



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTONOMA DE MEXICO
FACULTAD DE CIENCIAS

**PATRONES DE MOTEADO OPTICO - PRODUCIDOS
POR ABERTURAS IDENTICAS DISTRIBUIDAS AL AZAR**

T E S I S

Que para obtener el Titulo de

F I S I C O

P r e s e n t a

JOSE LUIS PONCE DAVALOS

México, D. F.

1983



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

CONTENIDO.

Introducción	1
Capítulo I. Interferencia y Difracción.	
Introducción.	3
I.1.- Interferencia de dos haces.	4
I.1.1.- El Experimento de Young.	9
I.2.- Difracción.	14
I.2.1.- Difracción de Fraunhofer para una Abertura Rectangular.	21
I.2.2.- Difracción de Fraunhofer para una Abertura Circular.	25
I.3.- El Teorema del Arreglo.	29
Capítulo II.- Patrones de Moteado Optico.	
Introducción.	33
II.1.- Patrones de Moteado Optico por Objetos Difusores (Descripción Cualitativa).	34
II.2.- Patrones de Moteado Optico por Aberturas Difradoras (Descripción Cualitativa).	37
II.3.- Patrones de Moteado Optico por Aberturas Difradoras (Experimental).	42
II.3.1.- Condiciones Generales del Experimento.	42
II.3.2.- Resultados Experimentales (discusión).	46
II.3.3.- Conclusiones.	60

**Capítulo III.- Análisis Estadístico de los Patrones
de Moteado Optico.**

Introducción.	62
III.1.- Necesidad de un Análisis Estadístico.	64
III.2.- Estadística en los Objetos Difusores.	69
III.3.- Estadística en las Aberturas Difractoras.	78
III.4.- Aproximación Gaussiana para los P.M.O. Producidos por Aberturas Difractoras.	87
Capítulo IV.- Conclusiones Generales.	91
Apendice A.- Cálculo de las funciones de densidad de probabilidad para las fases.	94
Bibliografía.	103

INTRODUCCION.

Junto con la invención del laser, se hizo evidente un fenómeno singular: cuando la luz de aquel incide sobre un objeto opaco, éste adquiere un aspecto granulado muy fino, bastante llamativo y -- que incluso se mueve junto con el observador. A éste fenómeno se le dio el nombre de SPECKLE PATTERN el cual puede traducirse como PATRON DE MOTEADO OPTICO (P.M.O.). En la fig. 1 se muestra uno de estos P.M.O..



Fig. 1. P.M.O. en un objeto dispersor iluminado con luz de laser.

El aspecto granular puede resultar molesto en algunos experimentos y por un tiempo se buscó eliminarlo, obteniendo resultados -- fructíferos; sin embargo, otra corriente penso en que si estaba -- ahí lo mejor era utilizarlo. Efectivamente, en la actualidad, cuenta con amplias posibilidades de aplicación, por ejemplo Françon [1979] describe varias e interesantes aplicaciones de los P.M.O., tales como: el estudio de desplazamientos y deformaciones de objetos dispersores, estudio de superficies rugosas, dimensiones estelares, etc.

Consideramos que un buen entendimiento de cualquier fenómeno --

puede traer como consecuencia nuevas perspectivas de aplicación o de teorías, por ello es que la motivación del presente trabajo, -- más que en las aplicaciones mismas, se centra en el estudio teórico de la formación de los P.M.O. Nuestro objetivo principal es obtener experimentalmente un P.M.O. en forma sencilla y reproducible, con ésto daremos una explicación, desde un punto de vista fácilmente accesible, del proceso que lleva a la formación de éstos patrones. Otro punto importante a tratar es el análisis de las hipótesis estadísticas que se proponen para el estudio cuantitativo de los P.M.O..

Con los objetivos arriba planteados ésta tesis se desarrollara de la siguiente manera: En vista de que el fenómeno de P.M.O. es un efecto combinado de interferencia y difracción, en el primer capítulo revisaremos los conceptos básicos de éstas teorías, ello nos permitira dar una descripción cualitativa del fenómeno. En el segundo capítulo nos dedicaremos a describir el proceso que lleva a la formación del P.M.O., desde un punto de vista cualitativo, aquí veremos que una manera sencilla de producir un P.M.O. es haciendo uso de un conjunto de aberturas idénticas distribuidas al azar. Finalmente, en el tercer capítulo se analiza la teoría existente, - desde el punto de vista estadístico, que describe a los P.M.O.. Un último capítulo se dedica a las conclusiones generales.

CAPITULO I

INTERFERENCIA Y DIFRACCION.

Introducción.

En éste capítulo se revisan algunos de los conceptos básicos - de las teorías de la Interferencia y Difracción de la luz. Esto - nos servirá para dar una interpretación adecuada, en términos de - éstas teorías, de la formación de los Patrones de Moteado Optico.

En la primera sección se describe la teoría de la interferen-
cia de dos haces completamente coherentes (espacial y temporalmen-
te) y con polarización paralela. Se mencionan algunos dispositivos
experimentales para producir patrones de interfereencia y por razón-
nes de interes para el desarrollo de éste trabajo, en particular -
se analiza en forma cuidadosa el experimento de Young. En la segun-
da sección se estudia el proceso de difracción. Se deduce en forma
breve la Integral de Difracción y se plantean las condiciones bajo
las cuales se obtienen las aproximaciones de Fresnel y de Fraunho-
fer. Se hace énfasis en estudiar detalladamente los patrones de -
Fraunhofer para aberturas circulares y rectangulares. Finalmente,
en la tercera sección hablaremos del "Teorema del Arreglo"; lo cu-
al nos facilitará el cálculo de patrones de difracción para un con-
junto de aberuras idénticas.

I.1.- INTERFERENCIA DE DOS HACHS.

La mayoría de los fenómenos ópticos tales como la propagación de la luz, polarización, interferencia, difracción, etc. pueden ser explicados en forma consistente en base a la Teoría Ondulatoria Electromagnética. En este sentido, decimos que la luz es una perturbación electromagnética. Dicha onda electromagnética transporta energía en la dirección en que se propaga, la cual se determina por el vector de Poynting

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} \vec{E} \times \vec{H} . \quad 1.1$$

El promedio en el tiempo de la magnitud de \vec{S} es una cantidad muy importante, pues nos permite definir la Intensidad o Irradiancia de la onda como

$$I = \langle |\vec{S}| \rangle = \frac{c}{4\pi} \langle |\vec{E} \times \vec{H}| \rangle . \quad 1.2$$

Esta cantidad es básicamente la potencia media de la onda, que cruza una unidad de área, ortogonal a la dirección de propagación, su importancia radica en el hecho de que élla puede ser registrada experimentalmente; es decir, es una cantidad medible en base a la cual se puede confrontar la teoría y el experimento.

Usando la ortogonalidad de los campos y considerando ondas propagándose en un mismo medio, podemos reescribir 1.2 para obtener

$$I = \frac{c}{4\pi} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \langle \vec{E}^2 \rangle \approx \langle \vec{E}^2 \rangle , \quad 1.3$$

1.1.- INTERFERENCIA DE DOS HACERES.

La mayoría de los fenómenos ópticos tales como la propagación de la luz, polarización, interferencia, difracción, etc. pueden ^{ser} explicados en forma consistente en base a la Teoría Ondulatoria Electromagnética. En este sentido, decimos que la luz es una perturbación electromagnética. Dicha onda electromagnética transporta energía en la dirección en que se propaga, la cual se determina por el vector de Poynting

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} \vec{E} \times \vec{H} . \quad 1.1$$

El promedio en el tiempo de la magnitud de \vec{S} es una cantidad - muy importante, pues nos permite definir la Intensidad o Irradiancia de la onda como

$$I = \langle |\vec{S}| \rangle = \frac{c}{4\pi} \langle |\vec{E} \times \vec{H}| \rangle . \quad 1.2$$

Esta cantidad es básicamente la potencia media de la onda, que cruza una unidad de área, ortogonal a la dirección de propagación, su importancia radica en el hecho de que ella puede ser registrada experimentalmente; es decir, es una cantidad medible en base a la cual se puede confrontar la teoría y el experimento.

Usando la ortogonalidad de los campos y considerando ondas propagándose en un mismo medio, podemos reescribir 1.2 para obtener

$$I = \frac{c}{4\pi} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \langle \vec{E}^2 \rangle \approx \langle \vec{E}^2 \rangle , \quad 1.3$$

en donde hemos omitido el factor constante por el hecho de que estamos interesados en medir irradiancias relativas en un mismo medio, la ecuación 1.3 es lo que se toma como medida de la irradiancia [Born, 1980, p.257].

Nos interesa saber ahora cuál es la información que proporciona la ecuación 1.3, si en el punto de observación, donde se está midiendo la irradiancia, se cruzan dos ondas. Para un análisis simple de esto, consideremos campos eléctricos monocromáticos, es decir, aquellos que sólo dependen de una sola frecuencia y que se expresan como

$$\vec{E}(x, y) = \text{Re } \vec{E}_0(\vec{r}) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \quad 1.4$$

Supongamos que dos de éstas ondas monocromáticas \vec{E}_1 y \vec{E}_2 se cruzan en el punto de observación. El campo eléctrico total en dicho punto, por el principio de superposición, es

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 \quad , \quad 1.5$$

[Hecht, 1977, p.206].

Como lo que nos interesa medir es la irradiancia y ésta es proporcional al cuadrado del campo, vemos primero que de 1.5

$$\vec{E}^2 = \vec{E}_1^2 + \vec{E}_2^2 + 2 \vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 \quad , \quad 1.6$$

resulta entonces de 1.3 y 1.6, que tomando los promedios temporales, la irradiancia en el punto de observación es

$$I = I_1 + I_2 + I_{12} \quad , \quad 1.7$$

donde

$$I_1 = \langle \vec{E}_1^2 \rangle \quad ; \quad I_2 = \langle \vec{E}_2^2 \rangle \quad , \quad 1.8a$$

son las irradiancias individuales de cada una de las ondas, e

$$I_{12} = 2 \langle \vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 \rangle \quad , \quad 1.8b$$

representa lo que se define como TERMINO DE INTERFERENCIA.

Efectuando los promedios en 1.8a y 1.8b, y sustituyendo los resultados en 1.7; se obtiene que la expresion para la irradiancia cuando interfieren dos ondas es

$$I = I_1 + I_2 + 2 \sqrt{I_1 I_2} \cos \delta \quad , \quad 1.9$$

[Hecht, 1977, p.296], donde δ es una diferencia de fase debida a que las ondas pueden viajar por caminos diferentes y se define como

$$\delta = k \Delta z = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta z \quad , \quad 1.10$$

donde Δz es la diferencia de los caminos ópticos seguidos por las ondas, desde la fuente que las origina hasta el punto de observación y $k=2\pi/\lambda$ donde λ es la longitud de onda de las ondas incidentes.

En el caso particular (y mas comun) en que $I_1 = I_2 = I_0$, se tiene

$$I = 4 I_0 \cos^2 \delta/2 . \quad 1.11$$

Analizando ésta última ecuación, podemos obtener las siguientes conclusiones [Hecht, 1977] ; Hay un máximo de intensidad, $I_{\text{máx}} = 4 I_0$, cuando $|\delta| = 0, 2\pi, \dots$, aquí se dice que hay interferencia completamente constructiva. También existe un mínimo de intensidad $I_{\text{mín}} = 0$, cuando $|\delta| = \pi, 3\pi, \dots$, en éste caso se dice que hay interferencia completamente destructiva.

Reflexionemos un poco sobre estos resultados. Resulta bastante interesante el hecho de que en el punto de observación, en donde interfieren las ondas, la irradiancia no solamente es la suma de las irradiancias de las ondas componentes, sino que existe un término adicional, el cual hemos llamado término de interferencia, y que proviene básicamente de que los campos presentan una cierta diferencia de fase. Concluimos que siempre que exista éste término - habrá interferencia.

En base a lo anterior podemos precisar lo que significa la interferencia, dando la siguiente definición:

"La interferencia es la superposición de dos o más ondas electromagnéticas, tal que la irradiancia resultante difiere de la suma de las irradiancias individuales de las ondas componentes (precisamente en el Término de Interferencia)"

Esta situación es la base de la teoría de la interferencia.

En muchos de los experimentos de interferencia más bien nos interesa obtener información de la distribución de irradiancia en una cierta región, en lugar de medir el valor de la irradiancia en cada punto.

Ahora bien, para obtener un patrón de interferencia, lo primero que se necesita es una fuente de luz coherente o cuasicoherente. Es decir, que el rango de frecuencias que la fuente pueda abarcar sea muy estrecho, tal como un laser o un tubo de descarga. Esto nos garantiza, por lo tanto, campos prácticamente monocromáticos.

Por otra parte, existen diversos arreglos ópticos que producen patrones de interferencia, los cuales se suelen situar en dos grupos principales [Hecht, 1977, p.293] ; aquellos que producen INTERFERENCIA POR DIVISION DEL FRENTE DE ONDA, y los que la producen POR DIVISION DE AMPLITUD. En el primer caso se usan porciones de un frente de onda primario, proveniente de fuentes de luz como las descritas antes, dichas porciones se obtienen al hacer incidir la onda primaria sobre espejos o diafragmas, lo cual proporciona fuentes secundarias virtuales o reales respectivamente, estas fuentes a su vez originan ondas secundarias coherentes las cuales pueden interferir, por ejemplo: El Experimento de Young, El Espejo Doble de Fresnel, etc. En el segundo caso la onda primaria es dividida en amplitud, al producir dos haces por medio de espejos semiplatados. Estos haces se hacen viajar por diferentes caminos para después recombinarse e interferir, por ejemplo: El Interferómetro de Michelson, El Interferómetro de Fabry-Perot, etc.

El parámetro importante a determinar en dichos experimentos de interferencia, es la diferencia de camino óptico entre las ondas - que interfieren, ya que de ahí se obtiene información sobre la distribución de irradiancia en el patrón (ver ecs. 1.10 y 1.11). Analizaremos ahora cómo se obtiene ésto para el experimento de interferencia de Young.

I.1.1.- EL EXPERIMENTO DE YOUNG.

El experimento de Young fué de los primeros que se realizaron para obtener un patrón de interferencia, éste consiste en lo siguiente; La luz de una fuente puntual monocromática S , con una longitud de onda λ , de emisión, hace incidir sus frentes de onda en dos pequeños orificios S_1 y S_2 , localizados en una pantalla opaca Σ ; ambas perforaciones están equidistantes de S y separados entre sí por una distancia d , como se muestra en la figura 1.1.

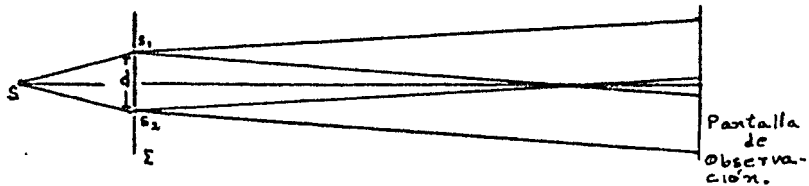


Fig. 1.1. Diagrama esquemático del experimento de Young.

Los orificios actúan como fuentes puntuales monocromáticas secundarias las cuales están en fase, y la luz proveniente de ellas se superpondrán en una región posterior a Σ . Observemos lo que o--

curre en el punto Q localizado sobre un plano Σ' paralelo a Σ y - separados por una distancia a. En la práctica el patrón de interferencia es fácil de observar si $a \gg d$, en estas condiciones nos interesa ahora determinar la diferencia de camino óptico en el punto Q sobre Σ' , para ello nos basaremos en la figura 1.2.

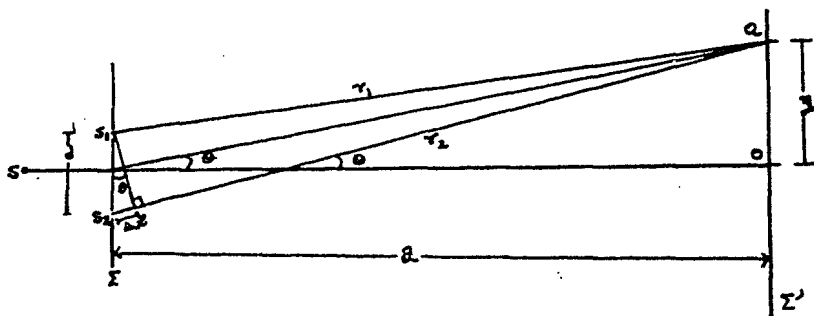


Fig. 1.2. Interferencia de dos haces en el experimento de Young.

Consideremos los rayos r_1 y r_2 provenientes de S_1 y S_2 respectivamente y que se superponen en el punto Q el cual está a una distancia y del punto O (las líneas OQ y S_1S_2 son paralelas) (ver fig. 1.2.). La diferencia de camino óptico entre r_1 y r_2 es

$$\Delta L = r_2 - r_1 = d \operatorname{sen} \theta , \quad 1.12$$

pero en la aproximación que vamos a considerar ($a \gg d$), se sigue - que

$$\operatorname{sen} \theta \approx \theta \approx \operatorname{tg} \theta = \frac{y}{a} \quad , \quad 1.13$$

por lo tanto

$$\Delta \mathcal{L} = \frac{y d}{a} \quad , \quad 1.14$$

y por consiguiente, la diferencia de fase es, tomando en cuenta la ec. 1.10,

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{y d}{a} \quad . \quad 1.15$$

De la ec. 1.11, la distribución de la irradiancia estará dada por

$$I = 4 I_0 \cos^2 \left(\frac{\pi y d}{\lambda a} \right) \quad , \quad 1.16$$

donde I_0 es la irradiancia producida por una sola de las aberturas.. En ésta distribución, habrá máximos de interferencia para las posiciones

$$y = \frac{n \lambda a}{d} \quad , \quad \text{con } |n| = 0, 1, 2, \dots \quad , \quad 1.17$$

y mínimos de interferencia localizados en

$$y = \frac{n \lambda a}{d} \quad , \quad \text{con } |n| = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots \quad . \quad 1.18$$

También se tiene que la separación entre dos máximos o mínimos con

secutivos estará dada por

$$\Delta y = y_{n+1} - y_n = \frac{(n+1)\lambda d}{d} - \frac{n\lambda d}{d} = \frac{\lambda d}{d} \quad , \quad 1.19$$

la cual es constante para λ y d fijos.

La gráfica 1.3a ilustra ésta distribución de irradiancia, y la figura 1.3b muestra el patrón observado.

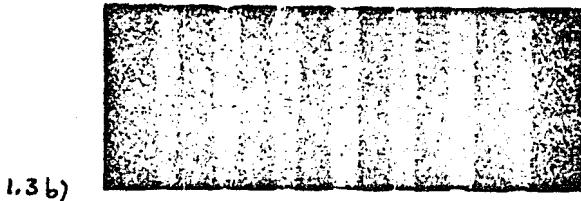
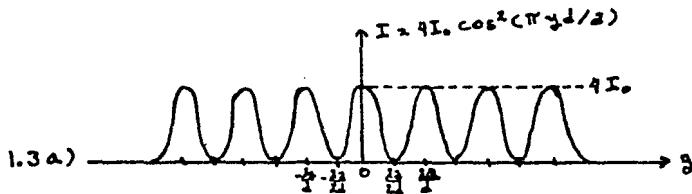


Fig. 1.3. a) Distribución de irradiancia en el experimento de Young.

b) Patrón de interferencia de Young, tomado del libro de Born y Wolf ref.2.

El patrón resulta ser un conjunto de franjas rectas brillantes y oscuras con una separación constante entre ellas.

Haciendo una observación adicional, de la ec. 1.19, encontramos que la separación entre las franjas es inversamente proporcional a la separación entre los orificios; ésto implica que para una separación fija entre el plano de las aberturas y el plano de observación, si separamos los orificios o si los juntamos, entonces las franjas se hacen más angostas y se juntan o se ensanchan y separan, respectivamente (siempre que se siga cumpliendo la aproximación $a \gg d$); Es decir, de 1.19, si d aumenta entonces Δs disminuye, si por el contrario, d disminuye entonces Δs aumenta. (Esta observación nos será de utilidad más adelante, en relación con el tamaño de los granos de P.M.O. [ver cap. II]).

I.2.- DIFRACCION.

El análisis del fenómeno de interferencia se simplifica al considerar fuentes puntuales, sin embargo en la práctica éstas no se pueden obtener, aunque sí se pueden aproximar por iluminación de aberturas muy pequeñas.

Un hecho curioso ocurre al observar la luz que pasa a través de alguna abertura pequeña, en su contorno aparecen franjas brillantes y oscuras, que además dependen fuertemente (en su forma) de la geometría de la abertura. A este fenómeno se le llama DIFRACCION.

Este fenómeno de difracción fué observado desde hace mucho tiempo. En el siglo XVII, F. Grimaldi describía detalladamente este hecho al que llamó "Diffractio". En base al modelo ondulatorio de la luz de Huygens, la difracción se interpreta como la desviación de la trayectoria rectilínea geométrica de la luz, debido precisamente a su carácter ondulatorio. Finalmente, fué Fresnel quien dió una descripción teórica de la difracción, en forma convincente.

En el análisis de la propagación de la luz, Huygens enunció su PRINCIPIO DE PROPAGACION ONDULATORIA DE LA LUZ [Hecht, 1977], el cual fué modificado posteriormente por Fresnel para explicar la difracción, introduciendo el concepto de interferencia. El Principio de Huygens-Fresnel establece que:

Cada punto sin obstrucción de un frente de onda, en un instante de tiempo dado, sirve como una fuente de ondas secundarias esféricas (de la misma frecuencia de la onda primaria).

La amplitud del campo óptico en cualquier punto posterior es la superposición de todas estas ondas (considerando sus amplitudes y fases relativas).

Basandonos en este principio deduciremos ahora, cómo es el comportamiento de un frente de ondas al pasar por una obstrucción, [Parrrent, 1971] .

Consideremos una onda escalar monocromática de la forma

$$V(\vec{r}, t) = E(\vec{r}) e^{-i\omega t} \quad , \quad 1.20$$

sustituyendo ésta en la ecuación de onda

$$\nabla^2 V(\vec{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 V(\vec{r}, t)}{\partial t^2} = 0 \quad , \quad 1.21$$

resulta que la parte independiente del tiempo satisface la ecuación

$$\nabla^2 E(\vec{r}) + k^2 E(\vec{r}) = 0 \quad , \quad 1.22$$

donde $k = \omega/c$ es el número de onda. Esta ecuación se conoce como la Ecuación de Helmholtz y se puede resolver por el método de funciones de Green, sin embargo aquí no estamos interesados en obtener la solución en forma rigurosa, sino en la aplicación del principio de Huygens, esto último nos proporcionará una solución aproximada, pero a cambio nos permitirá visualizar físicamente el problema. - Prosigamos pues, consideremos una fuente puntual en un punto P so-

bre un frente de onda (como lo sugiere el principio de Huygens -- Fresnel) el cual cruza una abertura A localizada en un plano $\xi-\eta$ (ver fig. 1.4), observemos lo que ocurre en un punto distante Q, -- situado en el plano x-y paralelo al $\xi-\eta$.

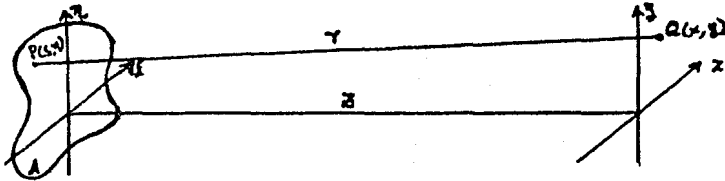


Fig. 1.4. Frente de ondas cruzando una abertura A.

Las ondas emitidas por la fuente puntual en P son esféricas de la forma

$$E(\vec{r}) = e^{ikr} / r \quad , \quad 1.23$$

donde r es la distancia desde el punto P hasta el punto de observación Q. Ahora bien, siguiendo con el principio de Huygens-Fresnel podemos considerar que la abertura está constituida por muchas fuentes puntuales las cuales emiten ondas en forma independiente. La amplitud de estas ondas está dada por la amplitud del campo eléctrico sobre la abertura (también llamado campo óptico en este contexto) el cual designaremos por $E(\vec{\xi})$ ($\vec{\xi}$ es el vector de posición sobre la abertura), notemos primero que la ecuación de Helmholtz 1.22 es lineal, entonces, para ella, el principio de superposición es válido, esto nos permite conocer el campo óptico en el plano x-y, como lo asegura el principio de Huygens-Fresnel. En e-

fecto, usando la superposición, el campo óptico en el punto de observación \vec{x} , será la suma de todas las contribuciones, provenientes de todas las fuentes puntuales que están en la porción del frente de ondas que cruzan la abertura, las cuales son de la forma $e^{ik\gamma/r}$ (ver ec. 1.23) y tienen una amplitud $B(\vec{\xi})$, esto lo podemos expresar como

$$E(\vec{x}) = \int_A E(\vec{\xi}) \Lambda(\vec{x}, \vec{\xi}) \frac{\exp(-ik\gamma(\vec{x}, \vec{\xi}))}{\gamma(\vec{x}, \vec{\xi})} d\vec{\xi} \quad , \quad 1.24$$

donde $\Lambda(\vec{x}, \vec{\xi})$ se denomina El Factor de Inclinación, el cual denota el hecho de que la onda que cruza a la abertura tiene una dirección preferente de propagación. Se puede demostrar [Born, 1980] que dicho factor de inclinación varía poco si restringimos los valores de \vec{x} y $\vec{\xi}$ a una pequeña región en la vecindad del eje z (esto es lo que se conoce como aproximación paraxial), con esta restricción resulta también que la r en el denominador varía muy lentamente y sus efectos pueden ser ignorados en la integral. Por otra parte, la r en la exponencial va multiplicada por $k=2\pi/\lambda$ y una ligera variación de r afecta fuertemente la fase de la radiación (ya que en este caso $\lambda \ll r$). Con estas suposiciones la ecuación 1,24 se reduce a

$$E(x, y) = \frac{K}{r} \int_A E(s, \eta) \exp(-ik\gamma(\vec{x}, \vec{\xi})) ds d\eta \quad , \quad 1.25$$

donde K es una constante.

Esta ecuación 1.25 es la integral básica en la teoría de la difracción. Si se evalúa ésta integral se obtiene la distribución de

campo en el plano de observación y en consecuencia, por la ec. 1.3 también la distribución de irradiancia, que como ya dijimos, es la cantidad medible.

Escribamos más explícitamente la ecuación 1.25; por el teorema de Pitágoras se encuentra que

$$\begin{aligned} \gamma(\vec{x}, \vec{s}) &= [(x-s)^2 + (y-\eta)^2 + z^2]^{1/2} \\ &= R \left[1 + \frac{s^2 + \eta^2}{R^2} - \frac{2(sx + \eta y)}{R^2} \right]^{1/2}, \end{aligned} \quad 1.26$$

donde $R = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$, notemos que, como estamos en una aproximación paraxial y el punto de observación es distante, entonces R es grande comparada con las dimensiones lineales de la abertura, con esto en mente, podemos hacer un desarrollo en serie de 1.26 en $1/R$ y quedarnos hasta primer orden, con lo cual resulta que

$$\gamma = R + \frac{s^2 + \eta^2}{2R} - \frac{sx + \eta y}{R} \quad 1.27$$

Ahora, en general los problemas de difracción pueden ser tratados de manera diferente dependiendo de la magnitud relativa de los dos últimos términos de 1.27. Esto es, cuando el término cuadrático en s y η puede ser despreciado o se anula, se dice que uno obtiene DIFRACCION DE FRAUNHOFER. Si el término cuadrático no puede ser despreciado se dice entonces que uno observa DIFRACCION DE FRESNEL.

Pero, ¿a qué situaciones físicas corresponden estos dos casos?. La respuesta es sencilla; cuando el término cuadrático no es des--

preciable, es decir $(\xi^2 + \eta^2)/2R$ contribuye a la integral, la situación corresponde a aquella en la que la separación entre la fuente que produce el campo y el plano de observación se encuentran a una distancia finita. Si ésto ocurre, al incluir dicho término en 1.25, el problema matemático para evaluar la integral es bastante complicado y de hecho no se puede resolver en forma exacta.

En el caso más sencillo, matemáticamente, en que sí se puede desprestigiar el término cuadrático, que afortunadamente también es fácil de implementar en el laboratorio y que es de gran importancia en la óptica, corresponde a aquel en el que, tanto la fuente que ilumina la abertura como el plano de observación, se encuentran a una distancia infinita de la abertura. Aparentemente ésto último complica el asunto, pero si nos ponemos a analizar más detalladamente ésta situación, vemos que el hecho de que la fuente esté en infinito implica que las ondas que llegan a la abertura son esencialmente planas, y el hecho de que el plano de observación esté en infinito implica que los rayos que salen de la abertura convergen en infinito, éstas dos condiciones las podemos lograr en el laboratorio haciendo uso de lentes, las cuales -por así decirlo- tienen éstas propiedades. Por ejemplo, si colimamos un haz de luz con una lente obtendremos ondas planas y si colocamos una lente enfrente de la abertura, los rayos provenientes de ésta convergerán en el foco de aquella*. Resulta entonces, que para ob-

*En el libro de Born y Wolf, ref.2, p.384 se analizan detalladamente las condiciones para desprestigiar el término cuadrático mediante el empleo de lentes.

servar un patrón de difracción de Fraunhofer debemos emplear un sistema de lentes y colocar el plano de observación en el foco de la lente que forma la imagen de la abertura. Si f es la distancia focal de dicha lente, podemos escribir la ecuación 1.25. como

$$E(x, y) = \frac{K \exp(-ikf)}{r} \int_A E(s, \eta) \exp\left[\frac{i k}{f}(sx + \eta y)\right] ds d\eta. \quad 1.28$$

Ahora bien, si $U(s, \eta)$ describe la distribución del campo óptico sobre la abertura (incluyendo los factores constantes) entonces la distribución de campo dada por 1.28 la podemos escribir como

$$E(x, y) = \int_A U(s, \eta) \exp\left[\frac{ik}{f}(sx + \eta y)\right] ds d\eta. \quad 1.29$$

Esta es la expresión para el campo con la cual trabajaremos en lo consecutivo ya que es la base sobre la que descansa el experimento realizado para ésta tesis.

El factor $k(sx + \eta y)/f$ que aparece en la ec. 1.29 expresa la diferencia de fase de las radiaciones, que llegan al punto (x, y) del plano de observación, y que son emitidas por fuentes puntuales, una localizada en un punto (s, η) y otra situada en el origen de coordenadas del plano que contiene a la abertura. Es decir

$$\delta = k(sx + \eta y) / f \quad 1.30$$

Desde un punto de vista matemático la integral 1.29 tiene la forma de una transformada de Fourier en dos dimensiones [Arfken, -

1970] , en éste sentido, se interpreta el campo difractado por una abertura (en la aproximación de Fraunhofer) como una transformada de Fourier [Goodman, 1968]. Esta interpretación es conveniente, - puesto que del análisis de Fourier, si conocemos analíticamente el campo óptico sobre la abertura, entonces lo podremos determinar en el plano de observación mediante una transformada de Fourier. Por el contrario, si conocemos el campo óptico en el plano de observación -lo cual es lo más común- entonces, por la transformada inversa podremos determinar la distribución del campo sobre la abertura. Lo anterior simplifica los cálculos para determinar patrones de difracción.

Analizaremos ahora la aplicación de la ecuación 1.29 para los casos de : una abertura rectangular y una circular. Estos serán de interés en el capítulo II.

I.2.1.- Difracción de Fraunhofer para una Abertura Rectangular.

Consideremos una abertura rectangular de dimensiones $2a$ y $2b$ - centrada en el plano $s-\eta$, como se muestra en la fig.1.5, ésta abertura es iluminada uniformemente con una onda plana. En éstas - condiciones, la distribución de campo sobre la abertura está dada por . [Parrent, 1971]

$$U(s, \eta) = \begin{cases} U_0 & \text{si } |s| \leq a \text{ y } |\eta| \leq b \\ 0 & \text{si } |s| > a \text{ y } |\eta| > b \end{cases} \quad 1.31$$

donde U_0 es una constante.

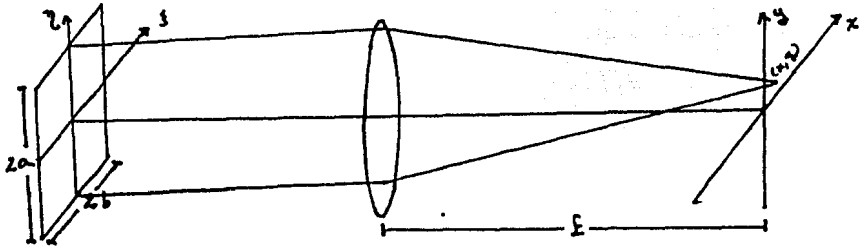


Fig. 1.5. Abertura rectangular iluminada uniformemente en un arreglo para observar Difracción de Fraunhofer.

Sustituyendo 1.31 en 1.29 se tiene que

$$E(x, y) = \int_{-a}^a \int_{-b}^b U_0 \exp \left[\frac{ik}{F} (ix + \eta y) \right] d\eta dx, \quad 1.32$$

Ésta integral es fácil de evaluar y resulta entonces que el campo observado en el plano focal de la lente es

$$E(x, y) = 4U_0 ab \operatorname{senc} \left(\frac{kax}{F} \right) \operatorname{senc} \left(\frac{kby}{F} \right), \quad 1.33$$

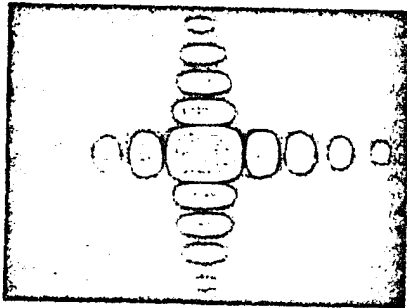
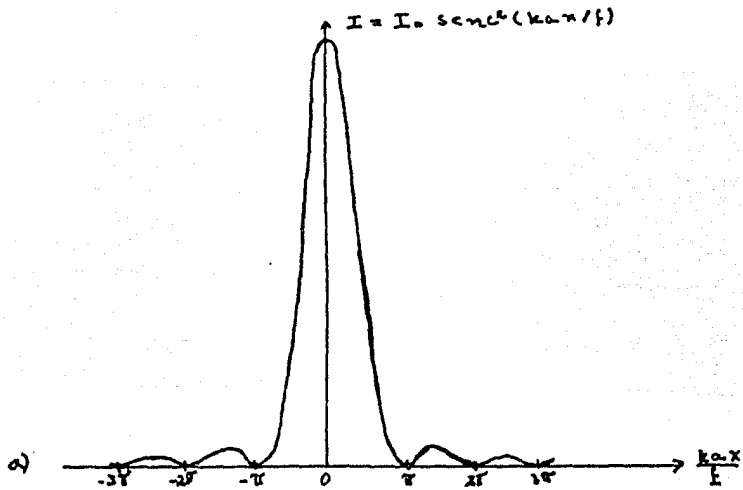
donde la función $\operatorname{senc} \theta$ se define como $\operatorname{senc} \theta = \frac{\sin \theta}{\theta}$.

De la ecuación 1.3, la distribución de irradiancia viene a estar determinada por

$$I = I_0 \operatorname{senc}^2 \left(\frac{kax}{F} \right) \operatorname{senc}^2 \left(\frac{kby}{F} \right) \quad 1.34$$

donde $I_0 = 16U_0^2 a^2 b^2$ es una constante y puede ser determinada experimentalmente. La fig. 1.6a ilustra ésta distribución de irradiancia a lo largo del eje x, ésta tiene un máximo principal I_0 en $(kax/f) = 0$ y mínimos nulos en $(kax/f) = \pm\pi, \pm2\pi, \dots$. Los máximos secundarios son cada vez de menor intensidad conforme aumenta $|x|$. Las posiciones de éstos máximos secundarios se obtienen por los métodos tradicionales de cálculo, de los cuales resulta que ellos satisfacen la ecuación trascendente $\text{tg } x = x$, (las soluciones de ésta ecuación nos dan las posiciones de los máximos secundarios, los cuales obviamente no están igualmente separados).

En la fig. 1.6b se muestra el patrón bidimensional resultante, éste consiste de un rectángulo muy intenso centrado en el plano de observación y a sus lados se observan franjas brillantes de intensidad decreciente, separadas por franjas oscuras.



b)

Fig. 1.6. Difracción de Fraunhofer para una Abertura Rectangular.

- a) Gráfica de la distribución de irradiancia.
- b) Patrón resultante.

Tomados del libro de Born y Wolf, ref.2.

I.2.2.- Difracción de Fraunhofer para una Abertura Circular.

Consideremos ahora una abertura circular de radio a centrada - en el plano $\xi-\eta$ iluminada uniformemente por una onda plana, como se muestra en la fig. 1.7

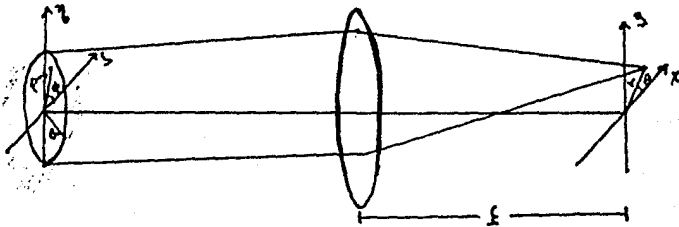


Fig. 1.7. Abertura circular iluminada uniformemente en un arreglo para observar Difracción de Fraunhofer.

Por simplicidad para el cálculo se emplean coordenadas polares. La distribución de campo sobre la abertura está descrita por [Parrrent, 1971]

$$U(\rho, \phi) = \begin{cases} U_0 & \text{si } \rho \leq a \text{ y } 0 \leq \phi < 2\pi \\ 0 & \text{si } \rho > a \text{ y } 0 \leq \phi < 2\pi \end{cases} \quad , \quad 1.35$$

donde $\rho^2 = \xi^2 + \eta^2$ y $\phi = \arctg(\eta/\xi)$. Usando 1.29, la distribución de campo en el plano de observación será

$$E(\gamma, \theta) = \int_0^a \int_0^{2\pi} U_0 \exp \left[\frac{i\pi}{f} \gamma \rho \cos(\theta - \phi) \right] \rho d\rho d\phi, \quad 1.36$$

donde $r^2 = x^2 + y^2$ y $\theta = \arctg(y/x)$.

La integral 1.36 se puede evaluar por separación de variables. La integral respecto a φ es directa, y la integral en r que resulta, es la función de Bessel de orden 1 [Arfken, 1970]. El resultado final es

$$E(r, \theta) = U_0 \pi a^2 \frac{2 J_1(kra/f)}{(kra/f)} \quad , \quad 1.37$$

donde $J_1(kra/f)$ es la función de Bessel de orden 1 en la variable (kra/f) .

De la ecuación 1.3, la distribución de irradiancia en éste caso es

$$I = I_0 \left[\frac{2 J_1(kra/f)}{(kra/f)} \right]^2 \quad , \quad 1.38$$

donde $I_0 = U_0^2 \pi^2 a^4$ es una constante.

La fig. 1.8a muestra la distribución de irradiancia y la fig. 1.8b al patrón resultante.

Este patrón tiene simetría circular axial, con un disco muy brillante llamado DISCO DE AIRY, para $(kra/f) = 0$ de intensidad I_0 en el centro, circundado por anillos de intensidad nula, los cuales se determinan por las raíces de $J_1(kra/f)$. Las posiciones de los máximos secundarios estarán dadas por los valores de $x = kra/f$ que satisfacen la ecuación

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{J_1(x)}{x} \right] = 0 \quad 1.39$$

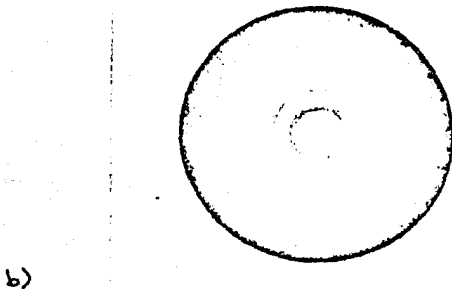
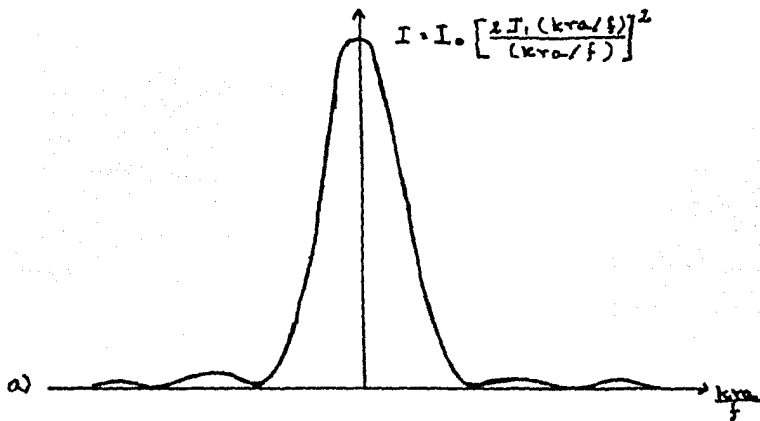


Fig. 1.8. Difracción de Fraunhofer para una Abertura Circular

a) Grafica de la distribución de irradiancia.

b) Patrón resultante.

Tomado del libro de Born y Wolf, ref.2.

Dado el comportamiento de las funciones de Bessel, la separación entre máximos o mínimos no es constante, sino que va variando de acuerdo a los ceros de dichas funciones.

Este tipo de patrón se conoce como PATRON DE DIFRACCION DE -- AIRY, el disco central de Airy, limitado por el primer anillo oscuro, tiene un radio dado por el primer cero de $J_1(x)$ diferente de cero expresado por

$$\gamma_0 = 1.22 \frac{\lambda f}{2a} \quad .$$

1.40

I.3.- EL TEOREMA DEL ARREGLO.

En un experimento real de interferencia por división del frente de ondas, por ejemplo el de Young, se tiene también efectos de difracción debido a la extensión de las fuentes secundarias. Considerando ésto último en la aproximación de Fraunhofer, a continuación veremos como se pueden conjuntar los dos efectos -interferencia y difracción- .

La mezcla de un patrón de interferencia con uno de difracción con aberturas similares puede ser sintetizado en una ecuación conocida como el TEOREMA DEL ARREGLO [Parrent, 1971] . La derivación - de éste teorema más bien, es un juego matemático basado en la interpretación del campo óptico (en un patrón de Fraunhofer) como una transformada de Fourier, como lo señalamos en la sección anterior; sin embargo, la interpretación física que contiene es de gran importancia.

Procedamos a obtener el Teorema del Arreglo: Consideremos una pantalla opaca con N aberturas idénticas distribuidas en forma arbitraria pero con la misma orientación, sin pérdida de generalidad podemos suponer que una de ellas está centrada en el plano que las contiene (ver fig. 1.9).

Una representación apropiada de la localización de las aberturas puede ser dada haciendo uso de la función delta de Dirac. Por lo tanto, tenemos que (en la suposición de iluminación monocromática coherente) si $U(\vec{\xi} - \vec{\xi}_n)$ representa la distribución de campo en la n -ésima abertura, localizada en el punto $\vec{\xi}_n$, tal que

$$U(\vec{r} - \vec{r}_n) = \int U(\vec{r} - \vec{\alpha}) \delta(\vec{\alpha} - \vec{r}_n) d\vec{\alpha} \quad ; \quad 1.41$$

donde $\vec{\alpha}$ es un vector que recorre el plano de difracción (es decir, el plano de las aberturas), y $U(\vec{r})$ es el campo en la abertura cen

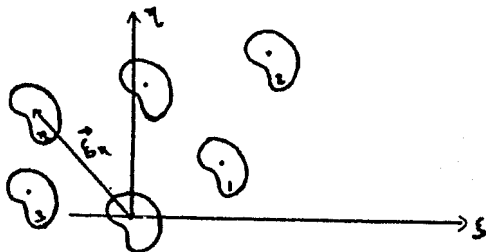


Fig. 1.9. Distribución arbitraria de aberturas idénticas sobre un plano.

traal, entonces el campo total sobre el plano difractor es (por superposición)

$$\begin{aligned} U_{\text{tot}}(\vec{r}) &= \sum_{n=1}^N \int U(\vec{r} - \vec{\alpha}) \delta(\vec{\alpha} - \vec{r}_n) d\vec{\alpha} \\ &= \int U(\vec{r} - \vec{\alpha}) \left[\sum_{n=1}^N \delta(\vec{\alpha} - \vec{r}_n) \right] d\vec{\alpha} \\ &= \int U(\vec{r} - \vec{\alpha}) A(\vec{\alpha}) d\vec{\alpha} \quad , \quad 1.42 \end{aligned}$$

donde $A(\vec{\alpha}) = \sum_{n=1}^N \delta(\vec{\alpha} - \vec{r}_n)$ caracteriza al arreglo mismo de aberturas. Físicamente $A(\vec{\alpha})$ describe la localización de aberturas, en tanto que $U(\vec{r})$ describe la distribución de campo a través de una

sola de las aberturas. Matemáticamente la ec. 1.42 es lo que se llama convolución de U con A.

Usando 1.42 podemos ahora calcular el patrón de difracción del arreglo, sustituyendo ésta en 1.29 tenemos que la distribución de campo $E(\vec{x})$ en el plano de observación está dada por

$$\begin{aligned}
 E(\vec{x}) &= \int \left[\int U(\vec{\xi} - \vec{\alpha}) A(\vec{\alpha}) d\vec{\alpha} \right] \exp\left[\frac{ik}{f}(sx + yu)\right] ds d\gamma \\
 &= \int \left[\int U(\vec{\xi} - \vec{\alpha}) \exp\left[\frac{ik}{f}(sx + yu)\right] d\vec{\xi} \right] A(\vec{\alpha}) d\vec{\alpha} .
 \end{aligned}
 \tag{1.43}$$

Bajo la interpretación del campo óptico como una transformada de Fourier, la ecuación 1.43 se reconoce como una transformada de Fourier de una convolución [Parrent, 1971, p.8]. El teorema de convolución establece que la transformada de Fourier de una convolución es igual al producto de las transformadas individuales [Goodman, 1968], entonces 1.43 se puede escribir como

$$E(\vec{x}) = \tilde{U}(\vec{x}) \tilde{A}(\vec{x}) ,
 \tag{1.44}$$

donde $\tilde{U}(\vec{x})$ y $\tilde{A}(\vec{x})$ son las transformadas de Fourier de $U(\vec{\xi})$ y $A(\vec{\alpha})$ respectivamente.

La ecuación 1.44 es el resultado central de ésta sección, ella se conoce como el "Teorema del Arreglo". La interpretación física que se le da es la siguiente [Parrent, 1971] :

El patrón de difracción de Fraunhofer de un arreglo de aberturas idénticas igualmente orientadas está dada por el patrón producido por una sola de las

aberturas, modulado por el patrón de interferencia -
que resultaría de un conjunto de fuentes puntuales -
dispuestas en la misma configuración.

Este resultado nos permitirá explicar fácilmente la formación de un patrón de moteado óptico producido por aberturas idénticas distribuidas al azar, como veremos en el siguiente capítulo.

CAPITULO II.

PATRONES DE MOTEADO OPTICO.

Introducción.

En éste capítulo, nuestro objetivo es la descripción cualitativa de la formación de los PATRONES DE MOTEADO OPTICO (P.M.O.).

Nuestro interés, aquí, se dirige principalmente hacia la realización sencilla y reproducible de los P.M.O.; ello nos permitirá - analizar el proceso de su formación.

En la primera sección hablaremos de los P.M.O. en objetos dispersores, de hecho, es en éstos en los que ellos pueden ser observados más fácilmente. Para estudiar el origen y características fisicas del P.M.O., haremos un análisis del detalle microscópico de las superficies difusoras. En la segunda sección, basándonos en el análisis de las superficies, veremos que una manera sencilla de obtener un P.M.O. es haciendo uso de un conjunto de aberturas difractoras idénticas, distribuidas al azar, éstos P.M.O. son el tema principal de éste trabajo; haremos un estudio cuidadoso de manera cualitativa de éste tipo particular de patrones. En la tercera sección analizaremos en forma experimental la formación de los P.M.O. con las aberturas. Se discuten los resultados.

II.1.- PATRONES DE MOTEADO OPTICO POR OBJETOS DIFUSORES (Descripción Cualitativa).

Cuando se empezó a trabajar con la luz de laser, la gente notó inmediatamente que al reflejarse ésta, en algún objeto opaco éste adquiriría un peculiar aspecto granulado muy complicado, éste fenómeno singular tomó el nombre de "Speckle Pattern" el cual nosotros llamaremos "Patrón de Moteado Optico" (P.M.O.).

La explicación que se le dió a éste fenómeno fue^{ve} la luz dispersada en la superficie de los objetos, es capaz de interferir al llegar a nuestra retina, por ser altamente coherente. Y en efecto, analizando la estructura microscópica de un objeto opaco, se encuentra que éste es sumamente rugoso en la escala de longitudes de onda [Goodman, 1976], éstas rugosidades son las principales causas de la dispersión de la luz (existen otras causas de la dispersión tales como variaciones en la reflexión y absorción y cambios en el índice de refracción, pero no los consideraremos aquí). Por otra parte, es fácil convencerse de que las variaciones en las alturas de las rugosidades son completamente aleatorias; más aún, su distribución espacial también lo es. Resulta entonces que la luz del laser reflejada en la superficie, al llegar a un punto de observación, consistirá de muchas contribuciones independientes, provenientes de las diferentes regiones dispersoras, las cuales, debido a las variaciones aleatorias antes mencionadas, habrán viajado por diferentes caminos ópticos, de manera que las diferencias de camino óptico también estarán distribuidas aleatoriamente, introduciendo, por lo tanto, variaciones aleatorias en las diferen-

cias de fase de las ondas que interfieren (ver ec, 1.10). El resultado será entonces, en la región de observación, un patrón de interferencia de muchas ondas tales que sus diferencias de fase y amplitudes estarán distribuidas aleatoriamente, ésto se traduce en un patrón de regiones brillantes donde ha ocurrido interferencia completamente constructiva, regiones oscuras donde ha ocurrido interferencia completamente destructiva y regiones con niveles de irradiancia entre éstos valores extremos [Goodman, 1976], (ver fig. 2.1). Esto es, efectivamente lo que constituye el patrón de moteado.

Por otra parte, se observa que la estructura del patrón depende de la geometría de la región que se esté iluminando, y desde un punto de vista microscópico, el patrón también dependerá de la geo



Fig. 2.1. Patrón de Moteado en un Objeto Dispersor.

metría y extensión de las diferentes regiones dispersoras, ya que en cierto sentido, también existirán efectos de difracción. Debido a esto, se dice que "el patrón de moteado proviene de la interferencia de las imágenes de difracción de las diferentes regiones dispersoras" [Françon . 1979]. Teniendo en cuenta ésto, por analogía al fenómeno de la difracción, se dice que el patrón de moteado

es del tipo de Fraunhofer cuando hay un sistema formador de imágenes (Lentes) y se observa en el plano focal o plano imagen, o bien, el patrón puede ser del tipo de Fresnel cuando se observa en una región sin lentes (o también usándolas pero observando fuera del plano focal o imagen).

Finalmente, diremos que un P.M.O. no está limitado a su formación con luz reflejada, sino que también surge con luz transmitida.

En resumen, los P.M.O. para objetos difusores tienen las siguientes características:

- a) Surgen de la interferencia de las imágenes de difracción de las diferentes regiones dispersoras del difusor. El aspecto caótico del patrón observado, es debido a que las diferencias de fase y las amplitudes de las ondas interferentes, están distribuidas completamente al azar.
- b) Dependiendo del difusor (ya sea opaco o transparente) se pueden lograr patrones tanto con luz reflejada como con luz transmitida.
- c) Dependiendo de como se observe el patrón, en general se tendrán, algunos del tipo de Fraunhofer y otros del tipo de Fresnel.

Como dijimos en un principio, nuestro interés se enfoca en la formación de un P.M.O. en forma sencilla y reproducible. Para ello nuestro estudio se restringirá a los patrones del tipo de Fraunhofer obtenidos con luz transmitida.

II.2.- PATRONES DE MOTEADO OPTICO POR ABERTURAS DIFRACTORAS. (Descripción Cualitativa).

En la sección anterior vimos que el patrón de moteado resulta de la superposición de muchas ondas coherentes en las que existen variaciones aleatorias en sus amplitudes y fases, y que éstas variaciones están directamente relacionadas con la estructura microscópica del objeto iluminado.

Ahora bien, las variaciones en las fases se derivan de las variaciones en las trayectorias ópticas de la luz dispersada; analizando la estructura del difusor, encontramos que dichas variaciones en las trayectorias son debidas esencialmente a dos factores, estos son: variaciones en las alturas de las rugosidades y distribución y extensión espacial de éstas. Pero, notemos que éstos dos factores son completamente independientes, podemos entonces pensar que ellos por separado también producen un patrón de moteado, ya que lo que importa para formarlo, es una variación aleatoria en las diferencias de camino óptico, (Es también conveniente mencionar el hecho de que una variación aleatoria en las amplitudes también puede contribuir por separado a la formación del P.M.O). Bajo este punto de vista, si lo que queremos es obtener un P.M.O. de manera sencilla, entonces podemos tomar alguna de las formas mencionadas para producirlo, Por sencillez encaminaremos la construcción del patrón atendiendo a su formación debida a la extensión y distribución espacial de las regiones dispersoras, Para efectuar esto nos basaremos en un modelo de aberturas idénticas distribuidas al azar, tomando las ideas principales de un experimento sugerido por Françon [1979, cap.I] .

Dicho modelo consiste en lo siguiente: La extensión de las regiones dispersoras de un objeto difusor transparente, pueden ser simuladas por un conjunto de pequeñas aberturas sobre una pantalla opaca; además, una distribución completamente aleatoria de las aberturas es equivalente a la distribución espacial aleatoria de las regiones dispersoras. Ahora bien, el tamaño y forma de las aberturas las podemos tomar diferentes para cada una, pero como veremos más adelante, ello no influye en la formación del patrón de moteado, solo importa la densidad de aberturas.

Sin pérdida de generalidad y para simplificar nuestro tratamiento, haremos todas las aberturas idénticas y estudiaremos el patrón de difracción de Fraunhofer producido por dichas aberturas, en el plano focal de una lente θ antepuesta al plano que contiene a las aberturas (ver fig.2.2.).

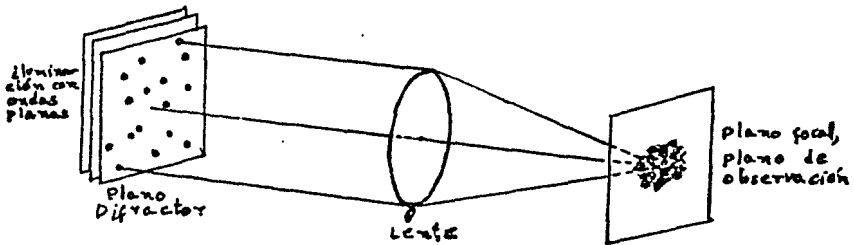


Fig. 2.2. Arreglo para obtener un Patrón de Fraunhofer - producido por Aberturas Idénticas Distribuidas al Azar.

En la suposición de que todas las aberturas son iguales, el teorema del arreglo (ver sec.1.3) nos asegura que el patrón de difracción observado, en el plano focal, será el patrón producido

por una sola de las aberturas, modulado por el patrón de interferencia que resultaría de un conjunto de fuentes puntuales dispuestas en las posiciones de las aberturas, tomando en cuenta las diferencias de fase.

Analicemos ahora, cómo se forma el P.M.O. de acuerdo a éste modelo. Supongamos que tenemos solamente una abertura, por ejemplo circular, bajo las condiciones para observar difracción de Fraunhofer. El patrón que resulta es del tipo de Airy centrado en el eje de la lente, como vimos en la sec. I.2.2. Si agregamos otra abertura, por el teorema del arreglo, en el plano focal de la lente, cada abertura formará un patrón de Airy, ambos centrados en el eje de la lente y por tanto sobrepuestos, pero dado que existe una separación entre las aberturas, entonces habrá efectos de interferencia como en el experimento de Young (ver sec. I.1.1), es decir, el patrón resultante será entonces una superposición de un patrón de difracción de Airy con un patrón de interferencia de franjas de Young. Conforme vayamos agregando más aberturas distribuidas al azar, el patrón observado será uno de Airy, ya que éste sólo depende de la geometría de la abertura, pero modulado por los efectos de interferencia que resultan al considerar las diferencias de fase, las cuales están distribuidas aleatoriamente. Es esta última condición necesaria para obtener un P.M.O. ; con esto, por lo tanto se justifica el empleo de dicho modelo para obtener el patrón de moteado.

Podemos también hacer resaltar otros puntos interesantes concernientes a éste modelo. El patrón de Airy resultante surge, como ya hemos dicho, de la geometría circular de las aberturas, y el

cho de que todas sean idénticas hace que sus dimensiones se mantengan constantes. Sin embargo, si las aberturas no fueran circulares, sino por ejemplo rectangulares o de cualquier otra forma, pero todas idénticas, el resultado es un cambio en el patrón de difracción principal ya que él solo depende de la geometría de las aberturas, en tanto que si no cambiamos la disposición de las aberturas, entonces las variaciones en las diferencias de camino óptico y por tanto las de las fases, se mantendrán inalteradas con lo cual el patrón de moteado no cambiará. En un caso más crítico (pero a la vez más parecido al difusor), si hacemos que todas las aberturas sean diferentes, pero manteniendo las mismas posiciones relativas, entonces ya no obtendremos un patrón de difracción principal bien definido, como sucede en los objetos difusores. Sin embargo, al no alterar las posiciones de las aberturas, no habrá variaciones en las diferencias de fase y en consecuencia el patrón de moteado no cambia; ésto último, únicamente es válido en la medida en que consideremos a las aberturas suficientemente pequeñas tal que las variaciones en las fases que ellas mismas producen (debido a sus dimensiones), sean despreciables comparados con las diferencias de fase que resultan de su distribución espacial.

Por otra parte, notemos que en el foco de la lente (ver fig. - 2.2), la luz proveniente de cada una de las aberturas, habrá recorrido la misma longitud de trayectoria y por consiguiente, las diferencias de fase de las ondas que llegan a dicho punto son nulas, es decir, llegan en fase. De ésto resulta que en el foco de la lente todas las ondas interferirán constructivamente, pero como en principio ésto únicamente ocurre en el foco, entonces éste será el

punto más brillante de todo el patrón, además, esto es independiente de si todas las aberturas son iguales o no. La aparición de este punto nos permitirá afirmar que estaremos observando efectivamente en el plano focal de la lente.

En base a todo lo anterior, pasaremos ahora a confrontar la teoría cualitativa de las aberturas difractoras con el experimento.

II.3.- PATRONES DE MOTEADO OPTICO POR ABERTURAS DIFRACTORAS. (Experimental).

Esta sección es la parte principal del presente trabajo, analizaremos el proceso de formación de un P.M.O. en donde los parámetros que tenemos a nuestra disposición son: la geometría y dimensiones de las aberturas, y la distribución espacial en una pantalla, lo cual nos permite controlar -por así decirlo- las variaciones en las diferencias de fase.

Para tocar todos los puntos relacionados con el modelo de aberturas, el experimento se dividió en dos partes;

- i) Se realizará la formación del patrón de moteado empleando aberturas circulares y rectangulares distribuidas al azar. Como algo adicional, también se trabajó con parejas de aberturas circulares idénticas, orientadas en la misma dirección, pero distribuidas al azar.
- ii) Usando las aberturas circulares, se inspeccionó el efecto de variar el tamaño de las aberturas para una densidad fija de ellas e, inversamente, con un tamaño dado de aberturas se realizaron variaciones en la densidad.

II.3.1.- Condiciones Generales del Experimento.

Las aberturas fueron realizadas sobre película Technical Pan, fotografiando círculos y rectángulos oscuros distribuidos al azar sobre un fondo blanco, se empleo una cámara reflex, tomando las fotografías a una distancia de aproximadamente un metro, como ejem--

plo, en la fig. 2.3 se muestra la distribución original de círculos negros y la fotografía correspondiente para sesenta círculos. El diámetro de los círculos fué de 4mm y las dimensiones de los rectángulos eran de 10 mm por 4 mm.

Para la primera parte del experimento se tomaron fotografías con una, dos, tres, cinco, veinte, sesenta y cien aberturas. Respecto a la segunda parte del experimento se le tomaron fotografías a veinte círculos negros, considerando tres tamaños diferentes y efectuando dos variaciones en el área que ocupaban.

Utilizando los negativos como aberturas difractoras. Esto dió como resultado aberturas circulares del orden de 10^{-4} cm. de diámetro y rectángulos de dimensiones lineales también del mismo orden de magnitud.

En la figura 2.4 se muestra el dispositivo experimental. Se empleo un laser de He-Ne de 0.5 mW ($\lambda = 6328 \text{ \AA}$), el haz del laser fué expandido con un objetivo de microscópio de 10x y un filtro espacial y después colimado con una lente plano convexa de distancia focal $f = 14$ cm y diámetro igual a 4 cm. El haz colimado se hizo incidir sobre los diferentes negativos de las aberturas, los cuales estaban situados a una distancia aproximada de 13 cm desde la lente. Posterior a las aberturas se colocó una segunda lente a una distancia aproximada de 22 cm de ellas, la segunda lente también era plano convexa, pero de distancia focal $f = 13.5$ cm y con diámetro de 6.5 cm .

De acuerdo a lo dicho en el primer capítulo (sec. I.2), ésta disposición de lentes nos permitirá observar el patrón de difrac-

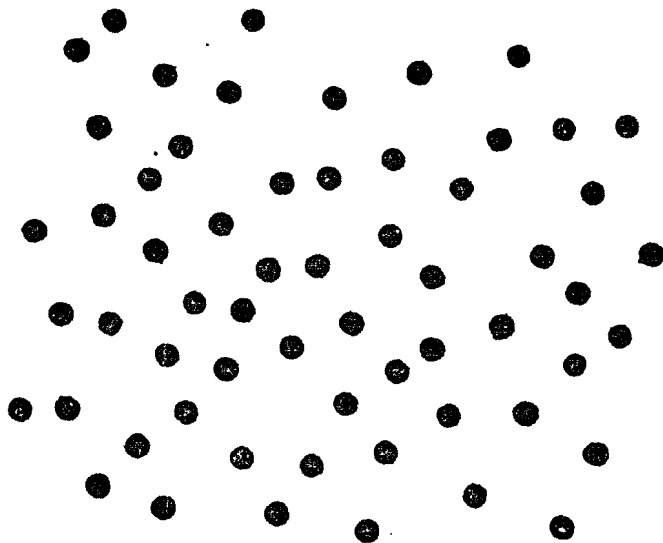


Fig. 2.3. Original y fotografía para obtener las aberturas difractoras (60 aberturas).

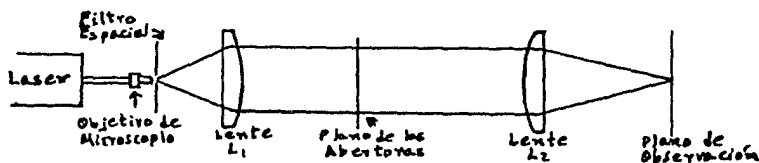


Fig. 2.4. Diagrama esquemático del dispositivo experimental para observar el patrón de difracción de Fraunhofer de las aberturas.

ción de Fraunhofer de las aberturas, si observamos en el plano focal de la segunda lente.

Por otra parte, un cálculo estimativo del patrón que esperamos observar, nos muestra que en el caso de las aberturas circulares, como éstas son del orden de 10^{-2} cm, entonces de la ecuación 1.40, tenemos que el radio del disco de Airy es del orden de 10^{-2} cm, lo cual es difícil de observar a simple vista. En consecuencia, se hizo necesario amplificar la imagen, para ello se empleó un microscopio con objetivo 5x y ocular 15x, se probaron varios de ellos resultando ser éstos los más satisfactorios para observar el patrón.

Finalmente, el patrón de difracción fué registrado sobre una película fotográfica Tri-X en una cámara réflex sin lente, adaptada al microscopio mediante un acoplador de 10 cm de longitud aproximadamente.

Se hicieron pruebas para determinar los tiempos de exposición necesarios para cada patrón, tomando como guía al exposímetro de la cámara, resultando 1/15 de segundo para los más brillantes (los

de mayor número de aberturas) hasta 20 segundos para los más te---
nues (los de una o dos aberturas).

El desarrollo del experimento es sencillo, primero se localiza el plano focal de la lente buscando el punto brillante en el foco, mencionado en la sección anterior, en ese punto se fija la cámara y se procede a fotografiar el patrón correspondiente para cada conjunto de aberturas.

II.3.2.- Resultados Experimentales. (discusión).

Los patrones de moteado producidos por las aberturas difractoras se muestran en las series de fotografías 1, 2, 3, 4 y 5. En la primera serie se presentan patrones para aberturas circulares, en la segunda los correspondientes a aberturas rectangulares y en la tercera son los de parejas de aberturas circulares; todos ellos resultan de la primera parte del experimento. Para la segunda parte se tienen las series 4 y 5 en ellas se muestran variaciones en el tamaño de las aberturas y variaciones en la densidad respectivamente. Analicemos por casos.

i) Dependencia del P.M.O. de la forma de las aberturas.

La motivación principal de ésta tesis es la obtención de P.M.O. en forma sencilla, el modelo de aberturas idénticas nos proporciona los elementos para lograr ésto. Basandonos en dicho modelo, la primera parte del experimento ~~se~~ obtener patrones de moteado para diferentes tipos de aberturas y analizar cómo es el proceso de su-

SERIE No. 1.
ABERTURAS CIRCULARES.

No. de Aberturas

ABERTURAS

PATRON DE DIFRACCION

1



2



3



5



SERIE No. 1.
(CONTINUACION)

10



20



60



100



Patrones De Moteado Optico Producidos Por Aberturas
Circulares Idénticas Distribuidas Al Azar.

SERIE No. 2.
ABERTURAS RECTANGULARES.

No. de Aberturas

ABERTURAS

PATRON DE DIFRACCION

1



2



3



5



SERIE No. 2.
(CONTINUACION).

10

50



20

50



60

50



100

50



Patrones De Moteado Optico Producidos Por Aberturas
Rectangulares Idénticas Distribuidas Al Azar.

SERIE No. 3.
PAREJAS DE ABERTURAS CIRCULARES.

No. de Parejas

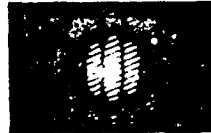
ABERTURAS

PATRON DE DIFRACCION

1



2

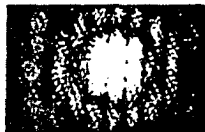


3



SERIE No. 3.
(CONTINUACION).

5



15



45



Patrones De Moteado Optico Producidos Por Parejas De
Aberturas Circulares Idénticas Distribuidas Al Azar.

SERIE No. 4.

ABERTURAS CIRCULARES DE DIFERENTE TAMAÑO.

No. de Aberturas

ABERTURAS

PATRON DE DIFRACCION

20



20



20



Patrones De Moteado Optico Producidos Por Aberturas
Circulares Identicas Distribuidas Al Azar (Diferen-
tes Tamaños Misma Densidad).

SERIE No. 5.

ABERTURAS CIRCULARES (VARIACION EN LA DENSIDAD).

No. de Aberturas

ABERTURAS

PATRON DE DIFRACCION

20



20



Patrones De Moteado Optico Producidos Por Aberturas
Circulares Identicas Distribuidas Al Azar (Mismo Ta
maño Diferente Densidad).

formación.

Observando las fotografías correspondientes a esta primera parte (series 1, 2, y 3), notamos algo muy interesante, vemos que efectivamente existe un patrón que se conserva, que es el correspondiente al de difracción de las aberturas (patrón de Airy para aberturas circulares y patrón típico de las aberturas rectangulares), de acuerdo a lo predicho por la teoría.

Notemos que en el caso, cuando hay dos aberturas, aparece, superpuesto al patrón de difracción, un patrón de franjas rectas como las del experimento de Young (ver series 1, 2, y 3), ésto también se explica por el teorema del arreglo. Otro hecho importante que surge aquí, es que el tamaño de los granos del patrón de moteado es prácticamente el mismo en las fotografías correspondientes al mismo número de aberturas, sin importar la forma geométrica de éstas últimas, ésto nos permite afirmar que el tamaño de los granos no depende de la forma de las aberturas, como ya habíamos dicho en la sección anterior.

En éstas series de fotografías (1,2,3) también se ve que, conforme aumenta el número de aberturas, el patrón de difracción se va granulando cada vez más, es decir, va apareciendo el patrón de moteado. Dichos granos también se van haciendo más finos si vamos considerando cada vez mayor cantidad de aberturas, ésto está de acuerdo con la teoría ya que cada vez hay un número mayor de variaciones en la fase en cualquier región del patrón, puesto que hay más aberturas que contribuyen al campo, en otras palabras, por ejemplo, si en una región del patrón originalmente había algunas ondas que interferían constructivamente, al considerar nuevas varia-

ciones en las fases, es posible que algunas de éstas nuevas ondas interfirieran constructivamente y otras destructivamente con las que ya existían pero dentro de la misma región, lo cual trae por consecuencia una granulación en la región que estábamos considerando originalmente, en la cual únicamente había interferencia constructiva.

Otro efecto interesante se observa en relación con las parejas de aberturas (serie 3), veamos; las aberturas por ser circulares - producen el patrón de difracción de Airy. Ahora bien, para cada pareja de aberturas se obtendrá un patrón de interferencia de Young - (ver sec. I.1.1), la superposición de éstos dos patrones permanecerá inalterada conforme se vayan agregando más parejas de aberturas, como antes esto se debe a que el patrón principal sólo depende de la geometría de las aberturas y el patrón de Young solo depende de la disposición relativa de las parejas de ellas. El patrón de Young no se pierde ya que todas las parejas están separadas una misma distancia y están alineadas en la misma dirección. Sin embargo, la granulación sigue apareciendo conforme se van añadiendo más parejas (distribuyéndolas al azar), esto demuestra una vez más, -- que el patrón de moteado surge exclusivamente por el carácter aleatorio de la disposición de las aberturas.

Pasemos ahora a la segunda parte del experimento.

ii) Dependencia del P.M.O. de la densidad de aberturas.

La motivación que nos lleve a realizar ésta segunda parte del experimento, fue que observamos que al aumentar el número de aberturas, el patrón de moteado se hace más fino, supusimos que esto -

estaba relacionado con el hecho de que, necesariamente al aumentar el número de aberturas, entonces aumenta el área en la cual se distribuyen. Nos interesó saber entonces ¿cómo está relacionada la densidad de aberturas con el tamaño de los granos del patrón y -- cuál era la influencia del tamaño de las aberturas?.

En la serie 4 se muestran los patrones obtenidos para un conjunto de 20 aberturas circulares idénticas distribuidas al azar, - variando el tamaño de ellas y dejando fija su densidad. Aquí se observa que el patrón de Airy cambia de tamaño y que sin embargo no se ve un cambio apreciable en el tamaño de los granos. La explicación de esto, de acuerdo a la teoría puede ser dada en los siguientes terminos; de la ecuación 1.40 ($r = 1.22\lambda f/2a$), se ve que el patrón de Airy depende inversamente del diámetro de las aberturas, una variación en él implica inmediatamente una variación en la extensión del patrón de difracción, así, si se disminuye el diámetro de las aberturas, entonces el patrón de Airy se hace más grande y viceversa. Pero como hemos dejado inalterada la densidad de aberturas, entonces la longitud del camino óptico, que pueda viajar cada onda, - emitida por las diferentes aberturas, no se vera afectada si se cambia el tamaño de éstas, en consecuencia las diferencias de fase de las ondas que interfieren y forman el patrón de moteado permanecerá constante. En conclusión, podemos decir que el patrón de moteado no cambia si se altera el tamaño de las aberturas, a condición de que la densidad de ellas se mantenga constante (ver serie 4). - No obstante, la intensidad del patrón sí se vera alterada, ya que la cantidad de luz que pasa por las aberturas depende directamen--te del área de ellas.

Veamos ahora que pasa si variamos la densidad de aberturas -- (manteniendo fijo el tamaño de ellas). En la serie 5 de fotogra-- fías se muestran los resultados. Aquí se observa algo muy interesan-- te; si se juntan las aberturas (es decir, aumenta la densidad), -- los granos se hacen más grandes y si por el contrario, se separan las aberturas (es decir, disminuye la densidad), entonces los granos se hacen más finos.

Para explicar lo anterior, consideremos primero solo dos aberturas separadas una cierta distancia, dentro de la región en que se distribuyen. Del experimento de Young, sabemos que ellas producirán un patrón de interferencia, consistente de franjas rectas, -- las cuales tienen una separación que depende de la diferencia de fase de las ondas interferentes, y que es inversamente proporcional a la separación de las aberturas, entonces (como ya dijimos en el primer capítulo sec. I.1.1) si acercamos aquellas dos aberturas (es decir, aumentamos la densidad) resulta que la separación entre las franjas aumenta y en caso contrario si separamos dichas aberturas, entonces las franjas se acercan. Esto es básicamente lo que le está ocurriendo al patrón de moteado, ya que si repetimos el -- mismo análisis para todas las parejas que se puedan formar, entonces cuando las distancias relativas disminuyen o aumentan, resulta una disminución o aumento en las diferencias de camino óptico de -- las ondas emitidas por las aberturas, ésto se refleja en forma directa en las variaciones de las fases y en consecuencia con el tamaño de las regiones en las que puede ocurrir interferencia constructiva o destructiva, es decir en el tamaño de los granos.

Respecto a todo esto, se puede concluir que el tamaño de los --

granos no depende del tamaño de las aberturas (no así la intensidad), solamente de la densidad espacial de éstas.

Para finalizar analizaremos las características de la mancha central; notemos primero que ésta mancha aparece tanto en las aberturas circulares como en las rectangulares. Este hecho nos inclina a pensar que ella no depende de la geometría de las aberturas, sino del sistema empleado para observar la difracción, para aclarar ésta afirmación, recordemos que estamos observando un patrón de difracción de Fraunhofer, entonces de acuerdo a la teoría, concluimos que efectivamente, todas las ondas que llegan al foco están en fase, porque han recorrido la misma longitud de camino óptico y por tanto, todas interfieren constructivamente, podría pensarse en que posiblemente pueda existir otro punto en el cual todas las ondas interfieran constructivamente, para responder esto se tendría que hacer un análisis del patrón y de ahí investigar dicha posibilidad, en forma cualitativa. Lo único que podemos hacer para justificar el hecho de que el foco sea el punto mas brillante de todo el patrón, es hacer notar que como en dicho punto no hay variaciones en las fases entonces, con N aberturas, si suponemos que las amplitudes de los campos emitidos por las aberturas son todas iguales, resulta que el campo total en el foco sera N veces el campo producido por una sola de las aberturas y por tanto, la irradiancia en ese punto será N^2 veces la irradiancia producida por una abertura, en tanto que para cualquier otro punto del patrón, siempre habrá fluctuaciones en las fases lo cual reduce la irradiancia en ese otro punto, hasta el grado que puede ser nula.

Se puede hacer una afirmación adicional respecto a dicha mancha central; como dijimos, en el foco no hay variaciones aleatorias en las fases de las ondas que se superponen, por otra parte, el patrón de moteado se caracteriza porque en cualquier punto de él, siempre existen variaciones en las fases, esto nos permite concluir que el foco no es un punto del patrón de moteado pues siempre las diferencias de fase son nulas, y por tanto debe excluirse de cualquier tratamiento estadístico o probabilístico que se haga al respecto.

II.3.3.- Conclusiones.

En base al análisis detallado de la estructura microscópica de los objetos difusores, hemos planteado que el origen de los patrones de moteado, son las variaciones aleatorias en las fases y amplitudes de las ondas interferentes. Hemos visto que las variaciones en las fases son debidas, principalmente, a las variaciones en las alturas y a la distribución espacial de las regiones dispersoras.

Atendiendo únicamente a las variaciones de fases relacionadas con la distribución espacial, se ha propuesto un modelo de aberturas idénticas distribuidas al azar, lo cual nos ha permitido simular un objeto difusor transparente (solo en la distribución espacial de las regiones dispersoras) y así, obtener efectivamente, un patrón de moteado óptico en forma sencilla, es decir, un patrón de aspecto completamente caótico como en los difusores. En éste caso, ahora se puede analizar el proceso que nos lleva a la formación --

del patrón.

Y se han encontrado lo siguientes hechos:

- a) El P.M.O. no depende de la forma geométrica de las aberturas, solo de la distribución irregular de éstas.
- b) El P.M.O. no depende del tamaño de las aberturas, no así la intensidad del patrón observado.
- c) El tamaño de los granos del P.M.O. depende del número de aberturas que haya y del área en la que se distribuyen, es decir, de la densidad de aberturas.
- d) La mancha central que se observa en el foco de la lente no es un punto del P.M.O..

CAPITULO III.

ANALISIS ESTADISTICO DE LOS PATRONES DE MOTEADO OPTICO.

Introducción.

Hasta aquí, hemos analizado cualitativamente el proceso de formación de los P.M.O. para el caso de aberturas idénticas distribuidas al azar, del cual hemos obtenido los resultados comentados al final del capítulo anterior.

Sin embargo, nuestra descripción quedaría un tanto incompleta sin una contraparte cuantitativa que describa al patrón en sí mismo. El carácter aleatorio del fenómeno sugiere un análisis estadístico para tratar el problema. En éste capítulo estudiaremos los P.M.O., no en su estructura detallada en forma analítica, sino en sus características globales o promedio. En la primera sección se justifica la necesidad de efectuar un análisis estadístico, haciendo hincapié en la información que se puede obtener de él. En la segunda sección se repasan las hipótesis necesarias para realizar la estadística sobre los objetos difusores y se presentan algunos de los resultados principales del análisis, todo esto, tomado del trabajo de Goodman [1975]. En la tercera sección se plantean las hipótesis involucradas en el modelo de aberturas idénticas y se discuten los resultados obtenidos. Finalmente, en la cuarta sección, siguiendo con el análisis para el modelo de aberturas, se muestra en el límite cuando el número de aberturas es muy grande ($N \rightarrow \infty$), -

la distribución de campo tiende a un límite Gaussiano, con características análogas a la obtenida con el difusor.

III.1.- NECESIDAD DE UN ANALISIS ESTADISTICO.

Como ya hemos dicho, el patrón de moteado surge como un fenómeno aleatorio, en el que las variaciones al azar de las fases y amplitudes de las ondas que interfieren, provenientes de las diferentes regiones dispersoras (bajo la suposición de iluminación coherente), juegan el papel principal. Apuntamos también que éstas variaciones, son consecuencia de la estructura microscópica de la superficie dispersora.

Ahora bien, para una descripción cuantitativa del fenómeno, no tenemos que las características del patrón, pueden ser obtenidas a partir de conocer el campo dispersado, ya que de éste se puede obtener la distribución de irradiancia en el patrón, la cual puede ser medida experimentalmente (como señalamos en el capítulo I). Sin embargo, es claro que el ponerse a estudiar los detalles microscópicos de la superficie y caracterizar cada una de las rugosidades para saber cómo dispersan la luz, puede ser una tarea bastante complicada, además de que ésto resultaría ser impráctico, ya que se tendría que repetir el análisis para cada superficie dispersora que se quisiera estudiar; estas circunstancias y el mismo carácter aleatorio del fenómeno, hace necesario, entonces, discutir las propiedades de los patrones de moteado en términos estadísticos, en donde lo primero que nos interesa conocer es la probabilidad de encontrar un cierto valor para el campo, en un punto dado de observación, y teniendo como variables aleatorias a las fases y amplitudes de las ondas dispersadas.

El análisis estadístico propuesto por Goodman [1975], toma en

cuenta que se pueden tener varias superficies difusoras, macroscópicamente iguales (es decir, de la misma naturaleza), aunque microscópicamente sean diferentes, tales que las variaciones en las fases y amplitudes, producidas por cada superficie difusora, sean todas equivalentes al llegar al punto de observación, de manera que todas ellas produzcan el mismo campo en dicho punto. En base a lo anterior, lo que se hace es considerar un conjunto de superficies macroscópicamente iguales pero microscópicamente diferentes, llamado "Ensemble", de manera que la probabilidad de que con una superficie difusora del conjunto, se obtenga un valor específico del campo, en un punto dado, será el número de superficies del ensemble que producen dicho valor particular, dividido entre el número total de elementos del ensemble.

Para plantear el análisis estadístico, Goodman [1975] hace ver que en la suposición de iluminación monocromática (para que existan efectos de interferencia), el campo observado puede ser escrito como

$$E(\vec{r}, t) = A(\vec{r}) e^{-i\omega t} \quad , \quad 3.1$$

donde $A(\vec{r})$ es la amplitud compleja del campo en el punto \vec{r} de observación y ω es la frecuencia de la onda del campo.

La amplitud compleja se puede expresar como

$$A(\vec{r}) = |A(\vec{r})| e^{i\theta(\vec{r})} \quad , \quad 3.2$$

donde $\theta(\vec{r})$ es la fase del campo en el punto en cuestión. Esta am--

plitud compleja, por el principio de superposición, es la resultante de la suma de las contribuciones provenientes de cada región dispersora, tomando en cuenta la amplitud y la fase respectiva; es decir,

$$\lambda(\vec{r}) = \sum_{k=1}^N |a_k| e^{i\phi_k}$$

3.3

donde $|a_k|$ y ϕ_k representan la amplitud y la fase de la contribución de la k -ésima región dispersora y N es el número total de tales contribuciones. La figura 3.1, ejemplifica la ecuación 3.3 como una suma de fasores en el plano complejo. Pero, notemos que en ésta figura 3.1 se puede ver una gran similaridad de nuestro pro-

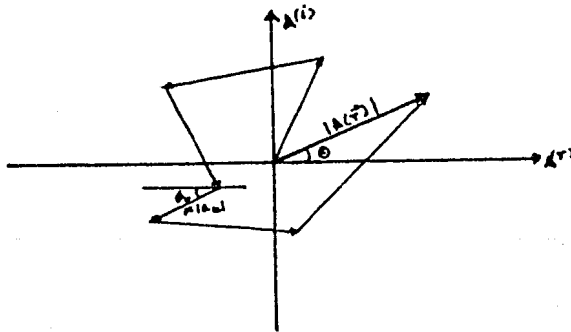


Fig. 3.1. Amplitud compleja como suma de fasores.

(Caminata aleatoria en el plano complejo).

blema, con el problema clásico de Caminata al Azar en dos dimensiones [Goodman, 1975], el cual ya ha sido estudiado desde hace muchos años. Visto de esta manera, por similitud, la extensión de --

los pasos representará la magnitud de los campos que contribuyen - al campo final y la dirección de estos pasos representara la fase de las ondas, provenientes de las diferentes regiones dispersoras.

Interpretar el problema estadístico de los P.M.O. como uno de caminata aleatoria en dos dimensiones y por ser éste último un problema bastante trabajado [Chandrasekhar, 1954], hace que el análisis de los P.M.O. se simplifique.

Por otra parte, para obtener la mayor información posible del análisis estadístico Goodman [1975] lo realiza en dos etapas; una llamada ESTADISTICA DE PRIMER ORDEN y otra conocida como ESTADISTICA DE SEGUNDO ORDEN. En la primera se analizan diversos parámetros o características en un solo punto del patrón y ello nos lleva a encontrar el valor promedio de la irradiancia y las fluctuaciones en dicho punto; por otra parte, en la segunda se encuentran involucrados dos puntos del patrón, ésta nos dá información de la relación entre las irradiancias en dichos puntos, lo cual, en cierta forma, nos puede dar el tamaño promedio de los granos [Goodman, -- 1975]. En este trabajo, solo presentaremos los resultados principales de la estadística de primer orden.

El desarrollo estadístico se puede hacer a dos niveles. Primero suponiendo que el difusor tiene una cantidad infinita de regiones dispersoras, y segundo, suponiendo que hay una cantidad finita de ellas.

El segundo caso es un problema bastante difícil y aun no se ha resuelto completamente. En la literatura existen algunos trabajos al respecto, como los de Ohtsubo [1982], Jakeman y Pusey [1973, -- 1975] o el de Shafer y Pusey [1972], y aunque sólo el primero está

directamente relacionado con los patrones de moteado, todos ellos contienen información interesante relativa al problema.

El primer caso, que es el más sencillo de tratar matemáticamente, es el que ha sido estudiado más profundamente y en el que se han encontrado resultados que han sido comprobados experimentalmente, [Goodman, 1975, 1976], [Ochoa y Goodman, 1983].

Finalmente, no está por demás decir que el primer caso es el límite del segundo, cuando se hace tender a infinito el número de regiones dispersoras. Sin embargo, el paso del primer caso al segundo no es directo, ya que las hipótesis hechas para el análisis difieren en algunos aspectos y como lo afirma Ohtsubo [1982] "...las teorías son fuertemente afectadas por las suposiciones hechas durante los cálculos.". Esto hace necesario entonces, un análisis cuidadoso de las hipótesis planteadas para desarrollar la teoría, ésto será el punto más importante a tratar en éste capítulo.

Pasaremos ahora a estudiar los análisis estadísticos realizados para objetos difusores y para las aberturas difractoras.

III.2.- ESTADISTICA EN LOS OBJETOS DIFUSORES.

En ésta sección haremos una breve revisión del análisis estadístico que realiza Goodman [1975] para los objetos difusores, se plantean las hipótesis sobre las cuales se basa dicho análisis y se presentan los resultados principales de la estadística de primer orden, al final haremos una discusión de las hipótesis fundamentales, de las cuales no resulta claro su planteamiento.

El análisis estadístico que propone Goodman para estudiar los P.M.O. producidos por objetos dispersores, se supone válido para superficies muy rugosas, tales que la longitud de onda de la luz incidente es menor que las alturas de las rugosidades, y en donde se supone que el número de regiones dispersoras tiende a infinito.

Ahora bien, hemos dicho que las diferentes regiones dispersoras contribuyen al campo total, en algún punto, con una amplitud de magnitud $|a_k|$ y una fase ϕ_k , éstas son las variables estadísticas que entran en juego. Las hipótesis que Goodman [1975] plantea respecto a estas variables son las siguientes:

- i) La amplitud a_k y la fase ϕ_k de la k -ésima contribución, son estadísticamente independientes y también lo son respecto a cualquier otra contribución.
- ii) Las fases ϕ_k están uniformemente distribuidas en el intervalo primario $(-\pi, \pi)$.

Con éstas hipótesis, la primera cantidad que calcula Goodman es la función de densidad de probabilidad para el campo total, para ello, descompone primero la ecuación 3.3 en sus partes real e imaginaria con lo cual

$$A^{(r)} = \text{Re}\{A\} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=1}^N |a_k| \cos \phi_k ,$$

$$A^{(i)} = \text{Im}\{A\} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=1}^N |a_k| \sin \phi_k , \quad 3.4$$

donde introduce el factor $1/\sqrt{N}$ como constante de normalización.

Apartir de las hipótesis estadísticas de las amplitudes y de las fases, y tomando promedios sobre un un ensemble de superficies rugosas macroscópicamente iguales pero microscópicamente diferentes, se encuentra que

$$\left. \begin{aligned} \langle A^{(r)} \rangle &= 0 \\ \langle A^{(i)} \rangle &= 0 \end{aligned} \right\} 3.5$$

$$\text{y} \quad \left. \begin{aligned} \langle [A^{(r)}]^2 \rangle &= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \langle |a_k|^2 \rangle / 2 \\ \langle [A^{(i)}]^2 \rangle &= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \langle |a_k|^2 \rangle / 2 \\ \langle A^{(r)} A^{(i)} \rangle &= 0 \end{aligned} \right\} 3.6$$

donde los parentesis angulares denotan el promedio sobre el ensemble.

De los resultados de las ecuaciones 3.5 y 3.6, se tiene que las partes real e imaginaria de la amplitud compleja del campo, tienen valor medio cero, variancias iguales y correlación nula.

Si ahora se supone que el número N de contribuciones al campo total es muy grande (lo cual significa que las partes real e ima--

gitaria del campo, resultan ser una suma de un número muy grande - de variables aleatorias independientes), la aplicación del Teorema del Limite Central [Gnedenko, 1968] asegura entonces, que en éstas condiciones, cuando $N \rightarrow \infty$ resulta que $A^{(r)}$ y $A^{(i)}$ tienen una distribución de probabilidad asintóticamente Gaussiana. En tal caso, la función de densidad de probabilidad conjunta en las partes real e imaginaria estarán dadas por

$$P_{r,i}(A^{(r)}, A^{(i)}) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \left\{ \exp\left(-\frac{[A^{(r)}]^2 + [A^{(i)}]^2}{2\sigma^2}\right) \right\} \quad 3.7$$

donde

$$\sigma^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \langle |a_k|^2 \rangle / 2 \quad 3.8$$

Goodman afirma que éste resultado asintótico tiene un grado extremadamente alto de precisión.

Reescribiendo la ecuación 3.7 en terminos de la irradiación I y la fase θ del campo final, tomando en cuenta que

$$\begin{aligned} A^{(r)} &= \sqrt{I} \cos \theta \\ A^{(i)} &= \sqrt{I} \sin \theta \end{aligned} \quad 3.9$$

resulta que la función de densidad de probabilidad para la irradiación y la fase viene a ser

$$P_{I,\theta}(I, \theta) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi\sigma^2} \exp(-I/2\sigma^2) & I \geq 0 \\ & -\pi \leq \theta \leq \pi \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad 3.10$$

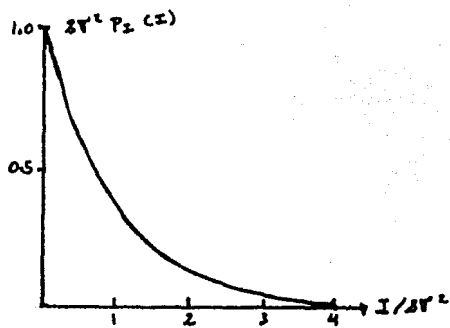
Para analizar en más detalle la última ecuación 3.10, se calculan las funciones de densidad marginal, de lo cual resulta que;

$$P_I(I) = \int_{-\pi}^{\pi} P_{I,\theta}(I, \theta) d\theta = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{I}} \exp(-I/2\sqrt{I}) & I \geq 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad 3.11$$

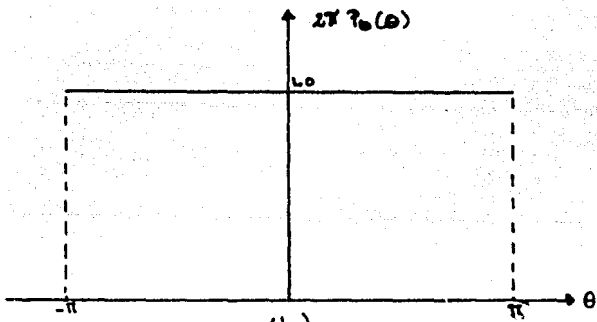
y

$$P_\theta(\theta) = \int_0^{\infty} P_{I,\theta}(I, \theta) dI = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} & -\pi \leq \theta \leq \pi \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad 3.12$$

A partir de estos resultados (ecs. 3.11 y 3.12), se concluye - que la irradiancia en un punto dado del patrón de moteado "obedece una estadística de exponencial negativa", en tanto que la fase "obedece una estadística uniforme (constante)". La figura 3.2 muestra las gráficas de dichas funciones de probabilidad marginal. Analizando éstas gráficas vemos que la probabilidad de encontrar una irradiancia mínima (fig. 3.2a), es mayor que la probabilidad de encontrar una irradiancia grande; esto quiere decir que en un punto dado, es más probable que éste pertenezca a una region de irradiancia nula que a uno de irradiancia grande; dicho de otro modo, es más probable que en un patrón de moteado se encuentren más regiones con irradiancia cero que con irradiancia grande. Este resultado fué confrontado por Mc Kechnie [Goodman, 1975] quién realizó -- 23 000 mediciones de irradiancia en un patrón con lo cual Goodman



(a)



(b)

Fig. 3.2. a) Función de densidad marginal para la irradiancia.

b) Función de densidad marginal para la fase.

[1975] concluye que "... El acuerdo entre la teoría y el experimento es excelente y se puede decir que la función de densidad de exponencial negativa para el patrón de moteado ha sido adecuadamente confirmada por el experimento."

Por otra parte, respecto a la función de densidad para las fases la fig. 3.2b muestra que la probabilidad de encontrar cualquier fase en algún punto del patrón, es igual para todas, como era de esperarse de las hipótesis fundamentales.

Otra información importante que se puede obtener de la función de densidad de probabilidad, son los momentos de la distribución, ya que ellos nos permiten conocer en más detalle las propiedades estadísticas del patrón, tales como el valor medio de la irradiancia y sus fluctuaciones. Considerando sólo la función de densidad marginal de la irradiancia (ya que es ésta la que tiene el principal interés), se encuentra que el n-ésimo momento de la irradiancia $\langle I^n \rangle$ está dado por

$$\begin{aligned} \langle I^n \rangle &= \frac{1}{2\sigma^2} \int_0^\infty I^n e^{-I/2\sigma^2} dI \\ &= n! (2\sigma^2)^n \end{aligned} \quad , \quad \begin{array}{l} 3.13 \\ 3.14 \end{array}$$

En el caso especial de $n=1$, se obtiene el valor medio de la irradiancia, el cual estará dado entonces por

$$\langle I \rangle = 2\sigma^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \langle |a_k|^2 \rangle \quad , \quad 3.14$$

ésto significa que la irradiancia media depende solamente del promedio de la magnitud al cuadrado de las amplitudes de todas las --

contribuciones, sin tomar en cuenta las fases..

Otras cantidades de importancia son el segundo momento y la variancia de la intensidad. El segundo momento está dado por,

$$\langle I^2 \rangle = 2(2V^2)^2 = 2 \langle I \rangle^2 \quad , \quad 3.15$$

con lo cual la variancia en la intensidad es

$$\begin{aligned} V_I^2 &= \langle I^2 \rangle - \langle I \rangle^2 = 2 \langle I \rangle^2 - \langle I \rangle^2 \\ &= \langle I \rangle^2 \quad , \quad 3.16 \end{aligned}$$

resulta entonces, que la desviación estandar V_I , es idénticamente igual al promedio de la irradiancia. Pero con ésto, se obtiene que el contraste del patrón definido por Goodman como la razón $C = V_I / \langle I \rangle$ es precisamente $C=1$. Esto último implica que el contraste es máximo en el patrón, en otras palabras, el patrón observado tendrá regiones completamente brillantes y regiones completamente oscuras, lo cual se observa efectivamente.

Estos son algunos de los resultados mas importantes de la estadística de primer orden. Existen otros también muy interesantes, - tales como: la suma de patrones de moteado, patrones de moteado -- con luz parcialmente polarizada, etc., los cuales se encuentran estudiados en detalle en el trabajo de Goodman [1975] .

Ahora bien, el análisis de Goodman se basa en dos hipótesis estadísticas fundamentales las cuales le permiten calcular facilmente la media y la variancia de las componentes de la amplitud compleja del campo, despues supone que hay una cantidad infinita de -

contribuciones al campo total, las cuales son estadísticamente independientes, en estas condiciones, aplica el teorema del límite central, el cual establece que si existe la media y la variancia de una cantidad aleatoria la cual resulta de una sucesión de variables aleatorias, estadísticamente independientes, entonces esa cantidad aleatoria se distribuye en forma Gaussiana. Esto permite obtener la función de densidad de probabilidad para el campo, a partir de esta función se derivan los resultados que hemos visto. Sin embargo, las hipótesis fundamentales no son planteadas con una justificación adecuada. Analizaremos ahora, más a fondo éstas hipótesis.

Reescribamos una vez más las hipótesis fundamentales;

- i) La amplitud a_k y la fase ϕ_k de la k-ésima contribución, son estadísticamente independientes y también lo son respecto a cualquier otra contribución.
- ii) Las fases ϕ_k están uniformemente distribuidas en el intervalo primario $(-\pi, \pi)$.

La primera de estas hipótesis es bastante aceptable, ya que efectivamente, para una onda cualquiera, la magnitud de la amplitud y la de la fase, son variables independientes, de hecho necesitamos las dos para describir una única onda y no podemos determinar una de estas variables en términos de la otra, es por tanto razonable que dichas cantidades sean también estadísticamente independientes. Por otra parte, respecto a la segunda parte de ésta hipótesis, podemos estar de acuerdo con ella si consideramos que cuando la luz incide sobre el objeto difusor, la forma en que una reflexión dispersora reemita la luz, no tiene nada que ver con la forma en que lo haga otra, ya que en general las alturas de las ^{variaciones} no son -

las mismas, y aunque lo fueran, la distribución espacial de las áreas dispersoras de todos modos afectan las fases. Con todo esto se puede justificar la primera hipótesis.

En lo concerniente a la segunda hipótesis, no resulta claro su planteamiento, ya que para una área dada de iluminación, si consideramos la distribución espacial de las rugosidades, realmente, no es seguro que las fases se distribuyan uniformemente en el intervalo $(-\pi, \pi)$, puede ser posible que también se encuentren en un intervalo mayor o menor. Todo depende del tamaño del área que se este iluminando ya que ello también influye en los valores posibles que puedan tener las fases. Pero todo esto es respecto a la distribución espacial, nos falta considerar las alturas de las rugosidades. Aún así, no es claro como se puede lograr una distribución uniforme en las fases considerando dichas alturas. Ciertamente el empleo de ésta hipótesis simplifica los cálculos y aunque no es claro su planteamiento, como siempre, únicamente los resultados experimentales pueden justificar su validez.

En la siguiente sección estudiaremos los P.M.O. producidos por aberturas difractoras desde el punto de vista estadístico. Tratando de seguir el mismo camino que Goodman, haremos hipótesis estadísticas concernientes a los campos difractados por las aberturas, teniendo cuidado en su planteamiento, y como veremos éstas hipótesis difieren significativamente de las propuestas para los objetos difusores.

III.3.- ESTADISTICA EN LAS ABERTURAS DIFRACTORAS.

Nuestro ojetivo en ésta sección es iniciar un análisis estadístico para las aberturas difractoras. En la literatura no se encontro ningún trabajo análogo y en éste sentido se puede decir que el nuestro es original.

El análisis estadístico en los objetos difusores, como hemos visto, se basa en dos hipótesis fundamentales, las cuales se plantean sin aparente justificación, pero que en última instancia el experimento las comprueba.

Sin embargo, en el modelo de aberturas donde si se tiene mayor información respecto a la región que está "dispersando" la luz, las hipótesis pueden ser reformuladas en base al experimento.

La primera observación que podemos hacer es con respecto a las magnitudes de las amplitudes de las diferentes contribuciones al campo total, para algun punto de observación. Tomando en cuenta que en el experimento se trabajo con un patrón de difracción de Fraunhofer, en el cual todas las aberturas eran iluminadas por el mismo haz, se concituye que todas las magnitudes de las amplitudes que contribuyen al campo total, son iguales. Y también, de la misma forma que en el caso del dispersor, la amplitud y la fase que describen a alguna onda, son variables independientes.

En base a ésta primera observación podemos plantear la primera hipótesis estadística, para el patrón producido por aberturas idénticas distribuidas al azar;

a) Las magnitudes de las amplitudes, del campo difrac

tado por las diferentes aberturas son todas iguales, pero no hay relación entre sus fases; más aún, la amplitud a_k y la fase ϕ_k del campo emitido por la k -ésima abertura son estadísticamente independientes.

Sin embargo, todavía nos falta información acerca de la distribución de las fases. En éste caso, a diferencia del difusor, tenemos mayor información sobre la región dispersora de luz. Sabemos - que existe un número finito de aberturas, que además son macroscópicas y que se distribuyen uniformemente sobre la pantalla que las contiene. Esta información adicional nos permitirá plantear en forma más clara la hipótesis de la distribución de las fases lo cual no era posible en el caso del difusor.

Para saber cómo se encuentran distribuidas las fases, supongamos que todas las aberturas se encuentran distribuidas uniformemente sobre el plano difractor, si ésto sucede, es claro que hay varias aberturas (dentro de una cierta región), que pueden contribuir prácticamente con la misma fase, en el sentido de que las trayectorias ópticas que recorren las ondas difractadas, desde las aberturas, hasta el punto de observación, pueden tener ligeras variaciones dentro de un cierto rango, si es que las aberturas se distribuyen uniformemente. Tomando en cuenta ésto, nuestro problema será entonces: Dado un punto en el plano de observación ¿cuál es la probabilidad de que de todas las aberturas, una cierta cantidad de éstas contribuyan al campo en el punto de observación con una fase entre δ y $\delta + d\delta$?. Pero ésta probabilidad esta dada por la fracción de aberturas que contribuyen con una fase entre δ y $\delta +$

$d\delta$ dividida entre el número total de aberturas, es decir,

$$w(\delta) d\delta = \frac{1}{N} \frac{dN}{d\delta} d\delta \quad 3.17$$

donde $w(\delta)$ es la función de densidad de probabilidad para las fases, N el número total de aberturas y $dN/d\delta$ la la fracción de aberturas que contribuyen al campo total con una fase en el intervalo $(\delta, \delta+d\delta)$. En los casos particulares en que las aberturas se distribuyen uniformemente sobre: a) un círculo de radio R o b) sobre un rectángulo de longitud $2a$ y ancho $2b$. Se encuentra que las distribuciones de probabilidad para las fases están dadas respectivamente por (ver apéndice A)

$$w(\delta) d\delta = \begin{cases} \frac{2\mu R^2}{Nk^2} \sqrt{1 - \left(\frac{f}{Rk}\right)^2 \delta^2} d\delta & -\frac{Rk}{f} \leq \delta \leq \frac{Rk}{f} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad 3.18$$

y

$$w(\delta) d\delta = \begin{cases} \frac{\mu}{N} \left(\frac{f}{k}\right) \left[\left(\frac{a}{k} + b\right) + \left(\frac{f}{k}\right) \delta \right] d\delta & \text{si } -\frac{k}{f} \left(\frac{a}{k} + b\right) \leq \delta \leq -\frac{k}{f} \left(\frac{a}{k} - b\right), \\ 2 \frac{\mu}{N} \left(\frac{f}{k}\right) b d\delta & \text{si } -\frac{k}{f} \left(\frac{a}{k} - b\right) \leq \delta \leq \frac{k}{f} \left(\frac{a}{k} - b\right), \\ \frac{\mu}{N} \left(\frac{f}{k}\right) \left[\left(\frac{a}{k} + b\right) - \left(\frac{f}{k}\right) \delta \right] d\delta & \text{si } \frac{k}{f} \left(\frac{a}{k} - b\right) \leq \delta \leq \frac{k}{f} \left(\frac{a}{k} + b\right), \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad 3.19$$

donde μ es la densidad de aberturas por unidad de área, N el número total de aberturas, f la distancia focal de la lente, k el número de onda de la luz incidente, y la posición del punto de observación; y R , a , y b son las dimensiones que caracterizan las dife-

rentes áreas en las que se distribuyen las aberturas. La figura 3.3 ilustra estas funciones de probabilidad. Notemos que cuando las aberturas se distribuyen uniformemente sobre un círculo, entonces las fases se distribuyen elípticamente, en tanto que si las aberturas se distribuyen sobre un rectángulo, entonces las fases se distribuyen uniformemente en un cierto intervalo que depende de la posición del punto de observación y después decae linealmente en los extremos de dicho intervalo. Notemos además que estas funciones son simétricas respecto al eje que define la densidad de fase.

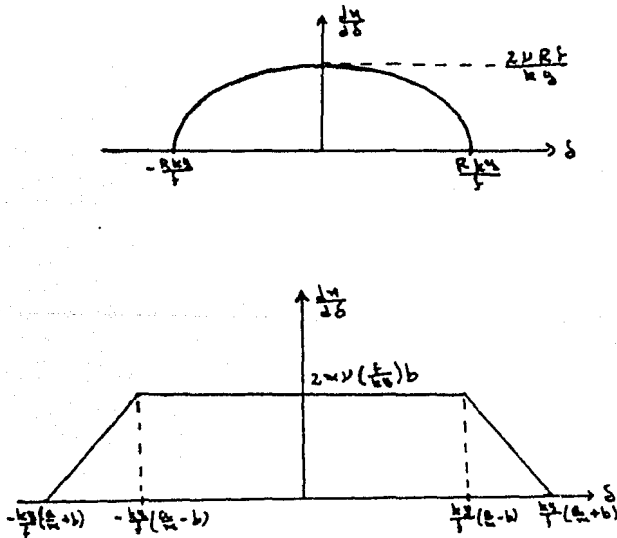


Fig. 3.3. Distribución para la densidad de fases cuando las aberturas se distribuyen uniformemente sobre a) un círculo y b) sobre un rectángulo.

En base a lo anterior, ya no necesitamos ninguna hipótesis estadística sobre las fases, puesto que ahora tenemos una forma explícita de la distribución, pero debemos tener en cuenta que para obtener lo anterior, fué necesaria la hipótesis de que las aberturas se distribuyen uniformemente, lo cual dio por resultado que dependiendo de la geometría del área de distribución, las funciones de densidad tomen diferentes formas.

Con los resultados anteriores podemos empezar ahora el análisis estadístico sobre el campo. Para ello, lo primero que nos interesa determinar es la función de densidad de probabilidad; para obtenerla podemos empezar por preguntarnos sobre la probabilidad de que el campo total, en un punto de observación, tenga una amplitud entre E y $E + dE$, y una fase entre θ y $\theta + d\theta$, después de considerar N contribuciones provenientes de las aberturas, tomando en cuenta sus amplitudes y fases relativas. Como vimos en la sección III.1, éste problema es análogo al de caminata aleatoria en dos dimensiones. Para resolver dicho problema existe un método muy general ideado por A.A. Markoff, el cual Chandrasekhar [1943] describe de manera tal que es directamente aplicable a cualquier problema semejante al de caminata al azar. El análisis es un tanto laborioso y queda omitido en éste trabajo, solo tomaremos el resultado adaptándolo a nuestro problema.

De acuerdo al método de Markoff, descrito por Chandrasekhar; para nuestro caso, la probabilidad de que el campo total en un punto de observación tenga una magnitud entre E y $E + dE$, y una fase entre θ y $\theta + d\theta$, después de considerar N contribuciones provenientes de las N aberturas, esta dada por

$$W_N(\vec{E}) \downarrow \vec{E} = \frac{d\vec{E}}{4\pi^2} \int d\vec{p} e^{-i\vec{p}\cdot\vec{E}} A_N(\vec{p}) , \quad 3.20$$

con

$$A_N(\vec{p}) = \prod_{k=1}^N \int d\vec{a}_k e^{i\vec{p}\cdot\vec{a}_k} \mathcal{Z}_k(\vec{a}_k) , \quad 3.21$$

en donde $W_N(E)$ es la función de densidad de probabilidad para el campo total con N contribuciones; $\mathcal{Z}_k(a_k, \delta_k)$ es la función de densidad de probabilidad conjunta, en la magnitud y en la fase de la -- contribución de la k -ésima abertura.

Ahora, haciendo uso de la hipótesis (a) plantearemos la función de densidad de probabilidad conjunta $\mathcal{Z}_k(a_k, \delta_k)$. para los casos particulares en los que las aberturas se distribuyen uniformemente sobre una región circular, y sobre una región rectangular. -- De la hipótesis (a), puesto que la amplitud y la fase son variables estadísticamente independientes, se sigue que \mathcal{Z}_k es el producto de las funciones de densidad marginal de cada variable. Para las fases ya tenemos las funciones de densidad marginal para los casos particulares que estamos considerando (ecs. 3.18 y 3.19). -- Para las amplitudes, Chandrasekhar [1954] propone que en el caso, cuando los pasos son de igual extensión, lo conveniente es usar la función delta de Dirac, en consecuencia, para nosotros, puesto que de la hipótesis (a) todas las amplitudes son iguales, digamos α , -- proponemos que la función de densidad marginal para las amplitudes es

$$\frac{1}{\alpha} \delta(|a_k| - \alpha) , \quad 3.22$$

ésto nos asegura que efectivamente el campo de cualquiera de las aberturas solo pueda tomar el valor α , el factor $1/\alpha$ en ésta distribución sirve como constante de normalización. Con todo lo anterior, la función de densidad de probabilidad conjunta para la magnitud - de la amplitud y la fase, de la k -ésima contribución al campo to-- tal es

$$\tau_k(a_k, \delta_k) = \frac{1}{\alpha} \delta(|a_k| - \alpha) \mathcal{W}(\delta_k) \quad , \quad 3.23$$

y $\mathcal{W}(\delta_k)$ está dáda por las ecuaciones 3.18 y 3.19 para cada caso particular.

Debemos advertir que no podemos llegar muy lejos con ésta for-- mulación, ya que como veremos más adelante, al intentar evaluar -- las integrales 3.20 y 3.21, inmediatamente surgen problemas alge-- braicos de integración que aún no se han podido resolver.

Analicemos primero el caso en el que las aberturas se distribuy en uniformemente sobre un círculo; sustituyendo la ecuación 3.18 en la ec. 3.23, y el resultado en la ec. 3.21, se encuentra que

$$\begin{aligned} A_n(\vec{r}) &= \prod_{k=1}^n \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{i|a_k| \cos \delta_k} \left[\frac{2\pi k}{\alpha k_0} \delta(|a_k| - \alpha) \sqrt{1 - \left(\frac{r}{\alpha k_0}\right)^2 \delta_k^2} \right] |a_k| d|a_k| d\delta_k \\ &= \prod_{k=1}^n \frac{2\pi k}{\alpha k_0} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \left(\frac{r}{\alpha k_0}\right)^2 \delta_k^2} e^{i\alpha |a_k| \cos \delta_k} d\delta_k \quad , \quad 3.24 \end{aligned}$$

desafortunadamente hasta aquí podemos llegar, la integral en la ec. 3.24 es bastante complicada y no puede ser resuelta en términos de funciones conocidas.

Veamos ahora que sucede en el caso en el que las aberturas se distribuyen uniformemente sobre un rectángulo; en éste caso tendremos que

$$Z_k(a_k, \delta_k) = \frac{N \nu f}{N_k k_B} \delta (10_k - \alpha) \times \begin{cases} \left(\frac{a}{k} + b\right) + \left(\frac{f}{k_B}\right) \delta_k & \text{si } -\frac{k_B}{f} \left(\frac{a}{k} + b\right) \leq \delta_k \leq -\frac{k_B}{f} \left(\frac{a}{k} - b\right) \\ 2b & \text{si } -\frac{k_B}{f} \left(\frac{a}{k} - b\right) \leq \delta_k \leq \frac{k_B}{f} \left(\frac{a}{k} - b\right) \\ \left(\frac{a}{k} + b\right) - \left(\frac{f}{k_B}\right) \delta_k & \text{si } \frac{k_B}{f} \left(\frac{a}{k} - b\right) \leq \delta_k \leq \frac{k_B}{f} \left(\frac{a}{k} + b\right) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

sustituyendo esto en la ec. 3.21 resulta,

$$A_u(P) = \prod_{k=1}^N \frac{N \nu f}{N_k k_B} \left\{ \int_{-\frac{k_B}{f} \left(\frac{a}{k} + b\right)}^{-\frac{k_B}{f} \left(\frac{a}{k} - b\right)} \left[\left(\frac{a}{k} + b\right) + \frac{f}{k_B} \delta_k \right] e^{i |P| k \cos \delta_k} d \delta_k \right. \\ + 2b \int_{-\frac{k_B}{f} \left(\frac{a}{k} - b\right)}^{\frac{k_B}{f} \left(\frac{a}{k} - b\right)} e^{i |P| k \cos \delta_k} d \delta_k \\ \left. + \int_{\frac{k_B}{f} \left(\frac{a}{k} - b\right)}^{\frac{k_B}{f} \left(\frac{a}{k} + b\right)} \left[\left(\frac{a}{k} + b\right) - \frac{f}{k_B} \delta_k \right] e^{i |P| k \cos \delta_k} d \delta_k \right\} \quad 3.25$$

Nuevamente nos encontramos con integrales difíciles de evaluar, el problema para llevar a cabo las integrales radica principalmente en el hecho de que los límites de integración dependen de la posición del punto de observación, y de la geometría de la región en la que se distribuyen las aberturas. Esto limita considerablemente

el empleo de cualquier técnica para evaluar integrales de éste tipo, como son las transformadas de Fourier o las funciones de Bessel. No obstante, sería deseable lograr obtener la función de densidad de probabilidad para el campo siguiendo éste camino, ya que aquí está contenida la información sobre la densidad de aberturas, lo cual no se tiene con los difusores.

Sin embargo, el análisis de la distribución de las fases nos ha permitido establecer, que se puede obtener en forma explícita, la función de densidad de probabilidad para ellas, con la única su posición de que las aberturas se distribuyen uniformemente. La implicación importante que tiene ésto, es que la hipótesis hecha en los objetos difusores, de distribución uniforme de fases, en el caso de las aberturas, solo es aplicable bajo condiciones muy particulares, que tienen que ver principalmente con la posición del punto de observación y de la geometría de la superficie en la que se encuentran las aberturas.

En la siguiente sección, veremos como se obtiene un límite Gaussiano para el análisis de las aberturas cuando se supone que hay número infinito de ellas, éste resultado es análogo al que se ob-tiene para los difusores.

III.4.- APROXIMACION GAUSSIANA PARA LOS P.M.O. PRODUCIDOS POR
ABERTURAS DIFRACTORAS.

En ésta sección se considera nuevamente el método de Markoff - para la solución del problema general de caminata al azar [Chandra sekhar, op. cit. p.17], sin hacer ninguna suposición especial acerca de la forma explícita de la distribución de probabilidad de cada contribución al campo total, excepto que absolutamente todas están descritas por la misma función (i.e. $Z_{\mathbf{a}_k}(\mathbf{a}_k) = Z(\mathbf{a})$). Deduiremos, por tanto, la función de distribución para el campo en la región de observación, cuando el número de contribuciones tiende a ser mucho muy grande.

De acuerdo a lo anterior, la función $A_N(\vec{\rho})$ definida por la ec. 3.21 toma la forma

$$A_N(\vec{\rho}) = \left[\int_{\vec{a}} \exp(i \vec{\rho} \cdot \vec{a}) Z(\vec{a}) d\vec{a} \right]^N, \quad 3.26$$

si a_x y a_y son las coordenadas cartesianas del campo \vec{a} en alguna de las aberturas, respecto a un sistema fijo, y ρ_x y ρ_y las coordenadas de $\vec{\rho}$ también respecto a un sistema fijo, entonces

$$\begin{aligned} A_N(\vec{\rho}) &= \left[\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp[i(\rho_x a_x + \rho_y a_y)] Z(a_x, a_y) dx dy \right]^N \\ &= \left[\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} (\rho_x a_x + \rho_y a_y)^n Z(a_x, a_y) dx dy \right]^N, \end{aligned}$$

en estos resultados hemos tomado la expansión en serie de la función exponencial. Tomando ahora la expansión binomial, e intercambiando los signos de integración por los de sumatoria, la expresi-

cion anterior se puede escribir como:

$$\begin{aligned} \Delta_N(\vec{p}) &= \left[\sum_{n_x=0}^{\infty} \frac{i^{n_x}}{n_x!} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (p_1 a_x + p_2 a_y)^{n_x} \zeta(a_x, a_y) dx dy \right]^N \\ &= \left[\sum_{n_x=0}^{\infty} \frac{i^{n_x}}{n_x!} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=0}^{n_x} \binom{n_x}{k} (p_1 a_x)^{n_x-k} (p_2 a_y)^k \zeta(a_x, a_y) dx dy \right]^N \\ &= \left[\sum_{n_x=0}^{\infty} \frac{i^{n_x}}{n_x!} \sum_{k=0}^{n_x} \binom{n_x}{k} p_1^{n_x-k} p_2^k \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (a_x^{n_x-k} a_y^k) \zeta(a_x, a_y) dx dy \right]^N \quad 3.27 \end{aligned}$$

Pero la integral en 3.27 es precisamente el promedio de la cantidad $(a_x^{n_x-k} a_y^k)$. Sin embargo, por ser a_x y a_y cantidades estadísticamente independientes, el promedio sobre límites simétricos de una cantidad de la forma $(a_x^m a_y^n)$ se anula para cualquier m y n - distintos de cero; por lo tanto, los únicos términos que contribuyen a la segunda suma son con $k=0$ y $k=n_x$, con lo cual la ecuación 3.27 se reduce a

$$\Delta_N(\vec{p}) = \left[\sum_{n_x=0}^{\infty} \frac{i^{n_x}}{n_x!} (p_1^{n_x} \bar{a}_x^{n_x} + p_2^{n_x} \bar{a}_y^{n_x}) \right]^N \quad 3.28$$

Ahora bien, se puede demostrar que para una distribución del tipo Gaussiano, que es el caso que nos interesa, los momentos de orden superior a 2 son despreciables comparados con el primero y -segundo momento [Reif, 1965], en tal caso la ecuación 3.28 viene a ser

$$\begin{aligned} \Delta_N(\vec{p}) &= \left[1 + i(p_1 \bar{a}_x + p_2 \bar{a}_y) - \frac{1}{2} (p_1^2 \bar{a}_x^2 + p_2^2 \bar{a}_y^2) \right]^N \\ &= \left[1 + \frac{1}{N} \left\{ iN(p_1 \bar{a}_x + p_2 \bar{a}_y) - \frac{N}{2} (p_1^2 \bar{a}_x^2 + p_2^2 \bar{a}_y^2) \right\} \right]^N \end{aligned}$$

En el límite cuando N tiende a ser infinito podemos usar la relación

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{N}\right)^N = e^x,$$

con lo cual, finalmente, la última expresión para $A_n(\vec{p})$ se puede escribir como

$$A_n(\vec{p}) = \exp \left[iN(p_1 \bar{a}_x + p_2 \bar{a}_y) - \frac{N}{2} (p_1^2 \bar{a}_x^2 + p_2^2 \bar{a}_y^2) \right]. \quad 3.29$$

Sustituyendo la ec. 3.29 en la expresión para $W(E)$ (ec.3.20) - resulta que

$$\begin{aligned} W(\vec{E}) &= \frac{1}{4\pi^2} \iint d p_1 d p_2 e^{-i\vec{p} \cdot \vec{E}} e^{iN(p_1 \bar{a}_x + p_2 \bar{a}_y) - \frac{N}{2} (p_1^2 \bar{a}_x^2 + p_2^2 \bar{a}_y^2)} \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \iint d p_1 d p_2 e^{-i(p_1 E_x + p_2 E_y) + iN(p_1 \bar{a}_x + p_2 \bar{a}_y) - \frac{N}{2} (p_1^2 \bar{a}_x^2 + p_2^2 \bar{a}_y^2)}, \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \iint d p_1 d p_2 e^{-i p_1 (E_x - N \bar{a}_x) - i p_2 (E_y - N \bar{a}_y) - \frac{N}{2} (p_1^2 \bar{a}_x^2 + p_2^2 \bar{a}_y^2)}, \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \int d p_1 e^{-N^2 \frac{p_1^2 \bar{a}_x^2}{2} - p_1 [i(E_x - N \bar{a}_x)]} \int d p_2 e^{-N^2 \frac{p_2^2 \bar{a}_y^2}{2} - p_2 [i(E_y - N \bar{a}_y)]}; \end{aligned}$$

completando cuadrados en $p_{1,2}$ dentro de las integrales, se tiene

$$\begin{aligned} W(\vec{E}) &= \frac{1}{4\pi^2} e^{\left(\frac{i[E_x - N \bar{a}_x]}{2\sqrt{N \bar{a}_x^2}}\right)^2} e^{\left(\frac{i[E_y - N \bar{a}_y]}{2\sqrt{N \bar{a}_y^2}}\right)^2} \times \\ &\quad \int_{-\infty}^{\infty} d p_1 e^{-\left(p_1 \sqrt{\frac{N \bar{a}_x^2}{2}} + \frac{i[E_x - N \bar{a}_x]}{2\sqrt{N \bar{a}_x^2}}\right)^2} \times \\ &\quad \int_{-\infty}^{\infty} d p_2 e^{-\left(p_2 \sqrt{\frac{N \bar{a}_y^2}{2}} + \frac{i[E_y - N \bar{a}_y]}{2\sqrt{N \bar{a}_y^2}}\right)^2}, \end{aligned} \quad 3.30$$

las integrales en la ecuación 3.30 son fáciles de evaluar, con lo cual

$$W(\vec{E}) = \frac{1}{4\pi^2} \sqrt{\frac{3H}{N\sigma_x^2}} \sqrt{\frac{2R}{N\sigma_y^2}} \exp\left\{-\frac{(E_x - N\bar{a}_x)^2}{2N\sigma_x^2} - \frac{(E_y - N\bar{a}_y)^2}{2N\sigma_y^2}\right\}$$

Reacomodando ésta última ecuación, obtenemos que la función de densidad de probabilidad para el campo es

$$W(\vec{E}) = \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi N\sigma_x^2}} e^{-\frac{(E_x - N\bar{a}_x)^2}{2N\sigma_x^2}} \right] \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi N\sigma_y^2}} e^{-\frac{(E_y - N\bar{a}_y)^2}{2N\sigma_y^2}} \right] \quad 3.31$$

Esta es una función de distribución Gaussiana muy parecida a la obtenida con los difusores en el análisis de Goodman, sin embargo en éste caso la distribución está centrada en $(N\bar{a}_x, N\bar{a}_y)$. Falta-
ría evaluar las cantidades \bar{a}_x , \bar{a}_y , σ_x^2 , y σ_y^2 para algun caso parti-
cular como por ejemplo, los que estudiamos en la sección anterior.
Si resultara que los valores medios son nulos y las variancias i-
guales se obtendría exactamente el mismo resultado que obtiene Good-
man, lo cual nos haría cuestionar la validez de las hipótesis pro-
puestas para el análisis de los difusores, pues independientemente
del tipo de distribución de las fases, el resultado asintótico es
el mismo (límite Gaussiano).

CAPITULO IV.

CONCLUSIONES GENERALES.

En la actualidad los patrones de moteado óptico encuentran amplias perspectivas de aplicación. Haciendo uso de ellos y por métodos interferométricos, se pueden detectar desplazamientos muy pequeños, lo cual puede ser de gran importancia en muchos experimentos, ya sean del tipo industrial o en el laboratorio. Pero para esto último, es necesario comprender el fenómeno desde sus principios y esto surge de la imperiosa necesidad de explicarnos el porqué del fenómeno.

En el presente trabajo hemos intentado dar una explicación sencilla de cómo se forman los P.M.O.. Con esto en mente, una explicación cualitativa del fenómeno ha sido dada en términos de los conocimientos básicos de interferencia y difracción. Por otra parte, - del análisis detallado de las superficies rugosas, hemos encontrado que la estructura microscópica de ellas, influye en forma determinante en las fases y amplitudes de la luz dispersada dándoles un carácter aleatorio, con lo cual hemos concluido que los P.M.O. surgen de las propiedades aleatorias de la luz dispersada. En base a lo anterior se ha propuesto un modelo de aberturas idénticas distribuidas al azar, lo cual nos ha permitido obtener un P.M.O. de manera sencilla, mediante el cual hemos podido analizar el proceso de formación del patrón, con las características mencionadas al final del capítulo II.

Para completar el trabajo, hemos visto, que la descripción for

mal de los P.M.O. se realiza desde un punto de vista estadístico - (cap. III). Se han mostrado los resultados principales que se obtienen en el análisis estadístico para las superficies dispersoras y para las aberturas difractoras. Aunque en éste capítulo, nuestro interés principal fué analizar las hipótesis que se proponen para desarrollar la teoría. Hemos encontrado que en el caso de los difusores, las hipótesis estadísticas, en algunos aspectos no son muy claras y por tanto, su validez solo podrá ser aceptada mediante una confirmación experimental. Sin embargo, para las aberturas difractoras, donde se tiene mayor información de la distribución de las aberturas, nos ha permitido establecer en forma adecuada la distribución que obedecen las fases de las ondas difractadas. Desafortunadamente no se puede llegar muy lejos con la información adicional de las fases, debido a los problemas matemáticos a que se enfrentan en la integración. Pero, debemos hacer notar que los dos análisis anteriores son completamente diferentes, en el primero se supone que hay una cantidad infinita de contribuciones al campo final y en el segundo caso hay una cantidad finita, ésto hace una marcada diferencia entre los dos casos, y por lo tanto no se permite una comparación directa, no obstante, la hipótesis de distribución uniforme en las fases que se emplea en el análisis de los difusores, solo podría ser aplicable al caso de las aberturas bajo condiciones muy particulares que tienen que ver con la posición del punto de observación.

Como punto final, hemos encontrado que dentro del análisis de las aberturas difractoras, cuando se supone que hay un número infinito de ellas, la distribución de campo tiene precisamente un límite

te Gaussiano análogo al obtenido con el difusor, lo cual nos ha hecho cuestionar la validez o necesidad de la hipótesis concerniente a la distribución de las fases, pues aparentemente, sin importar la distribución de las fases, cuando el número de contribuciones tiende a infinito, el límite asintótico siempre es el mismo (límite Gaussiano).

La continuación de esta tesis puede tener dos caminos, uno es seguir con los P.M.O. producidos por las aberturas difractoras e investigar las posibilidades de aplicación que ellos pudieran tener. Otro camino, es continuar con el análisis estadístico que nosotros hemos propuesto, pues es una manera alternativa de tratar el problema de un número finito de contribuciones, el cual aún no ha sido resuelto.

APENDICE A.

CALCULO DE LAS FUNCIONES DE DENSIDAD DE PROBABILIDAD PARA LAS FASES.

Consideremos un sistema de coordenadas $\xi-\eta$ sobre el plano de las aberturas, paralelo al plano de observación de coordenadas $x-y$ (ver fig. A.1). En nuestro caso, como estamos observando un patrón de difracción de Fraunhofer, la diferencia de fase observada en un

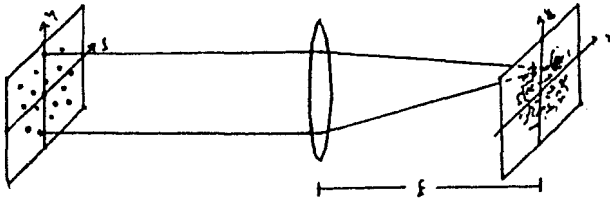


Fig. A.1. Patrón de Moteado del tipo de Fraunhofer producido por Aberturas Idénticas Distribuidas al Azar.

punto $P(x,y)$, de dos ondas provenientes de una abertura en el origen de coordenadas η y de otra localizada en un punto (ξ, η) es (ver ec.1.30)

$$\delta = \frac{k}{f} (\xi x + \eta y) \quad . \quad \text{A.1}$$

El factor $(x\xi + y\eta)$ es el producto punto del vector (ξ, η) y el vector (x,y) . Entonces, si fijamos el punto de observación (x,y) la fase viene a ser (salvo una constante) la proyección del vector de posición que localiza a la abertura, sobre el vector de po-

sición del punto de observación. Resulta entonces que todas aquellas aberturas, tales que su vector de posición tenga la misma proyección sobre el vector que determina al punto de observación, contribuirán exactamente con la misma fase al campo total. Esto es precisamente lo que se requiere; necesitamos conocer la fracción de aberturas que contribuyen al campo total con una fase entre δ y $\delta + d\delta$. Para calcular dicha fracción es necesario conocer cómo es el área en la que se distribuyen; consideraremos sólo los casos -- particulares de distribución sobre una región circular y sobre una región rectangular.

A.1. Distribución Sobre una Región Circular.

Supongamos que las aberturas se distribuyen uniformemente sobre una región circular de radio R , sin pérdida de generalidad y debido a la simetría podemos suponer que el punto de observación se encuentra sobre el eje y , entonces la diferencia de fase es simplemente

$$\delta = \frac{k y}{r} \quad \eta . \quad \text{A.2}$$

Ahora bien, si ν es la densidad de aberturas por unidad de área, entonces el número de aberturas que contribuyen con una fase entre δ y $\delta + d\delta$ es

$$d\eta = \nu dA \quad \text{A.3}$$

donde dA es la fracción de la superficie total, que contiene a las aberturas que contribuyen con una fase entre δ y $\delta+d\delta$, ésta fracción de área debe cumplir con que todos los radiovectores de las aberturas que contiene, tengan precisamente la misma proyección sobre el eje η , dentro del intervalo η y $\eta+d\eta$, ésto nos asegura que todas las aberturas contribuyen aproximadamente con la misma fase (ver fig. A.2), éste elemento de área es entonces

$$dA = 2R \cos \phi \, d\eta \quad \text{A.4}$$

donde ϕ es el máximo ángulo que pueden subtender los radiovectores que localizan a las aberturas, R es el radio de la región en que se distribuyen y $d\eta$ es el ancho de la fracción de superficie

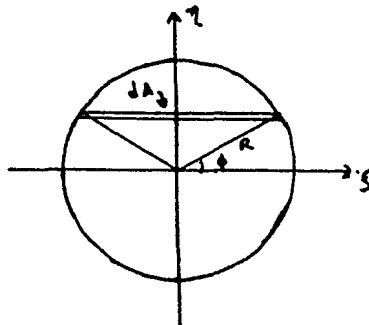


Fig.A.2. Distribución uniforme de aberturas sobre una región circular de radio R , la fracción de aberturas que contribuyen con la misma fase están sobre una banda de ancho , perpendicular al eje .

De A.4 y A.3 se obtiene que

$$d\eta = 2\nu R \cos\phi \, d\eta \quad , \quad \text{A.5}$$

pero de A.2 $d\eta = \frac{f}{k_y} d\delta$, además también se tiene que $\eta = R \sin\phi = \frac{f}{k_y} \delta$ entonces

$$\begin{aligned} d\eta &= \frac{2\nu R f}{k_y} \cos\phi \, d\delta \\ &= \frac{2\nu R f}{k_y} \sqrt{1 - \sin^2\phi} \, d\delta \\ &= \frac{2\nu R f}{k_y} \sqrt{1 - \left(\frac{f}{Rk_y}\right)^2 \delta^2} \, d\delta \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{d\eta}{d\delta} = \frac{2\nu R f}{k_y} \sqrt{1 - \left(\frac{f}{Rk_y}\right)^2 \delta^2} \quad . \quad \text{A.6}$$

La ecuación A.6 es precisamente lo que buscamos; la fracción de aberturas que contribuyen al campo total con una fase entre δ y $\delta + d\delta$. Para visualizar un poco más la forma de la distribución, la ecuación A.6 la podemos escribir también como

$$\frac{\delta^2}{\left(\frac{Rk_y}{f}\right)^2} + \frac{\left(\frac{d\eta}{d\delta}\right)^2}{\left(\frac{2\nu R f}{k_y}\right)^2} = 1 \quad , \quad \text{A.7}$$

ésta es la ecuación de una elipse con semiejes (Rk_y/f) y $(2\nu R f/k_y)$, como se muestra en la fig. A.3.

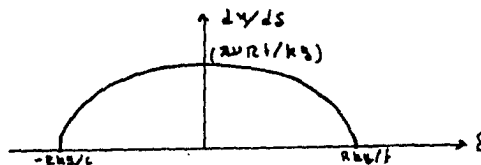


Fig. A.3. Distribución elíptica de las fases cuando las aberturas se distribuyen sobre un círculo.

Con el resultado de la ecuación A.6 se concluye entonces que las fases se distribuyen elípticamente en el intervalo $(-Rky/f, Rky/f)$ (nótese que éste depende del punto de observación), con lo cual la probabilidad de que una de las aberturas contribuya con una fase entre δ y $\delta + d\delta$ es

$$w(\delta) d\delta = \frac{2V R^2}{V k_y} \sqrt{1 - \left(\frac{f}{Rk_y}\right)^2 \delta^2} d\delta . \quad A.8$$

Analizando más a fondo ésta conclusión, vemos que hay una marcada diferencia en este caso de las aberturas, en relación al del difusor. En éste caso la distribución de fases depende directamente de la posición del punto de observación, lo cual también es -- cierto, como veremos más adelante, cuando las aberturas se distribuyen sobre una región rectangular; además, también hay una dependencia en la distribución de las fases concerniente a las dimensiones y forma del área en la que se distribuyen las aberturas. Esto trae como consecuencia que la distribución de fases, de ninguna manera sea siempre uniforme sobre un único intervalo, como se postula para los objetos difusores, sino que ella depende del punto de observación y de la forma del área en que se distribuyen las aberturas.

Analizaremos ahora cómo es la distribución de fases en el caso de distribución sobre un área rectangular.

A.2. Distribución Sobre una Región Rectangular .

En éste caso el problema es similar al anterior, sólo que aho-

ra únicamente hay simetría en el plano de observación y no en el plano de las aberturas. Como antes, tomamos el punto de observación sobre el eje y , la proyección de éste eje sobre el plano de las aberturas en general formará un ángulo ϕ con el eje ξ como se muestra en la fig. A.4, nuevamente el punto de observación define bandas que contienen aberturas que contribuyen con la misma fase al campo total (ver fig. A.4), de ésta figura vemos que hay una región central en las que las bandas tienen la misma área y otras

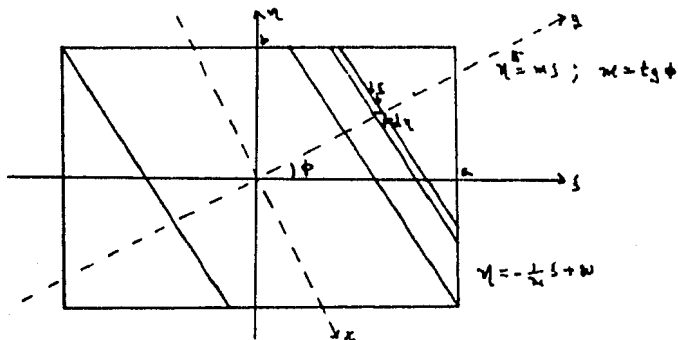


Fig. A.4. Distribución Uniforme de Aberturas Sobre un Area Rectangular, en éste caso no hay simetría en el plano de las aberturas.

dos regiones en las que el área es variable, para simplificar podemos analizar el problema por regiones. El cálculo analítico es un tanto laborioso, hay que considerar las ecuaciones de la recta que define el punto de observación y las que contienen a las aberturas que contribuyen con la misma fase, después hay que ver los puntos en los que ellas cortan al rectángulo y de ahí se determina la lon

gitud de las bandas, el ancho de ellas es simplemente $\sin \phi \, d\eta$; llevando a cabo los cálculos se encuentra que el área de las bandas es

$$dA = \begin{cases} (a+mb+mq) \, d\eta & \text{si } -(\frac{a}{m}+b) \leq \eta \leq -(\frac{a}{m}-b) \\ 2mb \, d\eta & \text{si } -(\frac{a}{m}-b) \leq \eta \leq (\frac{a}{m}-b) \\ (a+mb-mq) \, d\eta & \text{si } (\frac{a}{m}-b) \leq \eta \leq (\frac{a}{m}+b) \end{cases} \quad \text{A.9}$$

donde $2a$ es la longitud del rectángulo sobre el eje ξ y $2b$ es la longitud sobre el eje η (ver fig. A.4) y $m = \text{tg } \phi$ con ϕ el ángulo que hace la proyección del vector de posición del punto de observación sobre el plano de las aberturas respecto al eje ξ .

Procediendo como en el caso anterior, mediante la ecuación A.2 y A.3 se encuentra que la fracción de aberturas que contribuyen con una fase entre δ y $\delta + d\delta$ es

$$\frac{dN}{d\delta} = \begin{cases} m\nu(\frac{1}{k_0})(\frac{a}{m}+b) + m\nu(\frac{1}{k_0})^2 \delta & \text{si } -\frac{k_0}{f}(\frac{a}{m}+b) \leq \delta \leq -\frac{k_0}{f}(\frac{a}{m}-b) \\ 2m\nu(\frac{1}{k_0})b \, d\delta & \text{si } -\frac{k_0}{f}(\frac{a}{m}-b) \leq \delta \leq \frac{k_0}{f}(\frac{a}{m}-b) \\ m\nu(\frac{1}{k_0})(\frac{a}{m}+b) - m\nu(\frac{1}{k_0})^2 \delta & \text{si } \frac{k_0}{f}(\frac{a}{m}-b) \leq \delta \leq \frac{k_0}{f}(\frac{a}{m}+b) \end{cases} \quad \text{A.10}$$

la figura A.5 muestra la forma de la distribución.

Aquí hay varios puntos interesantes, primero vemos que en este caso sí existe una región en la que las fases se distribuyen u-

niformemente dentro de un intervalo simétrico (aunque no es el de

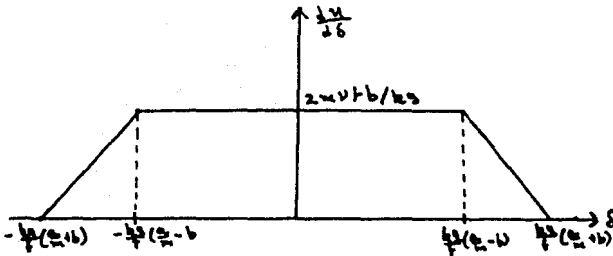


Fig. A.5. Distribución de fases cuando las aberturas se distribuyen uniformemente sobre un rectángulo.

$(-\pi, \pi)$ del difusor), en ésta región la fracción de aberturas que contribuyen con la misma fase es inversamente proporcional a la posición del punto de observación, ésto implica que la probabilidad de encontrar más aberturas que produzcan una distribución de fases uniforme es mayor si el punto de observación está más cerca del origen, que si se encuentra alejado de él, ésto quiere decir que las variaciones en las fases son menos bruscas en un punto de observación cerca del origen de coordenadas que en puntos alejados, en otras palabras, habrá más puntos brillantes concentrados cerca del origen y menos en regiones alejadas.

Fuera de la región de distribución uniforme, las fases se distribuyen linealmente en forma decreciente hasta llegar a cero, para diferencias de fase determinadas únicamente por la posición del punto de observación y por las dimensiones del área en la que se encuentran las aberturas.

Finalmente, de la ecuación A.10 se tiene que la función de gen

alidad de probabilidad para las fases es

$$w(\delta) d\delta = \begin{cases} \frac{2\pi N}{\lambda} \left(\frac{f}{k_0 b} \right) \left[\left(\frac{a}{k_0} + b \right) + \left(\frac{f}{k_0 b} \right) \delta \right] d\delta & \text{si: } -\frac{k_0}{f} \left(\frac{a}{k_0} + b \right) \leq \delta \leq -\frac{k_0}{f} \left(\frac{a}{k_0} - b \right) \\ \frac{2\pi N}{\lambda} \left(\frac{f}{k_0 b} \right) b d\delta & \text{si: } -\frac{k_0}{f} \left(\frac{a}{k_0} - b \right) \leq \delta \leq \frac{k_0}{f} \left(\frac{a}{k_0} - b \right) \\ \frac{2\pi N}{\lambda} \left(\frac{f}{k_0 b} \right) \left[\left(\frac{a}{k_0} + b \right) - \left(\frac{f}{k_0 b} \right) \delta \right] d\delta & \text{si: } \frac{k_0}{f} \left(\frac{a}{k_0} - b \right) \leq \delta \leq \frac{k_0}{f} \left(\frac{a}{k_0} + b \right) \end{cases}$$

A.11

Todo éste análisis, trae como conclusión, que la distribución de fases toma diferentes formas dependiendo de cómo sean el área - (en su geometría y dimensiones) sobre la cual se distribuyen las - aberturas (suponiendo distribución uniforme) y que por tanto la hipótesis que se maneja para los difusores, de distribución uniforme de fases, en el caso de las aberturas puede ser aceptable únicamente bajo ciertas restricciones concernientes al punto de observación y a la forma de área en que se distribuyen las aberturas.

BIBLIOGRAFIA.

- 1.- Arfken G. (1970). *Mathematical Methods for Physics*, (Academic, New York).
- 2.- Born M. and Wolf E. (1980). *Principles of Optics*, 6th ed. (Pergamon Press, London, New York).
- 3.- Chandrasekhar S. (1954). *Stochastic Problems in Physics and - Astronomy*, in *Selected Papers on Noise and Stochastic Processes*, edited by N. Wax (Dover Publications, New York).
- 4.- Francon M. (1979). *Laser Speckle and Applications in Optics*, - (Academic Press, New York, San Francisco, London).
- 5.- Gnedenko B.V. (1968). *The Theory of Probability*, 4th ed. (Chelsea Publishing Co., New York) p.302.
- 6.- Goodman J.W. (1968). *Introduction to Fourier Optics*, (Mc Graw-Hill, New York).
- 7.- Goodman J.W. (1975). *Statistical Properties of Laser Speckle - Patterns*, in *Laser Speckle and Related Phenomena*, edited by - J.C. Dainty (Springer-Verlag, Heidelberg). Vol. 9 (Topics in - Applied Physics).

- 8.- Goodman J.W. (1976). Some Fundamental Properties of Speckle. - J. Opt. Soc. Am. 66, 1145.
- 9.- Hecht E., Zajac A. (1977). Optica, (Fondo Educativo Interame--cano, S.A.).
- 10.- Jakeman E. and Pusey P.N. (1973). The Statistics of Light Scat-tered by A Random Phase Screen. J. Phys. A: Math., Nucl. Gen. 6, L88-92.
- 11.- Jakeman E. and Pusey P.N. (1975). Non-Gaussian Fluctuations - in Electromagnetic Radiations Scattered by Random Phase Scen. J. Phys. 8, 369.
- 12.- Ochoa E. and Goodman J.W. (1983). Statistical Properties of - Ray Directions in a Monochromatic Speckle Pattern. J. Opt. -- Soc. Am. 73, 943.
- 13.- Ohtsubo J. (1982). Non-Gaussian Speckle: a Computer Simula---tion. Appl. Opt. 21, 4167.
- 14.- Parrent G.B., Thomson B.J. (1971). Physical Optics Notebook. (SPIE, Redondo Beach).
- 15.- Schafer D.W. and Pusey P.N. (1972). Statistics of Non- Gau---ssian Scattered Light. Phys. Rev. Lett. 29, 843.

16.- Reif F. (1965). Fundamentals of Statistical and Thermal Physics, (Mc Graw-Hill, New York) cap. I, sec. 1.5.