



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTONOMA DE MEXICO
FACULTAD DE CIENCIAS

TECNICAS DE TEORIA DE GRUPOS EN
ESPECTROSCOPIA ATOMICA Y NUCLEAR

T E S I S
Que para obtener el Titulo de
F I S I C O
P r e s e n t a

Yolanda Martínez Suárez



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

INDICE.

Capítulo I.	
Introducción.....	1-7
Capítulo II.	
La base antisimétrica en el problema atómico.	
2.1.	
Sistema de N fermiones idénticos.....	8-9
2.2.	
Método de segunda cuantización.....	9-16
2.3.	
Cálculo de los estados antisimétricos en $U(3)$ y $O(4)$	16-27
2.4.	
Obtención de los coeficientes que relacionan las bases $U(3)$ y $O(4)$	27-34
Capítulo III.	
El Hamiltoniano atómico y sus elementos de matriz.	
3.1.	
Hamiltoniano de uno y dos cuerpos.....	35-46
3.2.	
Matriz del operador $\hat{Q}(4)$ en la base $U(3)$	46-50
Capítulo IV.	
La configuración nuclear $(s+p)^N$.	
4.1.	
La base antisimétrica.....	51-56
4.2.	
Interacciones nucleares.....	56-68

4.3.

Movimiento del centro de masa.....	69-75
Comentarios.....	76-77
Apéndice A.....	78-85
Referencias.....	86-87

CAPITULO I

Introducción.

El objetivo de este trabajo es ilustrar la aplicación de técnicas de análisis basadas en conceptos de teoría de grupos a problemas físicos de estructura atómica y nuclear. En ambos casos se trata de sistemas constituidos por fermiones idénticos (electrones en el caso atómico, nucleones en el caso nuclear), por lo que las funciones de onda de los estados cuánticos del sistema deben cumplir con el principio de exclusión de Pauli. Una consecuencia de éste es que en el sistema aparece un campo central efectivo en el cual se mueven los fermiones, en primera aproximación, independientemente, dando lugar a una estructura de capas. Una capa es un conjunto de estados de partícula individual que tienen en común los números cuánticos n, l . En esta estructura los estados de más baja energía del sistema corresponden a una distribución donde parte de estos fermiones llenan las capas más bajas y el resto de ellos ocupan las primeras capas abiertas; aquí nos limitaremos a las capas $l=0, 1$ (orbitales s y p). Debido a que la contribución de los fermiones que ocupan capas llenas se puede deducir por métodos conocidos (10), este tópico no será discutido en este trabajo.

La antisimetría de la función de onda se incorpora usando el método de segunda cuantización con operadores fermiónicos (23) que consiste en introducir operadores de creación a_k^+ y aniquilación a_k , que conectan estados de N partículas con estados de $N+1$ partículas. Un estado del sistema de N partículas se expresa como una combinación lineal de monomios

$$a_{k1}^+ a_{k2}^+ \dots a_{kN}^+ |0\rangle \quad \dots(1.1)$$

cada uno de los cuales corresponde a los llamados determinantes de Slater ; $|0\rangle$ representa el estado de vacío.

Como en la mayoría de las aplicaciones a física atómica y nuclear se está interesado en operadores que conectan estados de N partículas entre sí, entonces se definen operadores

$$a_k^+ a_k \quad \dots(1.2)$$

La teoría de grupos hace su aparición en este punto al observar que los operadores (1.2), para el caso de orbitales s y p, satisfacen reglas de conmutación de generadores (unitarios) de un grupo unitario de 8 dimensiones $U(8)$ para electrones en el caso atómico, y que los monomios (1.1) son base de la RI $[1^N]$ del mismo grupo. Pero ésta base no contiene los números cuánticos $L M_L M_S$ que caracterizan los estados físicos y para introducir éstos números se dan los pasos que a continuación se describen. Primero se reemplazan los índices k por el índice doble μ correspondiente a la parte orbital y de spin. Entonces los operadores (1.2) se contraen sucesivamente respecto a los índices s y μ dando lugar a los generadores

$$c_{\mu}^{\mu'}, c_s^{s'} \quad \begin{aligned} \mu &= n l m_l \\ s &= \sigma m_s \end{aligned} \quad \dots(1.3)$$

de los subgrupos $U(4)$ y $U(2)$ de $U(8)$. Estos generadores además conmutan entre sí, por lo cual generan el subgrupo producto directo $U(4) \times U(2) \subset U(8)$.

Los operadores (1.3) aparecen en el operador de interacción

de un cuerpo que actúe exclusivamente en el espacio de configuración o en el espacio de spin, respectivamente.

En el caso de los observables $L_x^2, L_z^2; S_x^2, S_z^2$ referentes al momento angular orbital total y al spin total, sus expresiones en segunda cuantización resultan ser operadores de Casimir de las cadenas de subgrupos $SO(3) \supset SO(2)$ y $SU_r(2) \supset SO_r(2)$ respectivamente. Esto indica que al introducir los números cuánticos L, S, M_L, M_S en la base de RI $[1^N]$ de $U(8)$ lo que estamos haciendo es clasificar según la cadena

$$U(2) \supset U(1) \times SU_r(2) \supset SO_r(2)$$

$U(8) \times$

...(1.4)

$$\mathcal{U}(4) \supset G \supset O(3) \supset O(2)$$

donde G puede ser $\mathcal{U}(3)$ u $O(4)$.

Consultando tablas (5) se puede entonces deducir los estados posibles clasificados respecto a éstas dos bases

$$\begin{array}{ll} |NS [h_1 h_2 h_3] L^r \rangle & \text{en } \mathcal{U}(3) \\ |NS(\begin{array}{cc} & \\ 1 & 2 \end{array}) L^r \rangle & \text{en } O(4) \end{array}$$

Ahora, como veremos en el Capítulo II los coeficientes de expansión de una base en términos de los estados de la otra valen uno, excepto en siete casos de multiplicidad dos. Estos coeficientes se necesitarán en el Capítulo III, y se calculan construyendo los estados en la base $O(4)$ introduciendo un grupo simplectico $Sp(8)$, el cual hace más sistemática la construcción de los estados, y obteniendo la matriz del operador de número del orbital s, \hat{N}_c , respecto a los estados en $O(4)$. Los eigenvectores

de éstas siete matrices dan los coeficientes buscados, ya que \hat{K}_c es diagonal en $\mathcal{U}(3)$.

El esquema alternativo mencionado en el párrafo anterior corresponde a la cadena (26)

$$\begin{array}{l}
 \text{SU}(2)_q \supset \text{SO}_q(2) \\
 \times \\
 \text{O}(4) \supset \text{O}(3) \supset \text{O}(2)
 \end{array}
 \quad \dots (1.4')$$

donde las RI del grupo $\text{Sp}(8)$ se caracterizan por el número cuántico v (ó número de antigüedad) y los estados se indican $|NvSL^{\pi}\rangle$. La forma explícita de los estados necesarios se presenta en el Capítulo II.

En el Capítulo III se obtiene el operador de interacción de dos cuerpos que, junto con el operador de interacción de un cuerpo permite obtener el Hamiltoniano atómico. Por la parte de dos cuerpos se hace un desarrollo multipolar de $V(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|)$ (3.9) y se introducen las integrales de Slater (3.10), para calcular el elemento de matriz referente al potencial de dos cuerpos. Definiendo los operadores tensoriales unidad (3.14); y los operadores de Casimir de $\mathcal{U}(3)$, ($\Gamma(3)$) (3.22) y de $\text{O}(4)$, ($\phi(4)$) (3.26) se obtiene finalmente el Hamiltoniano en términos de operadores de Casimir de grupos que aparecen en los dos esquemas de clasificación (1.4) y (1.4')

Como $\phi(4)$ no es diagonal en la base $\mathcal{U}(3)$, se usan los coeficientes de transformación (Tabla III) para modificar su matriz a la base $\mathcal{U}(3)$ mediante una transformación de semejanza y así tener completa $\|H\|$ en la base $\mathcal{U}(3)$.

En el Capítulo IV todo lo anterior se extiende a un sistema de nucleones (protones y neutrones). Si se considera la independencia de la carga para las fuerzas nucleares se debe introducir

el concepto de isospin(T), el cual es similar matemáticamente al spin usual. En el concepto de isospin todos los nucleones se consideran idénticos, por lo cual se usa el principio de exclusión de Pauli extendido y se escribe el estado de N nucleones como una superposición de estados asimétricos análogos a (1.1) usando operadores de creación.

En este sistema nuclear existen 16 posibilidades para el nucleón, por lo que, (similarmente al Cap. II)

$$a_p^+ a_{p'}$$

$$\rho = nlm \sigma \tau$$

son los generadores del grupo $U(16)$. Ahora, al separar la parte orbital y de spin-isospin se obtienen los grupos $\mathcal{U}(4)$ y $U(4)$, el primero con RI de la forma $[f_1 f_2 f_3 f_4]$ con $\sum_{s=1}^4 f_s = N$, y el segundo con RI conjugada de la anterior.

El grupo orbital $\mathcal{U}(4)$ se clasifica con la cadena $\mathcal{U}(3) \supset O(3) \supset O(2)$ (como en el Cap. II) y el grupo $U(4)$ con la cadena $SU_\sigma(2) \times SU_\tau(2) \supset SO_\sigma(2) \times SO_\tau(2)$. Por lo que la base adoptada queda representada por el esquema indicado en (1.5) junto a sus correspondientes números cuánticos

$$\begin{array}{l}
 [f^0] \quad \alpha \quad (S) \quad (T) \quad M_S \quad M_T \\
 U(4) \supset SU_\sigma(2) \times SU_\tau(2) \supset SO_\sigma(2) \times SO_\tau(2) \\
 U(16) \quad \times \quad \dots (1.5) \\
 \mathcal{U}(4) \supset \mathcal{U}(3) \supset O(3) \supset O(2) \\
 [f] \quad [h] \quad \beta \quad L \quad M
 \end{array}$$

Para la interacción entre nucleones consideramos una fuerza central con intercambio. Esta interacción consta en general de un potencial de Wigner o central ordinario, más el potencial de Bartlett, relacionado con el spin, más el potencial de Heisenberg que

involocra al isospin, y el potencial de Majorana que depende del intercambio de coordenadas.

Nuestro análisis se limitará a la parte de Wigner más Majorana, o sea que no considera la parte de spin e isospin, sino solo lo referente a la parte orbital. El motivo por el cual se impone ésta restricción es que solamente en éstas condiciones la interacción queda expresada en términos de operadores de Casimir de grupos que aparecen en (1.5).

La interacción de Wigner está dada por la expresión (3.33). Para la fuerza de Majorana, se usa el operador de interacción para dos cuerpos y el potencial (4.9), $V_M = U_{12} P_M^{12}$, y se hace un desarrollo semejante para el elemento de matriz que el que se hizo en el Cap. II para el caso de Wigner.

El operador de Casimir de $\mathcal{U}(4)$, (4.18), junto con los operadores de Casimir mencionados en el Cap. III, aparecen en la interacción de Majorana.

El operador $(\underline{A} \cdot \underline{A})$ que aparece en la interacción de Majorana, donde \underline{A} es el vector de Runge-Lenz (3.20), no es diagonal en $\mathcal{U}(3)$, pero al examinar el movimiento del centro de masa (C.M.) del núcleo, postulando que el potencial central promedio que actúa sobre cada nucleón es un potencial del tipo de oscilador armónico en una base $\mathcal{U}(4) \supset \mathcal{U}(3)$ con números cuánticos $[f][h]$; los elementos de matriz de $(\underline{A} \cdot \underline{A})$ son diagonales respecto a un subconjunto de la base constituido por ciertos estados que se llaman estados no espurios, entendiéndose con esto, estados con la propiedad

$$H_{CM} | [f][h]^\beta L M \rangle = \frac{3}{2} \hbar \omega | [f][h]^\beta L M \rangle$$

lo cual implica que el C.M. no está excitado y donde H_{CM} es el Hamiltoniano del C.M. del sistema.

Entonces como la interacción de Wigner está dada en términos de operadores de Casimir y con lo dicho arriba acerca de la interacción de Majorana, tenemos que la interacción de W+M es diagonal respecto al subconjunto de estados no espurios de la base $\mathcal{U}(4) \supset \mathcal{U}(3)$.

Al final de la tesis se presenta una sección con comentarios acerca de los temas analizados en ella.

CAPITULO II

La base antisimétrica en el problema atómico.

En éste capítulo se discutirá la construcción de un sistema de funciones antisimétricas que sirvan de base para expresar la función de onda (aproximada) de un sistema de N fermiones idénticos en orbitales s y p .

2.1 Sistema de N fermiones idénticos.

Un sistema de N fermiones idénticos es un sistema de N partículas idénticas con spin semientero. En el caso nuclear las partículas pueden ser protones ó neutrones y en el caso atómico serán electrones. En ambos casos se trata de partículas con spin $\frac{1}{2}$.

Las funciones de onda para fermiones deben cumplir con el principio de exclusión de Pauli, que dice que dos partículas idénticas (fermiones) no pueden ocupar el mismo estado cuántico individual.

Como se mencionó anteriormente, la idea es considerar eigenfunciones de electrones individuales como funciones base para expresar la función de onda de un sistema de N electrones. Para hacer ésto debemos efectuar una aproximación de campo central. En esta aproximación, cada electrón se visualiza como moviéndose en un potencial electrónico promedio producido por el núcleo y los restantes electrones del átomo. Se hace la suposición de que el potencial es esféricamente simétrico y ésto trae como consecuencia que las eigenfunciones para un solo electrón pueden ser factorizadas en una parte radial, caracterizada por los números cuánticos principal y azimutal n y ℓ , una parte angular tomada como un armónico esférico $Y_{\ell m_\ell}$ y una parte de spin χ_s .

La configuración $(n\ell)^N$ indica que hay N electrones con números cuánticos n y ℓ . De acuerdo al principio de exclusión de Pauli, N debe ser a lo más $4\ell+2$, que corresponde a las dos orientaciones del spin y a los $2\ell+1$ valores de m_ℓ .

Los valores de n y ℓ pueden variar de la forma

$$n=0,1,2,\dots \quad \text{y} \quad \ell=0,1,2,\dots$$

s p d ...

dando lugar a una estructura de capas.

Los estados de más baja energía del sistema corresponden a una distribución donde parte de los fermiones llenan las capas más bajas y el resto de ellos ocupan las primeras capas abiertas. Este trabajo se limitará a las capas $\ell=0$ y $\ell=1$ (i.e. a los orbitales s y p). La contribución al problema de los fermiones que ocupan las capas llenas se puede deducir por métodos más conocidos (10) y no será discutido en el presente trabajo.

2.2 Método de segunda cuantización.

La antisimetría de la función de onda se puede incorporar en el formalismo usando el método de segunda cuantización.

Para facilitar el análisis de sistemas con muchas partículas idénticas, es conveniente trabajar con funciones de onda definidas en el espacio de Fock (2). Los vectores de estado en el espacio de Fock están caracterizados por:

- i) Los posibles estados de partícula individual $|\alpha\rangle$, que cualquiera de las partículas puede ocupar y
- ii) el conjunto de números de ocupación para éstos estados.

El número de ocupación para un estado de partícula dado $|\alpha\rangle$ describe cuantas partículas ocupan, en un momento dado, ese esta -

do. Para fermiones, el Principio de exclusión de Pauli nos dice - que este número de ocupación puede ser 0 ó 1.

Los estados de partícula individual $|\alpha\rangle$ se seleccionan de tal modo que constituyan un conjunto completo de estados mutuamente ortogonales.

Es conveniente introducir en el espacio de Fock operadores - que conecten varios estados entre sí. Los operadores más simples de esta clase son los operadores de creación a_k^+ y los operadores de aniquilación a_k .

Dichos operadores están definidos como sigue:

$$a_\beta^+ |a_1, a_2, \dots, a_N\rangle = |\beta, a_1, a_2, \dots, a_N\rangle \quad \dots(2.1)$$

$$\text{si } \beta \neq a_1, a_2, \dots, a_N$$

$$= 0$$

$$\text{si } \beta = a_1, a_2, \dots, a_N$$

$$a_{a_1} |a_1, a_2, \dots, a_N\rangle = |a_2, \dots, a_N\rangle \quad \dots(2.2)$$

$$a_\beta |a_1, a_2, \dots, a_N\rangle = 0 \quad \dots(2.3)$$

$$\text{si } \beta \neq a_1, a_2, \dots, a_N$$

donde $|a_1, a_2, \dots, a_N\rangle$ es un estado de N partículas.

De (2.1) deducimos que

$$a_\alpha^+ |0\rangle = |\alpha\rangle \quad \dots(2.4)$$

la definición del estado vacío $|0\rangle$, se completa requiriendo que, de acuerdo con (2.3),

$$a_\alpha |0\rangle = 0 \quad \dots(2.5)$$

Como estamos manejando partículas idénticas (fermiones), la-

fase de un estado puede depender del orden en que los estados de partículas individuales son especificados, entonces el orden de los índices es importante. Queremos que los vectores de estado en el espacio de Fock estén en una correspondencia de uno a uno con los determinantes de Slater usuales. También tenemos que introducir cierta convención para determinar las fases de las funciones de onda. La forma de hacer ésto es arreglar las funciones de onda de partículas individuales $\phi_{k_i}(r)$ de tal manera que los índices de éstas cumplan con cierto orden, digamos $k_1 < k_2 < k_3 \dots$

Escribimos un determinante de Slater "standard" para partículas en los orbitales k, l, m, \dots de la forma

$$\begin{vmatrix} \phi_k(1) & \phi_l(1) & \phi_m(1) & \dots \\ \phi_k(2) & \phi_l(2) & \phi_m(2) & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix} = \phi_{k\ell m}(1, 2, \dots)$$

donde $k < l < m \dots$

$$\text{y } \phi_{k\ell m} \dots = -\phi_{\ell km} \dots \quad \dots (2.6)$$

Se adopta un procedimiento similar en el método de segunda-cuantización. Los estados $|k_1\rangle, |k_2\rangle, \dots$ son arreglados de acuerdo a un orden "standard" arbitrario $k_1 < k_2 < k_3 \dots$

Los estados de N partículas $|\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N\rangle$ son escritos en la forma "standard" si $k_{\alpha_1} < k_{\alpha_2} < \dots < k_{\alpha_N}$. Para asegurar la antisimetría, requerimos en analogía con (2.6)

$$|\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_N\rangle = -|\alpha_2, \alpha_1, \alpha_3, \dots, \alpha_N\rangle \quad \dots (2.6')$$

Podemos definir el producto escalar en el espacio de Fock como

$$\langle \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N | \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_M \rangle = \langle \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_M | \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N \rangle = 0 \quad \dots(2.7)$$

si $N \neq M$, ó si el conjunto $(\alpha_1, \dots, \alpha_N) \neq (\beta_1, \dots, \beta_M)$ lo cual nos da los elementos no diagonales y

$$\langle \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N | \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N \rangle = 1$$

ó de manera más general

$$\langle \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N | \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_N \rangle = (-1)^{P_\alpha + P_\beta} \quad \dots(2.7')$$

que corresponde a los elementos diagonales. Donde el conjunto $\{\alpha\}$ es una permutación del conjunto $\{\beta\}$. P_α es el número de permutaciones que se requiere para traer al conjunto $\{\alpha\}$ al orden standard, y similarmente para P_β .

Basados en (2.1) y (2.7'), vemos que, los operadores de creación y aniquilación satisfacen

$$a_\beta^+ a_\alpha^+ = -a_\alpha^+ a_\beta^+ \quad \dots(2.8)$$

$$a_\beta a_\alpha = -a_\alpha a_\beta \quad \dots(2.8')$$

o sea que dos diferentes operadores de creación ó dos de aniquilación siempre anticonmutan entre sí.

De (2.6) vemos que si el conjunto $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N)$ contiene dos etiquetas idénticas, digamos si $\alpha_1 = \alpha_2$, entonces $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N) = 0$.

Ahora, volviendo a (2.1) y con lo que acabamos de decir arriba reescribimos (2.1) como

$$a_\beta^+ | \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N \rangle = \begin{cases} | \beta, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N \rangle & \text{si } \beta \neq \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N \\ 0 & \text{de otro modo} \end{cases} \quad \dots(2.9)$$

Si suponemos que $\beta \neq \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$ y considerando (2.2) y (2.9), obtenemos

$$a_\beta a_\beta^+ |\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N\rangle = |\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N\rangle$$

mientras que de (2.5) se tiene que

$$a_\beta^+ a_\beta |\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N\rangle = 0$$

entonces

$$(a_\beta a_\beta^+ + a_\beta^+ a_\beta) |\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N\rangle = |\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N\rangle \quad \dots(2.10)$$

si $\beta \neq \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$

Ahora que si consideramos que β sea igual a alguna de las λ 's, digamos $\beta = \lambda_2$, entonces de (2.9) se obtiene

$$a_\beta a_\beta^+ |\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N\rangle = 0 \quad \text{si } \beta = \lambda_2$$

y de (2.2) y (2.9) si $\beta = \lambda_2$

$$a_\beta^+ a_\beta |\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N\rangle = |\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N\rangle$$

con lo cual vemos que también se cumple (2.10). Podemos ver entonces que (2.10) es válido para cualquier valor de β y concluimos que

$$a_\beta a_\beta^+ + a_\beta^+ a_\beta = 1 \quad \dots(2.11)$$

donde 1 es el operador unidad.

Similarmente, se puede demostrar que para cualquier β y γ , tal que, $\beta \neq \gamma$

$$a_{\beta}^{+} a_{\gamma} + a_{\gamma} a_{\beta}^{+} = 0 \quad \dots(2.12)$$

Podemos reescribir (2.8), (2.8'), (2.11) y (2.12) en la forma

$$\begin{aligned} \{a_{\alpha}^{+}, a_{\beta}^{+}\} &= \{a_{\alpha}, a_{\beta}\} = 0 \\ \{a_{\alpha}^{+}, a_{\beta}\} &= 1 \delta_{\alpha\beta} \end{aligned} \quad \dots(2.13)$$

donde hemos introducido la notación de anticonmutación

$$\{A, B\} \equiv AB + BA$$

Vemos que de (2.1), (2.2), (2.3), (2.9) y (2.7) podemos concluir que a_{α}^{+} es el conjugado hermitiano de a_{α} , tal que

$$(a_{\alpha})^{+} \equiv a_{\alpha}^{+}$$

Podemos construir ahora el estado de N partículas en el espacio de Fock correspondiente a $\phi(\alpha_1, \dots, \alpha_N)$ como:

$$|\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N\rangle = a_{\alpha_1}^{+} a_{\alpha_2}^{+} \dots a_{\alpha_N}^{+} |0\rangle \quad \dots(2.14)$$

Los operadores de creación y aniquilación conectan estados de N-partículas con estados de N+1 partículas.

En la mayoría de las aplicaciones a física atómica y nuclear se está interesado en operadores que conectan estados de N partículas con otros estados del mismo número de partículas, tales operadores pueden ser construídos con la ayuda de operadores de creación y aniquilación.

En particular tenemos el operador

$$\hat{N}_{\beta} = a_{\beta}^{+} a_{\beta} \quad \dots(2.15)$$

tal que,

$$a_{\beta}^{\dagger} a_{\beta} | \alpha_1, \dots, \alpha_N \rangle = \begin{cases} | \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N \rangle & \text{si } \beta \in \{ \alpha_i \} \\ 0 & \text{si } \beta \notin \{ \alpha_i \} \end{cases} \quad \dots(2.16)$$

entonces

$$\langle \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N | \sum_{k=1}^{\infty} a_k^{\dagger} a_k | \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N \rangle = N \quad \dots(2.17)$$

donde la suma se extiende sobre todos los eigenestados $| \alpha_k \rangle$.

El operador

$$\hat{N} = \sum_k a_k^{\dagger} a_k = \sum_k \hat{N}_k \quad \dots(2.18)$$

es diagonal en $| \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N \rangle$ y a causa de (2.17) se le conoce como el operador de número. Los eigenvalores de N son los enteros $0, 1, \dots, N$, donde cada valor, excepto el cero, es infinitamente de generado.

Los eigenvalores de \hat{N}_α son 0 y 1 donde $\hat{N}_\alpha = a_\alpha^{\dagger} a_\alpha$. Esto refleja el requerimiento de que los operadores a_α^{\dagger} y a_α estén conectados con la creación y aniquilación de fermiones, el número de tales partículas en cualquier estado puede ser 0 ó 1.

Para obtener la conexión entre el formalismo de operaciones en el espacio de Fock con problemas físicos, definimos el operador de un cuerpo en este espacio:

$$\hat{\Omega} = \sum_{k, k'} \omega_{kk'} a_k^{\dagger} a_{k'} \quad \dots(2.19)$$

donde la suma es sobre todos los estados k y, los $\omega_{kk'}$ son coeficientes numéricos

$$\omega_{kk'} = \langle \phi(k) | \hat{\Omega} | \phi(k') \rangle$$

El operador (2.19) es equivalente al operador de un cuerpo en el espacio de configuración (23)

$$\hat{\Omega} = \sum_{k=1}^N \hat{a}_k$$

y es independiente del número de partículas en el sistema. El hecho de que corresponde al operador de un cuerpo se refleja en la presencia de un operador de creación y otro de aniquilación en cada término.

2.3 Cálculo de los estados antisimétricos en $\mathcal{U}(3)$ y $O(4)$.

Tenemos ahora un conjunto de monomios independientes de grado N que corresponden a los estados de N partículas

$$a_{1}^{+} a_{2}^{+} \dots a_{N}^{+} | 0 \rangle$$

Esta es una base posible que podemos adoptar, pero no contiene los números cuánticos L, S, M_L, M_S que caracterizan a los estados físicos. Estos índices se pueden introducir a través de una serie de pasos:

Se reemplazan los índices k y λ por un doble índice μs , donde μ tiene que ver con la parte de espacio de configuración y s con la parte de spin del estado, i.e.,

$$\mu \rightarrow \nu l m_l \qquad s \rightarrow \sigma m_s$$

El índice s toma dos valores: $1/2, 1/2$, $1/2, -1/2$ y en nuestro problema el par $l m_l$ toma cuatro valores: $11, 10, 00, 1-1$; por lo tanto el par μs puede tomar 8 valores.

Tenemos entonces 64 operadores $a_{\mu s}^{+} a^{\mu s}$, que se identifican-

como generadores del grupo $U(8)$ debido a que satisfacen las reglas de conmutación (3)

$$[C_{\rho}^{\rho'}, C_{\rho''}^{\rho'''}] = C_{\rho}^{\rho'''} \delta_{\rho''}^{\rho'} - C_{\rho''}^{\rho'} \delta_{\rho}^{\rho'''} \quad \dots(2.20)$$

con

$$C_{\rho}^{\rho'} = a_{\rho}^+ a^{\rho'} = a_{\mu s}^+ a^{\mu' s'}$$

las cuales son características de los grupos unitarios .

Si contraemos respecto al índice s , obtenemos los operadores

$$b_{\mu}^{\mu'} = \sum_s a_{\mu s}^+ a^{\mu' s} \quad \dots(2.21)$$

y si contraemos respecto al índice μ , obtenemos

$$c_s^{s'} = \sum_{\mu} a_{\mu s}^+ a^{\mu s'} \quad \dots(2.22)$$

que son los generadores de los grupos $U(4)$ y $U(2)$ respectivamente. Estos generadores satisfacen las reglas de conmutación:

$$[b_{\mu 1}^{\mu 2}, b_{\mu 1'}^{\mu 2'}] = \delta_{\mu 1'}^{\mu 2} b_{\mu 1}^{\mu 2'} - \delta_{\mu 1}^{\mu 2'} b_{\mu 1'}^{\mu 2}$$

$$[c_{s 1}^{s 2}, c_{s 1'}^{s 2'}] = \delta_{s 1'}^{s 2} c_{s 1}^{s 2'} - \delta_{s 1}^{s 2'} c_{s 1'}^{s 2}$$

y además conmutan entre sí, i.e.,

$$[b_{\mu}^{\mu'}, c_s^{s'}] = 0$$

por lo que los generadores (2.21) y (2.22) generan el subgrupo - producto directo $U(4) \times U(2)$ en la cadena $U(8) \supset U(4) \times U(2)$.

Primeramente obtendremos el operador de un cuerpo independiente del spin.

De (2.19)

$$\begin{aligned} \hat{L} &= \sum_{kk'} \langle k | \omega | k' \rangle a_k^+ a^{k'} \\ &= \sum_{\mu s, \mu' s'} \langle \mu s | \omega | \mu' s' \rangle a_{\mu s}^+ a^{\mu' s'} \\ &= \sum_{\mu \mu'} \langle \mu | \omega | \mu' \rangle \sum_s a_{\mu s}^+ a^{\mu' s} \end{aligned}$$

y usando (2.21)

$$\hat{L} = \sum_{\mu \mu'} \langle \mu | \omega | \mu' \rangle \hat{C}_{\mu}^{\mu'} \quad \dots (2.23)$$

Por ejemplo, tenemos que para el espacio de configuración, las componentes $L_q, q=1, 0, -1$, del momento angular orbital total son:

$$L_1 = \frac{-1}{\sqrt{2}} L_+ \quad , \quad L_0 = L_z \quad , \quad L_{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} L_-$$

que son observables de un cuerpo que pueden ser puestos en la forma (2.23). Escribiendo explícitamente μ como $v \ell m$, obtenemos el correspondiente operador

$$\begin{aligned} \hat{L}_q &= \sum_{\mu \mu'} \langle \mu | L_q | \mu' \rangle \hat{C}_{\mu}^{\mu'} \\ &= \sum_{v \ell m, v' \ell' m'} \langle v \ell m | L_q | v' \ell' m' \rangle \hat{C}_{v \ell m}^{v' \ell' m'} \quad \dots (2.24) \end{aligned}$$

y usando el Teorema de Wigner-Eckert (4) para un tensor, obtenemos

$$\langle v \ell m | L_q | v' \ell' m' \rangle = \delta_{v v'} \delta_{\ell \ell'} \sqrt{\ell(\ell+1)} \langle \ell m | L_q | \ell m \rangle$$

sustituyendo en (2.24) y simplificando

$$\hat{L}_q = \sum_{v \ell} \sum_{m m'} \left\{ \sqrt{\ell(\ell+1)} \langle \ell m | L_q | \ell m' \rangle \right\} \hat{C}_{v \ell m}^{v \ell m'}$$

Similarmenete para el operador de spin, se tiene

$$S_{+1} = \frac{-1}{\sqrt{2}} S_{+} \quad \rightarrow \quad S_{+} = -\sqrt{2} S_{+1}$$

$$S_0 = S_z \quad \dots(2.25)$$

$$S_{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} S_{-} \quad \rightarrow \quad S_{-} = \sqrt{2} S_{-1}$$

haciendo un procedimiento análogo al anterior obtenemos,

$$S_q = \sum_{\sigma} m_s m_{s'} \left\{ \sqrt{\sigma(\sigma+1)} \langle \sigma m_s | \chi^1 m_{s'}, q \rangle \begin{pmatrix} \sigma & m_s \\ \sigma & m_{s'} \end{pmatrix} \right.$$

además usaremos la convención

$$\begin{matrix} \sigma & m_s \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{matrix} \quad \rightarrow \quad 1$$

$$\begin{matrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{matrix} \quad \rightarrow \quad 2$$

... (2.26)

Efectuando todos los cálculos y dando valores a $q=1,0,-1$, se deduce que

para \hat{L}_q

$$\hat{L}_{+1} = -\epsilon_{1-1}^{1-1} - \epsilon_{10}^{10}$$

$$\hat{L}_0 = -\epsilon_{1-1}^{1-1} + \epsilon_{11}^{11}$$

$$\hat{L}_{-1} = \epsilon_{1-1}^{10} + \epsilon_{10}^{11}$$

y para \hat{S}_0

$$\hat{S}_{+1} = \frac{-1}{\sqrt{2}} c_1^2$$

$$\hat{S}_0 = \frac{1}{2} (c_1^1 - c_2^2)$$

$$\hat{S}_{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} c_2^1$$

Ahora, usando (2.18), el operador de número se puede escribir

$$\hat{N} = \sum_k a_k^+ a^k = \sum_{\mu s} a_{\mu s}^+ a^{\mu s}$$

y por (2.21)

$$\hat{N} = \sum_{\mu} G_{\mu}^{\mu} = G_{00}^{00} + \sum_{m=1}^{-1} G_{lm}^{lm} = \hat{N}_0 + \hat{N}_1$$

ya que nos estamos limitando a $l = 0, 1$.

También, usando (2.22)

$$\hat{N} = \sum_s c_s^s = c_1^1 + c_2^2$$

ya que s toma solo dos valores (2.26).

Para el cuadrado del momento angular total

$$\hat{L}^2 = \sum_{q=1}^{-1} (-)^q \hat{L}_q \hat{L}_{-q}$$

y análogamente para el cuadrado del spin total

$$\hat{S}^2 = \sum_{q=1}^{-1} (-)^q \hat{S}_q \hat{S}_{-q}$$

donde \hat{L}^2, \hat{L}_0 son operadores de Casimir (3) de los grupos $O(3) \supset O(2)$ que están contenidos en $\mathcal{U}(4)$; y \hat{S}^2, \hat{S}_0 son operadores de Casimir

de los grupos $SU(2) \supset SO(2)$ contenidos en $U(2)$.

Al introducir los números cuánticos l, M_L, S, M_S estamos clasificando según la cadena

$$\begin{aligned} U(2) &\supset U(1) \times SU(2) \supset SO(2) \\ W(8) &\supset X \\ U(4) &\supset G \supset O(3) \supset O(2) \end{aligned}$$

donde G es un grupo adicional que se inserta para completar la clasificación. En este problema hay dos opciones para G :

i) $G = U(3)$

con generadores $\begin{matrix} \mathcal{G} & l m' \\ & l m \end{matrix}$

ii) $G = O(4)$

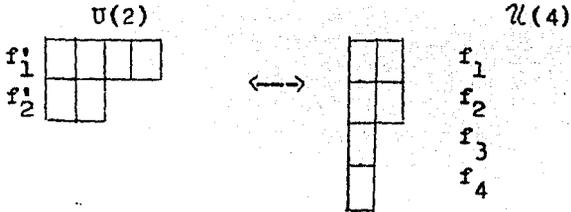
con generadores $\mathcal{A}_{l m}^{l' m'} = \mathcal{G}_{l m}^{l' m'} - (-)^{l+l'+m+m'} \mathcal{G}_{l' -m'}^{l -m}$

Los números cuánticos que caracterizan a las RI de los grupos anteriores se escriben ahora, junto a cada grupo

$$\begin{array}{l} [f_1 f_2] \quad N \quad (S) \quad (M_S) \\ U(2) \supset U(1) \times SU(2) \supset U(1) \times SO(2) \\ W(8) \supset X \quad [h_1 h_2 h_3] \quad \dots(2.27) \\ [1^N] \quad U(4) \supset \left\{ \begin{array}{l} U(3) \\ O(4) \end{array} \right\} \supset O(3) \supset O(2) \\ [f_1 f_2 f_3 f_4] (\lambda_1 \lambda_2) \quad (L) \quad (M_L) \end{array}$$

Las RI de un grupo unitario $U(k)$ se especifican por medio de una partición de un entero positivo en k partes. Es un resultado conocido en la espectroscopía atómica(3) que las particiones asociadas a los grupos $U(4)$ y $U(2)$ de (2.27), no son independientes sino que los correspondientes diagramas (tableaux) de Young son "complementarios" dentro de $[1^N]$ y se obtienen uno del otro por reflexión a lo largo de la diagonal principal.

Por ejemplo,



Además, usando el hecho de que para $U(2)$, $j=\frac{1}{2}$, es semientero (ya que en general $U(2j+1)$) entonces, el momento angular resultante es (6)

$$S = \frac{1}{2} (f'_1 - f'_2)$$

y por otro lado como el diagrama contiene a lo más dos renglones

$$f'_1 + f'_2 = N$$

donde N es el número de partículas. Entonces, restando y sumando - ambas ecuaciones, obtenemos

$$f'_1 = \frac{N}{2} + S$$

...(2.28)

$$f'_2 = \frac{N}{2} - S$$

en la que los índices f'_1 y f'_2 quedan unívocamente definidos por el número de electrones y el spin total.

Las RI $[h_1 h_2 h_3]$ de $U(3)$ contenidas en una RI $[f_1 f_2 f_3 f_4]$ de $U(4)$ se deducen por las desigualdades de Weyl (5):

$$f_1 \geq h_1 \geq f_2 \geq h_2 \geq f_3 \geq h_3 \geq f_4$$

Y las RI de $O(3)$ contenidas en una RI (λ_1, λ_2) de $O(4)$ se deducen por consiguiente (5), de

$$\lambda_1 \geq L \geq |\lambda_2|$$

Para la reducción de RI de $O(4) \subset U(4)$ y $O(3) \subset U(3)$ existen también fórmulas analíticas, aunque es más sencillo consultar tablas al respecto, por ejm., en las Refs. (6) y (7).

Se tiene entonces toda la información necesaria para averiguar qué estados antisimétricos clasificados de acuerdo con la cadena (2.27) ocurren en nuestro problema. A continuación aparece una lista de éstos estados en dos columnas; la primera columna -- contiene estados $|N S [h_1 h_2 h_3] L M_L M_S\rangle$ clasificados por $U(3)$ y la segunda columna los estados $|N S (\lambda_1 \lambda_2) L M_L M_S\rangle$ clasificados por $O(4)$.

Tabla I

$U(3)$	$O(4)$
$N = 1$	
$ N S [h_1 h_2 h_3] L^{\pi}\rangle$	$ N S (\lambda_1 \lambda_2) L^{\tau}\rangle$
$ 1 \frac{1}{2} [1 0 0] 1^{-1}\rangle$	$ 1 \frac{1}{2} (1 0) 1^{-1}\rangle$
$ 1 \frac{1}{2} [0 0 0] 0^{+}\rangle$	$ 1 \frac{1}{2} (1 0) 0^{+}\rangle$

$$N = 2$$

$$\begin{array}{l}
 |2\ 1\ [1\ 0\ 0]\ 1^+\rangle \\
 |2\ 1\ [1\ 0\ 0]\ 1^-\rangle \\
 |2\ 0\ [2\ 0\ 0]\ 2^+\rangle \\
 |2\ 0\ [1\ 0\ 0]\ 1^-\rangle \\
 |2\ 0\ [2\ 0\ 0]\ 0^+\rangle \\
 |2\ 0\ [0\ 0\ 0]\ 0^+\rangle
 \end{array}
 \quad * \quad
 \begin{array}{l}
 |2\ 1\ (1,1)_+ 1^+\rangle \\
 |2\ 1\ (1,1)_- 1^-\rangle \\
 |2\ 0\ (2\ 0)\ 2^+\rangle \\
 |2\ 0\ (2\ 0)\ 1^-\rangle \\
 |2\ 0\ (2\ 0)\ 0^+\rangle \\
 |2\ 0\ (0\ 0)\ 0^+\rangle
 \end{array}$$

$$N = 3$$

$$\begin{array}{l}
 |3\ \frac{3}{2}\ [1\ 1\ 1]\ 0^-\rangle \\
 |3\ \frac{3}{2}\ [1\ 1\ 0]\ 1^+\rangle \\
 |3\ \frac{1}{2}\ [2\ 1\ 0]\ 2^-\rangle \\
 |3\ \frac{1}{2}\ [1\ 1\ 0]\ 1^+\rangle \\
 |3\ \frac{1}{2}\ [2\ 0\ 0]\ 2^+\rangle \\
 |3\ \frac{1}{2}\ [2\ 0\ 0]\ 0^+\rangle \\
 |3\ \frac{1}{2}\ [2\ 1\ 0]\ 1^-\rangle \\
 |3\ \frac{1}{2}\ [1\ 0\ 0]\ 1^-\rangle
 \end{array}
 \quad * \quad
 \begin{array}{l}
 |3\ \frac{3}{2}\ (1\ 0)\ 0^-\rangle \\
 |3\ \frac{3}{2}\ (1\ 0)\ 1^+\rangle \\
 |3\ \frac{1}{2}\ (2,1)_- 2^-\rangle \\
 |3\ \frac{1}{2}\ (2,1)_+ 1^+\rangle \\
 |3\ \frac{1}{2}\ (2,1)_+ 2^+\rangle \\
 |3\ \frac{1}{2}\ (1\ 0)\ 0^+\rangle \\
 |3\ \frac{1}{2}\ (1\ 0)\ 1^-\rangle \\
 |3\ \frac{1}{2}\ (2,1)_- 1^-\rangle
 \end{array}$$

$$N = 4$$

$ 4\ 2\ [1\ 1\ 1]\ 0^-\rangle$		$ 4\ 2\ (0\ 0)\ 0^+\rangle$	
$ 4\ 1\ [1\ 1\ 1]\ 0^-\rangle$		$ 4\ 1\ (2\ 0)\ 0^-\rangle$	
$ 4\ 1\ [2\ 1\ 0]\ 2^-\rangle$		$ 4\ 1\ (2\ 0)\ 2^-\rangle$	
$ 4\ 1\ [2\ 1\ 0]\ 1^-\rangle$		$ 4\ 1\ (1,1)\ 1^-\rangle$	
$\left. \begin{array}{l} 4\ 1\ [2\ 1\ 1]\ 1^+\rangle \\ 4\ 1\ [1\ 1\ 0]\ 1^+\rangle \end{array} \right\}$	*	$\left\{ \begin{array}{l} 4\ 1\ (1,1)\ 1^+\rangle \\ 4\ 1\ (2\ 0)\ 1^+\rangle \end{array} \right.$	
$\left. \begin{array}{l} 4\ 0\ [2\ 2\ 0]\ 2^+\rangle \\ 4\ 0\ [2\ 0\ 0]\ 2^+\rangle \end{array} \right\}$	*	$\left\{ \begin{array}{l} 4\ 0\ (2,2)\ 2^+\rangle \\ 4\ 0\ (2\ 0)\ 2^+\rangle \end{array} \right.$	
$ 4\ 0\ [2\ 1\ 0]\ 2^-\rangle$		$ 4\ 0\ (2,2)\ 2^-\rangle$	
$ 4\ 0\ [2\ 1\ 0]\ 1^-\rangle$		$ 4\ 0\ (2\ 0)\ 1^-\rangle$	
$\left. \begin{array}{l} 4\ 0\ [2\ 2\ 0]\ 0^+\rangle \\ 4\ 0\ [2\ 0\ 0]\ 0^+\rangle \end{array} \right\}$	*	$\left\{ \begin{array}{l} 4\ 0\ (0\ 0)\ 0^+\rangle \\ 4\ 0\ (2\ 0)\ 0^+\rangle \end{array} \right.$	

$N = 5$

$$|5 \frac{3}{2} [2 \ 1 \ 1] \ 1^+\rangle$$

$$|5 \frac{3}{2} [1 \ 1 \ 1] \ 0^-\rangle$$

$$|5 \frac{1}{2} [2 \ 1 \ 0] \ 2^-\rangle$$

$$|5 \frac{1}{2} [2 \ 2 \ 0] \ 2^+\rangle$$

$$|5 \frac{1}{2} [2 \ 2 \ 0] \ 0^+\rangle$$

$$|5 \frac{1}{2} [2 \ 1 \ 1] \ 1^+\rangle$$

$$|5 \frac{1}{2} [2 \ 2 \ 1] \ 1^-\rangle$$

$$|5 \frac{1}{2} [2 \ 1 \ 0] \ 1^-\rangle$$

$$|5 \frac{3}{2} (1 \ 0) \ 1^+\rangle$$

$$|5 \frac{3}{2} (1 \ 0) \ 0^-\rangle$$

$$|5 \frac{1}{2} (2,1)_- \ 2^-\rangle$$

$$|5 \frac{1}{2} (2,1)_+ \ 2^+\rangle$$

$$|5 \frac{1}{2} (1 \ 0) \ 0^+\rangle$$

$$|5 \frac{1}{2} (2,1)_+ \ 1^+\rangle$$

$$\left\{ |5 \frac{1}{2} (2,1)_- \ 1^-\rangle \right.$$

$$\left. |5 \frac{1}{2} (1 \ 0) \ 1^-\rangle \right\}$$

*

$N = 6$

$$|6 \ 1 [2 \ 2 \ 1] \ 1^-\rangle$$

$$|6 \ 1 [2 \ 1 \ 1] \ 1^+\rangle$$

$$|6 \ 0 [2 \ 2 \ 0] \ 2^+\rangle$$

$$|6 \ 0 [2 \ 2 \ 1] \ 1^-\rangle$$

$$|6 \ 0 [2 \ 2 \ 2] \ 0^+\rangle$$

$$|6 \ 0 [2 \ 2 \ 0] \ 0^+\rangle$$

$$|6 \ 1 (1,1)_- \ 1^-\rangle$$

$$|6 \ 1 (1,1)_+ \ 1^+\rangle$$

$$|6 \ 0 (2 \ 0) \ 2^+\rangle$$

$$|6 \ 0 (2 \ 0) \ 1^-\rangle$$

$$\left\{ |6 \ 0 (2 \ 0) \ 0^+\rangle \right.$$

$$\left. |6 \ 0 (0 \ 0) \ 0^+\rangle \right\}$$

*

$$N = 7$$

$$|7 \frac{1}{2} [2 2 2] 0^+\rangle$$

$$|7 \frac{1}{2} (1 0) 0^+\rangle$$

$$|7 \frac{1}{2} [2 2 1] 1^-\rangle$$

$$|7 \frac{1}{2} (1 0) 1^-\rangle$$

$$N = 8$$

$$|8 0 [2 2 2] 0^+\rangle$$

$$|8 0 (0 0) 0^+\rangle$$

El símbolo π es el número cuántico de paridad y está dado por la paridad de la suma de las h 's.

En la segunda columna la notación de subíndices $(\lambda_1 \lambda_2)_{\pi}$ significa que se trata de una combinación lineal de las RI's $(\lambda_1 \lambda_2)$ y (λ_1, λ_2) , teniendo π definida.

2.4 Obtención de coeficientes que relacionan las bases $\mathcal{U}(3)$ y $\mathcal{O}(4)$.

En el Capítulo III, se utilizan los coeficientes para la expansión de estados de una base en términos de los estados de la otra base. Estos coeficientes valen 1, excepto en siete casos en que hay en ambas bases pares de estados $|N S \rightarrow L\rangle$ con multiplicidad 2. Estos pares están indicados en la lista anterior por el símbolo (*).

Para calcular los coeficientes de estos siete casos, se necesita construir los estados de la base $\mathcal{O}(4)$ y la matriz del operador $\hat{b}_{00}^{00} \equiv \hat{N}_0$ respecto a ellos. Los eigenvectores de estas siete matrices dan los coeficientes buscados, ya que \hat{N}_0 es diagonal en la base $\mathcal{U}(3)$.

Para la construcción de los estados, se utilizará la cadena (3). (26).

por lo que vemos que son los mismos grupos $SU(2)$ y $O(4)$ considerados anteriormente. Es obvio que $[S_{\sigma}^{\rho}, \Lambda_{\rho m}^{\prime m}] = 0$ y además los operadores de Casimir de estos dos grupos y de $Sp(8)$ están relacionados entre sí, de modo que $SU(2)$ y $O(4)$ son complementarios dentro de la RI $[1^v]$ de $Sp(8)$. Esto significa que los índices de RI (λ_1, λ_2) de $O(4)$ quedan determinados por v y s .

Los estados antisimétricos clasificados por la cadena (2.29) deben ser idénticos a los clasificados por

$$\begin{aligned} & SU(2) \\ |U(8) \supset & \quad X \\ & U(4) \supset O(4) \supset O(3) \end{aligned}$$

ya que en ambos casos los grupos $U(8), SU(2), O(4)$ y $O(3)$ son los mismos y las RI de estos grupos definen unívocamente a los estados. La ventaja de utilizar el esquema (2.29), es que al introducir el grupo simpléctico $Sp(8)$ aparece el número cuántico v (que es llamado de antigüedad) y entonces tenemos para los estados — una estructura del tipo

$$|N \ v \ S \ L^{\pi}\rangle = (\underline{a}^+ : \underline{a}^+) \frac{N-v}{2} P_v^{SL} (a^+) |0\rangle, \text{ (para } N \leq 4)$$

donde el primer factor es el producto escalar simpléctico

$$(\underline{a}^+ : \underline{a}^+) = \sum_{\ell m s} (-)^{\ell - m + \frac{1}{2} - s} a_{\ell m s}^+ a_{\ell - m - s}^+$$

y $P_v^{SL} (a^+) |0\rangle$ es un estado de v partículas con números cuánticos $S \ L$.

El valor de v es (8):

$$v = \min(n, 8-N), \min(n, 8-N)-2, \dots, 1 \text{ ó } 0$$

dependiendo de si N es impar (1) ó si es par (0).

Los casos de $N > 4$ son iguales a los de $8-N$ con un factor adicional $(\underline{a}^+ : \underline{a}^+)^{N-4}$.

De los pares de estados requeridos, aquél con menor valor de v es de máximo peso en $O(4)$ y es fácil de construir; el correspondiente estado asociado con valor mayor de v se deduce por ortogonalidad con el anterior. De esta manera se encuentran:

Tabla II

$$|N \ v \ S \ L^r\rangle$$

$$|2 \ 0 \ 0 \ 0^+\rangle = \frac{1}{4} (\underline{a}^+ : \underline{a}^+) |0\rangle$$

$$|2 \ 2 \ 0 \ 0^+\rangle = \frac{1}{2\sqrt{3}} (-a_{11+}^+ a_{1-1-}^+ + a_{10+}^+ a_{10-}^+ - a_{1-1+}^+ a_{11-}^+ + 2a_{00+}^+ a_{00-}^+) |0\rangle$$

$$|3 \ 1 \ \frac{1}{2} \ 1^-\rangle = \frac{1}{2\sqrt{3}} a_{11+}^+ (\underline{a}^+ : \underline{a}^+) |0\rangle$$

$$|3 \ 3 \ \frac{1}{2} \ 1^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}} a_{11+}^+ (a_{10+}^+ a_{10-}^+ - a_{1-1+}^+ a_{11-}^+ + 2a_{00+}^+ a_{00-}^+) |0\rangle$$

$$|4 \ 0 \ 0 \ 0^+\rangle = \frac{1}{8\sqrt{6}} (\underline{a}^+ : \underline{a}^+)^2 |0\rangle$$

$$|4 \ 2 \ 0 \ 0^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}} (a_{11+}^+ a_{1-1-}^+ a_{10+}^+ a_{10-}^+ - a_{11+}^+ a_{1-1-}^+ a_{1-1+}^+ a_{11-}^+ + a_{11+}^+ a_{1-1-}^+ a_{00+}^+ a_{00-}^+ + a_{10+}^+ a_{10-}^+ a_{1-1+}^+ a_{11-}^+ - a_{10+}^+ a_{10-}^+ a_{00+}^+ a_{00-}^+ + a_{1-1+}^+ a_{11-}^+ a_{00+}^+ a_{00-}^+) |0\rangle$$

$$|4 \ 2 \ 0 \ 2^+\rangle = \frac{1}{2\sqrt{2}} a_{11+}^+ a_{11-}^+ (\underline{a}^+ : \underline{a}^+) |0\rangle$$

$$|4 \ 4 \ 0 \ 2^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} a_{11+}^+ a_{11-}^+ (a_{10+}^+ a_{10-}^+ + a_{00+}^+ a_{00-}^+) |0\rangle$$

$$|4 \ 2 \ 1 \ 1^+\rangle = \frac{1}{2\sqrt{2}} a_{11+}^+ a_{10+}^+ (\underline{a}^+ : \underline{a}^+) |0\rangle$$

$$|4 \ 4 \ 1 \ 1^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} a_{11+}^+ a_{10+}^+ (-a_{1-1+}^+ a_{11-}^+ + a_{00+}^+ a_{00-}^+) |0\rangle$$

$$|5 \ 1 \ \frac{1}{2} \ 1^-\rangle = \frac{1}{4} a_{11+}^+ (\underline{a}^+ : \underline{a}^+)^2 |0\rangle$$

$$|5 \ 3 \ \frac{1}{2} \ 1^-\rangle = \frac{1}{2\sqrt{2}} a_{11+}^+ (a_{10+}^+ a_{10-}^+ a_{1-1+}^+ a_{11-}^+ - a_{00+}^+ a_{00-}^+ a_{11-}^+ a_{1-1+}^+ - a_{00+}^+ a_{00-}^+ a_{10+}^+ a_{10-}^+) |0\rangle$$

$$|6 \ 0 \ 0 \ 0^+\rangle = \frac{1}{24} (\underline{a}^+ : \underline{a}^+)^3 |0\rangle$$

$$|6 \ 2 \ 0 \ 0^+\rangle = \frac{1}{8} (3a_{11+}^+ a_{1-1-}^+ a_{11-}^+ a_{1-1+}^+ a_{10+}^+ a_{10-}^+ - a_{00+}^+ a_{00-}^+ a_{11+}^+ a_{1-1-}^+ a_{11-}^+ a_{1-1+}^+ + a_{11+}^+ a_{1-1-}^+ a_{10+}^+ a_{10-}^+ a_{00+}^+ a_{00-}^+ + a_{00+}^+ a_{00-}^+ a_{11-}^+ a_{1-1+}^+ a_{10+}^+ a_{10-}^+) |0\rangle$$

con

$$(\underline{a}^+ : \underline{a}^+) = 2(a_{11+}^+ a_{1-1-}^+ - a_{11-}^+ a_{1-1+}^+ - a_{10+}^+ a_{10-}^+ + a_{00+}^+ a_{00-}^+)$$

$$(\underline{a}^+ : \underline{a}^+)^2 = 8(-a_{11+}^+ a_{1-1-}^+ a_{11-}^+ a_{1-1+}^+ - a_{11+}^+ a_{1-1-}^+ a_{10+}^+ a_{10-}^+ + a_{11+}^+ a_{1-1-}^+ a_{00+}^+ a_{00-}^+ + a_{11-}^+ a_{1-1+}^+ a_{10+}^+ a_{10-}^+ - a_{11-}^+ a_{1-1+}^+ a_{00+}^+ a_{00-}^+ - a_{10+}^+ a_{10-}^+ a_{00+}^+ a_{00-}^+)$$

$$(\underline{a}^+ : \underline{a}^+)^3 = 48(a_{11+}^+ a_{1-1-}^+ a_{11-}^+ a_{1-1+}^+ a_{10+}^+ a_{10-}^+ - a_{11+}^+ a_{1-1-}^+ a_{11-}^+ a_{1-1+}^+ a_{00+}^+ a_{00-}^+ - a_{11+}^+ a_{1-1-}^+ a_{10+}^+ a_{10-}^+ a_{00+}^+ a_{00-}^+ + a_{11-}^+ a_{1-1+}^+ a_{10+}^+ a_{10-}^+ a_{00+}^+ a_{00-}^+)$$

Ahora calcularemos las matrices de \hat{N}_0 y sus eigenvectores - (sus eigenvalores son $n_0 = 0, 2$). Tenemos:

$$\hat{N}_0 = \begin{pmatrix} 00 \\ 00 \end{pmatrix} = \sum_f a_{00f}^+ a^{00f} = a_{00+}^+ a^{00+} + a_{00-}^+ a^{00-}$$

y aplicandolo sobre el estado $|2 0 0 0^+\rangle$ dado en la Tabla II se obtiene

$$\hat{N}_0 |2 0 0 0^+\rangle = a_{00+}^+ a_{00-}^+ |0\rangle$$

y tomando el producto escalar con $|2 0 0 0^+\rangle$ da

$$\begin{aligned} \langle 2 0 0 0^+ | \hat{N}_0 | 2 0 0 0^+ \rangle &= \langle 0 | \frac{1}{4} (\underline{a}^+ : \underline{a}^+)^+ \hat{N}_0 \frac{1}{4} (\underline{a}^+ : \underline{a}^+) | 0 \rangle \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

para el estado asociado, siguiendo un procedimiento similar

$$\hat{N}_0 |2 2 0 0^+\rangle = 3 a_{00+}^+ a_{00-}^+$$

$$\langle 2 2 0 0^+ | \hat{N}_0 | 2 2 0 0^+ \rangle = \frac{3}{2}$$

y

$$\langle 2 2 0 0^+ | \hat{N}_0 | 2 0 0 0^+ \rangle = \frac{3}{2}$$

La matriz de \hat{N}_0 es, entonces

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

(cuyos eigenvalores son $n_0 = 0, 2$)

para calcular los eigenvectores

$$n_0 = 0$$

$$\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y = 0 \quad \longrightarrow \quad x = -\sqrt{3}y$$

$$x^2 + y^2 = 1 \quad \longrightarrow \quad y = \pm \frac{1}{2}$$

y escogiendo el signo -

$$y = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

∴

$$v_{n_0=0} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

ahora, con $n_0=2$

$$\left(\frac{1}{2} - 2\right)x + \frac{\sqrt{3}}{2}y = 0 \quad \longrightarrow \quad x = \frac{1}{\sqrt{3}}y$$

$$x^2 + y^2 = 1 \quad \longrightarrow \quad y = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

y eligiendo signo +

$$y = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$x = \frac{1}{2}$$

∴

$$v_{n_0=2} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$$

Haciendo cálculos semejantes para los demás estados obtenemos las matrices de \hat{N}_0 y sus correspondientes eigenvectores. Los resultados se presentan en la Tabla III, en la cual se ha regresado a la notación (λ_1, λ_2) para las RI de $O(4)$.

Table III

$ N S L^{\pi}\rangle$	$(\lambda_1 \lambda_2)$	$\ \hat{N}_0\ $	$n_0=0$	$n_0=2$
$ 2 0 0^+\rangle$	$(0 0)$	$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \sqrt{3} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \sqrt{3} \end{bmatrix}$
	$(2 0)$			
$ 3 \frac{1}{2} 1^-\rangle$	$(1 0)$	$\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & 2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & 4 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \sqrt{2} \end{bmatrix}$
	$(2 1)_-$			
$ 4 0 0^+\rangle$	$(0 0)$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$
	$(2 0)$			
$ 4 0 2^+\rangle$	$(2 0)$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$
	$(2 2)_+$			
$ 4 1 1^+\rangle$	$(1 1)_+$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$
	$(2 0)_+$			
$ 5 \frac{1}{2} 1^-\rangle$	$(1 0)$	$\begin{bmatrix} \frac{4}{3} & -2\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} & 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \sqrt{2} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$
	$(2 1)_-$			
$ 6 0 0^+\rangle$	$(0 0)$	$\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \sqrt{3} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$
	$(2 0)$			

Capítulo III

El Hamiltoniano atómico y sus elementos de matriz.

3.1 Hamiltoniano de uno y dos cuerpos.

En el Cap. II se obtuvo el operador para interacciones de un cuerpo, de manera análoga se puede obtener el operador para interacciones de dos cuerpos, ambos independientes del spin.

Se había definido

$$c_{\mu}^{\dagger} = \sum_s a_{\mu s}^{\dagger} \tau^{\mu s}$$

y la interacción de dos cuerpos es (9)

$$\hat{V} = \frac{1}{2} \sum_{k_1 k_2 k'_1 k'_2} \langle k_1 k_2 | v_{12} | k'_1 k'_2 \rangle a_{k_1}^{\dagger} a_{k_2}^{\dagger} a_{k'_2} a_{k'_1}$$

Sustituyendo k por μ s en ambas ecuaciones y haciendo algunas simplificaciones obtenemos

$$\hat{V} = \frac{1}{2} \sum_{\mu_1 \mu_1' \mu_2 \mu_2'} \langle \mu_1 \mu_2 | v_{12} | \mu_1' \mu_2' \rangle c_{\mu_1}^{\dagger} c_{\mu_2}^{\dagger} - c_{\mu_2} c_{\mu_1}$$

... (3.1)

que, junto con el operador de un cuerpo

$$\hat{W} = \sum_{\mu} w_{\mu} c_{\mu}^{\dagger} c_{\mu}$$

... (3.2)

permitirán obtener el hamiltoniano atómico.

Los estados de una partícula que aparecen en la base antisimétrica serán de la forma

$$|n \ell m \sigma\rangle = R_{n\ell}(r) Y_{\ell m}(\theta, \phi) \chi_{\sigma}^{1/2} \quad \dots(3.3)$$

que son las eigenfunciones, con valor E_n , del hamiltoniano

$$H_{ef} = \frac{p^2}{2m} + V_{ef} \quad \dots(3.4)$$

donde V_{ef} es el potencial central efectivo que sienten las partículas en las capas s y p. Este potencial es el ejercido por el núcleo apantallado por el resto de las partículas. V_{ef} se determina, en principio, por el método de Hartee-Fock (10).

El Hamiltoniano del sistema de N electrones es

$$H = \sum_{i=1}^N \left[\frac{p_i^2}{2m} - \frac{Ze^2}{r_i} \right] + \sum_{i < j=1}^N \frac{e^2}{r_{ij}} \quad \dots(3.5)$$

y el siguiente paso será encontrar su expresión en términos de ψ_i . Como se está trabajando con los operadores de uno y dos cuerpos independientes del spin, entonces el hamiltoniano (3.5) independiente del spin puede ser expresado como

$$H = W + V \quad \dots(3.5')$$

donde V tiene la forma (3.1) y W la forma (3.2), en la cual

$$v_{12} = \frac{e^2}{r_{12}}$$

$$w_1 = \frac{p_1^2}{2m} - \frac{Ze^2}{r_1} \quad \dots(3.6)$$

Entonces, la parte del hamiltoniano W perteneciente a un cuerpo queda, sumando y restando V_{ef} a w_1 y usando (3.2), (3.3), (3.4) y (3.6)

$$\begin{aligned}
 W &= \sum_{\mu_1 \mu_1'} \langle \mu_1 | w_1 | \mu_1' \rangle \zeta_{\mu_1}^{\mu_1'} \\
 &= \sum_{\ell m} \sum_{\ell' m'} \langle n \ell m | H_{\text{ef}} + \left(-\frac{Ze^2}{r} - V_{\text{ef}} \right) | n' \ell' m' \rangle \zeta_{\ell m}^{\ell' m'} \\
 &= \sum_{\ell=0}^{\infty} \left. \varepsilon_{n\ell} + \int_0^{\infty} r^2 dr R_{n\ell}(r) \left(-V_{\text{ef}} - \frac{Ze^2}{r} \right) R_{n'\ell}(r) \right\}_{m=-\ell}^m
 \end{aligned}$$

donde llamando

$$I_{n\ell} = \int_0^{\infty} r^2 dr R_{n\ell}(r) \left(-V_{\text{ef}} - \frac{Ze^2}{r} \right) R_{n\ell}(r) \quad \dots(3.7)$$

$$\hat{N}_{\ell} = \sum_{m=-\ell}^{\ell} \zeta_{\ell m}^{\ell m} \quad \dots(3.8)$$

la parte del hamiltoniano para un cuerpo queda,

$$W = \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(\varepsilon_{n\ell} + I_{n\ell} \right) \hat{N}_{\ell} \quad \dots(3.8')$$

En la parte del hamiltoniano para dos cuerpos se hace un desarrollo multipolar (11) para v_{12}

$$v_{12} = \sum_{\ell=0}^{\infty} v_{\ell}(r_1, r_2) P_{\ell}(\cos \theta_{12}) \quad \dots(3.9)$$

Usando (3.9) se puede calcular el elemento de matriz de (3.1) (se considerará únicamente $\ell=0,1$)

$$\begin{aligned}
 &\langle n_1 \ell_1 m_1, n_2 \ell_2 m_2 | v_{12} | n_1 \ell_1' m_1', n_2 \ell_2' m_2' \rangle \\
 &= \int \int R_{n_1 \ell_1}(r_1) R_{n_2 \ell_2}(r_2) v_{\ell}(r_1, r_2) R_{n_1 \ell_1'}(r_1) R_{n_2 \ell_2'}(r_2) \\
 &\quad \times r_1^2 r_2^2 dr_1 dr_2 \times Y_{\ell_1 m_1}^*(\theta_1, \phi_1) Y_{\ell_2 m_2}^*(\theta_2, \phi_2) P_{\ell}(\cos \theta_{12})
 \end{aligned}$$

$$\times Y_{\ell_1 m_1}(\theta_1, \phi_1) Y_{\ell_2 m_2}(\theta_2, \phi_2) \sin \theta_1 d\theta_1 d\phi_1 \sin \theta_2 d\theta_2 d\phi_2$$

donde la parte radial son las integrales radiales de Slater que se simbolizan

$$R^{(\ell)}(\ell_1 \ell_2 \ell_1' \ell_2') = \int_0^\infty R_{n_1 \ell_1}(r_1) R_{n_2 \ell_2}(r_2) v_\ell(r_1, r_2) \times R_{n_1 \ell_1'}(r_1) R_{n_2 \ell_2'}(r_2) r_1^2 r_2^2 dr_1 dr_2 \dots (3.10)$$

respecto a la parte angular la indicaremos con

$$\langle \ell_1 m_1, \ell_2 m_2 | P_\ell(\cos \theta_{12}) | \ell_1' m_1', \ell_2' m_2' \rangle$$

Aquí podemos usar el teorema de adición para armónicos esféricos (12)

$$P_\ell(\cos \theta_{12}) = C_\ell(1) \cdot C_\ell(2) = \sum_m (-)^m C_{\ell m}(1) C_{\ell -m}(2) \dots (3.11)$$

con

$$C_{\ell m}(\theta, \phi) = \left(\frac{4\pi}{2\ell+1} \right)^{1/2} Y_{\ell m}(\theta, \phi)$$

y luego usar la fórmula para la integral de un producto de tres armónicos esféricos (12)

$$\int Y_{\ell_1 m_1}^*(\theta, \phi) Y_{\ell_2 m_2}(\theta, \phi) Y_{\ell_3 m_3}(\theta, \phi) d\Omega \dots (3.11')$$

$$= \langle \ell_1 m_1, \ell_2 m_2 | \ell_3 m_3 \rangle (2\ell_1 + 1)^{-1/2} (2\ell_2 + 1)^{1/2} \sqrt{\frac{2\ell_3 + 1}{4\pi}} \langle \ell_1 m_1, \ell_2 m_2 | \ell_3 m_3 \rangle$$

obteniendo

$$\begin{aligned}
 & \langle \ell_1 m_1, \ell_2 m_2 | P_2(\cos \Theta_{12}) | \ell_1' m_1', \ell_2' m_2' \rangle \\
 &= \sum_m (-)^m \left[\frac{(2\ell_1+1)(2\ell_2+1)}{(2\ell_1'+1)(2\ell_2'+1)} \right] \frac{1}{2} \langle \ell_2 \ell \ 0 \ 0 | \ell_2' \ 0 \rangle \langle \ell_1 \ell \ 0 \ 0 | \ell_1' \ 0 \rangle \\
 & \times \langle \ell_1 \ell \ m_1 \ -m | \ell_1' \ m_1' \rangle \langle \ell_2 \ell \ m_2 \ m | \ell_2' \ m_2' \rangle \quad \dots(3.12)
 \end{aligned}$$

Entonces el elemento de matriz de (3.1) queda, sustituyendo - (3.9) y (3.12)

$$\begin{aligned}
 & \langle n_1 \ell_1 m_1, n_2 \ell_2 m_2 | V_{12} | n_1' \ell_1' m_1', n_2' \ell_2' m_2' \rangle \\
 &= \sum_{\ell m} F^{(\ell)}(\ell_1 \ell_2 \ell_1' \ell_2') (-)^m \left[\frac{(2\ell_1+1)(2\ell_2+1)}{(2\ell_1'+1)(2\ell_2'+1)} \right] \frac{1}{2} \\
 & \times \langle \ell_2 \ell \ 0 \ 0 | \ell_2' \ 0 \rangle \langle \ell_1 \ell \ 0 \ 0 | \ell_1' \ 0 \rangle \langle \ell_1 \ell \ m_1 \ -m | \ell_1' \ m_1' \rangle \langle \ell_2 \ell \ m_2 \ m | \ell_2' \ m_2' \rangle \\
 & \quad \dots(3.13)
 \end{aligned}$$

Sustituyendo (3.13) en (3.1), se obtiene V como una suma de un -- término lineal en \mathcal{C} y otro bilineal en \mathcal{C} .

El término de \hat{V} lineal en \mathcal{C} (denotado por $V^{(1)}$) es

$$\hat{V}^{(1)} = \frac{1}{2} \sum_{\ell m} \sum_{\ell_1 m_1} \sum_{\ell_2 m_2} F^{(\ell)}(\ell_1 \ell_2 \ell_1' \ell_2') (-)^m \left[\frac{(2\ell_1+1)(2\ell_2+1)}{(2\ell_1'+1)(2\ell_2'+1)} \right] \frac{1}{2}$$

$$\times \langle l_2 \lambda_2 0 0 | l_2^0 \rangle \langle l_1 \lambda_1 0 0 | l_1^0 \rangle \langle l_1 \lambda_1 -m_1 | l_1^{m_1} \rangle$$

$$\times \langle l_2 \lambda_2 m_2 m | l_2^{m_2} \rangle \times \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{m_1} \langle l_1 \lambda_1 m_1 | l_1^{m_1} \rangle \right\}$$

tomando en cuenta las S 's y usando propiedades de simetría y ortogonalidad de los coeficientes de Clebsh-Gordan, obtenemos

$$v^{(1)} = -\frac{1}{2} \sum_{l_1 l_2 l} F^{(l)}(l_1 l_2 l_1) \langle l_1 \lambda_1 0 0 | l_2^0 \rangle^2 \sum_{m_2} \langle l_2 \lambda_2 m_2 | l_2^{m_2} \rangle$$

y usando (3.8)

$$v^{(1)} = -\frac{1}{2} \sum_{l_1 l_2 l} F^{(l)}(l_1 l_2 l_1) \langle l_1 \lambda_1 0 0 | l_2^0 \rangle^2 \hat{N}_{l_2}$$

...(3.14)

El término de \hat{V} bilineal en \hat{C} (denotado por $v^{(2)}$) es

$$v^{(2)} = \frac{1}{2} \sum_{l_1 m_1 l_2 m_2} F^{(l)}(l_1 l_2 l_1) (-)^m \left[\frac{(2l_1+1)(2l_2+1)}{(2l_1'+1)(2l_2'+1)} \right] \frac{1}{2}$$

$$\times \langle l_1 \lambda_1 0 0 | l_1^0 \rangle \langle l_2 \lambda_2 0 0 | l_2^0 \rangle \langle l_1 \lambda_1 m_1 -m | l_1^{m_1} \rangle$$

$$\times \langle l_2 \lambda_2 m_2 m | l_2^{m_2} \rangle \times \begin{matrix} \langle l_1^{m_1} & \langle l_2^{m_2} \\ l_1^{m_1} & l_2^{m_2} \end{matrix}$$

Usando los coeficientes de Clebsh-Gordan con $m_s \neq 0$ para definir los operadores tensoriales unidad (14)

$$\hat{U}_m^{(l_2 l_1)} = \sum_{m_1 m_2} \langle l_2 \lambda_2 m_2 m | l_2^{m_2} \rangle \langle l_1 \lambda_1 m_1 -m | l_1^{m_1} \rangle \langle l_1^{m_1} & \langle l_2^{m_2} \\ l_1^{m_1} & l_2^{m_2} \end{matrix}$$

...(3.15)

veamos que $V^{(2)}$ es una suma de productos escalares de operadores tensoriales unidad

$$V^{(2)} = \frac{1}{2} \sum_{l_1 l_2 l_1' l_2'} F^{(2)}(l_1 l_2 l_1' l_2') \left[\frac{(2l_1+1)(2l_2+1)}{(2l_1'+1)(2l_2'+1)} \right]^{\frac{1}{2}} \\ \times \langle l_1 l_1' 0 0 | l_1' 0 \rangle \langle l_2 l_2' 0 0 | l_2' 0 \rangle \underline{U}^{l_1}(l_1' l_1) \cdot \underline{U}^{l_2}(l_2' l_2)$$

con

$$\underline{U}^{l_1}(l_1' l_1) \cdot \underline{U}^{l_2}(l_2' l_2) = \sum_m (-)^m \underline{U}_m^{l_1}(l_1' l_1) \underline{U}_{-m}^{l_2}(l_2' l_2)$$

...(3.15')

Debido a la regla de selección de acoplamiento de momentos angulares $l_j + l_j' \leq l \leq l_j - l_j'$ y de los coeficientes de Gaunt - $l_j + l_j' + l = \text{par}$, la suma en $V^{(2)}$ tiene 9 términos que son

l_1	l_1'	l_2	l_2'	
1	1	1	1	0,2
1	1	0	0	0
1	0	1	0	1
1	0	0	1	1
0	1	1	0	1
0	1	0	1	1
0	0	1	1	0
0	0	0	0	0

$$V^{(2)} = \frac{1}{2} F_{1111}^0 \frac{1}{3} \underline{U}^0(11) \cdot \underline{U}^0(11) + \frac{1}{2} F_{1111}^2 \frac{2}{5} \underline{U}^2(11) \cdot \underline{U}^2(11) \\ + \frac{1}{2} F_{1010}^0 \underline{U}^0(11) \cdot \underline{U}^0(00) + \frac{1}{2} F_{1100}^1 \frac{3(1)}{3} \underline{U}^1(10) \cdot \underline{U}^1(10)$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{2} F_{1001}^1 \frac{(-1)}{\sqrt{3}} \underline{u}^1(10) \cdot \underline{u}^1(01) + \frac{1}{2} F_{0110}^1 \frac{(-1)}{\sqrt{3}} \underline{u}^1(01) \cdot \underline{u}^1(10) \\
 & + \frac{1}{2} F_{0011}^1 \frac{(1)}{3} \underline{u}^1(01) \cdot \underline{u}^1(01) + \frac{1}{2} F_{0101}^0 \underline{u}^0(00) \cdot \underline{u}^0(11) \\
 & + \frac{1}{2} F_{0000}^0 \underline{u}^0(00) \cdot \underline{u}^0(00)
 \end{aligned}$$

Volviendo a (3.10), si intercambiamos r_1 con r_2 las R son simétricas y $v_1(r_1, r_2)$ también lo es, por lo tanto

$$F_{1010}^0 = F_{0101}^0$$

$$F_{0011}^1 = F_{0110}^1 = F_{1001}^1 = F_{1100}^1$$

y entonces,

$$\begin{aligned}
 v^{(2)} & = \frac{1}{2} F_{1111}^0 \underline{u}^0(11) \cdot \underline{u}^0(11) + \frac{1}{5} F_{1111}^2 \underline{u}^2(11) \cdot \underline{u}^2(11) \\
 & + \frac{1}{2} F_{1010}^0 [\underline{u}^0(11) \cdot \underline{u}^0(00) + \underline{u}^0(00) \cdot \underline{u}^0(11)] \\
 & + \frac{1}{2} F_{1100}^1 \left[\underline{u}^1(10) \cdot \underline{u}^1(10) - \frac{1}{\sqrt{3}} \underline{u}^1(10) \cdot \underline{u}^1(01) \right. \\
 & \quad \left. - \frac{1}{\sqrt{3}} \underline{u}^1(01) \cdot \underline{u}^1(10) + \frac{1}{3} \underline{u}^1(01) \cdot \underline{u}^1(01) \right] \\
 & + \frac{1}{2} F_{0000}^0 \underline{u}^0(00) \cdot \underline{u}^0(00) \quad \text{--- (3.16)}
 \end{aligned}$$

y usando (3.15) y (3.8)

$$\begin{aligned}
 \underline{u}^0(11) \cdot \underline{u}^0(11) & = \sum_{m_1 m_1'} \langle 1 \ 0 \ m_1 \ 0 \mid 1 \ m_1' \rangle \langle 1 \ 0 \ m_2 \ 0 \mid 1 \ m_2' \rangle \\
 & \times \begin{pmatrix} 1m_1 & 1m_2 \\ 1m_1' & 1m_2' \end{pmatrix} = \hat{N}_1^2 \quad \text{--- (3.17)}
 \end{aligned}$$

$$\underline{u}^0(00) \cdot \underline{u}^0(00) = \sum_{m_s m'_s} \langle 0 0 0 0 | 0 0 \rangle \langle 0 0 0 0 | 0 0 \rangle$$

$$\times \hat{C}_{00}^{00} \hat{C}_{00}^{00} = \hat{N}_0^2 \quad \dots (3.18)$$

$$\underline{u}^0(11) \cdot \underline{u}^0(00) = \sum_{m_s m'_s} \langle 1 0 m_s 0 | 1 m'_s \rangle \langle 0 0 0 0 | 0 0 \rangle$$

$$\times \hat{C}_{1m_s, 00}^{1m_s} \hat{C}_{00}^{00} = \hat{N}_1 \hat{N}_0 \quad \dots (3.19)$$

Definiendo el operador

$$A_m = \underline{u}_{m'}^1(01) - \sqrt{3} \underline{u}_m^1(10) \quad \dots (3.20)$$

entonces

$$\frac{1}{3} A \cdot A = \frac{1}{3} \sum_m (-)^m \left[\underline{u}_m^1(01) \underline{u}_{-m}^1(01) - \sqrt{3} \underline{u}_m^1(01) \underline{u}_{-m}^1(10) \right.$$

$$\left. - \sqrt{3} \underline{u}_m^1(10) \underline{u}_{-m}^1(01) + 3 \underline{u}_m^1(10) \underline{u}_{-m}^1(10) \right]$$

$$\dots (3.20')$$

Comparando (3.20) y el cuarto término de (3.16), y sustituyendo - (3.17), (3.18) y (3.19) en (3.16) y además por ser

$$\underline{u}^0(11) \cdot \underline{u}^0(00) = \underline{u}^0(00) \cdot \underline{u}^0(11)$$

obtenemos:

$$v^{(2)} = \frac{1}{2} F_{1111}^0 \hat{N}_1^2 + \frac{1}{5} F_{1111}^2 \underline{u}^2(11) \cdot \underline{u}^2(11) + F_{1010}^0 \hat{N}_1 \hat{N}_0$$

$$+ \frac{1}{6} (A \cdot A) + \frac{1}{2} F_{0000}^0 \hat{N}_0^2 \quad \dots (3.21)$$

Por otro lado, se define (3) el operador de Casimir de (3) -

$$F(3) = \sum_{mm'} \begin{pmatrix} l & m' & l \\ l & m & l \end{pmatrix} \dots (3.22)$$

Podemos expresar $F(3)$ en términos de productos escalares - de la forma (3.15'); para eso invertimos la fórmula (3.15) usando la ortogonalidad de los coeficientes de Clebsh-Gordan, sustituyendo en (3.22) y usando nuevamente propiedades de los CGG, se obtiene

$$F(3) = \sum_{mm'} \begin{pmatrix} l & m' & l \\ l & m & l \end{pmatrix} = \sum_{k=0}^2 \frac{(2k+1)}{3} \underline{u}^k(11) \cdot \underline{u}^k(11) \dots (3.23)$$

Además, del Cap. II y por (3.15)

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_q &= \sum_l \sum_{mm'} \sqrt{l(l+1)} \langle l \ 1 \ m' \ q \mid l \ m \rangle \begin{pmatrix} l & m \\ l & m' \end{pmatrix} \\ &= \sum_l \sqrt{l(l+1)} \underline{u}_q^1(l1) \end{aligned}$$

con $l=0, 1$, de aquí que

$$\mathcal{L}_m^2 = 2 \underline{u}^1(11) \cdot \underline{u}^1(11) \dots (3.24)$$

Por lo tanto, de (3.17), (3.23) y (3.24)

$$\underline{u}^2(11) \cdot \underline{u}^2(11) = F(3) - \frac{1}{3} \hat{N}_1^2 - \frac{1}{2} \mathcal{L}_m^2 \dots (3.25)$$

ya que los tres términos de la derecha son diagonales en $\mathcal{U}(3)$, se deduce que $\underline{u}^2(11) \cdot \underline{u}^2(11)$ también lo es.

Por otra parte, el operador de Casimir de $O(4)$ es

$$\phi(4) = \frac{1}{2} \sum_{\ell m \ell' m'} \Lambda_{\ell' m'}^{\ell' m'} \Lambda_{\ell m}^{\ell m} \quad \dots(3.26)$$

Desarrollando (3.26)

$$\phi(4) = \frac{1}{2} \sum_{mm'} \left(\Lambda_{1m}^{1m'} \Lambda_{1m'}^{1m} + \Lambda_{00}^{1m'} \Lambda_{1m'}^{00} + \Lambda_{1m}^{00} \Lambda_{00}^{1m} \right) \quad \dots(3.27)$$

y como

$$\sum_{\ell m} \ell^2 = \sum_{mm'} \Lambda_{1m}^{1m'} \Lambda_{1m'}^{1m} \quad \dots(3.28)$$

y

$$A_m = \mathcal{U}_m^1(01) - \sqrt{3} \mathcal{U}_m^1(10) = \Lambda_{1m}^{00} = \mathcal{C}_{1m}^{00} - (-)^m \mathcal{C}_{00}^{1-m} \quad \dots(3.29)$$

y se tiene la propiedad de simetría

$$\Lambda_{00}^{1m} = -(-)^{1-m} \Lambda_{1-m}^{00} = (-)^m A_{-m} \quad \dots(3.30)$$

Los dos últimos términos de (3.27) equivalen a

$$\sum_{mm'} \left(\Lambda_{00}^{1m'} \Lambda_{1m'}^{00} + \Lambda_{1m}^{00} \Lambda_{00}^{1m} \right) = 2 \underline{A \cdot A} \quad \dots(3.31)$$

por lo que, de (3.28) y (3.31) en (3.27)

$$\mathcal{J}(4) = \frac{1}{2} \sum_{\ell m} \ell^2 + \underline{A \cdot A} \quad \dots(3.32)$$

Entonces la parte del hamiltoniano para dos cuerpos resulta

ser, sustituyendo (3.25) y (3.32) en (3.21) y sumando éste último con (3.14)

$$\begin{aligned}
 V = & -\frac{1}{2} \sum_{l_1 l_2 l} \langle l_2 l_0 0 | l_1 0 \rangle^2 F^{(l)}(l_2 l_1 l_1 l_2) \hat{N}_{l_2} \\
 & + \frac{1}{2} F_{1111}^0 \hat{N}_1^2 + \frac{1}{5} F_{1111}^2 \frac{(3)}{5} \left[\Gamma(3) - \frac{1}{2} \sum^2 - \frac{1}{3} \hat{N}_1^2 \right] \\
 & + F_{1010}^0 \hat{N}_1 \hat{N}_0 + \frac{1}{2} F_{0000}^0 \hat{N}_0^2 + \frac{1}{6} F_{1100}^1 \left[\phi(4) - \frac{1}{2} \sum^2 \right] \\
 & \dots(3.33)
 \end{aligned}$$

Finalmente, se puede expresar en forma completa el hamiltoniano - en términos de operadores de Casimir sumando (3.8') y (3.33)

$$\begin{aligned}
 H = & \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{2} (\mathcal{E}_{nl} + I_{nl}) \hat{N}_l - \frac{1}{2} \sum_{l_1 l_2 l} \langle l_2 l_0 0 | l_1 0 \rangle^2 F^{(l)}(l_2 l_1 l_1 l_2) \\
 & \times \hat{N}_{l_2} \\
 & + \frac{1}{2} F_{1111}^0 \hat{N}_1^2 + \frac{1}{5} F_{1111}^2 \frac{(3)}{5} \left[\Gamma(3) - \frac{1}{2} \sum^2 - \frac{1}{3} \hat{N}_1^2 \right] \\
 & + F_{1010}^0 \hat{N}_1 \hat{N}_0 + \frac{1}{2} F_{0000}^0 \hat{N}_0^2 + \frac{1}{6} F_{1100}^1 \left[\phi(4) - \frac{1}{2} \sum^2 \right] \\
 & \dots(3.33')
 \end{aligned}$$

3.2 Matriz del operador $\phi(4)$ en la base $\mathcal{U}(3)$.

Todos los operadores que aparecen en (3.33'), excepto $\phi(4)$ son - diagonales en la base $\mathcal{U}(3)$. Para construir la matriz de $\phi(4)$ en la base $\mathcal{U}(3)$ se efectúa una transformación de semejanza sobre - las matrices de $\phi(4)$ en la base $\mathcal{O}(4)$, las cuales son diagonales - en esta base y tienen elementos conocidos. La transformación de - semejanza se efectúa con las matrices dadas en la Tabla IV, cu--

Las columnas son los eigenvectores de las matrices de \hat{N}_0 dadas - en la Tabla III.

Tabla IV

$(\lambda_1 \lambda_2)$	$[h_1 h_2 h_3]$	$[h_1 h_2 h_3]$	$ N S L^{\pi}\rangle$
$(0 0)$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & & \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & & \end{bmatrix}$	$ 2 0 0^+\rangle$
$(2 0)$	$\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & & \\ & & \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & & \\ & & \end{bmatrix}$	
$(1 0)$	$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ \frac{2}{3} & & \\ & & \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & & \\ & & \end{bmatrix}$	$ 3 \frac{1}{2} 1^-\rangle$
$(2 1)$	$\begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix}$	
$(0 0)$	$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ \frac{1}{2} & & \\ & & \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & & \\ & & \end{bmatrix}$	$ 4 0 0^+\rangle$
$(2 0)$	$\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix}$	
$(2 0)$	$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix}$	$ 4 0 2^+\rangle$
$(2 2)$	$\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix}$	
$(1 1)$	$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & & \\ & & \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & & \\ & & \end{bmatrix}$	$ 4 1 1^+\rangle$
$(2 0)$	$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix}$	

$$\begin{array}{l}
 (1\ 0) \\
 (2\ 1) \\
 (0\ 0) \\
 (2\ 0)
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 [2\ 2\ 1] \\
 [2\ 1\ 0] \\
 [2\ 2\ 2] \\
 [2\ 2\ 0]
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \\
 \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 |5\ \frac{1}{2}\ 1^- \rangle \\
 |6\ 0\ 0^+ \rangle
 \end{array}$$

En la base $0(4)$ tenemos

$$\underline{\psi} |N\ S(\lambda_1 \lambda_2) L'' \rangle = [\lambda_1(\lambda_1+2) + \lambda_1^2] |N\ S(\lambda_1 \lambda_2) L'' \rangle$$

Ahora, en la base $\mathcal{U}(3)$,

$$\begin{aligned}
 \underline{\psi} |N\ S[h_1 h_2 h_3] L'' \rangle &= \underline{\psi} \sum_{(\lambda_1 \lambda_2)} |N\ S(\lambda_1 \lambda_2) L'' \rangle \\
 &\quad \times \langle N\ S(\lambda_1 \lambda_2) L'' | N\ S[h_1 h_2 h_3] L'' \rangle \\
 &= \sum_{(\lambda_1 \lambda_2)} [\lambda_1(\lambda_1+2) + \lambda_2^2] |N\ S(\lambda_1 \lambda_2) L'' \rangle \\
 &\quad \times \langle N\ S(\lambda_1 \lambda_2) L'' | N\ S[h_1 h_2 h_3] L'' \rangle
 \end{aligned}$$

Entonces los elementos de matriz de $\underline{\psi}$ en la base $\mathcal{U}(3)$ están dados por

$$\begin{aligned}
 \langle N\ S[h_1^i h_2^i h_3^i] L'' | \underline{\psi} |N\ S[h_1 h_2 h_3] L'' \rangle \\
 = \sum_{(\lambda_1 \lambda_2)} [\lambda_1(\lambda_1+2) + \lambda_2^2] \langle N\ S[h_1^i h_2^i h_3^i] L'' | N\ S(\lambda_1 \lambda_2) L'' \rangle \\
 \times \langle N\ S(\lambda_1 \lambda_2) L'' | N\ S[h_1 h_2 h_3] L'' \rangle \quad \dots(3.34)
 \end{aligned}$$

En notación compacta (3.34) equivale a

$$\| \underline{\underline{\phi}} \|_{\mathcal{U}(3)} = \underline{\underline{M}} \| \underline{\underline{\phi}} \|_{\mathcal{O}(4)} \underline{\underline{M}}^{\dagger} \quad \dots(3.35)$$

Donde $\underline{\underline{M}}$ son las matrices de la Tabla IV. De esta manera se obtienen las matrices de $\underline{\underline{\phi}}(4)$ en la base $\mathcal{U}(3)$ dadas en la Tabla V.

Tabla V

$ N S L^{\pi}\rangle$	$[h_1 h_2 h_3]$	$[h_1 h_2 h_3]$	
$ 2 0 0^+\rangle$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2\sqrt{3} \\ -2\sqrt{3} & 6 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
$ 3 \frac{1}{2} 1^-\rangle$	$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 5 & -2\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} & 7 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
$ 4 0 0^+\rangle$	$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 4 & -4 \\ -4 & 4 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
$ 4 0 2^+\rangle$	$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 10 & -2 \\ -2 & 10 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
$ 4 1 1^+\rangle$	$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 6 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$\begin{array}{l} |5 \frac{1}{2} 1^- \rangle \\ \left[\begin{array}{l} [2 \ 2 \ 1] \\ [2 \ 1 \ 0] \end{array} \right] \end{array} \quad \begin{array}{l} [2 \ 2 \ 1] \\ \left[\begin{array}{l} 7 \\ 2\sqrt{2} \end{array} \right] \end{array} \quad \begin{array}{l} [2 \ 1 \ 0] \\ \left[\begin{array}{l} 2\sqrt{2} \\ 5 \end{array} \right] \end{array}$$

$$\begin{array}{l} |6 \ 0 \ 0^+ \rangle \\ \left[\begin{array}{l} [2 \ 2 \ 2] \\ [2 \ 2 \ 0] \end{array} \right] \end{array} \quad \begin{array}{l} [2 \ 2 \ 2] \\ \left[\begin{array}{l} 6 \\ 2\sqrt{3} \end{array} \right] \end{array} \quad \begin{array}{l} [2 \ 2 \ 0] \\ \left[\begin{array}{l} 2\sqrt{3} \\ 2 \end{array} \right] \end{array}$$

El procedimiento así seguido evita la necesidad de usar --
coeficientes de parentesco fraccional (fractional parentage) pa-
ra calcular los elementos de matriz de H.

Capítulo IV

La configuración nuclear $(s+p)^N$.

4.1 La base antisimétrica.

En este Cap. las consideraciones de los dos capítulos anteriores se extienden a un sistema de nucleones (protones p, neutrones, n). Se supone que las fuerzas nucleares son las mismas (para el mismo spin y estado espacial) para n-p, p-p, n-n. Esto equivale a suponer que las fuerzas nucleares son independientes de la carga (17), (18).

Se considera que la independencia de la carga es una de las propiedades básicas de las fuerzas nucleares y aquí presentaremos un formalismo apropiado para su tratamiento matemático.

Como una consecuencia de la independencia de la carga, se considera a protones y neutrones como dos estados casi degenerados de la misma partícula, el nucleón. Ambos nucleones pueden ser considerados miembros de un doblete casi degenerado que corresponde a dos valores de alguna nueva variable interna y es posible construir un formalismo de spin isotópico (isospin) que matemáticamente es muy similar al spin usual.

Es isospin es un vector en un espacio de tres dimensiones. Las componentes del vector isospin \hat{T} son $\frac{1}{2}$ de las componentes del operador vectorial $\hat{\tau} = (\tau_1, \tau_2, \tau_3)$, donde las τ_i son matrices 2x2 idénticas a las matrices de Pauli, y se pueden considerar como una realización de los generadores de un grupo $SU_{\tau}(2)$.

Como en el spin usual, solo una componente, digamos τ_3 , se puede diagonalizar simultáneamente con τ^2 , y sus eigenvalores son:

$$\tau_3 = +1 \quad \text{para el protón}$$

$$\hat{T}_3 = -1 \quad \text{para el neutrón}$$

El isospin de un sistema de muchas partículas puede ser obtenido por medio de las reglas usuales de adición de momentos angulares. El operador de isospin total de un sistema de N nucleones es

$$\hat{T} = \sum_{\alpha=1}^N \frac{1}{2} \hat{\tau}_{\alpha}$$

Como en el formalismo de isospin todos los nucleones se consideran idénticos, la diferencia entre protón y neutrón está solamente en los eigenvalores de \hat{T}_3 . El principio de exclusión de Pauli se extiende entonces diciendo que la función de onda de N nucleones debe ser antisimétrica relativa al intercambio de las coordenadas del espacio, spin e isospin de cualquier par ij. Por lo tanto, el estado de N nucleones se puede escribir como una superposición de estados antisimétricos

$$|n_1 \ell_1 m_1 \sigma_1 \tau_1 \dots n_i \ell_i m_i \sigma_i \tau_i \dots n_N \ell_N m_N \sigma_N \tau_N \rangle$$

$$\equiv a_{n_1 \ell_1 m_1 \sigma_1 \tau_1}^+ \dots a_{n_i \ell_i m_i \sigma_i \tau_i}^+ \dots a_{n_N \ell_N m_N \sigma_N \tau_N}^+ |0\rangle$$

donde a_{ρ}^+ con $\rho \rightarrow n \ell m \sigma \tau$ son operadores fermiónicos de creación que, junto con sus correspondientes operadores de aniquilación a^{ρ} obedecen reglas de conmutación

$$\{a_{\rho}^+, a^{\rho'}\} = a_{\rho}^+ a^{\rho'} + a^{\rho'} a_{\rho}^+ = \delta_{\rho \rho'}$$

$$\{a_{\rho}^+, a_{\rho}^+\} = \{a^{\rho}, a^{\rho}\} = 0$$

En este estudio, el espacio accesible a los nucleones se restringe a los orbitales (s+p) de aquí que, $n \ell m$ tiene $\sum_{\ell=0}^1 (2\ell+1) = 4$

posibilidades y \mathcal{U} otras 4 posibilidades, de modo que hay 16 posibles estados para cada nucleón.

Los operadores $a_{\rho}^+ a^{\rho}$ generan (3) el álgebra de Lie de $U(16)$ y los monomios independientes de grado N $\{a_{\rho_1}^+ \dots a_{\rho_N}^+ | 0\}$ son --
 BRI $[1^N]$ de $U(16)$.

Si escribimos los generadores del grupo $U(16)$ en la forma

$$C_{\mu s}^{\nu' s'} = a_{\mu s}^+ a^{\nu' s'} \quad \begin{matrix} \mu \rightarrow n \ell m \\ s \rightarrow \sigma \tau \end{matrix}$$

y contraemos sucesivamente respecto a los índices μ y s , separamos las propiedades internas (spin-isospin) y espaciales de los orbitales. De este modo obtenemos los operadores

$$U(4) : C_s^{\nu' s'} = \sum_{\ell m} a_{\ell m s}^+ a^{\ell' m' s'}$$

$$\mathcal{U}(4) : C_{\ell m}^{\ell' m'} = \sum_{s=1}^4 a_{\ell m s}^+ a^{\ell' m' s}$$

los cuales son, respectivamente, generadores de los grupos unitarios $U(4)$ y $\mathcal{U}(4)$ en un subgrupo $\mathcal{U}(4) \times U(4) \subset U(16)$, ya que --
 cumplen con los conmutadores

$$[C_s^{\nu' s'}, C_{\ell m}^{\ell' m'}] = 0$$

Para el índice s estamos usando la convención

s	1	2	3	4
$\sigma \tau$	$\frac{1}{2} \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} -\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2} \frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2} -\frac{1}{2}$

...(4.1)

Las RI de estos dos grupos $\mathcal{U}(4)$, $U(4)$ son de la forma

$$[f_1 f_2 f_3 f_4] ; [f'_1 f'_2 f'_3 f'_4] \quad \text{con} \quad \sum_{s=1}^4 f_s = \sum_{s=1}^4 f'_s = N$$

...(4.2)

y los correspondientes "tabloides" de Young son conjugados uno del otro, es decir, en el primer diagrama de Young las f_{μ} corresponderían al número de cuadros en los renglones y las f'_{μ} al número de cuadros en las columnas. Debido a esto, en todos los renglones $f_{\mu} \leq 4$ y en todas las columnas $f'_{\mu} \leq 4$. Si una de las particiones está dada, digamos $[f_1 f_2 f_3 f_4]$ de $\mathcal{U}(4)$, la otra está completamente determinada y viceversa.

Para construir estados con spin e isospin total se deben obtener operadores asociados con estas observables. \hat{S} y \hat{T} son operadores de un cuerpo cuya expresión en segunda cuantización se puede obtener aplicando la fórmula general (2.19) del Cap. II. En la referencia (15) se encuentran los detalles de este cálculo, obteniéndose

$$S_+ = -\frac{1}{2} (c_1^3 + c_2^4)$$

$$S_- = \frac{1}{2} (c_3^1 + c_4^2) = (S_+)^+$$

$$S_0 = \frac{1}{2} (c_1^1 + c_2^2 - c_3^3 - c_4^4)$$

$$T_+ = -\frac{1}{2} (c_1^2 + c_3^4)$$

$$T_- = \frac{1}{2} (c_2^1 + c_4^3) = (T_+)^+$$

$$T_0 = \frac{1}{2} (c_1^1 - c_2^2 + c_3^3 - c_4^4)$$

Los estados que se adoptarán como base son eigenestados de los operadores S_0 y T_0 , así como de los operadores de Casimir de $SU_q(2)$ y $SU_{\bar{q}}(2)$, i.e.

$$S^2 = q (-)^q S_q S_{-q} \quad ; \quad T^2 = \bar{q} (-)^{\bar{q}} T_{\bar{q}} T_{-\bar{q}}$$

lo cual indica que los estados están caracterizados por la cadena de grupos

$$U(4) \supset SU_{\sigma}(2) \times SU_{\tau}(2)$$

Por otro lado, S_0, T_0 son generadores del subgrupo

$$SO_{\sigma}(2) \times SO_{\tau}(2)$$

El grupo orbital $\mathcal{U}(4)$ se puede clasificar por la cadena

$$\mathcal{U}(3) \supset O(3) \supset O(2)$$

discutida en el Cap. II, de manera que la base que se adoptará -- corresponde al siguiente esquema con los correspondientes números cuánticos que identifican las RI's

$$\begin{array}{ccccccc} [f'] & \alpha & (S) & (T) & M_S & M_T & \\ U(4) \supset & SU_{\sigma}(2) & \times & SU_{\tau}(2) & \supset & SO_{\sigma}(2) & \times & SO_{\tau}(2) \end{array}$$

$$U(16) \supset x \dots (4.3)$$

$$\begin{array}{ccccccc} \mathcal{U}(4) \supset & (3) & \supset & O(4) & \supset & O(2) & \\ [f] & [h] & L & M & & & \end{array}$$

α y β son números adicionales necesarios para distinguir entre -- las RI (ST) de $SU_{\sigma}(2) \times SU_{\tau}(2)$ repetidas en una RI $[f'_1 f'_2 f'_3 f'_4]$ de $U(4)$ y entre las RI (L) de $O(3)$ repetidas en una RI $[h_1 h_2 h_3]$ de $\mathcal{U}(3)$, respectivamente.

Los posibles números cuánticos $[f]$ y $[f']$ para un número N de nucleones se mencionaron antes en la ec. (4.2). Los números -- cuánticos h compatibles con f están dados por las desigual --

dades de Weyl $f_1 \geq h_1 \geq f_2 \geq h_2 \geq f_3 \geq h_3 \geq f_4 \geq 0$ y, finalmente, las posibles RI $(ST) \in [f']$ y $(L) \in [h]$ se pueden encontrar en tablas publicadas por ejm. en (16). Podemos, por lo tanto, hacer una lista completa de estados de N nucleones clasificados por la cadena -- (4.3)

4.2 Interacciones nucleares

Formulación de la interacción n-p.

La energía potencial que describe la interacción entre un neutrón y un protón debe contener por lo menos dos términos (17), (18) :

- i) un término de fuerza central ordinario
- ii) un término de fuerza central dependiente del spin

El primer término puede ser expresado por un potencial ordinario de Wigner (una función de la distancia entre los nucleones)

$$V_W(r) \quad \text{dónde} \quad r = |\bar{r}_p - \bar{r}_n| \quad \text{---(4.4)}$$

El segundo término puede ser formulado con la ayuda del operador de intercambio de spin P_σ , el cual tiene eigenvalores +1 para spins paralelos (tripletes) y -1 para spins antiparalelos (singletes).

La parte dependiente de spin del potencial puede ser escrito como

$$V_\sigma(r)P_\sigma = V_\sigma(r) \frac{1}{2} (1 + \sigma_p \cdot \sigma_n) \quad \text{---(4.5)}$$

donde $V_\sigma(r)$ expresa una apropiada dependencia de la distancia.

Sumando (4.4) y (4.5) obtenemos el potencial de interacción

$$V_W(r) + V_\sigma(r)P_\sigma \quad \text{---(4.6)}$$

Fuerzas n-n , p-p.

Se han discutido las fuerzas entre $n-n$, ahora se debe considerar las fuerzas entre $n-n$ y $n-p$.

Las fuerzas $n-n$ y $n-p$ son casi iguales, difieren solamente a causa de efectos electromagnéticos que son pequeños comparados con las fuerzas nucleares; a ésta igualdad de fuerza entre nucleones se le llama simetría de carga de las fuerzas nucleares (17), (18).

Se podría pensar que las fuerzas $n-p$ son diferentes de las fuerzas $n-n$, $p-p$, lo cual no es necesariamente cierto. Se sabe por simplificación que las fuerzas nucleares son las mismas (para igual spin y momento angular) para estos tres casos. Como ya se había dicho al principio de este capítulo.

Debido a la independencia de la carga podemos concluir que el Hamiltoniano nuclear conmuta con \hat{T} (el isospin total) y además que \hat{T}^2 y \hat{T}_3 son constantes de movimiento.

Para la conservación del isospin, el potencial que describe la interacción entre dos nucleones debe ser invariante rotacionalmente en el isospacio. Debe contener cantidades escalares formadas con los isospines $\hat{\tau}_1$ y $\hat{\tau}_2$ de ambos nucleones, de los cuales solo pueden existir 1 y $P_{\tau} = \frac{1}{2}(1 + \tau_1 \cdot \tau_2)$, donde P es el operador de intercambio del isospin.

Si usamos (4.6), el potencial de interacción más general entre dos nucleones independientemente de la velocidad (18) es

$$[V_W(r) + V_G(r) P_G] + P_{\tau} [V'_W(r) + V'_G(r) P'_G] \quad \text{---(4.7)}$$

El operador de paridad orbital $P_r^{(o)}$ invierte los ejes $x.y.z$; para dos partículas de igual masa relativas a un centro de masa común $P_r^{(o)} \Psi(\bar{r}_1, \bar{r}_2) = \Psi(-\bar{r}_1, -\bar{r}_2)$. Si la interacción entre las dos partículas es invariante bajo traslaciones, la función de onda solo depende de la distancia relativa $\psi = \psi(r_1 - r_2)$ y

en este caso el operador de intercambio espacial P_r definido por $P_r \psi(r_1, r_2) = \psi(r_2, r_1)$ es equivalente al operador de paridad orbital $P_r^{(0)}$, cuyos eigenvalores son $(-)^{\ell}$, donde ℓ es el momento angular orbital relativo.

Los operadores de intercambio que entran en el potencial de interacción entre dos nucleones son entonces los siguientes (con sus respectivos eigenvalores):

a) El operador de intercambio de coordenadas δ de Majorana

$$P_r \quad \text{con eigenvalores } (-)^{\ell}$$

b) el operador de intercambio de spin δ de Bartlett

$$P_{\sigma} = \frac{1}{2} (1 + \sigma_1 \cdot \sigma_2) \quad \text{con eigenvalores } (-)^{S+1}$$

c) El operador de intercambio de isospin δ de Heisenberg

$$P_{\tau} = \frac{1}{2} (1 + \tau_1 \cdot \tau_2) \quad \text{con eigenvalores } (-)^{T+1}$$

d) y el ordinario δ de Wigner

$$P_w = 1$$

A causa del principio de exclusión

$$P_{\sigma} P_{\tau} P_r = -1; \text{ y además por ser } P_{\sigma}^2 = P_{\tau}^2 = 1$$

podemos expresar el operador de Majorana como

$$P_r = -P_{\sigma} P_{\tau}$$

---(4.8)

y los números cuánticos l, S, T están restringidos por la relación de que $l + S + T$ debe ser impar.

Usando (4.8) podemos entonces reescribir (4.7) como

$$U_{12} = V_W (|\bar{r}_1 - \bar{r}_2|) + V_\sigma (|\bar{r}_1 - \bar{r}_2|) P_\sigma + V_\tau (|\bar{r}_1 - \bar{r}_2|) P_\tau + V_r (|\bar{r}_1 - \bar{r}_2|) P_r \quad \text{---(4.9)}$$

que es la interacción más general que satisface las restricciones de invariancia bajo traslación, rotación, reflexión y es independiente de la velocidad y que además conmuta con L^2, S^2, \hat{S}_0, T^2 , y \hat{T}_0 .

El presente análisis está restringido al primer y último términos de (4.9) (potenciales de Wigner y Majorana), ya que solo en este caso la interacción puede expresarse en términos de operadores de Casimir de los grupos discutidos anteriormente, lo cual facilita la construcción de la matriz de energía y eventualmente hace innecesaria la construcción explícita de la base supermultiplete.

La expresión para una interacción de Wigner está dada en términos de los operadores $C_{l m}^{l' m'}$ y tiene la misma forma que en el capítulo cuyo resultado final está dado en la fórmula (3.33).

El potencial de Majorana lo escribimos de la forma

$$U_M = \sum_{r < s} U_{rs} P_M^{rs} \quad \text{--- (4.9*)}$$

Usando el operador de dos cuerpos

$$U = \frac{1}{2} \sum_{\mu_1 \mu_1' \mu_2 \mu_2'} \{ \langle \mu_1 \mu_2 | V_{12} | \mu_1' \mu_2' \rangle (C_{\mu_1}^{\mu_1'} C_{\mu_2}^{\mu_2'} - \delta_{\mu_2}^{\mu_1'} C_{\mu_1}^{\mu_2'}) \}$$

y aplicándolo al caso de Majorana, en el cual, $V_{12} = U_{12}(r) P_M^{12}$ -
 donde $P_M \psi(r_1, r_2) = \psi(r_2, r_1)$, tenemos que,

$$\begin{aligned}
 V_M &= \frac{1}{2} \langle \ell_1 \ell_2 \ell_1' \ell_2' | \langle n_1 \ell_1 m_1, n_2 \ell_2 m_2 | U_{12} P_M^{12} | n_1' \ell_1' m_1', n_2' \ell_2' m_2' \rangle \\
 &\quad \times \left(\begin{matrix} \ell_1' m_1' & \ell_2' m_2' \\ \ell_1 m_1 & \ell_2 m_2 \end{matrix} - \begin{matrix} \ell_1' & \ell_2' \\ \ell_2 & \ell_1 \end{matrix} \begin{matrix} m_1' & m_2' \\ \ell_1 m_1 & \ell_2 m_2 \end{matrix} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \langle \ell_1 \ell_2 \ell_1' \ell_2' | \langle n_1 \ell_1 m_1, n_2 \ell_2 m_2 | U_{12} | n_2' \ell_2' m_2', n_1' \ell_1' m_1' \rangle \\
 &\quad \times \left(\begin{matrix} \ell_1' m_1' & \ell_2' m_2' \\ \ell_1 m_1 & \ell_2 m_2 \end{matrix} - \begin{matrix} \ell_1' & \ell_2' \\ \ell_2 & \ell_1 \end{matrix} \begin{matrix} m_1' & m_2' \\ \ell_1 m_1 & \ell_2 m_2 \end{matrix} \right) \quad \dots (4.10)
 \end{aligned}$$

Haciendo un desarrollo multipolar de U_{12}

$$U_{12}(|r_1 - r_2|) = \sum_{\ell} V_{\ell}(r_1, r_2) P_{\ell}(\cos \theta_{12})$$

además

$$P_{\ell}(\cos \theta_{12}) = \frac{4\pi}{2\ell+1} \sum_m Y_{\ell m}^*(\theta_1, \phi_1) Y_{\ell m}(\theta_2, \phi_2)$$

y usando

$$|n \ell m\rangle = R_{n\ell}(r) Y_{\ell m}(\theta, \phi)$$

así como el valor dado en (3.11') para las integrales sobre productos de tres armónicos esféricos, se llega a la conclusión de -- que el elemento de matriz que aparece en (4.10) es igual a

$$\begin{aligned}
 &\langle n_1 \ell_1 m_1, n_2 \ell_2 m_2 | U_{12} | n_2' \ell_2' m_2', n_1' \ell_1' m_1' \rangle \\
 &= \sum_{\ell m} F_{\ell_1 \ell_2 \ell_2' \ell_1'}^{\ell} \left[\frac{(2\ell_1 + 1)}{(2\ell_2' + 1)} \right]^{1/2} \left[\frac{(2\ell_2 + 1)}{(2\ell_1' + 1)} \right]^{1/2} \langle \ell_1 \ell_2 0 0 | \ell_2' \ell_1' 0 0 \rangle
 \end{aligned}$$

$$x (-)^m \langle l_2 \ell_2 0 0 | l_1 \ell_1 0 \rangle \langle l_1 \ell_1 m_1 m_2 | l_2 m_2 \rangle \langle l_2 \ell_2 m_2 - m | l_1 m_1 \rangle \dots (4.11)$$

donde las $F_{j_1 j_2}^{l_1 l_2}$ son las integrales radiales de Slater definidas en (3.10).

Sustituyendo (4.11) en V_M y considerando el término lineal en ζ , el cual se indicará con $V_M^{(1)}$, se deduce que

$$V_M^{(1)} = -\frac{1}{2} \sum_{m_1 m_2} F_{m_1 m_2}^{l_1 l_2} \langle l_1 \ell_1 0 0 | l_2 \ell_2 0 \rangle \langle l_2 \ell_2 0 0 | l_1 \ell_1 0 \rangle \times (-)^m \begin{bmatrix} (2l_1+1) \\ (2l_2+1) \end{bmatrix}^{1/2} \langle l_1 \ell_1 m_1 m_2 | l_2 m_2 \rangle \langle l_2 \ell_2 m_2 - m | l_1 m_1 \rangle \times \zeta \begin{bmatrix} l_2 m_2 \\ l_1 m_1 \end{bmatrix} \dots (4.12)$$

Usando propiedades de simetría y ortogonalidad de los coeficientes de Clebsch-Gordan, la suma sobre m y m_2 resulta ser igual a $-(2l_2+1) \delta_{l_1 l_2} \delta_{m_1 m_2}$

y sustituyendo este resultado en (4.12)

$$V_M^{(1)} = -\frac{1}{2} \sum_{m_1} F_{m_1}^{l_1 l_2} (2l_2+1) \zeta \begin{bmatrix} l_1 m_1 \\ l_1 m_1 \end{bmatrix}$$

y ya que

$$\sum_{m_1} \begin{bmatrix} l_1 m_1 \\ l_1 m_1 \end{bmatrix} = \hat{N}_l$$

se obtiene finalmente

$$V_M^{(1)} = -\frac{1}{2} \sum_{l_1 l_2} F_{l_1 l_2}^{l_1 l_2} (2l_2+1) \hat{N}_l \dots (4.13)$$

El término de \mathcal{U}_M cuadrático en \mathcal{C} , el cual indicaremos con-

$\mathcal{U}_M^{(2)}$ es

$$\mathcal{U}_M^{(2)} = \frac{1}{2} \sum_{\substack{l_1 l_2 l_1' l_2' \\ m_1 m_2 m_1' m_2'}} \sum_{l m} F_{l_1 l_2 l_1' l_2' l_1}^{l m} (-)^m \left[\frac{(2l_1+1)(2l_2+1)}{(2l_2'+1)(2l_1'+1)} \right] \frac{1}{2}$$

$$\times \langle l_1 l_1' 0 0 | l_2 l_2' 0 \rangle \langle l_2 l_2' 0 0 | l_1 l_1' 0 \rangle \langle l_1 l_1' m_1 m_1' | l_2 m_2 \rangle$$

$$\times \langle l_2 l_2' m_2 m_2' | l_1 m_1 \rangle \times \mathcal{C}_{l_1 m_1}^{l_1 m_1} \mathcal{C}_{l_2 m_2}^{l_2 m_2}$$

Usando la identidad (19)

$$\sum_m (-)^m \langle l_1 l_1' m_1 m_1' | l_2 m_2 \rangle \langle l_2 l_2' m_2 m_2' | l_1 m_1 \rangle$$

$$= (-)^{l_1+l_1'+l_2+l_2'} \sum_{f \varphi} (2f+1) (-)^{f+\varphi} w(l_2 l_2' l_1 l_1'; f l)$$

$$\times \langle l_1 f m_1 \varphi | l_1 m_1 \rangle \langle l_2 f m_2 -\varphi | l_2 m_2 \rangle$$

obtenemos:

$$\mathcal{U}_M^{(2)} = \frac{1}{2} \sum_{\substack{l_1 l_2 l_1' l_2' \\ m_1 m_2 m_1' m_2'}} \sum_{l m} F_{l_1 l_2 l_1' l_2' l_1}^{l m} \left[\frac{(2l_1+1)(2l_2+1)}{(2l_2'+1)(2l_1'+1)} \right] \frac{1}{2}$$

$$\times \langle l_1 l_1' 0 0 | l_2 l_2' 0 \rangle \langle l_2 l_2' 0 0 | l_1 l_1' 0 \rangle (-)^{l_1+l_1'+l_2+l_2'}$$

$$\times \sum_{f \varphi} (2f+1) (-)^{f+\varphi} \times w(l_2 l_2' l_1 l_1'; f l) \langle l_2 f m_2 -\varphi | l_2 m_2 \rangle$$

$$\times \langle l_1 f m_1 \varphi | l_1 m_1 \rangle \mathcal{C}_{l_1 m_1}^{l_1 m_1} \mathcal{C}_{l_2 m_2}^{l_2 m_2} \dots (4.14)$$

Con los dos últimos coeficientes de C-G en (4.14) podemos construir operadores tensoriales unidad

$$U_{\varphi}^f(\ell_2 \ell_2^i) = \sum_{m_2 m_2^i} \langle \ell_2^f m_2 \varphi | \ell_2^i m_2^i \rangle \mathcal{C}_{\ell_2^i m_2^i}^{\ell_2 m_2}$$

y formar los productos escalares

$$U_{\varphi}^f(\ell_1 \ell_1^i) \cdot U_{\varphi}^f(\ell_2 \ell_2^i) = \sum_{m_1 m_1^i} (-)^{\varphi} \langle \ell_1^f m_1 \varphi | \ell_1^i m_1^i \rangle \\ \times \langle \ell_2^f m_2 - \varphi | \ell_2^i m_2^i \rangle \mathcal{C}_{\ell_1^i m_1^i}^{\ell_1 m_1} \mathcal{C}_{\ell_2^i m_2^i}^{\ell_2 m_2} \\ \dots (4.15)$$

que al substituirse en (4.14) dan lugar a la expresi3n

$$U_{\kappa}^{(2)} = \frac{1}{2} \sum_{\ell_1 \ell_2 \ell_1^i \ell_2^i} F^{\ell_1 \ell_2 \ell_1^i \ell_2^i} \left[\frac{(2\ell_1+1)(2\ell_2+1)}{(2\ell_1^i+1)(2\ell_2^i+1)} \right] \frac{1}{2} \\ \times \langle \ell_1 \ell_1^i 0 0 | \ell_2 \ell_2^i 0 0 \rangle \langle \ell_2 \ell_2^i 0 0 | \ell_1 \ell_1^i 0 0 \rangle (-)^{\ell_1+\ell_1^i+\ell_2+\ell_2^i+\ell_1+f} \\ \times (2f+1) W(\ell_2 \ell_2^i \ell_1 \ell_1^i; f \ell) \left[U_{\varphi}^f(\ell_1 \ell_1^i) \cdot U_{\varphi}^f(\ell_2 \ell_2^i) \right]$$

Por las reglas de selecci3n de momentos angulares y de los coefi-
cientes de Gaunt

$$|\ell_2 - \ell_1^i| \leq \ell \leq \ell_2 + \ell_1^i$$

$$|\ell_1^i - \ell_2| \leq \ell \leq \ell_1^i + \ell_2$$

$$\text{con } \ell_i, \ell_j = 0, 1$$

$$|\ell_2 - \ell_2^i| \leq f \leq \ell_2 + \ell_2^i$$

$$|\ell_1 - \ell_1^i| \leq f \leq \ell_1 + \ell_1^i$$

$$\ell_1 + \ell_1^i + \ell_2 = \text{par}$$

$$\ell_2 + \ell_2^i + \ell_1 = \text{par}$$

y los términos posibles de la suma en $\mathcal{V}_M^{(2)}$ son

l_1	l_2	l_2	l_1	l	r
1	1	1	1	0,2	0,1,2
1	1	0	0	0	1
1	0	1	0	1	1
1	0	0	1	1	0
0	1	1	0	1	0
0	1	0	1	1	1
0	0	1	1	0	1
0	0	0	0	0	0

Desarrollando $\mathcal{V}_M^{(2)}$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{V}_M^{(2)} &= \frac{1}{6} F_{1111}^0 [\underline{u}^0(11) \cdot \underline{u}^0(11)] + \frac{1}{2} [\underline{u}^1(11) \cdot \underline{u}^1(11)] F_{1111}^0 \\
 &+ \frac{5}{6} F_{1111}^0 [\underline{u}^2(11) \cdot \underline{u}^2(11)] + \frac{1}{15} F_{1111}^2 [\underline{u}^0(11) \cdot \underline{u}^0(11)] \\
 &- \frac{1}{10} F_{1111}^2 [\underline{u}^1(11) \cdot \underline{u}^1(11)] + \frac{1}{30} F_{1111}^2 [\underline{u}^2(11) \cdot \underline{u}^2(11)] \\
 &- \frac{3}{2} F_{1010}^0 [\underline{u}^1(10) \cdot \underline{u}^1(01)] + \frac{1}{2} F_{1100}^1 [\underline{u}^1(10) \cdot \underline{u}^1(10)]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{6} F_{1001}^1 [\underline{u}^0(11) \cdot \underline{u}^1(00)] + \frac{1}{6} F_{0110}^1 [\underline{u}^0(00) \cdot \underline{u}^0(11)] \\
 & + \frac{1}{6} F_{0011}^1 [\underline{u}^1(01) \cdot \underline{u}^1(01)] - \frac{3}{2} F_{0101}^0 [\underline{u}^1(01) \cdot \underline{u}^1(10)] \\
 & + \frac{1}{2} F_{0000}^0 [\underline{u}^0(00) \cdot \underline{u}^0(00)] \quad \dots (4.16)
 \end{aligned}$$

Por las propiedades de simetría de F

$$F_{1010}^0 = F_{0101}^0$$

$$F_{0011}^1 = F_{0110}^1 = F_{1001}^1 = F_{1100}^1$$

Los cuatro términos en (4.16) que contienen productos escalares de $\underline{u}^1(10)$ y $\underline{u}^1(01)$, podemos escribirlos como

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{6} F_{1001}^1 (\underline{A}\underline{A}) + 3\left(\frac{1}{6} F_{1001}^1 - \frac{1}{2} F_{1010}^0\right) \{ \underline{u}^1(10) \cdot \underline{u}^1(01) \\
 & \qquad \qquad \qquad + \underline{u}^1(01) \cdot \underline{u}^1(10) \}
 \end{aligned}$$

donde $\underline{A}_m = \underline{u}_m^1(01) - \sqrt{3} \underline{u}_m^1(10)$ es el mismo operador vectorial que apareció en el Cap. III.

Observando además que,

$$\underline{u}^0(11) = \hat{N}_1 \quad , \quad \underline{u}^0(00) = \hat{N}_0$$

obtenemos, agrupando términos en (4.16)

$$\begin{aligned}
 \mathcal{V}_M^{(2)} &= \frac{1}{6} F_{1111}^0 \sum_{f=0}^2 [\underline{u}^f(11) \cdot \underline{u}^f(11)] \quad (2f+1) \\
 & + \frac{1}{5} F_{1111}^2 \left[\frac{1}{3} \hat{N}_1^2 - \frac{1}{2} \underline{u}^1(11) \cdot \underline{u}^1(11) + \frac{1}{6} \underline{u}^2(11) \cdot \underline{u}^2(11) \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{3} F_{1001}^1 \hat{N}_1 \hat{N}_0 + \frac{1}{6} F_{1001}^1 (A \cdot A) + \frac{1}{2} F_{0000}^0 \hat{N}_0^2 \\
 & + \sqrt{3} \left(\frac{1}{6} F_{1001}^1 - \frac{1}{2} F_{1010}^0 \right) \left[\underline{u}^1(10) \cdot \underline{u}^1(01) + \underline{u}^1(01) \cdot \underline{u}^1(10) \right] \\
 & \dots(4.17)
 \end{aligned}$$

Procederemos ahora a expresar los dos últimos productos escalares de (4.17) en términos de operadores de Casimir.

El operador de Casimir de $\mathcal{U}(4)$ es (27)

$$\mathcal{C}(4) = \sum_{l, l'=0}^1 \mathcal{C}_{l m}^{l' m'} \mathcal{C}_{l' m'}^{l m}$$

Para $l, l'=1$ tenemos el operador de Casimir de $\mathcal{U}(3)$

$$\mathcal{C}(3) = \sum_{m m'} \mathcal{C}_{1 m}^{1 m'} \mathcal{C}_{1 m'}^{1 m}$$

por lo que

$$\begin{aligned}
 \mathcal{C}(4) = & \underbrace{\mathcal{C}_{00}^{00} \mathcal{C}_{00}^{00}}_{N_0^2} + \mathcal{C}(3) + \sum_m \mathcal{C}_{1 m}^{00} \mathcal{C}_{00}^{1 m} + \sum_m \mathcal{C}_{00}^{1 m} \mathcal{C}_{1 m}^{00} \\
 & \dots(4.18)
 \end{aligned}$$

Volviendo al producto escalar de operadores tensoriales unidad - (4.15)

$$\begin{aligned}
 \underline{u}_m^f(j_1 l_2) \cdot \underline{u}_m^f(j_2 l_1) = & \sum_{q m_1 m_2} (-)^q \langle l_1^f m_1 q | l_2^m \rangle \langle l_2^f m_2 -q | l_1^m \rangle \\
 & \times \mathcal{C}_{l_2^m}^{l_1^m} \mathcal{C}_{l_1^m}^{l_2^m}
 \end{aligned}$$

y particularizando esta fórmula a los casos

f	l_1	l_2
1	0	1
1	1	0

obtenemos

$$\underline{u}^1(01) \cdot \underline{u}^1(10) = \sum_{m_2} \frac{1}{\sqrt{3}} (-) \epsilon_{1m_2}^{00} \epsilon_{00}^{1m_2} \dots (4.19a)$$

$$\underline{u}^1(10) \cdot \underline{u}^1(01) = \sum_{m_1} \frac{1}{\sqrt{3}} (-) \epsilon_{00}^{1m_1} \epsilon_{1m_1}^{00} \dots (4.19b)$$

sustituyendo (4.19) en (4.18) tenemos

$$\Gamma(4) - \Gamma(3) - \hat{N}_0^2 = -\sqrt{3} [\underline{u}^1(01) \cdot \underline{u}^1(10) + \underline{u}^1(10) \cdot \underline{u}^1(01)] \dots (4.20)$$

y del Cap. III

$$\underline{L}^2 = 2 \underline{u}^1(11) \cdot \underline{u}^1(11)$$

$$y \quad \Gamma(3) = \frac{1}{3} \underbrace{\underline{u}^0(11) \cdot \underline{u}^0(11)}_{N_1^2} + \underbrace{\underline{u}^1(11) \cdot \underline{u}^1(11)}_{\frac{1}{2} \underline{L}^2} + \frac{5}{3} \underline{u}^2(11) \cdot \underline{u}^2(11)$$

de donde

$$\underline{u}^2(11) \cdot \underline{u}^2(11) = \frac{3}{5} \left[\Gamma(3) - \frac{1}{3} \hat{N}_1^2 - \frac{1}{2} \underline{L}^2 \right] \dots (4.21)$$

Sustituyendo (4.20) y (4.21) en (4.18) se obtiene la forma final de $\mathcal{V}_M^{(2)}$

$$\mathcal{V}_M^{(2)} = \frac{1}{2} F_{1111}^{0-} \Gamma(3) + \frac{1}{5} F_{1111}^2 \left\{ \frac{1}{3} \hat{N}_1^2 - \frac{1}{4} \underline{L}^2 + \left[\frac{1}{10} \Gamma(3) - \frac{1}{3} \hat{N}_1^2 \right] \right\}$$

$$-\frac{1}{2} \mathcal{L}^2 \} + \frac{1}{3} F_{1001}^1 \hat{N}_1 \hat{N}_0 + \frac{1}{6} F_{1001}^1 (\underline{A} \cdot \underline{A})$$

$$+ \left(\frac{1}{2} F_{1010}^0 - \frac{1}{6} F_{1001}^1 \right) \{ \Gamma(4) - \Gamma(3) - \hat{N}_0^2 \} + \frac{1}{2} F_{0000}^0 \hat{N}_0^2$$

Agregando a ésto el término lineal

$$U_M^{(1)} = -\frac{1}{2} \sum_{\ell_1 \ell_2} F_{\ell_1 \ell_2 \ell_1 \ell_2}^0 (2\ell_2 + 1) \hat{N}_{\ell_2 1}$$

$$= -\frac{1}{2} (F_{0000}^0 + 3 F_{1010}^0) \hat{N}_0 - \frac{1}{2} (3 F_{1111}^0 + F_{1010}^0) \hat{N}_1$$

se llega a la expresión final para la fuerza de Majorana

$$\sum_{r < s} U_{rs} P_M^{rs} = \frac{1}{2} F_{1111}^0 \Gamma(3) + \frac{1}{3} F_{1001}^1 \hat{N}_1 \hat{N}_0$$

$$+ \frac{1}{5} F_{1111}^2 \left\{ \frac{1}{3} \hat{N}_1^2 - \frac{1}{4} \mathcal{L}^2 + \frac{1}{10} [\Gamma(3) - \frac{1}{2} \mathcal{L}^2 - \frac{1}{3} \hat{N}_1^2] \right\}$$

$$+ \frac{1}{2} F_{0000}^0 \hat{N}_0^2 + \frac{1}{6} F_{1001}^1 (\underline{A} \cdot \underline{A})$$

$$+ \left(\frac{1}{2} F_{1010}^0 - \frac{1}{6} F_{1001}^1 \right) \{ \Gamma(4) - \Gamma(3) - \hat{N}_0^2 \}$$

$$- \frac{1}{2} (F_{0000}^0 + 3 F_{1010}^0) \hat{N}_0 - \frac{1}{2} (3 F_{1111}^0 + F_{1010}^0) \hat{N}_1$$

El operador $(\underline{A} \cdot \underline{A})$ que aparece en las fuerzas de Wigner y Majorana no es diagonal en la base $\mathcal{U}(3)$ que se ha adoptado. Sin embargo, al examinar el movimiento del centro de masa del núcleo se llega a la conclusión de que los elementos de matriz de $(\underline{A} \cdot \underline{A})$ en la base $\mathcal{U}(3)$ se pueden dar en forma explícita, como veremos en la siguiente sección.

4.3 Movimiento del centro de masa.

En esta parte se postula que el potencial central efectivo - que actúa sobre cada nucleón, es del tipo de oscilador armónico - con frecuencia ω .

La base antisimétrica que se ha adoptado $[[f][h]] \mathcal{A} M_L$, es una eigenbase del Hamiltoniano de un sistema de N osciladores -- independientes de frecuencia ω .

Para demostrar esta afirmación, consideramos el Hamiltoniano

$$H = \sum_{s=1}^N \left\{ \frac{p_s^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} x_s^2 \right\}$$

cuya expresión en segunda cuantización, según la fórmula para el operador de un cuerpo es

$$\begin{aligned} H &= \sum_{l, l', m, m'} \langle n, l, m | \left\{ \frac{p_s^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x_s^2}{2} \right\} | n', l', m' \rangle \mathcal{C}_{l, m}^{l', m'} \\ &= \sum_{l', m', l, m} \kappa \omega \left(2n + l + \frac{3}{2} \right) \delta_{l, l'} \delta_{m, m'} \mathcal{C}_{l, m}^{l', m'} \\ &= \kappa \omega \sum_l \left(2n + l + \frac{3}{2} \right) \hat{N}_l \end{aligned}$$

Como se está trabajando con $n=0$ y $l=0, 1$

$$H = \kappa \omega \left(\frac{3}{2} \hat{N}_0 + \frac{5}{2} \hat{N}_1 \right) = \kappa \omega \left(\frac{3}{2} \hat{N} + \hat{N}_1 \right) \quad \dots (4.22a)$$

$$\text{con } \hat{N} = \hat{N}_0 + \hat{N}_1$$

Al aplicar estos operadores \hat{N} y \hat{N}_1 sobre un estado de la base $\mathcal{U}(4) \supset \mathcal{U}(3)$, caracterizado por las particiones $[[f][h]]$, se obtiene

$$\hat{N} | [f][h] \beta L M \rangle = N | [f][h] \beta L M \rangle$$

$$\hat{N}_1 | [f][h] \beta L M \rangle = (h_1 + h_2 + h_3) | [f][h] \beta L M \rangle$$

donde los eigenvalores dan el número total de partículas (para \hat{N}) y en la subcapa $\ell=1$ (para \hat{N}_1). Con esto se ha comprobado que la base $\mathcal{U}(4) \supset \mathcal{U}(3)$ diagonaliza al Hamiltoniano H de un sistema de N osciladores independientes.

Se puede ahora expresar H como la suma de una parte "interna" (entre pares de partículas) y otra que describe el movimiento del centro de masa (C.M.):

Usando la identidad vectorial (20)

$$\sum_{s=1}^N \underline{v}_s^2 = \frac{1}{N} \sum_{s < t} (\underline{v}_s - \underline{v}_t)^2 + \frac{1}{N} \left(\sum_{s=1}^N \underline{v}_s \right)^2 \quad \dots(4.22)$$

e introduciendo la notación

$$\underline{R} = \frac{1}{N} \sum_{s=1}^N \underline{x}_s \quad ; \quad \underline{P} = \sum_{s=1}^N \underline{p}_s$$

para la posición del centro de masa y el ímpetu total, respectivamente, del sistema de osciladores, se deduce

$$H = \sum_{s < t} \left\{ \underbrace{\frac{(\underline{p}_s - \underline{p}_t)^2}{2mN} + \frac{m\omega^2 (\underline{x}_s - \underline{x}_t)^2}{2N}}_{H_{int}} \right\} + \underbrace{\left\{ \frac{\underline{P}^2}{(2mN)} + \frac{(Nm)\omega^2 \underline{R}^2}{2} \right\}}_{H_{CM}} \quad \dots(4.23)$$

donde el término H_{int} , el cual es invariante bajo translaciones, representa el movimiento interno ó intrínseco del sistema; mientras que el término H_{CM} describe el movimiento del C.M., el cual resulta ser formalmente idéntico al de un oscilador de masa (Nm)

y frecuencia ω , localizado en \mathbb{R} .

De acuerdo con Elliott y Skyrme (21), en el estudio de la estructura nuclear según el modelo de capas, se deben ignorar aquellas funciones de onda que describan situaciones en las que el C.M. está en un estado excitado. Tales funciones se dice que representan estados "escurios". Siguiendo este criterio, en la base $\mathcal{U}(4) \supset \mathcal{U}(3)$ que se ha discutido en la sección 4.1, sólo se conservarán aquellos estados que tengan la propiedad de que

$$H_{CM} | [f] [h] / \beta L M \rangle = \frac{3}{2} \hbar \omega | [f] [h] / \beta L M \rangle$$

que implica que el C.M. está en su estado base.

Ahora, para encontrar la expresión de H_{CM} en términos de -- operadores fermiónicos, se usa (4.23), para así escribir

$$H_{CM} = H - H_{int} \quad \dots(4.24)$$

y luego aplicar la fórmula general para interacciones de dos --- cuerpos (3.1) en el caso de H_{int} , con lo cual queda expresado H_{CM} en segunda cuantización. El análisis requiere el uso de propiedades elementales del oscilador armónico (ver Apéndice A).

El resultado al cual se llega eventualmente es

$$H_{CM} = \frac{\hbar \omega}{2N} [4 \hat{N}_1 - \hat{N}_0^2 + \Gamma(4) - \Gamma(3)] \quad \dots(4.24')$$

Aplicando este operador sobre estados de la base $\mathcal{U}(4) \supset \mathcal{U}(3)$,

$$| [f_1 f_2 f_3 f_4] [h_1 h_2 h_3] / \beta L M \rangle$$

se encuentra que el estado queda multiplicado por $\frac{3}{2} \hbar \omega$ solo --- cuando

$$h_1 = f_2, h_2 = f_3, h_3 = f_4 \quad \dots(4.25)$$

Para comprobar lo anterior, debe recordarse que,

$$f(4) = \sum_{s=1}^4 f_s (f_s + 5 - 2s)$$

$$f(3) = \sum_{s=1}^3 h_s (h_s + 4 - 2s)$$

$$N = f_1 + f_2 + f_3 + f_4 \quad \dots(4.26)$$

$$N_1 = h_1 + h_2 + h_3$$

$$N_0 = N - N_1$$

Sustituyendo en (4.24) las relaciones (4.26) y usando los valores de h dados en (4.25), se obtiene

$$\begin{aligned} \mu_{CM} &= \frac{M \omega}{2N} \left[4 (f_2 + f_3 + f_4) - f_1 + f_1 + 3 f_1 + f_2 - f_3 - 3 f_4 \right. \\ &\quad \left. - 2 f_2 + 2 f_4 \right] \\ &= \frac{M \omega}{2N} \left[3 f_1 + 3 f_2 + 3 f_3 + 3 f_4 \right] = \frac{3}{2} M \end{aligned}$$

Por otra parte, volviendo a la identidad (4.22) y a la definición del vector del CM, tenemos que

$$\frac{(Nm)\omega^2}{2} R^2 = \sum_{s=1}^N \frac{m\omega^2}{2} x_s^2 - \sum_{s < t}^N \frac{m\omega^2}{2N} (x_s - x_t)^2$$

El segundo miembro de esta identidad corresponde a las interacciones de uno y dos cuerpos. Al aplicar las fórmulas generales para estas interacciones, se encuentra que

$$\frac{(Nm)\omega^2}{2} |R^2 = \frac{\hbar\omega}{2N} \left\{ 2 \hat{N}_1 + \frac{1}{2} (A \cdot A) \right\}$$

y por lo tanto, respecto a la base no-espuria que se representará como

$$| [f_1 f_2 f_3 f_4] [f_2 f_3 f_4] / L M \rangle = | \alpha \rangle_{n.e.}$$

donde α simboliza todos los números cuánticos, se tiene

$$n.e. \langle \alpha' | (A \cdot A) | \alpha \rangle_{n.e.} = -4 N_1 \delta_{\alpha\alpha'} + \frac{4 N}{\hbar\omega} n.e. \langle \alpha' | \frac{Nm\omega^2}{2} |R^2 | \alpha \rangle_{n.e.}$$

...(4.27)

en el cual el término $\frac{(Nm)\omega^2}{2} |R^2$ representa la energía potencial del oscilador armónico correspondiente al CM. Debido a propiedades del oscilador armónico se sabe que, dentro de un elemento de matriz, este término solo puede conectar un estado de n cuantos con otro estado que tenga $n+2$, n ó $n-2$ cuantos de energía.

En la base no-espuria $|\alpha\rangle_{n.e.}$, en relación a las variables del CM, $|R$ y $|P$, todos los estados son de cero cuantos, por lo que el elemento de matriz $n.e. \langle \alpha' | \frac{(Nm)\omega^2}{2} |R^2 | \alpha \rangle_{n.e.}$, es el valor de expectación de la energía potencial de un oscilador armónico en su estado base. Se sabe que éste vale la mitad de la energía del estado base, es decir $\frac{3}{4} \hbar\omega$, por lo que (4.27) queda en la forma

$$n.e. \langle \alpha' | (A \cdot A) | \alpha \rangle_{n.e.} = (3N - 4N_1) \delta_{\alpha\alpha'}$$

Con esto queda demostrado que, respecto a estados $n.e.$ (no espurios) de la base $\mathcal{U}(4) \supset \mathcal{U}(3)$ los elementos de matriz de $(A \cdot A)$ son diagonales, de modo que la interacción de Wigner-Majo-

rana también lo es.

Como una ilustración se mencionarán los estados n.e. de la base $\mathcal{U}(4) \supset \mathcal{U}(3)$ para el caso $N=4$, y sus correspondientes energías:

$$\begin{aligned}
 | [4 \ 0 \ 0 \ 0] [0 \ 0 \ 0] L^{\pi} = 0^{+}; S=T=0 \rangle & \quad E=6 \ \mu\omega \\
 | [3 \ 1 \ 0 \ 0] [1 \ 0 \ 0] L^{\pi} = 1^{-}; S \ T \rangle & \quad E= 7 \ \mu\omega, (ST): (01), (10), (11) \\
 | [2 \ 2 \ 0 \ 0] [2 \ 0 \ 0] L^{\pi} = 0^{+}, 2^{+}; ST \rangle & \quad E= 8 \ \mu\omega, (ST): (00), (02), (20), \\
 & \quad (11) \\
 | [2 \ 1 \ 1 \ 0] [1 \ 1 \ 0] L^{\pi} = 1^{+}; ST \rangle & \quad E= 8 \ \mu\omega, (ST): (01), (10), (11), \\
 & \quad (12), (21) \\
 | [1 \ 1 \ 1 \ 1] [1 \ 1 \ 1] L^{\pi} = 0^{-}; ST \rangle & \quad E= 9 \ \mu\omega, (ST): (00), (11), (22)
 \end{aligned}$$

La interacción tipo $W + M$ que se ha discutido antes no separa los diferentes multipletes (ST) que ocurren dentro de un supermultiplete $[f_1^i f_2^i f_3^i f_4^i]$ (i.e., una RI de $U(4)$). El espectro que predice el análisis para un sistema de $N=4$ nucleones, consiste de 6 niveles (4 de paridad + y 2 de paridad -) que presentan una gran degeneración, excepto aquél que tiene los números cuánticos $L^{\pi}ST = 0^{+}00$, el cual debe corresponder al estado base. Para lograr la separación de los multipletes (ST) habría que considerar una fuerza más general con componentes de Bartlett y/o Heisenberg.

Finalmente queremos añadir que con relación a la aplicación del operador H_{CM} , en la forma (4.24), sobre estados de la base $\mathcal{U}(4) \supset \mathcal{U}(3)$, el factor por el cual queda multiplicado el estado correspondiente no siempre es de la forma $(n+3) \ \mu\omega$, $n=0,1,2,\dots$. Por ejemplo, al aplicar H_{CM} sobre $| [4 \ 0 \ 0 \ 0] [2 \ 0 \ 0] L \ S \ T \rangle$, el --

estado queda multiplicado por $3 \hbar \omega$. La explicación de este hecho es que tal estado corresponde a una configuración de 4 partículas en orbitales de oscilador del tipo $|1\rangle = (0s)^2(0p)^2$, pero existe otra configuración de la misma energía $|2\rangle = (0s)^3(1s, 0d)^1$, y como ha demostrado Verhaar (22), por combinación lineal de $|1\rangle$ y $|2\rangle$ se obtienen un estado real y otro "espurio". Esto implica que $|1\rangle$ tiene una componente "espuria" y por esta razón fué que se eliminó en la lista anterior. La matriz de H_{CM} en la base $|1\rangle, |2\rangle$ es una matriz hermitiana 2×2 cuyo primer elemento es $\langle 1 | H_{CM} | 1 \rangle = 3 \hbar \omega, \langle 2 | H_{CM} | 2 \rangle = 2 \hbar \omega$ no se pueden obtener ya que, el análisis no incluye el orbital $(1s, 0d)$ del oscilador y por lo tanto, no incluye el estado $|2\rangle$.

Comentarios.

Uno de los principios básicos de la física cuántica aplicada a sistemas de partículas idénticas con spin $\frac{1}{2}$ es el principio de exclusión de Pauli. En esta tesis se ha estudiado un formalismo introducido por Jordan y Wigner (23) que permite satisfacer el principio de Pauli en una forma sencilla: la segunda cuantización con operadores fermiónicos de creación y aniquilación. Estos operadores, a su vez, permiten obtener realizaciones de generadores de un grupo unitario fundamental y de sus subgrupos (3). Muchos de estos generadores tienen un significado físico relevante para el problema. La limitación en nuestro análisis a los momentos angulares orbitales $l=0,1$ para las partículas, introduce de manera natural un grupo $U(4)$, el cual admite dos subgrupos distintos de interés físico: $U(3)$ y $O(4)$. La caracterización de una base antisimétrica clasificada según estos dos grupos se presentó, para el caso atómico en el Capítulo II y para el caso nuclear en el Capítulo IV.

Un aspecto de cierto interés en el presente análisis es ver cuál de las dos bases es más adecuada desde el punto de vista físico, en el sentido de que los eigenestados del hamiltoniano físico tengan un mayor traslape con los estados de la base. Para el problema atómico este aspecto fué analizado en la Ref. (24), en donde se llegó a la conclusión de que la base $U(3)$ es más adecuada, ya que la matriz del Hamiltoniano de N electrones con interacciones coulombianas entre ellos y con el núcleo, tiene elementos extra diagonales más pequeños cuando se construye respecto a la base $U(3)$. Incidentalmente, el problema de N electrones atraídos al núcleo por la fuerza de Coulomb, pero sin interacción mutua, tiene una invariancia bajo $O(4)$ cuando todos los electrones tienen el mismo número cuántico principal, i. e., los eigenestados de este sistema son base de RI de $O(4)$. La relación interelec

trónica destruye esta simetría, pero podría suponerse que el rompimiento es suficientemente débil para que la clasificación por $O(4)$ fuera mejor que por $U(3)$. Sin embargo, el cálculo efectuado en la Ref. (24) indica que tal suposición no es sostenible.

Con respecto al problema nuclear, en el Cap. IV (secc. 4.3) se llegó a la conclusión de que, al restringir la base $U(3)$ a aquellos elementos que no tienen ninguna componente "espuria" con el C.M. en un estado excitado, el operador de Casimir de $O(4)$: $\phi = \mathcal{A}\mathcal{A} + \frac{1}{2}\mathcal{L}^2$ resulta ser diagonal, por lo que la base $U(3)$ así restringida resulta ser la adecuada desde el punto de vista físico, para las interacciones que fueron examinadas en el Cap. IV, i.e. Wigner+Majorana.

Otro aspecto del problema que vale la pena resaltar, es el hecho de que las interacciones se pudieron expresar en términos de operadores de Casimir de los grupos que aparecen en los dos esquemas de clasificación. Esta es una circunstancia afortunada que ocurre debido a la relativa sencillez del problema. Este hecho, complementado con el conocimiento de los coeficientes de transformación de una base a la otra, permite escribir las matrices del Hamiltoniano inmediatamente. Se puede mencionar que en el caso de sistemas de electrones en configuraciones $(d)^n$ ó en el caso de nucleones bajo fuerzas de Bartlett ó Heisenberg, no todos los productos escalares análogos a $U^k \cdot U^k$ que figuran en la interacción se pueden expresar en términos de operadores de Casimir de grupos asociados al problema. En tales casos, para obtener la matriz de la energía hay que utilizar un método recursivo asociado al concepto de "parentesco" fraccional.

En conclusión, consideramos que los temas estudiados en esta tesis han servido a su autora como una introducción a un campo en constante crecimiento y que se designa con el nombre de "teoría de grupos y espectroscopía atómica y nuclear". Una visión panorámica de este campo se presenta en las ref. (8) y (25).

APENDICE A

Cálculo del Hamiltoniano correspondiente al centro de masa - para un sistema de osciladores armónicos.

Partiremos de la expresión

$$H_{C.M.} = H - H_{int} \quad \dots(4.24)$$

con H dada por (4.22 a)

$$H = M \omega^2 \left(\frac{3}{2} \hat{N} + \hat{N}_1 \right)$$

y

$$H_{int} = \sum_{s < t} \frac{(p_s - p_t)^2}{2mN} + \frac{m\omega^2 (x_s - x_t)^2}{2N}$$

Para calcular H_{int} usamos el operador para dos cuerpos

$$V = \frac{1}{2} \sum_{\substack{l_1 l_2 m_1 m_2 \\ l_1 l_2 m_1 m_2}} \langle n_1 l_1 m_1, n_2 l_2 m_2 | \mathcal{E}_{12} | n_1 l_1 m_1, n_2 l_2 m_2 \rangle \dots(3.1)$$

$$x \mathcal{E}_{1 m_1}^{l_1 m_1} \mathcal{E}_{2 m_2}^{l_2 m_2} - \mathcal{E}_{2 m_2}^{l_1 m_1} \mathcal{E}_{1 m_1}^{l_2 m_2}$$

con \mathcal{E}_{12} correspondiente a H_{int}

Pero antes, expresaremos x_s y p_s en términos de operadores bosónicos

$$x_s = \frac{1}{\sqrt{2}} (x_s - i p_s)$$

$$x_s = \frac{1}{\sqrt{2}} (\xi_s + \eta_s)$$

$$s = 1, 2$$

$$\xi_s = \frac{1}{\sqrt{2}} (x_s + ip_s)$$

$$p_s = \frac{i}{\sqrt{2}} (\eta_s - \xi_s)$$

entonces,

$$\begin{aligned} (p_1 - p_2)^2 = & -\frac{1}{2} [(\eta_1^2 + \xi_1^2 + \eta_2^2 + \xi_2^2 - 2\eta_1\eta_2 - \eta_1\xi_1 - \xi_1\eta_1 \\ & + 2\eta_1\xi_2 + 2\eta_2\xi_1 - \eta_2\xi_2 - \xi_2\eta_2 - 2\xi_1\xi_2] \end{aligned}$$

...(A.1)

análogamente para x_s

$$\begin{aligned} (x_1 - x_2)^2 = & \frac{1}{2} [(\eta_1^2 + \xi_1^2 + \eta_2^2 + \xi_2^2 - 2\eta_1\eta_2 + \eta_1\xi_1 + \xi_1\eta_1 \\ & - 2\eta_1\xi_2 - 2\eta_2\xi_1 + \eta_2\xi_2 + \xi_2\eta_2 - 2\xi_1\xi_2] \end{aligned}$$

...(A.2)

Mientras que por otro lado tenemos que el conmutador

$$[\xi_r, \eta_s] = \delta_{rs}$$

por lo tanto,

$$\xi_r \eta_r = \eta_r \xi_r + 3$$

ya que tenemos tres componentes espaciales para cada r .

Sumando (A.1) y (A.2) y tomando convenientemente las unidades de m y \hbar , tenemos que,

$$\sigma_{12} = \eta_1 \xi_1 + \eta_2 \xi_2 + 3 - (\eta_1 \xi_2 + \eta_2 \xi_1) \frac{1}{N} \quad \dots (A.3)$$

Por otro lado, el Hamiltoniano de un cuerpo en operadores bosónicos es

$$\begin{aligned} \sum_s \left(\frac{p_s^2}{2} + \frac{1}{2} x_s^2 \right) &= \sum_s (-) \frac{1}{2} (\eta_s - \xi_s)^2 + \frac{1}{2} (\eta_s + \xi_s)^2 \\ &= \frac{1}{2} [\eta_s \xi_s + \xi_s \eta_s + \frac{1}{2} \eta_s \xi_s + \frac{1}{2} \xi_s \eta_s] \\ &= \frac{1}{2} [\eta_s \xi_s + \xi_s \eta_s] = \frac{1}{2} \eta_s \xi_s + 3 \end{aligned}$$

que corresponde a los tres primeros términos de (A.3) y entonces al aplicarles al operador de dos cuerpos nos da

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2N} \sum_{\substack{l_1 l_1' m_1 m_1' \\ l_2 l_2' m_2 m_2'}} \langle n_1 l_1 m_1, n_2 l_2 m_2 | \sum_s \eta_s \xi_s + 3 | n_1 l_1 m_1, n_2 l_2 m_2 \rangle \\ &\quad \times \left\{ C_{l_1 m_1}^{l_1' m_1'} C_{l_2 m_2}^{l_2' m_2'} - C_{l_2 m_2}^{l_2' m_2'} C_{l_1 m_1}^{l_1' m_1'} \right\} \\ &= \frac{1}{2N} \sum_{l_1 l_2} (2n_1 + l_1 + \frac{3}{2} + 2n_2 + l_2 + \frac{3}{2}) \delta_{n_1 n_1'} \delta_{n_2 n_2'} \delta_{m_1 m_1'} \\ &\quad \times \left\{ C_{l_1 m_1}^{l_1' m_1'} C_{l_2 m_2}^{l_2' m_2'} - C_{l_2 m_2}^{l_2' m_2'} C_{l_1 m_1}^{l_1' m_1'} \right\} \\ &= \frac{1}{2N} \sum_{l_1 l_2} (2n_1 + l_1 + 2n_2 + l_2 + 3) \left\{ \hat{N}_{l_1} \hat{N}_{l_2} - \hat{N}_{l_1} \right\} \end{aligned}$$

ya que $n_s = 0$

$$= \frac{1}{2N} \sum_{l_1 l_2} (l_1 + l_2 + 3) (\hat{N}_{l_1} \hat{N}_{l_2} - \hat{N}_{l_1})$$

$$= \frac{1}{2N} (3\hat{N}_0^2 - 3\hat{N}_0 + 8\hat{N}_0\hat{N}_1 + 5\hat{N}_1^2 - 5\hat{N}_1) \quad \dots(A.4)$$

Para los dos últimos términos de (A.3) al aplicarla al elemento de matriz

$$\langle n_1^i \ell_1^i m_1^i, n_2^i \ell_2^i m_2^i | \eta_1 \xi_2 + \eta_2 \xi_1 | n_1^i \ell_1^i m_1^i, n_2^i \ell_2^i m_2^i \rangle \quad \dots(A.5)$$

usando la identidad para el producto escalar de dos vectores

$$R_k \cdot S_k = \sum_q (-)^q R_{kq} S_{k-q} \quad \text{con } k=1$$

y el teorema de W-E

$$\begin{aligned} &= \sum_m (-)^m \langle \ell_1^i m_1^i | \ell_1^i m_1^i \rangle \langle \ell_2^i m_2^i | \ell_2^i m_2^i - m \rangle \\ &\times \langle n_1^i \ell_1^i | \eta_1 | n_1^i \ell_1^i \rangle \langle n_2^i \ell_2^i | \xi_2 | n_2^i \ell_2^i \rangle \quad \dots(A.6) \\ &\times \langle n_1^i \ell_1^i | \xi_1 | n_1^i \ell_1^i \rangle \langle n_2^i \ell_2^i | \eta_2 | n_2^i \ell_2^i \rangle \end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned} \langle n^i \ell^i | \eta | n \ell \rangle &= \sqrt{\frac{(2n+2\ell+3)(\ell+1)}{(2\ell+3)}} \delta_{n^i, n} \delta_{\ell^i, \ell+1} \\ &+ \sqrt{\frac{(2n+2)\ell}{(2\ell-1)}} \delta_{n^i, n+1} \delta_{\ell^i, \ell-1} \\ \langle n^i \ell^i | \xi | n \ell \rangle &= -\sqrt{\frac{(2n+2\ell+1)\ell}{(2\ell-1)}} \delta_{n^i, n} \delta_{\ell^i, \ell-1} \\ &- \sqrt{\frac{2n(\ell+1)}{(2\ell+3)}} \delta_{n^i, n-1} \delta_{\ell^i, \ell+1} \end{aligned}$$

y como estamos restringidos a $n_s=0$, substituyendo estas dos últimas expresiones en (A.6)

$$\begin{aligned}
 &= (-)^{\sum m} (-)^m \langle l_1 l m_1 m | l_1^i m_1^i \rangle \langle l_2 l m_2 - m | l_2^i m_2^i \rangle \\
 &\times \sqrt{\frac{(l_1+1)(2l_2+1)l_2}{(2l_2-1)}} \delta_{l_1^i, l_1+1} \delta_{l_2^i, l_2-1} \\
 &\times \sqrt{\frac{(2l_1+1)(l_2+1)l_1}{(2l_1-1)}} \delta_{l_1^i, l_1-1} \delta_{l_2^i, l_2+1}
 \end{aligned}$$

además, usando (3.15), (3.15') y sustituyendo el elemento de matriz en el operador para dos cuernos (3.1), obtenemos

$$\begin{aligned}
 V &= -\frac{1}{2\pi} \sum_{\substack{l_1 l_2 \\ l_1^i l_2^i}} u^{\dagger}(l_1 l_1^i) \cdot u^{\dagger}(l_2 l_2^i) \\
 &\times \sqrt{\frac{(l_1+1)(2l_2+1)l_2}{(2l_2-1)}} \delta_{l_1^i, l_1+1} \delta_{l_2^i, l_2-1} \\
 &\times \sqrt{\frac{(l_2+1)(2l_1+1)l_1}{(2l_1-1)}} \delta_{l_1^i, l_1-1} \delta_{l_2^i, l_2+1} \\
 &+ \frac{1}{2\pi} \sum_{\substack{l_1 l_2 \\ m_1 m_2}} \sum_{m_1^i m_2^i} (-)^m \langle l_1 l m_1 m | l_1^i m_1^i \rangle \langle l_2 l m_2 - m | l_2^i m_2^i \rangle \\
 &\times \left. \begin{aligned} &\delta_{l_1^i, l_1+1} \delta_{l_2^i, l_2-1} \\ &\delta_{l_1^i, l_1-1} \delta_{l_2^i, l_2+1} \end{aligned} \right\} \sqrt{\frac{(l_1+1)(2l_2+1)l_2}{(2l_2-1)}} \\
 &\quad + \sqrt{\frac{(l_2+1)(2l_1+1)l_1}{(2l_1-1)}} \delta_{l_1^i, l_1+1} \delta_{l_2^i, l_2-1} \\
 &\quad + \sqrt{\frac{(l_2+1)(2l_1+1)l_1}{(2l_1-1)}} \delta_{l_1^i, l_1-1} \delta_{l_2^i, l_2+1}
 \end{aligned}$$

Para la parte bilineal, la cual llamaremos $V^{(2)}$, tenemos que considerando las δ 's y las reglas de selección de las u 's (ver sección 3.1)

$$l_s + l'_s \leq l \leq l_s - l'_s$$

y

$$l_s + l'_s + l = \text{par}$$

con $l=1$ y $l'_s=0,1$; la única combinación posible es

$$\begin{array}{cccc}
 l_s & \cdot & l'_s & + & 1 & = & l'_s & & l_s & \cdot & l'_s & - & 1 & = & l'_s \\
 0 & & 1 & & & & & & 1 & & 0 & & & & 0
 \end{array}$$

Entonces, la parte bilineal de V queda,

$$\begin{aligned}
 V^{(2)} &= \frac{-1}{N^2} \left\{ \sum_{l_1, l_2} \underline{u}^1(l_1, l_1+1) \cdot \underline{u}^1(l_2, l_2-1) \sqrt{\frac{(l_1+1)(2l_2+1)l_2}{(2l_2-1)}} \right. \\
 &\quad \left. + \underline{u}^1(l_1, l_1-1) \cdot \underline{u}^1(l_2, l_2+1) \sqrt{\frac{(l_2+1)(2l_1+1)l_1}{(2l_1-1)}} \right\} \\
 &= \frac{-1}{2N} \left[\sqrt{3} \right] \left\{ \underline{u}^1(01) \cdot \underline{u}^1(10) + \underline{u}^1(10) \cdot \underline{u}^1(01) \right\}
 \end{aligned}$$

y usando (4.20), $V^{(2)}$ queda expresado en forma de operadores de Casimir

$$V^{(2)} = +\frac{1}{2N} (\Gamma(4) - \Gamma(3) - N_0^2) \dots (A.7)$$

Respecto a la parte lineal del operador de dos cuerpos, $V^{(1)}$, tenemos que,

$$\begin{aligned}
 v^{(1)} &= \frac{1}{2N} \sum_{\substack{l_1 l_2 l_1' \\ m_1 m_2 m_1'}} (-)^m \langle l_1 m_1 m | l_1 m_1' \rangle \langle l_2 m_2 -m | l_1 m_1 \rangle \\
 &\times \left\{ \begin{aligned} &S_{l_2, l_1+1} S_{l_1, l_2-1} \\ &+ \frac{\sqrt{(l_1+1)(2l_2+1)l_2}}{(2l_2-1)} S_{l_1, l_1+1} S_{l_1, l_2-1} \\ &+ \frac{\sqrt{(l_2+1)(2l_1+1)l_1}}{(2l_2-1)} S_{l_1, l_1-1} S_{l_1, l_2+1} \end{aligned} \right\}
 \end{aligned}$$

usando las S 's y propiedades de los coeficientes de W-E

$$\begin{aligned}
 v^{(1)} &= \frac{1}{2N} \sum_{l_1 l_2} (-)^{l_1 l_2} \sqrt{\frac{2l_1+1}{2l_2+1}} \hat{N}_{l_2} \\
 &\times \left\{ \begin{aligned} &\sqrt{\frac{(l_1+1)(2l_2+1)l_2}{(2l_2-1)}} S_{l_2, l_1+1} \\ &+ \sqrt{\frac{(l_2+1)(2l_1+1)l_1}{(2l_1-1)}} S_{l_1, l_2+1} \end{aligned} \right\}
 \end{aligned}$$

aplicando nuevamente las S 's, tenemos para l_1 y l_2

$\frac{l_2, l_1+1}{1 \quad 1}$	$\frac{l_1, l_2+1}{1 \quad 1}$
$l_2=1$	$l_1=1$
$l_1=0$	$l_2=0$

y entonces,

$$v^{(1)} = -\frac{1}{2N} N_1 - \frac{3}{2N} N_0 \quad \dots (A.8)$$

Al sumar (A.7) y (A.8), obtenemos

$$V = \frac{1}{2I} (\Gamma'(4) - \Gamma'(3) - \hat{N}_0^2) - \frac{1}{2} (\hat{N}_1 + 3 \hat{N}_0) \quad \dots(A.9)$$

Sustituyendo (A.4) y (A.9) en (A.3) obtenemos H_{int}

$$H_{int} = \frac{\mu\omega}{2N} (3 \hat{N}_0^2 - 3 \hat{N}_0 + 8 \hat{N}_0 \hat{N}_1 + 5 \hat{N}_1^2 - 5 \hat{N}_1) \quad \dots(A.10)$$

$$- \frac{\mu\omega}{2N} (\Gamma'(4) - \Gamma'(3) - \hat{N}_0^2) + \frac{\mu\omega}{2N} (\hat{N}_1 + 3 \hat{N}_0)$$

Finalmente, si sustituimos H dada por (4.22a) y H_{int} dada por (A.10) en (4.24) obtenemos el Hamiltoniano correspondiente al centro de masa

$$|H_{CM} = \frac{\mu\omega}{2} (3\hat{N}_0 + 5\hat{N}_1) - \frac{1}{2} \frac{\mu\omega}{N} (3\hat{N}_0^2 - 3\hat{N}_0 + 8\hat{N}_0\hat{N}_1 + 5\hat{N}_1^2 - 5\hat{N}_1)$$

$$- \frac{\mu\omega}{2N} (3\hat{N}_0^2 - 3\hat{N}_0 + 8\hat{N}_0\hat{N}_1 + 5\hat{N}_1^2 - 5\hat{N}_1)$$

$$+ \frac{\mu\omega}{2N} (\Gamma'(4) - \Gamma'(3) - \hat{N}_0^2) - \frac{\mu\omega}{2N} (\hat{N}_1 + 3\hat{N}_0)$$

$$\text{con } (3\hat{N}_0 + 5\hat{N}_1)(\hat{N}_0 + \hat{N}_1) = 3\hat{N}_0^2 + 8\hat{N}_0\hat{N}_1 + 5\hat{N}_1^2$$

$$|H_{CM} = \frac{\mu\omega}{2N} (3\hat{N}_0^2 + 8\hat{N}_0\hat{N}_1 + 5\hat{N}_1^2 - 3\hat{N}_0^2 + 3\hat{N}_0 - 8\hat{N}_0\hat{N}_1 - 5\hat{N}_1^2 + 5\hat{N}_1$$

$$- 3\hat{N}_0^2 + 3\hat{N}_0 - 8\hat{N}_0\hat{N}_1 - 5\hat{N}_1^2 + 5\hat{N}_1 + \Gamma'(4) - \Gamma'(3)$$

$$- \hat{N}_0^2 - \hat{N}_1 - 3\hat{N}_0)$$

$$|H_{CM} = \frac{\mu\omega}{2N} (\Gamma'(4) - \Gamma'(3) - \hat{N}_0^2 + 4\hat{N}_1)$$

Referencias

1. E.U. Condon y G.H. Shertley: Theory of Atomic Spectra
Cambridge Univ. Press. Londres (1935),177
2. A de Shalit y H. Feshbach: Theoretical Physics Vol. I
Academic Press,Nueva York (1963),508
3. M. Meshinsky: Group Theory and the Many Body Problem
Gorden and Breach,Nueva York (1965),4,10,16
4. D.M. Brink and Satchler: Angular Momentum
Clarendon Press,Oxford (1968),56
5. M. Hamermesh: Group Theory and its applications to physical problems
Addison Wesley,Reading Mass. (1962),198,387
6. M. Hamermesh,loc. cit. pp. 394-429
7. H.A. Jahn,Proc. Roy. Soc. of London,A 201 (1950),516
8. B.R. Judd,Group Theory and its applications Vol. I
E.M. Leubl,Academic Press,Nueva York (1968),183
9. M. Meshinsky,loc. cit. p. 7
10. J. C. Slater,Quantum Theory of Atomic Structure Vol. II
Mc. Graw Hill,Nueva York (1960),pp. 1-30
11. E.U. Condon and G.H. Shertley,loc. cit. p. 174
12. D.M. Brink and Sachtler,loc. cit. p. 28
13. S. de Benedetti,Nuclear Interactions
J. Wiley,Nueva York (1964),22
14. J.P. Elliott,Proc. of Roy. Soc. A 245 (1958),128
15. M. Meshinsky,loc. cit. p. 67
16. M. Hamermesh,loc. cit. p. 443
17. L.R. Elton,Introductory Nuclear Theory
Pidman,Londres (1959),pp. 86-99
18. S. de Benedetti,loc. cit. pp. 26-31,39-45,56-66
19. D.M. Brink and Sachtler,loc. cit. p. 141

20. A de Shalit and H. Feshbach, loc. cit. p. 196
21. J.P. Elliott and T.H.R. Skyrme, Proc. Roy. Soc., London
A 232 (1955), 561
22. B.J. Verhaar, Nuclear Physics 21, (1960), 508
23. P. Jordan and E. Wigner, Zeitschrift für Physik Vol. 47
(1928), 631
24. E. Chacón, M. Meshinsky, O. Novare y C. Wulfman; Phys. Rev
A 3, (1971), 166
25. B.G. Wybourne, Classical Groups for Physicists
J. Wiley, Nueva York, (1974)
26. G. Racah, Phys. Rev. 76, (1949), 1352
27. M. Meshinsky, loc. cit. p. 55