propiedades geométricas, que son descritas por los coeficientes  $3J$ . Al factor  $\langle J \| T^{(k)} \| J' \rangle$  se le conoce como elemento de matriz reducido.

Apliquemos el teorema para evaluar los elementos de matriz de algunos tensores irreducibles.

Consideremos un tensor de orden cero  $T_0^{(0)}$ ; de (A.8), (A.9) y (A.40) se tiene

$$\begin{aligned} \langle JM | T_0^{(0)} | J' M' \rangle &= (-1)^{J-M} \begin{pmatrix} J & 0 & J' \\ M & 0 & M' \end{pmatrix} \langle J \| T^{(0)} \| J' \rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{2J+1}} \langle J \| T^{(0)} \| J' \rangle \delta_{J, J'} \delta_{M, M'} \end{aligned} \quad (\text{A.41})$$

Si  $T^{(0)} = \mathbb{1}$  es claro que:

$$\langle J \| \mathbb{1} \| J' \rangle = \sqrt{2J+1} \delta_{J, J'} \quad (\text{A.42})$$

Por otro lado, al evaluar el elemento de matriz re-

ducido del operador de momento angular  $J$  se tiene:

$$m = \langle j, m | J_z | j, m \rangle = (-1)^{-m} \begin{pmatrix} j & 1 & j \\ -m & 0 & m \end{pmatrix} \sqrt{j(j+1)} \quad (\text{A.43})$$

ya que

$$\begin{pmatrix} j & 1 & j \\ -m & 0 & m \end{pmatrix} = \frac{(-1)^{-m+1}}{\sqrt{j(j+1)}} \quad (\text{A.44})$$

por lo que  $\sqrt{j(j+1)}$

$$\langle j, m | J_z | j, m \rangle = \sqrt{j(j+1)} m \quad (\text{A.45})$$

Calculemos ahora los elementos de matriz del producto escalar (A.39).

$$\begin{aligned} \langle j, m | T^{(k)} \cdot U^{(k)} | j', m' \rangle &= \sum_{\frac{q}{q'}} (-1)^q \langle j, m | T_{\frac{q}{q'}}^{(k)} | j, m'' \rangle \langle j', m' | U_{-\frac{q}{q'}}^{(k)} | j', m' \rangle \\ &= \sum_{\frac{q}{q'} j'' m''} (-1)^q \langle j, m | T_{\frac{q}{q'}}^{(k)} | j, m'' \rangle \langle j', m' | U_{-\frac{q}{q'}}^{(k)} | j', m' \rangle \\ &= \sum_{\frac{q}{q'} j'' m''} (-1)^{q+j-m+j''-m'} \begin{pmatrix} j & k & j \\ m & q & m'' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j' & k & j' \\ m' & -q & m' \end{pmatrix} \langle j, m'' | T_{\frac{q}{q'}}^{(k)} | j, m'' \rangle \langle j', m' | U_{-\frac{q}{q'}}^{(k)} | j', m' \rangle \\ &= \frac{1}{2j+1} \delta_{j j'} \delta_{m m'} \sum_{\frac{q}{q'}} (-1)^{q+j-m} \langle j, m | T_{\frac{q}{q'}}^{(k)} | j, m \rangle \langle j', m' | U_{-\frac{q}{q'}}^{(k)} | j', m' \rangle \quad (\text{A.46}) \end{aligned}$$

En aplicaciones prácticas, los productos escalares mas importantes son aquellos en los cuales los dos tensores operan sobre distintas partes del sistema. (Un ejemplo es  $\vec{l}_1 \cdot \vec{l}_2$  que describe el acoplamiento de momento angular orbital de dos partículas, otro mas es  $\vec{l} \cdot \vec{s}$  en el cual los momentos angulares de espín y orbital, que pertenecen al mismo sistema, estan acoplados).

Si  $T^{(k)}$  opera sobre la parte 1 del sistema y  $U^{(k)}$  opera sobre la parte 2, y si además expresamos el estado  $|j_1 j_2 j m\rangle$  por el producto definido en la ecuación (A.1) tenemos

$$\begin{aligned} \langle j_1 j_2 j m | T^{(k)} \cdot U^{(k)} | j_1' j_2' j' m' \rangle &= \sum_{m_1' m_2' m_1' m_2'} \frac{1}{\sqrt{2j+1}} (-1)^{m_1+m_2-m} \langle j_1 m_1 | T_{\frac{q}{q'}}^{(k)} | j_1 m_1' \rangle \langle j_2 m_2 | U_{-\frac{q}{q'}}^{(k)} | j_2 m_2' \rangle \\ &\times \langle j_1 m_1 | T_{\frac{q}{q'}}^{(k)} | j_1' m_1' \rangle \langle j_2 m_2 | U_{-\frac{q}{q'}}^{(k)} | j_2' m_2' \rangle \langle j_1' m_1' j_2' m_2' | j' m' \rangle \quad (\text{A.47}) \end{aligned}$$

Aplicando el teorema de Wigner-Eckart a los elementos de matriz dentro de la suma y utilizando la relación (A.9) observamos que se tienen productos de cuatro coeficientes

$3J$ , que de acuerdo con (A.16) reduce (A.47) a:

$$\langle J_1 m_1 | T_{q_1}^{(k_1)} | J_1' m_1' \rangle = \delta_{m_1 m_1'} \sqrt{\frac{2k_1+1}{2J_1+1}} \langle J_1 m_1 | T_{q_1}^{(k_1)} | J_1 m_1 \rangle \quad (A.48)$$

Generalicemos este resultado considerando el producto tensorial de  $T^{(k_1)}$  y  $U^{(k_2)}$ , de acuerdo con la definición (A.37) y el teorema de Wigner-Eckart tenemos:

$$\begin{aligned} \langle J_1 m_1 J_2 m_2 | X_{q_1}^{(k_1)} | J_1' m_1' J_2' m_2' \rangle &= \sum_{m_1'' m_2''} \langle J_1 m_1 m_2 | J_1 m_1'' J_2 m_2'' \rangle \langle k_1 q_1 k_2 q_2 | J_1 m_1'' J_2 m_2'' \rangle \\ &\times \langle J_1' m_1' J_2' m_2' | J_1' m_1'' J_2' m_2'' \rangle \langle J_1 m_1'' J_2 m_2'' | J_1' m_1' J_2' m_2' \rangle \\ &= \langle J_1 m_1 | T_{q_1}^{(k_1)} | J_1' m_1' \rangle \langle J_2 m_2 | U_{q_2}^{(k_2)} | J_2' m_2' \rangle \end{aligned} \quad (A.49)$$

y por otro lado

$$\langle J_1 m_1 J_2 m_2 | T_{q_1}^{(k_1)} | J_1' m_1' J_2' m_2' \rangle = \langle J_1 m_1 | T_{q_1}^{(k_1)} | J_1' m_1' \rangle \langle J_2 m_2 | U_{q_2}^{(k_2)} | J_2' m_2' \rangle \quad (A.50)$$

Comparando (A.49) y (A.50) y utilizando también las relaciones (A.9), (A.10) y (A.12) obtenemos una expresión que contiene productos de seis coeficientes  $3J$ , que pueden agruparse en un coeficiente  $9J$ , tal y como lo afirma la relación (A.24).

$$\begin{aligned} \langle J_1 m_1 J_2 m_2 | (T^{(k_1)} \times U^{(k_2)})^k | J_1' m_1' J_2' m_2' \rangle &= \sqrt{(2J_1+1)(2J_2+1)(2J'+1)} \\ &\times \langle J_1 m_1 | T_{q_1}^{(k_1)} | J_1' m_1' \rangle \langle J_2 m_2 | U_{q_2}^{(k_2)} | J_2' m_2' \rangle \left\{ \begin{matrix} J_1 & J_2 & J \\ k_1 & k_2 & k \end{matrix} \right\} \end{aligned} \quad (A.51)$$

Utilizamos nuevamente los coeficientes de Racah para derivar una expresión para los elementos de matriz reducidos del producto tensorial de dos tensores que operan sobre las coordenadas del mismo sistema. Considerese  $X_{q_1}^{(k_1)} = (T_{q_1}^{(k_1)})_{q_1}^k$ , por un lado tenemos, usando el teorema de Wigner-Eckart,

que

$$\langle J m | X_{q_1}^{(k_1)} | J' m' \rangle = \langle J m | T_{q_1}^{(k_1)} | J' m' \rangle \quad (A.52)$$

y por otra parte encontramos

$$\begin{aligned} \langle J m | X_{q_1}^{(k_1)} | J' m' \rangle &= \langle J m | \sum_{q_1 q_2} \langle k_1 q_1 k_2 q_2 | k q_1 \rangle T_{q_1}^{(k_1)} T_{q_2}^{(k_2)} | J' m' \rangle \\ &= \sum_{q_1 q_2} \langle k_1 q_1 k_2 q_2 | k q_1 \rangle \sum_{J'' m''} \langle J m | T_{q_1}^{(k_1)} | J'' m'' \rangle \langle J'' m'' | T_{q_2}^{(k_2)} | J' m' \rangle \end{aligned} \quad (A.53)$$

Utilizando nuevamente el teorema de Wigner-Eckart en (A.53) se obtiene

$$\langle J, m | X_q^{(k)} | J', m' \rangle = \sum_{q_1, q_2, J''} \frac{1}{J''} \langle k, q_1, k_2, q_2 | k, q \rangle (-1)^{J-m} \begin{pmatrix} J & k & J'' \\ -m & q_1 & m'' \end{pmatrix} (-1)^{J'-m'} \times \begin{pmatrix} J'' & k_2 & J' \\ -m'' & q_2 & m' \end{pmatrix} \langle J || T^{(k)} || J'' \rangle \langle J'' || T^{(k)} || J' \rangle \quad (\text{A.54})$$

Las relaciones (A.52) y (A.54) son iguales, multipliquemos ambas por  $(-1)^{J-m} \begin{pmatrix} J & k & J' \\ -m & q & m' \end{pmatrix}$ , sumemos sobre  $m$  y  $m'$  y utilicemos la relación (A.11), entonces,

$$\langle J || X^{(k)} || J' \rangle = \sum_{J''} \langle J || T^{(k)} || J'' \rangle \langle J'' || T^{(k)} || J' \rangle (-1)^{J+J'} \sqrt{2J+1} \times \sum_{\substack{q_1, q_2, q \\ m, m', m''}} (-1)^{k_1+k_2+k+q'+J''+J-m'-\dots-n} \begin{pmatrix} J_1 & k_2 & k \\ q_1 & q_2 & q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 & k & J' \\ -q & q & m' \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} J' & k_2 & J'' \\ -m' & -q_2 & m'' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J' & J & k \\ m' & -m & q \end{pmatrix} \quad (\text{A.55})$$

De la ecuación (A.18) se deduce

$$\langle J || X^{(k)} || J' \rangle = (-1)^{J+k+J'} \sqrt{2k+1} \sum_{J''} \langle J || T^{(k)} || J'' \rangle \langle J'' || T^{(k)} || J' \rangle \times \begin{Bmatrix} J_1 & k_2 & k \\ J & J' & J'' \end{Bmatrix} \quad (\text{A.56})$$

Determinemos finalmente los elementos de matriz de un tensor  $T^{(k)}$  que actúa solo sobre las variables del sistema 1, de la relación (A.51) tenemos

$$\langle J_1, J_2, J || T^{(k)}(1) || J_1', J_2', J' \rangle = \sqrt{(2J+1)(2k+1)(2J'+1)} \langle J_1 || T^{(k)} || J_1' \rangle \times \langle J_2 || 1 || J_2' \rangle \begin{Bmatrix} J_1 & J_2 & J \\ J_1' & J_2' & J' \\ k & 0 & k \end{Bmatrix} \quad (\text{A.57})$$

que de (A.42) y de (A.25) resulta ser igual a :

$$\sqrt{(2J+1)(2k+1)(2J'+1)(2J_2'+1)} \langle J_1 || T^{(k)} || J_1' \rangle \begin{Bmatrix} J_1 & J_2 & J \\ J_1' & J_2' & J' \\ k & 0 & k \end{Bmatrix} \delta_{J_2, J_2'} \quad (\text{A.58})$$

por lo que

$$\langle J_1, J_2, J || T^{(k)}(1) || J_1', J_2', J' \rangle = (-1)^{J+J_2+J'+k} \sqrt{(2J+1)(2J'+1)} \langle J_1 || T^{(k)} || J_1' \rangle \times \begin{Bmatrix} J_1 & J_2 & k \\ J_1' & J_2' & J_2' \end{Bmatrix} \delta_{J_2, J_2'} \quad (\text{A.59})$$



PARTE II. TECNICAS DE TEORIA DE GRUPOS EN SISTEMAS  
DE MUCHOS CUERPOS.

CAPITULO IV. ELEMENTOS DE TEORIA DE GRUPOS.

Los sistemas físicos tienen distintos tipos de simetrías, las cuales pueden clasificarse de acuerdo a su origen y naturaleza. Podemos distinguir dos clases principales: las simetrías geométricas, que dependen de las propiedades del espacio, y las simetrías dinámicas, que están supeditadas a la naturaleza específica del Hamiltoniano que asociemos al sistema. Entre estas últimas encontramos a las simetrías dinámicas en espacios vectoriales o simetrías de modelos, de las que nos ocuparemos de ahora en adelante.

Cuando hablamos de simetrías de modelos, nos referimos al problema de encontrar las funciones propias, en términos de un conjunto finito de estados  $W$  -que se seleccionan en base a algún modelo-, de un Hamiltoniano dado sin usar el método numérico de diagonalización de matrices, lo cual en muchas ocasiones puede resultar muy engorroso, además de perder todo sentido físico. Para hacer esto, se aplican las propiedades de invariancia del Hamiltoniano con respecto a un grupo de simetrías.

## SECCION 1. RESUMEN DE RESULTADOS PARA GRUPOS FINITOS.

Definición 1.1.- Un conjunto no vacío  $G$  es el llamado  $G$  forma un grupo con respecto a una operación binaria ( $'$ ) si se satisfacen que:

- (i)  $a, b \in G$  implica que  $a'b \in G$ ;
- (ii)  $a, b, c \in G$  implica que  $a'(b'c) = (a'b)'c$ ;
- (iii) existe un elemento  $e \in G$  tal que  $a'e = a$  para todo  $a \in G$ ;
- (iv) para todo  $a \in G$  existe un elemento  $a^{-1} \in G$  tal que  $a'a^{-1} = e$ .

Estamos interesados en conocer el efecto de los operadores de un grupo  $G$  sobre el Hamiltoniano de un sistema y sobre sus funciones propias. Supongamos que el operador  $H(x)$  es el Hamiltoniano de un sistema físico, y que sus funciones propias son  $\psi_\alpha(x)$ ; i.e., que  $H\psi_\alpha = E_\alpha\psi_\alpha$ . Si el valor propio  $E_\alpha$  está degenerado y tiene multiplicidad  $n$ , podemos encontrar un conjunto linealmente independiente  $\{\psi_\alpha^{(i)}\}_{i=1}^n$  que forme una base para el subespacio asociado a  $E_\alpha$ . Supongamos también que  $H(x)$  es invariante bajo un grupo de operaciones físicas  $G$ ; o sea, que  $R_a H = H R_a$  para todo  $R_a \in G$ . Entonces  $H(R_a\psi_\alpha) = E_\alpha(R_a\psi_\alpha)$ ; esto quiere decir que  $R_a\psi_\alpha$  es también una función propia de  $H$  asociada al valor propio  $E_\alpha$ ; por lo tanto, podemos expresarlo como una combinación lineal de la base  $\{\psi_\alpha^{(i)}\}_{i=1}^n$ :

$$R_a\psi_\alpha^{(i)} = \sum_{j=1}^n M_{ij}(R_a)\psi_\alpha^{(j)}. \quad (1.1)$$

El coeficiente de expansión  $M_{ij}(R_a)$  es el elemento de matriz entre los estados  $\psi_\alpha^{(i)}$  y  $\psi_\alpha^{(j)}$ . Luego, en el espacio vectorial generado por  $\{\psi_\alpha^{(i)}\}_{i=1}^n$ , cada operador es equivalente a una matriz de dimensión  $n \times n$ ,  $\underline{M}(R_a)$ . De manera semejante vemos que  $\underline{M}(R_a)\underline{M}(R_b) = \underline{M}(R_a R_b)$ .

Definición 1.2.- El conjunto de matrices  $\{\underline{M}(R)\}_{R \in G}$  de dimensión  $n \times n$  definidas en (1.1) se dice que forma una representación del grupo  $\{R\}$ , y que  $n$  es la dimensión de la representación.

Las  $n$  funciones propias independientes  $\{\psi_\alpha^{(i)}\}_{i=1}^n$  asociadas al

valor propio  $E_{\alpha}$ , se dice que portan, o forman un bloque para, la representación  $\{\underline{M}(R_a)\}$  del grupo de simetrías  $\{R_a\}$  del Hamiltoniano  $H$ .

La base  $\{\psi_{\alpha}^{(k)}\}_{\alpha=1}^n$  genera un espacio vectorial  $V$ . Supongamos que mediante combinaciones lineales de los estados de la base encontramos bases para subespacios  $V_i$  de  $V$ , con dimensiones  $n_i$  ( $i=1, 2, \dots, k$ ), donde estos subespacios son invariantes ante las transformaciones del grupo  $G$  (que sea invariante significa que para toda  $\psi_i \in V_i$  y para todo  $R_a \in G$ ,  $R_a \psi_i \in V_i$ ). Si esta descomposición es posible, entonces la representación  $\{\underline{M}(R_a)\}$  de dimensión  $n$  puede describirse como una suma de  $k$  representaciones más simples  $\{\underline{M}^i(R_a)\}$ ,  $i=1, 2, \dots, k$ , que tienen dimensiones  $n_i$  y tales que  $\sum_{i=1}^k n_i = n$ ; en otras palabras, podemos encontrar una transformación de semejanza  $S$  de manera que  $\underline{M}'(R_a) = S^{-1} \underline{M}(R_a) S$  tenga la forma

$$\underline{M}'(R_a) = \begin{pmatrix} V_1 & & & & \\ \underline{M}^1(R_a) & 0 & \dots & 0 & \\ 0 & \underline{M}^2(R_a) & \dots & 0 & \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ 0 & 0 & \dots & \underline{M}^k(R_a) & \\ & & & & V_k \end{pmatrix} \begin{matrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_k \end{matrix}$$

Si esta reducción es posible, entonces la representación  $\{\underline{M}(R_a)\}$  se dice que es reducible. Cada subespacio  $V_i$  suministra una base para la representación del grupo. Si la representación  $\{\underline{M}^i(R_a)\}$  no puede descomponerse más, entonces se dice que es irreducible.

Un criterio un poco más formal para decidir cuándo una representación es irreducible lo suministra el conocido

Lema de Schur.- Si una matriz conmuta con todas las matrices de una representación irreducible unitaria de dimensión finita de un grupo, tal matriz es un escalar.

(Para representaciones unitarias se satisface que  $\underline{M}(R_a^{-1}) = \underline{M}'(R_a)$ , en tanto que decimos que una matriz es escalar si es múltiplo de la matriz unidad. Por otra parte, se puede demostrar que para grupos finitos toda representación es equivalente a una re-

presentación unitaria <sup>1)</sup>).

Es posible que dos representaciones irreducibles  $\{\underline{M}^i(R)\}$  y  $\{\underline{M}^j(R)\}$  sean equivalentes, y que mediante un cambio de base podamos transformar una en la otra. Considerando  $\underline{M}^i$  equivalentes como idénticas podemos escribir

$$\underline{M}(R) = \sum_i C_i \underline{M}^i(R),$$

donde  $C_i$  es un entero positivo llamado la multiplicidad de la representación  $\{\underline{M}^i(R)\}$ , y que indica el número de veces que dicha representación aparece en  $\{\underline{M}(R)\}$ .

Hemos visto que un grupo nos permite dividir el espacio vectorial  $V$  en subespacios que no pueden conectarse por los operadores del grupo: los subespacios invariantes. Por otra parte, parece plausible que eligiendo diferentes estados en un subespacio invariante y operando sobre ellos con los operadores del grupo podamos generar el subespacio completo.

Observemos que si no podemos encontrar un conjunto de vectores pertenecientes a una base de  $\{\underline{M}(R)\}$  que sea invariante ante todas las transformaciones del grupo  $G$ , es posible que podamos hallar un conjunto que sea invariante ante todas las transformaciones de un subgrupo  $G'$  de  $G$ ; esto significa que una representación irreducible para un grupo puede resultar reducible para su subgrupo.

Finalmente, debemos señalar que es precisamente la descomposición de un espacio vectorial mediante los operadores de un grupo lo que nos caracteriza a estados de simetría definida; por esta razón, es bastante natural pensar que una función tiene simetría definida si pertenece a un subespacio invariante.

## SECCION 2. RESUMEN DE RESULTADOS PARA GRUPOS CONTINUOS.

Al introducir  $n$  estados de partículas independiente para la descripción de los estados de baja energía de un núcleo, en el modelo de capas, introducimos un tipo de simetrías dentro del espacio de nuestro modelo: el grupo de transformaciones unitarias entre los estados nucleares,  $U(n)$ . Este es un ejemplo entre muchos de la importancia de los grupos de transformaciones continuas en el estudio de la estructura nuclear.

Consideremos el conjunto de transformaciones  $F$ , en un espacio de dimensión  $n$ , definido por el conjunto de ecuaciones

$$x'^i = F^i(x^1, \dots, x^n; a^1, \dots, a^r), \quad i=1, \dots, n, \quad (2.1)$$

dónde  $a^s$ ,  $s=1, \dots, r$ , son parámetros reales que pueden variar continuamente y que caracterizan completamente la transformación. Supondremos que si dos transformaciones son iguales para todos los  $(x^1, \dots, x^n)$ , entonces sus parámetros son los mismos (en este caso se dice que las transformaciones dependen esencialmente de los parámetros).

En lo que sigue denotaremos  $x = (x^1, \dots, x^n)$  y  $a = (a^1, \dots, a^r)$  para simplificar las expresiones que aparezcan.

Definición 2.1.- Un conjunto de transformaciones  $F$ , definidas como en (2.1), que dependen de  $r$  parámetros y actúan sobre un espacio de dimensión  $n$ , constituyen un grupo de Lie si satisfacen:

- (i) que las transformaciones  $F$  son funciones analíticas de los  $r$  parámetros;
- (ii) si  $x' = F(x; a)$  y  $x'' = F(x'; b)$ , entonces existe un conjunto de parámetros  $c^s = \Phi^s(a, b)$ ,  $s=1, \dots, r$ , tal que

$$x'' = F(x; c);$$

- (iii) que dada una transformación  $x' = F(x; a)$ , existe un conjunto de parámetros  $\underline{a}^s$ ,  $s=1, \dots, r$ , tales que

$$x = F(x'; \underline{a}).$$

El número de parámetros  $r$  se determina el orden del grupo.

Observemos que al transformar  $x$  en  $x'$  y al aplicar el mapeo inverso que lleva  $x'$  a  $x$  obtenemos una transformación que pertenece al grupo y que podemos caracterizar por el conjunto de parámetros  $a_0^k$ ,  $k=1, \dots, r$ ; i.e., que la transformación  $x = F(x'; a_0)$  es la identidad y pertenece al grupo. De ahora en adelante, consideraremos grupos continuos de transformaciones reparametrizados de manera que  $a_0^k = 0$  para  $k=1, \dots, r$ .

La teoría de Lie de los grupos continuos de transformaciones no considera al grupo entero, sino sólo aquella parte de él que está en la vecindad de la identidad; las transformaciones infinitesimales, que difieren de la identidad por una cantidad infinitesimal en los parámetros. A continuación examinaremos los aspectos elementales de dicha teoría.

Notemos que existen dos expresiones equivalentes para  $x'$ :

$$x' = F(x; a) \quad \text{y} \quad x' = F(x'; \Delta a).$$

Si consideramos un punto  $x'+dx'$  que difiere por un infinitesimal  $dx'$  de  $x'$ , tenemos dos transformaciones que nos llevan a él; la situación se muestra esquemáticamente en la Fig. 2.1.

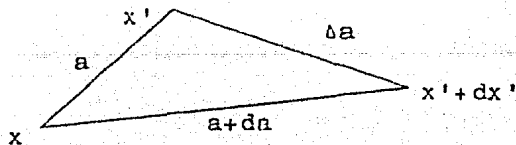


FIGURA 2.1.

O sea, que

$$\begin{aligned} x'+dx' &= F(x; a+da), \\ x'+dx' &= F(x'; \Delta a). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Desarrollando en serie de Taylor el miembro derecho de la primera ecuación en (2.3) y conservando sólo los términos lineales en los infinitesimales obtenemos

$$dx^i = \frac{\partial F^i}{\partial a^\lambda}(x; a) da^\lambda;$$

hemos utilizado aquí, y lo seguiremos haciendo durante toda esta sección, la convención de Einstein de suma sobre índices repeti-

dos. Procediendo de la misma manera para la segunda igualdad en (2.3) encontramos

$$dx^i = u^i_{\lambda}(x') \Delta a^{\lambda} ; u^i_{\lambda}(x') \equiv \left. \frac{\partial x^i}{\partial a^{\lambda}}(x'; a) \right|_{a=0} . \quad (2.4)$$

Abrimos aquí un paréntesis para examinar (2.3). Las transformaciones de este tipo son conocidas como transformaciones infinitesimales; para tales transformaciones, el cambio  $df$  en una función  $f = f(x)$  está dado por

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i ;$$

usando (2.4) podemos reescribir esta expresión como

$$df = (\Delta a^{\lambda} X_{\lambda}) f ; X_{\lambda} \equiv u^i_{\lambda}(x) \frac{\partial}{\partial x^i} . \quad (2.5)$$

Los operadores  $X_{\lambda}$  son llamados operadores infinitesimales o generadores del grupo.

Continuando, de la condición (ii) de la Def. 2.3 sabemos que

$$a^i + da^i = \varphi^i(a^1, \dots, a^r; a^1, \dots, a^r) ;$$

sin embargo, debido a que  $\varphi^i(a^1, \dots, a^r; 0, \dots, 0) = a^i$ ,  $da^i$  se puede expresar como una combinación lineal de  $\Delta a^j$ :

$$da^i = \mu^i_j(a^1, \dots, a^r) \Delta a^j ; \mu^i_j(a) \equiv \left. \frac{\partial \varphi^i}{\partial a^j}(a; b) \right|_{b=0} .$$

Si definimos  $\eta^i_j(a) \mu^j_k(a) \equiv \delta^i_k$ ,  $\Delta a^i = \eta^i_j(a) da^j$ . De esta relación, y de las dos expresiones que tenemos para  $dx^i$ , encontramos

$$\frac{\partial x^i}{\partial a^j} = u^i_k(x) \eta^k_j(a) . \quad (2.6)$$

Con la ayuda de esta igualdad, podemos mostrar que los conmutadores de los operadores infinitesimales se pueden expresar como combinaciones lineales de los operadores infinitesimales del mismo grupo. Para ver esto, notemos que si las ecuaciones (2.6) tienen solución, deben satisfacer la condición de integrabilidad

$$\frac{\partial^2 x^i}{\partial a^{\lambda} \partial a^{\mu}} = \frac{\partial^2 x^i}{\partial a^{\mu} \partial a^{\lambda}} ;$$

usando esta igualdad y (2.6) hallamos que

$$u^i_\alpha \frac{\partial u^j_\beta}{\partial x^i} - u^j_\beta \frac{\partial u^i_\alpha}{\partial x^i} = C_{\alpha\beta}^{\gamma} (a) u^j_\gamma(x), \quad (2.7)$$

donde se ha definido

$$C_{\alpha\beta}^{\gamma} (a) \equiv \left( \frac{\partial \lambda^{\gamma}}{\partial a^{\alpha}} - \frac{\partial \lambda^{\alpha}}{\partial a^{\beta}} \right) \mu^{\beta}_{\alpha} \mu^{\alpha}_{\gamma}. \quad (2.8)$$

Si diferenciamos (2.7) con respecto a  $a^{\sigma}$  (aplicamos el operador  $\frac{\partial x^k}{\partial a^{\sigma}} \frac{\partial}{\partial x^k}$ , que solo actúa sobre las variables  $x^i$ ), encontramos que

$$\frac{\partial C_{\alpha\beta}^{\gamma} (a)}{\partial a^{\sigma}} u^i_\gamma(x) = 0.$$

Las  $u^i_j(x)$  son linealmente independientes si suponemos que los parámetros "a" son esenciales; esto, junto con la ecuación anterior, indica que las  $C_{\alpha\beta}^{\gamma}$  son independientes de  $a^i$ , y por consiguiente son constantes. Teniendo esto en mente, las Ecs. (2.7) y (2.8) pueden reescribirse como

$$u^i_\alpha \frac{\partial u^j_\beta}{\partial x^i} - u^j_\beta \frac{\partial u^i_\alpha}{\partial x^i} = C_{\alpha\beta}^{\gamma} u^i_\gamma(x), \quad (2.7')$$

$$\frac{\partial \lambda^{\gamma}}{\partial a^{\sigma}} - \frac{\partial \lambda^{\sigma}}{\partial a^{\beta}} = C_{\alpha\beta}^{\gamma} \lambda^{\alpha} \lambda^{\beta}_{\sigma}. \quad (2.8')$$

Por otra parte, los conmutadores de los generadores de un grupo definidos en (2.5) son

$$\begin{aligned} [X_{\alpha}, X_{\beta}] &= u^i_\alpha \frac{\partial}{\partial x^i} u^j_\beta \frac{\partial}{\partial x^j} - u^j_\beta \frac{\partial}{\partial x^j} u^i_\alpha \frac{\partial}{\partial x^i} \\ &= \left( u^i_\alpha \frac{\partial u^j_\beta}{\partial x^i} - u^j_\beta \frac{\partial u^i_\alpha}{\partial x^i} \right) \frac{\partial}{\partial x^j}; \end{aligned}$$

y comparando con (2.7') obtenemos que

$$[X_{\alpha}, X_{\beta}] = C_{\alpha\beta}^{\gamma} u^j_\gamma \frac{\partial}{\partial x^j} = C_{\alpha\beta}^{\gamma} X_{\gamma} \quad (2.9)$$

Esta es la razón por la que los coeficientes  $C_{\alpha\beta}^{\gamma}$  son conocidos como las constantes de estructura del grupo de Lie.

Los conmutadores son antisimétricos, por lo que

$$C_{\alpha\beta}^{\gamma} = -C_{\beta\alpha}^{\gamma}; \quad (2.10)$$



los conmutadores también satisfacen la identidad de Jacobi, de donde se obtiene que

$$C_{\alpha\beta}^{\gamma} C_{\gamma\delta}^{\epsilon} + C_{\beta\gamma}^{\delta} C_{\delta\epsilon}^{\alpha} + C_{\gamma\delta}^{\epsilon} C_{\epsilon\alpha}^{\beta} = 0.$$

Hemos visto que si las transformaciones  $P$  forman un grupo, entonces las relaciones (2.10) y (2.11) se satisfacen. El converso es el contenido de los

TEOREMAS FUNDAMENTALES DE LIE <sup>2)</sup>:

- (1) Si existen funciones  $P^i = x^i$  que satisfacen (2.0), estas transformaciones constituyen un grupo de Lie.
- (2) Si existen  $u_j^i(x)$  que satisfacen (2.7'), entonces existen  $\hat{a}_n^m(a)$ , determinadas hasta un isomorfismo, que satisfacen (2.8'), de manera que (2.0) es integrable.
- (3) Para cada conjunto de constantes  $C_{\alpha\beta}^{\gamma}$  que satisfacen (2.10) y (2.11), existen  $u_j^i(x)$  que satisfacen (2.7').

El operador  $S_a = 1 + \epsilon a^{\sigma} X_{\sigma}$  genera una transformación infinitesimal, y una transformación finita puede obtenerse mediante una aplicación sucesiva de tales operadores; por lo tanto, un operador  $R_a$  asociado a una transformación finita puede escribirse como

$$R(a^1, \dots, a^r) = \lim_{p \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{a^{\sigma}}{p} X_{\sigma} \right)^p = \exp(a^{\sigma} X_{\sigma}).$$

Usando el conjunto completo y linealmente independiente de operadores infinitesimales  $X_{\alpha}$  como base, podemos tomar todas las combinaciones lineales  $\{b^{\alpha} X_{\alpha}\}$  y generar un espacio vectorial. Los vectores  $b^{\alpha} X_{\alpha}$  son cerrados bajo la operación de conmutación por lo que el espacio vectorial considerado forma un álgebra bajo esta operación; el álgebra de Lie asociada al grupo de Lie. El problema inverso también tiene una respuesta:

Teorema 2.1. A cada álgebra de Lie le corresponde un grupo de Lie; las constantes de estructura determinan al grupo de Lie localmente (i.e., en la vecindad del elemento identidad). <sup>3)</sup>

Los siguientes conceptos se refieren a las propiedades de estructura de los grupos de Lie, y son muy importantes:

a) Si los parámetros de un grupo de Lie varían sobre un conjunto

compacto se dice que tanto el grupo como su álgebra asociada son compactos.

b) Un grupo de Lie es abeliano si todos sus elementos conmutan. Los operadores infinitesimales asociados con el grupo también formarán un álgebra abeliana; en consecuencia, todas las constantes de estructura deben anularse.

c) Decimos que  $H$  es un subgrupo de  $G$ , un grupo de Lie, si es un conjunto de transformaciones contenidas en  $G$  que por sí mismas constituyen un grupo. Así, si  $\{X_\alpha\}_{\alpha=1}^r$  son los generadores del subgrupo, las constantes de estructura del grupo deben satisfacer

$$c_{\alpha\beta}^\gamma = 0 \text{ para } \alpha, \beta \leq \rho \text{ y } \gamma > \rho.$$

d) Un subgrupo  $H$  de  $G$  es un subgrupo invariante si  $S_b^{-1} S_a S_b \in H$  para todo  $S_a \in H$  y todo  $S_b \in G$ . En términos de las constantes de estructura, esto quiere decir que

$$c_{\alpha\beta}^\gamma = 0 \text{ para } \alpha \leq \rho, \gamma > \rho.$$

e) Un grupo es simple si no tiene subgrupos invariantes aparte del elemento unidad. Un grupo se dice que es semisimple si no contiene subgrupos invariantes abelianos además de la unidad.

f) Si los generadores de un grupo de Lie  $G$  pueden descomponerse en  $k$  conjuntos, cada uno cerrado respecto a la operación de conmutación y tales que los miembros de conjuntos distintos conmutan entre sí, entonces los conjuntos forman subgrupos  $H_1, \dots, H_k$  de  $G$  (más exactamente,  $H_i$  es el subgrupo asociado con el subálgebra mencionada) y los elementos de subgrupos distintos conmutan entre sí. En este caso, se dice que  $G$  es el producto directo de  $H_1, \dots, H_k$ , lo cual se denota:  $G = H_1 \otimes H_2 \otimes \dots \otimes H_k$ .

Una representación para un grupo continuo se define de la misma manera que para grupos finitos (Cf. Def. 2.2).

A causa de que las aplicaciones físicas que nos interesan involucran sólo a los grupos compactos y semisimples, en los siguientes párrafos nos vamos a restringir a su estudio.

Para poder distinguir a los grupos compactos y semisimples

necesitamos un criterio que sea de fácil manipulación. Para esto, construyamos a partir de las constantes de estructura un tensor simétrico de segundo orden, conocido como tensor métrico, de la siguiente manera:

$$g_{\alpha\beta} \equiv \sum_{\sigma} c_{\alpha\sigma}^{\gamma} c_{\beta\sigma}^{\gamma}.$$

Y es en términos de estos tensores que podemos hacer las siguientes afirmaciones:

**Teorema 2.2 (Criterio de Cartan).** Una condición necesaria y suficiente para que un grupo sea semisimple es que  $\det(g_{\alpha\beta}) \neq 0$ . 4)

**Teorema 2.3.** Una condición necesaria y suficiente para que un álgebra de Lie semisimple sea compacta es que la matriz  $g_{\alpha\beta}$  sea negativa definida (si tenemos una base del álgebra de Lie  $\{X_{\alpha}\}$  podemos expresar cada elemento  $A$  del álgebra como  $a^{\sigma} X_{\sigma}$ ; entonces, en términos de las constantes de estructura definidas para dicha base, decimos que la matriz  $g_{\alpha\beta}$  es positiva definida si  $a^{\beta} a^{\sigma} g_{\beta\sigma} > 0$ ). 4)

SECCION 3. REPRESENTACIONES DE GRUPOS DE LIE. CLASIFICACION DE ESTADOS DE ACUERDO A RI DE UN GRUPO.

De entre el conjunto completo de generadores podemos seleccionar un subconjunto máximo de operadores que conmutan; el número  $\lambda$  de estos generadores que conmutan es llamado el rango del grupo de Lie. Los operadores pertenecientes a este conjunto pueden diagonalizarse simultáneamente. Por otra parte, sabemos que los operadores infinitesimales del grupo no conectan estados pertenecientes a RI que no son equivalentes. Por lo tanto, podemos elegir como base para una RI dada estados caracterizados por los valores propios de los operadores del conjunto máximo que conmuta, aunque los estados no queden completamente caracterizados.

Sea  $v$  un vector del espacio  $R$ , en el cual actúan los operadores de la representación del grupo  $G$  y donde el conjunto máximo de operadores que conmutan es  $\{H_i\}_{i=1}^{\lambda}$ , tal que  $H_i v = m_i v$ ,  $i=1, \dots, \lambda$ ; o sea, que  $v$  es un vector propio simultáneo de las  $\lambda$  matrices  $\{H_i\}_{i=1}^{\lambda}$  de la representación. Con el conjunto de valores propios  $\{m_i\}$  podemos formar una  $\lambda$ -upla ordenada  $(m_1, \dots, m_\lambda)$  a la que se denomina peso de  $v$ . Observemos que, sin embargo, podemos tener un grupo donde un peso  $(m_1, \dots, m_\lambda)$  aparezca más de una vez; en este caso es necesario que encontremos operadores adicionales, que sean funciones de los generadores del grupo, y que conmutan con todos los  $\{H_i\}_{i=1}^{\lambda}$ , para caracterizar completamente cada vector. Racah ha mostrado que para un grupo de Lie de  $r$  parámetros y rango  $\lambda$  se necesitan  $\frac{1}{2}(r-\lambda)$  operadores conmutantes adicionales.

Los pesos de los estados pueden ordenarse; vamos a decir que el peso  $(m_1, \dots, m_\lambda)$  es positivo si la primera componente que no se anula es positiva. Luego, un peso  $(m_1, \dots, m_\lambda)$  es mayor que otro  $(n_1, \dots, n_\lambda)$  si la primera componente distinta de cero de la diferencia  $(m_1 - n_1, \dots, m_\lambda - n_\lambda)$  es positiva.

Notemos que mientras el conjunto  $\mathfrak{h}_1$  suministra los pesos para los estados, los operadores infinitesimales restantes van a cambiar el peso de los estados a causa de sus relaciones de conmutación. Entre éstos va a existir operadores de ascenso (descenso) que aumentan (disminuyen) el peso del estado. Separemos los operadores de ascenso del resto, y de éstos seleccionemos uno, digamos  $X_j$ . Podemos aplicar repetidamente este operador a la función  $u(\mathfrak{m})$ , caracterizada por el peso  $\mathfrak{m} = (m_1, \dots, m_r)$ , obteniendo en cada ocasión un estado con peso mayor que el anterior. Repetimos este proceso hasta que alcancemos un estado con peso máximo en este operador; i.e., si denotamos este estado como  $u^{\text{máx}}(X_j)(\mathfrak{m})$ , debe satisfacer  $X_j u^{\text{máx}}(X_j)(\mathfrak{m}) = 0$ . Podemos hacer lo mismo con los demás operadores de descenso, de manera que finalmente obtengamos una función de peso máximo con la propiedad de que todos los operadores de ascenso actuando sobre él nos den cero (vemos que aplicar este método es posible si la representación es finita, o también si es infinita pero acotada superiormente). De hecho, se puede mostrar que

**Teorema 3.1.** En cada base de una representación irreducible de dimensión finita existe una, y sólo una, función de peso máximo.<sup>5)</sup>

De manera que una representación irreducible de un grupo de Lie de rango  $r$  puede caracterizarse por los  $r$  números de su peso máximo, ya que también puede demostrarse que si

**Teorema 3.2.** Dos representaciones irreducibles con pesos máximos iguales son equivalentes.<sup>5)</sup>

Habiendo clasificado las representaciones irreducibles de un grupo, estamos listos para encontrar todas sus representaciones si sabemos que cada representación reducible se puede descomponer en sus constituyentes irreducibles. Se puede demostrar que cada representación de un grupo compacto es completamente reducible a una suma de RI, las cuales tienen dimensión finita. Para grupos de Lie semisimples también se puede probar que cada re-

presentación de orden finito es completamente reducible. Esto fue hecho por Casimir mediante la introducción de un operador llamado operador de Casimir de segundo orden y definido como

$$G^2 = \sum_{\alpha} X_{\alpha} X_{-\alpha}.$$

Este operador posee la propiedad de que conmuta con todos los operadores de la representación, ya que conmuta con los generadores del grupo. Si consideramos una RI, el operador de Casimir  $G^2$  conmuta con todos los operadores de la representación y, por el lema de Schur, es un escalar; de manera que el operador  $G^2$  tiene un valor propio determinado por el estado de peso máximo de una RI dada, el cual puede servir para caracterizar dicha RI (aunque debemos esperar que varias RI no equivalentes puedan estar asociadas al mismo valor propio de  $G^2$ ).

Racah ha propuesto la siguiente definición de operadores de Casimir de cualquier orden:

$$G^n = \sum_{\alpha_1, \beta_1} X_{\alpha_1} X_{\beta_1} \dots \sum_{\alpha_n, \beta_n} X_{\alpha_n} X_{\beta_n} \dots X_{\alpha_n}.$$

Sin embargo, debemos hacer notar que estados dentro de una base para una RI no se puede distinguir mediante los valores propios de los operadores de Casimir.

SECCION 4. BASES PARA REPRESENTACIONES IRREDUCIBLES DE GRUPOS LINEALES EN UN ESPACIO DE DIMENSION N.

El conjunto de todas las transformaciones unitarias entre  $S$  órbitas de partícula independiente forma un grupo unitario  $U(S)$  de dimensión  $S$ . Estas transformaciones inducen las correspondientes transformaciones entre las  $S^n$  funciones de  $n$  partículas en  $S$  órbitas. Para facilitar muchos cálculos es conveniente construir conjuntos irreducibles a partir del conjunto  $\mathcal{N} = S^n$  funciones. Por esta razón, encontraremos bases para RI en el grupo de transformaciones lineales  $GL(N, \mathbb{C})$ , y veremos cómo se relacionan con las RI de sus subgrupos más importantes.

(i) TENSORES IRREDUCIBLES EN GRUPOS LINEALES  $GL(N, \mathbb{C})$ .

Sea  $x = (x^1, \dots, x^N)$  un vector en un espacio  $\mathbb{V}_N$  de dimensión  $N$ . Una transformación  $A \in GL(N, \mathbb{C})$  en el espacio  $\mathbb{V}_N$  tiene la forma de una matriz; si transforma  $x$  en  $x'$ , se debe tener

$$x'^i = A^i_j x^j, \quad i, j = 1, \dots, N, \quad A^i_j \in \mathbb{C}, \quad (4.1)$$

y además,  $\det(A^i_j) \neq 0$ .

Consideremos las  $N^2$  cantidades  $x^i y^j$  que pueden formarse tomando todos los productos de las componentes de dos vectores  $x, y \in \mathbb{V}_N$ . Cuando se aplica la transformación (4.1), el conjunto de cantidades  $x^i y^j$  está sujeto a la transformación

$$x'^i y'^j = A^i_m A^j_n x^m y^n. \quad (4.2)$$

Los  $N^2$  productos del tipo  $A^i_m A^j_n$  suministran una representación tensorial del grupo  $GL(N, \mathbb{C})$ , que se denota por  $A \otimes A$  y es conocida como producto Kronecker o producto directo.

Un conjunto de  $N^2$  cantidades  $F^{ij}$  cuya ley de transformación es

$$F'^{ij} = A^i_m A^j_n F^{mn}. \quad (4.3)$$

que tiene la misma forma que (4.2), se dice que forma un tensor de orden 2. En general, si tenemos una cantidad que se transforma como el producto de las componentes de  $r$  vectores, ésta es un

tensor de orden  $r$ :

Definición 4.1.- Se dice que  $P$  es un tensor de orden  $r$  si es una cantidad descrita por  $N^r$  componentes  $P^{i_1 \dots i_r}$  en un espacio  $V_N$ , y se comporta ante transformaciones  $A \in GL(N, V)$  en la forma siguiente:

$$P^{i_1 \dots i_r} = A^{i_1}_{j_1} \dots A^{i_r}_{j_r} P^{j_1 \dots j_r}. \quad (4.1)$$

Observamos que la transformación  $A$  en  $V_N$  induce la transformación  $AXAX \dots AX$  (con  $r$  factores) en el espacio de los tensores de orden  $r$ .

Mostraremos que las transformaciones de  $GL(N, V)$  en  $V_N$  sólo actúan dentro de estados con la misma simetría  $[f]$  respecto al grupo de permutaciones  $S_r$ . A cada permutación  $\varphi \in S_r$  le podemos asociar un operador  $P$  que actúa sobre los índices del tensor  $P$ :

$$(PP)^{i_1 \dots i_r} = P^{\varphi(i_1 \dots i_r)}.$$

Entonces se tiene

$$\begin{aligned} (PP')^{i_1 \dots i_r} &= P^{\varphi(i_1 \dots i_r)}, \\ &= (AXAX \dots AX)^{\varphi(i_1 \dots i_r)} P^{\varphi(j_1 \dots j_r)}, \\ &= (AXAX \dots AX)^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_r} (PP)^{j_1 \dots j_r}, \end{aligned}$$

donde en el último paso se utilizó que  $A$  es un tensor bisimétrico. Esta última igualdad establece que los operadores de permutación  $P$  conmutan con todas las transformaciones en el espacio tensorial. Por lo tanto, aquellos tensores de orden  $r$  que tienen una simetría particular en  $S_r$  se transformarán entre sí cuando se les apliquen transformaciones como en (4.4).

Las RI de  $S_r$  están caracterizadas por una partición  $[f] \equiv [f_1 f_2 \dots f_s]$  del número  $r$  en  $s$  ( $\leq r$ ) partes enteras  $f_i$  tales que  $f_1 \leq f_2 \leq \dots \leq f_s \leq 0$  y  $f_1 + f_2 + \dots + f_s = r$ . La partición  $[f]$  puede representarse gráficamente mediante un patrón de Young, que consiste en un arreglo con  $f_i$  cuadros en el  $i$ -ésimo renglón colocados sucesivamente de manera que el primer cuadro de un renglón esté debajo del primero del renglón anterior.



La dimensión de tal RI  $[f]$  está dada por el número de modos en que los números  $\{1, 2, \dots, r\}$  se pueden acomodar en los cuadros del patrón de Young de manera que ningún número se repita y que la sucesión de números sea creciente de izquierda a derecha y de arriba hacia abajo; si esto sucede, se dice que tenemos una aplicación regular. De esta manera se encuentra que la dimensionalidad  $\dim([f]S_r)$  de la RI  $[f]$  en  $S_r$  está dada por

$$\dim([f]S_r) = \frac{r! \prod_{p=1}^r (p_p - p_{p-1})!}{p_1! p_2! \dots p_r!}; \quad p_i = p_{i+1} - 1.$$

Para obtener tensores de orden  $r$  con simetría definida, tenemos que aplicar los simetrizadores de Young al tensor general  $F^{i_1 i_2 \dots i_r}$ . Un simetrizador de Young está asociado a un patrón de Young en el cual se han colocado los índices  $\{i_1, i_2, \dots, i_r\}$ ; en este caso, algunos índices pueden ser iguales y se acostumbra que la sucesión sea creciente (de otra manera, obtendríamos tensores equivalentes que diferirían entre sí por una fase). Entonces el simetrizador de Young se define como  $Y = QP$ ; aquí  $P = \sum_{\mathcal{P}} \mathcal{P}$ , donde  $\mathcal{P}$  es toda permutación que intercambia los índices en un mismo renglón, y  $Q = \sum_{\mathcal{Q}} (-1)^b \mathcal{Q}$ , siendo  $\mathcal{Q}$  toda permutación que intercambia índices en la misma columna. La dimensión del subespacio de tensores con simetría definida  $[f]$  respecto a  $GL(N, \mathbb{C})$  se obtiene contando el número de modos en que podemos aplicar al patrón de Young correspondiente  $N$  números del conjunto  $\{1, 2, \dots, N\}$  en sucesión creciente; con esta definición, se tiene que la dimensión de la RI  $[f]$  de  $GL(N, \mathbb{C})$  es

$$\dim([f]GL(N, \mathbb{C})) = \prod_{i=1}^r (N - \sum_{j=1}^{i-1} p_j).$$

## (ii) PRODUCTO EXTERIOR (REJILLAS DE LITTLEWOOD).

Supongamos que tenemos dos sistemas separados; uno está dado por un conjunto de  $M = S^k$  estados  $\{\psi_i(\mathbb{C})a_i\}_{i=1}^M$  de  $k$  partículas en  $S$  órbitas que pertenecen a la RI  $[f]$  de  $S^k$ ; el otro sistema consta de  $N = S^{k'}$  estados  $\{\psi_j(\mathbb{C})a_j\}_{j=1}^N$  de  $k'$  partículas, distintas de las  $k$  anteriores, en  $S$  órbitas y que pertenecen a la RI  $[f']$  de  $S^{k'}$ . El conjunto de estados producto  $\{\psi(\mathbb{C})s\}\psi(\mathbb{C})a\}$  se transformarán entre sí de acuerdo al grupo  $S_{k+k'}$ , si permu-

timos que haya permutaciones entre los dos conjuntos, y en consecuencia forman la base para una representación de este grupo. Esta representación, el producto exterior de las representaciones  $[f]$  y  $[f']$ ,  $[f] \otimes [f']$ , puede resolverse en RI de  $S_{k+k'}$  mediante las famosas reglas de Littlewood:

Para conocer las RI  $[f'']$  de  $S_{k+k'}$  contenidas en  $[f] \otimes [f']$ :

- 1) obténganse los patrones de Young para  $[f]$  y  $[f']$ ;
- 2) etiquétense con el número  $i$  todos los cuadros del  $i$ -ésimo renglón del patrón correspondiente a  $[f']$ ;
- 3) agrégense uno a uno los cuadros numerados de los renglones del patrón correspondiente a  $[f']$  a aquél correspondiente a  $[f]$ , comenzando con el primer renglón y continuando con los sucesivos, de manera que:
  - (a) el número  $i$  no aparezca más de una vez en una columna;
  - (b) al agregar cada cuadro debemos cuidar que cada renglón tenga un número de cuadros menor o igual que el precedente;
  - (c) cuando contemos de derecha a izquierda y de arriba a abajo, el número de  $i$ 's no debe exceder al número de  $(i+1)$ 's en ningún momento.

Para verificar dimensionalmente los resultados obtenidos por el método delineado es útil conocer la dimensión de  $[f] \otimes [f']$  en  $S_{k+k'}$ . El número total de funciones en tal representación es el producto del número de modos de separar  $k+k'$  partículas en dos partes, cada una de las cuales tiene  $k$  y  $k'$  partículas,  $(k+k')!/k!k'!$ , y el número de funciones posibles  $\chi([f])\chi([f'])$ , que es  $MN$ ; i.e.,

$$\dim([f] \otimes [f']_{S_{k+k'}}) = MN = (k+k')!/k!k'!$$

Para evaluar productos exteriores son muy útiles las siguientes propiedades:

- (a)  $[f] \otimes [f'] = [f'] \otimes [f]$ ;
- (b)  $([f] \otimes [f']) \otimes [f''] = [f] \otimes ([f'] \otimes [f''])$ ;
- (c)  $[f] \otimes ([f'] + [f'']) = [f] \otimes [f'] + [f] \otimes [f'']$ .

## (iii) PRODUCTO INTERIOR.

Supongamos que tenemos un conjunto de funciones  $\{\psi(\{f\}a)\}_{S_k}$  de  $k$  partículas perteneciente a la RI  $[f]$  de  $S_k$ , y otro conjunto de estados de las mismas  $k$  partículas  $\{\chi(\{f'\}a')\}_{S_k}$ , pero que corresponden a otra RI,  $[f']$ , de  $S_k$ . El conjunto de  $M^2$  funciones  $\{\psi(\{f\}a)\chi(\{f'\}a')\}_{S_k}$  forma una representación de  $S_k$ , la representación producto interior de  $[f]$  y  $[f']$ ,  $[f] \times [f']$ , la cual se puede descomponer en RI de  $S_k$ . Las reglas generales para obtener esta descomposición son complicadas; tanto que en (Ham 02) sólo aparecen algunas fórmulas particulares y un esbozo del método general para obtenerlas.

Un ejemplo del uso de este concepto lo encontramos en la Teoría del Supermultiplete de Wigner, donde la función de onda nuclear completamente antisimétrica de  $k$  partículas se construye como el producto de un estado orbital  $\psi(\{f\}a)$  con simetría  $[f]$  en  $S_k$  y un estado de espín-isoespín  $\chi(\{f'\}a')$ ; las reglas generales para dar la representación resultante del producto interior muestran que la representación totalmente antisimétrica de  $S_k$  sólo aparece en el producto interior  $[f] \times [f']$  si  $[f']$  es la partición conjugada de  $[f]$  (i.e., si  $[f'] = \tilde{[f]}$  es la conjugada de  $[f]$ , puede obtenerse de ésta intercambiando los renglones por las columnas); por esto, la simetría de las funciones orbital y de espín-isoespín debe ser conjugada. Sin embargo, el producto de  $\psi(\{f\}a)$  con  $\chi(\{f'\}a')$  no es suficiente para obtener un estado totalmente antisimétrico; es necesario tomar una combinación lineal de productos con distintas  $\alpha, \alpha'$ :

$$\sum_{\alpha, \alpha'} c_{\alpha, \alpha'} \psi(\{f\}a) \chi(\{f'\}a')$$

(Cf. (Ham 02), secciones 5-6 y 5-7); los coeficientes que aquí aparecen son los coeficientes de Clebsch-Gordan para el grupo simétrico  $S_k$ , y en (Ham 02) aparecen fórmulas de recurrencia para calcularlos.

(iv) REPRESENTACIONES IRREDUCIBLES DE SUBGRUPOS DE  $GL(N, \mathbb{C})$ .

De cualquier representación  $\{M(R)\}_{R \in G}$  de un grupo  $G$  podemos extraer una representación para sus subgrupos  $H \subset G$ :  $\{M(R)\}_{R \in H}$ ; pero generalmente una RI en  $G$  ya no lo es cuando la consideramos como representación de  $H$ . Veremos que una RI de  $GL(N, \mathbb{C})$  es también una RI de sus subgrupos  $SL(N, \mathbb{C})$ ,  $U(N)$  y  $SU(N)$ ; sin embargo, para los subgrupos unimodulares algunas RI independientes en  $GL(N, \mathbb{C})$  se vuelven equivalentes.

En la parte (i) de esta sección vimos que en el espacio de tensores de orden  $r$  los elementos de matriz de RI de  $GL(N, \mathbb{C})$  son polinomios homogéneos de grado  $r$  en los elementos  $A^i_j$  de la transformación  $A \in GL(N, \mathbb{C})$ . Si las matrices que representan un subgrupo  $H$  son reducibles, pueden llevarse a su forma reducida mediante un cambio de la base (mediante una transformación de semejanza); sin embargo, esta transformación no reducirá todas las matrices de la representación de  $GL(N, \mathbb{C})$ , ya que comenzamos con una RI. Como bajo un cambio de la base los elementos de matriz de la representación siguen siendo polinomios homogéneos de grado  $r$  en las componentes  $A^i_j$ , la representación será reducible para  $H$  si cierto conjunto de polinomios homogéneos de grado  $r$ ,  $P(A^i_j)$ , se anulan para toda  $A' \in H$  pero no para toda  $A \in G$ .

Consideremos el grupo unimodular  $SL(N, \mathbb{C}) \subset GL(N, \mathbb{C})$ . Cualquier matriz asociada a  $A \in GL(N, \mathbb{C})$  en un espacio vectorial puede escribirse como  $A = aB$ , donde  $\det(B) = 1$ . Supongamos que los polinomios  $\{P_\nu(B)\}$  se anulan para todas las matrices de la representación del grupo unimodular; en consecuencia, para toda matriz  $A$  asociada a un elemento de  $GL(N, \mathbb{C})$  se tiene que  $P_\nu(A) = a^r P_\nu(B) = 0$ . Así que una RI de  $GL(N, \mathbb{C})$  permanece irreducible cuando pasamos a  $SL(N, \mathbb{C})$ .

Para el caso del grupo  $U(N) \subset GL(N, \mathbb{C})$ , tenemos que considerar su álgebra de Lie. Los elementos de la base para el álgebra de Lie de  $GL(N, \mathbb{C})$ , que denotaremos por  $X^i_j$ , satisfacen las rela-

ciones de conmutación

$$[X_j^i, X_n^m] = \delta_{jn} X_j^m - \delta_{jm} X_n^i \quad (4.5)$$

(los elementos de la base pueden representarse por los operadores diferenciales  $X_j^i \equiv x^i \frac{\partial}{\partial x^j}$ ). El álgebra de Lie consiste en todas las combinaciones  $\{ \alpha_{ij} X_j^i : \alpha_{ij} \in \mathbb{C} \}$ . Para  $U(N)$ , el álgebra de Lie tiene como base operadores que satisfagan (4.5), pero el álgebra de Lie consiste de  $\{ \alpha_{ij} X_j^i : \alpha_{ij} \in \mathbb{R} \}$ . Supongamos que tenemos una representación de los elementos de la base  $X_j^i$  en términos de matrices  $M_j^i$ ; si la representación es reducible para  $U(N)$ , podemos encontrar una base en la que las matrices  $\{ \alpha_{ij} M_j^i \}$  estén en su forma reducida para toda  $\alpha_{ij} \in \mathbb{R}$ ; i.e., existe cierto conjunto de formas lineales en las  $\alpha_{ij}$  que se anulan para todos los valores reales  $\alpha_{ij}$ ; pero en este caso, dichas formas lineales también deben anularse para cualesquiera valores complejos de  $\alpha_{ij}$ . Por lo tanto, una RI para  $GL(N, \mathbb{C})$  también lo es para  $U(N)$ .

De la misma manera que se mostró que RI de  $GL(N, \mathbb{C})$  lo son también de  $SL(N, \mathbb{C})$ , podemos mostrar que RI de  $U(N)$  lo son también de  $SU(N)$ .

Hemos visto que RI de  $GL(N, \mathbb{C})$  también son irreducibles para sus subgrupos  $SL(N, \mathbb{C})$ ,  $U(N)$  y  $SU(N)$ . Sin embargo, para los subgrupos unimodulares muchas de estas RI son equivalentes. Las propiedades de transformación del tensor general de orden  $r$   $\underline{F}^{(r)}$  se definieron como las mismas para productos de componentes de  $r$  vectores; así, las componentes de un tensor completamente antisimétrico, que denotamos por  $\underline{F}^{[r]}$ , pueden obtenerse de los menores de orden  $r$  de la matriz

$$\begin{pmatrix} X_1^1 & X_2^1 & X_3^1 & \dots & X_N^1 \\ X_1^2 & X_2^2 & X_3^2 & \dots & X_N^2 \\ X_1^3 & X_2^3 & X_3^3 & \dots & X_N^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X_1^N & X_2^N & X_3^N & \dots & X_N^N \end{pmatrix}$$

Para  $r = N$ , obtenemos un tensor con una componente independiente; en este caso, aplicar la transformación  $A_j^i$  de una representación de  $GL(N, \mathbb{C})$  multiplica dicho tensor por  $\det(A_j^i)$ . Y en general,  $F[s^N]$  tiene una sola componente independiente, y únicamente resulta multiplicada por  $\{\det(A_j^i)\}^s$  cuando lo transformamos con la matriz  $A_j^i$ .

Supongamos que tenemos una representación de  $GL(N, \mathbb{C})$  caracterizada por la partición  $[f_1 f_2 \dots f_N]$ . Si agregamos una columna de  $N$  cuadros al patrón de Young asociado, el único conjunto de índices que podemos insertar en la columna adicional es  $\{1, 2, \dots, N\}$ , sin repeticiones, para construir el simetrizador de Young del que obtenemos un tensor con simetría definida al aplicarlo a un tensor arbitrario. De manera que el número de componentes independientes de  $F[f_1+1, f_2+1, \dots, f_N+1]$  y de  $F[f_1 f_2 \dots f_N]$  es el mismo; y como vimos, el único cambio en los tensores de estas representaciones es que están multiplicados por el factor común  $\det(A_j^i)$  al aplicarles la transformación  $A_j^i$ . Por esta razón, el número de componentes independientes de  $F[f_1+s, f_2+s, \dots, f_N+s]$  es el mismo que el del tensor  $F[f_1 f_2 \dots f_N]$ , y al transformar con  $A_j^i$ , los tensores van a diferir por un factor  $\{\det(A_j^i)\}^s$ . Entonces, si tratamos con subgrupos unimodulares de  $GL(N, \mathbb{C})$ , como  $SL(N, \mathbb{C})$  y  $SU(N)$ , las representaciones caracterizadas por  $[f_1-f_N, f_2-f_{N-1}, \dots, f_{N-1}-f_2, 0]$  y  $[f_1 f_2 \dots f_{N-1} f_N]$  son equivalentes.

Existe otra equivalencia para RI de subgrupos unimodulares:

$$[f_1 f_2 \dots f_N] \cong [f_1-f_N, f_1-f_{N-1}, \dots, f_1-f_2, 0].$$

Puede mostrarse que las matrices para dichas representaciones son conjugadas complejas entre sí. Así, si describimos los estados de la base para la representación  $[f_1 f_2 \dots f_N]$  con respecto a la capa llena en vez de hacerlo respecto al estado vacío, las matrices de la RI son las de  $[f_1-f_N, f_1-f_{N-1}, \dots, f_1-f_2, 0]$  referidas al estado de vacío.

Para los subgrupos ortogonal  $O(N, \mathbb{R})$  y simpléctico  $Sp(N, \mathbb{R})$ , RI de  $GL(N, \mathbb{C})$  se vuelven reducibles ya que además de las permutaciones de los índices de los tensores existe una operación de contracción que conmuta con las transformaciones ortogonales y otra, que conmuta con las transformaciones simplécticas. Puede mostrarse que para  $O(N, \mathbb{R})$  las únicas RI de  $GL(N, \mathbb{C})$  que ocurren son las caracterizadas por una partición en la cual la suma de las longitudes de las dos primeras columnas es menor o igual que  $N$ . Para  $Sp(N, \mathbb{R})$ , sólo son admisibles las particiones para las cuales el número de renglonas es menor o igual que  $N/2$  (Para una demostración de estos hechos puede verse (Ham 02)).

## SECCION 5. ESQUEMA DE SUPERMULTIPLIETE DE WIGNER.

El esquema de supermultiplete o de simetría espacial fue introducido por Wigner en 1937 al sugerir que para núcleos ligeros puede ser una buena aproximación no tomar en cuenta la dependencia que las interacciones nucleares puedan tener del espín; esto tiene como resultado que sólo los potenciales de Wigner y de Majorana aparezcan en la interacción nucleón-nucleón. De esta forma, podemos escribir la función de onda del sistema como el producto de una función orbital y una función en el espacio de espín-isoespín. Ahora, el Hamiltoniano de interacción es simétrico en las coordenadas espaciales de los nucleones, y para aprovechar esta simetría debemos considerar estados orbitales de simetría definida; la energía asociada al estado va a depender críticamente de esta simetría. Ya que la función de onda total del sistema de nucleones idénticos debe ser completamente antisimétrica, ésta va a ser una combinación lineal de productos de estados orbitales con simetría definida y funciones de espín-isoespín con la simetría conjugada. Puesto que la energía asociada al estado está determinada sólo por la función orbital, en tanto que la multiplicidad depende de la función de espín-isoespín, cada nivel de energía será un supermultiplete.

## (i) EL GRUPO SU(4) Y EL ESQUEMA DE SUPERMULTIPLIETE.

Para un solo nucleón existen cuatro estados de espín-isoespín posibles; si los caracterizamos por los valores de  $S_z$  e  $I_z$ , los cuatro estados de la base  $|m_S m_I\rangle$  son

$$\begin{aligned} |1\rangle &\equiv |1/2 \ 1/2\rangle & |2\rangle &\equiv |1/2 \ -1/2\rangle \\ |3\rangle &\equiv |-1/2 \ 1/2\rangle & |4\rangle &\equiv |-1/2 \ -1/2\rangle \end{aligned} \quad (5.1)$$

(estos estados satisfacen:

$$\begin{aligned} S_z |m_S m_I\rangle &= m_S |m_S m_I\rangle, \\ I_z |m_S m_I\rangle &= m_I |m_S m_I\rangle. \end{aligned}$$

Introducimos ahora operadores de creación  $b_{\alpha}^{\dagger}$  y de aniquilación  $b^{\alpha}$ , donde  $\alpha$  denota estados de un solo nucleón definidos



por un conjunto de números cuánticos espaciales e  $i=1,2,3,4$  está asociado a los estados descritos en (5.1); estos operadores tienen la propiedad de que  $\{b_{\alpha}^{\dagger}, b_{\beta}^{\dagger}\} = \delta_{\alpha\beta}$  y que  $b_{\alpha}^{\dagger} b_{\alpha}^{\dagger} = 0$ .

Usando los operadores de creación y aniquilación definidos podemos construir los operadores de un cuerpo  $A_j^i = \sum_{\alpha} b_{\alpha}^{\dagger} b_{\alpha}^i$ ,  $i, j=1,2,3,4$ , que son los generadores infinitesimales de un grupo unitario  $U(4)$ , ya que son lo y satisfacen las relaciones de conmutación  $[A_j^i, A_n^m] = \delta_n^i A_j^m - \delta_j^m A_n^i$ . Tomando combinaciones lineales de estos operadores, podemos encontrar otros 10 operadores que también forman una base de  $U(4)$ ; éstos son:

el operador de número  $N = \sum_{\alpha} b_{\alpha}^{\dagger} b_{\alpha}$ ;  
 tres operadores de espín,  $S_z = \sum_{\alpha} \langle \alpha | S_z | \alpha \rangle b_{\alpha}^{\dagger} b_{\alpha}$ ;  
 tres operadores de isoespín,  $T_z = \sum_{\alpha} \langle \alpha | T_z | \alpha \rangle b_{\alpha}^{\dagger} b_{\alpha}$ ;  
 y nueve operadores mixtos de espín-isoespín,

$$E = \sum_{\alpha} \langle \alpha | E | \alpha \rangle b_{\alpha}^{\dagger} b_{\alpha}.$$

Ahora, los 15 operadores  $S, T, E$  generan un grupo de Lie semisimple  $SU(4)$ ; de éstos generadores,

$$S_z = \frac{1}{2} (A_1^1 + A_2^2 - A_3^3 - A_4^4),$$

$$T_z = \frac{1}{2} (A_1^1 - A_2^2 + A_3^3 - A_4^4),$$

$$E_{zz} = \frac{1}{4} (A_1^1 - A_2^2 - A_3^3 + A_4^4),$$

conmutan entre sí. El estado de un solo nucleón  $|i\rangle$  es un estado propio de estos tres operadores, en tanto que los 12 operadores restantes actúan como operadores de ascenso y descenso.

En general, cuando tenemos  $N$  estados de partícula independiente podemos dividirlos en  $\frac{N}{4} \times 4$  estados espinoisoespín. Si consideramos transformaciones unitarias que actúan sobre los espacios orbital y de espín-isoespín separadamente, podremos ver que conmutan entre sí. Como ya vimos,  $\{A_j^i = \sum_{\alpha} b_{\alpha}^{\dagger} b_{\alpha}^i\}$  genera el grupo de transformaciones en el espacio de espín-isoespín  $U(4)$ . Por otra parte, el conjunto de  $\frac{N}{4} \times \frac{N}{4}$  operadores  $\{B_{\alpha}^{\alpha} = \sum_{\beta} b_{\beta}^{\dagger} b_{\beta}^{\alpha}\}$  genera el grupo de transformaciones en el espacio orbital. Examinando sus relaciones de conmutación encontramos que el grupo

que generan es  $U(N/4)$ . Como conclusión, ya que los generadores de un grupo conmutan con los del otro,  $U(N)$  se puede descomponer en el subgrupo producto directo de tales grupos (i.e., hemos realizado la descomposición  $U(N) \supset U(N/4) \times U(4)$ ).

Para caracterizar las funciones en el espacio de espín-isoespín no utilizamos las etiquetas  $[f_1 f_2 f_3 f_4]$  para RI de  $U(4)$ , sino que nos restringimos a  $SU(4)$  donde las RI están caracterizadas por los patrones de Young de tres renglones  $[f_1-f_4, f_2-f_4, f_3-f_4]$ ; esto se hace porque las transformaciones que se omiten,  $U_0 = \exp(iC_0 \sum_{\alpha} b_{\alpha}^{\dagger} b^{\alpha})$ , únicamente modifican las funciones de la base por una fase dentro de una capa nuclear dada. En vez de los tres números que caracterizan RI de  $SU(4)$ , Wigner usa otros tres números completamente equivalentes:

$$P \equiv \frac{1}{2} \{ (f_1-f_4) + (f_2-f_4) - (f_3-f_4) \} = \frac{1}{2} \{ f_1 + f_2 - f_3 - f_4 \},$$

$$P' \equiv \frac{1}{2} \{ (f_1-f_4) - (f_2-f_4) + (f_3-f_4) \} = \frac{1}{2} \{ f_1 - f_2 + f_3 - f_4 \},$$

$$P'' \equiv \frac{1}{2} \{ (f_1-f_4) - (f_2-f_4) - (f_3-f_4) \} = \frac{1}{2} \{ f_1 - f_2 - f_3 + f_4 \},$$

que tienen una interpretación física directa en términos de  $S_z$ ,  $T_z$  y  $E_{zz}$ :  $P$  es el valor más grande de  $S_z$  contenido en el supermultiplete;  $P'$  es el valor más grande de  $I_z$  para un estado con  $S_z = P$ ; y  $P''$  es el valor más grande de  $E_{zz}$  consistente con un estado para el cual  $S_z = P$  e  $I_z = P'$ .

Como ya mencionamos, las RI de  $SU(4)$  tienen dimensión mayor que 1, y al efectuar la descomposición  $SU(4) \supset SU^{(S)}(2) \times SU^{(I)}(2)$  obtenemos varios multipletes  $(S, I)$  en una RI de  $SU(4)$ . Los multipletes  $(S, I)$  contenidos en una RI de  $n$  partículas  $[f]$  de  $SU(4)$ , se determinan usando un procedimiento de progresión que nos lleva de  $n-1$  partículas a  $n$  partículas. Se comienza con  $n = 1, 2$ , donde los multipletes son conocidos de consideraciones elementales. Para un solo nucleón, la única partición es  $[1]$ , y tiene  $S = 1/2$ ,  $I = 1/2$ . Para dos nucleones, existen los estados de espín-isoespín; para la partición  $[2]$ , que corresponde a una función de carga-espín simétrica, las funciones de espín y de isoespín

soespín son ambas simétricas (de manera que  $S=1, I=1$ ), o ambas antisimétricas (con  $S=0, I=0$ ); la función de carga-espín antisimétrica correspondiente a la partición  $[1^3]$  debe ser producto de funciones de espín y de isoespín opuestas, de manera que debe contener a:  $S=0, I=1$  (singulete de espín y triplete de carga) y  $S=1, I=0$  (triplete de espín y singulete de carga). Para describir el método de progresión, ilustramos el caso de tres nucleones. Las funciones de carga-espín posibles para tres nucleones son:

$$[1] \otimes [2] = [3] + [21].$$

$$[1] \otimes [1^2] = [21] + [1^3].$$

donde los productos se realizan mediante las reglas de Littlewood. Examinemos la primera igualdad; la partición  $[1]$  contiene a  $S=1/2, I=1/2$ , mientras que  $[2]$  contiene a  $S=0, I=0$  y  $S=1, I=1$ ; entonces, de  $[1](\frac{1}{2} \frac{1}{2}) \otimes [2](0 \ 0)$  obtenemos  $S=1/2, I=1/2$ , en tanto que de  $[1](\frac{1}{2} \frac{1}{2}) \otimes [2](1 \ 1), (\frac{3}{2} \frac{3}{2}) + (\frac{3}{2} \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} \frac{3}{2}) + (\frac{1}{2} \frac{1}{2})$ ; por lo tanto, la suma de particiones  $[3] + [21]$  contiene las multiplicidades  $(\frac{3}{2} \frac{3}{2}) + (\frac{3}{2} \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} \frac{3}{2}) + 2 (\frac{1}{2} \frac{1}{2})$ . De la misma manera obtenemos, ya que  $[1 \ 1]$  contiene a  $S=0, I=1$  y  $S=1, I=0$ , que

$$[1](\frac{3}{2} \frac{3}{2}) \otimes [1^2](0 \ 1) = (\frac{1}{2} \frac{3}{2}) + (\frac{3}{2} \frac{1}{2}).$$

$$[1](\frac{1}{2} \frac{1}{2}) \otimes [1^2](1 \ 0) = (\frac{1}{2} \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} \frac{3}{2}):$$

luego,  $[1] \otimes [1^2]$  contiene las multiplicidades  $2 (\frac{1}{2} \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} \frac{3}{2}) + (\frac{3}{2} \frac{1}{2})$ . Ya que  $[1]$  contiene a  $(\frac{1}{2} \frac{1}{2})$ ,  $[2 \ 1]$  tiene las multiplicidades  $(\frac{1}{2} \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} \frac{3}{2}) + (\frac{3}{2} \frac{1}{2})$ ; de aquí inferimos que  $[3]$  contiene las multiplicidades  $S=1/2, I=1/2$  y  $S=3/2, I=3/2$ , comparando con las conclusiones obtenidas para  $[3] + [2 \ 1]$ . Para continuar el proceso cuando tenemos un número mayor de partículas, es necesario utilizar el siguiente teorema <sup>6)</sup>:

**Teorema 5.1.** La función de espín-isoespín de simetría  $[n]$  contiene las multiplicidades

$$(a) \left(\frac{n}{2} \frac{n}{2}\right), \left(\frac{n}{2} - 1, \frac{n}{2} - 1\right), \left(\frac{n}{2} - 2, \frac{n}{2} - 2\right), \dots, (1 \ 1), (0 \ 0)$$

si  $n$  es par;

(b)  $(\frac{n}{2} \frac{n}{2}), (\frac{n}{2} - 1, \frac{n}{2} - 1), (\frac{n}{2} - 2, \frac{n}{2} - 2), \dots, (\frac{3}{2} \frac{3}{2}), (\frac{1}{2} \frac{1}{2})$   
 si  $n$  es impar.

De esta forma se ha construido la tabla 11-16 para la estructura (S I) de las funciones de carga-espín con simetría  $f$  que aparece en (Ham 62).

Consideremos ahora la parte espacial de la función de onda; funciones con simetría espacial definida son estados propios del operador de intercambio de Majorana  $M = \sum_{i < j} P_{ij}(x)$ , ya que éste es la parte de dos cuerpos del operador de Casimir de segundo orden del grupo  $U(N/4)$  (aquí,  $P_{ij}(x)$  es el operador que intercambia las coordenadas espaciales de las partículas  $i$  y  $j$ , y deja los números cuánticos de espín e isospín invariantes. Para ver esto utilizamos nuevamente los tensores unidad de Racah  $u_{\beta}^{\alpha}(i)$ , que actúan sobre la partícula  $i$ , y que en este caso tienen la propiedad

$$\langle \alpha' | u_{\beta}^{\alpha} | \alpha \rangle = \delta_{\alpha' \alpha} \delta_{\beta' \beta}$$

Primero notemos que  $P_{ij}(x) = \sum_{\alpha \beta} u_{\beta}^{\alpha}(i) u_{\alpha}^{\beta}(j)$ :

$$\langle i: \beta \mu; j: \beta' \nu | \sum_{\alpha \gamma} u_{\alpha}^{\beta}(i) u_{\gamma}^{\beta'}(j) | i: \alpha \mu; j: \gamma \nu \rangle$$

$$= \sum_{\alpha \gamma} \langle \beta \mu | u_{\alpha}^{\beta} | \alpha \mu \rangle \langle \beta' \nu | u_{\gamma}^{\beta'} | \gamma \nu \rangle = \sum_{\alpha \gamma} (\delta_{\beta \alpha} \delta_{\mu}^{\mu}) (\delta_{\beta' \gamma} \delta_{\nu}^{\nu}) = \delta_{\alpha \gamma} \delta_{\beta \beta'} \delta_{\mu \nu} \text{ Q.E.D.}$$

El ket  $| i: \alpha \mu; j: \beta \nu \rangle$  denota un estado en que la partícula  $i$  se encuentra en un estado espacial  $\alpha$  y en un estado de carga-espín  $\mu$ , y la partícula  $j$ , en un estado espacial  $\beta$  y uno de carga-espín  $\nu$ . Por lo tanto podemos reescribir el operador de Majorana como

$$M = \sum_{i < j} \sum_{\alpha, \beta} u_{\alpha}^{\beta}(i) u_{\beta}^{\alpha}(j) = \frac{1}{2} \sum_{i, j} \sum_{\alpha, \beta} u_{\alpha}^{\beta}(i) u_{\beta}^{\alpha}(j)$$

Esta es esencialmente la definición del operador bilineal de Casimir de  $U(N/4)$ , ya que  $u_{\beta}^{\alpha}(i)$  son los generadores de  $U(N/4)$ :

$$\begin{aligned} \langle \alpha' | [u_{\beta}^{\alpha}, u_{\beta'}^{\alpha'}] | \beta \rangle &= \sum_{\mu} \langle \alpha' | u_{\beta}^{\alpha} | \mu \rangle \langle \mu | u_{\beta'}^{\alpha'} | \beta \rangle - \langle \alpha' | u_{\beta'}^{\alpha'} | \mu \rangle \langle \mu | u_{\beta}^{\alpha} | \beta \rangle \\ &= \delta_{\alpha' \alpha} \delta_{\beta \beta'} \delta_{\mu}^{\mu} - \delta_{\alpha' \alpha'} \delta_{\beta \beta} \delta_{\mu}^{\mu} = \langle \alpha' | [u_{\beta}^{\alpha} u_{\beta'}^{\alpha'} - u_{\beta'}^{\alpha'} u_{\beta}^{\alpha}] | \beta \rangle \quad \text{Q.E.D.} \end{aligned}$$

Si denotamos al operador bilineal de Casimir de  $U(N/4)$  como

$G^2[U(N/4)]$ , tenemos que

$$M = \frac{1}{2} \left[ G^2 U(N/4) - \frac{N}{4} \hat{N} \right],$$

donde  $\hat{N} \equiv \frac{4}{N} \sum_{\alpha} \sum_{\beta} u_{\alpha}^{\dagger}(i) u_{\beta}(i)$  es el operador de número (esto se vé de la identidad  $\langle 0 | \sum_{\alpha} \sum_{\beta} u_{\alpha}^{\dagger}(i) u_{\beta}(i) | 0 \rangle = n \frac{N}{4}$ ).

Para un estado de  $n$  partículas que pertenece a una RI de  $U(N/4)$  caracterizada por la partición  $[h] = [h_1, h_2, h_3, \dots, h_{N/4}]$  se puede obtener que

$$\langle [h] | M | [h] \rangle = \frac{1}{2} \left[ \sum_{i=1}^{N/4} h_i (h_i + N/4 + 1 - 2i) \right] - \frac{N}{8} n.$$

Cualquier Hamiltoniano que conmuta con  $M$  preserva la simetría espacial - o simetría  $SU(4)$ -; por ejemplo, una interacción central de dos cuerpos con un término de Wigner y otro de intercambio de Majorana es de este tipo.

#### (ii) EVIDENCIA DE LA SIMETRÍA ESPACIAL.

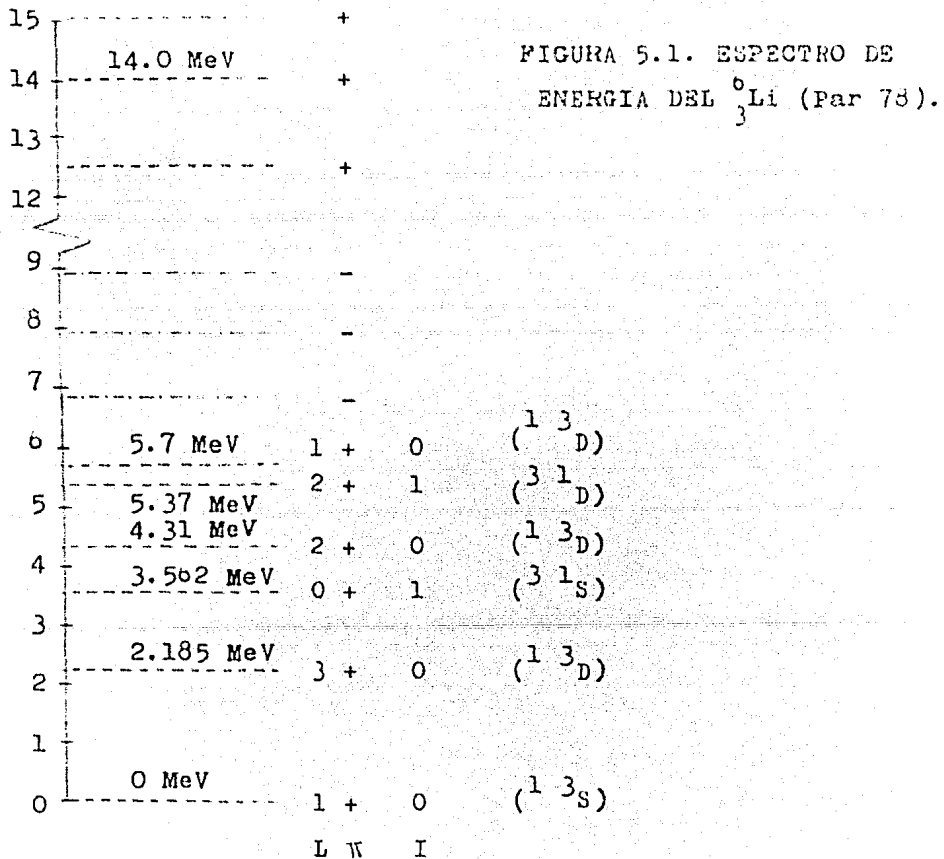
Mencionaremos algunas de las evidencias que se tienen para decir que el esquema  $SU(4)$  se puede utilizar para describir núcleos ligeros.

Supongamos que la estructura del  ${}^6\text{Li}$  es  $(1s)^4(1p)^2$ ; el espectro para energías bajas provendrá de los dos nucleones activos en la capa  $1p$ . Para dos nucleones en esta capa, el momento angular orbital puede tomar tres valores:  $L=0, 1, 2$ , siendo los estados  $L=0, 2$  simétricos ante el intercambio espacial en tanto que el estado con  $L=1$  es antisimétrico. Si se toman en cuenta el espín y el isoespín de los dos nucleones, podemos inferir la existencia de seis multipletes:

$${}^1 3S_1, \quad {}^3 1S_0, \quad {}^1 1P_1, \quad {}^3 3P_{0,1,2}, \quad {}^1 3D_{1,2,3}, \quad {}^3 1D_2$$

(la notación que hemos usado para identificar los multipletes es  $(2I+1)(2S+1)_{LJ}$ ). Si observamos el espectro de energía del  ${}^6\text{Li}$  (ver Fig. 5.1), encontramos que los seis niveles más bajos corresponden posiblemente a los multipletes  $S$  y  $D$ , en tanto que el primer estado  $P$  se encuentra aproximadamente 12.5 MeV arriba del estado base (tal identificación se puede confirmar realizando

explícitamente el cálculo con una interacción particular). Esto sugiere que la interacción es repulsiva para estados antisimétricos espacialmente (como los estados P) y atractiva para estados simétricos espacialmente (como los estados S y D); o sea, las características del espectro del  ${}^6\text{Li}$  sugieren la existencia de una fuerza de intercambio de Majorana.



Con una interacción de Majorana, que favorece estados simétricos en el espacio, es claro que la energía de enlace de un núcleo es máxima cuando tenemos el número máximo de pares de nucleones acoplados simétricamente, consistente con el principio de exclusión de Pauli. Entonces, para los estados base de los núcleos esperamos que la simetría espacial sea  $[f] = [4^k r]$ ,

donde  $n = 4k + r$  es el número de nucleones, y que los núcleos que tengan sus niveles completamente saturados ( $n = 4k$ ) posean una energía de enlace por nucleón más grande; esta última característica puede observarse para núcleos con  $A \leq 20$ , tomando en cuenta la interacción coulombiana, como puede verse en la tabla 5.1 que aparece a continuación:

TABLA 5.1. ENERGIA NUCLEAR DE ENLACE (B.E.) POR PARTICULA PARA NUCLEOS CON  $4 \leq A \leq 20$  (Par 78).

| A  | NUCLEO                            | (B.E.) <sub>N</sub> /A (MeV) |
|----|-----------------------------------|------------------------------|
| 4  | $^4\text{He}$                     | 7.20                         |
| 5  | $^5\text{He}$ , $^5\text{Li}$     | 5.57                         |
| 6  | $^6\text{Li}$                     | 5.53                         |
| 7  | $^7\text{Li}$                     | 5.32                         |
| 8  | $^8\text{Be}$                     | 7.11                         |
| 9  | $^9\text{Be}$                     | 6.79                         |
| 10 | $^{10}\text{Be}$                  | 6.97                         |
| 11 | $^{11}\text{B}$ , $^{11}\text{C}$ | 7.38                         |
| 12 | $^{12}\text{C}$                   | 8.30                         |
| 13 | $^{13}\text{C}$                   | 8.05                         |
| 14 | $^{14}\text{N}$                   | 8.23                         |
| 15 | $^{15}\text{N}$                   | 8.40                         |
| 16 | $^{16}\text{O}$                   | 8.85                         |
| 17 | $^{17}\text{O}$                   | 8.57                         |
| 18 | $^{18}\text{F}$                   | 8.63                         |
| 19 | $^{19}\text{F}$                   | 8.72                         |
| 20 | $^{20}\text{Ne}$                  | 9.16                         |

Veamos qué consecuencias tiene la simetría del estado base de un núcleo sobre su estructura de espín-isoespín. Para  $[4^k]$ , las órbitas se encuentran completamente saturadas y, en consecuencia,  $S=0$ ,  $I=0$ . Las simetrías  $[4^k 1]$  y  $[4^k 3]$  corresponden a una partícula y a un agujero activos, respectivamente, por lo que  $S=1/2$ ,  $I=1/2$ . En la simetría  $[4^k 2]$ , tenemos dos nucleones fuera del carozo saturado que, de acuerdo a la conclusión del párrafo anterior, deben encontrarse en un estado antisimétrico ante el intercambio de las coordenadas de espín e isoespín; o sea, que  $S=1$ ,  $I=0$  o  $S=0$ ,  $I=1$ . Podremos observar esto experimentalmente si consideramos la diferencia de energía  $\Delta E(\Delta I=1)$  entre la energía del estado más bajo con isoespín  $I+1$  y la energía del estado base del núcleo, cuyo isoespín  $I$  se supone igual a  $I_z$ . En vista de los argumentos precedentes, esperamos que esta diferencia para núcleos con simetrías en el estado base  $[4^k]$ ,  $[4^k 1]$ ,  $[4^k 3]$  sea grande, ya que involucra estados con distintas simetrías espaciales, cosa que no sucede para núcleos con simetría  $[4^k 2]$ . En la capa  $1p$  se observa claramente este efecto de la simetría espacial de la función de onda nuclear (ver tabla 5.2).

TABLA 5.2. DIFERENCIA  $\Delta E(\Delta I=1)$  PARA DISTINTOS NUCLEOS EN LA CAPA  $1p$  (Par 78).

| A | NUCLEO                        | $\Delta E(\Delta I=1)$ (MeV) |
|---|-------------------------------|------------------------------|
| 2 | $^2\text{H}$                  | 3.0                          |
| 3 | $^3\text{H}$ , $^3\text{He}$  | 15                           |
| 4 | $^4\text{He}$                 | 16.7                         |
| 5 | $^5\text{He}$ , $^5\text{Li}$ | 15                           |
| 6 | $^6\text{Li}$                 | 1.7                          |
| 7 | $^7\text{Li}$                 | 13                           |
| 8 | $^8\text{Be}$                 | 15.1                         |



TABLA 5.2 (Continuación).

|    |              |     |
|----|--------------|-----|
| 9  | $9_{Be}$     | 14  |
| 10 | $10_{Be}$    | 2.3 |
| 11 | $11_E, 11_C$ | 12  |

(iii) DESCOMPOSICION DE UNA INTERACCION CENTRAL EN LA CAPA  $1p$  SEGUN  $SU(4)$ .

Como las evidencias de la simetría  $SU(4)$  que examinamos en la sección anterior señalan a la capa  $1p$ , lo más natural es que se estudie los núcleos de esta capa usando los estados clasificados según  $SU(4)$ .

La interacción central más general en la capa  $1p$  está definida por los seis multipletes  $1^3_S, 3^1_S, 1^1_P, 3^3_P, 1^3_D$  y  $3^1_D$ ; por esto, la interacción se puede expresar en términos de seis operadores linealmente independientes. Ya que los estados de  $n$  partículas en esta capa los podemos clasificar de acuerdo a la cadena

$$\begin{array}{c}
 [1^n] \quad [n] \quad [n^v] \\
 U(12) \supset U(3) \times U(4) \\
 \cup \quad \cup \\
 O(3) \quad U^{(S)}(2) \times U^{(I)}(2) \\
 L \quad S \quad I
 \end{array}$$

i.e., de manera que sean funciones propias de todos los operadores de Casimir de los grupos que aparecen en la descomposición; estos estados los denotamos por  $|n [f] L S I\rangle$ . Tenemos, pues, que cinco de los seis operadores en que podemos expandir la interacción central, y sus respectivos valores esperados, son:

- 1)  $\frac{N(N-1)}{2} \delta_{ij}$ , que distingue entre distintas representaciones de  $U(12)$ , y que tiene el valor esperado, en un estado de  $n$  partículas,  $\frac{n(n-1)}{2}$ ;
- 2)  $B(i,j) \equiv \frac{1}{2} (1 + 4 s_{i,j} \cdot s_{i,j})$ , esencialmente el invariante bilineal de Casimir del grupo  $U^{(S)}(2)$ , con valor esperado, para el mismo estado de  $n$  partículas,  $S(S+1) + \frac{1}{4} (n-4)n$ ;

- 3)  $H(i, j) \equiv \frac{1}{2} (1 + 4 I_i \cdot I_j)$ , que es casi el operador bilineal de Casimir del grupo unitario  $U^{(1)}(2)$ , y que tiene valor propio  $I(I+1) + \frac{1}{4} n(n-4)$ ;
- 4)  $P_{ij}(x)$ , en esencia el bilineal de Casimir de  $U(3)$ , y que tiene valor propio  $n_s - n_a$ , que es la diferencia entre el número de pares acoplados simétricamente en la parte espacial y el número de pares acoplados antisimétricamente; y
- 5)  $\sum_i \sum_j$ , es casi el operador de Casimir de segundo orden de  $O(3)$  y tiene un valor esperado, en un estado de  $n$  partículas,  $\frac{1}{2} L(L+1) - n$ .

Observemos que estos cinco operadores preservan la simetría espacial para las configuraciones  $p^n$ .

El sexto operador linealmente independiente es

$$X(i, j) \equiv \frac{15}{4} \left\{ \underline{u}^{(1)}(i) \cdot \underline{u}^{(1)}(j) - \underline{u}^{(2)}(i) \cdot \underline{u}^{(2)}(j) \right\} \\ \times \left\{ \underline{I}_i \cdot \underline{I}_j - \underline{S}_i \cdot \underline{S}_j \right\};$$

$\underline{u}^{(r)}(i)$  es el tensor unidad de Racah de orden  $r$  que actúa sobre la  $i$ -ésima partícula. Este operador mezcla la simetría espacial, pero es diagonal en  $L$ ,  $S$  e  $I$ . Sin embargo, sus elementos de matriz para todas las configuraciones  $p^n$  han sido calculados por Racah (Rac 50) y por Elliott et al. (EHJ 53), de manera que se tienen expresiones analíticas para los elementos de matriz de una interacción central en la configuración  $p^n$ .

Los coeficientes de la expansión han sido obtenidos para una interacción de Rosenfeld (Par 78), obteniéndose

$$H(\text{Rosenfeld}) \equiv \{K\} \left\{ 0.105 S^2 + 0.55 I^2 - 0.40 L^2 + 4.4 (n_s - n_a) \right. \\ \left. + 0.2 X - 1.6 n + 0.75 n^2 \right\},$$

donde  $K = \frac{3}{25} F^2$ , siendo  $F^2$  la integral radial correspondiente en la expansión de Slater de la interacción (Cf. sección 5, Cap. 2, parte I).

Para ver qué tan exacta es la clasificación según  $SU(4)$ , deberíamos ver en qué extensión los estados nucleares pertenecen a una sola RI de  $SU(4)$ ; mezclas de otras representaciones podrían

indicarnos qué tan grande es el rompimiento de la simetría. Boyarkina (Boy 64) ha diagonalizado el hamiltoniano, en una representación de simetría espacial definida, en la capa  $1p$  utilizando una interacción de Rosenfeld, y sus resultados indican que el estado base pertenece a la representación más simétrica espacialmente. Por ejemplo, la intensidad de la representación dominante es 91%-96% para  $n = 2, 3, 4, 5, 6$  y 10, y de 65%-81% para  $n = 7, 8, 9$ .

## SECCION 6. MODELO SU(3) DE ELLIOTT.

Los modelos de mayor éxito en la descripción de la estructura nuclear han sido el modelo de capas, que descansa en la suposición de que los nucleones realizan un movimiento de partícula independiente en un potencial central, y el modelo colectivo, que tiene como hipótesis fundamental la existencia de un movimiento coherente de los nucleones. En sus versiones extremas (una partícula moviéndose en un potencial esféricamente simétrico y un cuerpo rígido en rotación), estos dos modelos parecen tener muy poco en común. Sin embargo, el modelo de capas pierde algo de sus características de partícula independiente si consideramos interacciones residuales de dos cuerpos entre los nucleones fuera de capa cerrada (activos) e introducimos mezclas de configuración <sup>7)</sup>; en tanto que el modelo rotacional obtiene algunas características de partícula independiente al construir los estados intrínsecos de rotación en donde los nucleones se encuentran bajo la acción de un potencial deformado que rota adiabáticamente <sup>8)</sup>.

El modelo SU(3) del núcleo es una versión del modelo de capas, que Elliott introdujo en 1958 y que exhibe simultáneamente los aspectos colectivo y de partícula independiente de un sistema de muchos nucleones. Este modelo tuvo su origen en la observación de características colectivas en los núcleos <sup>19</sup>F y <sup>24</sup>Mg, que eran lo bastante ligeros para describirlos mediante el modelo de capas. Con esto en mente, Elliott buscó un esquema de acoplamiento tal que al tomar en cuenta mezclas de configuración, las funciones exhibieran sus propiedades rotacionales; para esto utilizó las técnicas de teoría de grupos introducidas por Racah. Además de esto, el modelo SU(3) posee dos ventajas más: los cálculos son relativamente simples, ya que utilizan los poderosos métodos de la teoría de grupos, y los resultados de tales cálculos pueden comprenderse en términos del modelo.

## SECCION 6. MODELO SU(3) DE ELLIOTT.

Los modelos de mayor éxito en la descripción de la estructura nuclear han sido el modelo de capas, que descansa en la suposición de que los nucleones realizan un movimiento de partícula independiente en un potencial central, y el modelo colectivo, que tiene como hipótesis fundamental la existencia de un movimiento coherente de los nucleones. En sus versiones extremas (una partícula moviéndose en un potencial esféricamente simétrico y un cuerpo rígido en rotación), estos dos modelos parecen tener muy poco en común. Sin embargo, el modelo de capas pierde algo de sus características de partícula independiente si consideramos interacciones residuales de dos cuerpos entre los nucleones fuera de capa cerrada (activos) e introducimos mezclas de configuración <sup>7)</sup>; en tanto que el modelo rotacional obtiene algunas características de partícula independiente al construir los estados intrínsecos de rotación en donde los nucleones se encuentran bajo la acción de un potencial deformado que rota adiabáticamente <sup>8)</sup>.

El modelo SU(3) del núcleo es una versión del modelo de capas, que Elliott introdujo en 1958 y que exhibe simultáneamente los aspectos colectivo y de partícula independiente de un sistema de muchos nucleones. Este modelo tuvo su origen en la observación de características colectivas en los núcleos <sup>19</sup>F y <sup>24</sup>Mg, que eran lo bastante ligeros para describirlos mediante el modelo de capas. Con esto en mente, Elliott buscó un esquema de acoplamiento tal que al tomar en cuenta mezclas de configuración, las funciones exhibieran sus propiedades rotacionales; para esto utilizó las técnicas de teoría de grupos introducidas por Racah. Además de esto, el modelo SU(3) posee dos ventajas más: los cálculos son relativamente simples, ya que utilizan los poderosos métodos de la teoría de grupos, y los resultados de tales cálculos pueden comprenderse en términos del modelo.

## (i) CLASIFICACION DE LAS FUNCIONES DE ONDA EN LA CAPA 2s-1d DE ACUERDO AL GRUPO SU(3).

Cuando vimos el esquema de supermultiplete de Wigner en la capa 1p, consideramos la descomposición  $U(12) \supset U(3) \times U(4)$ , en donde los estados de muchas partículas estaban clasificados mediante RI del grupo  $U(3)$  y su subgrupo  $O(3) \cong SO(3, \mathbb{R})$ .

Si deseamos describir las características rotacionales en la capa 2s-1d mediante teoría de grupos, tenemos que considerar la descomposición  $U(24) \supset U(6) \times U(4)$ . Sin embargo, en el caso presente debemos buscar un grupo intermedio  $L$  tal que esté contenido en  $U(6)$  pero que contenga a  $O(3)$ , ya que no es posible escribir los elementos de matriz de una interacción de Wigner-Majorana, digamos, en términos de los operadores de Casimir  $M$ ,  $M$  y  $L^2$  de la cadena directa  $U(6) \supset O(3)$ ; por ejemplo, se tienen dos estados de dos partículas con  $L = 0$ :  $\Psi(s^2, L=0)$  y  $\Psi(d^2, L=0)$ .

En la capa 2s-1d tenemos seis estados orbitales  $\Psi(\ell m)$ :

$$\Psi(s 0), \Psi(d \pm 2), \Psi(d \pm 1) \text{ y } \Psi(d 0),$$

los cuales generan un espacio vectorial de dimensión 6. El grupo de transformaciones en este espacio, más general, que preserve la ortonormalidad de las funciones es  $U(6)$ , cuyos 30 operadores infinitesimales  $E_{m m'}^{\ell \ell'}$  se pueden definir por la relación (E11 58a)

$$E_{m m'}^{\ell \ell'} \Psi(\ell'' m'') \equiv e_{\ell' \ell''}^{\ell} \delta_{m' m''} \Psi(\ell m). \quad (6.1)$$

Pero como estamos buscando un grupo que contenga a  $O(3)$ , es conveniente trabajar con operadores con propiedades de rotación bien definidas; Racah usa los operadores

$$u_{\kappa}^k(\ell \ell') \equiv (2\ell + 1)^{-1/2} \sum_{m m'} \langle \ell' m' \kappa \ell m | \ell m \rangle E_{m m'}^{\ell \ell'}, \quad (6.2)$$

en vez del conjunto  $E_{m m'}^{\ell \ell'}$ ; estos operadores tienen la propiedad que define a los tensores unidad de Racah. Se pueden definir ahora los operadores de muchos cuerpos

$$U_{\kappa}^k(\ell \ell') \equiv \sum_{i=1}^n u_{\kappa}^k(\ell \ell'; i), \quad (6.3)$$

donde  $u_{\kappa}^k(\ell \ell'; i)$  actúa sobre la  $i$ -ésima partícula.

El conjunto de operadores  $U_{\kappa}^k(\ell \ell')$  es cerrado bajo la operación de conmutación:

$$\begin{aligned} [U_{\kappa}^k(\ell \ell'), U_{\lambda}^l(m m')] &= \sum_{M \mu} (2M+1)^{1/2} \langle k \kappa \ell \ell' | M \mu \rangle \\ &\times \left\{ (-)^{k+l-M} \sum_{\mu' m'} W(k \ell \ell' m'; M \mu') U_{\mu}^M(\ell m') \right. \\ &\quad \left. - \sum_{\mu' m'} W(k \ell \ell' m; M \mu') U_{\mu}^M(m \ell') \right\}, \quad (6.4) \end{aligned}$$

donde  $W(abcd; ef)$  denota los coeficientes de Racah (Ros 57).

Observemos que  $U_0^0(ss)$  y  $U_0^0(dd)$  son operadores escalares de  $O(3)$ ; en tanto que el operador  $U_q^1(dd)$  es un operador vectorial; de hecho, ya que

$$[U_q^1(dd), U_{q'}^1(dd)] = -(15)^{-1/2} \langle 1 \ q \ 1 \ q' | 1 \ (q+q') \rangle U_{q+q'}^1(dd),$$

de la definición de los operadores de momento angular (Ros 57),

tenemos que son proporcionales a los generadores de  $O(3)$ :

$$L_q = (30)^{1/2} U_q^1(dd).$$

Entonces, el grupo  $G$  que estamos buscando debe tener entre sus generadores a  $U_q^1(dd)$ .

Propongamos como generadores de  $G$  una combinación lineal de operadores de segundo orden:  $U_q^2 \equiv \sum_{rs} \alpha_{rs} U_q^2(rs)$ . Esta sugerencia la tomamos del oscilador armónico espacial, cuyos niveles  $2s-1d$  ( $N=2$  cuantos) están degenerados, que tiene como grupo de simetrías a  $U(3)$ , cuyos generadores pueden escribirse como un operador de orden cero (el operador de número), tres operadores de orden uno (los generadores de  $O(3)$ ,  $L_q$ ) y cinco operadores de orden dos (los cuales, junto con los tres anteriores, generan al grupo  $SU(3)$ ). En primer lugar, estos generadores deben ser hermiteanos; en consecuencia,  $\alpha_{rs} = (-)^{r+s} \alpha_{sr}$ . También deben formar un álgebra respecto a la operación de conmutación junto con los generadores de  $O(3)$ ; ya que a partir de (6.4) podemos obtener

$$[U_q^1(dd), U_{q'}^2] = -\frac{1}{5} \langle 1 \ q \ 2 \ q' | 2 \ (q+q') \rangle U_{q+q'}^2,$$

$$\begin{aligned} [U_q^2, U_{q'}^2] &= \frac{3}{5} (\alpha_{22}^2 - 2\alpha_{20}\alpha_{02}) \langle 2 \ q \ 2 \ q' | 1 \ (q+q') \rangle U_{q+q'}^1(dd) \\ &\quad - \frac{5}{5} \left( \frac{3}{7} \alpha_{22}^2 - 2\alpha_{20}\alpha_{02} \right) \langle 2 \ q \ 2 \ q' | 3 \ (q+q') \rangle U_{q+q'}^3(dd) \end{aligned}$$

debemos elegir  $\alpha_{02} = \frac{1}{2} \alpha_{22} / \sqrt{7}$ . De esta arbitrariedad en el

signo, encontramos que existen dos estructuras posibles para un grupo SU(3), porque podemos elegir como generadores  $U_q^1(dd)$  y  $U_q^2(sd) + U_q^2(ds)$ . Elliott discute sólo una de estas posibilidades; toma como generadores

$$L_q = \sqrt{30} U_q^1(dd) \text{ y } \lambda_q = -\sqrt{70} \left\{ U_q^2(sd) + U_q^2(ds) \right\}.$$

Esta elección la hace al proyectar al operador cuadrupolar en la configuración espacial sobre el espacio vectorial de la capa  $sd$ . A continuación, consideraremos sólo el esquema SU(3) de Elliott porque se ha mostrado que la otra elección de fase no es tan buena como ésta (Par 73).

### (1) CLASIFICACION DE LOS ESTADOS DE ACUERDO A U(6) Y SU(3).

El problema que enfrentamos ahora es el de cómo conocer qué representaciones de SU(3) están contenidas en una RI de U(6). El método que se usa para resolverlo es el de progresión, ya utilizado para encontrar las multiplicidades S, I de una RI de SU(4).

Un estado de una sola partícula pertenece a la representación (2 0 0) de U(3) (esto puede entenderse si pensamos en términos del oscilador armónico: una partícula en la capa  $2s-1d$  ( $N=2$  cuantos), representa dos cuantos en una dirección del espacio). A la RI de U(3) ( $h_1 h_2 h_3$ ), Elliott asocia la RI de SU(3) ( $\lambda, \mu$ ), donde  $\lambda \equiv h_1 - h_2$  y  $\mu \equiv h_2 - h_3$ . Continuando, un estado de dos partículas en U(6) puede pertenecer a las particiones  $[2]$  o  $[1^2]$  (esto se debe a que  $[1] \otimes [1] = [2] + [1^2]$ ). Estas dos funciones pertenecen a una representación de U(3) descrita por un patrón de cuatro cuadros:

$$\begin{array}{c} \boxed{\phantom{0}} \boxed{\phantom{0}} \\ (2 \ 0 \ 0) \end{array} \otimes \begin{array}{c} \boxed{\phantom{0}} \boxed{\phantom{0}} \\ (2 \ 0 \ 0) \end{array} = \begin{array}{c} \boxed{\phantom{0}} \boxed{\phantom{0}} \boxed{\phantom{0}} \boxed{\phantom{0}} \\ (4 \ 0 \ 0) \end{array} + \begin{array}{c} \boxed{\phantom{0}} \boxed{\phantom{0}} \boxed{\phantom{0}} \\ \boxed{\phantom{0}} \\ (3 \ 1 \ 0) \end{array} + \begin{array}{c} \boxed{\phantom{0}} \boxed{\phantom{0}} \\ \boxed{\phantom{0}} \boxed{\phantom{0}} \\ (2 \ 2 \ 0) \end{array};$$

así que los estados  $[2]$  y  $[1^2]$  de U(6) pueden pertenecer a las representaciones (4 0), (2 1) y (0 2) de SU(3). Claramente, la representación completamente simétrica de SU(3) (4 0) debe pertenecer a la representación completamente simétrica de U(6)  $[2]$ ;



ahora, utilizamos la fórmula para la dimensión de una RI  $[f]$  de  $U(6)$ ,

$$\dim\{[f]\} = \frac{1}{120} \left( 1 - \frac{f_1 - f_2}{1 - j} \right),$$

y la fórmula para la dimensión de una RI  $(\lambda\mu)$  de  $SU(3)$ ,

$$\dim\{(\lambda\mu)\} = \frac{1}{2} (\lambda+1) (\mu+1) (\lambda+\mu+2),$$

para obtener que

$$\begin{aligned} \dim([2]) &= 21 & \dim\{(4\ 0)\} &= 15 \\ \dim([1^2]) &= 15 & \dim\{(2\ 1)\} &= 15 \\ & & \dim\{(0\ 2)\} &= 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto,  $[2]$  se descompone en  $(4\ 0)$  y  $(0\ 2)$ ; en tanto que la RI  $(2\ 1)$  de  $SU(3)$  corresponde a la RI  $[1^2]$  de  $U(6)$ .

Continuando este proceso, Elliott construyó una tabla en la que aparece el número de veces que cada representación  $(\lambda\mu)$  aparece en la reducción de una representación  $[f]$  hasta para 12 partículas (Eli 53a).

## (2) CLASIFICACION DE LOS ESTADOS DE ACUERDO A $SU(3)$ Y $O(3)$ .

De la misma forma que en la parte anterior procedemos para encontrar qué representaciones de  $O(3)$ , clasificadas con el momento angular orbital  $L$ , se encuentran en una representación  $(\lambda\mu)$  de  $SU(3)$  dada.

Comenzamos con la observación de que un estado de un cuanto se transforma de acuerdo a la representación  $(1\ 0)$  de  $SU(3)$  y tiene momento angular  $L = 1$ . Entonces, un estado de dos cuantos puede pertenecer a las representaciones  $(2\ 0)$  y  $(0\ 1)$  de  $SU(3)$  y a las representaciones  $L = 0, 1, 2$  de  $O(3)$ . Ahora, las dimensionalidades de las representaciones involucradas son

$$\begin{aligned} \dim\{(2\ 0)\} &= 6 & \dim(L = 0) &= 1 \\ \dim\{(0\ 1)\} &= 3 & \dim(L = 1) &= 3 \\ & & \dim(L = 2) &= 5 \end{aligned}$$

Por lo tanto, las funciones que se transforman de acuerdo a la representación  $(2\ 0)$  de  $SU(3)$  pueden tener momento angular  $L = 0$  y  $L = 2$ , y los correspondientes a  $(0\ 1)$  tienen  $L = 1$ .

De esta manera, Elliott ha encontrado para cualquier representación  $(\lambda, \mu)$  de  $SU(3)$  los momentos angulares que pueden contener:

$$L = \begin{cases} K, K+1, \dots, K+\bar{\lambda} & \text{si } K \neq 0 \\ \bar{\lambda}, \bar{\lambda}-2, \dots, 1 \text{ ó } 0 & \text{si } K = 0 \end{cases} \quad (0.5)$$

donde  $K = \bar{\mu}, \bar{\mu}-2, \dots, 1 \text{ ó } 0$ , y se han definido  $\bar{\lambda} \equiv \max(\lambda, \mu)$  y  $\bar{\mu} \equiv \min(\lambda, \mu)$  (Eli 53a).

Con esto, podemos caracterizar los estados en esta cadena,  $U(6) \supset U(3) \supset O(3)$ , como  $\Psi \{ [f] \alpha(\lambda, \mu) \beta L M \}$ ; aquí,  $\alpha$  y  $\beta$  son números cuánticos adicionales que indican la multiplicidad que una RI de un subgrupo  $H \subset G$  puede tener al reducir una RI de un grupo  $G$  (por ejemplo, ya que  $SU(3)$  es un grupo de rango 2 con 8 generadores, necesitamos 3 operadores que conmuten entre sí para caracterizar completamente los estados dentro de una representación  $(\lambda, \mu)$ ; de manera que  $\beta$  es el valor propio de un operador que conmuta con  $L^2$  y  $L_z$ ).

### (3) CLASIFICACION DE LOS ESTADOS DE ACUERDO A $SU(3)$ Y $SU(2) \times U(1)$ .

En  $SU(3)$  tenemos dos generadores infinitesimales que conmutan:  $L_0$  y  $Q_0$ . Por otra parte, ya que

$$[Q_q, L_{q'}] = -\sqrt{q} \langle 2-q \ 1 \ q' \mid 2 \ (q+q') \rangle Q_{q+q'} \quad y$$

$$[Q_{q'}, Q_q] = 3\sqrt{10} \langle 2-q' \ 2 \ q \mid 1 \ (q+q') \rangle L_{q+q'}$$

se tiene

$$[Q_{\pm 2}, L_0] = \mp Q_{\pm 2}, \quad [Q_{\pm 2}, Q_0] = 0 \quad \& \quad [Q_2, Q_{-2}] = 0 \quad L_0.$$

Por lo tanto,  $\{ Q_{+2}, Q_{-2}, L_0 \}$  genera un subgrupo de  $SU(3)$ . Podemos identificar fácilmente este subgrupo si definimos

$$v_0 \equiv \frac{1}{2} L_0 \quad \& \quad v_{\pm} \equiv \mp Q_{\pm 2} / \sqrt{3},$$

porque entonces

$$[v_+, v_-] = -v_0 \quad \& \quad [v_0, v_{\pm}] = \pm v_{\pm};$$

o sea,  $\{ v_+, v_-, v_0 \}$  son los generadores de un subgrupo  $SU(2)$ .

Por otra parte,  $Q_0$  es el generador de un grupo  $U(1)$ . Luego, las consideraciones precedentes nos llevan a la descomposición

$$SU(3) \supset SU(2) \times U(1).$$

El homomorfismo de uno de  $SU(2)$  sobre  $O(3)$  es el origen de la gran semejanza entre las clasificaciones de acuerdo a estos grupos; así, podemos utilizar un número cuántico  $\Lambda$  para clasificar los estados de  $SU(2)$  de manera que satisfaga

$$\langle v^2 \rangle = \langle v_0^2 - v_+ v_- - v_- v_+ \rangle = \Lambda(\Lambda+1),$$

$$\langle v_0 \rangle = -\Lambda, -\Lambda+1, \dots, \Lambda+1, \Lambda.$$

Ya que el grupo  $U(1)$  es de dimensión uno, sólo necesitamos un parámetro para caracterizar sus representaciones completamente; podemos seleccionar  $\langle Q_0 \rangle = \epsilon$ .

Entonces, en la cadena  $SU(3) \supset SU(2) \times U(1)$  podemos caracterizar los estados orbitales de la forma  $\chi \{ [f] \alpha(\lambda \mu) \Lambda K \epsilon \}$ ; los números cuánticos que aquí aparecen pueden interpretarse en la siguiente forma:  $\Lambda$  es un momento angular que no es orbital;  $K$ , la proyección del momento angular a lo largo del eje  $Oz$ , y  $\epsilon$  denota el momento cuadrupolar del estado.

La clasificación completa según  $SU(3)$  y su subgrupo  $SU(2) \times U(1)$  fue hecha por Elliott, obteniendo que en una representación  $(\lambda, \mu)$  de  $SU(3)$ ,  $\epsilon$  puede tomar los valores

$$\epsilon = 2\lambda + \mu, 2\lambda + \mu - 3, \dots, -\lambda - 2\mu.$$

Y dada una  $\epsilon$  específica,  $\Lambda$  puede tomar los valores

$$\Lambda = \frac{1}{6} |2\lambda + 2\mu - \epsilon|, \frac{1}{6} |2\lambda + 2\mu - \epsilon| + 1, \dots, \min \left\{ \frac{1}{6} (2\lambda + \mu - \epsilon), \frac{1}{6} (2\mu + \lambda) \right\}$$

En tanto que para cada  $\Lambda$ , la proyección del momento angular orbital toma los valores

$$K = -2\Lambda, -2\Lambda + 2, \dots, 2\Lambda - 2, 2\Lambda$$

(En el apéndice B obtenemos estos resultados usando los estados de Gel'fand de  $SU(3)$ ).

## (4) FORMA INTEGRAL DE LAS FUNCIONES CLASIFICADAS SEGUN SU(3).

Debido a que los estados clasificados de acuerdo a la cadena  $SU(3) \supset O(3)$ ,  $\Psi\{[f](\lambda\mu) \in L M\}$ , y los correspondientes a la cadena  $SU(3) \supset SU(2) \times U(1)$ ,  $\chi\{[f](\lambda\mu) \in \Lambda K\}$ , forman dos conjuntos completos para estados de simetría  $(\lambda\mu)$  de  $SU(3)$ , podemos expresar a unos como una combinación lineal de los otros:

$$\chi\{[f](\lambda\mu) \in \Lambda K\} = \sum_{\alpha, L, M} c(\lambda\mu \in \Lambda K; \alpha L M) \Psi\{[f](\lambda\mu) \in L M\}.$$

Claramente,  $K = M$ ; por lo que los coeficientes en esta expansión no dependen de  $M$ . Si expresamos la relación anterior en un sistema de referencia rotado por los ángulos de Euler  $\Omega = (\alpha \beta \gamma)$  con respecto a un sistema de referencia fijo obtenemos

$$\chi_{\Omega}\{[f](\lambda\mu) \in \Lambda K\} = \sum_{\alpha, L} c(\lambda\mu \in \Lambda K; \alpha L) \Psi_{\Omega}\{[f](\lambda\mu) \in L K\};$$

expandiendo las funciones rotadas  $\Psi_{\Omega}$  en términos de las fijas mediante las matrices de rotación  $D^L$  (Ros 57)

$$\Psi_{\Omega}\{[f](\lambda\mu) \in L K\} = \sum_K D_{K' K}^L(\Omega) \Psi\{[f](\lambda\mu) \in L K'\};$$

sustituyendo este resultado en la ecuación anterior; multiplicando ambos miembros  $D_{M K}^L(\Omega)$  e integrando sobre  $\Omega$  obtenemos, usando las propiedades de ortogonalidad de las matrices de rotación  $D^L$  (Ros 57),

$$\int D_{M K}^L(\Omega) \chi_{\Omega}\{[f](\lambda\mu) \in \Lambda K\} = \sum_{\alpha} (2L+1)^{-1} c(\lambda\mu \in \Lambda K; \alpha L) \Psi\{[f](\lambda\mu) \in L K\}. \quad (6.6)$$

Por otra parte, puede mostrarse que si  $\lambda < 2$  o  $\mu < 2$ , no es necesario el parámetro  $\alpha$  para caracterizar completamente los estados. En este caso, la ecuación (6.6) se asemeja al resultado que se obtiene al utilizar el método de proyección que usa las integrales de Hill-Wheeler, si interpretamos a  $\chi$  como el estado intrínseco y a  $\Psi$  como el estado proyectado con buen momento angular<sup>9)</sup>. Cuando  $\lambda$  y  $\mu$  no son menores que 2, se va a necesitar el número cuántico extra  $\alpha$  ya que algunos valores de  $L$  aparecerán más de una vez en una representación de  $SU(3)$  ( $\alpha$  representa la multiplicidad de  $L$ ). Sin embargo, se ha demostrado que el número de valores de  $\alpha$  necesitados para caracterizar los estados

es exactamente igual al número de estados intrínsecos  $\chi$  con  $\epsilon = \epsilon_{\text{máx}}$ , y por esta razón se puede usar el número  $K$  del estado intrínseco en vez del parámetro  $\alpha$ . Así, podemos escribir

$$[f](\lambda\mu) K L M = \frac{2L+1}{C(\lambda\mu K L)} \times \int D_M^L(\alpha) \chi_{\alpha} \{ [f](\lambda\mu) \epsilon_{\text{máx}} \Lambda K \},$$

donde  $\Lambda = \frac{1}{2} \min\{\lambda, \mu\}$  para  $\epsilon = \epsilon_{\text{máx}}$ . Por otro lado, en vista de los resultados encontrados en (6.5), tenemos que los valores de  $L$  en una representación de  $SU(3)$   $(\lambda\mu)$  son los de una serie de niveles en una banda rotacional, la cual se corta en  $L_{\text{máx}} = K + \bar{\lambda}$ ; el parámetro  $K$  correspondería en el modelo rotacional a la proyección del momento angular a lo largo del eje de simetría. Debemos notar que el número cuántico  $K$  que se ha usado para caracterizar los estados proyectados no es el más apropiado porque estados con el mismo valor de  $L$  provenientes de bandas rotacionales distintas ( $K$  distintas) no son ortogonales.

Elliott también ha demostrado que para obtener cualquier estado de la representación  $(\lambda\mu)$  de  $SU(3)$  con momento angular  $L$  (i.e., los estados proyectados), basta con proyectar los estados intrínsecos con  $\epsilon = \epsilon_{\text{máx}}$  para  $\lambda \geq \mu$ , y con  $\epsilon = \epsilon_{\text{mín}}$  para  $\lambda < \mu$  (Ell 58b).

De esta manera, se ha mostrado que el modelo  $SU(3)$  es completamente análogo al modelo rotacional. Existe, sin embargo, una clara diferencia entre los dos: en tanto que en el modelo  $SU(3)$  los niveles de una banda rotacional están acotados superiormente, en el modelo rotacional no lo están.

## (ii) INTERACCION CUADRUPOLO-CUADRUPOLO.

Los núcleos ligeros con  $A \leq 20$  exhiben características colectivas. Por este motivo, debemos esperar que una fuerza nuclear efectiva de dos cuerpos que tome en cuenta la interacción para tales núcleos, tenga un alcance largo comparado con el tamaño del núcleo. Si se hace una expansión para alcances grandes, hasta segundo orden, de cualquier fuerza central de dos cuerpos, se encuentra que la única interacción en esta expansión que "rompe" la degeneración en una capa de oscilador armónico es proporcional a  $Q(i).Q(j)$  (ya que en una capa de oscilador,  $r_i^2 Y_q(\theta_i, \phi_i)$  es proporcional a  $Q_q(i)$ ). Así, el rompimiento de la degeneración -la diferencia entre los niveles degenerados debido a la interacción introducida- es proporcional a

$$\sum_{i < j} Q(i).Q(j).$$

Debemos enfatizar que esto es cierto sólo si suponemos que únicamente existe una capa nuclear activa.

El operador de Casimir de orden dos para  $SU(3)$  puede escribirse en términos de sus 8 generadores  $L_q$  y  $Q_q$ :

$$C^2[SU(3)] = \frac{1}{4} (3 \underline{L} \cdot \underline{L} + \underline{Q} \cdot \underline{Q}). \quad (6.7)$$

Sus valores propios en la representación  $(\lambda\mu)$  se pueden calcular fácilmente si utilizamos las expresiones de  $\underline{L}$  y  $\underline{Q}$  correspondientes al espacio del oscilador armónico, resultando

$$\langle C^2[SU(3)] \rangle_{(\lambda\mu)} = \frac{2}{3} (\lambda^2 + \mu^2 + \lambda\mu + 3\lambda + 3\mu). \quad (6.7')$$

Observemos que  $C^2[SU(3)]$  incluye el término

$$\underline{Q} \cdot \underline{Q} = \sum_i Q(i).Q(i) + 2 \sum_{i < j} Q(i).Q(j);$$

y como vimos, la parte de dos cuerpos de este operador es el término más importante para una interacción de largo alcance; el término de un cuerpo separa las órbitas de partícula independiente dentro de una capa y puede incluirse para tomar en cuenta interacciones con capas cerradas. Por lo tanto, un potencial atractivo de largo alcance contiene un término proporcional a

$$- \underline{Q} \cdot \underline{Q} = -4 C^2 [SU(3)] + 3 \underline{L} \cdot \underline{L} \quad (6.8)$$

$C^2[SU(3)]$  no acopla estados que pertenecen a distintas representaciones de  $SU(3)$ . Tampoco  $\underline{L}^2$  puede acoplar diferentes representaciones; sin embargo, no es invariante con respecto a  $SU(3)$ .

De la expresión de la interacción cuadrupolo-cuadrupolo (6.7') se observan dos cosas:

- (a) que dentro de una representación de  $SU(3)$ , los valores propios de  $\underline{Q} \cdot \underline{Q}$  son proporcionales a  $L(L+1)$ , lo que origina un espectro de energías rotacional;
- (b) que los estados más bajos en energía son los que pertenecen a la representación  $(\lambda\mu)$  de  $SU(3)$  que maximiza

$$\langle C^2(SU(3)) \rangle_{(\lambda\mu)}$$

De (7.7') obtenemos que ésta es la que tiene un valor máximo para  $2\lambda + \mu$ . En vista de esto, esperamos que los estados con energías más bajas sean los más fáciles de construir mediante el método de proyección del momento angular ( $\epsilon_{\text{máx}} = 2\lambda + \mu$ ).

### (iii) APLICACIONES DEL ESQUEMA $SU(3)$ A LA CAPA 2s-1d.

#### (1) ESTADOS DE PARIDAD POSITIVA EN LA CAPA 2s-1d.

Para núcleos doblemente pares se considera un potencial nuclear de la forma

$$V = a M + \frac{b}{4} \underline{Q} \cdot \underline{Q} \quad (6.9)$$

donde  $M$  es el operador de Majorana que ordena los estados de acuerdo a su simetría orbital  $[f]$ , y  $a$ ,  $b$  son parámetros que deben ajustarse experimentalmente.

Si la simetría orbital  $[f]$  está representada por un patrón de Young con cuatro columnas de longitudes  $n_1$ ,  $n_2$ ,  $n_3$  y  $n_4$ , entonces el valor esperado del operador de Majorana es

$$\langle M \rangle_{[f]} = n_2 + 2 n_3 + 3 n_4 - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 n_i (n_i - 1)$$

Un potencial de la forma (6.9) reproduce las características de un potencial de Yukawa con intercambio de Serber e intensidad  $V_0 = 40$  MeV si se eligen los parámetros a  $\approx -1.053$  MeV y

b  $\approx -0.211$  MeV<sup>10</sup>). Con este potencial se han obtenido los espectros para  $^{18}\text{O}$ ,  $^{20}\text{Ne}$ ,  $^{22}\text{Ne}$ ,  $^{24}\text{Mg}$ ,  $^{26}\text{Mg}$  y  $^{28}\text{Si}$  (Har 68), y se observa que los espectros derivados de esta forma no son muy distintos de los observados experimentalmente, con excepción del  $^{28}\text{Si}$ . Sin embargo, se obtiene una mejora ostensible en el espectro del  $^{28}\text{Si}$  al tomar en cuenta la interacción espín-órbita.

Debemos notar que la comparación de los cálculos con el espectro es directa porque para estados de máxima simetría orbital tenemos que  $S = 0$ .

Los estados de máxima simetría orbital para núcleos con  $A$  impar y núcleos doblemente impares no necesitan tener espín intrínseco cero, por lo que ni siquiera a primera aproximación se pueden ignorar los efectos espín-órbita.

Wilsdon (Wil 65) consideró este problema suponiendo que los efectos espín-órbita son pequeños, de manera que la clasificación de los estados según  $SU(3)$  aún es válida; tomó un potencial efectivo como (6.9). Sus cálculos (tanto el cálculo de espectros de energía como el de momentos magnéticos) muestran que el modelo falla para núcleos cercanos a la mitad de la capa.

## (2) ESTADOS DE PARIDAD IMPAR EN LA CAPA 2s-1d.

Experimentalmente se observan bandas de estados con paridad negativa en núcleos de la capa 2s-1d, por lo que se espera que el esquema  $SU(3)$  también pueda ser útil en estos casos. Sin embargo, no queda claro qué fuerza efectiva hay que considerar en el caso general ya que los estados provienen de excitaciones partícula-agujero. Se han hecho cálculos para  $^{18}\text{O}$ ,  $^{19}\text{F}$  y  $^{20}\text{Ne}$  (Har 68), que muestran acuerdo cualitativo entre los espectros calculado y experimental (los cálculos se hicieron considerando un potencial gaussiano con intercambio de Rosenfeld).



APENDICE B. DESCOMPOSICION DE REPRESENTACIONES IRREDUCIBLES  
DE SU(3) EN REPRESENTACIONES IRREDUCIBLES DE  
SU(2)xU(1).

Para leer este apéndice, es conveniente leer primero el capítulo V, ya que utilizaremos algunos de los resultados encontrados en dicho capítulo. Sin embargo, haremos una enumeración de estos resultados antes de usarlos.

1) ESTADOS DE GEL'FAND DE U(N).

(a) Suministran una base para las representaciones irreducibles (BRI) de U(N).

(b) Un estado de Gel'fand perteneciente a la RI

$[h_{1N} \ h_{2N} \ \dots \ h_{NN}]$   
de U(N) está caracterizada por el arreglo

$$\begin{array}{c|cccc} h_{1N} & h_{2N} & \dots & h_{NN} \\ h_{1,N-1} & h_{2,N-1} & \dots & h_{N-1,N-1} \\ \vdots & \vdots & & \\ h_{12} & h_{22} & & \\ h_{11} & & & \end{array}$$

donde

$$h_{ij} \geq h_{i,j-1} \geq h_{i+1,j}.$$

(c) El estado de peso máximo perteneciente a la RI

$[h_1 \ h_2 \ h_3 \ \dots \ h_N]$   
de U(N) es

$$\begin{array}{c|cccc} h_1 & h_2 & h_3 & \dots & h_{N-1} & h_N \\ h_1 & h_2 & h_3 & \dots & h_{N-1} & \\ \vdots & \vdots & & & & \\ h_1 & h_2 & & & & \\ h_1 & & & & & \end{array}$$

(d) El peso de un estado de Gel'fand se obtiene al aplicar los generadores de peso

$$E_{\alpha}^{\pm}, \quad \alpha = 1, 2, \dots, N,$$

y su acción es:

$$\begin{aligned}
 & \left. \begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{array} \right\} \begin{array}{ccc} h_{11} & h_{21} & \dots & h_{N1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ h_{12} & h_{22} & & \\ h_{11} & & & \end{array} \\
 & = \left\{ \sum_{\beta=1}^N h_{\beta\alpha} - \sum_{\alpha=1}^{N-1} h_{\beta\alpha} \right\} \left. \begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{array} \right\} \begin{array}{ccc} h_{1N} & h_{2N} & \dots & h_{NN} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ h_{12} & h_{22} & & \\ h_{11} & & & \end{array}
 \end{aligned}$$

2) BRI DE SU(3).

(a) Si

$$T_{\alpha}^{\beta} \quad \alpha, \beta = 1, 2, \dots, N,$$

son los generadores de  $U(N)$ , los generadores de  $SU(N)$  se definen como

$$A_{\alpha}^{\beta} = T_{\alpha}^{\beta} - \frac{1}{3} \left( \sum_{\gamma=1}^N T_{\gamma}^{\gamma} \right) \delta_{\alpha}^{\beta}.$$

(b) Teorema: "Para todo grupo de Lie semi-simple  $\mathfrak{g}$  de rango  $N$ , existen  $N$  pesos fundamentales  $\lambda_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ , tales que todo peso máximo  $\lambda$  correspondiente a una RI de  $\mathfrak{g}$  está dado por

$$\lambda = \sum_{\alpha=1}^N \rho^{\alpha} \lambda_{\alpha} \quad \rho^{\alpha} \in \mathbb{N} \cup \{0\}"$$

Por lo tanto,  $(\rho^1, \rho^2, \dots, \rho^N)$  puede utilizarse para caracterizar la RI.

(c) A continuación encontramos el peso de una RI de  $SU(3)$ :

$$\begin{aligned}
 A_1^1 & \left. \begin{array}{ccc} h_1 & h_2 & h_3 \\ h_1 & h_2 & \\ h_1 & & \end{array} \right\} = \left\{ h_1 - \frac{1}{3} (h_1 + h_2 + h_3) \right\} \left. \begin{array}{ccc} h_1 & h_2 & h_3 \\ h_1 & h_2 & \\ h_1 & & \end{array} \right\} \\
 A_2^2 & \left. \begin{array}{ccc} h_1 & h_2 & h_3 \\ h_1 & h_2 & \\ h_1 & & \end{array} \right\} = \left\{ h_2 - \frac{1}{3} (h_1 + h_2 + h_3) \right\} \left. \begin{array}{ccc} h_1 & h_2 & h_3 \\ h_1 & h_2 & \\ h_1 & & \end{array} \right\}
 \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\lambda_1 = h_1 - \frac{1}{3} (h_1 + h_2 + h_3) = \frac{2}{3} (h_1 - h_2) + \frac{1}{3} (h_2 - h_3),$$

$$\lambda_2 = h_2 - \frac{1}{3} (h_1 + h_2 + h_3) = -\frac{1}{3} (h_1 - h_2) + \frac{1}{3} (h_2 - h_3).$$

Si definimos

$$\lambda = h_1 - h_2 \quad \& \quad \mu = h_2 - h_3,$$

tendremos que

$$\lambda = m_1 - m_2 \quad \& \quad \mu = m_2 + 2m_3$$

nos sirven para caracterizar RI de SU(3).

Algunos autores acostumboran caracterizar RI de SU(3) mediante

$$k_1 \equiv h_1 - h_3 \quad \& \quad k_2 \equiv h_2 - h_3. \quad (\text{B.1})$$

En este caso,

$$\lambda = k_1 - k_2 \quad \& \quad \mu = k_2.$$

Con (B.1) vemos claramente que el último parámetro  $h_3$  es irrelevante. Luego, los estados de Gelfand pueden denotarse como

$$\left| \begin{array}{ccc} k_1 & k_2 & 0 \\ q_1 & q_2 & \\ r & & \end{array} \right\rangle \quad (\text{B.2})$$

en donde se deben satisfacer las desigualdades

$$k_1 \geq q_1 \geq k_2 \geq q_2 \geq 0 \quad \& \quad q_1 \geq r \geq q_2.$$

- (d) Para relacionar este estado con el usado por Elliott (i.e., para obtener una relación entre las funciones de onda

$$|(\lambda \mu) \Lambda \frac{Y}{2} \epsilon \rangle$$

que él utiliza y las que tenemos en (B.2)), es muy útil visualizar los estados nucleares como funciones propias del oscilador armónico en tres dimensiones (véase (Har 68)). Si hacemos esto, tenemos que

$$\begin{aligned} Q_0 &= 3 \hat{N}_z - \hat{N} \longrightarrow 3 \bar{N}_z - (\bar{N}_1 + \bar{N}_2 + \bar{N}_3), \\ \omega_0 &= \frac{1}{2} (\hat{N}_x - \hat{N}_y) \longrightarrow \frac{1}{2} (\bar{N}_1 - \bar{N}_2). \end{aligned}$$

En estas expresiones,  $\hat{N}_x$ ,  $\hat{N}_y$  y  $\hat{N}_z$  son los operadores que "cuentan" el número de cuantos que hay en las direcciones x, y y z, respectivamente, y  $\hat{N}$  cuenta el número total de cuantos.

Ahora, si aplicamos  $\omega_0$  al estado

$$\left| \begin{array}{ccc} k_1 & k_2 & 0 \\ q_1 & q_2 & \\ q_1 & & \end{array} \right\rangle$$

de peso máximo en  $su(2)$ , obtenemos

$$\Lambda = \langle \omega_0 \rangle_{\omega_{\max}} = \frac{1}{2} (a_1 - a_2). \quad (B.3)$$

De hecho, al aplicar  $\omega_0$  a un estado arbitrario tenemos

$$\omega_0 \begin{vmatrix} k_1 & k_2 & 0 \\ a_1 & a_2 & \\ r & & \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \{ 2r - a_1 - a_2 \} \begin{vmatrix} k_1 & k_2 & 0 \\ a_1 & a_2 & \\ r & & \end{vmatrix}.$$

Por lo tanto, 
$$\frac{1}{2} \nu = \frac{1}{2} \{ 2r - a_1 - a_2 \}. \quad (B.4)$$

Luego, de (B.3) y (B.4) encontramos que

$$\begin{aligned} a_1 &= 2\Lambda + a_2, \\ r &= \frac{1}{2} \nu + \Lambda + a_2. \end{aligned}$$

Por otra parte, ya que

$$A_3^3 \begin{vmatrix} \lambda + \mu & \mu & 0 \\ 2\Lambda + \rho & \rho & \\ \frac{\nu}{2} + \Lambda + \rho & & \end{vmatrix} = \{ 2(\lambda + \mu) - 2(\Lambda + \rho) \} \begin{vmatrix} \lambda + \mu & \mu & 0 \\ 2\Lambda + \rho & \rho & \\ \frac{\nu}{2} + \Lambda + \rho & & \end{vmatrix}$$

donde hemos introducido nuevos parámetros en el estado de Gel'fand, acordes con la caracterización de Elliott, hallamos que

$$\epsilon = -6(\Lambda + \rho) + 2(\lambda + 2\mu), \quad \mu \geq \rho \geq 0;$$

y de aquí que

$$\Lambda = \frac{1}{6} \{ 2\lambda + 4\mu - \epsilon \} - \rho. \quad (B.5)$$

Finalmente, examinemos todos los resultados obtenidos hasta ahora. El estado que estamos considerando es

$$\begin{vmatrix} \lambda + \mu & \mu & 0 \\ 2\Lambda + \rho & \rho & \\ \frac{\nu}{2} + \Lambda + \rho & & \end{vmatrix}$$

de donde inferimos que se deben satisfacer las desigualdades

$$\begin{aligned} \lambda + \mu &\geq 2\Lambda + \rho \geq \mu \geq \rho \geq 0, \\ 2\Lambda + \rho &\geq \frac{\nu}{2} + \Lambda + \rho \geq \rho. \end{aligned} \quad (B.6)$$

De esta última igualdad tenemos que

$$\nu = 2\Lambda, 2\Lambda - 1, 2\Lambda - 2, \dots, -2\Lambda + 1, -2\Lambda$$

son los valores que puede tomar la proyección del momento

angular orbital en el eje Oz.

De la expresión de  $\hat{N}$  obtenemos los valores que puede tomar  $\epsilon$  :

$$\hat{N} \begin{vmatrix} \lambda + \mu & \mu & 0 \\ 2\Delta + \rho & \rho & \\ \frac{1}{2} + \Delta + \rho & & \end{vmatrix} = (\lambda + \mu) \begin{vmatrix} \lambda + \mu & \mu & 0 \\ 2\Delta + \rho & \rho & \\ \frac{1}{2} + \Delta + \rho & & \end{vmatrix}$$

Y como el número de cuantos en la dirección Oz puede ir desde 0 hasta  $\lambda + \mu$  (recuérdese que  $k_z = \lambda + \mu$ ), encontramos que

$$\epsilon = -\lambda - 2\mu, -\lambda - 2\mu + 2, -\lambda - 2\mu + 4, \dots, 2\lambda + \mu.$$

Para finalizar, mediante (B.5) y (B.6) hallamos los valores que puede tomar  $\Delta$  :

De (B.5),

$$\rho = \frac{1}{6} \{ 2\lambda + 4\mu - \epsilon \} - \Delta. \quad (\text{B.7})$$

Sustituyendo en

$$\frac{1}{2} (\lambda + \mu + \rho) \geq \Delta \geq \frac{1}{2} (\mu - \rho)$$

-que se obtuvo de (B.6)-, encontramos:

$$\frac{1}{6} \{ 4\lambda + 2\mu + \epsilon \} \geq \Delta \geq \frac{1}{6} \{ -2\lambda + 2\mu + \epsilon \}.$$

Sustituyendo (B.7) en  $\mu \geq \rho$ , resulta

$$\Delta \geq \frac{1}{6} \{ 2\lambda - 2\mu - \epsilon \}.$$

Y sustituyendo nuevamente (B.7) en  $\rho \geq 0$ , se tiene

$$\frac{1}{6} \{ 2\lambda + 4\mu - \epsilon \} \geq \Delta.$$

Los tres últimos resultados se pueden resumir en la desigualdad

$$\min \left( \frac{1}{6} \{ 2\lambda + 4\mu - \epsilon \}, \frac{1}{6} \{ 4\lambda + 2\mu + \epsilon \} \right) \geq \Delta \geq \frac{1}{6} |2\lambda - 2\mu - \epsilon|;$$

lo cual indica que

$$\Delta = \frac{1}{6} |2\lambda - 2\mu - \epsilon|, \frac{1}{6} |2\lambda - 2\mu - \epsilon| + 1, \dots$$

$$\dots: \min \left( \frac{1}{6} \{ 2\lambda + 4\mu - \epsilon \}, \frac{1}{6} \{ 4\lambda + 2\mu + \epsilon \} \right).$$

## BIBLIOGRAFIA

- 1) Hamermesh, Morton, GROUP THEORY AND ITS APPLICATION TO PHYSICAL PROBLEMS (Addison-Wesley, 1962), pps. 32-33.
- 2) Pontriaguin, Lev S., GRUPOS CONTINUOS (Ed. Mir, 1973), Sec. 5b.
- 3) Ibid (localmente significa en la "vecindad" del elemento identidad).
- 4) Hamermesh, Morton, op. cit., pp. 311.
- 5) Racah, Giulio, GROUP THEORY AND SPECTROSCOPY, *Wzr.d.exakt. Naturw.* 37, pps. 46 y 48-49.
- 6) Hamermesh, Morton, op. cit., pp. 442.
- 7) Elliott, J.P., y Flowers, B.H., *Proc. Roy. Soc. A*, 1955, 229, pp. 536.
- 8) DeShalit, Amos, y Feshbach, Herman, THEORETICAL NUCLEAR PHYSICS, VOLUME I: NUCLEAR STRUCTURE (John Wiley, 1974), pps. 442-450.
- 9) DeShalit, Amos, y Feshbach, Herman, op. cit., pps. 461-463. Eisenberg, J.M., y Greiner, W., VOL. 1: NUCLEAR MODELS (North-Holland, 1970)
- 10) Harvey, Malcolm, THE NUCLEAR  $SU_3$  MODEL en *Adv. Nucl. Phys.*, 1 (Plenum Press, 1968), pps. 109-123.

- Han 02 Hamermesh, Morton, op. cit.
- Par 78 Parikh, Jitendra C., GROUP SYMMETRIES IN NUCLEAR STRUCTURE (Plenum Press, 1973).
- Rac 50 Racah, Giulio, *Helv. Phys. Acta* 23 (Suppl. III): 229 (1950).
- EHJ 53 Elliott, J.P., Hope, J., y Jahn, H.A., *Phil. Trans. Roy. Soc. London A* 240: 241 (1953).
- Boy 64 Boyarkina, A.N., *Izv. Akad. Nauk. SSSR, Ser. Fiz.* 28: 335 (1964).
- Ros 57 Rose, M.E., ELEMENTARY THEORY OF ANGULAR MOMENTUM, (John Wiley, 1957).

- Ell 58a Elliott, J.P., Proc.Roy.Soc. A 245 (1957) 125.  
Ell 58b Elliott, J.P., Proc.Roy.Soc. A 245 (1957) 502.  
Har 68 Harvey, Malcolm, op. cit.  
Wil 65 Wilsdon, C.E.. Aparecen en las pps. 123-128 de  
(Har 68).

CAPITULO V. EL PROBLEMA DE MUCHOS CUERPOS Y EL ESQUEMA DE SEGUNDA  
 CUANTIZACION  
 SECCION 1. EL ESQUEMA

En el estudio mecánico cuántico de los sistemas constituidos por un número grande de partículas que interactúan entre si, resulta de gran utilidad un método particular de análisis conocido por el nombre de segunda cuantización; como el problema del núcleo es esencialmente un problema de muchos cuerpos, estudiaremos dicho método y lo aplicaremos a sistemas formados exclusivamente por fermiones.

Designemos por  $\Psi_{p_1}(\vec{r}), \Psi_{p_2}(\vec{r}), \Psi_{p_3}(\vec{r}), \dots$ , a un sistema completo de funciones de onda ortonormalizadas de una partícula en un campo exterior dado, donde  $\vec{p}$  representa el conjunto de números cuánticos que sirven para caracterizar las funciones de onda.

Consideremos ahora un sistema de  $N$  partículas que obedecen la estadística de Fermi (fermiones) y que no interactúan entre si; cada partícula se encuentra en alguno de los estados  $\Psi_{p_1}, \Psi_{p_2}, \dots$ . Sea  $N_i$  el número de partículas que se encuentran en el estado  $\Psi_{p_i}$ . Los números  $N_1, N_2, \dots$  (es claro que  $\sum_i N_i = N$ ) determinan un estado del sistema en conjunto, que representaremos mediante la función de onda  $\Psi_{N_1, N_2, \dots}$ . Construiremos, a continuación, un formalismo matemático en el que los números de ocupación de los estados  $N_1, N_2, \dots$ , y no las coordenadas de las partículas, representan el papel de variables independientes.

El Principio de Pauli afirma que funciones de onda de un sistema de  $N$  fermiones indistinguibles debe ser antisimétrica ante el intercambio de todo par de coordenadas de las partículas, es decir,

$$\Psi_{N_1, N_2, \dots}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_m, \dots, \vec{r}_n, \dots, \vec{r}_N) = -\Psi_{N_1, N_2, \dots}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n, \dots, \vec{r}_m, \dots, \vec{r}_N) \quad (1.1)$$

El producto de las funciones de onda de fermiones independientes.

$$\Psi_{p_1}(\vec{r}_1) \Psi_{p_2}(\vec{r}_2) \dots \Psi_{p_N}(\vec{r}_N) \quad (1.2)$$



no satisface este principio de antisimetría, pero podemos construir fácilmente una función totalmente antisimétrica aplicando el operador de permutaciones  $\hat{P}$ , el cual intercambia pares de coordenadas de las partículas, por lo que el estado buscado es

$$\Psi_{N_1 N_2, \dots} = \frac{1}{\sqrt{N!}} \sum_{\hat{P}} (-1)^{\hat{P}} [\Psi_{P_1}(\vec{r}_1) \Psi_{P_2}(\vec{r}_2) \dots \Psi_{P_N}(\vec{r}_N)] \quad (1.3)$$

donde la suma se efectúa sobre las  $N!$  permutaciones de las variables  $\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N$ , que representan las coordenadas generalizadas del sistema. El factor  $(N!)^{1/2}$  se introduce para normalizar la función de onda.

El estado (1.3) se puede expresar también en forma de determinante, que se le conoce como determinante de Slater.

$$\Psi_{N_1 N_2, \dots} = \frac{1}{\sqrt{N!}} \begin{vmatrix} \Psi_{P_1}(\vec{r}_1) & \Psi_{P_1}(\vec{r}_2) & \dots & \Psi_{P_1}(\vec{r}_N) \\ \Psi_{P_2}(\vec{r}_1) & \Psi_{P_2}(\vec{r}_2) & \dots & \Psi_{P_2}(\vec{r}_N) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Psi_{P_N}(\vec{r}_1) & \Psi_{P_N}(\vec{r}_2) & \dots & \Psi_{P_N}(\vec{r}_N) \end{vmatrix} \quad (1.4)$$

Ya que de acuerdo con el Principio de Pauli los números de ocupación solo pueden adquirir los valores cero ó uno, es conveniente representar el estado por medio de

$$|n_1, n_2, n_3, \dots\rangle, \quad (1.5)$$

que indica que la función de onda tiene  $n_1$  partículas en el estado  $\Psi_{P_1}$ ,  $n_2$  en  $\Psi_{P_2}$ , etc., i. e.

$$|s_1, 0, 0, \dots\rangle = \Psi_{P_1}(\vec{r}_1) \quad (1.6)$$

$$|s_1, s_2, 0, \dots\rangle = 2^{-1/2} [\Psi_{P_1}(\vec{r}_1) \Psi_{P_2}(\vec{r}_2) - \Psi_{P_2}(\vec{r}_1) \Psi_{P_1}(\vec{r}_2)] \dots \text{etc.} \quad (1.7)$$

Definamos un operador de aniquilación  $\hat{b}_i$  que aplicado a la función  $|n_1, n_2, \dots\rangle$  disminuye el índice  $n_i$  en una unidad y multiplica la función de onda por  $\sqrt{n_i}$ .

$$\hat{b}_i |n_1, n_2, \dots, n_i, \dots\rangle = \sqrt{n_i} |n_1, n_2, \dots, n_i - 1, \dots\rangle \quad (1.8)$$

de modo que el operador  $\hat{b}_i$  disminuye en una unidad el número de partículas en el  $i$ -ésimo estado. Definimos también el operador de creación  $\hat{b}_i^+$ , conjugado de  $\hat{b}_i$ , que aplicado a la función  $|n_1, n_2, \dots\rangle$  aumenta  $n_i$  en una unidad y multiplica la función de onda por  $\sqrt{n_i + 1}$ ,

$$\hat{b}_i^+ |n_1, n_2, \dots, n_i, \dots\rangle = \sqrt{n_i + 1} |n_1, n_2, \dots, n_i + 1, \dots\rangle \quad (1.9)$$

Con los operadores de creación y de aniquilación formamos el operador de número  $\hat{N}_i = \hat{b}_i^+ \hat{b}_i$ , el cual tiene la pro

riedad de dar el número de partículas en el estado  $k$ -ésimo.

$$N_k = \langle \psi | b_k^\dagger b_k | \psi \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} \langle \psi | b_k^\dagger | \psi_i \rangle \langle \psi_i | b_k | \psi \rangle \quad (1.10)$$

A partir de las ecuaciones (1.6), (1.8) y (1.9), es sencillo probar que los únicos elementos de matriz de  $b_k^\dagger$  y  $b_k$  distintos de cero son

$$\langle 0 | b_k^\dagger | 1 \rangle = \langle 1 | b_k | 0 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (1.11)$$

donde  $\sum_{i=1}^{\infty} \langle 0 | b_k^\dagger | i \rangle \langle i | b_k | 0 \rangle$  representa la suma de los números de ocupación para todos los estados desde el  $k$ -ésimo hasta el  $i$ -ésimo:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \langle 0 | b_k^\dagger | i \rangle \langle i | b_k | 0 \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} n_i \quad (1.12)$$

Utilizando estos resultados, calculamos ahora el elemento de matriz (para  $k > l$ ),

$$\langle 1 | b_l^\dagger b_k^\dagger | 0 \rangle = \langle 0 | b_l^\dagger b_k^\dagger | 1 \rangle = \langle 0 | b_l^\dagger | 1 \rangle \langle 1 | b_k^\dagger | 0 \rangle = \frac{1}{2} \quad (1.13)$$

Multiplicando  $b_l$ ,  $b_k$  en orden contrario tenemos

$$\langle 1 | b_l^\dagger b_k^\dagger | 0 \rangle = \langle 0 | b_l^\dagger b_k^\dagger | 1 \rangle = \langle 0 | b_l^\dagger | 1 \rangle \langle 1 | b_k^\dagger | 0 \rangle = \frac{1}{2} \quad (1.14)$$

o bien

$$\langle 1 | b_l^\dagger b_k^\dagger | 0 \rangle = \langle 0 | b_l^\dagger b_k^\dagger | 1 \rangle = \frac{1}{2} \quad (1.14)$$

Comparando (1.13) con (1.14), vemos que estas cantidades son

$$\langle 1 | b_l^\dagger b_k^\dagger | 0 \rangle = \langle 0 | b_l^\dagger b_k^\dagger | 1 \rangle = \frac{1}{2} \quad (1.15)$$

Para el elemento de matriz diagonal  $\langle 0 | b_l^\dagger b_l | 0 \rangle$  encontramos

$$\langle 0 | b_l^\dagger b_l | 0 \rangle = \langle 0 | b_l^\dagger | 1 \rangle \langle 1 | b_l | 0 \rangle = \frac{1}{2} \quad (1.16)$$

sumando con (1.10) encontramos:

$$\langle 0 | b_l^\dagger b_l | 0 \rangle = \frac{1}{2} + \sum_{i=1}^{\infty} n_i = \frac{1}{2} + N_l \quad (1.17)$$

y las ecuaciones obtenidas se pueden escribir en forma conjunta

$$\langle 0 | b_l^\dagger b_l | 0 \rangle = \frac{1}{2} + N_l \quad (1.18)$$

Effectuando cálculos análogos para los productos  $b_l^\dagger b_k^\dagger$

y  $b_l b_k$ , se obtienen las relaciones

$$\langle 0 | b_l^\dagger b_k^\dagger | 0 \rangle = \langle 0 | b_l^\dagger b_k^\dagger | 1 \rangle = 0 \quad (1.19)$$

De la anterior discusión, resulta claro que el estado  $|n_1, n_2, \dots\rangle$  se obtiene a partir del estado de vacío  $|0\rangle$  mediante la acción de los  $b_{p_i}^+$ :

$$|n_1, n_2, \dots\rangle = b_{p_1}^{+n_1} b_{p_2}^{+n_2} \dots |0\rangle \quad (1.20)$$

y el producto escalar de dos estados de este tipo será entonces

$$\langle 0 | b_{p_1}^{n_1} \dots b_{p_i}^{n_i} \dots b_{p_j}^{n_j} \dots |0\rangle = \delta_{n_1, n_1'} \delta_{n_2, n_2'} \dots \delta_{n_i, n_i'} \delta_{n_j, n_j'} \dots \quad (1.21)$$

El símbolo delta significa que la expresión es igual a cero si a cada  $p_i$  no corresponde un  $n_i$  que sea igual a él; si a toda  $p_i$  corresponde una  $n_i$ , entonces toma el valor uno.

Hasta aquí hemos trabajado con fermiones y deducido que los operadores de creación y aniquilación anticonmutan. En sistemas formados por bosones, se debe introducir operadores de creación y de aniquilación bosónicos<sup>(1)</sup>, los cuales conmutan entre sí. Si el sistema está formado por partículas de diferente especie (bosones y fermiones), para cada tipo debe introducirse los correspondientes operadores de segunda cuantización (bosónicos y fermiónicos), los operadores que se refieren a bosones y a fermiones conmutan entre sí.<sup>(2)</sup>

En lo que concierne a los operadores que corresponden a diferentes fermiones, dentro de los límites de la teoría no relativista es posible considerarlos ya sea como operadores que conmutan ó como operadores que anticonmutan; en ambos casos la aplicación del método de segunda cuantización conduce a los mismos resultados, si es que se usa consistentemente cualquiera de estas convenciones.<sup>(3)</sup>

## SECCION 2.

## OPERADORES DE UNO O MAS CUERPOS.

Consideremos ahora un operador  $\hat{A}$  que corresponda a una magnitud física asociada a la  $i$ -ésima partícula. Determinaremos los elementos de matriz del operador

$$\hat{A} = \sum_{i=1}^N \hat{A}_i \quad (2.1)$$

respecto a las funciones de onda  $\psi_{i_1, i_2, \dots, i_N}$ . Es claro que los elementos de matriz serán distintos de cero únicamente para -- transiciones para las que no varían los números  $i_1, i_2, \dots$  (elementos diagonales) y para aquéllas en las que uno de estos números aumenta en una unidad mientras que otro disminuye en la misma cantidad. En efecto, dado que cada uno de los operadores  $\hat{A}_i$  actúa solamente sobre una función en el producto  $\psi_{i_1, i_2, \dots, i_N} = \psi_{i_1} \psi_{i_2} \dots \psi_{i_N}$ , sus elementos de matriz pueden ser distintos de cero tan solo para las transiciones en que varía el estado de una sola partícula, pero esto significa que el número de partículas que se encuentran en un estado disminuye en una unidad, mientras que las que se encuentran en algún otro aumentarán en esa misma cantidad. El cálculo de estos elementos de matriz es en esencia simple, por lo que presentaremos solo el resultado. Los elementos no diagonales son iguales a.

$$\langle \psi_{i_1, i_2, \dots, i_N} | \hat{A}_i | \psi_{i_1, i_2, \dots, i_N} \rangle = \langle \psi_{i_1, i_2, \dots, i_N} | \hat{A}_i | \psi_{i_1, i_2, \dots, i_N} \rangle \quad (2.2)$$

con

$$\hat{A}_i = \int \psi_{i_1}^* \dots \psi_{i_N}^* \hat{A}_i \psi_{i_1} \dots \psi_{i_N} \quad (2.3)$$

No hay que perder de vista que los operadores  $\hat{A}_i$  difieren -- tan solo en las variables  $a$  que se aplican, por lo que las integrales  $\int \psi_{i_1}^* \dots \psi_{i_N}^* \hat{A}_i \psi_{i_1} \dots \psi_{i_N}$  no dependen del índice  $i$ . Los elementos de matriz diagonales de  $\hat{A}$  resultan ser los valores medios de la magnitud  $F$  en los estados  $\psi_{i_1, i_2, \dots, i_N}$  :

$$\langle \psi_{i_1, i_2, \dots, i_N} | \hat{A} | \psi_{i_1, i_2, \dots, i_N} \rangle = \langle \psi_{i_1, i_2, \dots, i_N} | \hat{A} | \psi_{i_1, i_2, \dots, i_N} \rangle \quad (2.4)$$

Partiendo de las propiedades de los operadores  $\hat{A}_i$  y  $\hat{A}_j$  es fácil ver que el operador

$$\hat{A} = \sum_{i=1}^N \hat{A}_i \quad (2.5)$$

coincide con el operador (2.1). En efecto, todos los elementos de matriz calculados mediante (1.13) y (1.14) coinciden con los elementos (2.2) y (2.4). En la fórmula (2.5) las cantidades  $f_{ik}^{(2)}$  son simplemente números. De esta manera hemos conseguido expresar un operador ordinario que actúa sobre funciones de onda de las coordenadas, como operador que actúa sobre funciones de las nuevas variables (los números de ocupación  $N_i$ ).

Consideremos ahora el operador

$$\hat{F}^{(2)} = \sum_{a>b} \hat{f}_{ab}^{(2)} \quad (2.6)$$

donde  $\hat{f}_{ab}^{(2)}$  es un operador asociado a alguna magnitud física que involucra a dos partículas. Cálculos similares a los explicados anteriormente, muestran que el operador asociado a (2.6), en el esquema de segunda cuantización, es:

$$\begin{aligned} \hat{F}^{(2)} &= \frac{1}{2} \sum_{iklm} \langle p_i p_k | f^{(2)} | p_l p_m \rangle b_{p_i}^\dagger b_{p_k}^\dagger b_{p_l} b_{p_m} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{iklm} (f^{(2)})_{iklm} b_{p_i}^\dagger b_{p_k}^\dagger b_{p_l} b_{p_m}, \end{aligned} \quad (2.7)$$

donde

$$(f^{(2)})_{iklm} = \iint \psi_{p_i}^*(\vec{r}_1) \psi_{p_k}^*(\vec{r}_2) f^{(2)} \psi_{p_l}(\vec{r}_1) \psi_{p_m}(\vec{r}_2) d\tau_1 d\tau_2 \quad (2.8)$$

La generalización de estas fórmulas a operadores que involucren tres ó mas partículas resulta clara.

## SECCION 3.

EL HAMILTONIANO DE N FERMIONES Y LA RELACION CON LA  
TEORIA DE GRUPOS.

El problema de muchos cuerpos es un problema matemático muy complejo, y por tanto, es necesario restringirse a ciertos modelos que sean susceptibles al análisis matemático.

En la mayoría de los casos el problema puede plantearse en términos de un hamiltoniano que tiene la forma

$$H = \sum_{i=1}^N \left( \frac{p_i^2}{2m} + U_i \right) + \sum_{i < j}^N V_{ij} \quad (3.1)$$

donde  $U_i$  y  $V_{ij}$  son potenciales de uno y dos cuerpos respectivamente, no necesariamente centrales.

A pesar de representar, por lo general, un modelo simplificado del sistema que se quiere describir, la solución de problemas del tipo (3.1) es aún muy complicada, por lo que es necesario utilizar diferentes técnicas de aproximación.

En esta sección no se intenta hacer un resumen de las diferentes técnicas desarrolladas hasta ahora, sino considerar clases particulares de problemas del tipo (3.1) que permiten la utilización de la Teoría de Grupos para su solución. Estamos interesados específicamente en la aplicación de dichas técnicas en el análisis de la dinámica nuclear.

Como se ha discutido en capítulos anteriores de este trabajo, si  $U_2$  es un potencial central las eigenfunciones de  $H_0$  tienen la forma general

$$\Psi_{\alpha, \beta, \gamma, \delta}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3) = Y_{\alpha, \beta}(\hat{r}_1, \hat{r}_2, \hat{r}_3) T_{\gamma, \delta}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3) \quad (3.2)$$

donde  $Y_{\alpha, \beta}(\hat{r}_i)$  y  $T_{\gamma, \delta}(\vec{r}_i)$  son eigenfunciones asociadas a los grados de libertad espín e isoespín, respectivamente, de los nucleones. Esta caracterización de los estados recibe comúnmente el nombre de clasificación de supermultiplete. En este punto es importante señalar que una selección diferente de  $U_2$  puede dar lugar a caracterizaciones alternativas de la parte orbital de los estados, como es el caso si existe una fuerte interacción Espín-Órbita. Las eigenfunciones estarán dadas

entonces por ( ver capítulo ( . ) ) .

$$\Psi_{\nu, l, m}(\vec{r}, \vec{p}, z) = R_{\nu, l}(r) Y_{l, m}(\theta, \phi) \overline{\psi_{\nu, l, m}(z)} \quad (3.3)$$

por el momento consideraremos la clasificación del supermultiplete, de modo que para expresar el hamiltoniano (3.1) en esta aproximación en el esquema de Segunda Cuantización, hacemos la correspondencia.

$$p \rightarrow \gamma \ell m; \sigma c = \mu s \quad (3.4)$$

y adoptamos la convención

|            |                            |                            |                             |                             |
|------------|----------------------------|----------------------------|-----------------------------|-----------------------------|
| 5          | 1                          | 2                          | 3                           | 4                           |
| $\sigma c$ | $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ |

(3.5)

Utilizando los resultados de la sección anterior, tendremos entonces.

$$H = \sum_{\mu} E_{\mu} \hat{c}_{\mu}^{\dagger} \hat{c}_{\mu} + \frac{1}{2} \sum_{\substack{\mu_1, \mu_2 \\ \mu_3, \mu_4}} \langle \mu_1 \mu_2 | V(r_{12}) | \mu_3 \mu_4 \rangle ( \hat{c}_{\mu_1}^{\dagger} \hat{c}_{\mu_2}^{\dagger} - \delta_{\mu_1 \mu_2} \hat{c}_{\mu_3}^{\dagger} \hat{c}_{\mu_4}^{\dagger} ) \quad (3.6)$$

donde se ha definido el operador

$$\hat{c}_{\mu}^{\dagger} = \sum_{s=1}^4 b_{\mu s}^{\dagger} b^{\mu s} \quad (3.7)$$

Para entender el significado de los operadores  $\hat{c}_{\mu}^{\dagger}$ , calculamos su relación de conmutación utilizando las relaciones (1.18) y (1.19) . obteniendo

$$[ \hat{c}_{\mu_1}^{\dagger}, \hat{c}_{\mu_2}^{\dagger} ] = \delta_{\mu_1 \mu_2} \hat{c}_{\mu_1}^{\dagger} - \delta_{\mu_1 \mu_2} \hat{c}_{\mu_2}^{\dagger} \quad (3.8)$$

Por el momento supongamos que  $P$  es el número máximo que puede tomar el índice  $\mu$ , es decir,  $\mu=1, 2, \dots, P$  . Observamos que el conmutador de dos  $\hat{c}_{\mu}^{\dagger}$  está dado como combinación de otros  $\hat{c}_{\mu}^{\dagger}$  . pero más aún, los  $\hat{c}_{\mu}^{\dagger}$  , son  $P^2$  operadores -- que satisfacen las reglas de conmutación de un grupo unitario de  $P$  dimensiones  $[U(P)]^c$  y, por lo tanto, corresponde al álgebra

bra de Lie asociada a este grupo. Ya que hemos expresado el hamiltoniano mas general para fermiones, en términos de los generadores  $\mathcal{L}_{H_2}^{K_2}$ , para calcular los eigenvalores del hamiltoniano, probabilidades de transición y otras observables de interés del sistema considerado, necesitaremos estudiar las bases que portan las representaciones irreducibles del grupo. Este será el objetivo de nuestra siguiente sección.





por lo que podemos afirmar que hemos construido un subgrupo  $U(q) \times U(p)$  del grupo  $U(qp)$ , que separa la parte de espín-isoespín de la parte espacial en los estados del sistema.

Nuestro propósito ahora es clasificar completamente los estados de  $N$  fermiones y esto será equivalente a encontrar bases de representaciones irreducibles (BRI) del grupo  $U(q) \times U(p)$ . Las BRI del grupo  $U(q) \times U(p)$  se pueden clasificar por medio de los números cuánticos asociados con las cadenas canónicas de subgrupos de  $U(q)$  y  $U(p)$ , i. e.,

$$U(q) \supset U(q_1) \supset U(q_2) \supset U(q_3) \dots \quad (4.8)$$

$$U(p) \supset U(p_1) \supset \dots \supset U(p_2) \supset U(p_3) \dots \quad (4.9)$$

Además estamos interesados en encontrar los conjuntos de polinomios homogéneos linealmente independientes de grado  $N$

$$P(b_{\mu s}^{\dagger}) = P(b_{\mu 1}^{\dagger}, b_{\mu 2}^{\dagger}, \dots, b_{\mu r}^{\dagger}) \quad (4.10)$$

que portan las RI (i. e., son BRI).

Primeramente caracterizemos a los polinomios  $P(b_{\mu s}^{\dagger})$  por el grado  $\omega_j, \omega_r$  en las componentes  $\mu=1, s$  de  $b_{\mu s}^{\dagger}$ , i. e.,

$$E_j^{\dagger} P(b_{\mu s}^{\dagger})|0\rangle = \omega_j P(b_{\mu s}^{\dagger})|0\rangle \quad ; \quad E_r^{\dagger} P(b_{\mu s}^{\dagger})|0\rangle = \omega_r P(b_{\mu s}^{\dagger})|0\rangle \quad (4.11)$$

donde  $|0\rangle$  es el estado de vacío, el conjunto de números  $\omega_j = (\omega_1^j, \omega_2^j, \dots, \omega_r^j)$  y  $(\omega_s) = (\omega_{s1}, \omega_{s2}, \dots, \omega_{sr})$  se denominan los pesos del polinomio respecto a  $U(q)$  y  $U(p)$  respectivamente. Se dice que los pesos  $(\omega^j)$  y  $(\omega_s)$  son mayores que  $(\bar{\omega}^j)$  y  $(\bar{\omega}_s)$  si en  $(\omega^j - \bar{\omega}^j)$ ,  $(\omega_s - \bar{\omega}_s)$  la primera componente distinta de cero es positiva.

De los conmutadores

$$[E_{\mu}^{\mu_1}, E_{\mu}^{\mu_2}] = (\delta_{\mu_1}^{\mu} - \delta_{\mu_2}^{\mu}) E_{\mu}^{\mu_2} \quad (4.12)$$

$$[C_{s_1}^s, C_{s_2}^s] = (\delta_{s_1}^s - \delta_{s_2}^s) C_{s_2}^s \quad (4.13)$$

es fácil ver que los generadores  $\xi_{\mu}^{\mu}$ ,  $\mu = \mu_1, \dots, \mu_r$ , y  $\xi_{\mu}^{\pm}$ ,  $\mu = \mu_1, \dots, \mu_r$ , al actuar sobre los polinomios  $P(\xi_{\mu}^{\pm})$  aumentan los pesos  $(\omega_1)$  y  $(\omega^s)$ , respectivamente, mientras que los generadores  $\xi_{\mu}^{\mu}$ ,  $\mu = \mu_1, \dots, \mu_r$ , y  $\xi_{\mu}^{\pm}$ ,  $\mu = \mu_1, \dots, \mu_r$ , al actuar sobre  $P(\xi_{\mu}^{\pm})$  los disminuyen.

Podemos definir ahora el polinomio de peso máximo en el grupo  $U(\mathfrak{g}) \times U(\mathfrak{g})$  como aquel que satisface las condiciones

$$\begin{aligned} \xi_j^{\pm} P(\xi_{\mu}^{\pm}) |0\rangle &= 0, \quad P(\xi_{\mu}^{\pm}) |0\rangle = k^{\pm} P(\xi_{\mu}^{\pm}) |0\rangle, \\ \xi_j^{\pm} P(\xi_{\mu}^{\pm}) |0\rangle &= 0, \quad \xi_j^{\pm} P(\xi_{\mu}^{\pm}) |0\rangle = 0 \end{aligned} \quad (4.14)$$

si  $i \in J$ ,  $m = \pm$ ,  $j = 1, 2, \dots, r$ ,  $\mu = 1, 2, 3, 4$ .

Usando estas ecuaciones, vemos que si  $\mu < \mu'$

$$\begin{aligned} \langle 0 | (\xi_{\mu}^{\mu'} P)^{\dagger} \xi_{\mu}^{\mu'} P |0\rangle &= \langle 0 | P^{\dagger} \xi_{\mu}^{\mu'} \xi_{\mu}^{\mu'} P |0\rangle \\ &= \langle 0 | P^{\dagger} [\xi_{\mu}^{\mu'} - \xi_{\mu'}^{\mu'}] P |0\rangle = \langle 0 | P^{\dagger} \xi_{\mu}^{\mu'} - \xi_{\mu'}^{\mu'} P |0\rangle \\ &= h_{\mu} - h_{\mu'} \end{aligned}$$

como el primer producto escalar es no negativo, se tiene que

$$\begin{aligned} h_{\mu} &> h_{\mu'} & \mu < \mu' \\ \text{de modo que} & & \\ h_1 &\geq h_2 \geq h_3 \geq \dots \geq h_r. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Usando las relaciones de anticonmutación de los operadores  $b_{\mu_1}^+$  y  $b_{\mu_2}^+$  se encuentra que

$$\xi_{\mu_1}^{\mu_2} b_{\mu_1}^+ b_{\mu_2}^+ |0\rangle = \delta_{\mu_1}^{\mu_2} b_{\mu_1}^+ |0\rangle = \delta_{\mu_1}^{\mu_2} b_{\mu_2}^+ b_{\mu_1}^+ |0\rangle \quad (4.16)$$

La consideración de casos análogos muestra que cuando el operador  $\xi_{\mu}^{\mu'}$  se aplica sobre un monomio en  $b_{\mu_1}^+$ , el resultado es el mismo que se obtendría de aplicar formalmente el operador

$$b_{\mu_1}^+ \frac{\partial}{\partial b_{\mu_1}^+}$$

por lo que podemos afirmar que hemos construido un subgrupo  $U(4) \times U(r)$  del grupo  $U(4r)$ , que separa la parte de espín-isospín de la parte espacial en los estados del sistema.

Nuestro propósito ahora es clasificar completamente los estados de  $N$  fermiones y esto será equivalente a encontrar bases de representaciones irreducibles (BRI) del grupo  $U(4) \times U(r)$ . Las BRI del grupo  $U(4) \times U(r)$  se pueden clasificar por medio de los números cuánticos asociados con las cadenas canónicas de subgrupos de  $U(4)$  y  $U(r)$ , i. e.,

$$U(4) \supset U(3) \supset U(2) \supset U(1) \quad (4.8)$$

$$U(r) \supset U(r-1) \supset \dots \supset U(2) \supset U(1) \quad (4.9)$$

Además estamos interesados en encontrar los conjuntos de polinomios homogéneos linealmente independientes de grado  $N$

$$P(c_{\mu s}^{\dagger}) = P(c_{11}^{\dagger}, b_{11}^{\dagger}, \dots, b_{r1}^{\dagger}) \quad (4.10)$$

que portan las RI (i. e., son BRI).

Primeramente caracterizemos a los polinomios  $P(b_{\mu s}^{\dagger})$  por el grado  $\omega_j, \omega^s$  en las componentes  $j, s$  de  $c_{\mu s}^{\dagger}$ , i. e.,

$$c_{\mu s}^{\dagger} P(b_{\mu s}^{\dagger})|0\rangle = \omega_j P(b_{\mu s}^{\dagger})|0\rangle + c_{\mu s}^{\dagger} P(b_{\mu s}^{\dagger})|0\rangle = \omega^s P(b_{\mu s}^{\dagger})|0\rangle \quad (4.11)$$

donde  $|0\rangle$  es el estado de vacío, el conjunto de números  $(\omega^1, \omega^2, \dots, \omega^r)$  y  $(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_r)$  se denominan los pesos del polinomio respecto a  $U(4)$  y  $U(r)$  respectivamente. Se dice que los pesos  $(\omega^s)$  y  $(\omega_j)$  son mayores que  $(\bar{\omega}^s)$  y  $(\bar{\omega}_j)$  si en  $(\omega^s - \bar{\omega}^s), (\omega_j - \bar{\omega}_j)$  la primera componente distinta de cero es positiva.

De los conmutadores

$$[c_{\mu s}^{\dagger}, c_{\mu' s'}^{\dagger}] = (\delta_{\mu\mu'}^s - \delta_{\mu\mu'}^{s'}) c_{\mu' s'}^{\dagger} \quad (4.12)$$

$$[c_{\mu s}^{\dagger}, c_{\mu' s'}^{\dagger}] = (\delta_{\mu\mu'}^s - \delta_{\mu\mu'}^{s'}) c_{\mu' s'}^{\dagger} \quad (4.13)$$

es fácil ver que los generadores  $\xi_{\mu_1}^{\mu_2}, \mu_1 > \mu_2$ , y  $\xi_{\mu_1}^{\mu_2}, \mu_1 < \mu_2$ , al actuar sobre los polinomios  $P(\xi_{\mu_1}^{\mu_2})$  aumentan los pesos  $(\mu_1)$  y  $(\mu_2)$ , respectivamente, mientras que los generadores  $\xi_{\mu_1}^{\mu_2}, \mu_1 > \mu_2$  y  $\xi_{\mu_1}^{\mu_2}, \mu_1 < \mu_2$ , al actuar sobre  $P(\xi_{\mu_1}^{\mu_2})$  los disminuyen.

Podemos definir ahora el polinomio de peso máximo en el grupo  $\mathcal{U}(\mathfrak{g}) \times \mathcal{U}(\mathfrak{c})$  como aquel que satisface las condiciones

$$\begin{aligned} \xi_j^{\pm} P(b_{\mu_s}^{\pm})|0\rangle &= h_j P(b_{\mu_s}^{\pm})|0\rangle, & C_i^{\pm} P(b_{\mu_s}^{\pm})|0\rangle &= h_i^{\pm} P(b_{\mu_s}^{\pm})|0\rangle, \\ \rho_j^{\pm} P(b_{\mu_s}^{\pm})|0\rangle &= 0, & \xi_{\mu_1}^{\mu_2} P(b_{\mu_s}^{\pm})|0\rangle &= 0 \end{aligned} \quad (4.14)$$

si  $i < j$ ,  $m < n$ ,  $j = 1, 2, \dots, 4$ ,  $n = 1, 2, 3, 4$ .

Usando estas ecuaciones, vemos que si  $\mu > \mu'$

$$\begin{aligned} \langle 0 | (\xi_{\mu}^{\mu'} P)^{\dagger} \xi_{\mu'}^{\mu} P | 0 \rangle &= \langle 0 | P^{\dagger} \xi_{\mu'}^{\mu} \xi_{\mu}^{\mu'} P | 0 \rangle \\ &= \langle 0 | P^{\dagger} [\xi_{\mu}^{\mu'}, \xi_{\mu'}^{\mu}] P | 0 \rangle = \langle 0 | P^{\dagger} (\xi_{\mu}^{\mu'} - \xi_{\mu'}^{\mu}) P | 0 \rangle \\ &= h_{\mu} - h_{\mu'} \end{aligned}$$

como el primer producto escalar es no negativo, se tiene que

$$h_{\mu} > h_{\mu'} \quad \mu < \mu'$$

de modo que

$$h_1 \geq h_2 \geq h_3 \geq \dots \geq h_n. \quad (4.15)$$

Usando las relaciones de anticonmutación de los operadores  $b_{\mu_s}^+$  y  $b_{\mu_s}^{-}$  se encuentra que

$$\xi_{\mu}^{\mu'} b_{\mu_1 s}^+ b_{\mu_2 s}^+ |0\rangle = \delta_{\mu_1 \mu_2}^{\mu'} b_{\mu_1 s}^- b_{\mu_2 s}^+ |0\rangle = \delta_{\mu_1 \mu_2}^{\mu'} b_{\mu_2 s}^+ b_{\mu_1 s}^- |0\rangle \quad (4.16)$$

La consideración de casos análogos muestra que cuando el operador  $\xi_{\mu}^{\mu'}$  se aplica sobre un monomio en  $b_{\mu_s}^{\pm}$ , el resultado es el mismo que se obtendría de aplicar formalmente el operador

$$b_{\mu_s}^{\pm} \frac{\partial}{\partial b_{\mu_s}^{\pm}}$$

Las funciones base de RI de  $(\mathcal{H})$  que consideraremos son monomios homogéneos de grado  $N$  en  $\mathcal{H}_p$ . De las ecuaciones (4.14) e interpretando a  $\mathcal{H}_p$  como  $\mathcal{H}_p^{\otimes N}$ , se deduce que las  $k_{ij}$  son enteros no negativos. Por el teorema de Euler para funciones homogéneas  $(4)$ , cuando el operador  $\frac{\partial}{\partial \mu_i} \frac{\partial}{\partial \mu_j} = \frac{1}{\mu_i \mu_j} \frac{\partial}{\partial \mu_i} \frac{\partial}{\partial \mu_j} = \frac{\partial^2}{\partial \mu_i \partial \mu_j}$  se aplica sobre cualquier función de la base se obtiene la misma función multiplicada por  $\mathcal{H}$ . De esto se sigue que

$$k_{11} + k_{22} + \dots + k_{pp} = N. \quad (4.17)$$

Consideraciones análogas muestran que

$$k^2 \geq k^3 \geq k^4 \geq \dots \quad (4.18)$$

$$k_1 + k_2 + \dots + k_p = N. \quad (4.19)$$

Utilizando el teorema fundamental de E. Cartan  $(10)$  y la discusión anterior concluimos que cada RI de  $(\mathcal{H})$  se puede poner en relación uno a uno con una partición del número entero  $N$  en no más de  $p(4)$  partes. Una partición se representa gráficamente por un diagrama (de Young) de cuadros dispuestos en renglones, con  $k_i$  cuadros en el  $i$ -ésimo renglón. Dos particiones de  $N$  se dice que son conjugadas si sus diagramas de Young se obtienen una de la otra por intercambio de renglones y columnas; si una partición se indica con  $(k_j)$  su partición conjugada se indica por  $(\overline{k}_j)$ ; por ejemplo,



partición:  $(k_j) = (3, 2)$



partición conjugada:  $(\overline{k}_j) = (2, 4)$

Si regresamos al grupo original  $(\mathcal{H})$ , nuestro análisis se simplifica si denotamos los índices  $\mu_i$  por un solo índice  $\rho$ . Vemos entonces que el monomio particular

$$P|\sigma\rangle = b_1^{k_1} b_2^{k_2} \dots b_p^{k_p} |\sigma\rangle$$

satisface las ecuaciones equivalentes a (4.14), con peso

$$(\lambda) = (\lambda''), \text{ es decir, } \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_p = 1 \text{ y } \lambda_{p+1} = \lambda_{p+2} = \dots = \lambda_r = 0.$$

Debido a estas propiedades se puede afirmar que el conjunto de monomios independientes de grado  $N$ :  $\{b_1^{k_1} b_2^{k_2} \dots b_p^{k_p} |\sigma\rangle \mid (\lambda) = (\lambda'')\}$

portan la RI  $[2^p]$  de  $U(4p)$ .

Una pregunta que podemos hacernos es: ¿Cuales son las RI de  $U(4) \times U(p)$  que aparecen en la RI  $[2^p]$  de  $U(4p)$ ? Demos aquí la respuesta a esta pregunta sin demostración.

Si las RI de  $U(4)$  se denotan mediante la partición  $\{k_1, k_2, k_3, k_4\}$  y las de  $U(p)$  con  $\{h_1, h_2, \dots, h_r\}$ , entonces las RI de  $U(4) \times U(p)$  contenidas en la RI  $[2^p]$  de  $U(4p)$  son aquellas en donde tanto  $\{k_s\}$  como  $\{h_\mu\}$  son particiones del numero  $p$  y además son particiones conjugadas entre si.

$$\{k_s\} = \widetilde{\{h_\mu\}} \quad s=1,2,3,4; \quad \mu=1,2,3,\dots,p. \quad (4.20)$$

Notamos que debido a la propiedad de conjugación cada  $h_\mu \leq p$  y cada  $k_s \leq p$ .

A partir de (4.5) y (4.6) es posible mostrar que los generadores de los subgrupos  $U(f)$ ,  $f=1,2,\dots,p-1$ ,  $[U(2); \mathfrak{g}=1,2,3]$  son los  $\hat{F}_\mu^{s'}$ , con  $\mu'$  y  $\mu$  restringidos a  $\mu', \mu=1,2,\dots,p$  ( $C_2^{s'}$  con  $s, s'=1,2,\dots,9$ ). Denotaremos las RI de cada uno de los subgrupos  $U_p(U_g)$  por las particiones  $\{h_{1p}, \dots, h_{fp}\}$  ( $\{V_{1g}, \dots, V_{fg}\}$ ).

Un estado general clasificado por las cadenas (4.8), (4.9) se representa mediante <sup>(9)</sup>

$$|h_{kp}, V_{fg}\rangle = \begin{vmatrix} h_{1p} & h_{2p} & \dots & h_{fp} \\ h_{1,p-1} & \dots & h_{f,p-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_{12} & h_{22} & \dots & h_{f2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_{11} & \dots & \dots & h_{f1} \end{vmatrix} \begin{matrix} V_{1g} & V_{2g} & \dots & V_{fg} \\ V_{1g} & V_{2g} & \dots & V_{fg} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ V_{12} & V_{22} & \dots & V_{f2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ V_{11} & \dots & \dots & V_{f1} \end{matrix} \quad (4.21)$$

$$= p^{[h_{fp}]} \{V_{fg}\} \left( \begin{matrix} p \\ 0 \mu_s \end{matrix} \right) |0\rangle;$$

que se conoce como estado (doble) de Gelfand. El análisis similar a (4.15) muestra que las  $\{h_{ir}\}$  de (4.15) satisfacen las desigualdades

$$\begin{aligned} h_{1r} &\geq h_{1,r-1} \geq \dots \geq h_{1,1} \geq 0, \\ h_{2,r-1} &\geq h_{2,r-2} \geq \dots \geq h_{2,1} \geq 0, \\ &\dots \\ h_{1r} &\geq h_{1r} \geq h_{2r} \geq 0. \end{aligned} \quad (4.22)$$

(Las  $\{h_{ir}\}$  de (4.9) obedecen relaciones similares) Claramente, el estado de máximo peso en  $\mathcal{U}(\mathfrak{g}) \otimes \mathcal{U}(\mathfrak{f})$  es de máximo peso en cada uno de los subgrupos  $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$  y  $\mathcal{U}(\mathfrak{f})$ , por lo que está dado por el ket

$$\left| \begin{array}{cccc} h_1 & h_2 & h_3 & h_4 \dots h_n \\ h_1 & h_2 & h_3 & \dots h_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_1 & & & \dots \end{array} \right\rangle \quad (4.23)$$

Si nos restringimos a los estados de Gelfand clasificados por la cadena (4.9), denotaremos estos como

$$\left| \begin{array}{cccc} h_{1r} & h_{2r} & \dots & h_{nr} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_{1r} & h_{2r} & \dots & h_{nr} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_{1r} & & & \dots \end{array} \right\rangle \quad (4.24)$$

Procederemos ahora a encontrar los eigenvalores de los invariantes de primer orden del grupo  $\mathcal{U}(\mathfrak{f})$ , que vienen dados por la relación

$$N_p = \sum_{\lambda=1}^p \rho_\lambda \quad (4.25)$$

Actuando con (4.25) sobre el estado (4.24), encontramos



$$N_p \begin{vmatrix} h_{1r} & \dots & h_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ h_{1p} & \dots & h_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ h_{11} & \dots & h_{11} \end{vmatrix} = \sum_{\lambda=1}^r \omega_\lambda \begin{vmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \\ \dots & \dots \\ \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{vmatrix} \quad (4.26)$$

por lo que

$$\rho_{\lambda p}^p |h_{\lambda p}\rangle = (N_p - N_{p-1}) |h_{\lambda p}\rangle \equiv \omega_\lambda |h_{\lambda p}\rangle, \quad (4.27)$$

donde la  $p$ -ésima componente  $\omega_p$  del peso de  $|h_{\lambda p}\rangle$  estará dada por

$$\omega_p = \sum_{\lambda=1}^p h_{\lambda p} - \sum_{\lambda=1}^{p-1} h_{\lambda, p-1}. \quad (4.28)$$

Definiendo ahora el estado

$$|h \rangle = \begin{vmatrix} h_1 & \dots & h_r \\ \vdots & & \vdots \\ q_1 & \dots & q_{r-1} \end{vmatrix} \equiv \begin{vmatrix} h_1 & \dots & h_r \\ \vdots & & \vdots \\ q_1 & \dots & q_{r-1} \end{vmatrix} \equiv \begin{vmatrix} h_1 & \dots & h_r \\ \vdots & & \vdots \\ q_1 & q_2 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ q_1 & \vdots & \vdots \end{vmatrix} \quad (4.29)$$

obtenemos de las ecs. (4.27) y (4.28)

$$\rho_{r p}^p |h \rangle = q_p |h \rangle, \quad 1 \leq p \leq r \quad (4.30)$$

El estado  $|h \rangle$  es el estado de peso más alto que corresponde a la RI  $[q_1, \dots, q_{r-1}]$  de  $\mathcal{U}(r-1)$ , por lo que si usamos generadores de ascenso de  $\mathcal{U}(r-1)$  tenemos

$$\rho_{\mu \mu'}^{\mu'} |h \rangle = 0 \quad 1 \leq \mu < \mu' < r \quad (4.31)$$

En los párrafos siguientes se indicará como se pueden determinar los estados (4.24) a partir del polinomio de máximo peso con la ayuda de operadores de descenso apropiados. Por ejemplo el polinomio de máximo peso en  $U(\mu)$  y  $U(\bar{\mu})$

$$\begin{aligned}
 P(b_{\mu_s}^+) = & b_{11}^+ b_{12}^+ b_{13}^+ b_{14}^+ \\
 & b_{21}^+ b_{22}^+ b_{23}^+ \\
 & b_{31}^+ b_{32}^+ \\
 & b_{41}^+ b_{42}^+ \\
 & b_{51}^+
 \end{aligned} \tag{4.32}$$

se determina de las condiciones

$$E_{\mu}^{\kappa} P(b_{\mu_s}^+) |0\rangle = h_{\mu} P(b_{\mu_s}^+) |0\rangle; \quad E_{\mu}^{\mu} P(b_{\mu_s}^+) |0\rangle = \mu^{\kappa} P(b_{\mu_s}^+) |0\rangle \tag{4.33}$$

$$C_s^{\bar{\mu}} P(b_{\mu_s}^+) |0\rangle = k_s P(b_{\mu_s}^+) |0\rangle; \quad C_s^{\mu} P(b_{\mu_s}^+) |0\rangle = 0 \tag{4.34}$$

donde las  $h_s^{\bar{\mu}}$  y  $k_s^{\mu}$  toman los valores

$$\begin{aligned}
 h_1 = 4, \quad k_2 = 3, \quad h_3 = 2, \quad h_4 = 2, \quad h_5 = 1; \\
 k_1 = 5, \quad k_2 = 4, \quad k_3 = 2, \quad k_4 = 1
 \end{aligned} \tag{4.35}$$

Finalmente para construir el polinomio más general correspondiente a (4.24) se utilizan operadores de descenso que se discuten en la siguiente sección.

## SECCION 5.

## OPERADORES DE DESCENSO

A partir del polinomio de peso más alto es posible determinar la totalidad de los polinomios  $P^{(h_{\lambda})}$  usando operadores de descenso. En esta sección determinaremos tanto los estados (4.21) como los operadores de descenso de  $U(n)$ .

Definimos el operador de descenso  $L_p^m$  de  $U(n)$  como una función polinomial de los generadores de  $U(n)$  con las siguientes propiedades:

- 1.- Cuando  $L_p^m$  actúa sobre una base  $|h_{\lambda}\rangle$  correspondiente a una RI  $[h_{\lambda}]$  de  $U(n)$  con peso  $\omega_p$  ( $1 \leq p \leq P$ ) dado por la ecuación (4.27), bajará la  $m$ -ésima componente del peso por una unidad, de modo que la acción de  $L_p^m$  sobre  $|h_{\lambda}\rangle$  da lugar a una combinación lineal arbitraria de los vectores  $|h_{\lambda\nu}\rangle$  de peso  $\omega_p^{\nu}$ , donde

$$\omega_p^{\nu} = \omega_p - \delta_p^m, \quad 1 \leq \nu \leq P, \quad (5.1)$$

$$\sum_{\lambda=1}^{\nu} h_{\lambda\nu}^{\nu} = \sum_{\lambda=1}^{\nu} h_{\lambda\nu} - \begin{cases} 0 & 1 \leq \nu < m \\ 1 & m \leq \nu < P \end{cases} \quad (5.2)$$

$$h_{\lambda\nu}^{\nu} = h_{\lambda\nu} \quad 1 \leq \lambda \leq P. \quad (5.3)$$

De la ec. (5.1) se sigue que

$$\begin{aligned} [E_p^m, L_p^m] |h_{\lambda\nu}\rangle &= (E_p^m L_p^m - L_p^m E_p^m) |h_{\lambda\nu}\rangle, \\ &= (\omega_p^{\nu} - \omega_p) L_p^m |h_{\lambda\nu}\rangle = -\delta_p^m L_p^m |h_{\lambda\nu}\rangle \end{aligned} \quad (5.4)$$

y ya que esta relación es válida para toda  $|h_{\lambda\nu}\rangle$  se tiene

$$[E_p^m, L_p^m] = -\delta_p^m L_p^m \quad 1 \leq p, m < P. \quad (5.5)$$

- 2.- Cuando  $L_p^m$  actúa sobre  $|h_{\lambda}\rangle$ , la RI  $[q_1, \dots, q_{P-1}]$  de  $U(n)$  cambiará a  $[q_1^{\nu}, \dots, q_{P-1}^{\nu}]$ , en forma tal que el peso  $\omega_p^{\nu}$ , dado por la ec. (5.1), será el más alto de los pesos de los vectores de la base de la RI  $[q_1^{\nu}, \dots, q_{P-1}^{\nu}]$ . En otras palabras,  $L_p^m$  deberá satisfacer la relación

$$L_p^m |h_1, \dots, h_P\rangle \propto |h_1, \dots, h_P\rangle \quad (5.6)$$

y por lo tanto

$$[E_{\mu}^{\lambda}, L_r^m] |h\rangle = (E_{\mu}^{\lambda} L_r^m - L_r^m E_{\mu}^{\lambda}) |h\rangle = 0, \quad 1 \leq \mu \leq p-1$$

de donde se sigue que

$$[E_{\lambda}^{\lambda+1}, L_r^m] |h\rangle = 0, \quad 1 \leq \lambda \leq p-1 \tag{5.7}$$

De (5.2) observamos que  $L_r^m |h\rangle$  no está determinado completamente por las ecuaciones (5.1) y (5.6) excepto cuando  $|h\rangle$  es de la forma  $|h\rangle$ .

El  $L_r^m$  mas general que satisface la ec. (5.5) es un polinomio formado por combinaciones lineales de productos de la forma  $E_{\mu_1}^{\lambda_1} E_{\mu_2}^{\lambda_2} \dots E_{\mu_{p-1}}^{\lambda_{p-1}}$ , en donde aparecen todos los índices  $\mu_{p,m}$  por pares, mientras que el índice  $\mu$  aparece una vez mas arriba que abajo y el índice  $p$  una vez mas abajo que arriba.

Usando las reglas de conmutación, podemos entonces escribir  $L_r^m$  como

$$L_r^m = \sum_{\rho=0}^{p-1} \sum_{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{p-1}}^{\rho-1} E_{\mu_1}^{\lambda_1} E_{\mu_2}^{\lambda_2} \dots E_{\mu_{p-1}}^{\lambda_{p-1}} \Omega_{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{p-1}}^{\rho} \tag{5.8}$$

$1 \leq m < p, \quad \mu \neq \mu_i \neq p,$   
 para  $1 \leq i \leq p; \quad \mu_i \neq \mu_j \quad \text{para } m < j$

donde el término que corresponde a  $\rho = 0$  es por definición

$\Omega_{\rho}^m \Omega_{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{p-1}}^{\rho}$  es una función de ciclos cerrados de los generadores

$$\Omega_{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{p-1}}^{\rho} = \Omega_{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{p-1}}^{\rho} (E_{\lambda_1}^{\mu_1} E_{\lambda_2}^{\mu_2} \dots E_{\lambda_{p-1}}^{\mu_{p-1}}), \tag{5.9}$$

$\lambda_i \geq 1, \quad 1 \leq \lambda_i \leq p.$

Si en un término de (5.8) el producto  $E_{\mu_1}^{\lambda_1} E_{\mu_2}^{\lambda_2} \dots E_{\mu_{p-1}}^{\lambda_{p-1}}$  contiene un generador de ascenso de  $\mathcal{U}(p-1)$ , podemos trasladar tal generador hacia la derecha y al actuar sobre  $|h\rangle$  su contribución al operador  $L_r^m$  es cero de acuerdo con (4.31). Entonces es posible construir otra solución general de la forma

$$L_r^m = \sum_{\rho=0}^{p-m-1} \sum_{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{p-1}}^{\rho-1} E_{\mu_1}^{\lambda_1} E_{\mu_2}^{\lambda_2} \dots E_{\mu_{p-1}}^{\lambda_{p-1}} \Omega_{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{p-1}}^{\rho}, \quad 1 \leq m < p, \tag{5.10}$$

en la cual el producto no contiene ningún generador de ascenso de  $\mathcal{U}(p-1)$ .

Para obtener la fórmula general de los operadores  $L_r^m$ , debemos aplicar la condición (5.7) a los  $L_r^m$  de la forma (5.10) con  $\Omega_{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{p-1}}^{\rho}$  dado por (5.9). Con este fin definamos los

operadores

$$\mathcal{E}_{\mu, \mu'}^{\pm} = \mathcal{E}_{\mu}^{\pm} - \mathcal{E}_{\mu'}^{\pm} + \mu' - \mu \quad (5.11)$$

que satisfacen las relaciones

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\mu, \mu}^{\pm} &= -\mathcal{E}_{\mu, \mu}^{\pm} \quad , \\ \mathcal{E}_{\mu, \mu''} + \mathcal{E}_{\mu'', \mu'} &= \mathcal{E}_{\mu, \mu'} \quad , \end{aligned} \quad (5.12)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\mu, \mu}^+ &= \mathcal{E}_{\mu, \mu}^+ \\ \vee \\ [\mathcal{E}_{\mu, \mu'}, \mathcal{E}_{\mu''}^{\pm}] &= \{(\delta_{\mu'}^{\pm} - \delta_{\mu}^{\pm}) - (\delta_{\mu''}^{\pm} - \delta_{\mu}^{\pm})\} \mathcal{E}_{\mu''}^{\pm} \quad . \end{aligned} \quad (5.13)$$

Ahora, utilizando (4.27), obtenemos los eigenvalores

de  $\mathcal{E}_{\mu, \mu'}$ :

$$\mathcal{E}_{\mu, \mu'} |h_{\lambda, \nu}\rangle = (\omega_{\mu} - \omega_{\mu'} + \mu' - \mu) |h_{\lambda, \nu}\rangle \quad ; \quad 1 \leq \mu, \mu' < r \quad (5.14)$$

donde  $\omega_{\mu}$  y  $\omega_{\mu'}$  están dados por la ecuación (4.28). En el caso especial  $|h_{\lambda, \nu}\rangle = |\frac{h}{4}\rangle$  y  $1 \leq \mu, \mu' < r$ , se tiene de las ecs.

(5.11) y (4.30)

$$\mathcal{E}_{\mu, \mu'} |\frac{h}{4}\rangle = q_{\mu, \mu'} |\frac{h}{4}\rangle \quad ; \quad 1 \leq \mu, \mu' < r \quad , \quad (5.15)$$

donde

$$q_{\mu, \mu'} \equiv q_{\mu} - q_{\mu'} + \mu' - \mu \quad , \quad (5.16)$$

Además, de (4.22), es claro que

$$q_{\mu, \mu'} \begin{cases} > 0 & \text{si } \mu' > \mu \\ = 0 & \text{si } \mu' = \mu \\ < 0 & \text{si } \mu' < \mu \end{cases} \quad (5.17)$$

por lo que

$$\begin{aligned} q_{\mu', \mu} &= -q_{\mu, \mu'} \\ q_{\mu, \mu''} + q_{\mu'', \mu'} &= q_{\mu, \mu'} \quad . \end{aligned} \quad (5.18)$$

Mostraremos ahora que el operador

$$\begin{aligned} L_r^m &= \left( \sum_{\mu=0}^{r-m-1} \sum_{\mu_1 > \mu_2 > \dots > \mu_{m-1} > \mu_1 = m+1}^{\mu_1 = \mu} \mathcal{E}_{\mu_1}^m \mathcal{E}_{\mu_2}^m \dots \mathcal{E}_{\mu_{m-1}}^m \mathcal{E}_{\mu}^m \right) \\ &\quad \times \prod_{\mu=1}^r \mathcal{E}_{m, \mu}^{-s} \prod_{\mu=m-2}^{\mu-1} \mathcal{E}_{m, \mu} \quad ; \quad 1 \leq m < r \quad , \end{aligned} \quad (5.19)$$

que es un polinomio homogéneo de grado  $r-m$  en los operadores

$\mathcal{E}_{\mu}^{\pm}$  y  $\mathcal{E}_{m, \mu}$ , donde

$$\prod_{\mu=1}^{r-1} \mathcal{E}_{m, \mu} \equiv \mathbb{1} \quad , \quad (5.20)$$

satisface (5.7).



$$\begin{aligned}
 & + \left[ G_{m, \mu}^{n+1}, G_{m, \mu}^{m+1}, G_{m, \mu}^{m+1} \right] \left( \frac{H_{\mu}}{G_{\mu}} \right) \left( \frac{H_{\mu}}{G_{\mu}} \right) \left( \frac{H_{\mu}}{G_{\mu}} \right) \left( \frac{H_{\mu}}{G_{\mu}} \right) \\
 & = \left\{ \sum_{\mu=0}^{p-m-2} \frac{H_{\mu}}{G_{\mu}} \right\}_{\mu \geq 0, \mu_1 = m+2} \left( - \frac{H_{\mu}}{G_{\mu}} \right) \left( \frac{H_{\mu}}{G_{\mu}} \right) \left( \frac{H_{\mu}}{G_{\mu}} \right) \left( \frac{H_{\mu}}{G_{\mu}} \right) \\
 & \quad \times \prod_{i=1}^p \left( \frac{H_{\mu}}{G_{\mu}} \right) \left\{ \prod_{\mu=m+2}^{p-1} \left( \frac{H_{\mu}}{G_{\mu}} \right) \right\} \\
 & = \left\{ \sum_{\mu=0}^{p-m-2} \frac{H_{\mu}}{G_{\mu}} \right\}_{\mu \geq 0, \mu_1 = m+2} \left( \frac{H_{\mu}}{G_{\mu}} \right) \left( \frac{H_{\mu}}{G_{\mu}} \right) \left( \frac{H_{\mu}}{G_{\mu}} \right) \left( \frac{H_{\mu}}{G_{\mu}} \right) \left( \frac{H_{\mu}}{G_{\mu}} \right) \\
 & = 0
 \end{aligned}$$

c) Caso  $1 \leq \lambda < m$ .

$$\left[ G_{\lambda}^{n+1}, L_p^m \right] \left| \frac{H}{G} \right\rangle = \sum_{\mu=0}^{p-m-1} \frac{H_{\mu}}{G_{\mu}} \left( \frac{H_{\mu}}{G_{\mu}} \right) \left( \frac{H_{\mu}}{G_{\mu}} \right) \left( \frac{H_{\mu}}{G_{\mu}} \right) \left( \frac{H_{\mu}}{G_{\mu}} \right) \left( \frac{H_{\mu}}{G_{\mu}} \right)$$

$$= 0$$

Por tanto, hemos demostrado que los  $L_p^m$  definidos por (5.19) satisfacen la ec. (5.7). Observemos también que  $L_p^m$ , escrito en la forma <sup>(\*)</sup>

$$L_p^m = \sum_{\mu=m+2}^{p-1} \left( \frac{H_{\mu}}{G_{\mu}} \right) \sum_{\mu=0}^{p-m-2} \frac{H_{\mu}}{G_{\mu}} \left( \frac{H_{\mu}}{G_{\mu}} \right) \left( \frac{H_{\mu}}{G_{\mu}} \right) \left( \frac{H_{\mu}}{G_{\mu}} \right) \left( \frac{H_{\mu}}{G_{\mu}} \right) \quad (5.21)$$

satisface la ec. (5.5).

Se puede mostrar igualmente, siguiendo las líneas de la demostración (5.19), que  $L_p^m$  dado por (5.21) satisface (5.7) y por lo tanto también es un operador de descenso. Mostraremos después que  $L_p^m$  dada por (5.19) y (5.21) son iguales.

Notemos que la aparición del inverso del operador  $\sum_{\mu=0}^{p-1} \frac{H_{\mu}}{G_{\mu}}$  simplifica la notación, ya que cada factor en  $\prod_{i=1}^p \left( \frac{H_{\mu}}{G_{\mu}} \right)$  tiene su contraparte en  $\prod_{i=1}^{p-1} \left( \frac{H_{\mu}}{G_{\mu}} \right)$  que lo cancela.

Efectuando la suma sobre  $H_{\mu}$  en las fórmulas (5.19) y (5.21), obtenemos para la primera

$$L_p^m = \sum_{\mu=0}^{p-1} \left( \frac{H_{\mu}}{G_{\mu}} \right) \prod_{\lambda=\mu+2}^{p-1} \left( \frac{H_{\lambda}}{G_{\lambda}} \right) + \left[ \left( \frac{H_{\mu}}{G_{\mu}} \right), L_p^m \right] \prod_{\lambda=0}^{p-1} \left( \frac{H_{\lambda}}{G_{\lambda}} \right) \quad (5.22)$$

y para la segunda

$$L_p^m = \sum_{\mu=0}^{p-1} \left( \frac{H_{\mu}}{G_{\mu}} \right) \prod_{\lambda=\mu+1}^{p-1} \left( \frac{H_{\lambda}}{G_{\lambda}} \right) + \prod_{\lambda=0}^{p-1} \left( \frac{H_{\lambda}}{G_{\lambda}} \right) \left[ \left( \frac{H_{\mu}}{G_{\mu}} \right), L_p^m \right] \quad (5.23)$$

En ambos casos

$$L_p^m = \mathbb{1} \quad (5.24)$$

De la ecuación (5.22) obtenemos para  $n^2 = n-1$

$$\begin{aligned}
 L_p^m &= L_{p-1}^m \left( C_{p-1}^{n-1} \prod_{\lambda=p}^{n-1} \epsilon_{m\lambda} + [C_{p-1}^{n-1}, L_{p-1}^m] \epsilon_{m,p-1} \right) \\
 &= L_{p-1}^m C_{p-1}^{n-1} + C_{p-1}^{n-1} L_{p-1}^m \epsilon_{m,p-1} - C_{p-1}^{n-1} L_{p-1}^m \epsilon_{m,p-1} \\
 &= C_{p-1}^{n-1} L_{p-1}^m \epsilon_{m,p-1} - [L_{p-1}^m, C_{p-1}^{n-1}] \epsilon_{m,p-1} + C_{p-1}^{n-1} L_{p-1}^m \epsilon_{m,p-1} \\
 &= C_{p-1}^{n-1} L_{p-1}^m \epsilon_{m,p-1} - \epsilon_{m,p-1} (C_{p-1}^{n-1} L_{p-1}^m - L_{p-1}^m C_{p-1}^{n-1}) \epsilon_{m,p-1} \\
 &\quad + L_{p-1}^m C_{p-1}^{n-1} \\
 &= C_{p-1}^{n-1} L_{p-1}^m \epsilon_{m,p-1} - \epsilon_{m,p-1} C_{p-1}^{n-1} L_{p-1}^m \epsilon_{m,p-1} + L_{p-1}^m C_{p-1}^{n-1} \epsilon_{m,p-1} \\
 &\quad + L_{p-1}^m C_{p-1}^{n-1}
 \end{aligned}$$

$$L_p^m = C_{p-1}^{n-1} L_{p-1}^m \epsilon_{m,p-1} - \epsilon_{m,p-1} C_{p-1}^{n-1} L_{p-1}^m \epsilon_{m,p-1} + L_{p-1}^m C_{p-1}^{n-1} \epsilon_{m,p-1} + L_{p-1}^m C_{p-1}^{n-1} \quad (5.25)$$

y procediendo en forma análoga que en la ec. (5.23), se deduce para  $n^2 = p-1$ ,

$$L_p^m = C_{p-1}^{n-1} L_{p-1}^m \epsilon_{m,p-1} - \epsilon_{m,p-1} L_{p-1}^m C_{p-1}^{n-1} \quad (5.26)$$

Ya que de (5.19) y (5.21) obtenemos la expresión

$$L_{m+1}^m = C_{m+1}^m \quad (5.27)$$

se sigue entonces de la ec. (5.25) que  $L_p^m$  dada por (5.19) es igual a  $L_p^m$  dada por (5.21). En el caso particular en que

$n^2 = m$  se obtiene

$$L_p^m = \sum_{\mu=m}^{p-1} L_{p-1}^m C_{p-1}^{\mu} \prod_{\lambda=\mu+1}^{p-1} \epsilon_{m\lambda} = 0, \quad 1 \leq m < p, \quad (5.28)$$

$$L_p^m = \sum_{\mu=m}^{p-1} \left( \prod_{\lambda=\mu+1}^{p-1} \epsilon_{m\lambda} \right) C_{p-1}^{\mu} L_{p-1}^m, \quad 1 \leq m < p. \quad (5.29)$$

Debido a la hermiticidad de los generadores  $C_{\mu}^{\mu}$  ( $C_{\mu}^{\mu+1} = C_{\mu+1}^{\mu}$ ), observamos que los operadores de descenso  $L_p^m$  cuando son aplicados sobre  $\langle \frac{h}{q} |$  actúan como si fueran operadores de ascenso. De la ec. (4.31) se sigue que el resultado de esta acción es cero si los operadores pertenecen a  $\mathcal{U}(G_0)$ ; Usando la definición (5.24), encontramos también

$$\langle \frac{h}{q} | L_{p'}^m \equiv (L_{p'}^{m+1} | \frac{h}{q} \rangle)^+ = \delta_{p'}^m \langle \frac{h}{q} |, \quad 1 \leq p' \leq p. \quad (5.30)$$





por lo que de la definición de estos,

$$|h_1 \dots h_r \rangle_{q_1 \dots q_{n-1}, q_{n+1} \dots q_{r+1}} \equiv \int_{q_{n-1}}^{q_n} |h_1 \dots h_r \rangle_{q_1 \dots q_n, q_{n+1} \dots q_{r+1}} = (N_{q_{n-1}}^{q_n})^{-1} |h_1 \dots h_r \rangle_{q_1 \dots q_n, q_{n+1} \dots q_{r+1}} \quad (5.35)$$

De las ecs. (5.35) y (5.31) tenemos la siguiente relación para los coeficientes de normalización (5.36)

$$N_{q_{n-1}}^{q_n} = \langle h_1 \dots h_r |_{q_1 \dots q_{n-1}, q_{n+1} \dots q_{r+1}} |L_r |_{q_1 \dots q_n, q_{n+1} \dots q_{r+1}} \rangle = \prod_{\mu=1}^{r-1} \langle h_\mu |_{q_1 \dots q_{n-1}, q_{n+1} \dots q_{r+1}} |L_\mu |_{q_1 \dots q_n, q_{n+1} \dots q_{r+1}} \rangle$$

En base a estos resultados, es posible obtener la base vectorial normalizada  $|h_A\rangle$  a partir de una base normalizada de  $r$ -ésimo peso  $|h\rangle$ , utilizando los operadores de descenso  $L_\mu^-$ . Si denotamos los coeficientes generales de normalización por

$$N \begin{bmatrix} q_1 \dots q_{r-1} \\ h_1 \dots h_r \\ q_1' \dots q_{r-1}' \end{bmatrix} \equiv N_{q_1' \dots q_{r-1}'}^{q_1 \dots q_{r-1}} \quad (5.37)$$

tenemos que

$$|h_1 h_2 \dots h_r \rangle_{q_1 \dots q_{n-1}, q_{n+1} \dots q_{r+1}} = (N_{q_1 \dots q_{n-1}}^{q_n})^{-1} \prod_{\mu=1}^{r-1} (L_\mu^-)^{h_\mu - h_{\mu+1}} |h_1 \dots h_r \rangle_{q_1 \dots q_n, q_{n+1} \dots q_{r+1}} \quad (5.38)$$

Ahora podemos obtener la base normalizada  $|h_{\mu\nu}\rangle$  asociada a la RI  $[h_{\mu\nu}]$  de  $U(r)$ , a partir de su base normalizada de máximo peso

$$|h_{1r} \dots h_{rr} \rangle_{h_{1r} \dots h_{r-1,r}} \quad (5.39)$$

como

$$\begin{bmatrix} h_{1r} \dots h_{rr} \\ h_{1,r-1} \dots h_{r-2,r-2} \\ \dots \\ h_{12} h_{21} \\ \dots \\ h_{11} \end{bmatrix} = \left[ \prod_{\gamma=2}^r N \begin{bmatrix} h_{1\gamma} & h_{\gamma-1,\gamma} \\ h_{1,\gamma} & h_{\gamma,\gamma} \\ h_{1,\gamma-1} & h_{\gamma-2,\gamma-2} \end{bmatrix} \right]^{-1} (L_{-1})^{h_{1r} - h_{11}}$$

$$\times \prod_{\mu=1}^{r-1} (L_{\mu}^-)^{h_{\mu r} - h_{\mu,2}} \dots \prod_{\mu=1}^{r-1} (L_{\mu-1}^-)^{h_{\mu r-1} - h_{\mu, r-2}} \quad (5.40)$$

$$\times \prod_{\mu=1}^{r-1} (L_{\mu}^-)^{h_{\mu r} - h_{\mu, r-1}} \begin{bmatrix} h_{1r} & h_{1r} \\ h_{1r} & h_{1r} \\ h_{1r} & h_{1r} \\ \dots \\ h_{1r} & h_{1r} \end{bmatrix}$$

donde debemos notar que los operadores de descenso pertenecen a distintos subgrupos de  $\mathcal{U}(P)$  y deben mantenerse en el orden dado arriba.

Para determinar completamente los estados (5.40) solo nos resta evaluar las constantes de normalización; para ello utilizemos el resultado obtenido por Bohinsky para los elementos de matriz de  $\mathcal{C}_r^{(r)}$  con la convención de fase

$$\langle h_{\mu\nu} | \mathcal{C}_r^{(r)} | h_{\mu\nu} \rangle \geq 0, \quad (5.41)$$

que han sido calculados en la ref. (2) y que dan como resultado

$$\left\langle \begin{array}{c} h_{1r} \dots h_{1r} \\ h_{1r-2} \dots h_{r-2} \\ \dots \\ h_{1m} h_{1m-2} \dots h_{1m} \\ h_{1m-2} \dots h_{1m-2} \\ \dots \\ h_{11} \end{array} \right| \mathcal{C}_r^{(r)} \left| \begin{array}{c} h_{1r} \dots h_{1r} \\ h_{1r-2} \dots h_{r-2} \\ \dots \\ h_{1m} h_{1m-2} \dots h_{1m} \\ h_{1m-2} \dots h_{1m-2} \\ \dots \\ h_{11} \end{array} \right\rangle$$

$$= \prod_{\lambda=m+1}^{r-1} S(\lambda_{\lambda-1} - \lambda_{\lambda}) [h_{\lambda\lambda}, \lambda_{\lambda-1} (h_{\lambda\lambda}, \lambda_{\lambda-1} + 1)]^{-1/2} \times \prod_{\lambda=m+1}^r \left\{ \frac{\lambda-2}{\prod_{\kappa=1}^{\lambda-2} h_{\lambda, \lambda-1, \kappa, \lambda-2}} \cdot \frac{\lambda}{\prod_{\kappa=1}^{\lambda} (h_{\lambda, \lambda-1, \kappa, \lambda-1} - 1)} \right\}^{1/2} \quad (5.42)$$

donde

$$h_{\mu\nu, \mu'\nu'} \equiv h_{\mu\nu} - h_{\mu'\nu'} + \mu' - \nu', \quad (5.43)$$

y

$$S(x) = \begin{cases} 1 & \text{para } x \geq 0 \\ -1 & \text{para } x < 0 \end{cases} \quad (5.44)$$

De (5.36) y (5.42), obtenemos los coeficientes de normalización para los operadores de descenso, como:

$$N \begin{matrix} q_1 & q_m & q_{r-1} \\ h_1 & h_r \\ q_1 & q_{m-1} & q_{r-1} \end{matrix} = \left[ \frac{q_1!}{\mu!} \frac{q_m!}{\mu!} \frac{q_{r-1}!}{\mu!} \right] \frac{1}{\mu!} \left( \frac{h_1 - q_1 + \mu - 1}{\mu} \right)! \frac{1}{\mu!} \left( \frac{h_r - q_r + \mu - 1}{\mu} \right)! \times \frac{1}{\mu!} \left( \frac{q_{m-1} - q_{r-1} + \mu - 1}{\mu} \right)! \times \left[ - \frac{q_1!}{\mu!} \frac{q_m!}{\mu!} \frac{q_{r-1}!}{\mu!} \right] \frac{1}{\mu!} \left( \frac{h_1 - q_1 + \mu - 1}{\mu} \right)! \frac{1}{\mu!} \left( \frac{h_r - q_r + \mu - 1}{\mu} \right)! \frac{1}{\mu!} \left( \frac{q_{m-1} - q_{r-1} + \mu - 1}{\mu} \right)! \quad (5.45)$$

Si consideramos números  $q_m''$  con la propiedad  $q_m'' \leq q_m \leq q_{r-1}$ , de la ec. (5.40) tenemos que

$$\begin{aligned} \left| \begin{matrix} h_1 & \dots & h_r \\ q_1 & \dots & q_{r-1} \end{matrix} \right\rangle &= \left( N \begin{matrix} q_1 & q_m'' & q_{r-1} \\ h_1 & h_r \\ q_1 & q_{m-1} & q_{r-1} \end{matrix} \right) \frac{1}{\mu!} \left( \frac{h_1 - q_1 + \mu - 1}{\mu} \right)! \frac{1}{\mu!} \left( \frac{h_r - q_r + \mu - 1}{\mu} \right)! \\ &= \left( N \begin{matrix} q_1 & q_m'' & q_{r-1} \\ h_1 & h_r \\ q_1 & q_{m-1} & q_{r-1} \end{matrix} \right) \left( N \begin{matrix} q_1 & q_m'' & q_{r-1} \\ h_1 & h_r \\ q_1 & q_{m-1} & q_{r-1} \end{matrix} \right) \frac{1}{\mu!} \left( \frac{h_1 - q_1 + \mu - 1}{\mu} \right)! \frac{1}{\mu!} \left( \frac{h_r - q_r + \mu - 1}{\mu} \right)! \\ &\quad \times \left| \begin{matrix} h_1 & h_r \\ q_1 & q_{r-1} \end{matrix} \right\rangle \\ &= \left( N \begin{matrix} q_1 & q_{m-1} & q_{r-1} \\ h_1 & h_r \\ q_1 & q_{m-1} & q_{r-1} \end{matrix} \right) \left( N \begin{matrix} q_1 & q_{m-1} & q_{r-1} \\ h_1 & h_r \\ q_1 & q_{m-1} & q_{r-1} \end{matrix} \right) \frac{1}{\mu!} \left( \frac{h_1 - q_1 + \mu - 1}{\mu} \right)! \frac{1}{\mu!} \left( \frac{h_r - q_r + \mu - 1}{\mu} \right)! \end{aligned} \quad (5.46)$$

de donde

$$N \begin{matrix} q_1 & \dots & q_{m-1} \\ h_1 & \dots & h_{r-1} \end{matrix} = N \begin{matrix} q_1 & \dots & q_{m-1} \\ h_1 & \dots & h_{r-1} \end{matrix} N \begin{matrix} q_1 & q_m'' & q_{r-1} \\ h_1 & h_r \\ q_1 & q_{m-1} & q_{r-1} \end{matrix} \quad (5.47)$$

Aplicando sucesivamente (5.45) y (5.47) obtenemos los coeficientes mas generales de los operadores de descenso como :

$$\begin{aligned} N \begin{bmatrix} q_1 & q_{r-1} \\ h_1 & h_r \\ q_1 & q_{r-1} \end{bmatrix} &= \prod_{m=1}^{r-1} \begin{bmatrix} q_1 & q_{m-1} & q_m & q_{m+1} & \dots & q_{r-1} \\ h_1 & & & & & h_r \\ q_1 & q_{m-1} & q_m & q_{m+1} & \dots & q_{r-1} \end{bmatrix} \\ &= \prod_{m=1}^{r-1} \frac{q_m}{q_m - q_{m-1} + 1} N \begin{bmatrix} q_1 & q_{m-1} & q_m & q_{m+1} & \dots & q_{r-1} \\ h_1 & & & & & h_r \\ q_1 & q_{m-1} & q_m & q_{m+1} & \dots & q_{r-1} \end{bmatrix} \\ &= \left[ \prod_{\mu > \lambda = 1}^{r-1} \frac{(q_\lambda - q_\mu + \mu - \lambda)!}{(q_\lambda' - q_\mu' + \mu - \lambda)!} \right] \prod_{\mu \geq \lambda = 1}^{r-1} \frac{(h_\lambda - q_\mu' + \mu - \lambda)!}{(h_\lambda - q_\mu - \mu - \lambda)!} \\ &\quad \times \prod_{\mu > \lambda = 1}^r \frac{(q_\lambda - h_\mu + \mu - \lambda - 1)!}{(q_\lambda' - h_\mu + \mu - \lambda - 2)!} \end{aligned} \quad (5.48)$$

de donde, como caso particular, obtenemos los coeficientes de normalización que aparecen en la ec. (5.40)

$$N \begin{matrix} h_1 & h_{r-1} \\ h_1 & h_r \\ q_1 & q_{n-1} \end{matrix} = \left[ \prod_{\lambda \neq \mu} \frac{(h_\lambda - q_\mu + \mu - \lambda)!}{(q_\lambda - q_\mu + \mu - \lambda)!} \cdot \prod_{\lambda < \mu} \frac{(h_\lambda - h_\mu + \mu - \lambda - 1)!}{(q_\lambda - h_\mu + \mu - \lambda - 1)!} \right]^{1/2} \quad (5.40)$$

## SECCION 6.

## ESTADOS CON ESPIN E ISOESPIN BIEN DEFINIDOS.

La cadena de grupos (4.8) no da lugar a estados con espín e isoespín bien definidos; con la finalidad de obtener estados que tengan al espín e isoespín como buenos números cuánticos substituyamos los índices  $\alpha, \beta$  del operador por los índices dobles  $\alpha\alpha'$  y  $\beta\beta'$  e introduzcamos las matrices de Pauli en coordenadas cartesianas, a las que agregamos la matriz unidad <sup>(6.1)</sup>

$$N_3 = N_8 = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad N_1 = N_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (6.1)$$

$$N_4 = N_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad N_6 = N_7 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

Estas matrices satisfacen las relaciones

$$M_1 M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = M_3, \\ N_j M_k = i \epsilon_{jkm} M_m, \quad N_3 N_4 = i \epsilon_{34m} M_m, \quad \epsilon_{jkl} = 1, 2, 3, \quad (6.2)$$

donde los renglones y las columnas se han etiquetado por  $\alpha, \alpha'$  respectivamente para las  $M$ 's y por  $\beta, \beta'$  respectivamente para las  $N$ 's.

Tomando las siguientes combinaciones lineales de los generadores de  $U(4)$ ,

$$Q = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{\alpha\alpha'} (M_{\alpha\alpha})_{\alpha'\alpha'}^2 - (N_3)_{\alpha'\alpha'}^2 \in \frac{\alpha'\alpha'}{\alpha\alpha} = \frac{1}{\sqrt{2}} \in \frac{\beta\beta'}{\beta\beta} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad (6.3)$$

$$S_K = \frac{1}{2} \sum_{\alpha\alpha'} \sum_{\beta\beta'} (M_{\alpha\alpha})_{\beta\beta'}^2 - (N_4)_{\beta\beta'}^2 \in \frac{\alpha'\alpha'}{\alpha\alpha} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad (6.4)$$

$$T_K = \frac{1}{2} \sum_{\alpha\alpha'} \sum_{\beta\beta'} (M_{\alpha\alpha})_{\beta\beta'}^2 - (N_5)_{\beta\beta'}^2 \in \frac{\alpha'\alpha'}{\alpha\alpha} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad (6.5)$$

$$R_{jk} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha\alpha'} \sum_{\beta\beta'} (M_{\alpha\alpha})_{\beta\beta'}^2 - (N_k)_{\beta\beta'}^2 \in \frac{\alpha'\alpha'}{\alpha\alpha} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad (6.6)$$

notamos que debido a las propiedades de las matrices  $M_{\alpha\alpha}$  y  $N_{\beta\beta}$  los operadores  $Q, S_K, T_K, R_{jk}$  son linealmente independientes y se pueden usar como generadores alternativos de  $U(4)$ .

De las relaciones de conmutación entre los generadores  $\in \frac{\alpha'\alpha'}{\alpha\alpha}$  se tiene

$$\begin{aligned}
 [S_j, S_k] &= \frac{1}{4} \sum_{r,s,t,c} (U_r)^T (U_s) U_c^T U_c \dots \\
 &= \frac{1}{4} \sum_{r,s,t,c} (U_r)^T (U_s) U_c^T U_c \dots \\
 &= \frac{1}{4} \sum_{r,s,t,c} \left( \frac{1}{2} (U_r)^T (U_s) U_c^T U_c \dots \right) \\
 &= \frac{1}{4} \sum_{r,s,t,c} \left( \epsilon_{jkr} (U_r)^T (U_s) U_c^T U_c \dots \right) + \frac{1}{4} \sum_{r,s,t,c} \left( \epsilon_{jkr} (U_r)^T (U_s) U_c^T U_c \dots \right) \\
 &= \epsilon_{jkr} S_r
 \end{aligned} \tag{6.7}$$

Análogamente

$$[T_j, T_k] = -\epsilon_{jkr} T_r \tag{6.8}$$

$$[S_j, T_k] = 0 \tag{6.9}$$

Como  $S_j$  y  $T_k$  satisfacen las relaciones de conmutación de un momento angular y conmutan entre sí, vemos entonces que  $S_1, S_2$  y  $S_3$  son los generadores de un subgrupo SU(2) asociado al espín, mientras que  $T_1, T_2$  y  $T_3$  generan otro subgrupo SU(2) asociado con el isoespín.

Es en ocasiones más conveniente trabajar en la base esférica, por lo que introducimos las matrices de Pauli en estas coordenadas,<sup>(5)</sup>

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad M_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad M_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \tag{6.10}$$

a partir de las cuales encontramos que los operadores  $S_1, T_2, T_3$  tienen la misma expresión que  $S_2, T_1, T_3$  en (6.4), (6.5) y (6.6) salvo que ahora los índices  $\bar{1}$  y  $\bar{2}$  toman los valores  $-1, 0, 1$  y además no aparecen los factores  $1/2$ . Es sencillo ver que los operadores  $S_1$  y  $T_3$  se pueden escribir en la forma

$$\begin{aligned}
 S_0 &= \frac{1}{2} \sum_{r=1,2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}_{rr}^T \epsilon_{0r}^r = \frac{1}{2} \sum_{r=1,2} \left( \epsilon_{01}^1 \epsilon_r^r - \epsilon_{02}^2 \epsilon_r^r \right) = \frac{1}{2} (\epsilon_1^1 + \epsilon_2^2 - \epsilon_1^1 - \epsilon_2^2), \\
 S_1 &= -\frac{1}{\sqrt{2}} (\epsilon_1^1 + \epsilon_2^2) \\
 S_{-1} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\epsilon_1^1 - \epsilon_2^2)
 \end{aligned} \tag{6.11}$$

$$T_0 = \frac{1}{2} (C_1^2 + C_3^2 - C_2^2 - C_4^2)$$

$$T_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}} (C_1^2 - C_3^2) \quad (6.11)$$

$$T_{-2} = \frac{1}{\sqrt{2}} (C_2^2 + C_4^2)$$

Por tener un significado físico más directo, utilizaremos los estados clasificados por la cadena  $U(4) \supset U(2) \times U(2)$  en vez de usar la caracterización canónica. De este modo, nos interesan los estados

$$| \lambda \mu, \nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4 \rangle ; (S, M_S, T, M_T) \quad (6.12)$$

donde  $S$ ,  $M_S$ ,  $T$  y  $M_T$  son números cuánticos asociados al espín, su proyección en el eje  $Z$ , al isoespín y su respectiva proyección;  $\lambda$  es una etiqueta extra, conectada con el número de veces que aparece la representación  $SU_3, T, M_T$  en la representación  $\lambda \mu, \nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4$  con que caracterizamos las RI de  $U(4)$ . De acuerdo con esto y con (6.11), el espín y el isoespín asociados al estado de máximo peso de la representación irreducible  $\lambda \mu, \nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4$  están dados por:

$$S = \frac{1}{2} \{ \nu_1 + \nu_2 - \nu_3 - \nu_4 \} \quad (6.13)$$

$$T = \frac{1}{2} \{ \nu_1 - \nu_2 + \nu_3 - \nu_4 \} \quad (6.14)$$

Los estados (6.12) se pueden obtener entonces a partir del estado de máximo peso en  $U(4)$ . Para obtenerlos construyamos operadores  $M_S^{\pm}$  y  $M_T^{\pm}$  que tengan las propiedades

$$M_S^{\pm} | \lambda \mu, \nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4 \rangle ; (S, M_S, T, M_T) \rangle = \sum_{p'} B_{p'} | \lambda \mu, \nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4 \rangle ; (S \pm 1, M_S \pm 1, T, M_T) \rangle \quad (6.15)$$

$$M_T^{\pm} | \lambda \mu, \nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4 \rangle ; (S, M_S, T, M_T) \rangle = \sum_{p''} A_{p''} | \lambda \mu, \nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4 \rangle ; (S, M_S, T \pm 1, M_T \pm 1) \rangle \quad (6.16)$$

Observemos que  $M_S^{\pm}$  no cambia la representación  $\lambda \mu, \nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4$  de  $U(4)$  y solo afecta al índice  $S$ , por lo que debe estar formado por combinaciones lineales de los productos de  $T_0$  y  $T_{\pm 2}$ .



La elección más simple es suponer que  $M$  es una combinación lineal de  $\sum_{q=0}^{\infty} (s-q)! T_{-1}^q / q!$ . Exigiremos además que se cumplan las condiciones

$$S_0 M_S^{S'} |s, s', (s, s', T)\rangle = S' M_S^{S'} |s, s', (s, s', T)\rangle \quad (6.17)$$

y

$$S_1 M_S^{S'} |s, s', (s, s', T)\rangle = 0 \quad (6.18)$$

y estas se satisfacen únicamente si se incluyen operadores  $S_{\pm}$  en  $M_S^{S'}$ . Como  $S_1$  anula el efecto de  $S_+$  y  $S_0$  es esencialmente equivalente a un factor multiplicativo tenemos que el operador más general  $M_S^{S'}$  que satisface (6.17) se puede escribir como :

$$M_S^{S'} = \sum_{q=0}^{\infty} \langle 1, s, q, s'-q | s', s' \rangle \sum_{q=0}^{\infty} (s-q)! T_{-1}^q / q! (S_{-1})^{s-s'+q} \quad (6.19)$$

donde para satisfacer (6.18) el conmutador  $[M_S^{S'}, S_1]$  debe ser igual a cero. Este conmutador proporciona una relación de recurrencia para  $A_q$ , dando el resultado final

$$M_S^{S'} = \sum_{q=0}^{\infty} \langle 1, s, q, s'-q | s', s' \rangle \sum_{q=0}^{\infty} (s-q)! T_{-1}^q / q! \times \left[ \frac{(s+s'-q)!}{(s-s'+q)! (s!)!} \right]^{1/2} (\sqrt{2} S_{-1})^{s-s'+q} \quad (6.20)$$

Si siguiendo el mismo método se encuentra que el operador  $M_Z^{S'}$  tiene la expresión

$$M_Z^{S'} = \sum_{q=0}^{\infty} \langle 1, T, q, T'-q | T', T' \rangle \sum_{q=0}^{\infty} (T-q)! T_{-1}^q / q! \times \left[ \frac{(T+T'-q)!}{(T-T'+q)! (2T)!} \right]^{1/2} (\sqrt{2} T_{-1})^{T-T'+q} \quad (6.21)$$

Con la ayuda de los operadores  $M_S^{S'}$ ,  $M_Z^{S'}$  de los generadores de descenso  $S_{-1}$  y  $T_{-1}$  podemos construir todos los estados (6.12).

## SECCION 7.

## OPERADORES DE INTERCAMBIO.

En esta sección vamos a utilizar el formalismo matemático que hemos desarrollado en base a la teoría de grupos para estudiar el problema de los operadores de intercambio. Nuestro objetivo es expresar estos operadores en términos de los operadores de espín, de isospín y de Casimir del grupo  $U(6)$  y obtener entonces los eigenvalores de los operadores de intercambio.

Recordemos que una fuerza central con efectos de intercambio se describe mediante el operador

$$I = \sum_{i < j} (V^W + \frac{1}{2} P_{ij}^T - \frac{1}{2} P_{ij}^S + \frac{1}{2} P_{ij}^A + \frac{1}{2} P_{ij}^I) \quad (7.1)$$

donde los parámetros  $V^W$ ,  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{2}$  y  $\frac{1}{2}$  indican el nombre con que se designa cada tipo de potencial ( $W$  = Wigner,  $B$  = Bartlett,  $H$  = Heisenberg,  $M$  = Majorana).

En el límite de una fuerza central de largo alcance, podemos proponer  $V(r_{ij}) = -V_0$ , ( $V_0 = \text{cte.}$ ) y la interacción se puede escribir en este caso

$$I = -V_0 \sum_{i < j} A_{ij} P_{ij}^{(x)} \quad , \quad i < j, \quad (7.2)$$

donde  $A_0 = W$ ,  $A_1 = B$ ,  $A_2 = -H$ ,  $A_3 = M$  y las formas explícitas de los operadores son

$$P_{ij}^{(0)} = 1, \quad (7.3)$$

$$P_{ij}^{(1)} = P_{ij}^T = \frac{1}{2} (1 + 4 \vec{S}_i \cdot \vec{S}_j), \quad (7.4)$$

$$P_{ij}^{(2)} = P_{ij}^S = \frac{1}{2} (1 + 4 \vec{S}_i \cdot \vec{T}_j), \quad (7.5)$$

$$P_{ij}^{(3)} = P_{ij}^A = -\frac{1}{4} (1 + 4 \vec{S}_i \cdot \vec{S}_j) (1 + 4 \vec{T}_i \cdot \vec{T}_j), \quad (7.6)$$

donde los eigenvalores de  $S_z$  (y  $T_z$ ) son  $1/2$  y  $-1/2$ .

Con la ayuda de la relación (2.7), podemos escribir la interacción de intercambio en segunda cuantización

$$I = -V_0 \sum_{i < j} A_{ij} P_{ij}^{(x)}, \quad (7.7)$$

donde

$$P_{ij}^{(x)} = \frac{1}{2} \sum_{\substack{\nu_1 \nu_2 \\ \nu_1 \nu_2}} \langle \nu_1 \nu_1, \nu_2 \nu_2 | P_{ij}^{(x)} | \nu_1' \nu_1', \nu_2' \nu_2' \rangle \begin{pmatrix} \nu_1' \nu_1' \\ \nu_1 \nu_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_2' \nu_2' \\ \nu_2 \nu_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \sum_{\nu_1 \nu_2} \begin{pmatrix} \nu_1' \nu_1' \\ \nu_1 \nu_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_2' \nu_2' \\ \nu_2 \nu_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_1' \nu_2' \\ \nu_1 \nu_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_1 \nu_2 \\ \nu_1' \nu_2' \end{pmatrix} \quad (7.8)$$

con los operadores  $\hat{Q}$  dados por

$$C_{\tau'z'} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{\mu, \nu} \langle \mu, \nu | \tau' z' \rangle \hat{Q}_{\mu\nu} \quad (7.9)$$

Para  $\hat{Q}^{(0)}$  obtenemos de (7.3) y (7.6)

$$\begin{aligned} \hat{Q}^{(0)} &= \frac{1}{2} \sum_{\mu, \nu} \langle \mu, \nu | \tau' z' \rangle \langle \mu, \nu | \tau' z' \rangle \left( C_{\tau'z'}^{(0)} - \delta_{\tau'z'} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \sum_{\mu, \nu} \langle \mu, \nu | \tau' z' \rangle \right) \left( \sum_{\mu, \nu} \langle \mu, \nu | \tau' z' \rangle - 1 \right) = \frac{1}{2} \left( \sum_{\mu, \nu} \langle \mu, \nu | \tau' z' \rangle \right)^2 - \frac{1}{2} \end{aligned} \quad (7.10)$$

Para  $\hat{Q}^{(1)}$  tenemos

$$\hat{Q}^{(1)} = \frac{1}{2} \sum_{\mu, \nu} \langle \mu, \nu | \tau' z' \rangle \langle \mu, \nu | \tau' z' \rangle \sum_{\mu', \nu'} \langle \mu', \nu' | \tau' z' \rangle \left( C_{\tau'z'}^{(1)} - \delta_{\tau'z'} \right) \quad (7.11)$$

y de (7.4) el elemento de matriz tiene el valor

$$\begin{aligned} \langle \mu, \nu | \hat{Q}^{(1)} | \mu', \nu' \rangle &= \frac{1}{2} \sum_{\mu'', \nu''} \langle \mu, \nu | \tau' z' \rangle \langle \mu'', \nu'' | \tau' z' \rangle \sum_{\mu''', \nu'''} \langle \mu''', \nu''' | \tau' z' \rangle \langle \mu''', \nu''' | \tau' z' \rangle \\ &= \frac{1}{2} \delta_{\mu, \mu'} \delta_{\nu, \nu'} + \frac{1}{2} \sum_{\mu'', \nu''} \langle \mu, \nu | \tau' z' \rangle \langle \mu'', \nu'' | \tau' z' \rangle \langle \mu'', \nu'' | \tau' z' \rangle \end{aligned} \quad (7.12)$$

por lo que

$$\hat{Q}^{(1)} = \frac{1}{4} \hat{n}(\hat{n}-1) + \frac{1}{2} \sum_{\mu, \nu} \langle \mu, \nu | \tau' z' \rangle \langle \mu, \nu | \tau' z' \rangle = \frac{1}{4} \hat{n}^2 - \frac{1}{4} \hat{n} \quad (7.13)$$

Para  $\hat{Q}^{(2)}$  y  $\hat{Q}^{(3)}$  obtenemos, haciendo un análisis similar,

$$\hat{Q}^{(2)} = \frac{1}{4} \hat{n}^2 - \hat{n} + \tau^2 \quad (7.14)$$

$$\hat{Q}^{(3)} = 2\hat{n} - \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{4} \hat{n}^2 + \hat{s}^2 + \hat{t}^2 + 4 \sum_{j,k} \hat{t}_{jk} \hat{t}_{jk} \right] \quad (7.15)$$

Definamos ahora un tensor  $X_{qr}$  en  $\mathcal{U}(4)$  por la relación<sup>(14)</sup>

$$X_{qr} = \sum_{\tau, z} (M_q)_{\tau}^{\tau'} (M_r)_{z}^{\tau''} \langle \tau' z' | \tau z \rangle \langle \tau'' z'' | \tau z \rangle \quad (7.16)$$

a partir de la cual calculamos

$$\begin{aligned} \sum_{qr} X_{qr} X_{qr} &= \sum_{\tau, z} \sum_{\tau', z'} \sum_{\tau'', z''} (M_q)_{\tau}^{\tau'} (M_r)_{z}^{\tau''} (M_q)_{\tau'}^{\tau'''} (M_r)_{z'}^{\tau'''} \langle \tau' z' | \tau z \rangle \langle \tau'' z'' | \tau z \rangle \\ &= \sum (M_q)_{\tau}^{\tau''} (M_q)_{\tau''}^{\tau'} (M_r)_{z}^{\tau'''} (M_r)_{z'}^{\tau'''} \langle \tau' z' | \tau z \rangle \langle \tau'' z'' | \tau z \rangle \\ &= 4 \sum_{\tau, z} \sum_{\tau', z'} \langle \tau' z' | \tau z \rangle \langle \tau z | \tau' z' \rangle \\ &= 4 \mathcal{P}(4) \end{aligned} \quad (7.17)$$

donde  $\mathcal{P}(4)$  es el operador de Casimir del grupo  $\mathcal{U}(4)$ .

De (7.3), (7.4), (7.5) y (7.6) vemos que  $\lambda_{00} = 1/2$ ,  $\lambda_{10} = 2/3$ ,  $\lambda_{20} = 2/3$  y  $\lambda_{jk} = 4 \delta_{jk}$  de modo que

$$\sum_{\sigma \tau} \lambda_{\sigma \tau} X_{\sigma \tau} = \dots \quad (7.1)$$

de donde inferimos

$$P(2) = 2\hat{n} - \frac{1}{2} P(1) \quad (7.19)$$

Veremos ahora que existe una relación entre los operadores de Casimir de los grupos  $U(r)$  y  $U(4)$ . Consideremos la expresión

$$\begin{aligned} P(r) + P(4) &= \sum_{\mu\mu', \tau\tau'} C_{\mu\mu'}^{\mu'} C_{\tau\tau'}^{\tau} + \sum_{\mu\mu', \tau\tau'} C_{\mu\mu'}^{\mu'} C_{\tau\tau'}^{\tau} \\ &= \sum_{\mu\mu', \tau\tau'} \left\{ b_{\mu\tau}^+ b^{\mu'\tau'} \left[ \delta_{\mu\mu'} \delta_{\tau\tau'} - b_{\mu\tau}^+ b_{\mu'\tau'}^+ + b_{\mu\tau}^+ b_{\mu'\tau'}^+ \right] \right\} \\ &= \sum_{\mu\mu', \tau\tau'} \left\{ b_{\mu\tau}^+ b^{\mu'\tau'} \left( \delta_{\mu\mu'} \delta_{\tau\tau'} - b_{\mu\tau}^+ b_{\mu'\tau'}^+ + b_{\mu\tau}^+ b_{\mu'\tau'}^+ \right) \right\} \\ &= \sum_{\mu\mu', \tau\tau'} \left\{ b_{\mu\tau}^+ b^{\mu'\tau'} \left( -\delta_{\mu\mu'} \delta_{\tau\tau'} + \delta_{\mu\mu'} \delta_{\tau\tau'} \right) + b_{\mu\tau}^+ b^{\mu'\tau'} \int_{\mu\mu'}^{\mu'} \right\} \\ &\quad + b_{\mu\tau}^+ b^{\mu'\tau'} b_{\mu'\tau'}^+ b^{\mu\tau} \\ &= \sum_{\mu\mu', \tau\tau'} b_{\mu\tau}^+ b^{\mu'\tau'} + \sum_{\mu\mu', \tau\tau'} C_{\mu\mu'}^{\mu'} C_{\tau\tau'}^{\tau} b^{\mu\tau} \\ &= (r+4) \sum_{\mu\mu', \tau\tau'} b_{\mu\tau}^+ b^{\mu'\tau'} = (r+4) \sum_{\mu\mu', \tau\tau'} C_{\mu\mu'}^{\mu'} C_{\tau\tau'}^{\tau} = (r+4) \hat{n} \end{aligned}$$

de donde

$$P(4) = (r+4) \hat{n} - P(r) \quad (7.20)$$

Combinando todos estos resultados en la ec. (7.7) encontramos que el operador de intercambio de largo alcance puede escribirse como :

$$J = -\sqrt{6} \left\{ \frac{1}{2} W \hat{n} (\hat{n}-1) + \frac{1}{4} (B-H) \hat{n} (\hat{n}-1) + B S^2 - H T^2 - \frac{1}{2} M \hat{n} + \frac{1}{2} P(r) \right\} \quad (7.21)$$

Este operador es diagonal en la base (6.12) y, dada una RI  $[h_1, \dots, h_r]$  de  $U(r)$  tal que  $h_1 + h_2 + \dots + h_r = M$ , tiene asociado el eigenvalor  $(16)$

$$-\sqrt{6} \left\{ \frac{1}{2} W N(N-1) + \frac{1}{4} (B-H) N(N-1) + B S(S+1) - H T(T+1) + \frac{1}{2} M \sum_{i=1}^r h_i \right\} \quad (7.22)$$

La expresión (7.22) para el eigenvalor del operador de intercambio resulta de gran utilidad en el cálculo de propiedades nucleares.

## SECCION 8 . MODELO DE INTERACCION DE APAREAMIENTO.

El objetivo que nos proponemos alcanzar en esta sección es desarrollar un modelo para la capa nuclear 2s1d que combine la interacción cuadrupolar, base del modelo de Elliott, con una interacción de apareamiento definida como aquella interacción que es distinta de cero solo entre partículas que están acopladas a momento angular cero; en forma matemática esto quiere decir

$$\langle 2s1d | V | 2s1d \rangle = V_0 \delta_{M,0} \delta_{M',0} \delta_{M'',0} \quad (8.1)$$

el potencial de interacción en este modelo, que conoceremos como modelo de apareamiento, estará dado por :

$$V = -V_0 \left[ \frac{1}{2} Q^2 + \frac{1}{2} P^2 \right] \quad (8.2)$$

La razón de que se escoja una combinación lineal entre las interacciones cuadrupolar y de apareamiento es que  $Q^2$  y  $P^2$  dan correlaciones similares a los potenciales de largo y corto alcance respectivamente <sup>(15,19)</sup>.

De las discusiones sostenidas en capítulos anteriores sabemos que la interacción  $Q^2$  se puede diagonalizar en un esquema cuyos estados estén clasificados de acuerdo a la cadena de grupos  $U(6) \supset O(6) \supset O(3)$  donde  $U(6)$  es el grupo de simetrías de un oscilador armónico y  $O(3)$  es el grupo de rotaciones en tres dimensiones asociado al momento angular orbital.

Como mostraremos mas adelante la interacción  $P^2$  es diagonal con respecto a un conjunto de estados que se pueden clasificar de acuerdo a la cadena  $O(6) \supset O(5) \supset O(3)$ ; aquí  $O(6)$  y  $O(5)$  se refieren a los grupos ortogonales de seis y cinco dimensiones respectivamente .

En las subsecciones que siguen discutiremos un método para determinar las bases en que son diagonales las interacciones  $Q^2$  y  $P^2$  y construiremos explícitamente estas bases para el caso particular en que se tengan dos partículas.

## (i) CONSTRUCCION DE LA BASE QUE DIAGONALIZA LA INTERACCION CUADRUPOLEAR.

En el capítulo anterior se ha mostrado que los estados de  $N$  nucleones clasificados de acuerdo con la cadena de subgrupos  $U(3) \supset U(2) \supset O(3)$  puede denotarse por

$$|[k] \alpha(k_1, k_2) \omega L, \beta \gamma / \beta \sigma T, \tau M_3 \rangle \quad (8.3)$$

donde  $[k]$  determina la RI de  $U(3)$ ,  $(k_1, k_2)$  la RI de  $U(2)$ ,  $\omega$  la RI de  $O(3)$ ,  $\alpha$  y  $\beta$  son índices de repetición,  $L, M_3, \beta, \sigma, T$  denotan el momento angular orbital, el espín y el isoespín respectivamente.

Con el propósito de hacer resaltar el hecho de tener como potencial común el del oscilador armónico, introduzcamos los operadores de creación y aniquilación en unidades tales, que  $\hbar = m = \omega = 1$ ,  $\hbar =$  constante de Planck entre  $2\pi$ ,  $m =$  masa de la partícula y  $\omega$  frecuencia del oscilador.

$$a_{\pm}^{\dagger} = \frac{1}{\sqrt{2}} (x_{\pm} - i p_{\pm}) ; \quad a_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}} (x_{\pm} + i p_{\pm}) \quad \pm = -1, 0, 1, \quad (8.4)$$

donde  $x_{\pm}$  y  $p_{\pm}$  denotan las componentes esféricas de los vectores de posición y momento. Estos operadores  $a_{\pm}^{\dagger}$  y  $a_{\pm}$  satisfacen las relaciones de conmutación

$$[a_{\pm}^{\dagger}, a_{\pm}^{\dagger}] = [a_{\pm}, a_{\pm}] = 0, \quad [a_{\pm}^{\dagger}, a_{\pm}] = [a_{\pm}^{\dagger}, a_{\mp}] = [a_{\pm}, a_{\mp}^{\dagger}] = 0 \quad (8.5)$$

Los estados de partícula independiente asociados a una capa  $\nu$  del oscilador se pueden caracterizar ya sea por los números cuánticos  $\nu, \ell, m$  ( $\ell = \nu, \nu-2, \nu-4, \dots, 1$  ó  $0$ , y  $m = \ell, \ell-1, \ell-2, \dots, -\ell$ ), ó mediante los números no negativos  $n_1, n_0, n_{-1}$  ( $n_1 + n_0 + n_{-1} = \nu$ ) que determinan el número de cuantos en las direcciones  $1, 0$  y  $-1$  respectivamente. Los correspondientes estados se pueden obtener a partir del estado base del oscilador armónico aplicando respectivamente los operadores

$$(-1)^{\frac{1}{2}(\nu-\ell)} \left[ \frac{\sqrt{4\pi}}{\sqrt{(\nu+1)! (\nu-1)!}} \right] (a_{\pm}^{\dagger})^{\nu-\ell} (a_{\mp})^{\ell} \psi_0 \quad (8.6)$$

$$\left( \frac{1}{\sqrt{4\pi}} Y_{lm}(\alpha^+) \right) \left( \alpha^+ \right)^l \quad (8.7)$$

donde  $Y_{lm}(\alpha^+)$  es un armónico esférico sólido en las componentes de  $\alpha^+$ . Utilizando las ecs. (9.6) y (8.7), Chacón y De Llano<sup>(20)</sup> encontraron una fórmula cerrada para los paréntesis de transformación  $\langle n_1 n_2 n_3 | l m \rangle$  que conectan los estados de partícula independiente en ambas representaciones, para el caso  $m > 0$  la fórmula está dada por

$$\langle n_1 n_2 n_3 | l m \rangle = (-1)^{l-m} 2^{-m} \sqrt{\frac{(2l)!}{(l+m)! (l-m)!}} \times \delta_{n_1, n_2, n_3} \dots \quad (9.8)$$

en el caso  $m < 0$  la fórmula anterior sigue siendo válida con solo intercambiar  $l$  por  $-l$  y  $l-m$  por  $l$ . En la tabla (8.1) presentamos explícitamente los paréntesis de transformación para la capa 2s-1d con  $l=2$ , que serán de utilidad mas adelante.

| $ l m \rangle$<br>$ n_1 n_2 n_3 \rangle$ | $ 222 \rangle$ | $ 221 \rangle$ | $ 220 \rangle$              | $ 200 \rangle$              | $ 211 \rangle$ | $ 222 \rangle$ |
|--|----------------|----------------|-----------------------------|-----------------------------|----------------|----------------|
| $ 200 \rangle$                           | 1              | 0              | 0                           | 0                           | 0              | 0              |
| $ 11 \rangle$                            | 0              | 1              | 0                           | 0                           | 0              | 0              |
| $ 101 \rangle$                           | 0              | 0              | $\frac{1}{\sqrt{3}}$        | $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ | 0              | 0              |
| $ 020 \rangle$                           | 0              | 0              | $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ | $-\frac{1}{\sqrt{3}}$       | 0              | 0              |
| $ 011 \rangle$                           | 0              | 0              | 0                           | 0                           | 1              | 0              |
| $ 002 \rangle$                           | 0              | 0              | 0                           | 0                           | 0              | 1              |

TABLA 8.1  $\langle n_1 n_2 n_3 | l m \rangle$   $l=2$

En el análisis siguiente consideraremos los estados de partícula independiente caracterizados por los números cuánticos  $n_1, n_2, n_3$  para la parte angular y  $\mu$  para la parte de espín-isospín. Además con el objeto de simplificar el análisis se denotan los conjuntos  $(1, 2, 3)$  y  $(4, 5, 6)$  por los índices  $\mu$  y  $\nu$ , respectivamente, utilizando la siguiente convención:

|                   |     |     |     |     |     |     |
|-------------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| $\mu$             | 1   | 2   | 3   | 4   | 5   | 6   |
| $(n_1, n_2, n_3)$ | 200 | 110 | 101 | 020 | 011 | 002 |

|                         |     |     |     |     |
|-------------------------|-----|-----|-----|-----|
| $\nu$                   | 1   | 2   | 3   | 4   |
| $(\mu_1, \mu_2, \mu_3)$ | 001 | 010 | 100 | 111 |

(8.9)

Por lo tanto el estado de partícula independiente lo podemos representar

$$|\psi_{n_1 n_2 n_3 \mu}\rangle \longrightarrow |n, \mu\rangle \quad (8.10)$$

donde  $c_{\mu\nu}^+$  es un operador fermiónico de creación y  $c_{\mu\nu}$  es el correspondiente operador de aniquilación. Un estado de  $N$  fermiones está dado por

$$|\psi\rangle = c_{11}^+ c_{12}^+ \dots c_{\mu_1 \nu_1}^+ c_{\mu_2 \nu_2}^+ \dots c_{\mu_N \nu_N}^+ |0\rangle \quad (8.11)$$

Una forma alternativa de escribir (8.11), utilizando los operadores (1E)

$$\Delta_{\mu, \mu_1}^{s_1, s_2} = \sum_{\nu_1, \nu_2} c_{\nu_1 \nu_2}^+ \mathcal{P}_{\nu_1 \nu_2} (b_{\mu_1 \nu_1}^+, c_{\mu_2 \nu_2}^+, \dots, c_{\mu_N \nu_N}^+) \quad (8.12)$$

( $\mathcal{P}_{\nu_1 \nu_2}$  = permutaciones de los índices  $\nu_1, \nu_2$ ), es:

$$|\psi\rangle = \prod_{\mu=1}^6 \frac{1}{(h_\mu)!} \Delta_{\mu, \mu}^{1, 2, \dots, h_\mu} |0\rangle, \quad 1 \leq h_\mu \leq 4 \quad (8.13)$$

no es difícil mostrar que los operadores  $\Delta$  y  $\mathcal{P}$  cumplen la condición de conmutación

$$[c_{\mu\nu}^+, \Delta_{\mu, \mu}^{1, 2, \dots, h_\mu}] = \delta_{\mu\nu}^{1, 2, \dots, h_\mu} \Delta_{\mu, \mu}^{1, 2, \dots, h_\mu} + \dots + \delta_{\mu\nu}^{1, 2, \dots, h_\mu} \Delta_{\mu, \mu}^{1, 2, \dots, h_\mu} \quad (8.14)$$

En la ec. (8.13) tenemos que  $h_\mu \leq 4$  para  $\mu=1, 2, \dots, 6$ , mas aún, este polinomio (8.13) es de máximo peso en la RI  $[\lambda_1, \lambda_2]$  de  $\mathcal{U}(6)$  y en la RI  $[\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3]$  de  $\mathcal{U}(4)$ . Usaremos este hecho para determinar la base de cualquier RI del grupo  $\mathcal{U}(6) \times \mathcal{U}(4)$ . En efecto, como (8.13) es el estado de máximo peso (EMP) en  $\mathcal{U}(6)$  y  $\mathcal{U}(4)$ , si se le aplican a (8.13) los generadores  $e_{\mu\nu}^{\mu_1 \mu_2}$ ,  $\mu_1 > \mu_2$ , que solo afectan la estructura del estado en el grupo  $\mathcal{U}(6)$ , se pueden determinar todos los posibles



estados en  $U(6)$ , con la característica de que estos estados son EMP en el grupo  $U_6$ . Si a los estados así obtenidos se aplican los generadores de descenso del grupo  $U_6$  se obtendrán todos los estados posibles en  $U(6)$ . No todos estos estados tienen buenos números cuánticos de espín e isoespín, la construcción de los estados que presentan estas características ha sido ampliamente discutida en la sección ( 6 ); allí vimos que para obtener los estados requeridos, estados clasificados según la cadena  $U(6) \supset U(3) \times U(3)$ , se deben aplicar a los polinomios simétricos los operadores  $T_{-1}$  y  $U_{-1}$ , ecc. ( 4.10 ) y ( 4.21 ); estos operadores tienen la propiedad de cambiar los valores de momento angular de espín  $T$  e isoespín  $T^3$  a espín  $T'$  e isoespín  $T'^3$ , respectivamente, manteniendo las máximas proyecciones de estos números en el eje z. Los estados con las distintas proyecciones de  $T$  y  $T^3$  se obtienen bajo la aplicación sucesiva de los operadores de descenso de los grupos  $U_3$  y  $SU_3$ , respectivamente, i.e.  $T_{-1}$  para  $U_3$  y  $U_{-1}$  para  $SU_3$ . Por lo tanto, aquí solo nos dedicaremos a la construcción de los estados en  $U(6)$  clasificados de acuerdo a los esquemas  $(\lambda, \mu)$  y  $O(b)$ .

Si aplicamos los operadores de descenso  $E_{\mu}^{\mu'}, \mu' < \mu$ , al EMP (8.13) se obtienen los estados

$$P_1 |0\rangle = \sum_{\mu_1, \mu_2} A_{\mu_1, \mu_2} \prod_{i=1}^n \Delta_{\mu_i}^{\mu_i'} \mu_i^{\mu_i'} |0\rangle \quad (9.15)$$

Sin embargo estos estados no están caracterizados por representaciones definidas de  $U(6)$  y  $O(6)$ . Para lograr esta clasificación de los estados (8.15) es necesario definir los operadores

$$D_{\mu}^{\mu'} = \sum_{\mu''} \langle \mu | a_{\mu}^{\dagger} a_{\mu''} | \mu' \rangle E_{\mu''}^{\mu'} \quad (9.16)$$

donde  $|\mu\rangle = |n_0, n_1, n_2; n_0, n_1, n_2\rangle = |2\rangle$ , y que obedecen las relaciones de conmutación

$$\begin{aligned} [D_{\mu}^{\mu'}, D_{\mu''}^{\mu'''}] &= \sum_{\mu''} \langle \mu | a_{\mu}^{\dagger} a_{\mu''} | \mu' \rangle \langle \mu'' | a_{\mu''}^{\dagger} a_{\mu'''} | \mu''' \rangle [E_{\mu''}^{\mu'} - E_{\mu'''}^{\mu''}] \\ &= \sum_{\mu''} \langle \mu | a_{\mu}^{\dagger} a_{\mu''} a_{\mu'''}^{\dagger} a_{\mu''} | \mu' \rangle [E_{\mu''}^{\mu'} - E_{\mu'''}^{\mu''}] \\ &= D_{\mu''}^{\mu'''} D_{\mu}^{\mu'} - D_{\mu}^{\mu'} D_{\mu''}^{\mu'''} \end{aligned} \quad (8.17)$$

y, por lo tanto, los nuevos operadores  $E_{\pm}$  con los generadores de un subgrupo  $I$  de  $U(2)$ . Estos operadores  $E_{\pm}$  se pueden clasificar como de ascenso, descenso y peso si  $E_{\pm} \psi = \lambda E_{\pm} \psi$  y  $E_0 \psi = \mu \psi$  respectivamente.

Los estados (9.15) serán de máximo peso en  $I$  si cumplen las condiciones

$$E_+ |P, l_0\rangle = f_+ |P, l_0\rangle, \quad E_0 |P, l_0\rangle = k_0 |P, l_0\rangle, \quad E_- |P, l_0\rangle = f_- |P, l_0\rangle \quad (9.18a)$$

$$E_{\pm}^2 |P, l_0\rangle = E_{\pm}^3 |P, l_0\rangle = \dots = 0 \quad (9.18b)$$

donde el conjunto de números  $(f_+, k_0, f_-)$  etiquetan la RI de  $I(2)$  y  $k_1 = f_+ - f_-$ ,  $k_2 = f_+$  es la correspondiente etiqueta de la RI  $(k_1, k_2)$  de  $su(2)$ .

Si requerimos que el polinomio  $P$  satisfaga las ecs. (9.18a) obtenemos el conjunto de ecuaciones

$$\begin{aligned} E_{\pm}^q |P, l_0\rangle &= \sum_{\mu} \sum_{\nu} \langle \mu | a_{\pm}^q | \nu \rangle A_{\mu} \Delta_{\mu, \nu}^{(q)} |P, l_0\rangle \\ &= \sum_{\mu} \sum_{\nu} \frac{1}{\mu! \nu!} \langle \mu | a_{\pm}^q | \nu \rangle \delta_{\mu, \nu}^{(q)} A_{\mu} \Delta_{\mu, \nu}^{(q)} |P, l_0\rangle \\ &= f_{\pm} \sum_{\mu} \frac{1}{\mu!} A_{\mu} \Delta_{\mu, \mu}^{(q)} |P, l_0\rangle, \quad q=1, 2, \dots \end{aligned} \quad (9.19)$$

y de (9.18b) el sistema de ecs.

$$\begin{aligned} \sum_{\mu} \langle \mu | a_{\pm}^q a_{\mp}^q | \mu \rangle A_{\mu} & \left[ \delta_{\mu, \mu}^{(q)} \Delta_{\mu, \mu}^{(q)} + \dots + \delta_{\mu, \mu}^{(q)} \Delta_{\mu, \mu}^{(q)} \right] \\ + \left\{ \delta_{\mu, \mu}^{(q)} \Delta_{\mu, \mu}^{(q)} + \dots + \delta_{\mu, \mu}^{(q)} \Delta_{\mu, \mu}^{(q)} \right\} & \quad (9.20) \\ + \left\{ \delta_{\mu, \mu}^{(q)} \Delta_{\mu, \mu}^{(q)} + \dots + \delta_{\mu, \mu}^{(q)} \Delta_{\mu, \mu}^{(q)} \right\} & \end{aligned}$$

Estas relaciones (9.19) y (9.20) conectan los coeficientes  $A_{\mu}$  entre si. Si podemos expresar cada uno de estos coeficientes en términos de uno solo, entonces la RI  $(f_+, k_0, f_-)$  de  $I(2)$  ocurrirá solo una vez en la RI dada de (9.6). Si este no es el caso se tendrá un conjunto, mayor que uno, de coeficientes  $A_{\mu}$  necesarios para determinar el resto de los coeficientes; Estas  $A_{\mu}$  nos dan el número de polinomios linealmente independientes, que se pueden hacer corresponder, con el índice  $\mu$  en (9.3). Para ortonormalizar estos polinomios se podría utilizar el método de Gram-Schmidt.

Cada estado construido de esta manera es un estado de máximo peso de  $U(2)$ , i.e. corresponde al momento angular más alto y con proyección  $M_L = L$  que se encuentre contenido en la representación  $(k_1, k_2)$  de  $SO(3)$ . Esta  $L$  es única y tiene el valor  $L = M_L = k_1$ .

Para obtener el estado  $|k_1, k_2, L, M_L\rangle$  del estado  $|[k] \kappa(k_1, k_2), L, M_L\rangle$  construimos el operador  $U_{L, M_L}^{(k)}$  con la propiedad

$$U_{L, M_L}^{(k)} | [k] \kappa(k_1, k_2), L, M_L \rangle = \sum_{\mu} U_{\mu, M_L}^{(k)} | [k] \kappa(k_1, k_2), L, \mu \rangle \quad (8.21)$$

Como  $U_{L, M_L}^{(k)}$ , no cambia la representación de  $SO(3)$ , debe ser una función de los generadores  $\{J_i\}$  de  $SO(3)$  (cc. (8.16)). Una forma alternativa de dar los generadores de  $U(2)$  es

$$J_m = -\sqrt{2} \sum_{q, q'} \langle 1, q, 1, q' | 2, 0 \rangle J_q J_{q'} \quad (8.22a)$$

$$Q_c = -\sum_{q, q'} \langle 1, q, 1, q' | 2, 0 \rangle J_q J_{q'} \quad (8.22b)$$

donde  $J_m$  y  $Q_c$  son los operadores de momento angular y cuadrupolar respectivamente. Entonces es claro que los cinco operadores  $Q_c$  son los únicos que pueden cambiar el número  $L$  al actuar sobre el ket en (8.21). La elección más simple de  $U_{L, M_L}^{(k)}$  es una combinación lineal de las  $Q_c$ , pero como simultáneamente se debe cumplir

$$J_0 U_{L, M_L}^{(k)} | [k] \kappa(k_1, k_2), L, M_L \rangle = L U_{L, M_L}^{(k)} | [k] \kappa(k_1, k_2), L, M_L \rangle \quad (8.23a)$$

$$J_{\pm 1} U_{L, M_L}^{(k)} | [k] \kappa(k_1, k_2), L, M_L \rangle = 0 \quad (8.23b)$$

se tienen que incluir operadores  $J_{\pm 1}$  en  $U_{L, M_L}^{(k)}$ , solo es necesario considerar el operador  $J_+$ , pues  $J_-$  es esencialmente equivalente a un operador multiplicativo y  $J_+$  cancela el efecto de  $J_-$ , entonces se propone

$$U_{L, M_L}^{(k)} = \sum_{c=0}^L A_c (J_+)^{L-c} Q_c \quad (8.24)$$

Por otro lado (8.23b) se cumple si

$$[J_+, U_{L, M_L}^{(k)}] = 0 \quad (8.25)$$

y de este conmutador se obtiene una relación de recurrencia para las  $A_c$ , que nos permite escribir a  $U_{L, M_L}^{(k)}$  como  $U_{L, M_L}^{(k)}$

$$\psi_{k_1, k_2, l}^{(0)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \psi_{k_1, k_2, l}^{(1)} + \psi_{k_1, k_2, l}^{(2)} \right) \quad (8.26)$$

Si tenemos el estado de máximo momento angular  $l$  y con máxima proyección  $M_L = l$  podemos obtener, aplicando el operador  $\hat{M}_{L\pm}^{(0)}$ , otros estados con momento angular  $l$  y  $M_L = l-1$  en la misma RI  $(k_1, k_2)$  de  $\psi_{k_1, k_2, l}^{(0)}$ . Los estados con distintos valores de  $M_L$  se pueden deducir de la aplicación repetida del operador de descenso  $\hat{M}_{L-}^{(0)}$ .

La interacción cuadrupolar

$$\hat{Q}^2 = \sum_{\mu=-2}^{+2} (-1)^\mu \hat{Q}_{\mu, -\mu} \quad (8.27)$$

se puede escribir en términos de operadores de Casimir de la cadena de subgrupos  $U(6) \supset U(3) \supset O(3)$ , i.e.

$$\hat{H}_0 = \sum_{\mu} \hat{Q}_{\mu, \mu} = \sum_{\mu} \hat{Q}_{\mu, -\mu} \quad (8.28a)$$

$$\hat{Q}^2 = \sum_{\mu} (-1)^\mu \hat{Q}_{\mu, -\mu} \hat{Q}_{\mu, \mu} \quad (8.28b)$$

y

$$\Gamma(\mathfrak{g}) = \sum_{\mu} \hat{Q}_{\mu, \mu} \hat{Q}_{\mu, \mu} \quad (8.28c)$$

donde  $\hat{H}_0$  y  $\Gamma(\mathfrak{g})$  son los operadores de Casimir de primer y segundo orden de  $U(3)$  y  $\hat{Q}^2$  es el operador de Casimir de segundo orden de  $O(3)$ , el resultado que se obtiene es

$$\hat{Q}^2 = \Gamma(\mathfrak{g}) - \frac{1}{2} \hat{J}^2 - \frac{1}{2} \hat{H}_0^2 \quad (8.29)$$

como los estados (8.3) se caracterizan por las RI de  $U(6)$  y  $O(3)$ , los operadores  $\Gamma(\mathfrak{g})$ ,  $\hat{J}^2$  y  $\hat{H}_0$  son diagonales con respecto a estos estados y el eigenvalor de  $\hat{Q}^2$  solo depende de  $k_1, k_2$  y  $l$ : este es  $Q^2$ :

$$E_{k_1, k_2, l} = \frac{2}{3} (k_1 + k_2)^2 - 2k_1(k_2 - 1) - \frac{1}{2} l(l+1) \quad (8.30)$$

Mas adelante, en la subsección (iii), ilustraremos este procedimiento evaluando estados de dos partículas clasificados de acuerdo al esquema  $U(6)$ .

(ii) CONSTRUCCION DE LA BASE QUE DIAGONALIZA LA INTERACCION DE APAREAMIENTO.

En esta subsección caracterizaremos los estados de partícula independiente en la capa  $\nu = 2$  para un potencial de oscilador armónico por los índices  $\mu, m$ , con el objeto de simplificar la notación denotamos al conjunto  $\psi_{\mu m}$  por el índice  $k$ .

|                |     |     |     |     |     |     |
|----------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| k              | 2   | 4   | 0   | -4  | 4   | 2   |
| $\psi_{\mu m}$ | 221 | 220 | 221 | 220 | 221 | 220 |

(8.31)

En el índice  $k$  debemos observar que  $-4 = 2$  y  $4 = 2$ .

Los operadores de creación y aniquilación (OCA), en esta representación, los denotaremos con un punto sobre ellos,  $\dot{c}_k$ ,  $\dot{c}_k^\dagger$ , para distinguirlos de los operadores que usamos en el párrafo anterior.

Los operadores  $\dot{c}_k$  y  $\dot{c}_k^\dagger$  se pueden escribir como combinaciones lineales de los OCA  $c_\mu$  y  $c_\mu^\dagger$  de acuerdo a

$$\dot{c}_{kS} = \sum_{\mu=1}^6 c_{\mu S} \langle \mu | k \rangle \tag{8.32a}$$

$$\dot{c}_{kS}^\dagger = \sum_{\mu=1}^6 c_{\mu S}^\dagger \langle k | \mu \rangle \tag{8.32b}$$

donde  $\langle \mu | k \rangle$  son los coeficientes dados en la tabla (8.1).

La conexión entre los generadores de  $U(6)$  determinados por los OCA con punto y los OCA sin punto es, claramente:

$$\dot{c}_k = \sum_{\mu=1}^6 c_\mu \langle \mu | k \rangle = \sum_{\mu=1}^6 c_\mu \langle k | \mu \rangle^* \tag{8.33}$$

De la definición de la interacción de apareamiento (8.1) es claro que

$$\begin{aligned} & \langle \psi_{l_1 m_1} \psi_{l_2 m_2} | P | \psi_{l_1' m_1'} \psi_{l_2' m_2'} \rangle = \tag{8.34} \\ & = \sum_{j_1 j_2} \langle \psi_{l_1 m_1} \psi_{l_2 m_2} | j_1 j_2 \rangle \langle j_1 j_2 | P | j_1' j_2' \rangle \langle j_1' j_2' | \psi_{l_1' m_1'} \psi_{l_2' m_2'} \rangle \\ & = \langle \psi_{l_1 m_1} \psi_{l_2 m_2} | j_1 j_2 \rangle \langle \psi_{l_1' m_1'} \psi_{l_2' m_2'} | j_1' j_2' \rangle \langle j_1 j_2 | P | j_1' j_2' \rangle \\ & \quad \times \delta_{m_1 - m_2, m_1' - m_2'} \delta_{j_1, j_1'} \delta_{j_2, j_2'} \\ & = (-1)^{m_1 + m_1'} \delta_{m_1 - m_2, m_1' - m_2'} \delta_{j_1, j_1'} \delta_{j_2, j_2'} \langle j_1 j_2 | P | j_1' j_2' \rangle \end{aligned}$$

De tal manera que, la expresión de  $\hat{H}$  en segunda cuantización

es :

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \sum_{\substack{k_1, k_2, k_3, k_4 \\ k_1 + k_2 = k_3 + k_4}} \left( \sum_k \epsilon_k \right) \hat{b}_{k_1}^+ \hat{b}_{k_2}^+ \hat{b}_{k_3} \hat{b}_{k_4} \quad (9.35)$$

Como la forma bilineal

$$\sum_k (-i)^k \hat{b}_{k_3}^+ \hat{b}_{-k_2}^+ \quad (8.36)$$

es invariante ante transformaciones ortogonales en seis dimensiones  $(6)$ , inferimos que  $\hat{H}$  también lo es.

Definamos ahora un nuevo conjunto de OCA, que nos permitirá: 1) deducir fácilmente que la interacción de apareamiento es diagonal en el esquema de clasificación  $(M, \mu)$  y 2) reconocer directamente los operadores de descenso y ascenso de los grupos  $(6)$  y  $(2)$ . Este conjunto lo denotaremos con dos puntos,  $\hat{b}_{M\mu}^+$  y  $\hat{b}_{M\mu}$ ,  $M=2,1,0,-1,-2$  ( $M \neq -M$ ), y estarán conectados con los OCA de un punto por los paréntesis de transformación tabulados en la tabla (8.2).

| $M \setminus \mu$ | 2 | 1 | 0                    | 0                    | -1 | -2 |
|-------------------|---|---|----------------------|----------------------|----|----|
| 2                 | 1 | 0 | 0                    | 0                    | 0  | 0  |
| 1                 | 0 | 1 | 0                    | 0                    | 0  | 0  |
| 0                 | 0 | 0 | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ | 0  | 0  |
| -0                | 0 | 0 | $\frac{i}{\sqrt{2}}$ | $\frac{i}{\sqrt{2}}$ | 0  | 0  |
| -1                | 0 | 0 | 0                    | 0                    | 1  | 0  |
| -2                | 0 | 0 | 0                    | 0                    | 0  | 1  |

TABLA (8.2). Paréntesis de transformación  $(M, \mu | K)$  que conectan  $\hat{b}_{M\mu}^+$  con  $\hat{b}_{K\mu}$  y  $\hat{b}_{M\mu}$  con  $\hat{b}_{K\mu}^+$  por

$$\hat{b}_{M\mu}^+ = \sum_{K, \mu'} \hat{b}_{K\mu'}^+ (M, \mu | K, \mu') \quad \hat{b}_{M\mu} = \sum_{K, \mu'} \hat{b}_{K\mu'} (M, \mu | K, \mu')$$



es un hecho notable que la RI  $(\mu_1, \mu_2)$  aparezca solo una vez para cada RI  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$  de  $\mathcal{O}(s)$ . Además como  $\hat{A}_1^0 = \hat{A}_2^0$ ,  $\hat{A}_2^1 = \hat{A}_1^1$  y los generadores de ascenso de  $\mathcal{O}(s)$  son combinaciones lineales de los generadores de ascenso de  $\mathcal{O}(s)$  se concluye que el polinomio que satisface las condiciones (8.40) es el estado de máximo peso de la RI  $(\mu_1, \mu_2)$  de  $\mathcal{O}(s)$ .

Para obtener los estados de máximo peso de cada una de las RI  $(\mu_1, \mu_2)$ , Nagel y Moshinsky determinaron los operadores

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{F}}_1 = & (\hat{A}_1^2)^2 (\hat{A}_0^1)^2 \hat{A}_2^0 - \hat{A}_1^2 \hat{A}_0^2 \hat{A}_0^1 \hat{A}_2^0 (2\hat{A}_1^1 + 1) - \hat{A}_1^2 \hat{A}_0^1 \hat{A}_2^1 (\hat{A}_1^1 + \hat{A}_2^1 + 2) - \hat{A}_1^1 \hat{A}_0^2 \hat{A}_2^0 \\ & - \hat{A}_1^1 + 2 \} - (\hat{A}_0^2)^2 \hat{A}_2^0 (\hat{A}_1^1 + \hat{A}_2^1 + 4) \hat{A}_1^1 (\hat{A}_1^1 + \hat{A}_2^1 + 2) - \hat{A}_0^2 \hat{A}_1^1 \hat{A}_2^0 \hat{A}_1^1 (\hat{A}_1^1 + \hat{A}_2^1 + 4) \\ & \times (\hat{A}_2^1 + 1) (2\hat{A}_2^1 + 3) - \hat{A}_2^0 (\hat{A}_1^1)^2 \hat{A}_2^0 (\hat{A}_1^1 + 3) - \hat{A}_2^0 \hat{A}_1^1 \hat{A}_2^0 \hat{A}_1^1 (\hat{A}_1^1 + \hat{A}_2^1 + 4) \\ & \times (2\hat{A}_2^1 + 3) - \hat{A}_1^0 \hat{A}_0^1 (\hat{A}_2^1 + \hat{A}_2^1 + 2) (2\hat{A}_1^1 + 3) (\hat{A}_2^1 + 2) \\ & + \hat{A}_0^1 (\hat{A}_2^1 - \hat{A}_1^1 + 1) (\hat{A}_1^1 + \hat{A}_2^1 + 2) (\hat{A}_1^1 + \hat{A}_2^1 + 2) (\hat{A}_2^1 + 2) \\ & + \hat{A}_1^2 \hat{A}_0^1 \hat{A}_2^0 (\hat{A}_1^1 + \hat{A}_2^1 + 2) (2\hat{A}_2^1 + 3) \\ & + \hat{A}_0^2 \hat{A}_0^1 (\hat{A}_2^1 - \hat{A}_1^1 + 1) (\hat{A}_1^1 + \hat{A}_2^1 + 2) (2\hat{A}_2^1 + 3) \end{aligned} \quad (8.42)$$

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{F}}_2 = & \hat{A}_0^1 \hat{A}_0^2 \hat{A}_2^0 (2\hat{A}_1^1 + 1) + (\hat{A}_0^1)^2 \hat{A}_2^0 (\hat{A}_1^1 + \hat{A}_2^1 + 2) - \\ & - \hat{A}_0^2 \hat{A}_2^0 \hat{A}_2^0 (2\hat{A}_1^1 + 1) - (\hat{A}_0^1)^2 \hat{A}_2^1 \hat{A}_2^0 + \\ & + \hat{A}_0^1 \hat{A}_1^1 (2\hat{A}_2^1 + 1) (\hat{A}_2^1 + \hat{A}_2^1 + 2) - \hat{A}_0^1 \hat{A}_0^1 (2\hat{A}_1^1 + 1) (\hat{A}_1^1 + \hat{A}_2^1 + 2) \end{aligned} \quad (8.43)$$

que tienen las propiedades siguientes :

- 1) Al actuar  $\hat{\mathcal{F}}_1$  sobre el EMP de la RI  $(\mu_1, \mu_2)$  de  $\mathcal{O}(s)$  se obtiene el EMP de la RI  $(\mu_1 - 1, \mu_2)$  de  $\mathcal{O}(s)$ ; y
- 2) Al actuar  $\hat{\mathcal{F}}_2$  sobre el EMP de la RI  $(\mu_1, \mu_2)$  de  $\mathcal{O}(s)$  se obtiene el EMP de la RI  $(\mu_1, \mu_2 - 1)$ .

Los estados obtenidos al aplicar las  $\hat{\mathcal{F}}$  se pueden normalizar, por ejemplo, con el método de Gram-Schmidt.



En la forma anterior obtenemos unicamente los polinomios que son de máximo peso en  $\mathcal{O}(3)$  para toda partición  $(\mu_1, \mu_2)$  que satisfice (9.41). Por tanto, se desea construir un operador  $\mathbb{M}_{\mathcal{O}(3)}^{(3)}$  que permita obtener todos los estados de máximo peso en  $\mathcal{O}(3)$  que están contenidas en una RI dada de  $\mathcal{O}(3)$ . Con este fin combinemos los generadores de  $\mathcal{O}(3)$  como sigue:

$$\mathbb{J}_3 = \sqrt{\frac{3}{2}} \sum_{m,m'} \left( \begin{matrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & m & -m \end{matrix} \right) \left( \begin{matrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & m & -m \end{matrix} \right) \mathbb{J}_1^m \mathbb{J}_2^{-m} \quad (9.44a)$$

$$\mathbb{J}_z = \sqrt{\frac{3}{2}} \sum_{m,m'} \left( \begin{matrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & m & -m \end{matrix} \right) \left( \begin{matrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & m & -m \end{matrix} \right) \mathbb{J}_1^m \mathbb{J}_2^{-m} \quad (9.44b)$$

donde  $\mathbb{J}_1, \mathbb{J}_2, \mathbb{J}_3$  son los generadores del grupo  $\mathcal{O}(3)$ , mientras que  $\mathbb{T}_3, \dots, \mathbb{T}_3$  son los componentes de un tensor de Racah de orden tres. Como en la construcción de  $\mathbb{M}_{\mathcal{O}(3)}^{(3)}$  nos basamos en que las  $\mathbb{J}_z$  forman un tensor de Racah de orden dos, basta cambiar en (9.26)  $\mathbb{J}_z$  por  $\mathbb{T}_z$ , y 2 por 3 en los lugares apropiados para obtener el operador

$$\mathbb{M}_{\mathcal{O}(3)}^{(3)} = \sum_{\tau=3}^{-3} (-1)^\tau \frac{\Gamma(3+\tau)!}{2^{3+\tau} \tau!} \frac{(2-2+\tau)!(4+2+4)!(5-\tau)!}{(2-2+0)!(4+0+4)!(5-\tau)!} \quad (9.45)$$

Los estados con proyecciones de momento angular  $M_L$  distintas de  $L^2$  se pueden obtener aplicando repetidamente el operador de descenso  $L_{-1}$ . De tal manera que se ha descrito un procedimiento para generar la base de la parte espacial; para la parte de espín e isoespín se procede en la forma discutida en la sección (6).

Para finalizar este párrafo se da la expresión de la interacción de apareamiento en términos de los operadores de Casimir del esquema  $\mathcal{O}(3)$ .

Utilizando la ecuación (9.35) y las relaciones de anti-conmutación de los operadores fermiónicos tenemos

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{2} \sum_{H, H'} \left( \begin{matrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & H & -H \end{matrix} \right) \left( \begin{matrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & H & -H \end{matrix} \right) \mathbb{H}^H \mathbb{H}'^{-H} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{H, H'} \left( \begin{matrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & H & -H \end{matrix} \right) \left( \begin{matrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & H & -H \end{matrix} \right) \mathbb{H}^H \mathbb{H}'^{-H} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{H, H'} \left( \begin{matrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & H & -H \end{matrix} \right) \left( \begin{matrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & H & -H \end{matrix} \right) \mathbb{H}^H \mathbb{H}'^{-H} \end{aligned} \quad (9.46)$$

Se puede demostrar que existe una relación entre el operador de Casimir del grupo  $\mathcal{O}(3)$ ,  $\mathbb{C} = \sum \mathbb{H}^H \mathbb{H}'^{-H}$ , y el operador de Casimir de  $\mathcal{U}(6)$ ,  $\mathbb{I} = \sum \mathbb{H}^H \mathbb{H}'^{-H}$ , que es :

$$\begin{aligned} \Phi &= \sum_{HK^2} \tilde{\lambda}_{H^2} \tilde{\lambda}_{H^2} = \sum_{HK^2} \left( \frac{H^2}{2} - \frac{H}{2} \right) \tilde{\lambda}_{H^2} \tilde{\lambda}_{H^2} \\ &= 2P - 2 \sum_{HK^2} \tilde{\lambda}_{H^2} \tilde{\lambda}_{H^2} \end{aligned} \quad (3.47)$$

Por medio de (3.47) tenemos finalmente que el operador de apareamiento se puede escribir en la forma

$$P = \frac{1}{2} P - \frac{1}{4} \Phi - \frac{1}{2} N \quad (3.48)$$

Los operadores de Casimir  $P$  y  $\Phi$  son diagonales en el esquema (2) y sus eigenvalores son bien conocidos, por ejemplo, para la capa 2s-1d los eigenvalores de  $P$  están dados por

$$E_{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 h_i (h_i - 2) + 3N - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \lambda_i (\lambda_i + 1) \quad (3.49)$$

donde  $[h_1, \dots, h_3]$  es la etiqueta de la RI de  $h_i$ ,  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$  es la correspondiente etiqueta de la RI de  $U(6)$  y  $N$  determina el número de nucleones.

### (iii) EL CASO DE DOS PARTICULAS, APLICACIONES.

En las subsecciones anteriores hemos descrito el modelo de apareamiento en el caso general de  $N$  partículas, en dicha descripción se dedujo un conjunto de fórmulas matemáticas que son necesarias si se desea construir las BRI clasificadas según los esquemas  $SO(6)$  y  $SO(6)$ ; en estos esquemas son diagonales las interacciones cuadrupolar y de apareamiento respectivamente. Dedicamos este párrafo a ejemplificar el uso de tales fórmulas en el caso particular en que se tengan dos partículas ( $N=2$ ) fuera de capa cerrada. Antes de iniciar el análisis del caso  $N=2$  será útil recordar algunos resultados importantes obtenidos en capítulos anteriores.

- 1) Dado que la única RI de  $U(6)$  físicamente aceptable es la totalmente antisimétrica solo se deben considerar las RI de  $U(6)$  y  $U(4)$  que sean conjugadas entre sí, cap. (3).
- 2) El espín total  $S$  y el isoespín total  $T$  son iguales si la RI de  $U(6)$  es la totalmente antisimétrica y son distintos en el caso en que se tenga la RI totalmente simétrica de  $U(6)$ , cap. (3).
- 3) Las únicas RI de  $U(6)$  que se tienen para el caso de dos par-

tículas son la  $[2,0]$  y la  $[1,1]$ , que corresponden a las RI totalmente simétrica y antisimétrica respectivamente.

Las RI  $(k_1, k_2)$  de SU(3) que están contenidas en las RI  $[f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6]$  de U(6) se pueden obtener por el método discutido en el capítulo (4). En este capítulo se hizo énfasis en el hecho de que una partícula en la capa 2s-1d tiene dos cuantos de energía, es decir su función de onda se transforma como un tensor simétrico de segundo rango en el espacio de SU(3), y se puede representar por medio de la etiqueta (2,0) en SU(3). Con dos partículas en la capa 2s-1d, hemos visto que se tienen dos posibles particiones de U(6),  $[2]$  y  $[1,1]$ . Las posibles representaciones  $(k_1, k_2)$  de SU(3) están dadas por el producto

$$[2] \times [2] = [4,0] \oplus [3,1] \oplus [2,2] \quad (8.50)$$

$$[2] \times [1,1] = [3,0] \oplus [2,1] \oplus [1,2]$$

Esta ecuación dice que el producto de funciones de onda de dos partículas se transforman bajo transformaciones unitarias de SU(3) de acuerdo a la mezcla de representaciones (4,0), (3,1) y (2,2). En este ejemplo es sencillo determinar cuales de estas representaciones  $(k_1, k_2)$  pertenecen a la partición simétrica  $[2]$  y cuales a la partición antisimétrica  $[1,1]$ . En efecto, de la fórmula para la dimensión de la representación  $[f]$  del grupo unitario U(s)

$$\dim [f]_s = \prod_{1 \leq i < j \leq s} \frac{(f_i - f_j + i - j)}{(i - j)} \quad (8.51)$$

donde  $f_i$  es el número de cuadros en la  $i$ -ésima fila, encontramos

$$\dim [2] = 21, \quad (8.52)$$

$$\dim [1,1] = 15.$$

A partir de la ecuación (8.51) se puede deducir la siguiente fórmula para la dimensión de la representación de U(3):

$$\dim [k_1, k_2, k_3] = \frac{1}{2} [k_1 - k_2 + 1][k_1 - k_2 + 2][k_2 - k_3 + 1] \quad (8.53)$$

y la dimensión de la representación  $(k_1, k_2)$  de SU(3) estará dada por

$$\dim (k_1, k_2) = \frac{1}{2} [k_1 - k_2 + 2][k_1 - k_2 + 1][k_2 + 1] \quad (8.54)$$

por lo que

$$\dim(4,0) = 15,$$

$$\dim(3,1) = 15,$$

$$\dim(2,2) = 6.$$

(8.55)

Es claro que las RI  $(4,0)$  y  $(2,2)$  de  $SU(3)$  están contenidas en la RI  $\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$  de  $U(6)$  mientras que la RI  $(3,1)$  de  $SU(3)$  lo está en la RI  $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$  de  $U(6)$ .

Argumentos similares permiten derivar los momentos angulares  $L$  que pertenecen a la RI  $(l_1, l_2)$  de  $SU(3)$ . En efecto, como un estado de un cuanto se transforma con respecto a  $SU(3)$  de acuerdo a  $(l_1, l_2) = (1,0)$  y tiene momento angular  $L=1$ . Estados de dos cuantos pueden pertenecer a las representaciones  $(2,0)$  y  $(1,1)$  de  $SU(3)$  (estas representaciones se pueden obtener del producto  $\square \times \square = \square \oplus \square$ ) y a las representaciones  $L=0,1$  ó  $2$  de  $O(3)$ , de acuerdo con las reglas de acoplamiento de momentos angulares.

Debido a que las dimensiones de las representaciones  $(2,0)$  y  $(1,1)$  son:

$$\dim(2,0) = 6,$$

$$\dim(1,1) = 3,$$

(8.56)

y como la dimensionalidad de la representación  $L$  de  $O(3)$  es justamente  $2L+1$ . Se concluye que las funciones que se transforman de acuerdo a la representación  $(l_1, l_2) = (2,0)$  de  $SU(3)$  pueden tener  $L=0,2$  y aquellas que se transforman de acuerdo a  $(l_1, l_2) = (1,1)$  solo pueden tener  $L=1$ .

En estados con tres cuantos el proceso para determinar las  $L$  contenidas en las representaciones  $(l_1, l_2)$  de  $SU(3)$  es similar; el siguiente diagrama muestra el producto de tres estados con un cuanto, el primer renglón presenta el patrón de Young de los estados, la segunda línea muestra la RI  $(l_1, l_2)$  de  $SU(3)$  y la tercer línea muestra las  $L$  permitidas para ese estado.

$$\begin{array}{l} \square \times \square \times \square = \square \times \square \oplus \square \times \square \\ \text{a) } (1,0) \times (1,0) \times (1,0) \quad (2,0) \times (1,0) \quad (1,1) \times (1,0) \quad (8.57) \\ \text{b) } (1,1) \times (1,1) \times (1,1) \quad (2,2) \times (1,1) \quad (1,2) \times (1,1) \\ \quad \quad \quad (1^2, 2, 3) \quad (1, 3) \end{array}$$

$$= \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} \\ (3,0) \quad (2,1) \quad (1,2) \\ (1,3) \quad (2,2) \quad (3,1) \end{array}$$

Los estados con cuatro cuantos se obtienen del mismo modo, el siguiente diagrama muestra el cálculo.

$$\begin{aligned} \square \times \square \times \square \times \square &= \square \square \times \square - \square \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} \times \square + \square \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} \times \square \\ & \quad (3,0) \times (4,0) - \square (2,1) \times (4,0) + \square (3,0) \times (3,1) \\ & \quad (3,0,0) \times (3,0,0) - \square (2,0,1) \times (3,0,0) + \square (3,0,0) \times (2,0,1) \\ &= \square \square \square - \square \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} + \square \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} \\ & \quad (4,0) \quad (3,1) \\ & \quad (3,0,0) \quad (3,0,1) \quad (2,0,2) \end{aligned} \tag{8.58}$$

De la ec. (8.58) se puede concluir que las funciones que se transforman de acuerdo a la RI (4,0) de SU(3) pueden tener L=0,2,4, las que se transforman de acuerdo a la RI (2,2) pueden tener L=0,2, y las de (3,1) tienen L=1,2,3.

Para determinar cuales RI  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$  de O(6) están contenidas en las RI  $[2]$  y  $[1,1]$  de U(6) utilizaremos los siguientes resultados:

1.- La función de onda de una partícula en la capa 2s-1d se transforma como un vector en el espacio de O(6), y se puede representar por la etiqueta (1,0,0) de O(6).

2.- La dimensión de la RI  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$  de O(6) está dada por la fórmula:

$$\dim(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \begin{cases} \frac{1}{6} (\lambda_1 - \lambda_2 + 1)(\lambda_1 - \lambda_2 + 2)(\lambda_2 - \lambda_3 + 1)(\lambda_2 - \lambda_3 + 2) & \lambda_3 = 0 \\ \frac{1}{12} (\lambda_1 - \lambda_2 + 1)(\lambda_1 + 2)^2 (\lambda_2 - \lambda_3)^2 (\lambda_1 + \lambda_2 - 3) & \lambda_3 \neq 0 \end{cases} \tag{8.59}$$

Como las posibles representaciones  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$  de O(6) de dos partículas están dadas por el producto

$$\begin{array}{ccc} \dim & 6 & \times & 6 & = & 1 & + & 5 & + & 15 & \\ & & & & & & & & & & \end{array} \tag{8.60}$$

se infiere que las RI (0,0,0) y (2,0,0) de O(6) están contenidas en la RI  $[2]$  de U(6) mientras que la RI (1,1,0) de O(6) lo está en la RI  $[1,1]$  de U(6).

Como las RI  $(\mu_1, \mu_2)$  de O(5) que están contenidas en la RI  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$  satisfacen

$$\lambda_1 \geq \mu_1 \geq \lambda_2 \geq \mu_2 \geq |\lambda_3| \tag{8.61}$$

se deduce fácilmente que : i) la RI (0,0) de O(5) está contenida en la RI (0,0,0) de O(6), ii) las representaciones (2,0), (1,0) y (0,0) están contenidas en la RI (2,0,0), iii) las RI (1,1) y (1,0) lo están en la RI (1,1,0).

El grupo O(5), intermedio entre O(6) y O(3), simplifica notablemente el cálculo de las L permitidas para cada RI ( , , ) de O(6). En efecto, se ha demostrado, con la ec. (8.58), que los momentos angulares L permitidos para estados de dos partículas son :

$$L = 0^2, 1, 2^3, 3, 4 \quad (8.62)$$

En el caso de que no se tengan partículas las únicas representaciones posibles de U(6), O(6), O(5) y O(3) son : [0], (0,0,0), (0,0) y (0), respectivamente. En el caso de estados de una partícula las posibles representaciones son: [1] de U(6), (1,0,0) de O(6), (0,0) y (1,0) de O(5). Como la RI (0,0) solo permite el momento angular L=0 y  $\dim [1] = 6$ , y como además la partícula se puede mover en las órbitas 2s (L=0) ó 1d (L=2) se infiere que la RI (1,0) de O(5) contiene al momento angular L=2. Aplicando la fórmula de dimensionalidad (8.59) a las RI (2,0,0) y (1,1,0) de O(6) obtenemos que

$$\begin{aligned} \dim (2,0,0) &= 20, \\ \dim (1,1,0) &= 15. \end{aligned} \quad (8.63)$$

Debido a que las L contenidas en la RI [1,1] de U(6) son L=1,2,3, ec. (8.58), y a que L=2 es la única L contenida en la representación (1,0) de O(5) se deduce que las L permitidas en la RI (1,1) de O(5) son L=1,3. Observando que :

1.-  $\dim [2] = 21$ ,  $\dim (0,0,0) = 1$  y  $\dim (2,0,0) = 20$ .

2.- La RI [2] de U(6) contiene los momentos angulares  $L=0^2, 2^2, 4$ , ec. (8.58).

3.- L=0 si se tiene la RI (0,0) de O(5) y L=2 si se tiene la RI (1,0).

Concluimos que las únicas L contenidas en la RI (2,0) de O(5) son L=0,2.

Los momentos angulares totales de estados de dos partículas se pueden obtener aplicando la relación

$$J = J_1 + J_2, \quad J_1 = L_1 + S_1, \quad J_2 = L_2 + S_2 \quad (8.64)$$

La tabla (8.3) muestra los resultados de los cálculos anteriores. En dicha tabla se anexa la clasificación según el esquema J-J que se discute brevemente más adelante.

| $U_{3,4}$ | $SU_3^{(1)}$ | $U_6$   | $SU_3$      | $R_3$   | $SU_3^{(2)}$ | $U_6$ | $R_6$   | $R_3$       | $SU_3$      | $U_{12}$ | $U_6$   | $U_3$ | $U_2$ |       |         |         |
|-----------|--------------|---------|-------------|---------|--------------|-------|---------|-------------|-------------|----------|---------|-------|-------|-------|---------|---------|
|           | $T$          | $[h]$   | $(l, k, j)$ | $L$     | $S$          | $J$   | $[h]$   | $(l, k, j)$ | $L$         | $S$      | $J$     | $[g]$ | $[g]$ | $[g]$ | $[g]$   |         |
| [11]      | 0            | [11]    | (31)        | 1       |              | 1     | [11]    | (110)       | 1           |          | 1       | [2]   | [2]   | [0]   | [1]     | 1, 2, 5 |
|           |              |         |             | 2       | 0            | 2     |         |             | 2           | 2        | [1]     |       | [1]   | [1]   | 1, 2, 3 |         |
|           |              |         |             | 3       |              | 3     |         |             | 3           |          |         |       |       |       |         |         |
|           |              | 0       |             | 1       | [2]          | (000) | 0       |             | 1           | [1]      | [2]     |       | [1]   | 2, 3  |         |         |
|           |              | 2       |             | 1, 2, 3 |              |       | 0       |             | 1           | [1]      | [2]     |       | [1]   | 1, 2  |         |         |
|           |              | 4       | 1           | 3, 4, 5 |              |       | 2       | 1           | 1, 2, 3, 3' | [0]      | [1]     |       | [1]   | 1, 2  |         |         |
|           | 0            |         | 1           | [2]     | (200)        | 2     |         | 1, 2, 3, 3' | 4           |          | 3, 4, 5 | [0]   | [0]   | [2]   | 1       |         |
|           | 2            |         | 1, 2, 3     |         |              |       |         |             |             |          |         |       |       |       |         |         |
|           | 2            |         | 1, 2, 3     |         |              |       |         |             |             |          |         |       |       |       |         |         |
|           | 1            | [2]     | (40)        | 0       |              | 0     | [2]     | (000)       | 0           |          | 0       | [11]  | [1]   | [0]   | [1]     | 0, 2, 4 |
|           |              |         |             | 2       |              | 2     |         |             | 0           | 0        | 0       |       | [1]   | [1]   | [1]     | 1, 2, 3 |
|           |              |         |             | 4       | 0            | 4     |         |             | 2           |          | 2'      |       | [1]   | [0]   | [1]     | 2, 3    |
| 0         |              |         | 0           | [11]    | (110)        | 1     |         | 0, 1, 2     | 4           |          | 4       |       | [0]   | [1]   | [1]     | 0, 2    |
| 2         |              |         | 2           |         |              | 1     | 1       | 1, 2, 3     | [0]         | [1]      | [1]     |       | 1, 2  |       |         |         |
| 1         |              |         | 0, 1, 2     |         |              | 3     |         | 2, 3, 4     | [0]         | [0]      | [1]     |       | 0     |       |         |         |
| 0         |              | 0       | [11]        | (31)    | 2            | 1     | 1, 2, 3 |             |             |          |         |       |       |       |         |         |
| 2         |              | 2, 3, 4 |             |         |              |       |         |             |             |          |         |       |       |       |         |         |
| 3         |              | 2, 3, 4 |             |         |              |       |         |             |             |          |         |       |       |       |         |         |

Tabla (8.3). Clasificación de estados de dos partículas en la capa 2s-1d de acuerdo a los esquemas SU(3), O(6) y J-J.

Consideremos, pues, el caso en que los estados se caracterizan por las RI [2,0] de U(6) y (4,0) de SU(3) en el espacio de configuración. En el espacio de espín-isoespín la partición es [1,1] y se tienen dos estados S=0, T=1 y S=1, T=0.

Los kets que etiquetan a estos estados pueden escribirse como

$$|[2] (4,0) L, S=0, 3M_L, T=1 \rangle \tag{8.65}$$

y

$$|[2] (4,0) L, S=1, 3M_L, T=0 \rangle \tag{8.66}$$

respectivamente.

El estado (8.65) es combinación lineal de los monomios

$$\Delta_{1,1} S_{1,1} \tag{8.67}$$

los índices  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  se deducen de la aplicación de los operadores de  $U(4)$  que dan el espín e isoespín totales,

$$\begin{aligned} T_{3c} &= \frac{1}{2} (\lambda_1^2 - \lambda_2^2) \\ C_{3c} &= \frac{1}{2} (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 - \lambda_3^2 - \lambda_4^2) \\ T_{+c} &= -\frac{1}{\sqrt{2}} (\lambda_1 - \lambda_2) \\ C_{+c} &= -\frac{1}{\sqrt{2}} (\lambda_1^2 + \lambda_2^2) \end{aligned} \quad (8.68)$$

y los índices  $\mu_1$  y  $\mu_2$  se evalúan aplicando los generadores de peso y de descenso de  $U(6)$ . En efecto, pidiendo que se cumplan las condiciones

$$\begin{aligned} T_{3c} \Delta_{\mu_1 \mu_2}^{(\lambda_1 \lambda_2)} &= \Delta_{\mu_1 \mu_2}^{(\lambda_1 \lambda_2)} \quad \text{y} \quad T_{+c} \Delta_{\mu_1 \mu_2}^{(\lambda_1 \lambda_2)} = 0 \\ T_{+c} \Delta_{\mu_1 \mu_2}^{(\lambda_1 \lambda_2)} &= 0 \quad \text{y} \quad C_{+c} \Delta_{\mu_1 \mu_2}^{(\lambda_1 \lambda_2)} = 0 \end{aligned} \quad (8.69)$$

y usando la relación

$$C_{+c} \Delta_{\mu_1 \mu_2}^{(\lambda_1 \lambda_2)} = \lambda_1 \Delta_{\mu_1 \mu_2}^{(\lambda_1 \lambda_2)} - \lambda_2 \Delta_{\mu_1 \mu_2}^{(\lambda_1 \lambda_2)} \quad (8.70)$$

se obtiene el conjunto de ecuaciones

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (\delta_{\lambda_1}^1 + \delta_{\lambda_2}^1 - \delta_{\lambda_1}^2 - \delta_{\lambda_2}^2 + \delta_{\lambda_1}^3 + \delta_{\lambda_2}^3 - \delta_{\lambda_1}^4 - \delta_{\lambda_2}^4) &= 1 \\ \frac{1}{2} (\delta_{\lambda_1}^1 + \delta_{\lambda_2}^1 + \delta_{\lambda_1}^2 + \delta_{\lambda_2}^2 - \delta_{\lambda_1}^3 - \delta_{\lambda_2}^3 - \delta_{\lambda_1}^4 - \delta_{\lambda_2}^4) &= 0 \\ \delta_{\lambda_1}^1 \Delta_{\mu_1 \mu_2}^{(\lambda_1 \lambda_2)} &= \delta_{\lambda_2}^1 \Delta_{\mu_1 \mu_2}^{(\lambda_1 \lambda_2)} + \delta_{\lambda_1}^2 \Delta_{\mu_1 \mu_2}^{(\lambda_1 \lambda_2)} + \delta_{\lambda_2}^2 \Delta_{\mu_1 \mu_2}^{(\lambda_1 \lambda_2)} = 0 \\ \delta_{\lambda_1}^2 \Delta_{\mu_1 \mu_2}^{(\lambda_1 \lambda_2)} &= \delta_{\lambda_2}^2 \Delta_{\mu_1 \mu_2}^{(\lambda_1 \lambda_2)} + \delta_{\lambda_1}^3 \Delta_{\mu_1 \mu_2}^{(\lambda_1 \lambda_2)} + \delta_{\lambda_2}^3 \Delta_{\mu_1 \mu_2}^{(\lambda_1 \lambda_2)} = 0 \end{aligned} \quad (8.71)$$

cuya solución es  $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3$ .

Aplicando los operadores  $C_{\pm c}$ ,  $\lambda = -1, 0, 1$ , a los monomios  $\Delta_{\mu_1 \mu_2}^{(\lambda_1 \lambda_2)}$  y pidiendo que tengan peso máximo  $(4, 0, 0)$  en  $U(3)$  se obtiene

$$\begin{aligned} \Delta_{\mu_1 \mu_2}^{(\lambda_1 \lambda_2)} &= \sum_{\mu_1' \mu_2'} \langle \mu_1' \mu_2' | \Delta_{\mu_1 \mu_2}^{(\lambda_1 \lambda_2)} \rangle \Delta_{\mu_1' \mu_2'}^{(\lambda_1 \lambda_2)} \\ &= \langle \mu_1' \mu_2' | \Delta_{\mu_1 \mu_2}^{(\lambda_1 \lambda_2)} \rangle \Delta_{\mu_1' \mu_2'}^{(\lambda_1 \lambda_2)} \\ &= (4, 0, 0) \Delta_{\mu_1 \mu_2}^{(\lambda_1 \lambda_2)} \end{aligned} \quad (8.72)$$

La combinación  $\mu_1 = \mu_2 = 1$  da el peso deseado y es muy sencillo verificar que es el máximo. Entonces hemos construido el estado

$$| [2, 0] (4, 0) \lambda = 4 = \mu_1, \mu_2 = 1, \mu_3 = 0 \rangle = \frac{1}{2} \Delta_{\mu_1 \mu_2}^{(\lambda_1 \lambda_2)} \quad (8.73)$$

donde el factor  $1/2$  es necesario si se desea un estado normalizado.

Tenemos ahora la posibilidad de determinar el estado  $| [2] (4, 0) \lambda = 4, \mu_1 = 2, \mu_2 = 2 \rangle$  aplicando el operador  $C_{+c}$



$$m_{\mu,\nu}^{(\alpha)} = \sum_{\mu',\nu'} \langle \mu', \nu' | \Delta_{\mu,\nu}^{(\alpha)} | \mu, \nu \rangle \quad (8.74)$$

al monomio (8.73). Calculemos la suma término a término: en el caso  $\tau = -2$  se aplica a (8.73) solo el operador  $\Delta_{\frac{1}{2}}^{(-2)}$  con el efecto

$$\Delta_{\frac{1}{2}}^{(-2)} \Delta_{\mu,\nu}^{(1)} |0\rangle = \sum_{\mu',\nu'} \langle \mu', \nu' | \Delta_{\frac{1}{2}}^{(-2)} | \mu, \nu \rangle \Delta_{\mu',\nu'}^{(1)} |0\rangle \quad (8.75)$$

y la contribución

$$\sqrt{\frac{1}{2!4!}} \frac{4!4!}{2!2!} \sqrt{2} \Delta_{\frac{1}{2}}^{(1)} \quad (8.76)$$

a la suma.

En los casos  $\tau = -1, 0$  es necesario aplicar los operadores  $\Delta_{\frac{1}{2}}^{(-1)}$  y  $\Delta_{\frac{1}{2}}^{(0)}$  a  $\Delta_{\mu,\nu}^{(1)}$ , un sencillo cálculo muestra que

$$\Delta_{\frac{1}{2}}^{(-1)} \Delta_{\mu,\nu}^{(1)} = \sum_{\mu',\nu'} \langle \mu', \nu' | \Delta_{\frac{1}{2}}^{(-1)} | \mu, \nu \rangle \Delta_{\mu',\nu'}^{(1)} = \sqrt{2} \Delta_{\mu-1,\nu}^{(1)} \quad (8.77)$$

y al aplicar el segundo operador se tiene

$$\Delta_{\frac{1}{2}}^{(0)} \Delta_{\mu,\nu}^{(1)} |0\rangle = \sum_{\mu',\nu'} \langle \mu', \nu' | \Delta_{\frac{1}{2}}^{(0)} | \mu, \nu \rangle (\Delta_{\mu',\nu'}^{(1)} + \Delta_{\mu',\nu'}^{(0)} |0\rangle) \quad (8.78)$$

$$= \delta_{\mu,0} \sqrt{2} \Delta_{\mu-1,\nu}^{(1)} + \delta_{\nu,0} \sqrt{2} \Delta_{\mu,\nu-1}^{(1)} + \delta_{\mu,\nu} \Delta_{\mu,\nu}^{(0)}$$

por lo que, las contribuciones de  $\tau = -1$  y  $\tau = 0$  son

$$-\frac{4!4!}{2!4!2} \left\{ \sqrt{2} (\Delta_{\mu-1,\nu}^{(1)} + \Delta_{\mu,\nu-1}^{(1)}) + \Delta_{\mu,\nu}^{(0)} \right\} \quad (8.79)$$

$$\frac{4!4!}{2!4!2} \left\{ \sqrt{2} (\Delta_{\mu-1,\nu}^{(1)} + \Delta_{\mu,\nu-1}^{(1)}) + \Delta_{\mu,\nu}^{(0)} \right\} \quad (8.80)$$

respectivamente. Los sumandos con  $\tau = 1$  y  $\tau = 2$  no contribuyen a la suma. Reuniendo todos estos resultados obtenemos el polinomio

$$\frac{4!4!}{\sqrt{3}4!2} \left[ \sqrt{2} (\Delta_{\mu-1,\nu}^{(1)} + \Delta_{\mu,\nu-1}^{(1)}) - 6\Delta_{\mu,\nu}^{(0)} \right] |0\rangle \quad (8.81)$$

que normalizado es igual a

$$|2\rangle(2,0) \quad L=2=H_L, \quad S=H_S=0, \quad T=H_T=1 \rangle = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[ \sqrt{2} (\Delta_{\mu-1,\nu}^{(1)} + \Delta_{\mu,\nu-1}^{(1)}) - 6\Delta_{\mu,\nu}^{(0)} \right] |0\rangle \quad (8.82)$$

Como un ejemplo más, construyamos el estado

$$|[1,1] (3,1) \quad L=3=H_L, \quad S=1=H_S, \quad T=1 \rangle \quad (8.83)$$

El estado (8.83) es combinación lineal de monomios del

tipo

$$\Delta_{\mu_1}^{s_1} \Delta_{\mu_2}^{s_2} \quad (8.84)$$

Debido a que (8.84) debe cumplir las condiciones

$$T_0 \Delta_{\mu_1}^{\sigma_1} \Delta_{\mu_2}^{\sigma_2} |0\rangle = \Delta_{\mu_1}^{\sigma_1} \Delta_{\mu_2}^{\sigma_2} |0\rangle \quad (8.85)$$

$$T_1 \Delta_{\mu_1}^{\sigma_1} \Delta_{\mu_2}^{\sigma_2} |0\rangle = 0$$

se obtiene el sistema de ecs.

$$\frac{1}{2} [\delta_{\sigma_1}^1 + \delta_{\sigma_2}^1 - \delta_{\sigma_1}^2 - \delta_{\sigma_2}^2 - \delta_{\sigma_1}^3 - \delta_{\sigma_2}^3 + \delta_{\sigma_1}^4 + \delta_{\sigma_2}^4] = 1$$

$$\frac{1}{2} [\delta_{\sigma_1}^1 + \delta_{\sigma_2}^1 + \delta_{\sigma_1}^2 + \delta_{\sigma_2}^2 - \delta_{\sigma_1}^3 - \delta_{\sigma_2}^3 - \delta_{\sigma_1}^4 - \delta_{\sigma_2}^4] = 1 \quad (8.86)$$

con la solución  $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$ .

Aplicando los operadores de peso de U(3), (8.84) debe cumplir el requisito siguiente:

$$C_{\mu_1}^{\sigma_1} \Delta_{\mu_1}^{\sigma_1} \Delta_{\mu_2}^{\sigma_2} |0\rangle = (C_{\mu_1}^{\sigma_1} - 1) \Delta_{\mu_1}^{\sigma_1} \Delta_{\mu_2}^{\sigma_2} |0\rangle \quad (8.87)$$

y como (8.84) debe ser de máximo peso en U(3) también satisface

$$C_{\mu_2}^{\sigma_2} \Delta_{\mu_1}^{\sigma_1} \Delta_{\mu_2}^{\sigma_2} |0\rangle = 0 \quad (8.88)$$

de las ecs. (8.87) y (8.88) se obtiene que  $\mu_1 = 1$  y  $\mu_2 = 2$ . El estado normalizado que hemos construido es el siguiente:

$$|L_1\rangle (3,1) L_2 = 2, C = 1, T = 4 \rangle = \Delta_1^1 \Delta_2^1 |0\rangle \quad (8.89)$$

Si se aplica el operador

$$S_{-2} = \frac{1}{\sqrt{2}} (C_3 + C_4) \quad (8.90)$$

a (8.89) se tiene

$$S_{-2} \Delta_1^1 \Delta_2^1 |0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_m (b_{m3}^+ b^{m2} + b_{m4}^+ b^{m1}) (b_{11}^+ b_{21}^+ |0\rangle)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_m (b_{m3}^+ b_{21}^+ \delta_1^m + b_{m4}^+ b_{11}^+ \delta_2^m) |0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (b_{12}^+ b_{21}^+ + b_{11}^+ b_{22}^+) |0\rangle$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} (\Delta_2^2 \Delta_1^1 + \Delta_1^1 \Delta_2^2) |0\rangle \quad (8.91)$$

Se puede reducir el valor de  $M_L = L$  en una unidad en el estado (8.89) aplicando el operador  $L_{-1}$ ,

$$L_{-1} = -\sqrt{2} \sum_{q_1} (C_1)^{q_1} (C_{11} - q_1 - 1) |1-1\rangle \in C_{11}^{\frac{3}{2}} \quad (8.92)$$

En efecto, si  $L_{-1}$  actúa sobre (8.89) se obtiene

$$L_{-1} \Delta_1^1 \Delta_2^1 |0\rangle = \sqrt{2} \sum_{q_1} (C_1)^{q_1} (C_{11} - q_1 - 1) |1-1\rangle \left[ \sum_{\mu_1} (b_{\mu_1 1}^+ b_{21}^+ |0\rangle) (C_{\mu_1}^{\sigma_1} - 1) \Delta_{\mu_1}^{\sigma_1} \Delta_2^1 |0\rangle + \sum_{\mu_2} (b_{\mu_2 1}^+ b_{11}^+ |0\rangle) (C_{\mu_2}^{\sigma_2} - 1) \Delta_1^1 \Delta_{\mu_2}^{\sigma_2} |0\rangle \right]$$

$$= \sqrt{2} \langle 11-1 | 1-1 \rangle \left[ \sum_{\mu_1} (b_{\mu_1 1}^+ b_{21}^+ |0\rangle) (b_{\mu_1 1}^+ - 1) \Delta_{\mu_1}^{\sigma_1} \Delta_2^1 |0\rangle + \sum_{\mu_2} (b_{\mu_2 1}^+ b_{11}^+ |0\rangle) (b_{\mu_2 1}^+ - 1) \Delta_1^1 \Delta_{\mu_2}^{\sigma_2} |0\rangle \right]$$

$$= \sqrt{2} \langle 11-1 | 1-1 \rangle \left[ \sum_{\mu_1} (b_{\mu_1 1}^+ b_{21}^+ |0\rangle) (b_{\mu_1 1}^+ - 1) \Delta_{\mu_1}^{\sigma_1} \Delta_2^1 |0\rangle + \sum_{\mu_2} (b_{\mu_2 1}^+ b_{11}^+ |0\rangle) (b_{\mu_2 1}^+ - 1) \Delta_1^1 \Delta_{\mu_2}^{\sigma_2} |0\rangle \right]$$

$$= \sqrt{2} \langle 11-1 | 1-1 \rangle \left[ \sum_{\mu_1} (b_{\mu_1 1}^+ b_{21}^+ |0\rangle) (b_{\mu_1 1}^+ - 1) \Delta_{\mu_1}^{\sigma_1} \Delta_2^1 |0\rangle + \sum_{\mu_2} (b_{\mu_2 1}^+ b_{11}^+ |0\rangle) (b_{\mu_2 1}^+ - 1) \Delta_1^1 \Delta_{\mu_2}^{\sigma_2} |0\rangle \right]$$

$$= \sqrt{2} \langle 11-1 | 1-1 \rangle \left[ \sum_{\mu_1} (b_{\mu_1 1}^+ b_{21}^+ |0\rangle) (b_{\mu_1 1}^+ - 1) \Delta_{\mu_1}^{\sigma_1} \Delta_2^1 |0\rangle + \sum_{\mu_2} (b_{\mu_2 1}^+ b_{11}^+ |0\rangle) (b_{\mu_2 1}^+ - 1) \Delta_1^1 \Delta_{\mu_2}^{\sigma_2} |0\rangle \right] \quad (8.93)$$

este estado normalizado es igual a:

$$|L_1\rangle (3,1) L_2 = 1, C = 1, T = 4 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (\Delta_2^2 \Delta_1^1 + \Delta_1^1 \Delta_2^2) |0\rangle \quad (8.94)$$

Los estados (8.91) y (8.94) se pueden combinar de manera que se obtenga el estado  $|L_1\rangle (3,1) L_2 = 0, C = 1, T = 4 \rangle$  utilizando la relación

$$|L_1\rangle (L_1, \mu_1) L_2 = (M_1, T) \rangle = \sum_{\mu_1, \mu_2} \langle L_1, \mu_1 | L_1, \mu_1 \rangle \langle L_2, \mu_2 | L_2, \mu_2 \rangle \quad (8.95)$$

donde  $\langle 12 \rangle (2,0,0)_{L=2, S=0}$  es un coeficiente de Clebsch-Gordan. Entonces  $|\langle 12 \rangle (2,0,0)_{L=2, S=0}\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} \left[ \langle 12 \rangle (2,0,0)_{L=2, S=0} \right]$  (8.96)

Los estados clasificados en el esquema  $SU(3)$  se muestran en las tablas (8.4) y (8.5).

Los estados clasificados según el esquema  $O(6)$  se pueden obtener por el método descrito en la subsección anterior. Por ejemplo, el estado  $|\langle 12 \rangle (2,0,0)_{L=2, S=0}\rangle$  se puede obtener por este método. Sin embargo, si se observa que las etiquetas que caracterizan a este estado, excepto por la etiqueta  $(2,0,0)$  de  $O(6)$ , son las mismas que denotan al estado  $|\langle 12 \rangle (2,0,0)_{L=2, S=0}\rangle$  se concluye que

$$|\langle 12 \rangle (2,0,0)_{L=2, S=0}\rangle = |\langle 12 \rangle (2,0,0)_{L=2, S=0}\rangle \quad (8.97)$$

Solo cuatro estados clasificados en el esquema  $O(6)$  no pueden deducirse de esta manera. Para estos estados se procede como sigue. Se aplica el operador  $\hat{L}^2$  al estado (8.97),

$$\hat{L}^2 |\langle 12 \rangle (2,0,0)_{L=2, S=0}\rangle = 2(2+1) |\langle 12 \rangle (2,0,0)_{L=2, S=0}\rangle \quad (8.98)$$

el estado normalizado que se obtiene es:

$$|\langle 12 \rangle (2,0,0)_{L=2, S=0}\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} \left[ \sqrt{6} \langle 12 \rangle (2,0,0)_{L=2, S=0} - \sqrt{2} \langle 12 \rangle (2,0,0)_{L=2, S=0} \right] \quad (8.99)$$

si después de esto se compara con los estados  $|\langle 12 \rangle (2,0,0)_{L=2, S=0}\rangle$  y  $|\langle 12 \rangle (2,0,0)_{L=2, S=0}\rangle$ , dados en la tabla (8.4), se observa que

$$|\langle 12 \rangle (2,0,0)_{L=2, S=0}\rangle = \frac{\sqrt{2}}{3} |\langle 12 \rangle (2,0,0)_{L=2, S=0}\rangle + \frac{\sqrt{2}}{3} |\langle 12 \rangle (2,0,0)_{L=2, S=0}\rangle \quad (8.100)$$

Por otra parte, el estado  $|\langle 12 \rangle (2,0,0)_{L=2, S=0}\rangle$  es combinación lineal de los estados  $|\langle 12 \rangle (2,0,0)_{L=2, S=0}\rangle$  y  $|\langle 12 \rangle (2,0,0)_{L=2, S=0}\rangle$ . Debido a que es ortogonal a  $|\langle 12 \rangle (2,0,0)_{L=2, S=0}\rangle$  y tiene norma igual a 1 cumple las condiciones siguientes:

$$\begin{aligned} |\langle 12 \rangle (2,0,0)_{L=2, S=0}\rangle &= \alpha |\langle 12 \rangle (2,0,0)_{L=2, S=0}\rangle + \beta |\langle 12 \rangle (2,0,0)_{L=2, S=0}\rangle \\ \frac{\sqrt{2}}{3} \alpha + \frac{\sqrt{2}}{3} \beta &= 0 \\ \alpha^2 + \beta^2 &= 1 \end{aligned} \quad (8.101)$$

Los valores de  $\alpha$  y  $\beta$  que cumplen los requisitos anteriores son:

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{3} \sqrt{7} \\ \beta &= -\frac{1}{3} \sqrt{2} \end{aligned} \quad (8.102)$$

entonces

$$|\langle 12 \rangle (2,0,0)_{L=2, S=0}\rangle = \frac{\sqrt{7}}{3} |\langle 12 \rangle (2,0,0)_{L=2, S=0}\rangle - \frac{\sqrt{2}}{3} |\langle 12 \rangle (2,0,0)_{L=2, S=0}\rangle \quad (8.103)$$

Argumentos similares permiten construir los dos estados

restantes. En las tablas (8.6) y (8.7) presentamos los paréntesis de transformación entre funciones de onda clasificadas en los esquemas  $SU(3)$  y  $O(6)$ .

Tenemos ahora la posibilidad de calcular los elementos de matriz de la interacción  $V = -V_0(x \cdot Q^2 + y P^2)$  entre estados del tipo  $|L, M, S, T, J, T_3\rangle$ . Por ejemplo, evaluemos los elementos de matriz siguientes:

$$1.- \langle [2](40)40; 2 | V | [2](40)40; 2 \rangle =$$

$$= -V_0 \left\{ x \langle [2](40)40; 2 | Q^2 | [2](40)40; 2 \rangle \right.$$

$$\left. + y \langle [2](40)40; 2 | P^2 | [2](40)40; 2 \rangle \right\} \quad (8.104)$$

$$= -\frac{24}{3} V_0 x$$

$$2.- \langle [1](30)31; 1 | V | [1](30)31; 1 \rangle =$$

$$= -V_0 \left\{ x \langle [1](30)31; 1 | Q^2 | [1](30)31; 1 \rangle \right.$$

$$\left. + y \langle [1](30)31; 1 | P^2 | [1](30)31; 1 \rangle \right\} \quad (8.105)$$

$$= -\frac{12}{3} V_0 x$$

$$3.- \langle [1](30)31; 0 | V | [1](30)40; 0 \rangle = -V_0 y \langle [1](30)31; 0 | P^2 | [1](30)40; 0 \rangle$$

$$= 0 \quad (8.106)$$

La matriz de la interacción  $V = -V_0(x \cdot Q^2 + y P^2)$  en el caso  $T=1, J=4$  es la siguiente:

$$\begin{matrix} [2](40)40 & [1](30)31 \\ [1](30)31 & [1](30)40 \end{matrix} \begin{pmatrix} -\frac{24}{3} \times V_0 & 0 \\ 0 & -\frac{12}{3} \times V_0 \end{pmatrix} \quad (8.107)$$

El total de matrices de la interacción  $V = -V_0(x \cdot Q^2 + y P^2)$  se muestran en las tablas (8.10) y (8.11).

En nuestro análisis no hemos considerado el esquema de clasificación J-J, que es útil si se toma en cuenta una interacción espín-órbita

$$W_{SO} = \sum_{i=1}^2 \vec{l}_i \cdot \vec{s}_i \quad (8.108)$$

entre las partículas. Una interacción de este tipo se puede incluir en nuestro formalismo expresando el operador  $W_{SO}$  en el esquema de segunda cuantización<sup>(4)</sup>

$$W_{SO} = \sum_{\mu, \mu'} \sum_{\tau, \tau'} \sum_{\nu, \nu'} \langle \mu, \tau, \nu | \vec{l} \cdot \vec{s} | \mu', \tau', \nu' \rangle \langle \tau, \nu | a_{\tau, \nu}^\dagger a_{\tau', \nu'} | \tau, \nu \rangle \quad (8.109)$$

el operador así obtenido quedara en términos de los generadores de  $U(24)$  pues es una interacción que depende del espín. La dependencia del operador en el espín presenta otros problemas, principalmente la clasificación de acuerdo a  $U(12)$  no es adecuada, y en su lugar se debe utilizar la cadena de subgrupos

$$U(24) \supset U^{12}(12) \supset U^6(6) \supset U^3(3) \supset U^2(2) \supset U^1(1) \quad (8.110)$$

el grupo unitario  $U^6(6)$  se puede descomponer en la suma directa de los grupos correspondientes a la degeneración en cada orbital, para la capa 2s-1d sería

$$U^6(6) \supset U^3(3) \oplus U^2(2) \oplus U^1(1) \oplus U^1(1) \oplus U^1(1) \quad (8.111)$$

de cada uno de estos grupos se puede considerar el grupo de rotaciones en su representación de dimensionalidad igual a la degeneración del orbital. No es el objetivo discutir con amplitud esta cadena y solo indicamos al lector que cualquier ampliación del tema se puede consultar en la ref. (10). De la ref. (10) hemos extraído la tabla de los paréntesis de transformación entre los esquemas SU(3) y J-J, aquí la hemos denotado por tabla (8.8) en el caso  $T=1$  y tabla (8.9) en el caso  $T=0$ .

Si se considera como interacción al potencial

$$V_2 = -V_0 (\chi Q^2 + \chi' P^2 + \pm \chi'' Q_3^2), \quad \chi, \chi', \chi'' = 1, 2, 3 \quad (8.112)$$

se deben utilizar las tablas (8.8) y (8.9) para evaluar el término que corresponde a la interacción espín-órbita. Por ejemplo, evaluemos los siguientes elementos de matriz.

$$1.- \langle (21)(21)(21); 41 | V | (21)(21)(21); 41 \rangle = -\frac{1}{2} V_0 \left[ \langle (21)(21)(21); 41 | Q^2 | (21)(21)(21); 41 \rangle + 4 \langle (21)(21)(21); 41 | P^2 | (21)(21)(21); 41 \rangle \right] \quad (8.113)$$

$$= -\frac{1}{2} V_0 \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} \right) \left( \frac{1}{2} \right) \left( \frac{1}{2} \right) + 4 \left( \frac{1}{2} \right) \left( \frac{1}{2} \right) \left( \frac{1}{2} \right) \right] = -\frac{1}{2} V_0 \left[ \frac{1}{8} + 2 \right] = -\frac{1}{2} V_0 \left[ \frac{17}{8} \right]$$

$$2.- \langle (21)(21)(21); 41 | V | (21)(21)(21); 41 \rangle = -\frac{1}{2} V_0 \left[ \langle (21)(21)(21); 41 | Q^2 | (21)(21)(21); 41 \rangle + 4 \langle (21)(21)(21); 41 | P^2 | (21)(21)(21); 41 \rangle \right] \quad (8.114)$$

$$= -\frac{1}{2} V_0 \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} \right) \left( \frac{1}{2} \right) \left( \frac{1}{2} \right) + 4 \left( \frac{1}{2} \right) \left( \frac{1}{2} \right) \left( \frac{1}{2} \right) \right] = -\frac{1}{2} V_0 \left[ \frac{17}{8} \right]$$

$$3.- \langle (11)(31)(31); 41 | V | (11)(31)(31); 41 \rangle = -\frac{1}{2} V_0 \left[ \langle (11)(31)(31); 41 | Q^2 | (11)(31)(31); 41 \rangle + 4 \langle (11)(31)(31); 41 | P^2 | (11)(31)(31); 41 \rangle \right]$$

$$= -\frac{1}{2} V_0 \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} \right) \left( \frac{1}{2} \right) \left( \frac{1}{2} \right) + 4 \left( \frac{1}{2} \right) \left( \frac{1}{2} \right) \left( \frac{1}{2} \right) \right] = -\frac{1}{2} V_0 \left[ \frac{17}{8} \right]$$

$$4.- \langle (11)(31)(31); 41 | V | (11)(31)(31); 41 \rangle = -\frac{1}{2} V_0 \left[ \langle (11)(31)(31); 41 | Q^2 | (11)(31)(31); 41 \rangle + 4 \langle (11)(31)(31); 41 | P^2 | (11)(31)(31); 41 \rangle \right]$$

$$= -\frac{1}{2} V_0 \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} \right) \left( \frac{1}{2} \right) \left( \frac{1}{2} \right) + 4 \left( \frac{1}{2} \right) \left( \frac{1}{2} \right) \left( \frac{1}{2} \right) \right] = -\frac{1}{2} V_0 \left[ \frac{17}{8} \right]$$

En los anteriores cálculos se utilizó

$$\langle (11)(31)(31); 41 | V | (11)(31)(31); 41 \rangle = \frac{1}{2} \left[ \langle (11)(31)(31); 41 | Q^2 | (11)(31)(31); 41 \rangle + 4 \langle (11)(31)(31); 41 | P^2 | (11)(31)(31); 41 \rangle \right]$$

La nueva matriz para el caso  $T=1$ ,  $J=4$  es

$$\begin{bmatrix} (1) (1) (1) (1) \\ (2) (1) (1) (1) \\ (3) (1) (1) (1) \\ (4) (1) (1) (1) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} -2V_0 & & & \\ & -2V_0 & & \\ & & -2V_0 & \\ & & & -2V_0 \end{pmatrix} \quad (8.116)$$

Las matrices de la interacción  $V = -V_0 \sum_{i=1}^4 \sigma_i^x \sigma_i^y$  se muestran en las tablas (8.10) y (8.11).

Teniendo las matrices de la interacción (8.112), en el caso  $T=1$ , se está en condiciones de predecir el espectro de energías del núcleo  $O^{16}$ . En efecto, los valores propios (energías) de las matrices se pueden aproximar a los niveles experimentales del núcleo ajustando apropiadamente los parámetros  $V_0, x, y$ .

Sin embargo, el problema de la diagonalización de las matrices no es sencillo, para resolverlo se cuenta con un programa de computo que presenta las siguientes particularidades:

- 1.- El programa ajusta los cinco primeros niveles de energía del núcleo  $O^{16}$ , aunque está capacitado para ajustar un número mayor.
- 2.- El programa puede ajustar cada interacción por separado ó en conjunto.
- 3.- De una región dada de los parámetros  $V_0, x$  y  $y$ , el programa elige el conjunto de ellos que reproduzcan con mayor exactitud los niveles de energía experimentales del  $O^{16}$ . El criterio de selección que se utilizó es el siguiente: se elige el conjunto de parámetros que minimice la función.

$$\sum_{i=1}^5 (E_{i, \text{teórico}} - E_{i, \text{experimental}})^2 \quad (8.117)$$

- 4.- El programa cuenta con instrucciones que, al ser aplicadas dan respuesta a preguntas como las siguientes: ¿desea ajustar mayor número de niveles?, ¿desea conocer la desviación lineal de cada nivel?, ¿la desviación cuadrática?, etc.

Este programa muestra que los valores de los parámetros  $V_0, x$  y  $y$  que mejor aproximan los niveles experimentales son:

$$V_0 = 1.53, \quad x = 0.2, \quad y = 0.2 \quad (8.118)$$

Tanto los niveles teóricos predichos como los niveles experimentales se muestran en la fig. (8.1).

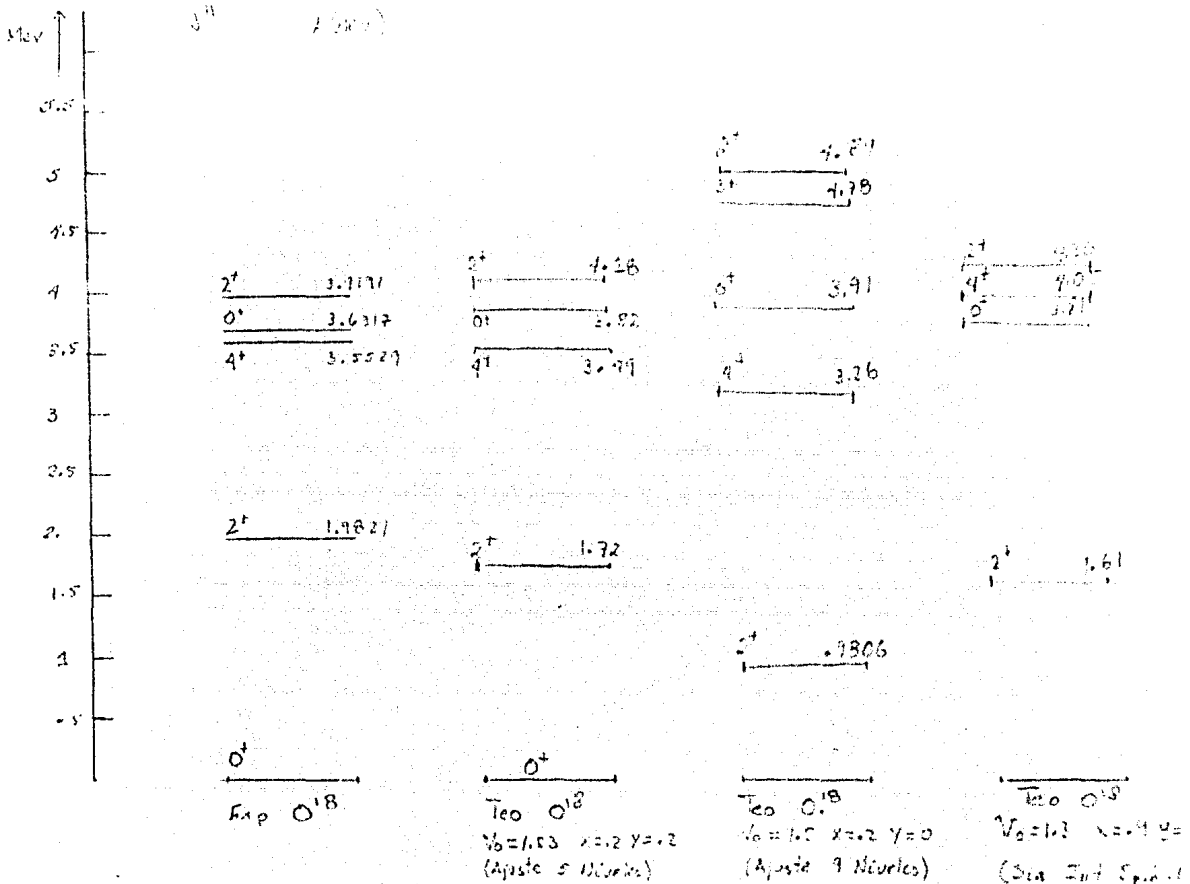


Figura (8.1). Espectro experimental de energías del núcleo  $^{13}\text{O}$  confrontado con el espectro predicho por el modelo de apareamiento

Tabla (8.4). Estados de dos partículas clasificados de acuerdo al esquema SU(3) con  $I=1$ .

|                               |   |
|-------------------------------|---|
| $[h](k_1, k_2)_{LS, J = M_J}$ |   |
| $[2](40)00, 0\rangle$         | $\frac{1}{\sqrt{3}} [A_1^1 A_2^1 - A_2^1 A_1^1 + A_1^1 A_3^1 + A_3^1 A_1^1 - \frac{1}{\sqrt{2}} A_2^1 A_3^1]  0\rangle$   |
| $[2](40)20, 2\rangle$         | $\frac{1}{\sqrt{2}} [\sqrt{2} A_1^1 A_2^1 + \sqrt{2} A_1^1 A_3^1 - 6 A_2^1 A_3^1]  0\rangle$  |
| $[2](40)40, 4\rangle$         | $A_1^1 A_2^1  0\rangle$   |
| $[2](22)00, 0\rangle$         | $\frac{1}{\sqrt{6}} [2 A_1^1 A_2^1 - 2 A_1^1 A_3^2 - A_2^1 A_3^1 + 2 \sqrt{2} A_2^1 A_3^1]  0\rangle$   |
| $[2](22)20, 2\rangle$         | $\frac{1}{\sqrt{3}} [2 A_1^1 A_2^1 - A_2^1 A_3^1]  0\rangle$  |
| $[11](31)11, 0\rangle$        | $\frac{1}{\sqrt{30}} [2 A_1^1 A_2^1 + 2 A_1^1 A_3^1 + \sqrt{2} A_2^1 A_3^1 - A_2^1 A_1^1 - A_3^1 A_2^1 - 2 A_1^1 A_3^1 - 2 A_2^1 A_1^1 + 2 A_1^1 A_2^1 + \sqrt{2} A_1^1 A_3^1 + 2 A_2^1 A_3^1]  0\rangle$     |
| $[11](31)11, 1\rangle$        | $\frac{1}{\sqrt{15}} [\sqrt{2} A_1^1 A_2^1 + \sqrt{2} A_1^1 A_3^1 + \sqrt{2} A_2^1 A_3^1 + \sqrt{2} A_1^1 A_2^1 + A_1^1 A_2^1 + A_1^1 A_3^1 - \sqrt{2} A_2^1 A_3^1 - 2 \sqrt{2} A_1^1 A_3^1]  0\rangle$       |
| $[11](31)11, 2\rangle$        | $\frac{1}{\sqrt{6}} [\sqrt{2} A_1^1 A_2^1 + A_2^1 A_3^1 + \sqrt{2} A_1^1 A_3^1]  0\rangle$  |
| $[11](31)21, 1\rangle$        | $\frac{1}{\sqrt{42}} [4 A_1^1 A_2^1 - 2 \sqrt{2} A_1^1 A_3^1 - 2 A_2^1 A_3^1 - 2 A_1^1 A_2^1 + \sqrt{2} A_2^1 A_3^1 + \sqrt{2} A_1^1 A_3^1 + 2 A_2^1 A_3^1]  0\rangle$  |
| $[11](31)21, 2\rangle$        | $\frac{1}{\sqrt{6}} [\sqrt{2} A_1^1 A_2^1 + \sqrt{2} A_1^1 A_3^1 - A_2^1 A_3^1 - A_1^1 A_2^1 - \sqrt{2} A_1^1 A_3^1 + A_2^1 A_3^1]  0\rangle$   |
| $[11](31)21, 3\rangle$        | $\frac{1}{\sqrt{3}} [\sqrt{2} A_1^1 A_2^1 - A_2^1 A_3^1]  0\rangle$   |
| $[11](31)31, 2\rangle$        | $\frac{1}{\sqrt{70}} [15 \sqrt{2} A_1^1 A_2^1 - 5 \sqrt{2} A_1^1 A_3^1 - 5 A_2^1 A_3^1 - 5 A_1^1 A_2^1 - 5 \sqrt{2} A_1^1 A_3^1 + 2 \sqrt{2} A_2^1 A_3^1 + 3 \sqrt{2} A_1^1 A_2^1 + 2 A_2^1 A_3^1]  0\rangle$ |
| $[11](31)31, 3\rangle$        | $\frac{1}{\sqrt{30}} [3 A_1^1 A_2^1 + 3 A_1^1 A_3^1 - 2 A_2^1 A_3^1 - \sqrt{2} A_1^1 A_3^1]  0\rangle$  |
| $[11](31)31, 4\rangle$        | $A_1^1 A_2^1  0\rangle$   |



Tabla (8.5). Estados de dos partículas clasificados de acuerdo al esquema SU(3) con  $T = 0$ .

| $[[I](k_1 k_2)LS, J = M_J]$ |  |
|-----------------------------|--|
| $[[11](31)10, 1]$           | $\frac{1}{\sqrt{10}}[A_1^+ A_2^+ - A_1^+ A_2^+ + A_1^+ A_2^+ - A_1^+ A_2^+]$<br>$+\frac{1}{\sqrt{2}}[A_1^+ A_2^+ + \sqrt{2}A_1^+ A_2^+ - A_1^+ A_2^+ - \sqrt{2}A_1^+ A_2^+ + A_1^+ A_2^+]$<br>$+\sqrt{2}A_1^+ A_2^+ - A_1^+ A_2^+ - \sqrt{2}A_1^+ A_2^+] 0\rangle$   |
| $[[11](31)20, 2]$           | $\frac{1}{\sqrt{3}}[\sqrt{2}A_1^+ A_2^+ - A_1^+ A_2^+ + \sqrt{2}A_1^+ A_2^+ - A_1^+ A_2^+ - \sqrt{2}A_1^+ A_2^+]$<br>$+ A_1^+ A_2^+ - \sqrt{2}A_1^+ A_2^+ + A_1^+ A_2^+] 0\rangle$   |
| $[[11](31)30, 3]$           | $\frac{1}{2}[A_1^+ A_2^+ + A_1^+ A_2^+ - A_1^+ A_2^+ - A_1^+ A_2^+] 0\rangle$  |
| $[[2](40)01, 1]$            | $\frac{2}{\sqrt{3}}[A_1^+ A_2^+ - A_1^+ A_2^+ + A_1^+ A_2^+] + \frac{1}{\sqrt{2}}[A_1^+ A_2^+ - \sqrt{2}A_1^+ A_2^+] 0\rangle$   |
| $[[2](40)21, 1]$            | $\{\sqrt{\frac{3}{2}}[\frac{3}{\sqrt{2}}A_1^+ A_2^+ - \frac{1}{\sqrt{2}}A_1^+ A_2^+ - \frac{1}{\sqrt{2}}A_1^+ A_2^+] - \sqrt{\frac{3}{2}}[2A_1^+ A_2^+ + 2A_1^+ A_2^+]$<br>$+ \sqrt{2}A_1^+ A_2^+ + \sqrt{2}A_1^+ A_2^+ - \frac{3}{\sqrt{2}}A_1^+ A_2^+ - \frac{3}{\sqrt{2}}A_1^+ A_2^+]$<br>$+ \frac{1}{\sqrt{2}}[\frac{1}{\sqrt{2}}A_1^+ A_2^+ + 2A_1^+ A_2^+ + A_1^+ A_2^+ + 2A_1^+ A_2^+ - 3A_1^+ A_2^+] 0\rangle$ |
| $[[2](40)21, 2]$            | $\frac{1}{\sqrt{3}}[3A_1^+ A_2^+ + 3A_1^+ A_2^+ - \frac{1}{\sqrt{2}}A_1^+ A_2^+ - \frac{1}{\sqrt{2}}A_1^+ A_2^+ - \frac{1}{\sqrt{2}}A_1^+ A_2^+ - \frac{1}{\sqrt{2}}A_1^+ A_2^+]$<br>$- 2A_1^+ A_2^+ - \sqrt{2}A_1^+ A_2^+ + \frac{1}{\sqrt{2}}A_1^+ A_2^+] 0\rangle$  |
| $[[2](40)21, 3]$            | $\frac{1}{\sqrt{2}}[3A_1^+ A_2^+ - \frac{1}{\sqrt{2}}A_1^+ A_2^+ - \frac{1}{\sqrt{2}}A_1^+ A_2^+] 0\rangle$  |
| $[[2](40)41, 3]$            | $\frac{1}{2}\sqrt{7}[A_1^+ A_2^+ - A_1^+ A_2^+ - A_1^+ A_2^+ + A_1^+ A_2^+ + A_1^+ A_2^+ + \frac{1}{2}\sqrt{2}A_1^+ A_2^+] 0\rangle$   |
| $[[2](40)41, 4]$            | $\frac{1}{\sqrt{10}}[A_1^+ A_2^+ + A_1^+ A_2^+ - A_1^+ A_2^+] 0\rangle$  |
| $[[2](40)41, 5]$            | $\frac{1}{2}A_1^+ A_2^+] 0\rangle$   |
| $[[2](22)01, 1]$            | $\frac{1}{3}[A_1^+ A_2^+ - A_1^+ A_2^+ - A_1^+ A_2^+ + \sqrt{2}A_1^+ A_2^+] 0\rangle$  |
| $[[2](22)21, 1]$            | $\frac{1}{6\sqrt{10}}[6\sqrt{2}A_1^+ A_2^+ - 3\sqrt{2}A_1^+ A_2^+ - 5\sqrt{2}A_1^+ A_2^+ - 3\sqrt{2}A_1^+ A_2^+ + 3A_1^+ A_2^+]$<br>$+ 3A_1^+ A_2^+ + \sqrt{2}A_1^+ A_2^+ + 2\sqrt{2}A_1^+ A_2^+ - 2A_1^+ A_2^+ - \sqrt{2}A_1^+ A_2^+] 0\rangle$   |
| $[[2](22)21, 2]$            | $\frac{1}{6}[2A_1^+ A_2^+ + 2A_1^+ A_2^+ - A_1^+ A_2^+ - A_1^+ A_2^+ - 2A_1^+ A_2^+ + \sqrt{2}A_1^+ A_2^+] 0\rangle$   |
| $[[2](22)21, 3]$            | $\frac{1}{\sqrt{3}}[2A_1^+ A_2^+ - A_1^+ A_2^+] 0\rangle$  |

Tabla (8.6). Paréntesis de transformación entre funciones de onda de dos partículas en los esquemas SU(3) y O(6), que corresponden al valor de isoespín T = 1...

| J | $(\frac{167}{25}, \frac{1}{2}, 0)$ | [2]<br>(200)          | [2]<br>(000)         | [11]<br>(110) | [11]<br>(110) | [11]<br>(110) | [2]<br>(200)         | [2]<br>(200)          | [11]<br>(110) | [11]<br>(110) | [11]<br>(110) | [11]<br>(110) | [11]<br>(110) | [2]<br>(200) | [11]<br>(110) |  |
|---|------------------------------------|-----------------------|----------------------|---------------|---------------|---------------|----------------------|-----------------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|--------------|---------------|--|
|   | (10)(4)(15)                        | 00                    | 00                   | 11            | 11            | 21            | 20                   | 20                    | 11            | 21            | 31            | 21            | 31            | 40           | 31            |  |
| 0 | [2](40)00                          | $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $\frac{1}{\sqrt{6}}$ | 0             |               |               |                      |                       |               |               |               |               |               |              |               |  |
|   | [2](22)00                          | $\frac{1}{\sqrt{2}}$  | $\frac{1}{\sqrt{6}}$ | 0             |               |               |                      |                       |               |               |               |               |               |              |               |  |
|   | [11](31)11                         | 0                     | 0                    | 1             |               |               |                      |                       |               |               |               |               |               |              |               |  |
| 1 | [11](31)11                         |                       |                      |               | 1             | 0             |                      |                       |               |               |               |               |               |              |               |  |
|   | [11](31)21                         |                       |                      |               | 0             | 1             |                      |                       |               |               |               |               |               |              |               |  |
| 2 | [2](40)20                          |                       |                      |               |               |               | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $\frac{1}{\sqrt{7}}$  | 0             | 0             | 0             |               |               |              |               |  |
|   | [2](22)20                          |                       |                      |               |               |               | $\frac{1}{\sqrt{7}}$ | $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ | 0             | 0             | 0             |               |               |              |               |  |
|   | [11](31)11                         |                       |                      |               |               |               | 0                    | 0                     | 1             | 0             | 0             |               |               |              |               |  |
|   | [11](31)21                         |                       |                      |               |               |               | 0                    | 0                     | 0             | 1             | 0             |               |               |              |               |  |
|   | [11](31)31                         |                       |                      |               |               |               | 0                    | 0                     | 0             | 0             | 1             |               |               |              |               |  |
| 3 | [11](31)21                         |                       |                      |               |               |               |                      |                       |               |               |               | 1             | 0             |              |               |  |
|   | [11](31)31                         |                       |                      |               |               |               |                      |                       |               |               |               | 0             | 1             |              |               |  |
| 4 | [2](40)40                          |                       |                      |               |               |               |                      |                       |               |               |               |               |               | 1            | 0             |  |
|   | [11](31)31                         |                       |                      |               |               |               |                      |                       |               |               |               |               |               | 0            | 1             |  |

Tabla (8.7). Paréntesis de transformación entre funciones de onda de dos partículas en los esquemas SU(3) y O(6), que corresponden al valor de isospín T = 0.

| J | $\frac{1}{2}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})_{1,1}$<br>15 | [2]          | [2]           | [2]                   | [2]                   | [11]  | [2]          | [2]           | [11]  | [2]          | [2]           | [2]   | [11]  | [2]   | [2]   |
|---|---|--------------|---------------|-----------------------|-----------------------|-------|--------------|---------------|-------|--------------|---------------|-------|-------|-------|-------|
|   |   | (200)        | (200)         | (200)                 | (000)                 | (110) | (200)        | (200)         | (110) | (200)        | (200)         | (200) | (110) | (200) | (200) |
|   | $\frac{1}{2}(1,1)_{1,5}$                            | 21           | 2'1           | 01                    | 01                    | 10    | 21           | 2'1           | 20    | 21           | 2'1           | 41    | 30    | 41    | 41    |
| 1 | [2](40)21   | $1/\sqrt{2}$ | $1/\sqrt{7}$  | 0                     | 0                     | 0     |              |               |       |              |               |       |       |       |       |
|   | [2](22)21   | $1/\sqrt{7}$ | $-1/\sqrt{2}$ | 0                     | 0                     | 0     |              |               |       |              |               |       |       |       |       |
|   | [2](40)01   | 0            | 0             | $-\frac{1}{\sqrt{6}}$ | $\frac{1}{\sqrt{6}}$  | 0     |              |               |       |              |               |       |       |       |       |
|   | [2](22)01   | 0            | 0             | $\frac{1}{\sqrt{6}}$  | $-\frac{1}{\sqrt{6}}$ | 0     |              |               |       |              |               |       |       |       |       |
|   | [11](31)10  | 0            | 0             | 0                     | 0                     | 1     |              |               |       |              |               |       |       |       |       |
| 2 | [2](40)21   |              |               |                       |                       |       | $1/\sqrt{2}$ | $1/\sqrt{7}$  | 0     |              |               |       |       |       |       |
|   | [2](22)21   |              |               |                       |                       |       | $1/\sqrt{7}$ | $-1/\sqrt{2}$ | 0     |              |               |       |       |       |       |
|   | [11](21)20  |              |               |                       |                       |       | 0            | 0             | 1     |              |               |       |       |       |       |
| 3 | [2](60)41   |              |               |                       |                       |       |              |               |       | 0            | 0             | 1     | 0     |       |       |
|   | [2](40)21   |              |               |                       |                       |       |              |               |       | $1/\sqrt{2}$ | $1/\sqrt{7}$  | 0     | 0     |       |       |
|   | [2](22)21   |              |               |                       |                       |       |              |               |       | $1/\sqrt{7}$ | $-1/\sqrt{2}$ | 0     | 0     |       |       |
|   | [11](31)30  |              |               |                       |                       |       |              |               |       | 0            | 0             | 0     | 1     |       |       |
| 4 | [2](40)41   |              |               |                       |                       |       |              |               |       |              |               |       | 1     |       |       |
| 5 | [2](40)41   |              |               |                       |                       |       |              |               |       |              |               |       |       | 1     |       |



Tabla (8.10). Matrices de la interacción  
calculadas con respecto a las funciones de onda  
en el esquema SU(3),  $T = 1$ .

| [2](4,1,1)S  |  | [2](40)00                         | [2](22)00                         | [11](31)11                        |                                   |                        |         |
|--------------|--|-----------------------------------|-----------------------------------|-----------------------------------|-----------------------------------|------------------------|---------|
| [2](40)00    |  | $-\frac{2}{3}x - 5y$              | $-\sqrt{5}y$                      | $\frac{2}{3}\sqrt{6}z$            | $J = 0$                           |                        |         |
| [2](22)00    |  | $-\sqrt{5}y$                      | $-\frac{2}{3}x - y$               | $5\sqrt{\frac{2}{3}}z$            |                                   |                        |         |
| [11](31)11   |  | $\frac{2}{3}\sqrt{6}z$            | $5\sqrt{\frac{2}{3}}z$            | $-\frac{2}{3}x + z$               |                                   |                        |         |
| [11](3,1,1)S |  | [11](31)11                        | [11](31)21                        |                                   |                                   |                        |         |
| [11](31)11   |  | $-\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}z$    | 0                                 |                                   | $J = 1$                           |                        |         |
| [11](31)21   |  | 0                                 | $-\frac{2}{3}x + \frac{2}{3}z$    |                                   |                                   |                        |         |
| [2](4,1,1)S  |  | [2](40)20                         | [2](22)20                         | [11](31)11                        | [11](31)21                        | [11](31)31             |         |
| [2](40)20    |  | $-\frac{2}{3}x$                   | 0                                 | $-\sqrt{\frac{2}{3}}z$            | $-\frac{1}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}z$ | $2\sqrt{\frac{2}{3}}z$ | $J = 2$ |
| [2](22)20    |  | 0                                 | $-\frac{1}{3}x$                   | $-\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}z$ | $\frac{1}{3}z$                    | $2\sqrt{\frac{2}{3}}z$ |         |
| [11](31)11   |  | $-\sqrt{\frac{2}{3}}z$            | $-\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}z$ | $-\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}z$    | 0                                 | 0                      |         |
| [11](31)21   |  | $-\frac{1}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}z$ | $\frac{1}{3}z$                    | 0                                 | $-\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}z$    | 0                      |         |
| [11](31)31   |  | $2\sqrt{\frac{2}{3}}z$            | $2\sqrt{\frac{2}{3}}z$            | 0                                 | 0                                 | $-\frac{1}{3}x + 2z$   |         |
| [11](3,1,1)S |  | [11](31)21                        | [11](31)31                        |                                   |                                   |                        |         |
| [11](31)21   |  | $-\frac{2}{3}x - z$               | 0                                 |                                   |                                   |                        | $J = 3$ |
| [11](31)31   |  | 0                                 | $-\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}z$    |                                   |                                   |                        |         |
| [2](4,1,1)S  |  | [2](40)40                         | [11](31)31                        |                                   |                                   |                        |         |
| [2](40)40    |  | $-\frac{2}{3}x$                   | $-z$                              |                                   |                                   |                        | $J = 4$ |
| [11](31)31   |  | $-z$                              | $-\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}z$    |                                   |                                   |                        |         |

Tabla (8.11). Matrices de la interacción  
calculadas con respecto a las funciones de onda  
en el esquema SU(3),  $T = 0$ .

| $(A)(A_1 A_2)LS$ | $[2](40)21$                    | $[2](22)21$                    | $[2](40)01$                    | $[2](22)01$             | $[11](31)10$            |         |
|------------------|--------------------------------|--------------------------------|--------------------------------|-------------------------|-------------------------|---------|
| $[2](40)21$      | $-\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}z$ | 0                              | 0                              | 0                       | $+\frac{1}{3}\sqrt{7}z$ | $J = 1$ |
| $[2](22)21$      | 0                              | $-\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}z$ | 0                              | 0                       | $\frac{1}{3}\sqrt{2}z$  |         |
| $[2](40)01$      | 0                              | 0                              | $-\frac{1}{3}x - \frac{5}{3}z$ | $-\sqrt{5}z$            | $-\frac{1}{3}\sqrt{2}z$ |         |
| $[2](22)01$      | 0                              | 0                              | $-\sqrt{5}z$                   | $-\frac{2}{3}x - z$     | $-\frac{1}{3}\sqrt{2}z$ |         |
| $[11](31)10$     | $\frac{1}{3}\sqrt{7}z$         | $\frac{1}{3}\sqrt{2}z$         | $-\frac{1}{3}\sqrt{2}z$        | $-\frac{1}{3}\sqrt{7}z$ | $-\frac{1}{3}x$         |         |

| $(A)(A_1 A_2)LS$ | $[2](40)21$                    | $[2](22)21$                    | $[11](31)20$           |         |
|------------------|--------------------------------|--------------------------------|------------------------|---------|
| $[2](40)21$      | $-\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}z$ | 0                              | $-\sqrt{\frac{2}{3}}z$ | $J = 2$ |
| $[2](22)21$      | 0                              | $-\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}z$ | $\frac{1}{3}\sqrt{3}z$ |         |
| $[11](31)20$     | $-\sqrt{\frac{2}{3}}z$         | $\frac{1}{3}\sqrt{3}z$         | $-\frac{2}{3}x$        |         |

| $(A)(A_1 A_2)LS$ | $[2](40)41$                    | $[2](40)21$                       | $[2](22)21$             | $[11](31)30$                      |         |
|------------------|--------------------------------|-----------------------------------|-------------------------|-----------------------------------|---------|
| $[2](40)41$      | $-\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}z$ | 0                                 | 0                       | $\frac{1}{3}z$                    | $J = 3$ |
| $[2](40)21$      | 0                              | $-\frac{2}{3}x - z$               | 0                       | $-\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}z$ |         |
| $[2](22)21$      | 0                              | 0                                 | $-\frac{1}{3}x - z$     | $-\frac{2}{3}\sqrt{3}z$           |         |
| $[11](31)30$     | $\frac{1}{3}z$                 | $-\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}z$ | $-\frac{1}{3}\sqrt{3}z$ | $-\frac{1}{3}x$                   |         |

| $(A)(A_1 A_2)LS$ | $[2](40)41$                    |         |
|------------------|--------------------------------|---------|
| $[2](40)41$      | $-\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}z$ | $J = 4$ |

| $(A)(A_1 A_2)LS$ | $[2](40)41$          |         |
|------------------|----------------------|---------|
| $[2](40)41$      | $-\frac{2}{3}x - 2z$ | $J = 5$ |

## Bibliografía.

- 1.- E. Merzbacher, Quantum Mechanics, John Wiley and Sons, (New York, 1970), pags. 508-552.
- 2.- R. Leighton, Principles of Modern Physics, Mc. Graw Hill, (New York, 1959), pág. 242.  
L. De La Peña, Introducción a la Mecánica Cuántica, CECSA, (México, 1980), pags. 482, 490.
- 3.- J. Ziman, Elements of Advanced Quantum Theory, Cambridge University, (Cambridge, 1980), cap.1 pags. 1-31, cap. 2 pags 43-48.
- 4.- L. Landau y E. Lifchitz, Mecánica Cuántica, Teoría no relativista, Vol. III del curso de Física Teórica, Reverté, (Méx. 1979), pag. 266.
- 5.- A. de Shalit y H. Feshbach, pag 203, Theoretical nuclear physics, Jhon Wiley and Sons, (New York, 1974).
- 6.- M. Moshinsky, ver ref. (13)
- 7.-M. Moshinsky, Bases for the irreducible representations of the unitary groups and some applications, Journal mathematical of physics, Vol. 4, num. 9, sept. 1963, pags. 1128-1139.
- 8.- M. Moshinsky y P. Kramer, Group Theory of armonics oscillators and nuclear structure , en Group Theory and Its applications, Vol. 1, editado por E. M. Loebel. Academic Press, (New York, 1968).
- 9.- I. Sokolnikoff, Advanced Calculus, Mc. GRAW HILL, (New York 1939), pag. 75.
- 10.- Ver por ejemplo la referencia (8).
- 11.- B. Wybourne, Classical groups for physicists, John Wiley and Sons, (New York 1974), pags 46-48.
- 12.- M. Hamermesh, Group Theory and Its applications to physical problems, Addison , (Mass. 1962). cap X.
- 13.- M. Moshinsky, Group Theory and the many body problem. Gordon and Breach, (New York, 1967), pags 10-21.
- 14.- E. Chacón y M. de Llano, Exchange operators in second quantization formalism. XIII 2, Rev. Mex. de Fis. 1964.
- 15.-A. de Shalit e I. Talmi, Nuclear Shell theory, Academic Press (New York, 1963) pag 202-204.
- 16.- Puede verse, por ejemplo, la referencia (13).

17.- J.P. Elliott, Proc. Roy. Soc., A 245, 128 y 562 (1958).

19.- J. Flores et al. Nuclear Physics 72, 352, (1965)

72, 379, (1965).

K. B. Wolf, Tesis, UNAM.

18.- Vea la ref.(13).

20.- E. Chacón y M. De Llano, Transformation Brackets between cartesian ....., XII 2 Rev. mex de fis. (1964).

21.- Journal of mathematical Physics, Vol. 8 num 6, junio 1967.

Lowering and raising operators for the orthogonal groups.. .  
Sing shin Fang et al.

22.- H. Weyl, The Theory of groups and quantum mechanics, Dover  
(N.Y. 1950) pag. 383.

23.- Littlewood D.E., The Theory of group Characters, Oxford U.  
pag. 236.

24.- Ref. (13) pag. 68.

25.- Ref.(13) pag. 17.

26.- Ref. (13) pags. 65-79.



CAPITULO VI.

SECCION 1. INTERACCION CENTRAL MAS GENERAL EN LA CAPA 2s-1d.

A continuación estudiaremos la interacción más general de uno y de dos cuerpos, en el esquema de supermultiplete, para un sistema de nucleones que se encuentran en la capa nuclear 2s-1d. En esta situación, el hamiltoniano en el lenguaje de segunda cuantización se puede escribir como <sup>1)</sup>

$$\hat{H} = \sum_{s_1} \langle s_1 | H_1 | s_1 \rangle b_{s_1}^\dagger b_{s_1} + \frac{1}{2} \sum_{s_1, s_2} \sum_{q_1, q_2} \langle s_1, s_2 | V_{12} | s_1, s_2 \rangle b_{q_1}^\dagger b_{q_2}^\dagger b_{s_1} b_{s_2} \quad (1.1)$$

donde  $b_s^\dagger$  es el operador fermiónico de creación de un nucleón en el estado  $|s\rangle$ ,  $|s, s_2\rangle$  denota la función de onda de dos nucleones expresada en la forma desacoplada (i.e.,  $|s, s_2\rangle = |s_1\rangle \otimes |s_2\rangle$ ), y  $|s\rangle$  son los estados de partícula independiente de los nucleones caracterizados por los números cuánticos: orbital, de espín y de isoespín (i.e., las funciones de onda  $|s\rangle$  presentan la estructura

$$|s\rangle = |v, \ell, m\rangle \otimes |1/2, \sigma\rangle \otimes |1/2, \tau\rangle; \quad (1.2)$$

aquí,  $|v, \ell, m\rangle$  es la función de onda de un nucleón moviéndose en un potencial de oscilador armónico, que tiene  $v$  cuantos y momento angular  $\ell$  con proyección  $m$ ;  $|1/2, \sigma\rangle$  denota un estado con proyección de espín  $s = 1/2, \sigma$ ; y  $|1/2, \tau\rangle$  nos dice si el nucleón es un protón (proyección de isoespín  $\tau = 1/2$ ) o es un neutrón (proyección de isoespín  $\tau = -1/2$ )).

En el esquema de supermultiplete tenemos que las interacciones de uno y de dos cuerpos son independientes del espín y del isoespín. Si además consideramos que las interacciones  $V_{12}$  que aparecen en (1.1) son centrales, esa expresión se podrá reescribir así:

$$\hat{H} = \sum_{\ell m \tau} \langle 2\ell m | H_1 | 2\ell m \rangle b_{\ell m \tau}^\dagger b_{\ell m \tau} + \frac{1}{2} \sum_{\substack{\ell_1 m_1 s_1 \\ \ell_2 m_2 s_2}} \sum_{\substack{\ell_1 m_1 \\ \ell_2 m_2}} \langle 2\ell_1 m_1, 2\ell_2 m_2 | V_{12} | 2\ell_1 m_1, 2\ell_2 m_2 \rangle b_{\ell_1 m_1 s_1}^\dagger b_{\ell_2 m_2 s_2}^\dagger b_{\ell_1 m_1 s_1} b_{\ell_2 m_2 s_2} \quad (1.3)$$

donde hemos escrito explícitamente  $s$  para evitar confusiones, y se ha definido  $\bar{s} = \sigma, \tau$ .

De la teoría del momento angular <sup>2)</sup> tenemos que

$$\langle \ell_1 m_1, \ell_2 m_2 | V_{12} | \ell_1 m_1, \ell_2 m_2 \rangle = \langle \ell_1 m_1, \ell_2 m_2 | V_{12} | \ell_1 m_1, \ell_2 m_2 \rangle \quad (1.4)$$

donde  $\langle 2_1 m_1, 2_2 m_2 | LM \rangle$  es un coeficiente de Clebsch-Gordan.

Sustituyendo (1.4) y  $\langle 2_1 m_1 | H_1 | 2_1 m_1 \rangle$  en la expresión

(1.0) del hamiltoniano, encontramos:

$$\hat{H} = \sum_{\ell} \epsilon_{\ell} \sum_{m_1} b_{\ell m_1}^{\dagger} b_{\ell m_1}^{\text{ms}} + \frac{1}{2} \sum_{LM} \sum_{\substack{2_1 m_1, 2_2 m_2 \\ 2_1' m_1', 2_2' m_2'}} \langle 2_1 m_1, 2_2 m_2 | LM \rangle \langle 2_1' m_1', 2_2' m_2' | LM \rangle \\ \times \langle 2\ell, 2\ell; L | \nu_{L\ell} | 2\ell', 2\ell'; L \rangle \sum_{\substack{2_1 m_1, 2_2 m_2 \\ 2_1' m_1', 2_2' m_2'}} b_{2_1 m_1}^{\dagger} b_{2_2 m_2}^{\dagger} b_{2_1' m_1'}^{\text{ms}} b_{2_2' m_2'}^{\text{ms}} \quad (1.5)$$

Con el objeto de simplificar el manejo de los índices, se introduce la siguiente notación: a los operadores fermiónicos con  $\ell = 2$  los denotaremos indistintamente por  $b_{2m_2}^{\dagger}$ ,  $b_{2m_2}^{\text{ms}}$  o por  $b_{m_2}^{\dagger}$ ,  $b_{m_2}^{\text{ms}}$ ; mientras que los que tengan  $\ell = 0$  los distinguiremos por  $b_{00}^{\dagger}$ ,  $b_{00}^{\text{ms}}$  o por  $\tilde{b}_0^{\dagger}$ ,  $\tilde{b}_0^{\text{ms}}$ . Por otro lado, el símbolo

$$[b_{\ell_1}^{\dagger} \times b_{\ell_2}^{\dagger}]_M^L \text{ indica el producto tensorial en } O(3); \text{ i.e.,} \\ [b_{\ell_1}^{\dagger} \times b_{\ell_2}^{\dagger}]_M^L = \sum_{m_1 m_2} \langle 2 m_1 2 m_2 | LM \rangle b_{2 m_1}^{\dagger} b_{2 m_2}^{\dagger} \quad (1.0)$$

Un breve examen de la ecuación (1.5) muestra que, además de los operadores de un cuerpo  $\sum_{m_2} b_{m_2}^{\dagger} b_{m_2}^{\text{ms}}$ , existen nueve interacciones hermiteanas independientes

$$\hat{A}_L \equiv \sum_{\substack{2_1 m_1, 2_2 m_2 \\ 2_1' m_1', 2_2' m_2'}} \langle 2 m_1, 2 m_2 | LM \rangle \langle 2 m_1', 2 m_2' | LM \rangle \sum_{\ell_1 \ell_2} b_{\ell_1 m_1}^{\dagger} b_{\ell_2 m_2}^{\dagger} b_{\ell_1' m_1'}^{\text{ms}} b_{\ell_2' m_2'}^{\text{ms}}, \\ = \sum_{\substack{2_1 m_1, 2_2 m_2 \\ 2_1' m_1', 2_2' m_2'}} \sqrt{2L+1} [(b_{\ell_1}^{\dagger} \times b_{\ell_2}^{\dagger})_M^L \times (b_{\ell_1'}^{\text{ms}} \times b_{\ell_2'}^{\text{ms}})]_0^L, \quad L=0, 1, 2, 3, 4; \quad (1.7)$$

$$\hat{B} \equiv \sum_{\substack{2_1 m_1, 2_2 m_2 \\ 2_1' m_1', 2_2' m_2'}} \{ \tilde{b}_{\ell_1}^{\dagger} b_{\ell_2 m_2}^{\text{ms}} b_{\ell_1' m_1'}^{\text{ms}} \tilde{b}_{\ell_2'}^{\text{ms}} + \tilde{b}_{\ell_2}^{\dagger} b_{\ell_1 m_1}^{\text{ms}} b_{\ell_2' m_2'}^{\text{ms}} \tilde{b}_{\ell_1'}^{\text{ms}} \\ + \tilde{b}_{\ell_1}^{\dagger} b_{\ell_2 m_2}^{\text{ms}} b_{\ell_1' m_1'}^{\text{ms}} \tilde{b}_{\ell_2'}^{\text{ms}} + \tilde{b}_{\ell_2}^{\dagger} b_{\ell_1 m_1}^{\text{ms}} b_{\ell_2' m_2'}^{\text{ms}} \tilde{b}_{\ell_1'}^{\text{ms}} \}, \\ = \sum_{\ell_1 \ell_2} \{ [b_{\ell_1}^{\dagger} \times b_{\ell_2}^{\dagger}]_0^L \tilde{b}_{\ell_1'}^{\text{ms}} \tilde{b}_{\ell_2'}^{\text{ms}} - [b_{\ell_1}^{\dagger} \times b_{\ell_2}^{\dagger}]_0^L \tilde{b}_{\ell_2'}^{\text{ms}} \tilde{b}_{\ell_1'}^{\text{ms}} \\ + \tilde{b}_{\ell_1}^{\dagger} \tilde{b}_{\ell_2'}^{\text{ms}} [b_{\ell_1'}^{\text{ms}} \times b_{\ell_2'}^{\text{ms}}]_0^L - \tilde{b}_{\ell_2}^{\dagger} \tilde{b}_{\ell_1'}^{\text{ms}} [b_{\ell_1'}^{\text{ms}} \times b_{\ell_2'}^{\text{ms}}]_0^L \}; \quad (1.8)$$

$$\hat{C} \equiv \sum_{\ell_1 \ell_2} \tilde{b}_{\ell_1}^{\dagger} \tilde{b}_{\ell_2}^{\dagger} \tilde{b}_{\ell_1}^{\text{ms}} \tilde{b}_{\ell_2}^{\text{ms}} = \sum_{\ell_1 \ell_2} \tilde{b}_{\ell_1}^{\dagger} \tilde{b}_{\ell_2}^{\dagger} \{ \tilde{b}_{\ell_1}^{\text{ms}} \tilde{b}_{\ell_2}^{\text{ms}} - 1 \}; \quad (1.9)$$

$$\hat{D} \equiv \sum_{\substack{2_1 m_1, 2_2 m_2 \\ 2_1' m_1', 2_2' m_2'}} \langle 2 m_1, 2 m_2 | 00 \rangle \{ b_{\ell_1 m_1}^{\dagger} b_{\ell_2 m_2}^{\dagger} \tilde{b}_{\ell_1'}^{\text{ms}} \tilde{b}_{\ell_2'}^{\text{ms}} + \tilde{b}_{\ell_2}^{\dagger} \tilde{b}_{\ell_1}^{\dagger} b_{\ell_2' m_2'}^{\text{ms}} b_{\ell_1' m_1'}^{\text{ms}} \}, \\ = \sum_{\ell_1 \ell_2} \{ [b_{\ell_1}^{\dagger} \times b_{\ell_2}^{\dagger}]_0^L \tilde{b}_{\ell_1'}^{\text{ms}} \tilde{b}_{\ell_2'}^{\text{ms}} + \tilde{b}_{\ell_2}^{\dagger} \tilde{b}_{\ell_1}^{\dagger} [b_{\ell_1'}^{\text{ms}} \times b_{\ell_2'}^{\text{ms}}]_0^L \}; \quad (1.10)$$

$$\hat{E} \equiv \sum_{\substack{2_1 m_1, 2_2 m_2 \\ 2_1' m_1', 2_2' m_2'}} \langle 2 m_1, 0 m_2 | 2 M \rangle \langle 2 m_1', 2 m_2' | 2 M \rangle \sum_{\ell_1 \ell_2} \{ b_{\ell_1 m_1}^{\dagger} b_{\ell_2 m_2}^{\dagger} b_{\ell_1' m_1'}^{\text{ms}} b_{\ell_2' m_2'}^{\text{ms}} \\ + b_{\ell_1 m_1}^{\dagger} b_{\ell_2 m_2}^{\dagger} b_{2 m_1'}^{\text{ms}} b_{2 m_2'}^{\text{ms}} \}, \\ = \sum_{\ell_1 \ell_2} \{ [(b_{\ell_1}^{\dagger} \times b_{\ell_2}^{\dagger}) \times b_{\ell_1'}^{\text{ms}}]_0^L \tilde{b}_{\ell_2'}^{\text{ms}} + \tilde{b}_{\ell_1}^{\dagger} \tilde{b}_{\ell_2}^{\dagger} [(b_{\ell_1'}^{\text{ms}} \times b_{\ell_2'}^{\text{ms}})]_0^L \}. \quad (1.11)$$

En términos de estos operadores, el hamiltoniano (1.5) se puede expresar como

$$\hat{H} = \epsilon_s \sum_{\ell_1} \tilde{b}_{\ell_1}^{\dagger} \tilde{b}_{\ell_1}^{\text{ms}} + \epsilon_d \sum_{\ell_1 m_1} b_{\ell_1 m_1}^{\dagger} b_{\ell_1 m_1}^{\text{ms}} + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^4 a_k \hat{A}^k \\ + b \hat{B} + \frac{1}{2} c \hat{C} + \frac{1}{2} d \hat{D} + e \hat{E}. \quad (1.12)$$

donde los números  $s, d, 0, 1, 2, 3, 4, b, c, d$  y  $e$  constituyen los parámetros del modelo, y su relación con los elementos de matriz que aparecen en (1.1) es

$$\begin{aligned} Q_L &= \langle d^2 L | V_{12} | d^2 L \rangle, \quad L = 0, 1, 2, 3, 4; \\ b &= \langle ds 2 | V_{12} | ds 2 \rangle; \quad c = \langle s^2 0 | V_{12} | s^2 0 \rangle; \\ d &= \langle d^2 0 | V_{12} | s^2 0 \rangle; \quad e = \langle ds 2 | V_{12} | d^2 2 \rangle. \end{aligned}$$

Como mencionábamos en el Cap. I de esta parte II, si introducimos 24 estados de partícula independiente para la descripción de los estados de un núcleo en la capa  $2s-1d$ , el grupo de simetrías dentro del espacio de este modelo es el de transformaciones unitarias  $U(24)$ .

Los operadores  $\phi_{\pm m \frac{1}{2}}^{s' m' s'}$   $\equiv b_{\pm m \frac{1}{2}}^+ b^{s' m' s'}$  son los generadores del grupo unitario  $U(24)$ , debido a las relaciones de anti-conmutación que satisfacen los operadores de creación y aniquilación fermiónicos:

$$\{ b^{s' m' s'}, b_{\pm m \frac{1}{2}}^+ \} = \delta_{\pm m \frac{1}{2}}^{s' m' s'}$$

Contrayendo los generadores de  $U(24)$  con respecto a los índices del espacio o con respecto a los índices de espín e isospín tenemos los operadores

$$C_{\frac{1}{2}}^{s'} \equiv \sum_{\pm m} \phi_{\pm m \frac{1}{2}}^{s' m' s'} \quad (1.13)$$

$$F_{\pm m}^{s' m' s'} \equiv \sum_{\frac{1}{2}} \phi_{\pm m \frac{1}{2}}^{s' m' s'} \quad (1.14)$$

que constituyen los generadores de los grupos unitarios  $U(4)$  y  $U(b)$ , respectivamente. Además, estos operadores conmutan entre sí; i.e.,

$$[C_{\frac{1}{2}}^{s'}, F_{\pm m}^{s' m' s'}] = 0$$

Por lo tanto, los 52 operadores  $\{C_{\frac{1}{2}}^{s'}, F_{\pm m}^{s' m' s'}\}$  son generadores de un grupo producto directo  $U(b) \times U(4) \subset U(24)$ . Esta descomposición corresponde al esquema de supermultiplete originalmente discutida por Wigner (Cf. Cap. I). Así, si las representaciones de  $U(b)$  son caracterizadas por la partición  $\{f\}$ , las de  $U(4)$  se caracterizan por la partición conjugada  $\{\bar{f}\}$  porque la representación totalmente antisimétrica de  $U(4)$   $[1^N]$  (para un sistema de  $N$  nu-

cleones) únicamente puede obtenerse, y sólo una vez, del producto  $[f] \times [\tilde{f}]$ .

El grupo unitario en seis dimensiones  $U(6)$  es el grupo de transformaciones en el espacio orbital de los estados asociados a la capa  $2s-1d$ , mientras que  $U(4)$  es el grupo de transformaciones unitarias en cuatro dimensiones asociadas con la parte de espín e isoespín de los estados.

Como vimos al presentar el esquema de supermultiplete de Wigner, se puede tomar como subgrupo de  $U(4)$  el producto directo de los grupos unitarios unimodulares de dos dimensiones  $SU^{(S)}(2)$ , asociado con el espacio de espín, y  $SU^{(I)}(2)$ , asociado con el espacio de isoespín.

Con respecto al grupo  $U(6)$ , como estamos considerando interacciones centrales, se quiere tener estados clasificados con buen momento angular orbital total. Entonces nos preguntamos, como hicimos al considerar el esquema  $SU(3)$  de Elliott, ¿cuáles son las posibles cadenas de subgrupos de  $U(6)$  que satisfacen

$$U(6) \supset \dots \supset O(3) ?$$

Los estados de  $N$  fermiones en la capa  $2s-1d$  se pueden clasificar por las cadenas de subgrupos:

$$\begin{aligned} U(6) &\supset O(6) \supset O(5) \supset O(3), \\ U(6) &\supset SU(3) \supset O(3) \text{ y} \\ U(6) &\supset U(5) \supset O(5) \supset O(3). \end{aligned} \quad (1.15)$$

Es posible mostrar que éstas son las únicas cadenas posibles de subgrupos para el problema considerado <sup>3)</sup>. En efecto, como subgrupos inmediatos de  $U(6)$  se ha considerado a  $U(5)$ ,  $U(3)$  y  $O(6)$ ; sin embargo,  $O(6)$  es localmente isomorfo a  $SU(4)$  <sup>4)</sup>; de manera que se han considerado todos los posibles subgrupos de  $U(6)$  que pueden contener a  $O(3)$ , a saber  $U(5)$ ,  $U(4)$  y  $U(3)$ .

En la siguiente sección, construimos los generadores y operadores invariantes de los grupos que aparecen en las ecuaciones (1.15), con el propósito de expresar el hamiltoniano (1.1) en

forma tal que podemos aprovechar la simetría de las funciones clasificadas de acuerdo a alguna de las cadenas en (1.15).

## SECCION 2. GENERADORES Y OPERADORES DE CASIMIR DE LAS CADENAS DE SUBGRUPOS DE $U(6)$ QUE CONTIENEN A $O(3)$ .

Como ya apuntábamos, los generadores del grupo  $U(6)$  pueden definirse como <sup>5)</sup>

$$\mathcal{E}_{2m}^{2m'} \equiv \sum_{\mathcal{E}} b_{2m\mathcal{E}}^+ b^{2m'\mathcal{E}} \quad (2.1)$$

ya que estos operadores satisfacen las relaciones de conmutación

$$[\mathcal{E}_{2m}^{2m'}, \mathcal{E}_{2m''}^{2m''}] = \mathcal{E}_{2m}^{2m''} \mathcal{E}_{2m''}^{2m'} - \mathcal{E}_{2m''}^{2m'} \mathcal{E}_{2m}^{2m''} \quad (2.2)$$

Si en (2.1) nos restringimos a considerar sólo operadores con  $l = 2$ , obtenemos los generadores de un subgrupo  $U(5)$  de  $U(6)$ :

$$\mathcal{E}_{2m}^{2m'} \equiv \sum_{\mathcal{E}} b_{2m\mathcal{E}}^+ b^{2m'\mathcal{E}} \quad (2.3)$$

Por otra parte, los generadores de un grupo  $O(6)$  pueden obtenerse al tomar la parte antisimétrica de los operadores definidos en (2.1) <sup>6)</sup>:

$$\Delta_{2m}^{2m'} \equiv \mathcal{E}_{2m}^{2m'} - (-)^{m+m'} \mathcal{E}_{2, -m'}^{2, -m} \quad (2.4)$$

Y considerando, como en (2.3), sólo los operadores de este conjunto con  $l = 2$ , tenemos que

$$\Delta_{2m}^{2m'} \equiv \sum_{\mathcal{E}} \left\{ b_{2m\mathcal{E}}^+ b^{2m'\mathcal{E}} - (-)^{m+m'} b_{2, -m'}^+ b^{2, -m'\mathcal{E}} \right\} \quad (2.5)$$

son los diez generadores de un grupo  $O(5)$ .

Los operadores de momento angular son los generadores del grupo  $O(3)$ , y se ha mostrado <sup>7)</sup> que están dados por las expresiones

$$\begin{aligned} \hat{L}_m &\equiv \sqrt{6} \sum_{mm'} \langle 2m | M | 2m' \rangle \sum_{\mathcal{E}} b_{2m\mathcal{E}}^+ b^{2m'\mathcal{E}} \\ &= \sqrt{\frac{5}{2}} \sum_{mm'} \langle 2m 2m' | 1M \rangle (-)^{m'} \Delta_{2m}^{2, -m'} \end{aligned} \quad (2.6)$$

Como podemos apreciar en estas expresiones de los generadores de  $O(3)$ , éste es un subgrupo tanto de  $U(5)$  como de  $O(5)$ , que fueron introducidos en (2.3) y (2.5).

Para obtener los generadores del grupo  $SU(3)$ , se debe proyectar el operador de momento cuadrupolar  $Q_m \equiv -\sqrt{\frac{8\pi}{15}} r^2 Y_{2m}(\Theta, \Phi)$  en el espacio vectorial de la capa  $2s-1d$ :

$$\begin{aligned} \hat{Q}_m &= -\sqrt{\frac{8\pi}{15}} \sum_{mm'} \langle 2m | Y_{2m}(\Theta, \Phi) | 2m' \rangle \sum_{\mathcal{E}} b_{2m\mathcal{E}}^+ b^{2m'\mathcal{E}} \\ &= \sqrt{\frac{7}{3}} \sum_{mm'} \langle 2m 2m' | 20 \rangle \left( b_{2m}^+ b_{2m'} + b_{2, -m}^+ b_{2, -m'} \right) \end{aligned} \quad (2.7)$$

Estos operadores, junto con los de momento angular definidos en (2.6), son los generadores de un grupo  $SU(3)$ .

Habiendo determinado los generadores de todos los grupos relevantes de las tres cadenas de  $U(6)$ , el resto de esta sección lo ocuparemos en encontrar los operadores de Casimir de primero y segundo orden de cada uno de los grupos en las cadenas ya mencionadas.

Los invariantes de Casimir de primer orden de  $U(6)$  y  $U(5)$  son, respectivamente,

$$\hat{X} \equiv \hat{N}(6) \equiv \sum_{p,m} \left( \sum_{\bar{p},\bar{m}} b_{p,m}^\dagger b_{\bar{p},\bar{m}} \right), \quad p, \bar{p} = 0, 2; \quad (2.8)$$

$$\hat{\eta} \equiv \hat{N}(5) \equiv \sum_m \left( \sum_{\bar{m}} b_{m,\bar{m}}^\dagger b_{m,\bar{m}} \right). \quad (2.9)$$

Si al definir los generadores de  $U(6)$  hubiéramos utilizado operadores bosónicos (i.e., si  $b_{p,m}^\dagger b_{\bar{p},\bar{m}} = b_{\bar{p},\bar{m}} b_{p,m}^\dagger$  con  $[b_i^\dagger, b_j] = \delta_{ij}$ ), únicamente las representaciones totalmente simétricas serían diferentes de cero, por lo que bastaría introducir  $\hat{N}(6)$  y  $\hat{N}(5)$  para poder caracterizar las RI de  $U(6)$  y  $U(5)$ , respectivamente <sup>8)</sup>. Sin embargo, cuando tratamos con operadores fermiónicos debemos tratar de identificar las RI de  $U(6)$ , que pueden no ser simétricas, utilizando los invariantes de Casimir de segundo orden de  $U(6)$  y  $U(5)$ , que son, respectivamente,

$$\Gamma(6) \equiv \sum_{p,m} \sum_{\bar{p},\bar{m}} b_{p,m}^\dagger b_{\bar{p},\bar{m}} b_{\bar{p},\bar{m}}^\dagger b_{p,m}, \quad p, \bar{p} = 0, 2, \quad (2.10)$$

$$\Gamma(5) \equiv \sum_{m,\bar{m}} b_{m,\bar{m}}^\dagger b_{m,\bar{m}} b_{m,\bar{m}} b_{m,\bar{m}}^\dagger. \quad (2.11)$$

Existe una relación entre los operadores definidos en (2.3) y (2.9) que puede ser de alguna utilidad:

$$\hat{X} = \hat{\eta} + \sum_{\bar{p},\bar{m}} b_{\bar{p},\bar{m}}^\dagger b_{\bar{p},\bar{m}}. \quad (2.12)$$

La relación análoga entre los operadores de Casimir de segundo orden (2.10) y (2.11) es:

$$\Gamma(6) = \Gamma(5) + (\hat{X} - \hat{\eta})(\hat{X} - \hat{\eta} + 5) - \hat{\eta} + 2 \sum_m b_{2m}^\dagger b_{2m} b_{00}^\dagger b_{00}. \quad (2.13)$$

La expresión del operador de Casimir de segundo orden de  $O(5)$  es <sup>9)</sup>

$$\Lambda^2 \equiv \frac{1}{2} \sum_{m,m'} \Lambda_{2m}^\dagger \Lambda_{2m'} \Lambda_{2m} \Lambda_{2m'}^\dagger,$$

el cual, con un rearrreglo de los factores, puede escribirse en

la forma

$$\Lambda^2 = \Gamma(5) + \sum_{\xi_1, \xi_2} \left( \sum_m (-)^m b_{m\xi_1}^+ b_{-m\xi_2}^+ \right) \left( \sum_{m'} (-)^{m'} b_{m'\xi_1}^- b_{-m'\xi_2}^- \right) - \hat{\chi}. \quad (2.14)$$

Análogamente, el operador de Casimir de segundo orden de  $O(6)$ ,

$$\hat{\mathcal{L}}^2 = \frac{1}{2} \sum_{\ell m} \sum_{\ell' m'} \Lambda_{\ell m}^{\ell' m'} \Lambda_{\ell' m'}^{\ell m}.$$

lo podemos escribir en términos de  $L'(6)$ :

$$\hat{\mathcal{L}}^2 = \Gamma(6) + \sum_{\xi_1, \xi_2} \left( \sum_m (-)^m b_{m\xi_1}^+ b_{-m\xi_2}^+ + \tilde{b}_{\xi_1}^+ \tilde{b}_{\xi_2}^+ \right) \times \left( \sum_{m'} (-)^{m'} b_{m'\xi_1}^- b_{-m'\xi_2}^- + \tilde{b}_{\xi_1}^- \tilde{b}_{\xi_2}^- \right) - \hat{\chi}. \quad (2.15)$$

Una expresión alternativa de  $\hat{\mathcal{L}}^2$  es

$$\hat{\mathcal{L}}^2 = \Lambda^2 + \hat{K}^2. \quad (2.16)$$

donde se ha definido

$$\hat{K}^2 = \sum_{\xi_1, \xi_2} \left\{ \left( \sum_m (-)^m b_{m\xi_1}^+ b_{-m\xi_2}^+ \right) \tilde{b}_{\xi_1}^- \tilde{b}_{\xi_2}^- + \left( \sum_{m'} (-)^{m'} b_{m'\xi_1}^- b_{-m'\xi_2}^- \right) \tilde{b}_{\xi_1}^+ \tilde{b}_{\xi_2}^+ \right\} + \sum_m \left( \begin{matrix} 00 & 2m & 2m \\ 2m & 00 & 00 \end{matrix} + \begin{matrix} 2m & 2m & 00 \\ 00 & 2m & 2m \end{matrix} \right). \quad (2.17)$$

El operador de Casimir de segundo orden de  $O(3)$  es el cuadrado del operador de momento angular

$$\hat{L}^2 = \sum_{M=-1}^1 (-)^M \hat{L}_M \hat{L}_{-M}. \quad (2.18)$$

Este operador, junto con

$$\hat{Q}^2 = \sum_{M=-2}^2 (-)^M \hat{Q}_M \hat{Q}_{-M}, \quad (2.19)$$

nos permite escribir el operador de Casimir de segundo orden de  $SU(3)$  como <sup>10)</sup>

$$\hat{C}[SU(3)] = \frac{1}{2} \hat{L}^2 + \hat{Q}^2. \quad (2.20)$$

Los operadores de Casimir que hemos mencionado en esta sección nos van a servir para reescribir el Hamiltoniano (1.1) en una sección posterior.

### SECCION 3. CLASIFICACION DE LOS ESTADOS EN LA CAPA NUCLEAR 2s-1d.

Como hemos visto, cuando trabajamos en el esquema de supermultiplete el grupo de transformaciones entre los estados en la capa 2s-1d,  $U(24)$ , puede descomponerse en el producto directo de dos grupos de transformaciones: el grupo de transformaciones en el espacio de configuración  $U(6)$ , y el de transformaciones en el espacio de espín-isospín,  $U(4)$ . Como el sistema que estamos considerando es uno de  $N$  fermiones, la función de onda total debe pertenecer a la  $RT$  de  $U(24)$ ,  $[1^N]$ , que corresponde a un estado

completamente antisimétrico. Por esta razón, si una RI de  $U(6)$  está caracterizada por la partición de Young  $[h] = [h_1 \dots h_6]$ , la correspondiente RI de  $U(4)$ , lo estará por la partición  $[\tilde{h}]$ .

Al discutir el esquema de supermultiplete de Wigner vimos que el grupo  $U(4)$  admite la descomposición

$$U(4) \supset SU^{(S)}(2) \times SU^{(I)}(2)$$

Los estados de esta cadena se pueden denotar como

$$|[\tilde{h}] \in S M_S, I M_I \rangle, \quad (3.1)$$

donde  $S$  y  $M_S$  caracterizan una representación irreducible del grupo  $SU^{(S)}(2)$ ;  $I$  y  $M_I$ , una de  $SU^{(I)}(2)$ ; y  $\beta$  denota un número cuántico adicional que es necesario introducir para distinguir supermultipletes  $(S M_S, I M_I)$  equivalentes correspondientes a una RI  $[\tilde{h}]$  de  $U(4)$ .

En cuanto a la parte espacial de las funciones de onda, hemos visto que existen tres cadenas de subgrupos de  $U(6)$  que contienen al grupo de rotaciones espaciales  $O(3)$  (a estas cadenas se les denominan cadenas físicas).

Cuando suponemos que la interacción promedio entre los nucleones puede aproximarse por un potencial central de oscilador armónico, el hamiltoniano del sistema es invariante ante transformaciones del grupo unimodular unitario  $SU(3)$  y de su subgrupo  $O(3)$  (11). Por lo tanto, sus estados propios pueden caracterizarse por las etiquetas de las RI de  $SU(3)$  y  $O(3)$ , que son  $(k_1 k_2)$  y  $L$ , respectivamente; o sea, los estados de  $N$  nucleones clasificados de acuerdo a la cadena de subgrupos

$$U(6) \supset SU(3) \supset O(3),$$

pueden denotarse por

$$| [h] \alpha (k_1 k_2) \omega L M_L; [\tilde{h}] \beta S M_S, I M_I \rangle, \quad (3.2)$$

donde hemos incluido la parte del espacio de espín-isospín, y  $\alpha$  y  $\omega$  nos sirven para distinguir entre representaciones equivalentes  $(k_1 k_2)$  que aparecen al reducir  $[h]$ , y las RI  $L$  de  $O(3)$  equivalentes que aparecen al reducir  $(k_1 k_2)$ , respectivamente.

En la base vectorial determinada por los estados (3.2), la in-



teracción cuadrupolo-cuadrupolo es diagonal. De hecho, la cadena básica en el tratamiento del modelo SU(3) del núcleo es la que clasifica los estados nucleares como en (3.2). Debemos notar que Elliott, en su modelo SU(3), está tratando con un hamiltoniano mucho más particular que el que estamos considerando en (1.12).

Otra posible cadena de subgrupos de U(6) es

$$U(6) \supset O(6) \supset O(5) \supset O(3).$$

Esta cadena se introdujo por primera vez en el tratamiento del modelo de apareamiento <sup>12)</sup>. En este modelo se supone que la interacción residual de dos cuerpos entre los nucleones activos tiene la forma

$$\hat{V} = -V_0 \{ x \hat{Q}^2 + (1-x) \hat{P} \}, \quad 0 \leq x \leq 1,$$

donde  $V_0$  es un parámetro que indica la intensidad de la interacción,  $\hat{Q}^2$  denota la interacción cuadrupolo-cuadrupolo (de largo alcance), y  $\hat{P}$ , el operador de apareamiento orbital (de corto alcance).

Para caracterizar a los estados clasificados de acuerdo a la cadena considerada, debemos obtener la descomposición de una RI de cada grupo involucrado en RI de sus subgrupos inmediatos. La descomposición de RI de U(n) en RI de O(n) es bastante conocida <sup>13)</sup>. Las RI de O(6) están caracterizadas por el peso del estado de máximo peso, el cual consta de tres números:  $(\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \bar{\lambda}_3)$ ; en tanto que las RI de O(5) están determinadas por dos números:  $(k_1, k_2)$ . Las RI de O(5) contenidas en una RI dada de O(6), son las que satisfacen las desigualdades <sup>14)</sup>

$$\bar{\lambda}_1 \geq k_1 \geq \bar{\lambda}_2 \geq k_2 \geq |\bar{\lambda}_3|,$$

y cada RI de O(5) aparece sólo una vez. Para la reducción de O(5) a O(3) debe notarse que el estado de peso más alto de la RI  $(k_1, k_2)$  de O(5) tiene momento angular orbital total  $L = 2k_1 + k_2$  y la proyección más grande también ( $M_L = L$ ).

Luego, los estados clasificados de acuerdo a esta cadena pueden denotarse como

$$|[n] \alpha (\bar{\lambda}_1 \bar{\lambda}_2 \bar{\lambda}_3) (k_1 k_2) L M_L; [\tilde{n}] (\tilde{\lambda} S M_S, I M_I) \rangle, \quad (3.3)$$

donde  $\alpha$  y  $\omega$  nos sirven para distinguir RI equivalentes cuando tienen multiplicidad mayor que uno al efectuar la descomposición.

Finalmente, consideremos la cadena de subgrupos

$$U(6) \supset U(5) \supset O(5) \supset O(3).$$

Los estados clasificados de acuerdo a esta cadena los podemos expresar como

$$|[h][g] \alpha (\lambda_1 \lambda_2) \omega L M_L; [\tilde{h}] S M_S, I M_I\rangle, \quad (3.4)$$

donde ahora las RI del grupo  $U(5)$  están determinadas por la partición  $[g] = [g_1 \dots g_5]$ , y los demás números cuánticos ya han sido definidos.

Esta cadena no se había introducido para definir estados fermiónicos en la capa nuclear 2s-1d (en realidad, no se había considerado siquiera la construcción del hamiltoniano central más general en esta capa). Por tanto, es un problema aún sin solución la construcción de los paréntesis de transformación entre los estados definidos en (3.4), y los estados (3.2) y (3.3) correspondientes a las otras cadenas (éstos han sido determinados para RI de  $U(6)$  totalmente simétricas al obtener la solución general, usando teoría de grupos, del hamiltoniano del modelo de bosones con interacción<sup>15)</sup>).

Ahora que conocemos las características de las funciones clasificadas de acuerdo a cada una de las cadenas en (1.15), vamos a tratar de reescribir el hamiltoniano (1.12) en términos de los operadores de Casimir de las cadenas (1.15) que hemos encontrado en la sección anterior. Con esto, si existen núcleos cuyo hamiltoniano se encuentre descrito completamente por una de las cadenas consideradas (i.e., si su hamiltoniano se puede escribir en términos de los operadores de Casimir de una de las cadenas en (1.15)), podremos encontrar inmediatamente su espectro de energías.

SECCION 4. EXPRESION DEL HAMILTONIANO CENTRAL MAS GENERAL EN LA CAPA NUCLEAR  $2s-1d$  EN TERMINOS DE LOS OPERADORES DE CASIMIR DE LAS CADENAS DE SUBGRUPOS DE  $U(6)$  QUE CONTIENEN A  $O(3)$ .

Como dijimos, el hamiltoniano que estamos analizando (Eo. (1.12)), ha sido muy estudiado en conexi3n con el modelo de bosones con interacci3n (MBI). En este modelo se supone esencialmente que en n3cleos muy pesados los nucleones pierden su naturaleza fermi3nica debido a las intensas fuerzas de apareamiento existentes, asoci3ndose por pares que se comportan como bosones capaces de ocupar dos niveles de energa, uno con momento angular cero y otro con momento angular dos, lo que origina que los bosones que ocupan estos niveles de energa se denominen bosones "s" y bosones "d", respectivamente. En los n3cleos par-par todos los nucleones pueden asociarse de esta forma, y las distintas distribuciones de bosones dentro de estos niveles, as3 como las posibles interacciones entre los bosones, dan origen a los espectros, probabilidades de transici3n, y dem3s caracteristicas de los n3cleos. El hamiltoniano m3s general para bosones s-d es exactamente el que aparece en (1.1), con la salvedad de que los operadores de creaci3n y aniquilaci3n son en este caso bos3nicos. Este hecho nos indica que solamente las representaciones totalmente sim3tricas de  $U(6)$  son diferentes de cero. Sin embargo, en todos los dem3s aspectos el problema a resolver es el mismo que en nuestro caso. Fue en el MBI donde se introdujeron las tres cadenas (1.15) y donde se logr3 expresar el hamiltoniano (1.1) como combinaci3n lineal de los operadores de Casimir de los subgrupos de las cadenas mencionadas <sup>16)</sup>.

Siguiendo las ideas desarrolladas para el MBI, encontraremos la expresi3n del hamiltoniano (1.12) en t3rminos de operadores de Casimir de los grupos de las cadenas (1.15) para cualquier RI utilizando operadores fermi3nicos.

Con el objeto de facilitar los c3lculos, consideraremos pri-

mero el caso en que el hamiltoniano (1.12) contiene sólo fermiones "d" (con  $I = 2$ ). En esta situación, dicho hamiltoniano se reduce a

$$\hat{H}' \equiv \epsilon_d \hat{N} + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^4 a_k \hat{A}_k. \quad (4.1)$$

Definimos ahora los operadores

$$\hat{B}_L \equiv \sum_{\substack{S_1 S_2 \\ S_1 S_2}} \left[ [b_{S_1}^+ \times b^{S_1}]^L \times [b_{S_2}^+ \times b^{S_2}]^L \right]_0. \quad (4.2)$$

Efectuando un reacoplamiento de momentos angulares, podemos expresar los operadores  $\hat{A}_L$  definidos en (1.7), y que aparecen en (4.1), en términos de estos operadores como

$$\hat{A}_L = (-)^{L+1} \left( \frac{2L+1}{5} \right) \hat{N} + (-)^L (2L+1) \sum_L (-)^L \sqrt{2L+1} W(222L; 11) \hat{B}_L, \quad (4.3)$$

donde  $W(abcd; ef)$  son los coeficientes de Racah. Introduciendo los valores explícitos de estos coeficientes<sup>17)</sup>, construimos la tabla 4.I, en la que se muestra la transformación entre los operadores  $\hat{A}_L$  y los operadores  $\hat{B}_L$ .

TABLA 4.I. MATRIZ DE TRANSFORMACION ENTRE LOS OPERADORES  $\hat{A}_L$  Y LOS OPERADORES  $\hat{B}_L$ .

| $\hat{N}(5)$ | $\hat{B}_0$ | $\hat{B}_1$ | $\hat{B}_2$    | $\hat{B}_3$     | $\hat{B}_4$     |       |
|--------------|-------------|-------------|----------------|-----------------|-----------------|-------|
| $\hat{A}_0$  | -1/5        | 1/5         | $\sqrt{3}/5$   | $\sqrt{5}/5$    | $\sqrt{7}/5$    | 3/5   |
| $\hat{A}_1$  | 3/5         | 3/5         | $\sqrt{3}/2$   | $3\sqrt{5}/10$  |                 | -6/5  |
| $\hat{A}_2$  | -1          | 1           | $\sqrt{3}/2$   | $-3\sqrt{5}/14$ | $-4\sqrt{7}/7$  | 6/7   |
| $\hat{A}_3$  | 7/5         | 7/5         |                | $-4\sqrt{5}/5$  | $\sqrt{7}/2$    | -3/10 |
| $\hat{A}_4$  | -9/5        | 9/5         | $-6\sqrt{3}/5$ | $18\sqrt{5}/35$ | $-9\sqrt{7}/70$ | 3/70  |

Hemos introducido los operadores  $\hat{B}_L$  porque, utilizando la relación

$$\int_{2m}^{2m'} = \sum_{LM} (-)^m \langle 2m 2-m' | LM \rangle [b_{\frac{5}{2}}^+ \times b^{\frac{5}{2}}]^L_M \quad (4.4)$$

resulta sencillo expresar los operadores de Casimir  $\Gamma(5)$ ,  $\Lambda(5)$ ,  $\hat{L}^2$  y  $\hat{N}^2(5)$  en términos de ellos, como puede verse a continuación:

$$\Gamma(5) = \sum_L (-)^L \sqrt{2L+1} \hat{B}_L, \quad (4.5)$$

$$\Lambda^2 = -\sum_{L=1,3} 2\sqrt{2L+1} \hat{B}_L, \quad (4.6)$$

$$\hat{N}^2 = 5 \hat{B}_0. \quad (4.7)$$

$$\hat{L}^2 = -10\sqrt{3}\hat{B}_1. \quad (4.8)$$

Estas relaciones constituyen un sistema de cuatro ecuaciones con cinco "incógnitas" (los operadores  $\hat{B}_L$ ). Entonces podemos despejar cuatro de los cinco operadores  $\hat{B}_L$  en términos de los cuatro operadores de Casimir y el operador  $\hat{B}_L$  restante, que elegimos  $\hat{B}_4$  como podemos ver a continuación:

$$\hat{B}_0 = \frac{1}{5}\hat{\eta}^2, \quad (4.9a)$$

$$\hat{B}_1 = -\frac{1}{10\sqrt{3}}\hat{L}^2, \quad (4.9b)$$

$$\hat{B}_2 = \frac{1}{2\sqrt{5}}\left\{2\Gamma(5) - \Lambda^2 - \frac{2}{5}\hat{\eta}^2 - 6\hat{B}_4\right\}, \quad (4.9c)$$

$$\hat{B}_3 = \frac{1}{2\sqrt{7}}\left\{\frac{1}{5}\hat{L}^2 - \Lambda^2\right\}. \quad (4.9d)$$

Sustituyendo estas relaciones en (4.3) obtenemos que la transformación entre las  $\hat{A}_L$  y los operadores de Casimir y  $\hat{B}_4$  es la que se muestra en la tabla 4.II.

TABLA 4.II. MATRIZ DE TRANSFORMACION ENTRE LOS OPERADORES  $\hat{A}_L$ , Y LOS OPERADORES DE CASIMIR DE LA CADENA  $U(6) \supset U(5) \supset O(5) \supset O(3)$  Y  $\hat{B}_4$ .

|             | $\hat{N}(5)$ | $\hat{N}^2(5)$ | $\Gamma(5)$ | $\Lambda^2$ | $\hat{L}^2$ | $\hat{B}_4$ |
|-------------|--------------|----------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| $\hat{A}_0$ | -1/5         |                | 1/5         | -1/5        |             |             |
| $\hat{A}_1$ | 3/5          | 3/50           | 3/10        | -3/20       | -1/20       | -21/10      |
| $\hat{A}_2$ | -1           | 17/70          | -3/14       | 11/28       | -3/28       | 3/2         |
| $\hat{A}_3$ | 7/5          | 11/25          | -4/5        | 3/20        | 1/20        | 21/10       |
| $\hat{A}_4$ | -9/5         | 9/35           | 18/35       | -27/140     | 3/28        | -3/2        |

Esto nos permite escribir el hamiltoniano (4.1) como

$$\hat{H}' \equiv \alpha_0 \hat{\eta} + \alpha_1 \hat{\eta}^2 + \alpha_2 \Gamma(5) + \alpha_3 \Lambda^2 + \alpha_4 \hat{L}^2 + \alpha_5 \hat{B}_4 \quad (4.10)$$

donde los parámetros  $\alpha_i$ , están relacionados con los parámetros de interacción (Cf. Ec. (1.12)) por la transformación que aparece en la tabla 4. III.

TABLA 4.III. MATRIZ DE TRANSFORMACION ENTRE LOS  
PARAMETROS  $\alpha_I$ , Y  $a_d$  Y  $a_L$ .

|            | $\epsilon_d$ | $a_0$ | $a_1$  | $a_2$  | $a_3$ | $a_4$   |
|------------|--------------|-------|--------|--------|-------|---------|
| $\alpha_0$ | 1            | -1/10 | 3/10   | -1/2   | 7/10  | -9/10   |
| $\alpha_1$ |              |       | 3/100  | 17/140 | 11/50 | 9/70    |
| $\alpha_2$ |              | 1/10  | 3/20   | -3/23  | -2/5  | 9/35    |
| $\alpha_3$ |              | -1/10 | -3/40  | 11/50  | 3/40  | -27/230 |
| $\alpha_4$ |              |       | -1/40  | -3/50  | 1/40  | 3/50    |
| $\alpha_5$ |              |       | -21/20 | 3/4    | 21/20 | -3/4    |

Teniendo el resultado (4.10), podemos expresar sin mucha dificultad el hamiltoniano (1.12), con fermiones "s" y "d", en términos de los operadores de Casimir de las cadenas de subgrupos (1.15). Ahora el hamiltoniano presenta cuatro interacciones más que en (4.1):  $\hat{B}$ ,  $\hat{C}$ ,  $\hat{D}$  y  $\hat{E}$ .

Utilizando (1.3) y (2.13) obtenemos que

$$\hat{B} = \tau_{00}^{00} \sum_m \tau_{2m}^{2m} + \sum_m \tau_{2m}^{2m} \tau_{00}^{00} + 2 \sum_m \tau_{2m}^{00} \tau_{00}^{2m} - 2 \sum_m \tau_{2m}^{2m},$$

$$= \Gamma(a) - \Gamma(b) - \frac{1}{2} \hat{X}^2 - 3 \hat{Y}^2 - 5 \hat{X} - 4 \hat{Y} + 4 \hat{X} \hat{Y}. \quad (4.11)$$

En el caso de la interacción  $\hat{C}$ , de (1.9) se deduce

$$\hat{C} = (\hat{X} - \hat{Y}) (\hat{X} - \hat{Y} - 1). \quad (4.12)$$

Para determinar  $\hat{D}$  utilizamos (1.10), (2.16) y (2.17):

$$\hat{D} = -\frac{1}{\sqrt{5}} \sum_{\substack{m_1, m_2 \\ m_1 + m_2 = 0}} \left\{ \left( \sum_m (-)^m b_{m, \substack{E_1 \\ E_2}}^{\dagger} b_{-m, \substack{E_1 \\ E_2}}^{\dagger} \right) \tilde{b}_{\substack{E_1 \\ E_2}}^{\substack{E_1 \\ E_2}} + \right. \\ \left. + \left( \sum_m (-)^m b_{m, \substack{E_1 \\ E_2}}^{\dagger} b_{-m, \substack{E_1 \\ E_2}}^{\dagger} \right) \tilde{b}_{\substack{E_1 \\ E_2}}^{\substack{E_1 \\ E_2}} \right\},$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{5}} \left\{ \hat{X}^2 - \Lambda^2 - \Gamma(a) + \Gamma(b) + (\hat{X} - \hat{Y})^2 \right\}. \quad (4.13)$$

Es más difícil conectar el operador  $\hat{E}$  con los operadores de Casimir involucrados. Observemos que de (2.19) es posible obtener:

$$\hat{Q}^2 = \sqrt{5} \sum_{\substack{E_1, E_2 \\ E_1 + E_2 = 0}} \left\{ \frac{1}{3} [(b_{E_1}^{\dagger} \times b_{E_2}^{\dagger})^2 \times (b_{E_1}^{\dagger} \times b_{E_2}^{\dagger})^2]_0^0 \right. \\ \left. + \frac{1}{3} \sqrt{7} [(b_{E_1}^{\dagger} \times b_{E_2}^{\dagger})^2 \times \{b_{E_1}^{\dagger} b_{E_2}^{\dagger} + \tilde{b}_{E_1}^{\dagger} b_{E_2}^{\dagger}\}]_0^0 \right. \\ \left. + \frac{1}{3} [\{b_{E_1}^{\dagger} b_{E_2}^{\dagger} + \tilde{b}_{E_1}^{\dagger} b_{E_2}^{\dagger}\} \times \{b_{E_1}^{\dagger} b_{E_2}^{\dagger} + \tilde{b}_{E_1}^{\dagger} b_{E_2}^{\dagger}\}]_0^0 \right\}. \quad (4.14)$$

El primer término entre corchetes lo podemos identificar como

$\frac{7}{3} \hat{B}_2$ ; reacomplando los operadores de creación y aniquilación en el segundo miembro, reconocemos en él a  $\frac{4}{3} \sqrt{7} \hat{E}$ ; para el último

término se tiene:

$$\frac{1}{3} \sum_{m \in \mathbb{Z}, \mathbb{Z}_2} \frac{1}{\sqrt{5}} (-)^m (b_{m \mathbb{Z}_2}^+ b_{-m \mathbb{Z}_2}^+ + b_{m \mathbb{Z}_2}^- b_{-m \mathbb{Z}_2}^-) (b_{m \mathbb{Z}_2}^+ b_{-m \mathbb{Z}_2}^- + b_{m \mathbb{Z}_2}^- b_{-m \mathbb{Z}_2}^+) \\ = \frac{4}{3\sqrt{5}} \{ \hat{\Lambda}^2 - \hat{\mathcal{L}}^2 + 2\Gamma(6) - 2\Gamma(5) - 2\Gamma(\hat{N} - \hat{N}') \}. \quad (4.16)$$

Reuniendo estos tres resultados y utilizando (4.1c), encontramos que

$$\hat{Q}^2 = \frac{4}{3} \sqrt{35} \hat{E} + \frac{8}{3} \Gamma(6) - \frac{1}{3} \Gamma(5) - \frac{4}{3} \hat{\mathcal{L}}^2 + \frac{1}{2} \hat{\Lambda}^2 \\ - \frac{47}{15} \hat{N}'^2 + \frac{16}{3} \hat{N} \hat{N}' - \frac{8}{3} \hat{N}^2 - 7 \hat{E}_4; \quad (4.17)$$

o, despejando la interacción  $\hat{E}$ ,

$$\hat{E} = \frac{3}{4\sqrt{35}} \{ \hat{Q}^2 + \frac{1}{3} \Gamma(5) - \frac{8}{3} \Gamma(6) - \frac{1}{2} \hat{\Lambda}^2 + \frac{4}{3} \hat{\mathcal{L}}^2 \\ + \frac{47}{15} \hat{N}'^2 - \frac{16}{3} \hat{N} \hat{N}' + \frac{8}{3} \hat{N}^2 + 7 \hat{E}_4 \}. \quad (4.18)$$

Por lo tanto, podemos escribir el hamiltoniano más general para fermiones "s" y "a" como

$$\hat{H} = \delta_0 \hat{N} + \delta_1 \hat{N}' + \delta_2 \hat{N}^2 + \delta_3 \hat{N}'^2 + \delta_4 \hat{N} \hat{N}' + \delta_5 \hat{\mathcal{L}}^2 \\ + \delta_6 \hat{Q}^2 + \delta_7 \hat{\Lambda}^2 + \delta_8 \hat{\mathcal{L}}^2 + \delta_9 \Gamma(5) + \delta_{10} \Gamma(6) + \delta_{11} \hat{E}_4, \quad (4.19)$$

donde los coeficientes  $\delta_i$  están definidos por las relaciones

$$\delta_0 \equiv \epsilon_d - \epsilon_s - \frac{1}{10} a_0 + \frac{3}{10} a_1 - \frac{1}{2} a_2 + \frac{7}{10} a_3 - \frac{9}{10} a_4 + 2b - \frac{1}{2} c, \quad (4.20a)$$

$$\delta_1 \equiv -\frac{5}{2} b - \frac{1}{2} c, \quad (4.20b)$$

$$\delta_2 \equiv \frac{3}{100} a_1 + \frac{17}{140} a_2 + \frac{11}{50} a_3 + \frac{9}{70} a_4 - \frac{1}{2} b + \frac{1}{2} c + \frac{47}{40\sqrt{35}} e - \frac{1}{2\sqrt{5}} d, \quad (4.20c)$$

$$\delta_3 \equiv \frac{1}{2} b + \frac{1}{2} c + \frac{1}{\sqrt{35}} e - \frac{1}{2\sqrt{5}} d, \quad (4.20d)$$

$$\delta_4 \equiv -c - \frac{2}{\sqrt{35}} e + \frac{1}{\sqrt{5}} d, \quad (4.20e)$$

$$\delta_5 \equiv -\frac{1}{40} a_1 - \frac{3}{56} a_2 + \frac{1}{40} a_3 + \frac{3}{56} a_4, \quad (4.20f)$$

$$\delta_6 \equiv \frac{3}{8\sqrt{35}} e, \quad (4.20g)$$

$$\delta_7 \equiv -\frac{1}{10} a_0 - \frac{3}{40} a_1 + \frac{11}{56} a_2 + \frac{3}{40} a_3 - \frac{21}{280} a_4 + \frac{1}{2\sqrt{5}} d - \frac{1}{6\sqrt{35}} e, \quad (4.20h)$$

$$\delta_8 \equiv -\frac{1}{2\sqrt{5}} d + \frac{1}{2\sqrt{35}} e, \quad (4.20i)$$

$$\delta_9 \equiv \frac{1}{10} a_0 + \frac{3}{20} a_1 - \frac{3}{28} a_2 - \frac{2}{5} a_3 + \frac{9}{35} a_4 - \frac{1}{2} b - \frac{1}{2\sqrt{5}} d + \frac{1}{8\sqrt{35}} e, \quad (4.20j)$$

$$\delta_{10} \equiv \frac{1}{2} b + \frac{1}{2\sqrt{5}} d - \frac{1}{\sqrt{35}} e, \quad (4.20k)$$

$$\delta_{11} \equiv -\frac{21}{20} a_1 + \frac{3}{4} a_2 + \frac{21}{20} a_3 - \frac{3}{4} a_4 + \frac{21}{8\sqrt{35}} e. \quad (4.20l)$$

La expresión (4.19) nos da el hamiltoniano, producido por fuerzas centrales, más general en la clase 2s-1d en términos de

los operadores de Casimir de los subgrupos que aparecen en las cadenas  $SU(3)$ ,  $O(6)$  y  $U(5)$  —más una interacción  $\hat{B}_4$ —.

El análisis matemático no termina aquí; aún falta encontrar la transformación entre las funciones clasificadas según cada una de las distintas cadenas de subgrupos (1.15) y diagonalizar la interacción  $\hat{B}_4$  en una de las bases. Una vez hecho esto, podremos empezar a calcular algunas de las propiedades de los núcleos dentro de este modelo con cierta facilidad, ya que se obtendrá una gran simplificación en los cálculos al utilizar las propiedades de simetría de los estados propios del hamiltoniano.

Para finalizar esta sección, vamos a ver qué relación tiene el hamiltoniano obtenido en (4.19), obtenido para operadores fermiónicos, con el del MBI, construido con operadores bosónicos (17').

Comencemos con la observación de que en el MBI las interacciones

$$\hat{A}_1 = \sqrt{3} \sum_{\xi_1, \xi_2} \left[ [b_{\xi_1}^\dagger \times b_{\xi_2}^\dagger]^\dagger \times [b^{\xi_1} \times b^{\xi_2}]^\dagger \right]_0^0, \quad (4.21a)$$

$$\hat{A}_3 = \sqrt{7} \sum_{\xi_1, \xi_2} \left[ [b_{\xi_1}^\dagger \times b_{\xi_1}^\dagger]^\dagger \times [b^{\xi_1} \times b^{\xi_1}]^\dagger \right]_0^0, \quad (4.21b)$$

no contribuyen al hamiltoniano. También notemos que una RI de  $U(5)$  contenida en una RI de  $U(6)$  completamente simétrica, debe ser totalmente simétrica.

Por otra parte, la simetría, respecto a  $U(5)$ , correspondiente a un operador de creación de una partícula,  $b_{m_3}^\dagger$ , es  $[1 \ 0^4]$ ; en tanto que la asociada al operador de aniquilación de una partícula —que es equivalente al operador de creación de un agujero—,  $b^{m_3}$ , está caracterizada por  $[1^4 \ 0]$ . Por lo tanto, el producto  $[b_{\xi_1}^\dagger \times b_{\xi_1}^\dagger]^\dagger$  tiene simetría

$$[1 \ 0^4] \otimes [1 \ 0^4] = [1^2 \ 0^3] + [2 \ 0^4]$$

dimensión

5x5

10

15

$L = 2x2$

$L = 1, 3$

$L = 0, 2, 4$

Las RI de  $O(3)$  correspondientes a cada RI de  $U(5)$  fueron obtenidas por análisis dimensional. En el caso de  $[b^{\xi_1} \times b^{\xi_1}]^\dagger$ , las simetrías presentes están caracterizadas por



$$[1^4 0] \otimes [1^4 0] = [2^2 1^2] + [2^3 0]$$

|           |           |            |               |
|-----------|-----------|------------|---------------|
| dimensión | 5x5       | 10         | 15            |
|           | $L = 2x2$ | $L = 1, 3$ | $L = 0, 2, 4$ |

Entonces es claro que las simetrías de  $A_1$  y  $A_3$  están contenidas en el producto

$$[2^2 1^2] \otimes [1^2 0^3] = [3^2 2 1^2] + [3 2^3 1] + [2^5]$$

Luego, al aplicar  $\hat{A}_1$  o  $\hat{A}_3$  a una función perteneciente a una BRI de  $U(5)$  totalmente simétrica no es posible obtener otra función caracterizada por una RI totalmente simétrica. Por lo tanto, en un espacio de funciones completamente simétricas,  $\hat{A}_1$  y  $\hat{A}_3$  se anulan.

En esta situación es posible conectar directamente la interacción  $\hat{B}_4$  con los operadores de Casimir, obteniéndose:

$$\hat{B}_4 = \frac{6}{7} \hat{n} - \frac{6}{35} \hat{n}^2 - \frac{1}{14} \Lambda^2 - \frac{1}{72} \hat{L}^2. \quad (4.22)$$

Y el hamiltoniano (4.19) se reduce a

$$\begin{aligned} H^{sim} = & \mathcal{S}_0 \hat{n} + \mathcal{S}_1 \hat{N} + \mathcal{S}_2 \hat{n}^2 + \mathcal{S}_3 \hat{N}^2 + \mathcal{S}_4 \hat{n} \hat{N} \\ & + \mathcal{S}_5 \hat{L}^2 + \mathcal{S}_6 \hat{Q}^2 + \mathcal{S}_7 \Lambda^2 + \mathcal{S}_8 \hat{I}^2, \end{aligned} \quad (4.23)$$

donde los nuevos coeficientes  $\mathcal{S}_i$  están definidos por

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_0 &\equiv \delta_0 + 3\delta_2 + \frac{6}{7}\delta_5, & \mathcal{S}_1 &\equiv \delta_6 + 5\delta_{10}, \\ \mathcal{S}_2 &\equiv \delta_1 + \delta_2 - \frac{6}{35}\delta_5, & \mathcal{S}_3 &\equiv \delta_7 + \delta_{10}, \\ \mathcal{S}_4 &\equiv \delta_8, & \mathcal{S}_5 &\equiv \delta_4 - \frac{1}{42}\delta_5, \\ \mathcal{S}_6 &\equiv \delta_9, & \mathcal{S}_7 &\equiv \delta_3 - \frac{1}{14}\delta_5, \\ & & \mathcal{S}_8 &\equiv \delta_{11}. \end{aligned}$$

y las  $\delta_i$  tienen los valores definidos en (4.20), pero con

$\alpha_1 = \alpha_3 = 0$ . El hamiltoniano (4.23) es el del MBI.

## SECCION 5. LIMITES EXACTOS DEL MODELO.

Cuando las interacciones en un núcleo son tales que el hamiltoniano del sistema puede escribirse en términos de los operadores de Casimir de una sola cadena de subgrupos de  $U(6)$ , se dice que existe una simetría dinámica del hamiltoniano, el cual es diagonal en la representación de dicha cadena.

Una simetría dinámica significa un rompimiento sistemático de la simetría de un grupo más grande (de  $U(6)$  en este caso). Por ejemplo, en la cadena que comienza con  $O(6)$ , la simetría  $U(6)$  es rota por el operador de Casimir  $\hat{J}^2$  de  $O(6)$ ; a su vez, la simetría  $O(6)$  es rota por el operador de Casimir  $\hat{\Lambda}^2$  de  $O(5)$ , y la simetría  $O(5)$  es rota por el operador de Casimir  $\hat{L}^2$  de  $O(3)$ . Sin embargo, la simetría de cada subgrupo se mantiene en el sentido de que, aunque las representaciones del subgrupo pueden dejar de estar degeneradas, diferentes representaciones no pueden mezclarse <sup>18)</sup>.

Ahora nos preguntamos: ¿exhiben los núcleos en la capa 2s-1d alguna de las simetrías dinámicas de  $U(6)$  en forma exacta? Aunque sabemos de algunos núcleos que presentan las simetrías de  $O(6)$  y de  $SU(3)$  de manera aproximada <sup>19)</sup>, una respuesta precisa requiere de un análisis detallado de los espectros de energías de los núcleos en la capa 2s-1d, así como de las probabilidades de transición que los caracterizan.

Para comenzar esta investigación es indispensable conocer los espectros característicos de cada uno de los límites exactos del modelo.

(i) LIMITE  $SU(3)$ .

En el límite  $SU(3)$  se tiene esencialmente que las interacciones entre fermiones "s" y "d" son de largo alcance, y la interacción de dos cuerpos debe ser tal que se debe llegar al hamiltoniano

$$H^{SU(3)} = \alpha_1 \hat{N} + \alpha_2 \hat{N}^2 + \alpha_3 \hat{L}^2 + \alpha_4 \hat{Q}^2 + \alpha_5 \Gamma(6). \quad (5.1)$$

donde los coeficientes  $\delta_i$  que no aparecen en esta expresión deben anularse. Una mirada a (4.20) nos convencerá de que el tipo de interacciones que conducen a un hamiltoniano como (5.1) es bastante restringido.

El ejemplo clásico de interacciones que satisfacen este límite es la interacción cuadrupolo-cuadrupolo discutida en conexión con el modelo SU(3) del núcleo.

Los valores propios del hamiltoniano (5.1) son <sup>20)</sup>

$$E^{SU(3)} = \delta_1 \sum_{i=1}^6 h_i + \delta_3 \left\{ \sum_{i=1}^6 h_i \right\}^2 + \delta_5 L(L+1) + \delta_6 \left\{ \frac{2}{3} (K_2 - K_1)^2 + \frac{2}{3} K_1 K_2 + 2K_3 \right\} + \delta_{10} \sum_{i=1}^6 h_i (h_i - 2i + 1) \quad (5.2)$$

El significado de cada uno de los números que aquí aparecen es el mismo que en la ecuación (3.2).

### (ii) LIMITE O(6).

En este límite el hamiltoniano toma la forma

$$H^{O(6)} = \delta_1 \hat{N} + \delta_3 \hat{N}^2 + \delta_5 \hat{L}^2 + \delta_7 \hat{\Lambda}^2 + \delta_8 \hat{J}^2 + \delta_{10} \hat{C}(6); \quad (5.3)$$

y todos los coeficientes  $\delta_i$ , salvo los que aquí aparecen, deben anularse. Una interacción cuyos elementos de matriz satisfacen esta condición es la de apareamiento.

Los estados propios del hamiltoniano son los mismos que describimos en (3.3), siendo la energía asociada a cada uno de ellos <sup>21)</sup>

$$E^{O(6)} = \delta_1 \sum_{i=1}^6 h_i + \delta_3 \left\{ \sum_{i=1}^6 h_i \right\}^2 + \delta_5 L(L+1) + \delta_7 \sum_{s=1}^2 K_s (K_s + 5 - 2s) + \delta_8 \sum_{s=1}^3 \lambda_s (\lambda_s + 6 - 2s) + \delta_{10} \sum_{m=1}^6 h_m (h_m - 2m + 1). \quad (5.4)$$

### (iii) LIMITE U(5).

Cuando la energía que separa los fermiones "s" de los fermiones "d" es lo suficientemente grande como para despreciar las interacciones entre ellos (i.e., cuando  $|\epsilon_d - \epsilon_s|$  es grande), el hamiltoniano será invariante ante transformaciones U(5), asociadas al espacio del fermión "d", y ante transformaciones U(1), asociadas al fermión "s". En este caso, el hamiltoniano (4.19) se reduce a

$$H^{U(5)} = \delta_0 \hat{N} + \delta_1 \hat{N} + \delta_2 \hat{N}^2 + \delta_3 \hat{N}^4 + \delta_4 \hat{N} \hat{N} + \delta_5 \hat{L}^2 + \delta_6 \hat{L}^4 + \delta_7 \hat{C}(5) + \delta_8 \hat{C}(1). \quad (5.5)$$



- 1) Moshinsky, Marcos, GROUP THEORY AND THE MANY-BODY PROBLEM (Gordon & Breach, N.Y., 1967), pp. 6.
- 2) Rose, M.E., ELEMENTARY THEORY OF ANGULAR MOMENTUM (John Wiley, N.Y., 1957), pp. 34.
- 3) Iachello, F., GROUP THEORY AND NUCLEAR SPECTROSCOPY aparecido en LECTURE NOTES IN PHYSICS, Vol. 119, NUCLEAR SPECTROSCOPY (Springer-Verlag, Berlin, 1980), pp. 140.
- 4) Wybourne, Brian G., CLASSICAL GROUPS FOR PHYSICISTS (John Wiley, N.Y., 1974), pp. 175.
- 5) Moshinsky, M., op. cit., pp. 9.
- 6) ibíd., pp. 36.
- 7) ibíd., pps. 8 y 40.
- 8) ibíd., pps. 21 y 36.
- 9) ibíd., pp. 36.
- 10) ibíd., pp. 44.
- 11) Brian G. Wybourne, op. cit., Cap. 20.
- 12) Moshinsky, M., op. cit., Caps. 5 y 7.  
Flores, J., Chacón, E., Mello, P.A., y de Llano, M.,  
NUCLEAR PHYSICS 72 (1965) pps. 352-416.
- 13) Hamermesh, Morton, GROUP THEORY (Addison-Wesley, Reading Mass., 1962), Secc. 7-10.
- 14) Flores, J., et al., op. cit., pps. 371-372.
- 15) Frank, Alejandro, TEORIA DE GRUPOS DEL MODELO DE BOSONES CON INTERACCION (Tesis, UNAM, 1979).
- 16) ibíd., pps. 50-52.
- 17) Rose, M.E., op. cit., pps. 110-111.
- 18) Barrett, Bruce R., REV. MEX. FIS. 27 (1981) 540-541.
- 19) De Llano, M., et al., op. cit., pps. 379-416.
- 20) Moshinsky, M., op. cit., pps. 37 y 52.
- 21) ibíd., pp. 37.
- 22) ibíd., pps. 37-38.
- 17') Parikh, Jitendra C., GROUP SYMMETRIES IN NUCLEAR STRUCTURE (Plenum Press, 1978)

## CONCLUSIONES

Como se indicó en la introducción, se ha intentado en esta tesis realizar una revisión cuidadosa de los métodos matemáticos, así como de las ideas físicas principales, subyacentes a algunos modelos nucleares. A pesar de que estas ideas físicas son por lo general bastante simples, su implementación práctica requiere del dominio de las técnicas que han venido desarrollándose a lo largo de los últimos 50 años, a partir del descubrimiento del neutrón por Chadwick en 1932, año que marca el surgimiento de los primeros modelos razonables del núcleo atómico. En particular, el reciente resurgimiento en el interés por los métodos de la Teoría de Grupos en conexión con el modelo de bosones interactuantes de A. Arima y F. Iachello (1974), subrayan de nueva cuenta el alcance y la elegancia de estas técnicas, lo que nos ha motivado a retomar el problema de la capa nuclear  $2s-1d$  desde este punto de vista, generalizando en principio los análisis de Moshinsky y sus colaboradores realizados hace 20 años. En este trabajo sólo se ha planteado el problema matemático de esta capa en términos del grupo  $U(6)$  y sus subgrupos, pero no se ha explorado, por ejemplo, la posibilidad de encontrar simetrías dinámicas, en analogía con las que se encuentran en núcleos pesados dentro de la descripción del modelo bosónico. Es importante entonces continuar esta investigación para estudiar la aplicabilidad de estas ideas.

Sin pretender que el trabajo que aquí se presenta sea en modo alguno exhaustivo, ya que, por ejemplo, no se ha incluido a los llamados modelos colectivos que surgen del trabajo de A. Bohr y B. Mottelson (1953), creemos que las técnicas aquí estudiadas son lo suficientemente generales como para ser de utilidad en el estudio de otros modelos del núcleo e incluso en otras ramas de la física, como por ejemplo la física atómica.

Respecto a esto, debemos señalar que los métodos matemáticos aplicados aquí al caso nuclear también se pueden utilizar para

la descripción de sistemas atómicos, con las debidas modificaciones, a causa de las notables diferencias entre las interacciones: mientras que para los átomos la interacción más importante es repulsiva y de largo alcance, en el caso nuclear, aunque no se conoce con exactitud, se sabe que es atractiva, de corto alcance y de intensidad mucho mayor. En la aplicación del esquema de segunda cuantización en el contexto de Teoría de Grupos al caso atómico vamos a encontrar un aspecto ostensiblemente distinto respecto del caso nuclear, debido a que, en principio, un nucleón tiene dos grados internos de libertad en tanto que el electrón sólo tiene uno. Por lo tanto, si tenemos un sistema de  $N$  electrones que tienen acceso a  $K$  estados cuánticos, la clasificación física de la base para una  $RI[1^N]$  de  $U(2K)$  empieza con el subgrupo  $U^{(S)}(2) \times U(K)$ , donde por  $U^{(S)}(2)$  denotamos al conjunto de transformaciones unitarias en el espacio de espín y  $U(K) \supset O(3)$ , necesariamente.