

20



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

MODELADO BIDIMENSIONAL POR ELEMENTOS
FINITOS PARA LA INTERPRETACION DE DATOS DE
GEO-RESISTIVIDAD EN EXPLORACIONES GEOFISICAS

T E S I S
QUE PARA OBTENER EL TITULO DE
F I S I C O
P R E S E N T A N
RAYMUNDO EUGENIO PERALTA HERRERA
RAUL VALDES RAMOS

MEXICO, D. F.

NOVIEMBRE DE 1983



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

INDICE

INTRODUCCION

a) Motivos y metas.	2
b) Antecedentes.	7
c) Descripción del procedimiento.	9

CAPITULO I

Métodos electromagnéticos de exploración
geofísica y desarrollos
electromagnéticos.

I. 1 Métodos electromagnéticos de exploración geofísica.	11
I. 2 Métodos geoelectricos de exploración de corriente continua.	13
I. 3 Ecuaciones electromagnéticas.	22
I. 4 Ecuaciones variacionales de energía.	24
I. 5 Ecuaciones variacionales para el caso de corriente directa.	27

CAPITULO II

El método de elementos finitos
y desarrollo del metodo propuesto.

II. 1 Método de elementos finitos.	30
II. 2 Discretización de las ecuaciones variacionales de corriente continua.	33
II. 3 Ecuaciones para un elemento.	36
II. 4 Errores.	39

CAPITULO III

Sistemas lineales.

III. 1 Mallas generales y matrices asociadas.	40
III. 2 Simplificaciones.	44
III. 3 Algoritmos de solución.	49
III. 4 Regreso al dominio del espacio.	51
III. 5 Explicación del funcionamiento del sistema computacional.	53

CAPITULO IV

Comparación contra modelos con solución analítica.

- IV. 1 Comparación en el dominio de las frecuencias y del espacio contra modelos homogéneos. 58

CAPITULO V

Aplicación geofísica.

- V. 1 Obtención de la resistividad aparente. 63
V. 2 Obtención de curvas de SEV. 65

CONCLUSIONES 70

APENDICES

- I Reducción de la ecuación variacional a una ecuación diferencial. 71
II Integrales de superficie y simplificaciones. 73
III Solución de la ecuación de Poisson para el semiespacio homogéneo infinito. 75

BIBLIOGRAFIA 78

SIMBOLOS UTILIZADOS EN EL TEXTO

\vec{B}	Vector de densidad de flujo magnetico (teslas).
\vec{H}	Vector de campo magnetico (ampere-vuelta/m).
\vec{M}	Vector de magnetizacion (ampere/m).
\vec{E}	Vector de campo electrico (volt/m).
\vec{D}	Vector de desplazamiento electrico (coulomb/m ²).
\vec{J}	Vector de densidad de corriente (ampere/m ²).
μ	Tensor de permeabilidad magnetica (s/u).
ϵ	Tensor de permitividad electrica (s/u).
σ	Tensor de conductividad electrica (mho/m).
μ	Permeabilidad magnetica (s/u).
ϵ	Permitividad electrica (s/u).
σ	Conductividad electrica (mho/m).
ρ	Densidad de carga electrica (coulomb/m ³).
\vec{P}	Vector de polarizacion electrica (coulomb/m ²).
ω	Frecuencia temporal de los campos (hertz).
\vec{S}	Vector de densidad de flujo de potencia (Joule/seg-m ²).
ψ'	Potencia electromagnetica por unidad de volumen (joule/seg-m ³).
u	Densidad volumetrica de energia electromagnetica (joule/m ³).
U	Energia electromagnetica (joule).
ϕ	Potencial electrico (volt).
I	Corriente electrica (ampere).
k	Variable de la transformada de Fourier (1/m).
R_A	Resistividad aparente (ohm-m).

INTRODUCCION

a) Motivos y Metas.

Con el constante incremento de la población mundial y especialmente de México, las necesidades de la sociedad en lo que respecta a recursos naturales se han visto aumentadas enormemente. Este incremento en la demanda de recursos naturales ha hecho necesarios programas y métodos de búsqueda de los mismos, que sean baratos y eficientes.

Antiguamente, la búsqueda de recursos naturales se limitaba a las capas superficiales de la corteza terrestre. En la actualidad, se requiere encontrar recursos cada vez a mayor profundidad. Ante este problema, es impráctico pensar en hacer excavaciones exploratorias, debido a su alto costo. Por esta razón, se han desarrollado métodos para determinar la localización y delimitación de yacimientos de recursos naturales a partir de medidas realizadas sobre la superficie o inclusive desde el aire.

La física, es la ciencia que estudia el comportamiento del universo e intenta establecer leyes generales, enunciadas en lenguaje matemático, que describan y expliquen efectivamente su comportamiento. Dentro de la física, la geofísica, ciencia que estudia la estructura y composición de la tierra, es la ciencia ideal para auxiliar al hombre en la exploración para la obtención de recursos naturales que le pueda brindar el subsuelo.

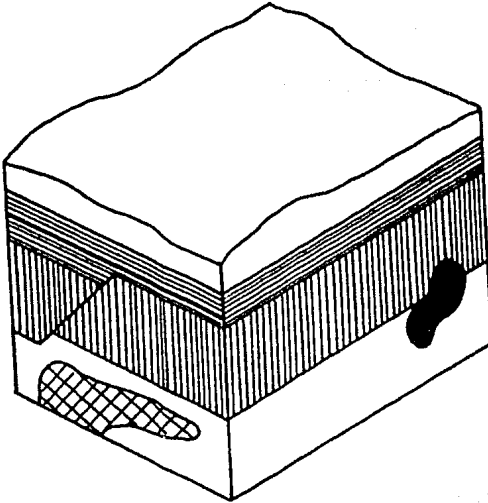
Dentro de este marco, se han desarrollado métodos con este fin, llamados métodos geofísicos de exploración. Estos miden propiedades o contrastes de propiedades de las rocas, y de acuerdo a esto se les clasifica de la siguiente forma:

- 1) Métodos sísmicos.
Que miden contrastes en las propiedades elásticas.
- 2) Métodos gravimétricos.
Que miden contrastes de densidad.
- 3) Métodos magnetométricos.
Que miden contrastes de propiedades magnéticas.
- 4) Métodos electromagnéticos.
Que miden contrastes de propiedades electromagnéticas.
- 5) Métodos radiométricos.
Que miden decaimiento radioactivo.
- 6) Métodos termométricos.
Que miden flujos de calor.

El presente trabajo, dentro del marco de los métodos electromagnéticos de exploración geofísica, presenta una técnica para modelar el subsuelo a partir de datos de geo-resistividad de corriente directa. El proceso se lleva a cabo de una forma rápida y eficiente, en cuanto al tiempo de computadora requerido.

Todos los modelos, tanto de la física como de la geofísica, presentan una evolución histórica, que va de modelos sencillos hacia modelos cada vez más complicados, siendo estos últimos los que mejor describen lo que ocurre en la naturaleza. El avance, en todo momento se halla limitado por las teorías y métodos matemáticos disponibles.

El problema básico para establecer modelos del subsuelo en geofísica, es que existe una infinidad de materiales diferentes, cada uno con propiedades físicas y químicas distintas, distribuidas de una forma irregular:



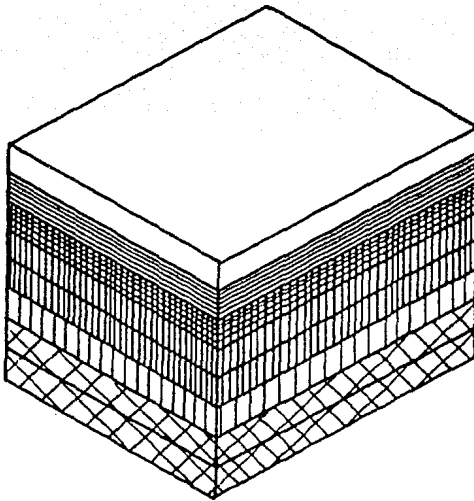
Dibujo 1. Idealización de las heterogeneidades del subsuelo.

Los modelos geofísicos deben tratar, mediante modelos cada vez mas completos, de llegar a la descripción de este subsuelo heterogéneo.

Dentro de la geofísica de exploración y muy especialmente en los métodos electromagnéticos de corriente directa, la evolución ha seguido el siguiente esquema general:

Los primeros intentos se hicieron tratando de modelar el subsuelo con cuerpos geoméricamente regulares. Sin embargo en la práctica este tipo de modelos no se apegaban a la realidad de la exploración geofísica.

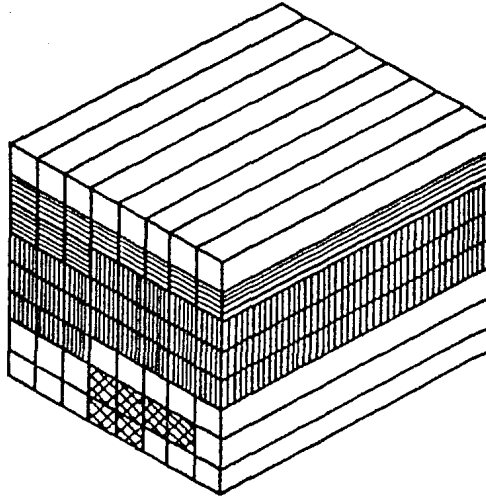
El primer intento para mejorar estos modelos analíticos, se logró al tratar de simular la variación de la conductividad eléctrica con la profundidad, a través de considerar al subsuelo estratificado en capas horizontales, cada una de ellas con propiedades eléctricas distintas, homogéneas e isotrópicas.



Dibujo 2 Modelo de capas horizontales, homogéneas e isotrópicas.

El siguiente paso en la evolución de estos modelos, permite variaciones laterales de la conductividad, en otra dirección, además de las variaciones a profundidad.

Estos modelos, suponen una distribución bidimensional de conductividades, en un corte "perpendicular" a la superficie, y cualquier otro corte paralelo al primero, tendrá esa misma distribución. (modelos de prismas con bases irregulares).



Dibujo 3. Simplificación del modelo de prismas con bases irregulares.

Por último, se tienen modelos tridimensionales, que permiten variaciones de conductividad en cualquier dirección, y son los que más se aproximan a la realidad.

Para casos geométricos sencillos (i. e. espacios homogéneos, un paralelepípedo o cilindro embebido en el subsuelo etc.), se han encontrado soluciones analíticas, pero su valor es principalmente teórico, ya que es difícil que se encuentre este tipo de situación en el campo. De esta manera, aparece la necesidad de encontrar soluciones de tipo numérico a las ecuaciones que resultan del planteamiento de modelos más generales. Estas soluciones, son aproximaciones a la solución verdadera, sin embargo, permiten una mayor flexibilidad en cuanto a la distribución permisible para la conductividad de los materiales del subsuelo. Los métodos numéricos que se han utilizado para aproximar soluciones, son los siguientes:

1) Método de diferencias finitas. Los operadores diferenciales se sustituyen por operadores finitos, basándose en la expansión en serie de Taylor de las funciones sobre las que se opere.

2) Método de ecuación integral. Discretiza el espacio en elementos, dentro de los cuales la propiedad considerada permanece constante y encuentra soluciones analíticas dentro de cada elemento, uniendo las soluciones a través de condiciones de frontera.

3) Método de elementos finitos. Discretiza el espacio en elementos geoméricamente simples dentro de los cuales el valor de la propiedad considerada se mantiene constante, y supone una forma funcional simple para la solución en cada elemento.

En este trabajo, se desarrolla una técnica para modelar distribuciones de conductividad eléctrica, para la obtención de potenciales o bien resistividades aparentes, con aplicación a la exploración eléctrica de corriente continua. El método numérico utilizado es el de elementos finitos.

La implementación computacional del método, se hace de tal forma que se pueda utilizar para realizar la interpretación de datos de campo en minicomputadoras, aun para modelos muy grandes. De esta forma, el método se vuelve accesible a un gran número de usuarios, que de otra manera no podrían utilizarlo por requerir facilidades de cómputo excesivas.

b) Antecedentes

La exploración geofísica para búsqueda de recursos naturales por métodos eléctricos, se inició a partir de la década de los veinte. El primero que hizo mediciones de este tipo fue Conrad Schlumberger en Francia (Orellana (1)).

En los primeros ensayos de este tipo, la interpretación de los datos obtenidos, era principalmente cualitativa y dependía fuertemente de la experiencia de la persona que hiciera la interpretación.

En un esfuerzo por sistematizar la interpretación de los datos de campo, se diseñaron experimentos en el laboratorio, para simular el subsuelo. El procedimiento consistía en diseñar un modelo a escala de la distribución que se suponía para el subsuelo y así lograr una interpretación. El problema con este método, consistió en que, si no se encontraba la respuesta esperada, se tenía que rediseñar todo el experimento, y resultaba muy costoso.

En vista de lo anterior, la investigación tomó un giro hacia el modelado matemático. En un principio, se optó por hacer experimentos, muchas veces al estilo de los de laboratorio. Se suponía un cuerpo regular embebido en un espacio homogéneo y se calculaba la respuesta eléctrica del sistema en la superficie. De esta forma, se tenían curvas típicas para diferentes situaciones, que se comparaban contra los datos de campo. Además, aparecieron los modelos de capas horizontales homogéneas, en los que se suponían una serie de capas, cada una caracterizada por una conductividad y un espesor diferentes, que sirvieron para calcular curvas del parámetro conocido como resistividad aparente. En este contexto, al igual que en los casos anteriores, aparecieron los llamados "catálogos de curvas maestras", que eran simplemente colecciones de curvas de resistividad aparente, calculadas para diferentes combinaciones de conductividades y espesores, con las que se tenía que encontrar un parecido a las curvas de campo. Esta técnica aun se utiliza en muchas partes del mundo.

Finalmente, mediante el uso de los métodos numéricos y las computadoras, se empezó a lograr un avance hacia la sistematización real de las interpretaciones de datos de geo-resistividad. Con el uso de los métodos numéricos para encontrar la solución de ecuaciones diferenciales e integrales, se empezó a trabajar con modelos bidimensionales y tridimensionales.

Existen muchos investigadores, que han aplicado los métodos de diferencias finitas y ecuación integral a problemas geofísicos. En cambio, el método de elementos finitos se ha utilizado mucho mas en diversas ramas de la ingeniería que en la geofísica. En ingeniería, se le ha utilizado, para análisis de estructuras, distribuciones de esfuerzos dentro de un material, estados termodinámicos en fluidos y problemas de flujo de fluidos y de calor.

La principal característica de todas estas aplicaciones, es que se tiene de antemano una forma geométrica, la cual se tiene que modelar, y de acuerdo a esta, se diseña la malla adecuada. Es por esto que el método ha resultado excesivamente caro en términos de tiempo de procesamiento, ya que se tienen que generar mallas totalmente distintas para cada problema particular. La mayor parte de la literatura consultada acerca de elementos finitos, se dedica exclusivamente a la generación de mallas en una computadora, que es de hecho el proceso que consume mas tiempo.

En 1971 John Henry Coggon, en su disertación doctoral (Coggon (4)) presentada en la Universidad de Berkeley, expone un método para modelado bidimensional por elementos finitos para corriente directa. Para el planteamiento electromagnético, Coggon sigue un metodo variacional, en el que plantea la minimización de la energía disipada por el paso de una corriente a través del medio.

En cuanto a la aplicación del método de elementos finitos, sigue la filosofía de generar mallas especiales para cada problema. La implementación computacional de Coggon, tiene el problema de consumir mucho tiempo de computadora, por lo que sigue siendo muy caro.

En este trabajo, se siguió el esquema de los desarrollos electromagnéticos que presenta Coggon (Coggon (5)), pero se modificó toda la filosofía para la aplicación del metodo de elementos finitos.

Nuestro fin, consiste en aplicar el método de elementos finitos para la interpretación de datos de campo de geo-resistividad. Debido a que no se conoce de antemano la forma en que se distribuyen las conductividades en el subsuelo, se planteó una malla totalmente regular que permita su rápida generación, y flexibilidad en la distribución de conductividades. De esta manera, conociendo de antemano la estructura de la malla, las ecuaciones y las matrices asociadas, se pudieron diseñar algoritmos que son muy rápidos e implementables en máquinas pequeñas.

c) Descripción del procedimiento.

El procedimiento aquí presentado, permite modelar la respuesta de una distribución de conductividades al paso de una corriente directa, y/o interpretar de manera interactiva, datos de campo de geo-resistividad.

Para el primer caso, basta indicarle al sistema computacional la distribución bidimensional de conductividades, la corriente inyectada y pedir la impresión de los valores del potencial eléctrico en los puntos de interés.

En el segundo caso, se ejecuta una opción del sistema que calcula el parámetro conocido como resistividad aparente y se compara con las curvas de resistividad aparente obtenidas a partir de mediciones de campo. Se debe modificar la distribución bidimensional de conductividades varias veces, hasta que se logre la coincidencia de las dos curvas, la de campo y la teórica.

Si se utiliza el método para la interpretación de datos de campo, se debe tomar en cuenta que arreglos diferentes de conductividades pueden tener la misma respuesta en cuanto a valores de potencial sobre la superficie. Es por esto que toda interpretación de datos de campo debe apoyarse necesariamente en la información proveniente de la geología y de otros métodos geofísicos.

El sistema computacional que se presenta, se encuentra implementado en dos computadoras; una Univac 1108 propiedad del Banco de México, y una Burroughs 7800, propiedad de la U. N. A. M. estas dos máquinas, son grandes, sin embargo el diseño del sistema permite que, con un número mínimo de cambios, se utilice en máquinas pequeñas, bajo la única condición de que posean unidades de almacenamiento masivo de datos y un compilador Fortran.

Este trabajo se encuentra dividido en bloques, que contienen todo lo relacionado con cada una de las disciplinas científicas que se usan, enlazándose entre ellos de una manera natural.

En el capítulo I, se presentan los métodos geoelectricos de exploración geofísica en general y, a mayor detalle, los métodos geoelectricos de exploración geofísica de corriente continua. Se presentan además, las principales ecuaciones del electromagnetismo. Se desarrollan las ecuaciones correspondientes a un planteamiento variacional para encontrar la energía disipada en un medio por el paso de una corriente directa, y la modificación de un problema tridimensional, para convertirlo a uno bidimensional, mediante una transformación de Fourier.

En el capítulo II, se describe el método de elementos finitos, como herramienta matemática. Se utilizan las ecuaciones desarrolladas en el capítulo I, hasta obtener un sistema lineal de ecuaciones, producto del planteamiento del método numérico.

En el capítulo III, se describen los métodos y algoritmos utilizados tanto para resolver el sistema de ecuaciones lineales, como para obtener la solución final. Además, se presenta una descripción del sistema computacional implementado.

El capítulo IV contiene la comparación entre los resultados obtenidos con el sistema, y los valores calculados analíticamente, para modelos homogéneos, reportándose algunas estadísticas acerca de los errores que se producen.

En el capítulo V, se presenta la aplicación a modelos de capas horizontales, así como algunas comparaciones entre resultados del sistema y resultados obtenidos con un modelado unidimensional.

Finalmente, se presentan algunas conclusiones acerca del trabajo y, en los apéndices, se hacen algunos desarrollos auxiliares.

CAPITULO I

Métodos electromagnéticos de exploración geofísica y desarrollos electromagnéticos.

I. 1 Métodos electromagnéticos de exploración geofísica.

Los métodos electromagnéticos de exploración geofísica, tienen como fin modelar el subsuelo a través de sus propiedades electromagnéticas. Este fin se logra mediante medidas de variaciones o contrastes de las propiedades electromagnéticas de los materiales del subsuelo. Las propiedades que se miden generalmente son la resistividad, o su inverso, la conductividad, la permeabilidad magnética y la constante dieléctrica.

Con la ayuda de los datos proporcionados por los métodos electromagnéticos y con el conocimiento estructural y geológico de la zona bajo estudio es posible, en cierta medida, descubrir, delinear o estimar posibles yacimientos de recursos naturales. Para poder determinar estas propiedades electromagnéticas o sus contrastes, es necesaria una fuente de energía que las excite y provoque en la superficie de la tierra una respuesta, susceptible de ser medida.

Los métodos electromagnéticos de exploración, se han dividido en dos ramas, distinguidas por el tipo de fuente de excitación que se utilice. En un caso, se trata de fuentes naturales, sobre las que no se tiene control, y, en el otro caso, fuentes artificiales, totalmente controladas. Los métodos electromagnéticos, clasificados de acuerdo al tipo de fuente utilizada se presentan en la tabla I. 1. 1. Para una explicación detallada de estos métodos, se remite al lector a los libros de Orellana (1), Koefoed (2), y H. P. Patra y K. Malik (3).

TABLA I. 1. 1

Métodos geoelectrónicos de exploración.

I. - Métodos que utilizan fuentes de excitación natural.

1. - Método de potencial espontáneo (SP).
2. - Método de corrientes telúricas (T).
3. - Método magneto-telúrico (MT y AMT).
4. - Método de audiofrecuencias magnéticas (AFMAG).
5. - Método de muy bajas frecuencias (VLF).

II. - Métodos que utilizan fuentes de excitación artificiales.

1. - Métodos de fuente constante (corriente continua).

- 1.1. - Sondeos eléctricos verticales simétricos y dipolares (SEV).
 - 1.2. - Perfilajes eléctricos (PE).
 - 1.3. - Método del cuerpo cargado (mise-à-la-masse).
2. - Métodos de fuente variable (corriente alterna, continua o discontinua).
- 2.1. - Métodos con fuente propia.
 - a) Sondeos electromagnéticos (SEM).
 - a.1) Sondeos geométricos con una sola frecuencia.
 - a.2) Sondeos de frecuencia variable.
 - a.3) Sondeos por establecimiento de campo.
 - b) Perfilajes electromagnéticos (PEM).
 - b.1) Emisor fijo, receptor móvil.
 - b.1.1) Método Turam.
 - b.1.2) Compensador Sundberg.
 - b.1.3) Método del cable largo.
 - b.2) Emisor móvil, receptor fijo.
 - b.2.1) Métodos de inclinación de campo:
 - i) Método de líneas paralelas.
 - ii) Método de medición recíproca.
 - b.3) Emisor y receptor móviles.
 - b.3.1) Método Sligram.
 - c) Perfilajes electromagnéticos aéreos.
 - c.1) Sistemas de medida de componentes en fase.
 - c.2) Sistema de cuadratura.
 - c.3) Método del cable largo.
 - c.4) Método de las dos antenas.
 - c.5) Método de formación de campo.
 - 2.2. - Métodos con fuentes destinadas a otro fin (como emisores de radio, y otros).
 - a) Método radio-kip.
 - b) Método de radiografía hertziana.
3. - Métodos que utilizan la parte transitoria de una fuente artificial.
- 3.1. - Método de polarización inducida y resistividad compleja.

I.2 Métodos geoelectrónicos de exploración de corriente continua.

En los métodos geoelectrónicos de corriente continua, la propiedad del subsuelo que se estudia a través de la respuesta a la excitación de la fuente utilizada, es la conductividad (o su inverso, la resistividad) eléctrica.

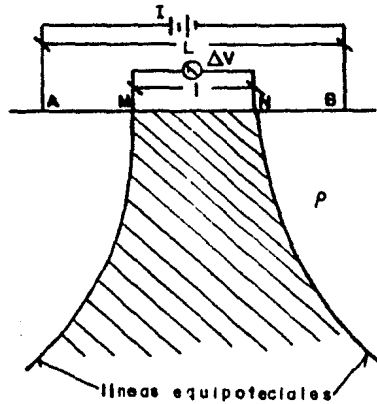
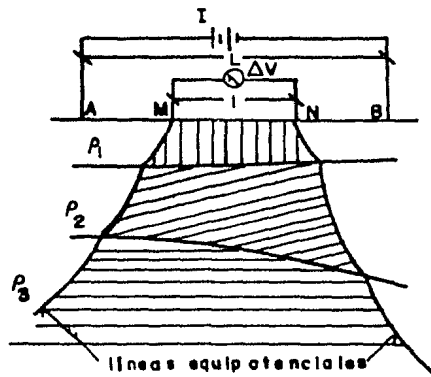
Para determinar la respuesta de cualquiera de estos dos parámetros, se utilizan básicamente dos procedimientos. El sondeo eléctrico vertical (SEV) que determina los contrastes verticales de la conductividad eléctrica del subsuelo y el perfilaje eléctrico (PE), que se usa para estimar los cambios horizontales (laterales) de esta propiedad. Un tercer procedimiento conocido como "mise-à-la-masse" o método del cuerpo cargado se utiliza para delinear la forma y extensión de una zona que presenta una anomalía eléctrica, una vez que se le ha detectado.

Para realizar un SEV o PE, se excita el medio con una corriente continua a través de dos electrodos (electrodos de corriente), conectados a una fuente (baterías o generador de corriente directa), y entre otros dos electrodos (electrodos de potencial), se mide la diferencia de potencial generada por la corriente inyectada. Esta diferencia de potencial, es la respuesta del subsuelo al paso de la corriente.

El valor de esta diferencia de potencial depende, de los valores o cambios de la resistividad (o conductividad) del subsuelo en la zona atravesada por la corriente, la magnitud de la corriente inyectada y de la posición relativa de los electrodos de potencial con los de corriente.

Las medidas de diferencia de potencial que se hacen en la superficie y el valor de la corriente inyectada se utilizan para calcular un parámetro conocido como resistividad aparente (ρ_a)

La resistividad aparente, se define como la resistividad que tendría un semiespacio homogéneo, isótropo e infinito de tal manera que, cuando se le inyecte una corriente eléctrica a través de dos electrodos, separados una distancia L , la diferencia de potencial medida entre otros dos electrodos separados una distancia l sea igual a la que se generaría bajo las mismas condiciones en la superficie de un espacio heterogéneo. (dibujo I.2 1)



Dibujo I. 2. 1 Concepto de resistividad aparente.

matemáticamente, la resistividad aparente se expresa como:

$$\rho_a = 2 \pi \left[\frac{1}{AM} - \frac{1}{BM} - \frac{1}{AN} + \frac{1}{BN} \right]^{-1} \frac{\Delta V}{I} \quad (I. 2. 1)$$

donde

$\frac{\Delta V}{I}$ diferencia de potencial entre M y N.
 corriente inyectada.
 AM, BM, AN, BN definidas en el dibujo I. 2. 1.

Existe una gran variedad de arreglos electródicos, que se usan en el campo. Se puede hacer una clasificación muy sencilla en tres grupos dependiendo de las relaciones geométricas en la disposición de los electrodos correspondientes.

1) Arreglos colineales.

Todos los electrodos estan alineados y los electrodos de potencial siempre se colocan entre los electrodos de corriente. En la tabla I. 2. 1 se presentan los principales tipos, asi como un bosquejo de sus características.

2) Arreglos dipolares.

Se forman con dos dipolos, uno de corriente y otro de potencial. Existen seis tipos de arreglos dipolares, diferenciados por las relaciones angulares entre los dipolos. Estos arreglos se describen en la tabla I. 2. 2.

3) Arreglos compuestos.

Estos arreglos se forman a partir de los arreglos colineales y dipolares mediante la adición de electrodos. Existen tres modalidades; si el electrodo adicional es de potencial, se llaman arreglos de agrupación; si el electrodo adicional es de corriente, se llaman arreglos de apantallamiento; por último, si tienen un electrodo adicional de corriente y uno de potencial, se llaman arreglos apantallados de agrupación. Estos arreglos son poco utilizados, pero son muy eficaces para detectar inhomogeneidades laterales del terreno. Su estudio, en cuanto a resistividad aparente, se lleva a cabo como una combinación de arreglos sencillos (colineales o dipolares). En la tabla I. 2. 3 se describen brevemente algunos arreglos de este tipo.

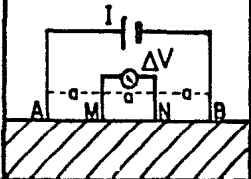
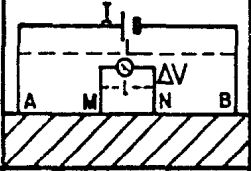
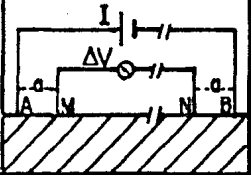
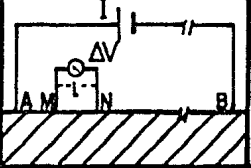
	NOMBRE	VISTA LATERAL	CARACTERISTICA PRINCIPAL	RESISTIV. APARENTE
S I M E T R I C O S	WENNER		Las separaciones AM, MN y NB entre los electrodos son iguales.	$\rho_a = 2\pi a \Delta V / I$
	SCHLUM- BERGER		Las separaciones entre los electrodos de potencial (l) es mucho menor que la que hay entre los electrodos de corriente (L)	$\rho_a = \pi \frac{L^2 - l^2}{2l} \frac{\Delta V}{I}$
A S I M E T R I C O S	SEMI- WENNER		La separación entre los electrodos AM es la misma que NB; pero estos últimos se colocan muy alejados de los primeros (i.e. MN → ∞)	$\rho_a = \pi a \Delta V / I$
	SEMI- SCHLUM- BERGER		El electrodo de corriente B se lleva a gran distancia de los demás, de modo que no influya sobre el valor ΔV observado (i.e. BN → ∞)	$\rho_a = \pi \frac{L^2 - l^2}{l} \frac{\Delta V}{I}$
ARREGLOS ELECTRODICOS COLINEALES				

TABLA I.2.1

NOMBRE	VISTA EN PLANTA	CARACTERISTICA PRINCIPAL	RESISTIV. APARENTE
PARALELO		Los dipolos se colocan paralelos uno respecto del otro	$\rho_a = \frac{2\pi R^3}{L \cdot l} \frac{(\Delta V/I)}{2\cos^2\theta - \text{sen}^2\theta}$
PERPENDI-CULAR		Los dipolos forman ángulo recto	$\rho_a = \frac{\pi R^3}{L \cdot l} \frac{4(\Delta V/I)}{3\text{sen}2\theta}$
RADIAL		El dipolo de electrodos de potencial MN está situado sobre la recta que une los centros de ambos dipolos	$\rho_a = \frac{\pi R^3}{L \cdot l} \frac{(\Delta V/I)}{\cos\theta}$
AZIMUTAL		El dipolo de electrodos de potencial MN es perpendicular a la recta que une los centros de ambos dipolos	$\rho_a = \frac{2\pi R^3}{L \cdot l} \frac{(\Delta V/I)}{\text{sen}\theta}$
ECUATO-RIAL		El dipolo de potencial MN es paralelo al de corriente AB, a la vez que perpendicular a la línea que une los centros	$\rho_a = \frac{2\pi R^3}{L \cdot l} \frac{\Delta V}{I}$
AXIAL		Los dipolos se colocan colinealmente sin intersectarse	$\rho_a = \frac{\pi R^3}{L \cdot l} \frac{\Delta V}{I}$
: ARREGLOS ELECTRODICOS DIPOLARES			

TABLA I.2.2

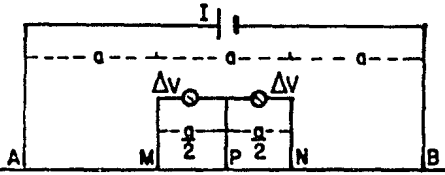
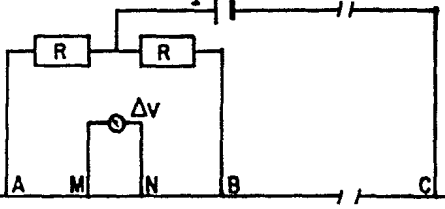
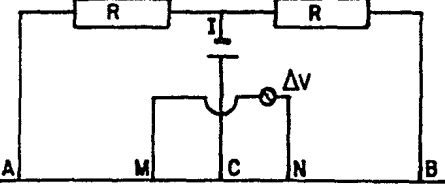
AGRUPOACION	NOMBRE	VISTA LATERAL	CARACTERISTICA PRINCIPAL
	LEE		<p>Se deriva de un arreglo colineal tipo Wenner, con un electrodo adicional de potencial en el centro del arreglo, con el fin de tomar dos medidas de potencial, una entre M y P, y otra entre P y N</p>
A P A N T A L L A M I E N T O	HOMOPO- LAR		<p>Un electrodo adicional de corriente (C) se coloca alejado del arreglo (Wenner o Schlumberger). Las resistencias R sirven para compensar la resistencia de contacto y la de la línea a (C). Para un medio homogéneo isotrópico, $\Delta V = 0$</p>
	DIFEREN- CIAL O BLOKH		<p>Es similar al homopolar, sólo que el electrodo adicional de corriente (C) se coloca en el centro del arreglo. Nuevamente, las resistencias R tienen el objetivo de hacer pasar la misma corriente I por las líneas que van a A y a B</p>
ARREGLOS ELECTRODICOS COMPUESTOS.			

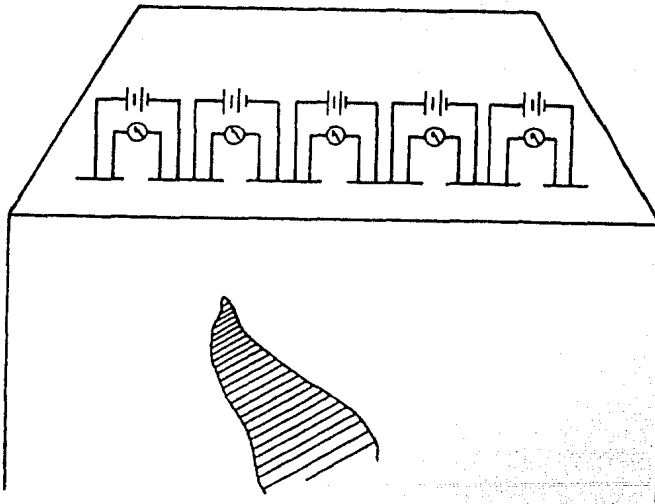
TABLA 1.2.3

Los arreglos descritos anteriormente, exceptuando los asimétricos pueden ser utilizados en las dos modalidades mencionadas al principio de esta sección, es decir en sondeos eléctricos verticales (SEV), o en perfilajes eléctricos (PE). Los arreglos asimétricos solo suelen utilizarse para levantamientos de líneas equipotenciales.

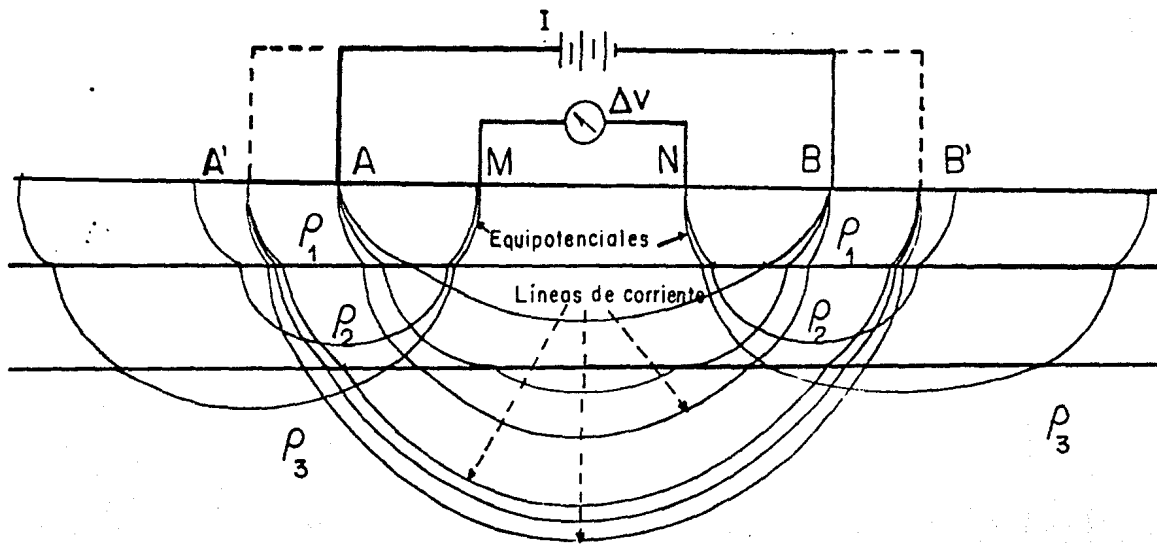
En levantamientos de SEV, con arreglos colineales, el procedimiento de campo para lograr mayor profundidad de investigación consiste en aumentar progresivamente la separación de los electrodos de corriente manteniendo el centro del arreglo fijo. En los levantamientos de SEV, con arreglos dipolares, la profundidad de investigación se logra aumentando la separación entre los dipolos.

En levantamientos de PE, la separación entre los electrodos o dipolos (según sea el caso), se mantiene constante, moviendo lateralmente todo el arreglo.

En el dibujo I.2.2.a y I.2.2.b, se ejemplifican los procedimientos de campo para los dos tipos de levantamientos.



Dibujo I 2.2. a. Ejemplo de perfilaje eléctrico.



Dibujo I.2.2.b. Ejemplo de un sondeo eléctrico vertical.

Finalmente, el método del cuerpo cargado, se utiliza en forma cualitativa. Este método, requiere que previamente se haya detectado una zona de resistividad anómala, ya sea porque aflora a la superficie o porque se haya llegado a ella mediante una perforación de pequeño diámetro. Mediante un electrodo introducido en la zona anómala, se inyecta corriente, alejando el otro electrodo considerablemente. Con un voltímetro, se trazan las líneas equipotenciales producidas por la corriente inyectada. Para un medio homogéneo, las líneas equipotenciales que se generan son circulares, por lo tanto, debido a la presencia de un cuerpo con resistividad diferente a la del medio envolvente, las equipotenciales tendrán una forma distinta a la circular. Observando las deformaciones del patrón homogéneo, se puede estimar el tamaño y orientación del cuerpo con resistividad anómala.

Una vez que se han obtenido en el campo, datos por cualquiera de los métodos anteriormente descritos, se requiere un procesamiento de los mismos, consistente en el ajuste de un modelo teórico. La combinación del conocimiento geológico-estructural de la zona en prospección y de los resultados del procesamiento de datos servirá para determinar la distribución de recursos del subsuelo.

En los métodos geoelectricos de exploración, la interpretación y ajuste de modelos teóricos, se debe lograr dentro del marco de la teoría electromagnética.

I.3 Ecuaciones electromagnéticas.

Son varias las leyes que gobiernan el comportamiento de los campos electromagnéticos en la materia, y matemáticamente están expresadas por las ecuaciones de Maxwell.

La primera, es la ley de Gauss, que establece que el flujo total de campo eléctrico \vec{E} (o de desplazamiento \vec{D}) en un volumen es proporcional a la carga (fuente del campo) contenida dentro del mismo. Matemáticamente, se expresa como:

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho \quad (I.3.1)$$

donde \vec{D} es el vector de desplazamiento eléctrico y ρ es la densidad volumétrica de carga.

La segunda, es la ley de Ampere, que relaciona la intensidad del campo magnético \vec{H} en un punto de un material con la densidad de corriente eléctrica \vec{J} que pasa por conducción a través de él, y la variación temporal del campo eléctrico (originadora de una corriente eléctrica de desplazamiento). Esta ley, se expresa como sigue:

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \partial \vec{D} / \partial t \quad (I.3.2)$$

La tercera, es la ley de Faraday, que relaciona la corriente eléctrica ($\nabla \times \vec{E}$), que circula en un circuito cerrado, con el campo magnético \vec{B} fluctuante en el tiempo que atraviesa dicho circuito. La relación matemática es:

$$\nabla \times \vec{E} + \partial \vec{B} / \partial t = 0 \quad (I.3.3)$$

donde \vec{E} es el campo eléctrico.

Finalmente, la cuarta expresa que no existen monopolos magnéticos, al igualar la divergencia del campo magnético a cero:

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (I.3.4)$$

Las relaciones que existen entre \vec{B} y \vec{H} , \vec{D} y \vec{E} , \vec{J} y \vec{E} están dadas por las relaciones constitutivas empíricas siguientes:

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad \vec{D} = \epsilon \vec{E} \quad \vec{J} = \sigma \vec{E} \quad (1.3.5)$$

donde μ , la permeabilidad magnética ϵ , la permitividad eléctrica y σ , la conductividad eléctrica, son en general tensores dependientes del tiempo y la posición. Estos parámetros son propiamente los que contienen la información de las propiedades del medio, ya que son los factores que relacionan los campos fuera del medio y sus efectos dentro del mismo.

Dentro del marco de estas ecuaciones, se hacen los desarrollos posteriores del presente trabajo.

I. 4 Ecuaciones variacionales de energía.

Para llegar a efectuar interpretaciones de datos de campo, provenientes de estudios geoelectricos, se eligió desarrollar un modelo de tipo variacional.

Para hacer el planteamiento de un problema variacional, se requiere una función que sea susceptible de maximizarse o minimizarse. En el caso electromagnético esta función la provee el principio de Hamilton, que dice que la energía disipada en un volumen dado debe ser mínima.

La variación en el tiempo de la densidad volumétrica de energía del campo eléctrico ($\partial u / \partial t$) se puede expresar como la suma de un flujo de energía por unidad de tiempo y superficie a través de un medio ($\nabla \cdot \bar{S}$) mas el trabajo por unidad de tiempo y volumen que se realiza para pasar dicho medio ($\bar{E} \cdot \bar{J}$). Su expresión matemática es la siguiente:

$$-\partial u / \partial t = \nabla \cdot \bar{S} + \bar{E} \cdot \bar{J} \quad (I. 4. 1)$$

Utilizando las ecuaciones de Maxwell ecs. (I. 3. 1) a (I. 3. 4) en la ecuación anterior, el vector \bar{S} , que expresa la densidad superficial de flujo de energía por unidad de tiempo, puede expresarse como:

$$\bar{S} = \bar{E} \times \bar{H} \quad (I. 4. 2)$$

a este vector, se le conoce como el vector de Poynting.

La cantidad de energía por unidad de tiempo (potencia electromagnética ψ') en un volumen, contenido en una superficie cerrada, puede expresarse como la divergencia negativa del vector de Poynting:

$$\psi' = -\nabla \cdot \bar{S} = -\nabla \cdot (\bar{E} \times \bar{H}) = -(\nabla \times \bar{E}) \cdot \bar{H} + (\nabla \times \bar{H}) \cdot \bar{E} \quad (I. 4. 3)$$

y haciendo uso de las ecs. (I. 3. 2) y (I. 3. 3), la ecuación anterior puede expresarse como:

$$\psi' = \bar{H} \cdot \partial \bar{B} / \partial t + \bar{J} \cdot \bar{E} + \bar{E} \cdot \partial \bar{D} / \partial t \quad (I. 4. 4)$$

Como se explica posteriormente, el volumen total de materia que se desea estudiar, se subdividirá en pequeños volúmenes dentro de los cuales, con el fin de simplificar los desarrollos, el medio será considerado homogéneo, isotrópico y lineal. Físicamente, esta restricción obliga a que μ , ϵ y σ (ecs. (I. 3. 5)) sean considerados únicamente como funciones escalares del tiempo. Si además se establece que éstas sean constantes en el tiempo, μ , ϵ y σ se convierten en escalares, que denotaremos por μ , ϵ y σ . Sustituyendo las relaciones constitutivas (I. 3. 5) en la ec. (I. 4. 4) se obtiene:

$$\psi' = \mu/2 \partial(\vec{H}')/\partial t + \epsilon/2 \partial(E^2)/\partial t + \sigma E^2 \quad (I. 4. 5)$$

Para obtener la densidad volumétrica de energía u , se integra la ec. (I. 4. 5) con respecto al tiempo:

$$u = \mu \vec{H}'^2/2 + \epsilon \vec{E}'^2/2 + \int \sigma \vec{E}'^2 dt \quad (I. 4. 6)$$

Los términos de la ec. (I. 4. 6) representan respectivamente, la densidad de energía magnética, eléctrica y óhmica (disipativa).

Integrando la ecuación anterior con respecto al volumen, se obtiene una expresión para la energía electromagnética U dentro de un volumen dado V .

$$U = \int_V [\mu H^2/2 + \epsilon E^2/2 + \int \sigma E^2 dt] dV \quad (I. 4. 7)$$

Se introduce ahora una suposición adicional que consiste en que todos los campos en consideración presentan una dependencia temporal de tipo $\exp(i\omega t)$, siendo ω la frecuencia temporal, debida a las señales excitadoras. Esta suposición es justificable ya que las señales de excitación que se usan en geofísica de exploración se pueden aproximar a una suma finita de señales de este tipo, o en el caso ideal a una señal de este tipo. Por otro lado, debido a que μ , ϵ y σ son parámetros independientes del tiempo, es válido suponer que los campos y la respuesta del medio serán dependientes armónicamente del tiempo.

Con esta suposición adicional, y las ecs. (I. 3. 2) y (I. 3. 3), se puede establecer:

$$\nabla \times \bar{H} = \sigma \bar{E} + \partial(\epsilon \bar{E})/\partial t = (\sigma + i\omega\epsilon) \bar{E} \quad (I. 4. 8)$$

$$\nabla \times \bar{E} = -\partial(\mu \bar{H})/\partial t = -i\omega\mu \bar{H} \quad (I. 4. 9)$$

$$\int \sigma E_0^2 e^{2i\omega t} dt = \sigma E_0^2 / 2i\omega e^{2i\omega t} = \sigma E^2 / 2i\omega \quad (I. 4. 10)$$

Sustituyendo las expresiones anteriores en la ec. (I. 4. 7), se obtienen finalmente dos expresiones para la energía electromagnética total U en un volumen V :

$$U = 1/(2\omega^2\mu) \int_V (\gamma^2 E^2 - (\nabla \times \bar{E})^2) dV \quad (I. 4. 11)$$

$$U = i/(2\omega(\gamma + i\omega\epsilon)) \int_V (\gamma^2 H^2 - (\nabla \times \bar{H})^2) dV \quad (I. 4. 12)$$

siendo

$$\gamma = (\omega^2\mu\epsilon - i\omega\mu\sigma)^{1/2}$$

Se tienen, por otro lado (Coggon (4), (5)) las expresiones para la energía electromagnética de fuentes:

$$\text{Fuente magnética: } U_M = \int_V \mu \bar{M}_s \cdot \bar{H} dV \quad (I. 4. 13)$$

donde \bar{M}_s es la magnetización de la fuente.

$$\text{Fuente eléctrica: } U_E = \int_V \bar{P}_s \cdot \bar{E} dV \quad (I. 4. 14)$$

donde \bar{P}_s es la polarización de la fuente.

Fuente de corriente alterna:

$$U_J = \int_V (\bar{J}_s \cdot \bar{E}) / i\omega dV \quad (I. 4. 15)$$

donde \bar{J}_s es la densidad de corriente de la fuente.

Fuente de corriente directa:

$$U_J = \int_V 2 \bar{J}_s \cdot \bar{E} dV \quad (I. 4. 16)$$

donde \bar{J}_s es la densidad de corriente de la fuente.

I. 5 Ecuaciones variacionales para el caso de corriente directa.

Para el caso en que la señal de excitación es de corriente directa (campos independientes del tiempo) se parte de la ec. (I. 4. 5):

$$\psi' = \mu/2 \partial (H^2)/\partial t + \epsilon/2 \partial (E^2)/\partial t + \sigma E^2 \quad (I. 5. 1)$$

Debido a la consideración de campos independientes del tiempo, desaparecen los primeros dos términos, quedando de la siguiente forma:

$$\psi' = \sigma E^2 \quad (I. 5. 2)$$

Para obtener la energía electromagnética ψ por unidad de tiempo en un volumen dado V se integra la ec. (I. 5. 2) respecto al volumen:

$$\psi = \int_V \sigma \bar{E}^2 dV \quad (I. 5. 3)$$

A esta expresión se le agrega la energía de la fuente excitadora ec. (I. 4. 16):

$$\psi_{\bar{J}} = \int_V 2 \bar{J}_s \cdot \bar{E} dV \quad (I. 5. 4)$$

Sumando las ecs. (I. 5. 3) y (I. 5. 4), la energía electromagnética por unidad de tiempo contenida en un volumen dado V con una fuente, puede escribirse como:

$$\psi_T = \int_V (\sigma E^2 + 2 \bar{J}_s \cdot \bar{E}) dV \quad (I. 5. 5)$$

La ec. (I. 5. 5) tiene como argumento el campo eléctrico, que es una función vectorial. Se puede simplificar el problema, si se expresa la ecuación en términos del potencial eléctrico ϕ , que es una función escalar. La relación que existe entre ambas funciones es:

$$\bar{E} = -\nabla \phi \quad (I. 5. 6)$$

Sustituyendo la ec. (I. 5. 6) en la ec. (I. 5. 5) se llega a la expresión:

$$\psi_T = \int_V (\sigma (\nabla \phi)^2 - 2 \bar{J}_s \cdot \nabla \phi) dV \quad (I. 5. 7)$$

Si no existen fuentes de corriente en la superficie frontera del volumen V una forma alternativa para expresar la ec. (I. 5. 7) es:

$$\psi_T = \int_V (\sigma (\nabla \phi)^2 + 2 \phi \nabla \cdot \bar{J}_s) dV \quad (I. 5. 8)$$

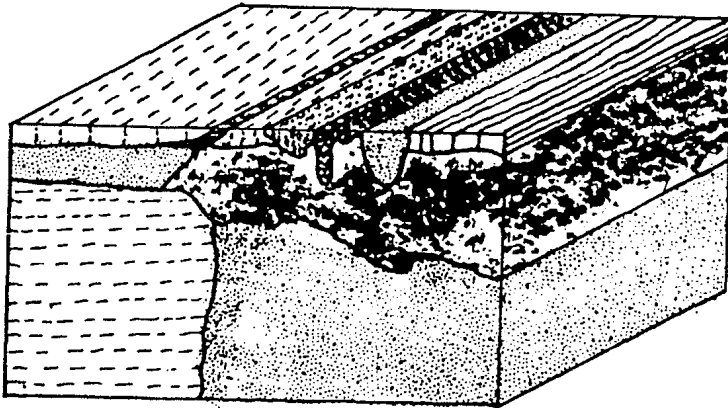
Un caso de interés muy particular, es aquel en el que se tiene una fuente puntual localizada en el punto (x', y', z') , dentro del medio. Para este caso, se tiene que:

$$\nabla \cdot \bar{J}_s = -I \delta(x-x') \delta(y-y') \delta(z-z') \quad (I.5.9)$$

Donde I es la magnitud de la corriente puntual inyectada en el punto (x', y', z') y δ es la función delta de Dirac. Sustituyendo la ec. (I.5.9) en la ec. (I.5.8) se tiene:

$$\Psi_T = \int_V [\sigma (\nabla \phi)^2 - 2I \delta(x-x') \delta(y-y') \delta(z-z') \phi] dV \quad (I.5.10)$$

El modelo que se desarrollará aquí será de tipo bidimensional, es decir considerará variaciones de conductividad únicamente en direcciones X y Z. En la dirección del eje Y, se supondrá que el medio está formado por prismas de longitud infinita en ambos sentidos del eje (dibujo I.5.1). Cada prisma se considerará homogéneo e isotrópico respecto a su conductividad.



Dibujo I.5.1 Modelo bidimensional de prismas.

Aún con esta simplificación, la fuente de excitación creará una distribución tridimensional de potencial. Para simplificar los cálculos, aprovechando la simetría establecida en el eje Y, al potencial eléctrico se le aplica una transformación de Fourier de tipo coseno:

$$\hat{\phi}_k(x, \kappa, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x, y, z) \cos(\kappa y) dy \quad (I. 5. 11)$$

donde K es la variable de transformación.

Finalmente, la ec. (I. 5. 10) queda expresada de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \psi_{TK} = \iiint \left\{ \sigma \left[(\partial \hat{\phi} / \partial x)^2 + \kappa^2 \hat{\phi}^2 + (\partial \hat{\phi} / \partial z)^2 \right] \right. \\ \left. - 2 \mathcal{I} \int \delta(x-x') \int \delta(z-z') \hat{\phi} \right\} dx dz \end{aligned} \quad (I. 5. 12)$$

Como una integral sobre una superficie en el plano XZ.

Y por último, el planteamiento variacional, de la ec. (I. 5. 12), lleva a:

$$\begin{aligned} \Delta \iiint \left\{ \sigma \left[(\partial \hat{\phi} / \partial x)^2 + \kappa^2 \hat{\phi}^2 + (\partial \hat{\phi} / \partial z)^2 \right] \right. \\ \left. - 2 \mathcal{I} \int \delta(x-x') \int \delta(z-z') \hat{\phi} \right\} dx dz = 0 \end{aligned} \quad (I. 5. 13)$$

CAPITULO II

El método de elementos finitos y desarrollo del método propuesto.

II.1 Método de elementos finitos.

El método de elementos finitos, es una técnica para obtener directamente una solución numérica a una ecuación variacional o diferencial. En términos generales, se representa un dominio dado como una colección de subdominios geoméricamente simples (elementos finitos) conectados en ciertos puntos nodales. El problema, se formula aproximadamente para condiciones de frontera arbitrarias sobre cada subdominio, necesitándose únicamente una elección de funciones locales sencillas para caracterizar la solución en cada elemento. Estas funciones son generalmente polinomios. La representación global del problema se obtiene entonces reuniendo los elementos utilizados para representar el dominio, y sumando las contribuciones de cada elemento.

Un problema variacional, consiste en hallar una función que encuentre la extremal de una funcional dada. Matemáticamente se expresa como:

$$\Delta \int_V F(A) dV = 0 \quad (II.1.1)$$

donde F es una funcional conocida de una función desconocida A (función escalar o vectorial) y Δ representa la variación.

Para el planteamiento de elementos finitos, se comienza dividiendo el volumen total V en un número N de elementos, quedando la ec. (II.1.1) de la forma siguiente:

$$\Delta \int_V F(A) dV = \sum_{i=1}^N \Delta \int_{V_i} F(A) dV_i = 0 \quad (II.1.2)$$

El segundo paso consiste en caracterizar en toda la malla la dependencia espacial de la función A por medio de valores desconocidos A_j en un número M de puntos o nodos. Los nodos generalmente se hacen coincidir con los vértices de los elementos. Con esto, se obtienen M variables linealmente independientes ($A_j, j = 1, M$).

La integración y la variación en cada uno de los elementos se lleva a cabo suponiendo una forma funcional para la función A en cada elemento. La forma funcional mas sencilla es una función lineal. En el caso de elementos con cuatro vértices, si $A_{i1}, A_{i2}, A_{i3}, A_{i4}$ son los valores de la función A en los nodos del elemento i -ésimo, la integral en el elemento i se puede expresar como:

$$\int_{V_i} F(A) dV_i \cong G_i(A_{i1}, A_{i2}, A_{i3}, A_{i4}) \quad (\text{II. 1.3})$$

donde G_i es la función que resulta de integrar la expresión $F(A)$.

Para obtener la integral en el volumen total, se suman las integrales en cada elemento:

$$\begin{aligned} \Delta \int_V F(A) dV &= \sum_{i=1}^N \Delta \int_{V_i} F(A) dV_i \\ &\cong \sum_{i=1}^N \Delta G_i(A_{i1}, A_{i2}, A_{i3}, A_{i4}) = \Delta H(A_1, A_2, \dots, A_M) \end{aligned} \quad (\text{II. 1.4})$$

donde la función H es la suma de todas las funciones G_i y A_k es la suma de todas las A_{ij} que tienen el nodo k en común.

A partir de la ec. (II. 1.4), se puede obtener la variación de la función H respecto a cada uno de los parámetros A_k , igualándose a cero cada derivada parcial para obtener la extremal:

$$\begin{aligned} \partial H / \partial A_1 &= 0 \\ \partial H / \partial A_2 &= 0 \\ &\vdots \\ \partial H / \partial A_M &= 0 \end{aligned} \quad (\text{II. 1.5})$$

De este proceso, se obtiene un conjunto de M ecuaciones simultáneas con M incógnitas (A_k). Debido a que estas ecuaciones son lineales, se puede construir un sistema matricial de la siguiente forma:

$$\pi \bar{A} = \bar{S}$$

(II. 1. 6)

donde

π es una matriz de $M \times M$ elementos que corresponden a los coeficientes de las incógnitas A_k .

\bar{A} es el vector de M elementos que contiene las incógnitas A_k .

\bar{S} es un vector de M elementos que contiene los términos independientes (condiciones de frontera del problema, y las contribuciones de las fuentes).

Por último, para obtener el vector solución \bar{A} , se resuelve este sistema de ecuaciones lineales simultáneas.

II.2 Discretización de las ecuaciones variacionales de corriente continua.

El triángulo, es la forma geométrica mas simple que, en dos dimensiones se utiliza para representar un elemento finito. Esto se debe a la flexibilidad que presenta para cubrir cualquier superficie plana. En esta parte del desarrollo se utilizarán mallas divididas en triángulos, que en general pueden ser de cualquier tipo y tamaño.

Para lograr la discretización, se parte de la ec. (I. 5. 13):

$$\Delta \iiint \left\{ \sigma \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \kappa^2 \phi^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \right] - 2 \int \delta(x-x') \delta(z-z') \phi \right\} d x d z = 0 \quad (\text{II. 2. 1})$$

Es necesario dividir la superficie S (dominio) en una serie de "elementos finitos" de superficie, en este caso, triángulos que llenen totalmente a S .

Ahora, la ec. (II. 2. 1) se plantea como una suma de integrales sobre superficies S_i mas pequeñas. Cada una de estas superficies forma parte de un corte transversal realizado en el conjunto de prismas del modelo. El integrando, para cada una de estas integrales llevará un valor de conductividad eléctrica (σ) diferente. Los valores del potencial estarán dados por una forma funcional para el mismo, que depende de los valores de éste en cada uno de los nodos, y de las coordenadas de los nodos.

La nomenclatura que se utilizará en los desarrollos que siguen será la siguiente:

A cada elemento, se le designará con un número entero único, que, algebraicamente se denotará con la letra "e" empleada como superíndice.

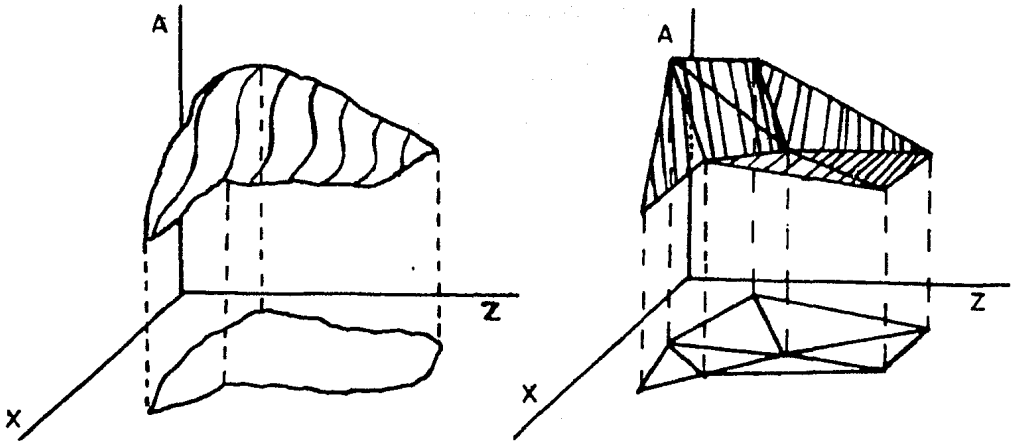
A cada nodo (vértice de un elemento), se le designará con un número entero empleado como subíndice, de las variables correspondientes a los nodos.

Para lograr la discretización se planteará la ecuación variacional para un solo elemento, ya que la forma funcional final va a ser idéntica para todos los triángulos.

Con fines de simplificación, se supone que dentro de cada pequeño triángulo el potencial varía en forma lineal:

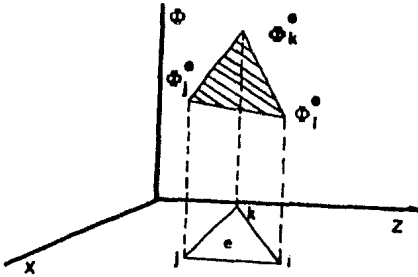
$$\hat{\phi}^e = a^e + b^e x^e + c^e z^e \quad (\text{II.2.2})$$

La función y el dominio en el que se trabajará se ilustra en el dibujo II. 2. 1:



Dibujo II. 2. 1 Dominio y función, reales y discretizados.

Para un elemento finito general como el del dibujo II.2.2 los potenciales en los nodos i, j, k se calculan de la siguiente forma:



Dibujo II.2.2 Elemento finito típico.

$$\hat{\phi}_i^e = a^e + b^e x_i^e + c^e z_i^e$$

$$\hat{\phi}_j^e = a^e + b^e x_j^e + c^e z_j^e \quad (\text{II.2.3})$$

$$\hat{\phi}_k^e = a^e + b^e x_k^e + c^e z_k^e$$

Este sistema se resuelve para los coeficientes a^e , b^e , c^e , como un sistema de ecuaciones lineales simultáneas, quedando los coeficientes en términos de $\hat{\phi}_{i,j,k}^e$, $x_{i,j,k}^e$, $z_{i,j,k}^e$.

Sustituyendo la forma lineal para $\hat{\phi}_2^e$ en la ec. (II.2.1) y haciendo las derivaciones parciales indicadas, se obtiene:

para un elemento "e" sin fuente:

$$\Delta \iint_e r^e \left[(b^e)^2 + k^e (a^e + b^e x^e + c^e z^e)^2 + (c^e)^2 \right] dx^e dz^e = 0 \quad (\text{II.2.4})$$

y para un elemento "e" con fuente, se le resta el término:

$$\Delta \iint_e 2 \Gamma \delta(x^e - x') \delta(z^e - z') (a^e + b^e x^e + c^e z^e) dx^e dz^e = 0 \quad (\text{II.2.5})$$

II. 3 Ecuaciones para un elemento.

Para llegar a la forma de las ecuaciones finales para un elemento se tratarán las ecs. (II. 2. 4) y (II. 2. 5) por separado. La primera, la denotaremos por q_e^e :

$$\Delta q_e^e = \Delta \iint_{\Omega} \sigma^e [(b^e)^2 + k^e (a^e + b^e x^e + c^e z^e)^2 + (c^e)^2] dx^e dz^e = 0 \quad (\text{II. 3. 1})$$

y a la segunda por q_f^e :

$$\Delta q_f^e = \Delta \iint_{\Omega} 2I \delta(x^e - x') \delta(z^e - z') (a^e + b^e x^e + c^e z^e) dx^e dz^e \quad (\text{II. 3. 2})$$

Para el caso de la primera ecuación (ec. (II. 3. 1)), la variación se lleva a cabo sobre los valores desconocidos del potencial ϕ_e^e y la integración, sobre las coordenadas de los nodos, por lo que es válido intercambiar las operaciones de variación e integración.

Para realizar la variación, se hace la derivada parcial de la función q_e^e con respecto a cada uno de los potenciales ϕ_e^e .

Para efectuar las integrales de superficie, se hace uso del teorema de Green para el plano:

$$\iint_{\Omega} (\partial \phi / \partial x - \partial \phi / \partial z) dx dz = \oint_{\partial \Omega} (\phi dx + \phi dz) \quad (\text{II. 3. 3})$$

Haciendo la función ϕ idénticamente cero, se llega a la siguiente expresión:

$$\iint_{\Omega} \partial \phi / \partial x dx dz = \oint_{\partial \Omega} \phi dz \quad (\text{II. 3. 4})$$

De esta forma, las integrales de superficie que se plantean en la ec. (II. 3. 1) se transforman en una integral sobre el contorno del elemento "e".

Realizando las integraciones, haciendo todas las simplificaciones y factorizando en términos de $\hat{\phi}_i^e$, $\hat{\phi}_j^e$, $\hat{\phi}_k^e$ (Apéndice II), se llega a la expresión:

$$\partial g^e / \partial \hat{\phi}_i^e = \sigma^e / \Delta^e (t_{ii}^e \hat{\phi}_i^e + t_{ij}^e \hat{\phi}_j^e + t_{ik}^e \hat{\phi}_k^e) + K^2 / 12 \Delta^e \sigma^e (2 \hat{\phi}_i^e + \hat{\phi}_j^e + \hat{\phi}_k^e) \quad (\text{II. 3.5})$$

donde K es la variable de la transformada de Fourier, σ^e es la conductividad del elemento "e", Δ^e es dos veces el área del triángulo "e" y además se han definido:

$$t_{ii}^e = (x_i^e - x_k^e)^2 + (z_i^e - z_k^e)^2$$

$$t_{ij}^e = (x_i^e - x_k^e)(x_k^e - x_j^e) + (z_i^e - z_k^e)(z_k^e - z_j^e) \quad (\text{II. 3.6})$$

$$t_{ik}^e = (x_i^e - x_j^e)(x_j^e - x_k^e) + (z_i^e - z_j^e)(z_j^e - z_k^e)$$

siendo evidente que $t_{ij}^e = t_{ji}^e$ y $t_{ik}^e = t_{ki}^e$.

Únicamente se presenta la ecuación para la derivada parcial con respecto a $\hat{\phi}_i^e$ ya que la forma es igual para las otras dos parciales, únicamente intercambiando cíclicamente el subíndice i por j y por k.

Para la segunda ecuación (ec. (II.3.2)), debido a la presencia de las funciones delta de Dirac, para la integración, únicamente se tiene que evaluar el integrando en los puntos x' , z' por lo que la expresión final para el término de fuente, en un elemento sin fuente es cero, y en un elemento con fuente en su interior es:

$$\partial g_r^e / \partial \hat{\phi}_i^e = 2I / \Delta^e [(x_i^e z_k^e - x_k^e z_i^e) + (z_j^e - z_k^e) x' + (x_k^e - x_j^e) z'] \quad (\text{II. 3.7})$$

y las parciales con respecto a $\hat{\phi}_j^e$ y $\hat{\phi}_k^e$ se obtienen intercambiando cíclicamente el subíndice i por j y por k.

A partir de las ecs. (II.3.5) y (II.3.7), se construye el sistema global de ecuaciones, sumando las expresiones de las derivadas parciales con respecto al potencial en cada nodo, sobre todos los elementos "e" de la malla, e igualándolos a cero, se obtiene un sistema matricial del siguiente tipo:

$$\pi \hat{\phi} = \bar{S} \quad (\text{II.3.8})$$

donde

π es una matriz de dimensión $M \times M$ donde M es el número total de nodos de la malla. Esta matriz contiene la información geométrica de la malla, de las conductividades y la variable de transformación de Fourier (K).

$\hat{\phi}$ es un vector de M componentes que contiene los valores desconocidos de los potenciales en cada nodo.

\bar{S} es un vector de M componentes que contiene la información de las fuentes de corriente y las condiciones de frontera de la malla.

II. 4 Errores.

Los errores que pueden aparecer en la solución de cualquier problema por métodos numéricos son en general de dos tipos, de discretización y errores numéricos.

Los errores de discretización son causados por el planteamiento del método. Para el caso de elementos finitos son:

- a) La división que se hace del dominio de la función A en elementos no es una representación exacta del dominio físico. Esta aproximación se vuelve mas precisa dividiendo el dominio en elementos irregulares, cada vez mas pequeños, y, en el límite cuando el número de elementos tiende a infinito y el tamaño de los mismos tiende a cero, la solución obtenida sería la solución analítica.
- b) La aproximación que se hace de la función incógnita por medio de una función lineal, introduce también errores, que en el límite desaparecen, obteniéndose la solución analítica.

Los dos tipos de errores anteriores se pueden disminuir con un diseño adecuado de la malla, pero no pueden desaparecer, ya que existe un compromiso entre la densidad de puntos de la malla y el tiempo que toma resolver el problema.

Los errores numéricos aparecen cuando se intenta resolver el problema utilizando computadoras. Debido a las características particulares de cada máquina, cuando se efectúan operaciones aritméticas con dos cantidades, se van cometiendo errores en la representación de las cifras menos significativas, que pueden finalmente, llevar a resultados muy diferentes de los esperados.

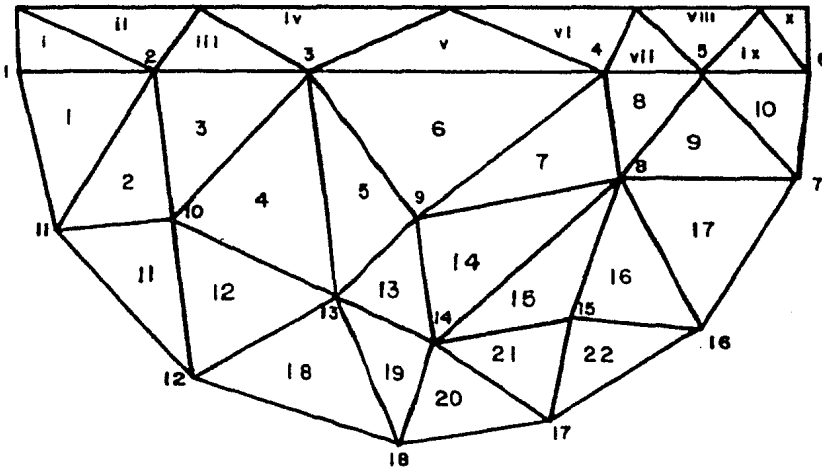
Este tipo de errores se puede minimizar con un planteamiento y programación adecuados de todas las ecuaciones que intervengan en el proceso de solución del problema.

CAPITULO III

III. 1 Mallas generales.

En una malla general de elementos finitos, los elementos en que se divide el dominio pueden ser de cualquier forma y tamaño. Este trabajo se restringe a mallas que tengan únicamente elementos triangulares.

Se ejemplificará la forma en la que se construye el sistema matricial $\nabla^2 \phi + \bar{s} = 0$ de la ec. (II. 3.8). Para esto, se plantea la malla general del dibujo III. 1. 1.



Dibujo III. 1. 1 Malla general.

En esta malla los nodos 1, 11, 12, 18, 17, 16, 7 y 6 van a representar los nodos en la frontera del modelo con el medio exterior, y por lo tanto los valores de $\hat{\phi}_i$ correspondientes a estos nodos estarán dados exógenamente. Para los triángulos arriba de los nodos 1, 2, 3, 4, 5 y 6, la interfase es aire, de aquí que se les asignen valores de conductividad iguales a cero. Debido a esto, no habrá contribuciones de ellos al sistema matricial.

Se desarrollará la derivada parcial total correspondiente a la ec. (II.3.5) para un solo nodo, el nodo 15, siendo el desarrollo para los demás nodos interiores (10, 9, 8, 2, 3, 4, 5, 13 y 14) similar:

$$\begin{aligned}
 \partial g / \partial \hat{\phi}_{15} &= \partial g^u / \partial \hat{\phi}_{15} + \partial g^{16} / \partial \hat{\phi}_{15} + \partial g^{17} / \partial \hat{\phi}_{15} + \partial g^{18} / \partial \hat{\phi}_{15} \\
 &= \sigma^{16} / \Delta^{16} (t_{15,15}^{16} \hat{\phi}_{15} + t_{15,8}^{16} \hat{\phi}_8 + t_{15,14}^{16} \hat{\phi}_{14}) \\
 &\quad + k^{16} / 12 \Delta^{16} \sigma^{16} (2 \hat{\phi}_{15} + \hat{\phi}_8 + \hat{\phi}_{14}) \\
 &+ \sigma^{10} / \Delta^{10} (t_{15,15}^{10} \hat{\phi}_{15} + t_{15,8}^{10} \hat{\phi}_8 + t_{15,16}^{10} \hat{\phi}_{16}) \\
 &\quad + k^{10} / 12 \Delta^{10} \sigma^{10} (2 \hat{\phi}_{15} + \hat{\phi}_8 + \hat{\phi}_{16}) \\
 &+ \sigma^{21} / \Delta^{21} (t_{15,15}^{21} \hat{\phi}_{15} + t_{15,17}^{21} \hat{\phi}_{17} + t_{15,17}^{21} \hat{\phi}_{17}) \\
 &\quad + k^{21} / 12 \Delta^{21} \sigma^{21} (2 \hat{\phi}_{15} + \hat{\phi}_{17} + \hat{\phi}_{17}) \\
 &+ \sigma^{22} / \Delta^{22} (t_{15,15}^{22} \hat{\phi}_{15} + t_{15,17}^{22} \hat{\phi}_{17} + t_{15,16}^{22} \hat{\phi}_{16}) \\
 &\quad + k^{22} / 12 \Delta^{22} \sigma^{22} (2 \hat{\phi}_{15} + \hat{\phi}_{17} + \hat{\phi}_{16})
 \end{aligned}
 \tag{III. 1. 1}$$

En esta expresión se ha eliminado el superíndice " e " a la variable $\hat{\phi}_4^e$, ya que se trata de la suma global.

Cabe hacer notar que los términos afectados por $\hat{\phi}_{17}$ y $\hat{\phi}_{16}$ serán términos independientes que irán a formar parte del vector \underline{S} .

Análogamente repitiendo este desarrollo para todos los nodos interiores se puede construir un sistema matricial con una estructura como la mostrado en el dibujo III. 1. 2.

$$\begin{array}{c} \Pi \\ \left[\begin{array}{cccccccc} x & x & & & & & x & \\ x & x & x & & & & x & x & x \\ & x & x & x & x & x & & & \\ & & x & x & x & & & & \\ & & & x & x & x & x & x & \\ x & x & & x & x & & & x & x \\ x & x & & & & & x & x & \\ & x & & & x & x & x & & \\ & & & & x & x & & x & x \\ & & & & & x & x & & \\ & & & & x & & & x & x \end{array} \right] \begin{array}{c} \phi \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \\ \phi_5 \\ \phi_6 \\ \phi_7 \\ \phi_8 \\ \phi_9 \\ \phi_{10} \\ \phi_{13} \\ \phi_{14} \\ \phi_{15} \end{array} + \begin{array}{c} S \\ x \\ x \\ x \\ x \\ x \\ x \\ x \\ x \\ x \\ x \\ x \\ x \\ x \end{array} = \underline{0} \end{array}$$

Dibujo III. 1. 2 Estructura de la matriz resultante.

Para los elementos que contengan fuentes de corriente, se utiliza además, la ec. (II.3.7) y los términos independientes correspondientes se le restan al vector de fuentes \bar{S} .

La matriz \bar{T} así formada, tiene varias características interesantes que se pueden explotar para llegar a una solución.

En primer lugar, la matriz es poco densa y simétrica, por lo que es necesario generar únicamente la diagonal principal y el triángulo inferior o superior. Además, presenta una estructura definida que puede facilitar su almacenamiento en la memoria de una computadora.

En el ejemplo planteado, los nodos de la malla se numeraron arbitrariamente. Sin embargo, si se cambia la numeración, se obtiene una matriz con una estructura diferente, pero sigue conservando las características mencionadas anteriormente.

Existen muchos problemas asociados a la generación de mallas arbitrarias de elementos finitos. Los programas necesarios para generarlas resultan ser muy complicados debido a que tienen que crear todos y cada uno de los elementos con sus características geométricas y verificar que se tiene cubierto todo el espacio. Además, para la generación de la matriz, se tienen que programar las ecuaciones originales sin ninguna simplificación posible, es decir, accedendo uno por uno todos los elementos, y sin poder factorizar términos ya que todos son distintos entre si, debido a la irregularidad de la malla.

Estos problemas, repercuten directamente en el tiempo de procesamiento requerido para resolver un problema dado, haciendo el método costoso en la práctica.

III. 2 Simplificaciones.

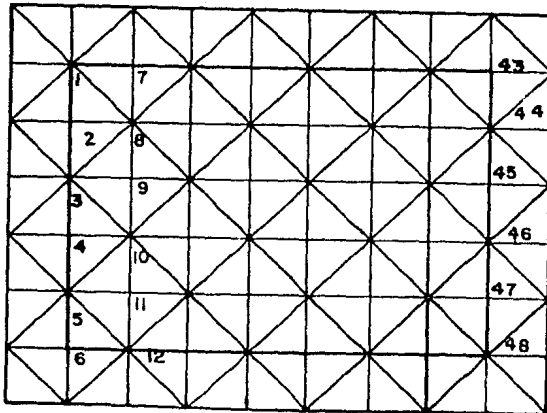
La finalidad de ajustar modelos teóricos a datos de campo de geo-resistividad, encierra varias características que, por un lado, obligan a simplificar la malla y por otro lado relajan las condiciones geométricas sobre la misma. Estas características son:

- a) No se conocen, para el subsuelo ni la forma ni el tamaño de las distintas regiones que tienen la misma conductividad.
- b) Para cada arreglo de conductividades, se tienen que resolver varios sistemas de ecuaciones, correspondientes a los diferentes valores de la variable de transformación de Fourier.
- c) Antes de obtener la solución final, se tiene que modificar varias veces el arreglo de conductividades, lo que implica volver a hacer todo el trabajo de generación y solución del sistema.

El punto a) permite que se pueda hacer una malla de forma regular, poniendo cuidado únicamente en que la finura de la misma sea suficiente para obtener resultados adecuados.

Los puntos b) y c) obligan a diseñar una malla que permita la generación y solución del sistema mediante un algoritmo sencillo y sobre todo rápido.

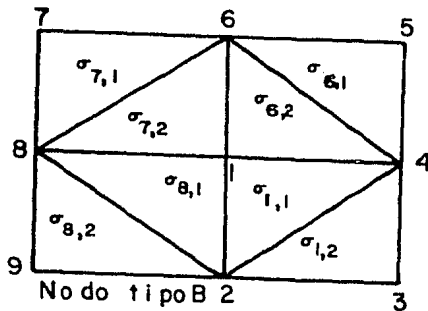
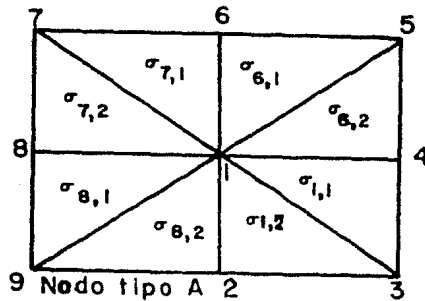
Después de analizar varias posibilidades, se eligió el tipo de malla que se ilustra en el dibujo III. 2. 1:



Dibujo III. 2. 1 Malla regular seleccionada.

Este tipo de malla tiene las siguientes características:

- Las áreas de todos los triángulos son iguales, por lo que $\Delta^e = \Delta$, y se produce una primera simplificación en las ecuaciones.
- Solamente existen dos tipos de nodos en toda la malla a los que se ha llamado nodo tipo "A" y nodo tipo "B".



Dibujo III. 2. 2 Nodo tipo A y nodo tipo B.

Con esta simplificación, además se logra que los elementos de la matriz π estén dados por dos tipos de ecuaciones muy sencillas, apareciendo como casos particulares los nodos de las fronteras.

Haciendo uso de la notación implícita en el dibujo III. 2. 2, las conductividades se numeran con dos índices, el primero correspondiente al nodo superior izquierdo al elemento y el segundo con:

"1" si el elemento se encuentra en la parte superior.

"2" si se encuentra en la parte inferior.

Las ecuaciones para los dos tipos de nodos quedan expresadas de la siguiente forma:

Nodo tipo "A"

$$\begin{aligned}
 \partial g / \partial \hat{\phi}_1 = & (1 + K^2 \Delta / 6) (\sigma_{1,1} + \sigma_{1,2} \\
 & + \sigma_{6,1} + \sigma_{6,2} + \sigma_{7,1} + \sigma_{7,2} + \sigma_{8,1} + \sigma_{8,2}) \hat{\phi}_1 \\
 & + (-1 + K^2 \Delta / 12) [(\sigma_{1,1} + \sigma_{6,2}) \hat{\phi}_4 + (\sigma_{7,1} + \sigma_{6,1}) \hat{\phi}_6 \\
 & + (\sigma_{7,2} + \sigma_{8,1}) \hat{\phi}_8 + (\sigma_{8,2} + \sigma_{1,2}) \hat{\phi}_z] \\
 & + K^2 \Delta / 12 [(\sigma_{1,1} + \sigma_{1,2}) \hat{\phi}_3 + (\sigma_{6,1} + \sigma_{6,2}) \hat{\phi}_5 \\
 & + (\sigma_{7,1} + \sigma_{7,2}) \hat{\phi}_7 + (\sigma_{8,1} + \sigma_{8,2}) \hat{\phi}_9]
 \end{aligned}
 \tag{III. 2. 1}$$

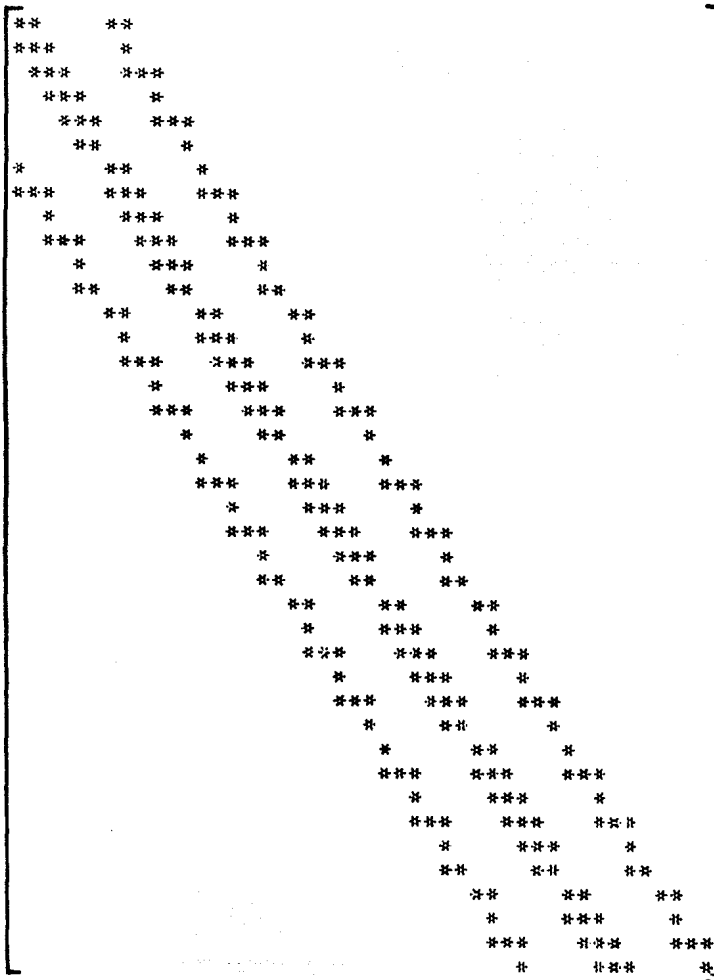
Nodo tipo "B"

$$\begin{aligned}
 \partial g / \partial \hat{\phi}_1 = & (2 + K^2 \Delta / 6) [\sigma_{1,1} + \sigma_{6,2} + \sigma_{7,2} + \sigma_{8,1}] \hat{\phi}_1 \\
 & + (-1 + K^2 \Delta / 12) [(\sigma_{1,1} + \sigma_{6,2}) \hat{\phi}_4 + (\sigma_{6,2} + \sigma_{7,2}) \hat{\phi}_6 \\
 & + (\sigma_{7,2} + \sigma_{8,1}) \hat{\phi}_8 + (\sigma_{8,1} + \sigma_{1,1}) \hat{\phi}_z]
 \end{aligned}$$

(III. 2. 2)

Las simplificaciones mencionadas, permiten generar las matrices y vectores asociados al problema, de una forma rápida y eficiente. Además, permiten al usuario tener una idea muy clara de la distribución de conductividades dentro del modelo y su relación al espacio físico que se pretende modelar.

La numeración elegida para los elementos y nodos de la malla, (ejemplificada en el dibujo III.2.1 para una malla de 48 nodos), produce una estructura para la matriz Π que se muestra en el dibujo III.2.3:



Dibujo III.2.3 Estructura de la matriz correspondiente a una malla regular.

Esta estructura, se aprovechará posteriormente para la resolución del sistema de ecuaciones y para el almacenamiento de la matriz dentro de la computadora.

III. 3 Algoritmos de solución.

El método de elementos finitos, presenta la característica muy importante, de que las matrices asociadas a un planteamiento de este tipo siempre son positivas definidas (Alan George, Joseph W. Liu (6)).

Esta particularidad del método, permite la utilización de una factorización Cholesky, para la solución de un sistema de ecuaciones lineales simultaneas.

La factorización, consiste en lo siguiente:

Se tiene un sistema lineal de ecuaciones simultaneas, que, en forma matricial se escribe como:

$$U \bar{x} = \bar{b} \quad (\text{III. 3. 1})$$

donde \bar{x} es el vector de incógnitas x_i , \bar{b} es el vector de términos independientes y U es la matriz asociada al sistema, que debe ser simétrica y positiva definida.

El método de Cholesky encuentra una factorización de la matriz U en dos matrices L y L^t :

$$U = LL^t \quad (\text{III. 3. 2})$$

La matriz L , es triangular inferior o superior y la matriz L^t es la matriz transpuesta de L .

Con esta factorización, el sistema de ecs. (III. 3. 1) se transforma en:

$$L L^t \bar{x} = \bar{b} \quad (\text{III. 3. 3})$$

Para la solución del sistema, se construyen dos sistemas auxiliares de ecuaciones lineales:

$$L^t \bar{x} = \bar{y} \quad \text{y} \quad L\bar{y} = \bar{b} \quad (\text{III. 3. 4})$$

Este par de sistemas auxiliares, se resuelve por sustitución, empezando por el segundo ($L\bar{y} = \bar{b}$) y una vez obtenidos los valores de las componentes del vector \bar{y} , se resuelve por sustitución el primer sistema ($L^t \bar{x} = \bar{y}$), obteniéndose los valores de las incógnitas originales x_i , (componentes del vector \bar{x}).

El método de factorización Cholesky, permite además, resolver el sistema de manera seccionada, por lo que, la resolución del sistema de ecuaciones puede llegar a requerir una pequeña cantidad de memoria, aún para sistemas muy grandes. (Op. Cit. (6)).

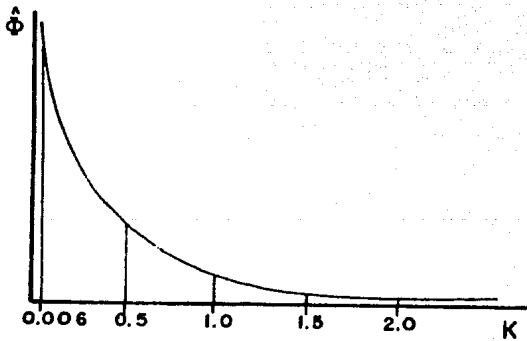
III. 4 Regreso al dominio del espacio.

La solución de los sistemas matriciales de la sección anterior proporciona los valores del potencial transformado a diferentes números de onda K , para cada uno de los nodos de la malla.

El valor del potencial ϕ en el espacio real, para un punto de la malla, se obtiene haciendo una transformación inversa de Fourier, de la siguiente forma:

$$\phi(x, y, z) = 1/2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\phi}(x, k, z) \cos(ky) dk \quad (\text{III. 4. 1})$$

El dibujo III. 4. 1 representa la distribución de potencial transformado para un punto de la malla.



Dibujo III. 4. 1 Representación de potenciales transformados.

Para efectuar la transformación inversa de Fourier, de los puntos mostrados en el dibujo anterior, es necesario ajustar una curva que facilite el cálculo de la integral de transformación.

Los valores de potencial así obtenidos, se usarán para calcular resistividades aparentes. El concepto de resistividad aparente considera implícitamente al medio heterogéneo como un medio homogéneo para cada separación electroódica. Se propone considerar dicho modelo homogéneo desde el dominio de las frecuencias.

La solución analítica en el espacio transformado para un semiespacio homogéneo (apéndice III), con fuentes internas, es una suma de K_0 (funciones modificadas de Bessel de orden cero). Esta es la razón por la cual se utilizó una suma de dos de estas funciones para ajustar los puntos del potencial transformado.

$$\hat{\phi}(x, k, z) \approx a K_0(k \sqrt{(x-x_1)^2 + (z-z_1)^2}) + b K_0(k \sqrt{(x-x_2)^2 + (z-z_2)^2}) \quad (\text{III. 4. 2})$$

donde a y b son los coeficientes del ajuste, x y z la posición del punto a transformar, x_1 , z_1 , x_2 , y z_2 las posiciones de la fuente y sumidero, y k el valor de la variable de transformación de Fourier.

Haciendo un ajuste por el método de mínimos cuadrados, se obtienen los valores de los parámetros a y b .

El valor del potencial ϕ en el dominio del espacio se calcula integrando la ec. (III. 4. 2), como se indica en la ec. (III. 4. 1). La ec. (III. 4. 3) indica el resultado de esta operación.

$$\phi(x, 0, z) = a / \sqrt{(x-x_1)^2 + (z-z_1)^2} - b / \sqrt{(x-x_2)^2 + (z-z_2)^2} \quad (\text{III. 4. 3})$$

En el caso de que se deseen calcular distribuciones superficiales de potencial, es posible que el procedimiento antes descrito no sea el mejor. Sin embargo, ya que siempre será necesario ajustar algún tipo de curva a los potenciales transformados, se piensa que el comportamiento de las funciones K_0 , como funciones de ajuste dará buenos resultados.

Con los métodos geoléctricos de exploración usualmente se toman lecturas de potencial en la superficie del terreno. Es por esta razón que el sistema computacional, solo efectúa la transformación inversa de Fourier para los puntos o nodos de la superficie del modelo, obteniéndose así un ahorro en el tiempo de procesamiento.

111.5 Explicación del funcionamiento del sistema computacional.

En esta sección se discute el problema práctico computacional, que es necesario resolver para implementar un sistema que sea capaz de resolver matrices positivas definidas, poco densas y muy grandes, como las que se obtienen en el desarrollo de este trabajo.

Se describen las estructuras de datos que se usan para almacenar las matrices, así como los algoritmos que se implementan. Debido al tamaño de los sistemas de ecuaciones que aparecen, es necesario diseñar algoritmos que sean eficientes para calcular la solución de los mismos, y que se puedan programar de tal forma que al ejecutarse hagan uso únicamente de una pequeña sección de la memoria del computador. También es necesario pensar que los programas no deben ser muy grandes en sí mismos, ya que esto consumiría la memoria de la máquina.

El sistema que se implementó, está dividido en cinco secciones principales, ejecutables independientemente, que son:

- a) Módulo de creación de archivos.
- b) Módulo de generación y modificación de los datos del modelo.
- c) Módulo que calcula la solución numérica del modelo.
- d) Módulo que calcula tablas de resistividad aparente.
- e) Módulo de impresión de los datos del modelo.

La primera sección (a) se puede considerar como un conjunto de programas de utilería. Se encargan de crear, dentro de la máquina y muy especialmente en las unidades de almacenamiento masivo de datos, las condiciones necesarias que permitan la resolución y almacenamiento posterior de los parámetros y soluciones a un modelo dado. Los modelos que se resuelven, se identifican con un nombre, proporcionado por el usuario. Este nombre, toma las funciones de un apellido, para los diferentes archivos en los que se almacenan: sistemas de ecuaciones, conductividades del modelo, sus parámetros (i. e. tamaño, parámetros de seccionamiento, etc.) y soluciones, ya sea de potenciales y/o de resistividades aparentes.

En la sección b), el sistema permite operar en dos modalidades; de creación y de modificación.

En la modalidad de creación, los programas reciben del usuario todos los datos del modelo que se desea analizar, y los almacenan de una manera eficiente en los archivos creados en la sección a).

En la modalidad de modificación, se permite la modificación de un modelo creado con anterioridad, alterándose los archivos de datos correspondientes.

En esta sección, se crea también la matriz asociada al problema, almacenándose bajo una estructura de datos que permite realizar manejos eficientes en el momento de resolver el modelo. La estructura de datos, se explicará mas adelante.

Dentro del módulo c), se resuelve propiamente el modelo. Se efectúan aquí, las factorizaciones Cholesky, para los diferentes valores de muestreo del parámetro K , de la transformada de Fourier; se efectúan las sustituciones para obtener los potenciales en el dominio de las frecuencias y; se calculan los potenciales en el dominio del espacio, para los nodos sobre la superficie del modelo. En el caso de que se esté analizando un modelo homogéneo, se calcula la solución analítica y se obtienen las estadísticas necesarias para establecer una comparación entre los resultados numéricos y analíticos.

Debido al carácter general de la implementación del sistema, su capacidad para manejar modelos de tamaños muy disímiles, y por otro lado, las restricciones al tamaño de la memoria central disponible en diferentes computadoras, se realizan todos los cálculos de una manera seccionada, sujetos a las restricciones de memoria disponible.

Si el sistema se utiliza para interpretación de datos de campo, debe ejecutar el módulo d). En este modulo, se calculan valores de resistividad aparente, para diferentes posiciones de las fuentes de corriente, para comparación con los valores obtenidos a partir de los datos de campo.

El módulo e) es un módulo de programas de utilería, que permite extraer y reportar todos los parámetros de un modelo dado.

Para el manejo de estos módulos, se hizo un programa, que pregunta cual es el módulo que se desea ejecutar. Es posible trabajar con cualquiera de los módulos, en cualquier orden, ya que son completamente independientes. También es posible trabajar con distintos modelos al mismo tiempo dentro del sistema.

Computacionalmente hablando, la parte central del sistema la constituye la estructura de datos que se utiliza. Esta, se diseñó de tal manera, que permita una flexibilidad absoluta en el manejo de la información, en cuanto a posibilidades de seccionamiento de la misma.

La diagonal de la matriz se guarda en el arreglo DIAG. Como la matriz es simétrica, solo es necesario almacenar la parte inferior o superior de la misma.

En el arreglo LNZ se acumulan las columnas de la parte inferior de la matriz, una despues de la otra como se observa en el dibujo. El arreglo XLNZ se usa para indicar en que palabra del arreglo LNZ comienza cada una de las columnas de la matriz, es decir, la primer palabra de XLNZ, siempre deberá tener un numero "1", ya que, la primera columna de la matriz, siempre deberá estar almacenada a partir de la primera palabra de LNZ. La segunda palabra de XLNZ debe indicar, en que palabra de LNZ aparece el primer elemento de la segunda columna de la matriz, etcetera.

En la primera palabra del arreglo auxiliar COL se almacena el número de la primera columna distinta de cero, que aparece en el primer renglon. La segunda palabra de COL, contiene el número de la primera columna distinta de cero del segundo renglón, y así sucesivamente.

El lado derecho del sistema de ecuaciones se almacena en el arreglo RHS.

Esta forma de almacenamiento, permite programar la rutina de factorización Cholesky y, las de sustitución, de una forma eficiente y rápida, porque se evitan al maximo las operaciones aritméticas innecesarias, y se usa solo la memoria que en algún momento del proceso, contendrá elementos distintos de cero.

Para segmentar una matriz, se almacena una sección, en una estructura como la descrita, y la siguiente sección en otra, hasta que se tenga toda la matriz guardada.

Dentro de la máquina, cuando se genere el sistema de ecuaciones, se tendra una sección a la vez y cuando se resuelva se tendran dos secciones a un mismo tiempo.

La generación de las secciones, se hace de una manera secuencial, y una vez que se ha completado una de ellas, se escribe a disco, hasta que toda la matriz haya sido generada.

La factorización de la matriz, se hace trayendo de disco, secciones sucesivas de la misma, de tal manera que siempre esten al mismo tiempo en memoria, dos secciones. Una vez que se ha terminado de factorizar una sección, se manda a disco, y se trae la siguiente, en el espacio que ocupaba la que se mando a disco. Para no copiar una estructura en otra en la memoria de la maquina, se llaman las rutinas de factorización y sustitución, entre paso y paso, intercambiando sus argumentos (cada argumento, corresponde a cada una de las estructuras).

La eficiencia, en la utilización del espacio de memoria, se obtiene, segmentando la información de tal forma que se ocupe siempre la máxima cantidad posible de memoria disponible.

Un ejemplo de esto, se tiene al ver que es posible factorizar una matriz de 3600 X 3600, tanto con 10K de memoria como con 40K. Lo cual permite ejecutar estos programas en diferentes máquinas con un número mínimo de modificaciones.

CAPITULO IV

Comparación contra modelos con solución analítica.

IV.1 Comparación en el dominio de las frecuencias y del espacio contra modelos homogéneos.

La solución para un modelo homogéneo, (resistividades iguales en todo el espacio), se conoce analíticamente (Apéndice III). Las pruebas para el sistema se realizaron con modelos homogéneos, porque existe la posibilidad de hacer comparaciones precisas.

Se hicieron muchas pruebas con modelos de diferentes tamaños, valores del número de onda k , y valores de conductividad. Los resultados, en todos los casos fueron muy semejantes, en cuanto a las desviaciones respecto a la solución analítica, por lo que, aquí solo se presentan resultados para un modelo considerado como típico.

El modelo que se presenta tiene las siguientes características:

- a) 80 nodos en sentido horizontal.
- b) 30 nodos en sentido vertical.
- c) Separación de 0.1266 metros entre nodo y nodo de la malla.
- d) Un valor de 0.006 para el número de onda (dominio de las frecuencias).
- e) Una fuente y un sumidero de corriente, colocados a poca profundidad, equidistantes al centro del modelo a una distancia de 0.5 metros, con valores de intensidad de corriente de 1 y -1 amperes respectivamente.
- f) Una conductividad de 1 mho-metro correspondiente a una resistividad de 1 ohm-metro.

Para establecer la comparación entre los valores de potencial, calculados analíticamente y los proporcionados por el sistema computacional, se definieron los siguientes errores y estadísticas.

$$\text{Error porcentual} = 1.0 - \frac{\text{valor calculado}}{\text{valor teórico}}$$

Error porcentual máximo= máximo error porcentual en valor absoluto

Error porcentual mínimo= mínimo error porcentual en valor absoluto

Error porcentual medio = promedio de los errores porcentuales

Desviación standard = desviación standard de los errores porcentuales

En la tabla IV.1.1 se presentan estas estadísticas, calculadas, en el dominio de las frecuencias, para todos los nodos de la malla y para el valor del número de onda mencionado en el inciso d) de la caracterización del modelo:

TABLA IV. 1. 1

Estadística	Malla Completa
Error % máximo	0.732371 E -01
Error % mínimo	0.652194 E -08
Error % medio	-0.210304 E -03
Desviación standard	0.102084 E -04

En la tabla IV.1.2 se presentan estas estadísticas, calculadas en el dominio del espacio, para los nodos en la superficie del modelo. Como se mencionó en el capítulo anterior, los valores de potencial calculados en estos nodos son los que se utilizan para calcular la resistividad aparente y por ende para realizar la interpretación de datos de campo.

TABLA IV. 1. 2

Estadística	Nodos de Superficie
Error % máximo	0. 841117 E -01
Error % mínimo	0. 197477 E -04
Error % medio	0. 130200 E -02
Desviación standard	0. 306000 E -03

Como se observa en las tablas anteriores (tabla IV. 1. 1 y tabla IV. 1. 2), los errores son lo suficientemente pequeños que permiten concluir que el sistema computacional proporciona resultados numéricos que son bastante confiables.

En un modelo homogéneo, se sabe que el valor de la resistividad aparente, calculada para cualquier separación electródica es igual al valor de la resistividad del medio. En la tabla IV. 1. 3 se presentan los valores de resistividad aparente calculados a diferentes separaciones electródicas para un modelo homogéneo de resistividad igual a 1 ohm-metro.

TABLA IV. 1.3

CORRIENTE INYECTADA	1.0 amperes
SEPARACION ENTRE NODOS	0.1266 metros
NUMERO DE NODOS HORIZONTALES	80
NUMERO DE NODOS VERTICALES	30
NUMEROS DE ONDA USADOS	0.006, 0.5
	1.0, 1.5, 2.0
POSICION DEL CENTRO DE LOS	
ARREGLOS DE CORRIENTE Y POTENCIAL	5.0007 metros
CONDUCTIVIDAD DEL MEDIO HOMOGENEO	1.0 mho-metro

ARREGLO SCHLUMBERGER

SEPARACION ENTRE ELECTRODOS (metros)		RESISTIVIDAD APARENTE (ohms-metro)
AB/2	MN/2	
0.5	0.01	1.013795
1.0	0.01	1.003787
1.5	0.01	1.001713
2.0	0.01	1.000969
0.5	0.02	1.012698
1.0	0.02	1.003496
1.5	0.02	1.001581
2.0	0.02	1.000895
0.5	0.06	1.001431
1.0	0.06	1.000394
1.5	0.06	1.000178
2.0	0.06	1.000101
0.5	0.10	1.046502
1.0	0.10	1.011729
1.5	0.10	1.005197
2.0	0.10	1.002919
0.5	0.20	1.023417
1.0	0.20	1.004657
1.5	0.20	1.001945
2.0	0.20	1.001070
1.0	0.60	1.024627
1.5	0.60	1.006150

En la tabla anterior (tabla IV. 1. 3), se observa que se tiene un error máximo del 4.6 % sobre el valor esperado de resistividad aparente (1 ohm-metro). El error máximo tolerable en medidas de campo es del 10 %, con lo que se concluye que el sistema proporciona valores de resistividad aparente con errores inferiores a los máximos tolerables. ◀

Aquí, cabe hacer notar que todos estos resultados se obtuvieron utilizando precisión simple en una computadora Burroughs B7800 con un tamaño de palabra de 48 bits. Resultados similares en cuanto a precisión se obtuvieron en una computadora Univac 1100/80 con tamaño de palabra de 32 bits.

CAPITULO V

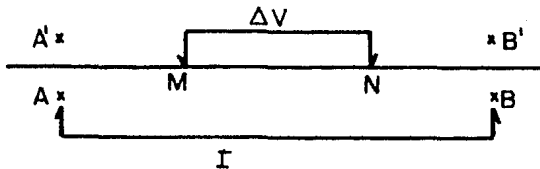
Aplicación Geofísica.

V. 1 Obtención de la resistividad aparente.

Una vez calculados los valores del potencial ϕ en el dominio del espacio, el siguiente paso consiste en calcular el parámetro conocido como resistividad aparente, definido en el capítulo I, sección 2 (I. 2).

En ese mismo capítulo, se bosquejaron varios tipos de arreglos electródicos, así como las formulas asociadas para el calculo de la resistividad aparente. En el marco de los desarrollos de este trabajo, la resistividad aparente debe obtenerse de una manera diferente, debido a que las fuentes de corriente se suponen localizadas a cierta profundidad (ecs. (I. 5. 6) y (I. 5. 7)). Para este cálculo, se utiliza el "método de imagenes", de la teoría electromagnética.

La situación de campo, que se tiene para un arreglo colineal arbitrario, se muestra en el dibujo V. 1. 1:



Dibujo V. 1. 1 Arreglo electródico colineal de campo.

donde A y B son las posiciones de los electrodos de corriente, A' y B' son las posiciones de las imágenes de las fuentes de corriente y, M y N son las posiciones de los electrodos de potencial.

De acuerdo a lo anterior la resistividad aparente queda expresada como:

$$\rho_A = 4\pi \left[\frac{1}{MA} + \frac{1}{MA'} - \frac{1}{MB} - \frac{1}{MB'} \right. \\ \left. - \frac{1}{NA} - \frac{1}{NA'} + \frac{1}{NB} + \frac{1}{NB'} \right]^{-1} \Delta V_{MN} / I_{AB} \quad (V. 1. 1)$$

Dentro de los límites de este trabajo solo se consideran superficies de interfase planas, por lo que, del dibujo V. 1. 1, se tiene que las distancias de los electrodos de potencial a las fuentes y fuentes imagen son iguales entre sí, de donde la ec. (V. 1. 1) se reduce a:

$$\rho_A = 2\pi \left[\frac{1}{MA} - \frac{1}{MB} - \frac{1}{NA} + \frac{1}{NB} \right]^{-1} \Delta V_{MN} / I_{AB} \quad (V. 1. 2)$$

Esta es la fórmula empleada para calcular resistividades aparentes para las curvas de SEV de la siguiente sección.

V. 2 Obtención de curvas de SEV.

Las curvas de sondeo eléctrico vertical, provenientes de datos de campo, contienen los valores de resistividad aparente graficados contra diferentes separaciones entre electrodos de corriente.

Para poder comparar los modelos teóricos con las curvas de campo, en el caso de SEV, el sistema requiere que se le proporcionen: la apertura y posición de los electrodos de potencial, así como las aperturas y posiciones sucesivas de los electrodos de corriente. Se calculan entonces, para una distribución de conductividades, los diferentes valores de la resistividad aparente.

El sistema, tal como se presenta aquí, solamente puede considerar un "bloque" heterogéneo, inmerso en un medio homogéneo, ya que las condiciones en la frontera que se calculan son para un modelo homogéneo.

Para ejemplificar el uso del sistema a situaciones reales de campo, se presenta la siguiente tabla (tabla (V. 2.1)), que corresponde a una malla de 30 X 80 puntos, con una separación entre nodos sucesivos de la malla de 0.1266 metros. La distribución de conductividades para este modelo, corresponde a un modelo de 4 capas horizontales, inmersas en un medio homogéneo de conductividad 1.0 mho-metro. Las conductividades y espesores de las capas son los siguientes (Nota: los espesores de las capas se ajustan de acuerdo con la distancia entre nodos):

En la tabla V. 2.1, también se presentan los valores de potencial para la superficie, la primer columna muestra los valores calculados con el sistema, y la segunda los valores calculados analíticamente, para un modelo de capas de dimensiones horizontales infinitas.

Tabla V. 2. 1

	CAPA	RESISTIVIDAD (ohm-metro)	ESPESOR (metros)
	1	0. 1	1. 1394
	2	0. 5	1. 2660
	3	0. 001	1. 1394
	4	1. 0	INFINITO

	POTENCIAL (volts)	
NODO	ELEMENTOS FINITOS	ANALITICO
1	0. 006379	0. 043431
2	0. 010205	0. 044968
3	0. 013953	0. 046650
4	0. 017692	0. 048501
5	0. 021450	0. 050547
6	0. 025308	0. 052821
7	0. 029292	0. 055363
8	0. 033499	0. 058220
9	0. 037959	0. 061449
10	0. 042798	0. 065119
11	0. 048053	0. 069314
12	0. 053896	0. 074138
13	0. 060384	0. 079716
14	0. 067755	0. 086203
15	0. 076101	0. 093790
16	0. 085768	0. 102715
17	0. 096915	0. 113273
18	0. 110052	0. 125836
19	0. 125457	0. 140873
20	0. 143922	0. 158982
21	0. 165934	0. 180929
22	0. 192777	0. 207711
23	0. 225341	0. 240640
24	0. 265823	0. 281466
25	0. 315935	0. 332575
26	0. 379717	0. 397290
27	0. 460773	0. 480368
28	0. 567320	0. 588856
29	0. 707997	0. 733641
30	0. 902258	0. 932434
31	1. 175318	1. 216048
32	1. 585424	1. 643027
33	2. 231450	2. 339189
34	3. 367672	3. 630622
35	5. 602160	6. 692450
36	10. 558646	21. 273618
37	12. 659802	26. 224862
38	5. 702753	6. 681069
39	2. 608238	2. 799171
40	0. 782879	0. 810248

Los resultados presentados en la tabla anterior no son perfectamente comparables, debido a que los modelos no son iguales. Uno es un modelo de capas inmerso en un medio homogéneo, y el otro es un modelo de capas infinitas. El efecto de estas diferencias se puede observar cerca de las fronteras del modelo. Las fuentes del modelo de elementos finitos están dentro de la primera capa, mientras que las fuentes del segundo están en la superficie. Estas diferencias se observan en el hecho de que el potencial calculado con el sistema siempre es un poco menor que el del modelo analítico. Solo se muestran los valores de potencial para posiciones desde la frontera al centro del modelo, porque este es simétrico.

A continuación, se presentan dos tablas de resistividad aparente, para dos modelos diferentes de capas:

Tabla V. 2. 2

Primer modelo

CORRIENTE INYECTADA	1.0 amperes
SEPARACION ENTRE NODOS	0.1266 metros
NUMERO DE NODOS HORIZONTALES	80
NUMERO DE NODOS VERTICALES	30
NUMEROS DE ONDA USADOS	0.006, 0.5
	1.0, 1.5, 2.0
POSICION DEL CENTRO DE LOS ARREGLOS DE CORRIENTE Y POTENCIAL	5.0007 metros

ARREGLO SCHLUMBERGER

CAPA	RESISTIVIDAD (ohms-metro)	ESPESOR (metros)
1	1.0	1.7724
2	0.1	INFINITO

RESISTIVIDAD DEL MEDIO HOMOGENEO 0.1 ohms-metro

SEPARACION ENTRE ELECTRODOS (metros) RESISTIVIDAD APARENTE (ohms-metro)

AB/2	MN/2	
0.5	0.01	1.016854
1.0	0.01	0.975693
1.5	0.01	0.907104
2.0	0.01	0.813576
0.5	0.02	1.015793
1.0	0.02	0.975411
1.5	0.02	0.906985
2.0	0.02	0.813515
0.5	0.06	1.004492
1.0	0.06	0.972396
1.5	0.06	0.905715
2.0	0.06	0.812870
0.5	0.10	1.047055
1.0	0.10	0.984049
1.5	0.10	0.911096
2.0	0.10	0.816122
0.5	0.20	1.019766
1.0	0.20	0.977967
1.5	0.20	0.909210
2.0	0.20	0.815838
1.0	0.60	1.005942
1.5	0.60	0.928121
2.0	0.60	0.834706

Tabla V. 2. 3

Segundo modelo

CORRIENTE INYECTADA	1. 0 amperes
SEPARACION ENTRE NODOS	0. 1266 metros
NUMERO DE NODOS HORIZONTALES	80
NUMERO DE NODOS VERTICALES	30
NUMEROS DE ONDA USADOS	0. 006, 0. 5
	1. 0, 1. 5, 2. 0
POSICION DEL CENTRO DE LOS ARREGLOS DE CORRIENTE Y POTENCIAL	5. 0007 metros

ARREGLO SCHLUMBERGER

CAPA	RESISTIVIDAD (ohms-metro)	ESPESOR (metros)
1	10. 0	1. 1394
2	2. 0	1. 2660
3	1000. 0	1. 2660
4	1. 0	INFINITO

RESISTIVIDAD DEL MEDIO HOMOGENEO 1. 0 ohms-metro

SEPARACION ENTRE ELECTRODOS (metros) RESISTIVIDAD APARENTE (ohms-metro)

AB/2	MN/2	
0. 5	0. 01	10. 051505
1. 0	0. 01	9. 241714
1. 5	0. 01	8. 084221
2. 0	0. 01	6. 904743
0. 5	0. 02	10. 041021
1. 0	0. 02	9. 239037
1. 5	0. 02	8. 083160
2. 0	0. 02	6. 904230
0. 5	0. 06	9. 929310
1. 0	0. 06	9. 210430
1. 5	0. 06	8. 071840
2. 0	0. 06	6. 898754
0. 5	0. 10	10. 354539
1. 0	0. 10	9. 329435
1. 5	0. 10	8. 128559
2. 0	0. 10	6. 932212
0. 5	0. 20	10. 090042
1. 0	0. 20	9. 282619
1. 5	0. 20	8. 122802
2. 0	0. 20	6. 937253
1. 0	0. 60	9. 695889
1. 5	0. 60	8. 449027
2. 0	0. 60	7. 207599

CONCLUSIONES.

En este trabajo se ha presentado una metodología para el cálculo de potenciales eléctricos y resistividades aparentes en medios que presentan heterogeneidades, tanto laterales como a profundidad, de la propiedad conductora del subsuelo.

Debido a que el objetivo es utilizarla para la interpretación de datos de campo de geo-resistividad, para acelerar el proceso de cálculo, se introduce una innovación que consiste en discretizar el medio de una forma regular. Esta idea surgió del hecho de que es imposible definir a priori la forma de las estructuras del subsuelo.

La implementación de esta metodología se logra a través de una estructura de programas de computadora, diseñada de tal forma que incrementa las ventajas obtenidas por la discretización. Además, el diseño de esta estructura de programas está pensado para que pueda ser utilizado en cualquier tipo de computadoras.

Para asegurar la bondad del sistema computacional propuesto se hacen comparaciones contra modelos geoelectricos que ofrecen la ventaja de poseer soluciones analíticas conocidas; y a través del análisis de errores, se hace patente su alto grado de precisión.

Con el fin de evaluar la velocidad de proceso, se calcularon potenciales y resistividades aparentes para un medio discretizado en una malla de 120 nodos horizontales y 30 verticales. Esta malla produjo 8 matrices de 3600 X 3600 elementos, cada una correspondiente a un número de onda diferente. Se consideraron 4 posiciones diferentes de fuentes de corriente que produjeron 32 vectores de fuentes. La solución se obtuvo en una máquina Burroughs 7800, consumiéndose 6 minutos de tiempo de procesador y 6 minutos de tiempo de entrada y salida.

Este trabajo, introduce en el ámbito nacional, una nueva tecnología para el procesamiento de datos geoelectricos que seguramente vendrá a sustituir las técnicas limitadas que hasta la fecha se usan en muchos de los campos de aplicación de la exploración geoelectrica.

Ademas sienta las bases para desarrollar procedimientos mas completos que permitan la utilización de discretizaciones con elementos irregulares resultando en el incremento de posibilidades para el tratamiento de problemas mas complejos.

Queda abierta la posibilidad de utilización de rutinas de optimización (i. e. metodo de gradiente reducido generalizado) para intentar la solución del problema inverso de una manera automática, dentro de las limitaciones debidas a la no-unicidad de las soluciones.

APENDICE I

Reducción de la ecuación variacional
a una ecuación diferencial.
(en el dominio del espacio, y de frecuencias)

En la sección 5 del capítulo I (I. 5), se calcula la energía total disipada, en un volumen dado V , cuando pasa a través de él una corriente directa. La ecuación correspondiente es (ec. I. 5. 10):

$$\Psi_T = \int_V [\sigma (\nabla \phi)^2 - 2I \delta(\bar{x}) \phi] dV \quad (\text{AI. 1})$$

El planteamiento variacional del problema, exige que la función ϕ sea tal que la energía Ψ_T se encuentre en un estado estacionario (extremal). Es decir, que la variación sea igual a cero:

$$\Delta \Psi_T = \Delta \int_V [\sigma (\nabla \phi)^2 - 2I \delta(\bar{x}) \phi] dV = 0 \quad (\text{AI. 2})$$

El pedir la condición anterior sobre ϕ es equivalente (Arfken (7) p. 787) a pedir que se cumpla la siguiente ecuación diferencial:

$$\partial \Phi / \partial \phi - \partial (\partial \Phi / \partial \phi_x) / \partial x - \partial (\partial \Phi / \partial \phi_y) / \partial y \quad (\text{AI. 3})$$

$$- \partial (\partial \Phi / \partial \phi_z) / \partial z = 0$$

donde $\phi_x = \partial \phi / \partial x$, $\phi_y = \partial \phi / \partial y$, $\phi_z = \partial \phi / \partial z$

$$y \quad \Phi = \sigma (\nabla \phi)^2 - 2I \delta(\bar{x}) \phi$$

$$\partial \Phi / \partial \phi = -2I \delta(\bar{x}) \quad (\text{AI. 4})$$

$$\partial \Phi / \partial \phi_x = 2\sigma \phi_x \quad (\text{AI. 5})$$

$$\partial (\partial \Phi / \partial \phi_x) = 2\sigma \phi_{xx} \quad (\text{AI. 6})$$

Sustituyendo las ecs. (AI. 4), (AI. 5) y (AI. 6) en la ec. (AI. 3), se llega a:

$$-2 \mathbb{I} \delta(\bar{x}) - 2 \sigma \phi_{xx} - 2 \sigma \phi_{yy} - 2 \sigma \phi_{zz} = 0$$

reacomodando:

$$\sigma \nabla^2 \phi = -\mathbb{I} \delta(\bar{x}) \quad (\text{AI. 7})$$

Que es la ecuación de Poisson.

Para el caso del dominio de las frecuencias, la ec. (AI. 2) se expresa de la siguiente manera:

$$\Delta \psi_T = \Delta \iint_S \left\{ \sigma \left[(\partial \hat{\phi} / \partial x)^2 + \kappa^2 \hat{\phi}^2 + (\partial \hat{\phi} / \partial z)^2 \right] \right. \\ \left. - 2 \mathbb{I} \delta(x) \delta(z) \hat{\phi} \right\} dx dz = 0 \quad (\text{AI. 8})$$

Haciendo uso de la ec. (AI. 3), tenemos la ecuación diferencial que se debe satisfacer en este caso:

$$\sigma (\nabla^2 - \kappa^2) \hat{\phi} = -\mathbb{I} \delta(x) \delta(z) \quad (\text{AI. 9})$$

donde

$$\nabla^2 = \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial z^2$$

La ec. (AI. 9) es la transformada de Fourier de la ec. (AI. 7), (ver Arfken(7), problemas 11.5.11 y 11.5.13).

APENDICE II

Integrales de superficie y simplificaciones.

Se bosquejarán aquí, los pasos que se siguieron para llegar, a la ec. (II.3.5) a partir de las ecs. (II.3.1) y (II.3.2).

Se parte de las ecs. (II.3.1) y (II.3.2):

$$\Delta \iint_{\Omega} \sigma^e \left[(b^e)^2 + \kappa^2 (a^e + b^e x^e + c^e z^e)^2 + (c^e)^2 \right] dx^e dz^e = 0 \quad (\text{AII.1})$$

$$\Delta \iint_{\Omega} 2\mathbf{I} \delta(x^e - x^i) \delta(z^e - z^i) (a^e + b^e x^e + c^e z^e) dx^e dz^e = 0$$

En las ecs. (AII.1), se sustituyen los coeficientes a^e , b^e , y c^e dados como la solución del sistema de ecs. (II.3.3) en la siguiente forma:

$$a^e = \left[\hat{\phi}_i^e (x_i^e z_k^e - x_k^e z_i^e) + \hat{\phi}_j^e (x_k^e z_l^e - x_l^e z_k^e) + \hat{\phi}_k^e (x_l^e z_j^e - x_j^e z_l^e) \right] / \text{DET}$$

$$b^e = \left[\hat{\phi}_i^e (z_i^e - z_k^e) + \hat{\phi}_j^e (z_k^e - z_l^e) + \hat{\phi}_k^e (z_l^e - z_j^e) \right] / \text{DET} \quad (\text{AII.2})$$

$$c^e = \left[\hat{\phi}_i^e (x_k^e - x_j^e) + \hat{\phi}_j^e (x_l^e - x_k^e) + \hat{\phi}_k^e (x_j^e - x_l^e) \right] / \text{DET}$$

donde DET es el determinante general del sistema:

$$\text{DET} = \begin{vmatrix} 1 & x_i^e & z_i^e \\ 1 & x_j^e & z_j^e \\ 1 & x_k^e & z_k^e \end{vmatrix}$$

Una vez realizadas estas sustituciones, se procede a realizar la variación Δ de las ecs. (AII.1). Como la variación se lleva a cabo sobre las variables $\hat{\phi}_i^e$ y la integración sobre las variables x^e y z^e , estas dos operaciones se pueden intercambiar. De este modo, se obtienen expresiones del siguiente tipo:

$$\partial g^e / \partial \hat{\phi}_i^e = \iint_{\Omega} (a_1 + a_2 x^e + a_3 z^e + a_4 (x^e)^2 \quad (\text{AII.3})$$

$$+ a_5 (z^e)^2 + a_6 x^e z^e) dx^e dz^e = 0$$

donde a_1 , a_2 , a_3 , a_4 y a_5 son constantes para las

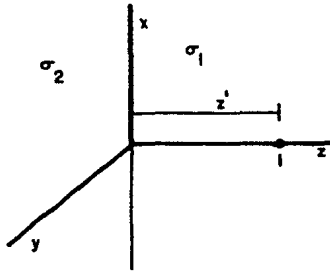
variables de integración, que contienen expresiones de x_i^e , x_j^e , x_k^e , z_i^e , z_j^e , z_k^e , ϕ_i^e , ϕ_j^e y ϕ_k^e .

En este punto, se aplica el teorema de Green a las ecuaciones del tipo (AII.3) simplificándose mucho las integrales; debido a que los contornos se pueden expresar como parametrizaciones del intervalo cerrado $[0, 1]$. Una vez obtenidas las expresiones finales; a través de un largo proceso de factorización, se llega a las expresiones de las ecs. (II.3.5) y (II.3.6).

APENDICE III

Solución de la ecuación de Poisson para el semiespacio homogéneo infinito.

Para calcular la solución de la ecuación de Poisson en el semi-espacio de conductividad σ_1 , se considera una fuente de corriente embebida a una distancia z' de la interfase con el medio de conductividad σ_1 . Se puede pensar que la interfase se encuentra en $z=0$; en el plano XY, dibujo AIII. 1:



Dibujo AIII. 1 Interfase entre dos medios.

Es necesario encontrar la solución a las ecuaciones:

$$\sigma_1 \nabla \cdot \vec{E} = I \delta(x) \quad z > 0 \quad (\text{AIII. 1})$$

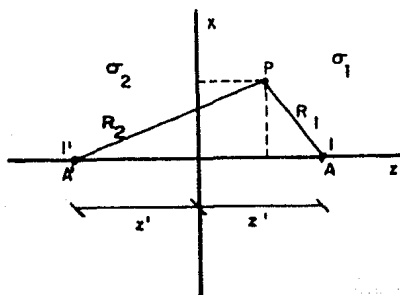
$$\sigma_2 \nabla \cdot \vec{E} = 0 \quad z < 0 \quad (\text{AIII. 2})$$

$$\nabla \times \vec{E} = 0 \quad \text{para todo el espacio} \quad (\text{AIII. 3})$$

Sujetas a las condiciones de frontera:

$$\lim_{z \rightarrow 0^+} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \vec{E}_z \\ \vec{E}_x \\ \vec{E}_y \end{Bmatrix} = \lim_{z \rightarrow 0^-} \begin{Bmatrix} \sigma_2 \vec{E}_z \\ \vec{E}_x \\ \vec{E}_y \end{Bmatrix} \quad (\text{AIII. 4})$$

Ya que $\nabla \times \vec{E} = 0$, \vec{E} se puede derivar de un potencial escalar. Para utilizar el método de imágenes, es natural situar una fuente imagen I' en una posición simétrica A' , como se muestra en el dibujo AIII. 2:



Dibujo AIII. 2 Disposición de la fuente y su imagen.

Entonces, para $z > 0$ el potencial en el punto P es:

$$\phi = 1 / (4\pi\sigma_1) (I/R_1 + I'/R_2) \quad z > 0 \quad (\text{AIII. 5})$$

con

$$R_1 = \sqrt{x^2 + y^2 + (z-z')^2} \quad R_2 = \sqrt{x^2 + y^2 + (z+z')^2}$$

Para $z < 0$, se debe satisfacer la ecuación de Laplace ec. (AIII. 2); entonces, el potencial equivalente al producido por una fuente I'' en la posición A es:

$$\phi = 1 / (4\pi\sigma_2) I''/R_2 \quad (\text{AIII. 6})$$

Para que se satisfagan las condiciones de frontera, es necesario que (ver Jackson (8) pag. 148):

$$I' = -I (\sigma_2 - \sigma_1) / (\sigma_2 + \sigma_1) \quad (\text{AIII. 7})$$

$$I'' = I 2\sigma_2 / (\sigma_2 + \sigma_1) \quad (\text{AIII. 8})$$

Cuando $\sigma_1 = 0$, se tiene que:

$$I' = I \quad I'' = 0 \quad (\text{AIII. 9})$$

De donde se sigue:

$$\phi = 0 \quad z < 0 \quad (\text{AIII. 10})$$

$$\phi = I / (4\pi\sigma) \left(1/R_1 + 1/R_2 \right) \quad z > 0 \quad (\text{AIII. 11})$$

Esta solución, en el espacio de las frecuencias toma la siguiente forma:

$$\hat{\phi} = I / (2\pi\sigma) \left(K_0 \left(\kappa \sqrt{x^2 + (z-z')^2} \right) + K_0 \left(\kappa \sqrt{x^2 + (z+z')^2} \right) \right) \quad z > 0 \quad (\text{AIII. 12})$$

BIBLIOGRAFIA CITADA

- 1) Orellana, F., 1982, " Prospección Geoelectrica en Corriente Continua ", Paraninfo, Madrid.
- 2) Koefoed, Otto, 1980, " Geosounding Principles I ", Elsevier/North Holland Inc., New York.
- 3) Patra, H. P. y Mallick, K., 1980, " Geosounding Principles 2 ", Elsevier/North Holland Inc., New York.
- 4) Coggon, J. H., 1971, " Induced Polarization Anomalies ", Tesis doctoral de la Universidad de California, Berkeley.
- 5) Coggon, J. H., 1971, " Electromagnetic and Electrical Modelling by the Finite Element Method ", Geophysics, v. 36.
- 6) George, Allan y W-H Liu, Joseph, 1981, " Computer Solution of Large Sparse Positive Definite Systems ", Prentice-Hall Inc., New Jersey.
- 7) Arfken, George, 1970, " Mathematical Methods for Physicists ", Academic Press, New York.
- 8) Jackson, J. D., 1975, " Classical Electrodynamics ", John Wiley & Sons, New York.
- 9) Kraus, John D. y Carver, Keith R., 1973, " Electromagnetics ", McGraw-Hill Kogakusha, Ltd., Tokyo.
- 10) Abramowitz, Milton y Stegun, Irene A., 1972, " Handbook of Mathematical Functions ", Dover Publications, Inc., New York.