UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

Facultad de Ciencias

PRINCIPIO VARIACIONAL DE SCHWINGER Y SUPERSIMETRIA EN MECANICA CUANTICA

T E S I S

Que para obtener el título de:

F I S I C O

P r e s e n t a :

Eduardo Antonio Hernández Pérez

México, D. F. 1983

P R E F A C I O

Existe la esperanza que las simetrías recientemente — descubiertas entre fermiones y bosones (Supersimetría) lleguen a jugar un papel importante en la unificación de las interacciones fundamentales. Es muy deseable contar con modelos simples de estas teorías de tal manera de poder explorar sus - consecuencias con un mínimo de complicaciones algebráicas aún cuando se corra el riesgo de una sobresimplificación. Es interesante notar que ya a nivel de Mecánica Cuántica (Teoría de Campo en cero dimensiones espaciales) es posible encontrar -- sistemas que presenten invariancia bajo supersimetrías globales. Las variables bosónicas estan representadas por operadores que satisfacen reglas de conmutación (operadores de posición y momentum por ejemplo), mientras que las fermiónicas -- por operadores que satisfacen reglas de anticonmutación (operadores de spín). Ambos tipos de variables aparecen en forma natural cuando se emplea la descripción de la mecánica cuántica en base al Principio de Acción de Schwinger. Así, entonces el estudio de estos sistemas provee un marco relativamente -- simple donde aparecen todos los ingredientes esenciales de -- las teorías supersimétricas globales de campo.

Este trabajo esta estructurado de la siguiente manera. En el cap. I hacemos una revisión de la teoría general -- del principio de Acción de Schwinger, enfatizando la posibilidad de introducir variables fermiónicas a través de este principio. En primer lugar mostramos como la mecánica cuántica -- usual para las variables canónicas p y q contiene el princi--

pio de acción en una formulación Lagrangiana de primer orden. En seguida se invierte este proceso, partiendo siempre de un Lagrangiano de primer orden, sin hacer suposiciones a priori de las relaciones de conmutación entre las variables dinámicas. Empleando algunas hipótesis adicionales se muestra que existen dos tipos fundamentales de variables, que satisfacen relaciones de conmutación (variables bosónicas) y de anticonmutación (variables fermiónicas), respectivamente. Además se indica como obtener las relaciones de conmutación entre las variables de diferente tipo y también entre las variables y sus variaciones.

En el cap. II aplicamos la teoría desarrollada a sistemas con variables de un solo tipo, para ganar familiaridad con la teoría. En particular se considera el problema del cálculo de la función de transformación (función de Green) para el análogo cuántico de un oscilador amortiguado forezado con parámetros dependientes del tiempo. Estos sistemas cuádraticos producen ecuaciones de movimiento lineales para los operadores cuánticos, que pueden resolverse en términos de las condiciones iniciales (dadas en forma de operadores), de ciertas funciones numéricas auxiliares donde se concentra toda la dependencia temporal de los parámetros del sistema. Este hecho permite usar una aplicación bastante directa del principio de acción para calcular la función de transformación. El resultado se compara con cálculos previos existentes en la literatura y además se aclara la aparente dependencia de uno de estos resultados con respecto a ciertas condiciones de frontera arbitrarias.

Iniciamos el cap III con el estudio de modelos unidimensionales (en las variables bosónicas), que mezclan variables fermiónicas y cuya interacción es invariante bajo supersimetría. En la construcción de estos modelos es conveniente partir de la formulación de supersimetría en superespacio en lugar de usar un método constructivo que va generando tanto las interacciones como las transformaciones a partir de la teoría libre.

El superespacio que consideramos aquí incluye la coordenada temporal usual y además posee dos coordenadas adicionales que son números de Grassmann. La supersimetría esta definida como la invariancia bajo translaciones en el superespacio. Usando esta formulación en superespacio se construyen acciones invariantes bajo supersimetría a un nivel clásico en el cual las variables bosónicas estan representadas por números ususales y las variables fermiónicas por números de Grassmann. Para hacer contacto con el principio de acción los lagrangianos así obtenidos se reescriben en una formulación de primer orden y finalmente la teoría se cuantiza usando las ideas del cap. I.

Posteriormente generalizamos a tres dimensiones bosónicas esta Mecánica Cuántica Supersimétrica. La idea aquí es hallar una descripción de una o varias partículas en tres dimensiones, con spin y cuya interacción sea invariante bajo supersimetrías. Por último mostramos que la aproximación de largo alcance del potencial nucleón-nucleón constituye una realización explícita del potencial supersimétrico que hemos obtenido.

I N D I C E

I.- PRINCIPIO VARIACIONAL DE SCHWINGER

1.- INTRODUCCION.

Desde la aparición de la mecánica cuántica, se han desarrollado con el tiempo diferentes formalismos que esencialmente contienen la misma información física y que incluyen desde las formulaciones esenciales de Schrödinger y Heisenberg en 1926 y 1927 hasta formas más elaboradas como la de integrales de trayectoria de Feynmann y la diferencial obtenida por Schwinger mediante un principio variacional. Estas dos últimas formulaciones de la mecánica cuántica son convenientes en la transición de la mecánica cuántica hacia las teorías cuánticas de campo.

El objetivo en esta sección es mostrar de una manera concisa, utilizando nuestros conocimientos de mecánica cuántica, el principio variacional de Schwinger que consiste esencialmente en un método para calcular lo que definiremos más adelante como la función de transformación $\langle a_1' t_1 | a_2' t_2 \rangle$.

2.- DEFINICION E INTERPRETACION ESTADISTICA DE LA FUNCION DE TRANSFORMACION

Para lograr este objetivo Schwinger empezó estudiando en que consiste fisicamente la teoría de medición con lo -

que encontró un lenguaje matemático, de donde surgirá de forma natural la función de transformación.

Sabemos que en los fenómenos atómicos la interacción entre el sistema y el observador no puede hacerse indefinidamente pequeña y que la perturbación solo puede ser predecible estadistícamente. Por lo que Schwinger consideró un conjunto de sistemas independientes para los cuales cualquier cantidad física A puede tomar distintos valores a',..... En la medición más elemental este ensemble es clasificado en subensembles, que se distinguen por valores definidos de la cantidad medida. Denotaremos por M(a') la medición que acepta sistemas con valor a' de la propiedad A y rechaza todos los demás.

Se define la adición de estos símbolos como la medición menos específica que produce un subensemble asociado con cualquiera de los valores de la suma y la multiplicación de ellos como la ejecución sucesiva de mediciones. Si 1 y 0 simbolizan respectivamente las mediciones que aceptan o rechazan todos los sistemas, las mediciones elementales satisfacen:

$$M(a')\,M(a') = M(a') \,, \qquad 2.1$$

$$M(a')\,M(a'') = 0 \,, \quad a' \neq a'' \qquad 2.2$$

$$\sum_{a'} M(a') = 1 \qquad 2.3$$

Un tipo más general de medición incorpora una perturbación que produce un cambio de estado. Esto es el símbolo M(a',a") indica una medición en la cual los sistemas son aceptados solamente en el estado a" y salen en el estado a'.

Las propiedades de medición sucesivas del tipo .... M(a',a") están simbolizadas por:

$$M(a',a'')\,M(a''',a^{iv}) = \delta(a'',a''')\,M(a',a^{iv}) \,, \qquad 2.4$$

donde $\delta(a',a'')$ es la delta de Kronecker usual, ya que si $a'' \neq a'''$, la segunda etapa del aparato compuesto no acepta ninguno de los sistemas que salen de la primera etapa, mientras que si -

$a'' = a'''$ todos estos sistemas entran a la segunda etapa, y la -- medición compuesta sirve para seleccionar sistemas en el estado a^{iv} y transformarlos al estado a'.

Caracterizando el estado de un sistema por un conjunto completo de cantidades compatibles $A_1, A_2, \ldots, A_n$, se puede encontrar todavía un tipo de medición más general que comprenda dos conjuntos de propiedades incompatibles. Simbolizando - por M(a',b') el proceso de medición que rechaza todos los sistemas excepto a aquellos en el estado b' y permite que salgan del aparato en el estado a', la medición compuesta .... M(a',b')M(c',d') sirve para seleccionar sistemas en el estado d' y producirlos en el estado a'. Pero solo una determinada - fracción de los sistemas que salen de la primera etapa serán- aceptados por la segunda. Se puede expresar esto por la ley - general de multiplicación:

$$M(a',b')\, M(c',d') = \langle b' | c' \rangle\, M(a',d') \quad , \qquad 2.5$$

donde $\langle b' | c' \rangle$ es un número que caracteriza la relación entre - los estados b' y c'.

Se puede inferir de la propiedad 2.3 que:

$$\sum_{a'} \langle a' | b' \rangle\, M(a',c') = M(b',c') \quad , \qquad 2.6$$

donde la suma es sobre todos los valores a' de la propiedad A y que la relación general es:

$$\begin{aligned} M(c',d') &= \sum_{a'b'} M(a')\, M(c',d')\, M(b') \\ &= \sum_{a'b'} \langle a' | b' \rangle \langle d' | b' \rangle\, M(a',b') \qquad 2.7 \end{aligned}$$

donde $M(a') = M(a',a')$.

Debido a su papel en relacionar símbolos de medi-- ción relativos a conjuntos incompatibles y observables la totalidad de números $\langle a'|b'\rangle$ es llamada la <u>función de transformación</u>.

Hasta aquí sabemos el significado del lado izquierdo de la ecuación 2.5, ahora usaremos esto para darle una interpretación adicional a la función de transformación.

Debido a que la ley general de multiplicación (2.5) se preserva si se hacen las sustituciones:

$$M(a',b') \longrightarrow \lambda(a')^{-1}\, M(a',b')\, \lambda(b') \qquad 2.8.1$$

$$\langle a'|b'\rangle \longrightarrow \lambda(a')\, \langle a'|b'\rangle\, \lambda(b')^{-1} \qquad 2.8.2$$

donde a los números $\lambda(a')$ y $\lambda(b')$ pueden dárseles valores arbitrarios diferentes de cero, se puede decir que a la función de transformación no se le puede dar por si misma una interpretación física directa. Por lo que se debe buscar una combinación que permanezca invariante bajo estas transformaciones.

La base apropiada para la interpretación estadística de la función de transformación puede inferirse considerando la sucesión de mediciones $M(b')M(a')M(b')$ que difiere de $M(b')$ en virtud de la perturbación producida por la medición intermedia. Solamente una fracción de los sistemas seleccionados en la medición inicial es transmitida a través del aparato completo. Se puede escribir esto con la siguiente ecuación simbólica:

$$M(b')\,M(a')\,M(b') = p(a',b')\,M(b') \qquad 2.9$$

donde el número:

$$p(a',b') = \langle a'|b'\rangle\langle b'|a'\rangle \qquad 2.10$$

es invariante bajo la transformación 2.8.

Si se ejecuta una medición de A que no distingue entre dos estados se obtiene entonces:

$$M(b')\left(M(a')+M(a'')\right)M(b') = \left(p(a',b')+p(a'',b')\right)M(b') \qquad 2.11$$

lo que da una relación de aditividad para los números p(a',b') De aquí se puede ver que para que una medición no distinga entre ninguno de los estados se tiene:

$$M(b')\left(\sum_{a'} M(a')\right)M(b') = M(b')\ , \qquad 2.12$$

por lo que

$$\sum_{a'} p(a',b') = 1\ , \qquad 2.13$$

Siendo consistentes con estas propiedades podemos dar a los números p(a',b'), la interpretación de una probabilidad, la de observar al estado a' en una medición ejecutada en un sistema que se encuentra en el estado b'. Pero se deben restringir más los números $p(a',b')$ si se quiere que esta probabilidad sea real; esto se logra si se pide que:

$$\langle b'|a'\rangle = \langle a'|b'\rangle^{*}, \qquad 2.14$$

con lo que:

$$p(a',b') = |\langle a'|b'\rangle|^{2} \geqslant 0\ . \qquad 2.15$$

REPRESENTACION MATRICIAL DE UN OPERADOR

Los símbolos de medición en una cierta descripción- proveen una base para la representación de un operador arbi-- trario, y donde las propiedades abstractas de estos operado-- res estarán representadas por las leyes de combinación, que - como se verá son las reglas de suma y multiplicación de matri ces. Si X es un operador, entonces:

$$X = \sum_{a'a''} \langle a' | X | a'' \rangle \; M(a', a'') \qquad 2.16$$

define la matriz de X en la representación de la propiedad A.

El producto:

$$XY = \sum_{a'a''} \langle a' | X | a'' \rangle M(a', a'') \sum_{a'''a^{iv}} \langle a^{iv} | Y | a''' \rangle M(a^{iv}, a''')$$

$$= \sum_{a'a''a'''a^{iv}} \langle a' | X | a'' \rangle \langle a^{iv} | Y | a''' \rangle \; \delta(a'', a''') M(a', a''') \qquad 2.17$$

muestra que:

$$\langle a' | XY | a''' \rangle = \sum_{a''} \langle a' | X | a'' \rangle \langle a'' | Y | a''' \rangle , \qquad 2.18$$

con lo que se ve que el arreglo de estos números se comporta- bajo el producto de operadores como una matriz.

La matriz de X en la representación mixta de las -- propiedades A y B, se define por:

$$X = \sum_{a'b'} \langle a' | X | b' \rangle \; M(a', b') \qquad 2.19$$

por lo que la regla de multiplicación en una representación - mixta es:

$$\langle a' | X | c' \rangle = \sum_{b'} \langle a' | X | b' \rangle \langle b' | Y | c' \rangle \qquad 2.20$$

Esta representación matricial nos permitirá como se verá más adelante, calcular la función de transformación de -cualquier sistema.

3.- LA GEOMETRIA DE LOS ESTADOS CUANTICOS[2]

La perturbación incontrolable causada por una medición implica que el acto de medición es indivisible. Esto es, cualquier intento de trazar la historia del sistema durante -un proceso de medición usualmente cambia la naturaleza de la-medición que se quiere realizar. Por lo que concebir una cierta medición $M(a',b')$ como una medición compuesta carece de --cualquier implicación física. Sin embargo, se puede inventar-un estado sin significado físico que sirva de intermediario. Se llamará a este estado, el estado nulo 0, y escribiremos -

$$M(a',b') = M(a',0)\,M(0,b') \qquad 3.1$$

El proceso de medición que selecciona un sistema en el estado b' y lo produce en el estado nulo,

$$M(0,b') = \Phi(b') \qquad 3.2$$

puede ser descrito como la aniquilación de un sistema en el -estado b', similarmente:

$$M(a',0) = \Psi(a') \qquad 3.3$$

puede ser caracterizado como la creación de un sistema en el-estado a'. Por lo que el contenido de 3.1 es la indiscernibilidad de $M(a',b')$ de el poceso compuesto de aniquilación de -

un sistema en el estado b', seguido por la creación de un -- sistema en el estado a',

$$M(a',b') = \Psi(a')\,\Phi(b') \qquad 3.4$$

La extensión del álgebra de medición suministra -- las propiedades de estos símbolos:

$$\Psi(a')\,\Psi(b') = \Phi(a')\,\Phi(b') = 0\,, \qquad 3.5.1$$

$$M(a',b')\,\Phi(c') = \Psi(a')\,M(b',c') = 0 \qquad 3.5.2$$

mientras que:

$$M(a',b')\,\Psi(c') = \langle b'|c'\rangle\,\Psi(a') \qquad 3.6.1$$

$$\Phi(a')\,M(b',c') = \langle a'|b'\rangle\,\Phi(c') \qquad 3.6.2$$

$$\Phi(a')\,\Psi(b') = \langle a'|b'\rangle\,M(0) \qquad 3.6.3$$

Las expresiones contenidas en 3.5 muestran que los- únicos productos significativos -aquellos que no son cero- -- son de la forma $\Psi\Phi$, $\Phi\Psi$, $X\Psi$, ΦX, XY. De acuerdo con la --- construcción del operador de medición 3.4 todos los operado-- res son combinaciones lineales de productos $\Psi\Phi$:

$$X = \sum_{a'b'} \Psi(a')\,\langle a'|X|b'\rangle\,\Phi(b') \qquad 3.7$$

y la evaluación de los productos $X\Psi$, ΦX y XY se reducen a:

$$\Psi(a')\,\Phi(b')\,\Psi(c') = \Psi(a')\,\langle b'|c'\rangle \qquad 3.8.1$$

$$\Phi(a')\,\Psi(b')\,\Phi(c') = \langle a'|b'\rangle\,\Phi(c') \qquad 3.8.2$$

Por lo que, en el manejo de operadores que llevan - al producto $\Phi\Psi$, éste se comporta como un número,

$$\Phi(a')\,\Psi(b') = \langle a'|b'\rangle \qquad 3.9$$

Si se observa que se puede escribir el operador --- unidad, como:

$$\mathbb{1} = \sum_{a'} M(a') = \sum_{a'} \Psi(a')\,\Phi(a') \qquad 3.10$$

se ve que cualquier operador X en esta notación se puede es-- cribir como

$$X = \sum_{a'b'} \Psi(a')\,\Phi(a')\,X\,\Psi(b')\,\Phi(b') \qquad 3.11$$

lo que muestra de acuerdo a 3.7 que:

$$\Phi(a')\,X\,\Psi(b') = \langle a'|X|b'\rangle \qquad 3.12$$

Los símbolos:

$$\langle a'| = \Phi(a'), \qquad 3.13.1$$

$$|b'\rangle = \Psi(b') \qquad 3.13.2$$

sirven para hacer este resultado una consecuencia automática- de la notación.

Lo importante aquí se ha asociado los símbolos Ψ y Φ a cada uno de los estados físicos de una descripción.Los símbolos de una descripción están relacionados linealmente -- con los de otra descripción:

$$\Psi(b') = \sum_{a'} \Psi(a')\,\Phi(a')\,\Psi(b') = \sum_{a'} \Psi(a')\,\langle a'|b'\rangle \qquad 3.14$$

y

$$\Phi(a') = \sum_{b'} \langle a'|b'\rangle\,\Phi(b') \qquad 3.15$$

Es posible probar[2] que los símbolos Ψ y Φ , forman dos espacios vectoriales sobre los complejos que son mu--

tuamente adjuntos. Es decir,

$$|a'\rangle^{+} = \langle a'| \qquad 3.16$$

$$(\langle a'|)^{+} = |a'\rangle \qquad 3.17$$

Por lo que se tiene aquí una geometría de estados - a partir de la cual el álgebra de mediciones puede ser deducida.

4.- REPRESENTACION DIFERENCIAL DE LA FUNCION DE TRANSFORMACION

Con esta interpretación de la función de transformación, nuestro objetivo de aquí en adelante será mostrar como se puede encontrar un medio de calcularla (desarrollado -- por Schwinger), que nos da toda la información sobre el sistema, es decir las ecuaciones de movimiento y por consiguiente la evolución de este sistema en el tiempo.

La idea de tiempo ha sido introducida implícitamente dentro de la teoría desde el principio, representa un ordenamiento causal de la operación de medición. Adoptaremos la convención:

$$\xleftarrow{\hspace{2cm}} \text{ tiempo}$$
$$\langle a'|b'\rangle$$

En algún tiempo, para un cierto sistema, obtenemos - un estado b' mediante la medición de la propiedad B y un tiempo después la propiedad A, obteniendo el estado a'. Hasta aquí, no tenemos una dependencia explícita en el tiempo, pero seguramente los tiempos de medición serán importantes como se verá más adelante.

Se obtendrá aquí una caracterización diferencial de las funciones de transformación a partir de sus propiedades de composición y realidad. Como un antecedente es prudente señalar que esto nos llevará a un principio de acción que nos permitirá lograr nuestro objetivo.

Obtengamos primeramente una propiedad de composición de las funciones de transformación. Comparemos la expresión:

$$\sum_{b'} M(a')M(b')M(c') = \sum_{b'} \langle a'|b'\rangle\langle b'|c'\rangle M(a',c') \qquad 4.1$$

con:

$$M(a')\Big(\sum_{b'} M(b')\Big)M(c') = M(a')M(c') = \langle a'|c'\rangle M(a',c') \qquad 4.2$$

con lo que se obtiene:

$$\sum_{b'} \langle a'|b'\rangle\langle b'|c'\rangle = \langle a'|c'\rangle \qquad 4.3$$

que nos relaciona funciones de transformación en dos descripciones diferentes.

Ahora si $\delta\langle a'|c'\rangle$ y $\delta\langle b'|c'\rangle$ son alteraciones infinitesimales arbitrarias de las correspondientes funciones de transformación, la variación de $\langle a'|c'\rangle$ será:

$$\delta\langle a'|c'\rangle = \sum_{b'} \Big[\delta\langle a'|b'\rangle\langle b'|c'\rangle + \langle a'|b'\rangle\,\delta\langle b'|c'\rangle\Big] \qquad 4.4$$

y también utilizando la ecuación 2.14 tenemos:

$$\delta\langle a'|b'\rangle^{*} = \delta\langle b'|a'\rangle \qquad 4.5$$

Definamos aquí un operador δW_{ab} tal que la matriz de este operador en la representación mixta a', b' esté dada por:

$$i\langle a'|\delta W_{ab}|b'\rangle = \delta\langle a'|b'\rangle \qquad 4.6$$

Si los operadores infinitesimales δW_{bc} y δW_{ac} se definen de una manera similar, la ecuación 4.4 se convierte en la ecuación matricial:

$$\langle a'|\delta W_{ac}|c'\rangle = \sum_{b'}\Big[\langle a'|\delta W_{ab}|b'\rangle\langle b'|c'\rangle + \langle a'|b'\rangle\langle b'|\delta W_{bc}|c'\rangle, \qquad 4.7$$

de donde se infiere la ecuación entre operadores:

$$\delta W_{ac} = \delta W_{ab} + \delta W_{bc} \qquad 4.8$$

Es importante resaltar esta última ecuación, ya que en ella se ha podido expresar la ley de multiplicación de la función de transformación por una ley aditiva para el operador infinitesimal δW .

Si se identifica en 4.8 las descripciones a y c y utilizando:

$$\langle a'|a''\rangle = \delta(a',a'') \qquad 4.9$$

se obtiene:

$$\delta W_{ba} = -\delta W_{ab} \qquad 4.10$$

Ahora:

$$\delta\langle a'|b'\rangle^{*} = -i\langle a'|\delta W_{ab}|b'\rangle^{*}$$
$$= i\langle b'|\delta W_{ab}^{+}|a'\rangle \qquad 4.11$$

donde δW^{+}_{ab} es el operador adjunto de δW_{ab}. Esto debe ser - igual a:

$$\delta \langle b' | a' \rangle = i \langle b' | \delta W_{ba} | a' \rangle \qquad 4.12$$

Con lo que se obtiene:

$$\delta W^{+}_{ab} = -\delta W_{ba} = \delta W_{ab} \qquad 4.13$$

De aquí se observa que la propiedad de conjugación— de la función de transformación es expresada aquí por el he-- de que el operador infinitesimal δW sea hermítico.

El proceso de medición es un proceso dinámico, y -- hasta aquí el único concepto de tiempo que se ha usado es la- relación primitiva de orden. Una formulación detallada de la- mecánica cuántica debe satisfacer el requisito de consisten-- cia de que su descripción de las interacciónes que constitu-- yen el proceso de medición reproduzcan la caracterización sim bólica desarrollada aquí.

5.- EL PRINCIPIO DE ACCION[3,4]

Una medición es una operación física en el espacio- y en el tiempo. Las propiedades de un sistema están descritas en relación a mediciones a un tiempo dado, y ningún valor del tiempo es intrínsecamente distinguible de cualquier otro por- los resultados de mediciones en un sistema físico aislado. La manera de transcribir este hecho físico a un lenguaje matemá- ticoestá dada por la siguiente propiedad (Apéndice 1):" Si -- dos operadores tienen el mismo espectro, entonces están relacionados por una transformación unitaria". Por lo que los operadores que simbolizan la misma propiedad a tiempos diferentes deben estar relacionados por una transformación unitaria.

Para un sistema aislado escogemos conjuntos completos de propiedades compatibles pertenecientes a un mismo tiempo y la caracterización de un estado requiere la especificación de los valores de estas cantidades junto con un sistema de coordenadas y del tiempo. Con esto, la función de transformación que relaciona dos descripciones arbitrarias por lo tanto aparece como $\langle a_1' t_1 | b_2' t_2 \rangle$ y la conexión entre estados a tiempos diferentes comprende toda la historia dinámica del sistema en el intervalo. Por esto se espera que las propiedades específicas de un sistema deben estar contenidas completamente en un principio dinámico que caracteriza a la función de transformación. Y para lograr esta caracterización estudiaremos primeramente transformaciones unitarias infinitesimales y su composición para formar transformaciones finitas.

La geometría unitaria de estados está producida por las transformaciones unitarias:

$$\overline{\Phi} = \Phi U \quad , \quad \Psi = U^{-1} \Psi \quad , \quad X = U^{-1} X U \qquad 5.1$$

aplicadas a cualquier vector u operador, donde el operador unitario U obedece:

$$U^{+} = U^{-1} \qquad 5.2$$

Todas las relaciones algebráicas entre los vectores y operadores es preservada por esta transformación y además -

sabemos que las transformaciones unitarias forman un grupo.

La aplicación de una transformación unitaria a la base ortonormal de la descripción a, que está caracterizada por la ecuación:

$$\langle a'|(A-a') = 0 \qquad 5.3$$

resulta en los vectores ortonormales:

$$\overline{\langle a'|} = \langle a'|U \qquad 5.4$$

que obedecen la ecuación de valores propios

$$\overline{\langle a'|}\,(\bar{A}-a') = 0 \qquad 5.5$$

por lo que los estados $\overline{\langle a'|}$ de una nueva descripción asociada con las cantidades $\bar{A}$ poseen el mismo espectro de valores propios que la propiedad A.

La definición de un operador unitario, cuando es expresada como:

$$(U-1)^{+}(U-1) + (U-1) + (U-1)^{+} = 0 \qquad 5.6$$

muestra que un operador unitario que difiere infinitesimalmente de la unidad tiene la forma general:

$$U = 1 + iG \,, \quad U^{+} = U^{-1} = 1 - iG \qquad 5.7$$

donde G es un operador hermítico infinitesimal. La transformación de coordenadas descrita por este operador está dada por:

$$\delta\langle a'| = \overline{\langle a'|} - \langle a'| = \langle a'|iG \qquad 5.8.1$$

$$\delta|a'\rangle = \overline{|a'\rangle} - |a'\rangle = -iG|a'\rangle \qquad 5.8.2$$

El efecto de un cambio del sistema de coordenadas - sobre la representación de los operadores y vectores es equivalente a un cambio de los operadores y vectores relativo al sistema de coordenadas original, por lo que:

$$\delta \langle a' | X | a'' \rangle = \overline{\langle a'} | X | \overline{a'' \rangle} - \langle a' | X | a'' \rangle$$
$$= \langle a' | \delta X | a'' \rangle \qquad 5.9$$

donde:

$$\delta X = U X U^{-1} - X = \frac{1}{i} [X, G] \qquad 5.10$$

Siguiendo el desarrollo de Schwinger vamos a examinar la construcción de una transformación unitaria finita a - partir de transformaciones unitarias infinitesimales, en especial para un sistema físico en donde todos los operadores son funciones de los n pares de variables complementarias de posición y momento q_k y p_k respectivamente que denotaremos por - x .

Consideremos ahora un conjunto de operadores unitarios clasificados por el tiempo inicial t_0 y por el tiempo -- posterior t a que están referidos, denotándolos por: $U(t,t_0)$. Estos operadores producen las transformaciones

$$\langle a' | U(t,t_0) = \langle a' t | \qquad 5.11.1$$

$$U^{-1}(t,t_0) | b' \rangle = | b' t \rangle \qquad 5.11.2$$

en los estados del sistema. Además los operadores cambian como:

$$x(t) = U^{-1}(t,t_0)\, x(t_0)\, U(t,t_0) \qquad 5.12$$

La transformación infinitesimal asociada a 5.11.1 - la escribimos como:

$$\langle a' \, t+dt | = \langle a' t | \left(1 - i \, dt \, H(x(t), t) \right) \qquad 5.13$$

que introduce el operador hermítico H como el generador de la evolución temporal del sistema.

Usando 5.11 y 5.12 es posible escribir:

$$\langle a' \, t+dt | b' t \rangle = \langle a' | 1 - i \, dt \, H(x(t_0), t) | b' t \rangle \qquad 5.14$$

La idea básica del principio de acción es caracterizar la función de transformación mediante una descripción diferencial que define las variaciones de esta con respecto a todas las variables involucradas. Llevaremos a cabo este proceso en dos pasos que consistirán en la separación de la variación total en lo que llamaremos i) variaciones dinámicas y ii) variaciones cinéticas.

Los cambios dinámicos (i) se refieren a variaciones inducidas por modificaciones en el tiempo: variaciones en el tiempo final, inicial, en la parametrización intermedia y en la dependencia explícita de la dinámica en el tiempo. Además dentro de estos cambios dinámicos consideraremos posibles alteraciones de los parámetros que describen la dinámica del sistema. Estos cambios no toman en cuenta variaciones con respecto a los operadores que describen al sistema. Con el objeto de identificar estas variaciones, que denotaremos por δ'', es conveniente considerar a la función de transformación en -

en su forma 5.14. En esta ecuación tanto los estados como -- los operadores x estan referidos a un tiempo arbitrario t_0. De este modo identificamos la fuente de variación δ'' como --idt $H(x(t_0),t)$ y entonces tenemos:

$$\delta''\langle t+dt|t\rangle = i\langle t_0|\,\delta''[-dt\,H(x(t_0),t)]\,|t_0\rangle \qquad 5.15$$

Recordando que δ'' no actua en los operadores que- aparecen en H podemos reescribir 5.15, usando 5.11 y 5.12, como:

$$\delta''\langle a'\,t+dt|b'\,t\rangle = i\langle a'\,t+dt|\,\delta''[-dt\,H(x(t),t)]\,|b'\,t\rangle \qquad 5.16$$

donde hemos reemplazado $\langle a'\,t|$ por $\langle a'\,t+dt|$ lo cual es cierto a primer orden en dt.

Las variaciones cinéticas constituyen el resto de - las posibles variaciones en la función de transformación y se refieren a la posibilidad de modificar los valores propios -- que caracterizan los estados inicial y final. Esto se traduce en cambios como:

$$\delta'\langle a'\,t+dt| = \langle a'+\delta a'\,t+dt| - \langle a'\,t+dt| \qquad 5.17$$

$$\delta'|b'\,t\rangle = |b'+\delta b'\,t\rangle - |b'\,t\rangle \qquad 5.18$$

donde se ha mantenido a el tiempo constante en cada caso.

Para nuestros fines es conveniente considerar los - rótulos (a',b') como valores propios de los operadores p_k y- q_k. Los cambios 5.17 y 5.18 son efectuados por transformaciones unitarias infinitesimales y de esta manera necesitamos conocer las transformaciones unitarias que nos producen varia ciones en los operadores p y q.

De nuestros conocimientos de mecánica cuántica sabemos que estos operadores están representados por:

En la base $\langle q'|$ por:

$$i p = \frac{d}{dq'} \quad , \quad q = q' \tag{5.19}$$

Y en la bese $\langle p'|$ por:

$$-i q = \frac{d}{dp'} \quad , \quad p = p' \tag{5.20}$$

De la relación dada por el cálculo:

$$e^{\Delta x \frac{d}{dx}} f(x) = f(x+\Delta x) \tag{5.21}$$

vemos que la transformación:

$$U(q') = e^{i q' p} \tag{5.22}$$

induce los cambios:

$$\bar{q} = q + q' \quad , \quad \bar{p} = p \tag{5.23}$$

y

$$U(p') = e^{-i p' q} \tag{5.24}$$

induce

$$\bar{q} = q \quad , \quad \bar{p} = p - p' \tag{5.25}$$

Vemos que las versiones infinitesimales de estas - transformaciones están dadas por

$$U(\delta q) = 1 + i p \delta q \quad , \quad U(\delta p) = 1 - i \delta p q$$
$$= 1 + i G_q \qquad\qquad = 1 + i G_p \tag{5.26}$$

Por esto podemos identificar a p y -q como los operadores hermíticos que generan cambios unitarios en p y q respectivamente. Estos operadores infinitesimales G_q y G_p, pueden ser considerados como miembros de la clase de generadores:

$$G_\lambda = \lambda p \delta q - (1-\lambda)\, \delta p q \qquad 5.27$$

En particular para $\lambda = \frac{1}{2}$ tenemos:

$$G_{q,p} = \frac{1}{2}\left(p\delta q - \delta p q\right) \qquad 5.28$$

que genera cambios simétricos en q y p de $\frac{1}{2}\delta q$ y $\frac{1}{2}\delta p$.

Conociendo entonces estos generadores, los cambios cinéticos 5.17 y 5.18 en los diferentes estados están dados por:

$$\delta' \langle t+dt| = i \langle t+dt|\, G_\lambda(t+dt) \qquad 5.29$$

y

$$\delta' |t\rangle = -i\, G_\lambda(t)\, |t\rangle \qquad 5.30$$

Es conveniente usar el operador simétrico que nos produce cambios en las variables dinámicas X de $\frac{1}{2}\delta X$. Entonces:

$$G_{\frac{1}{2}}(t) = \frac{1}{2}\left(p(t)\, \delta q(t) - \delta p(t)\, q(t)\right) \qquad 5.31$$

y analogamente para $G_{\frac{1}{2}}(t+dt)$.

Los cambios cinéticos estan dados por:

$$\delta' \langle t+dt|t\rangle = (\delta'\langle t+dt|)|t\rangle + \langle t+dt|(\delta'|t\rangle)$$
$$= i \langle t+dt| \left[G_{\frac{1}{2}}(t+dt) - G_{\frac{1}{2}}(t)\right] |t\rangle \qquad 5.32$$

con

$$G_{\frac{1}{2}}(t+dt) - G_{\frac{1}{2}}(t) = \frac{1}{2}\Big[p(t+dt)\,\delta q(t+dt) + \delta p(t)\,q(t) - p(t)\,\delta q(t) - \delta p(t+dt)\,q(t+dt)\Big] \qquad 5.33$$

en donde $\delta x(t)$ y $\delta x(t+dt)$ son números arbitrarios infinitesimales e independientes en los que impondremos la restricción de continuidad en t ($dt\,\delta x(t) = dt\,\delta x(t+dt)$ a primer orden en dt).

Ahora, la transformación infinitesimal que relaciona a $x(t)$ con $x(t+dt)$ se obtiene de:

$$\begin{aligned} x(t+dt) &= U(t+dt,t)^{-1}\,x(t)\;U(t+dt,t) \\ &= \big[1 + i\,dt\,H(x(t),t)\big]\,x(t)\,\big[1 - i\,dt\,H(x(t),t)\big] \end{aligned} \qquad 5.34$$

resultando:

$$x(t+dt) - x(t) = i\,\big[x(t), -dt\,H(x(t),t)\big] \qquad 5.35$$

Utilizando esta última ecuación para cada una de las variables p(t + dt), q(t), p(t) y q(t + dt), podemos escribir 5.33 como:

$$\begin{aligned} G_{\frac{1}{2}}(t+dt) - G_{\frac{1}{2}}(t) &= \frac{1}{2}\Big(\big(p(t) + i\,[p(t), -dt\,H(x(t),t)]\big)\,\delta q(t+dt) \\ &+ \delta p(t)\,\big(q(t+dt) - i\,[q(t), -dt\,H(x(t),t)]\big) \\ &- \big(p(t+dt) - i\,[p(t), -dt\,H(x(t),t)]\big)\,\delta q(t) \\ &- \delta p(t+dt)\,\big(q(t) + i\,[q(t), -dt\,H(x(t),t)]\big) \\ &= \frac{1}{2}\Big(p(t)\,\delta q(t+dt) + \delta p(t)\,q(t+dt) - p(t+dt)\,\delta q(t) \end{aligned}$$

$$- \delta p(t+dt)\, q(t)\Big) + \frac{1}{2} i \Big[p(t)\, \delta q(t) - \delta p(t)\, q(t) +$$
$$p(t)\, \delta q(t) , - dt\, H(x(t),t) \Big] \qquad 5.36$$

donde hemos utilizado $dt\, \delta x(t+dt) = dt\, \delta x(t)$ a primer orden - en dt, en el último conmutador. Con lo que obtenemos:

$$G_{\frac{1}{2}}(t+dt) - G_{\frac{1}{2}}(t) = \frac{1}{2}\big(p(t)\, \delta q(t+dt) + \delta p(t)\, q(t+dt)$$
$$- p(t+dt)\, \delta q(t) - \delta p(t+dt)\, q(t)\big) - \left(\frac{1}{i}\right)\big[p(t)\, \delta q(t) -$$
$$\delta p(t)\, q(t) , - dt\, H(x(t),t) \big] \qquad 5.37$$

Podemos reescribir esta ecuación como:

$$G_{\frac{1}{2}}(t+dt) - G_{\frac{1}{2}}(t) = \delta' \Big(\frac{1}{2} \big(p(t)\, q(t+dt) - p(t+dt)\, q(t)\big)\Big)$$
$$+ \frac{1}{i} \big[- dt\, H(x(t),t) , G_q(t) + G_p(t) \big] \qquad 5.38$$

De 5.10 vemos que para $G = G_q + G_p$ podemos escribir:

$$\frac{1}{i}\big[-dt\, H(x(t),t) , G \big] = \big(\delta_q + \delta_p \big) \big(- dt\, H(x(t),t)\big)$$
$$\equiv \delta' \left(- dt\, H \right) \qquad 5.39$$

De este modo obtenemos finalmente:

$$G_{\frac{1}{2}}(t+dt) - G_{\frac{1}{2}}(t) = \delta' \Big(\frac{1}{2}\big(p(t)\, q(t+dt) - p(t+dt)\, q(t)\big)$$
$$- dt\, H(x(t),t)\Big) \qquad 5.40$$

Por último podemos unir las dos clases de variaciones, $\delta = \delta' + \delta''$ (recordando que $\delta'' q = \delta'' p = 0$), con lo que obtenemos:

$$\delta \langle t+dt \mid t \rangle = i \langle t+dt \mid \delta [W] \mid t \rangle \qquad 5.41$$

donde:

$$W(t+dt,t) = \frac{1}{2}\left(p(t)\,q(t+dt) - p(t+dt)\,q(t)\right) - dt\,H(x(t),t)$$
$$= \frac{1}{2}\left(p\,dq - dp\,q\right) - dt\,H \qquad 5.42$$

Observando esta última ecuación, vemos que el operador infinitesimal δW, ec. 4.6, se obtiene como la variación de un único operador W. Este es el principio cuántico - de acción asociado con el sistema.

Ya con esto podemos escribir el principio de ac--- ción que nos describe la función de transformación correspondiente a un intervalo finito, esto es:

$$\delta \langle t_1 | t_2 \rangle = i \langle t_1 | \, \delta [W_{12}] \, | t_2 \rangle \qquad 5.43$$

De los resultados 4.7 y 4.8 que nos dicen que la - multiplicación de funciones de transformación individuales - es expresada por la adición correspondiente de los operado-- res de acción:

$$W_{12} = \sum_{t_1}^{t_2} W(t+dt,t)$$
$$= \int_{t_2}^{t_1} L(t)\,dt \qquad 5.44$$

donde L es el operador Lagrangiano y esta dado por:

$$L(t) = \frac{1}{2}\left(p(t)\,\frac{dq(t)}{dt} - \frac{dp(t)}{dt}\,q(t)\right) - H(x(t),t) \qquad 5.45$$

6.- PRINCIPIO DE ACCION ESTACIONARIO

Consideremos un sistema con dinámica fija, por esto queremos decir que H esta dado y su forma no se cambia.- Entonces ¿qué es lo que podemos variar en $\langle a' t_1 | b' t_2 \rangle$? Todo lo que tenemos disponible son las propiedades de los puntos extremos:

$$\delta \langle t_1 | t_2 \rangle = (\delta \langle t_1 |) | t_2 \rangle + \langle t_1 | (\delta | t_2 \rangle) \qquad 6.1$$

La variación de un estado cualquiera, está dada por:

$$\delta \langle \; | = \langle \; | U - \langle \; | = \langle \; | (U - 1) \equiv \frac{i}{\hbar} \langle \; | G \qquad 6.2$$

Los estados están dados a un tiempo fijo, por lo que el generador G, debe ser función de operadores a un tiempo dado, de manera que:

$$\delta \langle t_1 | t_2 \rangle = \frac{i}{\hbar} \langle t_1 | G_1 - G_2 | t_2 \rangle \qquad 6.3$$

Comparando 6.3 con 5.41 y considerando que $\langle t_1 |$ y $| t_2 \rangle$ son estados arbitrarios, concluímos que:

$$\delta \left[\int_{t_1}^{t_2} dt \, L \right] = G_1 - G_2 \qquad 6.4$$

Esta última expresión representa el Principio Cuántico de Acción a partir del cual es posible encontrar toda la información sobre el sistema: dinámica (ecuaciones de movimiento) y cinética (relaciones de conmutación), para un sistema donde todos los operadores sean función de p y q.

Pero en lugar de hacer esto, vamos a generalizar a la estructura del Lagrangiano con el objeto de encontrar además de las variables canónicas p y q, otro tipo de variables ξ que representarán nuevas cantidades dinámicas con propiedades diferentes y posteriormente encontraremos las ecuaciones de movimiento para un sistema en general.

7.- EL OPERADOR HAMILTONIANO Y LAS ECUACIONES DE MOVIMIENTO[5,6]

Empecemos por ampliar nuestro espacio de operadores, a los cuales denotaremos simplemente por χ_a (que consideraremos hermíticos) y generalizaremos la parte cinemática del Lagrangiano escribiendo este como:

$$L=\frac{1}{4}\sum_{ab}\left(x_a A_{ab}\frac{dx_b}{dt}-\frac{dx_a}{dt}A_{ab}x_b\right)-H(x_a,t)$$

$$=\frac{1}{4}\left(x A\frac{dx}{dt}-\frac{dx}{dt}A x\right)-H(x,t) \qquad 7.1$$

en donde A es una matriz numérica. Nuestro objetivo será ahora encontrar la forma general de la matriz A, con lo que obtendremos las propiedades cinéticas de los operadores χ (relaciones de conmutación) y las propiedades dinámicas (ecuaciones de movimiento). Veremos más adelante que un cierto grupo de los operadores χ puede ser identificado con las variables p y q de las secciones anteriores. Además encontraremos un nuevo tipo de operadores cuyas relaciones de conmutación permitirán relacionarlos coneel grado de libertad correspondiente al spin.

Se puede considerar a la matriz A como la matriz que representa una forma bilineal y durante el desarrollo siguiente se utilizarán algunas propiedades de las formas bilineales, que nos permitirán reducir a A a una forma muy sencilla. Volviendo a las ecs. 7.1 la propiedad de hermiticidad de L, la aplicaremos a sus dos partes por separado. Por loque el Hamiltoniano H deberá ser hermítico, la matriz A debe ser antihermítica:

$$A^{T*} = -A \qquad 7.2$$

Y el operador de acción está dado por:

$$W_{12} = \int_{t_2}^{t_1} \left[\frac{1}{4} \left(x A dx - dx A x \right) - H dt \qquad 7.3$$

Los límites de integración son también objeto de variación, y se puede introducir una nueva variable auxiliar τ, tal que las varibles δt_1 y δt_2 son producidas por un cambio en la relación funcional $t = t(\tau)$ con límites fijos τ_1, τ_2 .

Ahora:

$$\delta \left[\frac{1}{4} (x A dx - dx A x) - H dt \right] - d \left[\frac{1}{4} (x A \delta x - \delta x A x) - H \delta t \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left(\delta x A dx - dx A \delta x \right) - \delta H dt + dH \delta t \qquad 7.4$$

con lo que el principio de acción estacionario permite obtener las ecuaciones de movimiento.

$$\frac{1}{2} \left(\delta x A dx - dx A \delta x \right) = \delta H dt - dH \delta t \qquad 7.5$$

ó

$$\delta H = \frac{dH}{dt}\,\delta t + \frac{1}{2}\left(\delta x\, A\,\frac{dx}{dt} - \frac{dx}{dt}\,A\,\delta x\right) \qquad 7.6$$

y la forma de los generadores,

$$\begin{aligned} G &= \frac{1}{4}\left(x\,A\,\delta x - \delta x\,A\,x\right) - H\,\delta t \\ &= G_x + G_t \end{aligned} \qquad 7.7$$

a los tiempos t_1 y t_2.

El Hamiltoniano es una función arbitraria de los Si su variación posee la forma requerida por la ec. 7.6, y - además se quieren escribir las variaciones δx_a apareciendo- solamente a la dercha o a la izquierda, estas variaciones de berán poseer propiedades de operadores que se deberán determinar. Con esto queremos decir que estas variaciones pueden- ser algo más que simples números que conmutan con todos los- operadores. Por lo que debemos ser capaces de desplazar a - las δx_a hacia la derecha o a la izquierda en la estructura- de δH ,

$$\delta H - \left(\frac{\partial H}{\partial t}\right)\delta t = \delta x\left(\frac{\partial_l H}{\partial x}\right) = \left(\frac{\partial_r H}{\partial x}\right)\delta x \qquad 7.8$$

lo que define las derivadas izquierda y derecha de H. Con lo que se obtienen las ecuaciones de movimiento:

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} \qquad 7.9.1$$

$$A\,\frac{dx}{dt} = \frac{\partial_l H}{\partial x} \qquad 7.9.2$$

$$-\frac{dx}{dt}\,A = \frac{\partial_r H}{\partial x} \qquad 7.9.3$$

donde las dos últimas ecuaciones deben ser equivalentes. Siguiendo este argumento se supondrá que:

$$\delta x\, A\, \frac{dx}{dt} = -\frac{dx}{dt}\, A\, \delta x \qquad 7.10$$

con lo que:

$$G_x = -\frac{1}{2}\, \delta x\, A\, x = \frac{1}{2}\, x\, A\, \delta x \qquad 7.11$$

Interpretando a:

$$G_t = -H\,\delta t$$

como el generador de transformaciones unitarias infinitesima les que transforma a las variables al tiempo t en las variables al tiempo $t+\delta t$.

Ahora tenemos que para una función arbitraria F de las variables dinámicas $x(t)$, eloperador $\bar{F}$ que representa la misma propiedad que F al tiempo $t+\delta t$ está dado por:

$$\bar{F} = U^{-1} F\, U = F\,(x(t+dt)\,,\,t) = F(x(t),t) - \delta F$$
$$= F(x(t),t) + \frac{i}{\hbar}\left[H(x(t),t), F(x(t),t)\right]\delta t \qquad 7.13$$

donde

$$U = 1 - \frac{i}{\hbar}\, H\,(x(t),t)\,\delta t \qquad 7.14$$

dado que el parámetro t es un número y no es afectado por la transformación unitaria. Por lo que:

$$\frac{1}{i}\left[F\,,\,G_t\right] = \delta F = -\left(\frac{dF}{dt} - \frac{\partial F}{\partial t}\right)\delta t \qquad 7.15$$

ó

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{1}{i}\left[F, H\right] \qquad 7.16$$

que es la ecuación general de movimiento para cualquier operador.

Antes de continuar se debe verificar la consistencia entre la información dada por el principio de acción (ecs. 7.9) y la obtenida a partir del generador G_t. Si F es igual a χ_a en la ec. 7.15, y al escribir ésta en forma vectorial se obtiene:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{i}\left[x, H\right] \qquad 7.17$$

Aplicando A por la izquierda a esta ecuación se tiene:

$$A\frac{1}{i}\left[x, H\right] = \frac{1}{i}\left[Ax, H\right] = A\frac{dx}{dt} = \frac{\partial_\ell H}{\partial x} \qquad 7.18$$

donde se ha utilizado 7.9.2, similarmente aplicando A por la derecha se tiene:

$$\frac{1}{i}\left[-xA, H\right] = \frac{\partial_r H}{\partial x} \qquad 7.19$$

escribiendo estas relaciones en la forma:

$$\frac{1}{i}\,\delta x\left[Ax, H\right] = \delta x\,\frac{\partial_\ell H}{\partial x} \qquad 7.20.1$$

$$\frac{1}{i}\left[-xA, H\right]\delta x = \frac{\partial_r H}{\partial x}\,\delta x \qquad 7.20.2$$

y utilizando 7.8 tenemos:

$$\delta x\left[Ax, H\right] = \left[-xA, H\right]\delta x \qquad 7.21$$

Con las dos expresiones para G_x, 7.11, junto con la ec. 7.21 se llega a que:

$$[\delta x, H]\, A x = - x A\, [\delta x, H] \qquad 7.22$$

Para obtener consistencia se requerirá que cada una de las variaciones satisfaga:

$$[\delta x_a, H] = 0 \qquad 7.23$$

por lo que se puede escribir, utilizando 7.2:

$$\frac{1}{i}[H, G_x] = \frac{1}{2}\,\delta x\, \frac{\partial_l H}{\partial x} = \frac{\partial_r H}{\partial x}\,\frac{1}{2}\,\delta x \qquad 7.24$$

Mediante esta última ecuación identificaremos G_x como el generador de cambios en las variables x_a por $\frac{1}{2}\delta x_a$, y con esto entonces para cualquier función F de las variables tendremos:

$$\frac{1}{i}[F, G_x] = \frac{1}{2}\,\delta x\, \frac{\partial_l F}{\partial x} = \frac{\partial_r F}{\partial x}\,\frac{1}{2}\,\delta x \qquad 7.25$$

8.- LAS DOS CLASES DE VARIABLES DINAMICAS[7]

Las dos versiones para G_x en las ecs 7.11, indican que debe ser posible desplazar las variaciones δx a través de las variables x . Por lo que dentro de la teoría se tratará de construir diferentes matrices k_a , consistentes con la teoría tales que al desplazar una variación δx_a a través de una variable dinámica x_b se induzca una transformación -

lineal en estas variables, es decir se postula:

$$\delta x_a x_b = (k_a x)_b \, \delta x_a \qquad 8.1$$

Esto inducirá las relaciones de conmutación de las variaciones δx con las variables dinámicas.

La adjunta de la ec. 8.1 es:

$$x_b \, \delta x_a = \delta x_a (k_a^* x)_b \qquad 8.2$$

desarrollando estas dos últimas ecuaciones se tiene:

$$\begin{aligned} \delta x_a x_b &= \sum_c (k_a)_{bc} x_c \, \delta x_a \\ &= \sum_c (k_a)_{bc} \, \delta x_a (k_a^* x)_c \\ &= \sum_c (k_a)_{bc} \, \delta x_a \sum_d (k_a)_{cd} x_d \\ &= \sum_d \Big(\sum_c (k_a)_{bc} (k_a^*)_{cd} \Big) \delta x_a x_d \qquad 8.3 \end{aligned}$$

lo que implica:

$$\sum_c (k_a)_{bc} (k_a^*)_{cd} = \delta_{bd} \qquad 8.4$$

por lo que:

$$k_a^* \, k_a = 1 \qquad 8.5$$

A partir de la propiedad de que cada δx_a conmuta - con el Hamiltoniano, ec. 7.23, se puede obtener un conjunto- de transformaciones de invariancia de éste, es decir:

$$\delta x_a H(x) - H(x) \, \delta x_a = 0 \qquad 8.6$$

usando 8.1 se obtiene

$$H(k_a x)\,\delta x_a - H(x)\,\delta x_a = 0 \qquad 8.7$$

lo que implica:

$$H(k_a x) = H(x) \qquad 8.8$$

además de la hermiticidad de H se puede obtener:

$$H(k_a^{-1} x) = H(x) \qquad 8.9$$

y con el conmutador de una segunda variación δx_b:

$$H(k_a k_b x) = H(x) \qquad 8.10$$

Vemos que el conjunto de transformaciones lineales forma un grupo de transformaciones de invariancia para H. También se pedirá que todo el operador lagrangiano sea invariante ante transformaciones del grupo, por lo que el término cinético también debe ser invariante, lo cual se satisface si:

$$k_a^T A\, k_a = A \qquad 8.11$$

Para que la equivalencia entre las variables x y $k_a x$ sea completa pediremos entonces que estas últimas sean también hermíticas, con lo que se cumple que:

$$k_a^2 = 1 \qquad 8.12$$

La construcción del grupo de invariancia descrito por las matrices k_a se basó en las propiedades particulares como operador de la variación δx_a. Pero todavía se tiene la libertad de realizar transformaciones lineales sobre las variables dinámicas, lo cual se puede visualizar como un cambio de coordenadas, que introducen nuevas variables hermíticas

$$\bar{x} = \ell x \qquad 8.13$$

tan adecuadas como las originales para describir al sistema.

En este nuevo sistema de coordenadas, para que el término cinético del Lagrangiano sea invariante la matriz A debe satisfacer:

$$\bar{A} = \ell^{T^{-1}} A \ell^{-1} \qquad 8.14$$

y para el Hamiltoniano debe tenerse:

$$\bar{H}(\bar{x}) = H(x) = H(\ell^{-1}\bar{x}) \qquad 8.15$$

Además en el nuevo sistema de coordenadas, las propiedades de invariancia se escriben como:

$$\begin{aligned} \bar{H}(\bar{k}_a \bar{x}) &= \bar{H}(\bar{x}) = H(x) = H(k_a x) \\ &= \bar{H}(\ell k_a x) = \bar{H}(\ell k_a \ell^{-1} \bar{x}) \qquad 8.16 \end{aligned}$$

por lo que:

$$\bar{k}_a = \ell k_a \ell^{-1} \qquad 8.17$$

Por consistencia las matrices $\bar{k}_a$ deben también aparecer directamente de las propiedades de conmutación de las variaciones $\delta\bar{x}_a$:

$$\delta \bar{x}_a \bar{x}_b = (\bar{k}_a \bar{x})_b \, \delta \bar{x}_a \qquad 8.18$$

Reescribiendo esto en función de las δx, se ob--- tiene después de un cálculo largo pero sencillo (que mejor - mostramos en el apéndice 2), que:

$$\sum_b l_{ab} k_b (l^{-1})_{bc} = \delta_{ac} k_a \qquad 8.19$$

La interpretación de esta ecuación nos llevará a - restricciones muy fuertes para la matrices k_a y l. La ec. 8.19 no es válida para l arbitraria, se mostrará con un e-- jemplo que esta matriz tiene una forma muy particular y que- las matrices k tendrán también esta forma particular. Su-- pongamos que tenemos tres variables dinámicas x_1, x_2, x_3, (l es una matriz de 3×3) y que las matrices k_1, k_2, k_3, en la ecuación 8.1 satisfacen:

$$k_1 = k_2 \neq k_3 \qquad 8.20$$

entonces se tiene en la ec. 8.19:

$$\sum_{b=1}^{3} l_{ab} k_b (l^{-1})_{bc}$$

$$= l_{a1} k_1 l_{1c}^{-1} + l_{a2} k_2 l_{2c}^{-1} + l_{a3} k_3 l_{3c}^{-1} = \delta_{ac} k_a$$

Ahora para $a = 3$:

$$k_1 (l_{31} l_{1c}^{-1} + l_{32} l_{2c}^{-1}) + l_{33} k_3 l_{3c}^{-1} = \delta_{3c} k_3$$

sabemos además que:

$$l_{31} l_{1c}^{-1} + l_{32} l_{2c}^{-1} = \delta_{3c} - l_{33} l_{3c}^{-1}$$

con lo que:

$$k_1 \delta_{3c} + l_{33} (k_3 - k_1) l^{-1}_{3c} = \delta_{3c} k_3$$

si c = 1, 2, $\delta_{3c} = 0$ por lo que:

$$l_{33} (k_3 - k_1) l^{-1}_{3c} = 0$$

esto implica dado que $k_3 \neq k_1$:

$$l_{33} \, l^{-1}_{31} = 0 \qquad 8.21.1$$

$$l_{33} \, l^{-1}_{32} = 0 \qquad 8.21.2$$

Ahora para c = 3:

$$k_1 + l_{33} (k_3 - k_1) l^{-1}_{33} = k_3$$

$$k_1 (1 - l_{33} l^{-1}_{33}) = k_3 (1 - l_{33} l^{-1}_{33})$$

si $1 - l_{33} l^{-1}_{33} \neq 0 \Rightarrow k_1 = k_3$ y tenemos entonces una contradicción, por lo tanto:

$$1 = l_{33} \, l^{-1}_{33}$$

y entonces

$$l_{33} \neq 0 \neq l^{-1}_{33}$$

con lo que de 8.21 sabemos:

$$l^{-1}_{31} = 0$$

$$l^{-1}_{32} = 0$$

Ahora, para $a = 1$ tenemos:

$$l_{11} k_1 l^{-1}_{1c} + l_{12} k_2 l^{-1}_{2c} + l_{13} k_3 l^{-1}_{3c} = \delta_{1c} k_1$$

$$k_1 (l_{11} l^{-1}_{1c} + l_{12} l^{-1}_{2c}) + k_3 l_{13} l^{-1}_{3c} = \delta_{1c} k_1$$

$$k_1 (\delta_{1c} - l_{13} l^{-1}_{3c}) + k_3 l_{13} l^{-1}_{3c} = \delta_{1c} k_1$$

$$k_1 (l_{13} l^{-1}_{3c}) = k_3 l_{13} l^{-1}_{3c}$$

como $k_1 \neq k_3$ se debe tener :

$$l_{13} l^{-1}_{3c} = 0 \qquad c = 1, 2, 3$$

pero para $c = 3$, $l^{-1}_{33} \neq 0$, por lo tanto

$$l_{13} = 0$$

y similarmente $l_{23} = 0$.

Ahora $\bar{k}_a = l k_a l^{-1}$ implica que $\bar{k}_1 = \bar{k}_2 \neq k_3$. Como x y $\bar{x}$ son equivalentes, a partir de las variables $\bar{x}$ se puede hacer un cambio de coordenadas y regresar a las variables x , es decir:

$$x = l' \bar{x}$$

con $l' = l^{-1}$. Se puede repetir entonces el argumento desde la ec. 8.18 y obtener finalmente el análogo de las ecs. 8.20:

$$(l^{-1})^{-1}_{31} = l_{31} = 0 \qquad 8.23.1$$

$$(l^{-1})^{-1}_{32} = l_{32} = 0 \qquad 8.23.2$$

por lo anterior se ve que la matriz l tiene la forma:

$$l = \begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ 0 & 0 & l_{33} \end{pmatrix} \qquad 8.24$$

Esta ecuación nos dice al aplicarla en la ec. 8.13 que las variables dinámicas están separadas en grupos, pu--- diéndose solamente relacionar linealmente a las variables si éstas pertenecen al mismo grupo, es decir si variables diferentes x_a y x_b son tales que se satisface $k_a = k_b$.

La matriz ℓ es una matriz arbitraria y k_a también representa una transformación posible de las variables, como se ve en la ec. 8.8, por lo que k_a también debe descomponerse en la forma 8.24.

Clasificaremos ahora a las variables x_a con ayuda de las matrices que son posibles dentro de la teoría.

Consideremos primeramente que existe un solo tipo de matriz $k_a = k$.

Como k satisface la ecuación 8.12 es fácil ver que

$$\delta x_a \frac{1}{2}(1 \pm k) x = \pm \frac{1}{2} (1 \pm k) x \, \delta x_a \qquad 8.25$$

y que existen dos tipos de variables solamente, si:

$$x_+ = \frac{1}{2}(1 + k) x \qquad 8.26$$

se satisface que:

$$\delta x_{+a} \, x_{+b} = + x_{+b} \, \delta x_{+a} \qquad 8.27$$

y con

$$x_- = \frac{1}{2}(1 - k) x \qquad 8.28$$

tenemos

$$\delta x_{-a} \, x_{-b} = - x_{-b} \, \delta x_{-a} . \qquad 8.29$$

Si definimos las variables que satisfacen las ecs. 8.26 y 8.28 como:

$$x_+ \longrightarrow z$$
$$x_- \longrightarrow \xi$$

de las ecs 8.27 y 8.29 se obtiene:

$$[\delta z, z] = 0 \qquad 8.30$$

$$\{\delta \xi, \xi\} = 0 \qquad 8.31$$

Estamos ahora interesados en encontrar las relaciones de conmutación de las variaciones de un tipo de variable con variables del otro tipo.

Agrupando nuestras variables de acuerdo a

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ \hline \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} \qquad 8.32$$

existen dos tipos de matrices k y de acuerdo a las ecs. 8.30 y 8.31 tienen la forma general:

$$k_z = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} & l \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad k_\xi = \begin{pmatrix} m & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} & -\mathbb{1} \end{pmatrix} \qquad 8.33$$

donde las matrices l y m, en general de diferente orden, relacionan variaciones de variables de un tipo con variables del otro tipo en la ec. 8.1. Lo que se quiere determinar es su forma explícita.

De las ecuaciones 8.1 y 8.33 vemos que:

$$\delta z_b \xi_a = (l\xi)_a \delta z_b \qquad 8.34$$

y

$$\delta \xi_a z_b = (mz)_b \delta \xi_a \qquad 8.35$$

donde a y b se refieren a los componentes de 8.32.

Dado que $l^2 = m^2 = \mathbb{1}$, del mismo modoque en la ec. 8.25 se tiene:

$$\delta z_a \tfrac{1}{2}(1 \pm l)\xi = \pm \tfrac{1}{2}((1 \pm l)\xi)\, \delta z_a \qquad 8.36$$

y análogamente

$$\delta \xi_a \tfrac{1}{2}(1 \pm m) z = \pm \tfrac{1}{2}(1 \pm m) z\, \delta \xi_a \qquad 8.37$$

Observando que cualquier combinación lineal de las variables de un tipo sigue perteneciendo a éste, definamos - las combinaciones lineales siguientes:

$$\xi_\pm = \tfrac{1}{2}(1 \pm l)\xi \qquad 8.38.1$$

$$z_\pm = \tfrac{1}{2}(1 \pm m) z \qquad 8.38.2$$

con lo que vemos que tenemos cuatro posibles pares de variables (z_+, ξ_+), (z_+, ξ_-), (z_-, ξ_+) y (z_-, ξ_-).

En términos de estas nuevas variables las ecs 8.36 y 8.37 se escriben:

$$\delta z_\alpha \xi_\beta = \lambda_{\alpha\beta} \xi_\beta \delta z_\alpha \qquad 8.39.1$$

$$\delta \xi_\alpha z_\beta = \mu_{\alpha\beta} z_\beta \delta \xi_\alpha \qquad 8.39.2$$

con $\alpha, \beta \in \{+,-\}$ y donde ξ_β y z_α son los vectores columna ---- $(1 \pm \ell)\xi$ y $(1 \pm m)z$ respectivamente. De 8.36 y 8.37 vemos que:

$$\lambda_{\alpha_+} = +1 \quad , \quad \mu_{\alpha+} = +1$$

$$\lambda_{\alpha_-} = -1 \quad , \quad \mu_{\alpha-} = -1 \qquad . \quad 8.40$$

En esta nueva representación en términos de z_α y ξ_β las matrices ℓ y m que aparecen 8.33 son diagonales como se puede ver de 8.39. Los elementos diagonales son $\pm$ 1 y evidentemente se satisface $\ell^2 = \mathbb{1}$, $m^2 = \mathbb{1}$.

A continuación debemos seleccionar cuáles de los cuatro posibles pares de variables son consistentes con la teoría. Una primera restricción aparece tomando segundas variaciones en 8.39. De 8.39.1 obtenemOs:

$$\delta(\delta z_\alpha \xi_\beta) = \delta z_\alpha \delta \xi_\beta \qquad 8.41.1$$

$$= \delta(\lambda_{\alpha\beta} \xi_\beta \delta z_\alpha) \qquad 8.41.2$$

$$= \lambda_{\alpha\beta} \delta \xi_\beta \delta z_\alpha \qquad 8.41.3$$

De 8.39.2 obtenemos $\delta\xi_\beta \delta z_\alpha$ como:

$$\delta \xi_\beta \delta z_\alpha = \mu_{\beta\alpha} \delta z_\alpha \delta \xi_\beta \qquad 8.42$$

Introduciendo 8.42 3n 8.43.1 y comparando con 8.41.3 obtenemos:

$$\lambda_{\alpha\beta} \mu_{\beta\alpha} = 1 \qquad 8.43$$

lo que se satisface solamente si $\alpha = \beta$ de acuerdo a 8.40.Esto quiere decir que los pares (Z_+ , ξ_-) y (Z_- , ξ_+) son inconsistentes con la teoría.

Los restantes pares (Z_+ , ξ_+), (Z_- , ξ_-) tienen asociadas las matrices:

$$k_Z^+ = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{1} \end{pmatrix} \quad , \quad k_\xi^+ = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & -\mathbb{1} \end{pmatrix} \qquad 8.44$$

y

$$k_Z^- = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & -\mathbb{1} \end{pmatrix} \quad , \quad k_\xi^- = \begin{pmatrix} -\mathbb{1} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & -\mathbb{1} \end{pmatrix} \qquad 8.45$$

respectivamente. Recordando que las matrices k forman un grupode invariancia del Lagrangiano vemos que debemos seleccionarel par (Z_+ , ξ_+) asociado a las matrices 8.44 que en efecto forman un grupo.

Si denotamos las dos clases de variables, como variables de primera clase $Z_{+k} = Z_k$ y variables de segunda clase $\xi_{+k} = \xi$, las propiedades de conmutación de las variaciones $\delta\xi_k$ y δZ_k aparecen finalmente como:

$$[\, \delta Z_k , Z_l \,] = 0 \qquad 8.46.1$$

$$[\, \delta Z_k , \xi_l \,] = 0 \qquad 8.46.2$$

$$[\, \delta \xi_k , Z_l \,] = 0 \qquad 8.46.2$$

$$\{\, \delta \xi_k , \xi_l \,\} = 0 \qquad 8.46.4$$

A continuación analizemos las consecuencias de la elección de este grupo de variables en la en la forma de la matriz A que define el Lagrangiano del sistema.

La condición 8.11 con k_z^+ no implica ninguna restricción sobre A. Sin embargo usando k_ξ^+ vemos que los elementos de A que conectan a las dos clases de variables deben ser cero, por lo que A se reduce a dos submatrices, asociadas cada una con un cierto tipo de variable. Estas matrices las denotaremos por ∂ y $i\alpha$ respectivamente, con lo que escribimos:

$$A = \begin{pmatrix} \partial & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & i\alpha \end{pmatrix} \qquad 8.47$$

De la propiedad dada por la ec. 7.2 se sigue que:-

$$\partial = -\partial^T = \partial^* \qquad 8.48$$

es decir ∂ es antisimétrica y real, mientras que α es simétrica y real:

$$\alpha = \alpha^T = \alpha^* \qquad 8.49$$

Esta descomposición de A, hace que el generador G_x tome la forma:

$$G_x = G_z + G_\xi \qquad 8.50$$

donde:

$$G_z = \frac{1}{2} z\, \partial\, \delta z \qquad 8.51.1$$

$$= \frac{1}{2} (\partial\, \delta z) z \qquad 8.51.2$$

y

$$G_\xi = \frac{1}{2} \xi\, i\alpha\, \delta\xi \qquad 8.52.1$$

$$= -\frac{1}{2} (i\alpha\, \delta\xi)\, \xi \qquad 8.52.2$$

Además el Lagrangiano, ec. 7.1, toma la forma:

$$L=\frac{1}{4}\left\{z,\partial\frac{dz}{dt}\right\}+\frac{1}{4}\left[\xi,i\alpha\frac{d\xi}{dt}\right]-H \qquad 8.53$$

y las ecuaciones de movimiento aparecen ahora como:

$$\partial\frac{dz}{dt}=\frac{\partial_\ell H}{\partial z}=\frac{\partial_r H}{\partial z} \qquad 8.54.1$$

$$i\alpha\frac{d\xi}{dt}=\frac{\partial_\ell H}{\partial \xi}=-\frac{\partial_r H}{\partial \xi} \qquad 8.54.2$$

Introduciendo la notación vectorial:

$$y=[y_a]=\begin{pmatrix} z_1\\ z_2\\ \vdots\\ z_m\\ \xi_1\\ \vdots\\ \xi_n\end{pmatrix} \qquad a=1,\dots,m+n \qquad 8.55$$

a continuación obtenemos las relaciones de conmutación para las diferentes variables:

Desplazando δy a la izquierda o a la derecha en la relación general de conmutación, ec. 7.25, se obtiene:

$$(Ay)_a F(y_b)-F((k_a y)_b)(Ay)_a=-i\frac{\partial_\ell F}{\partial y_a} \qquad 8.56$$

donde la matriz k_a puede ser k_z^+ ó k_ξ^+ según y_a sea variable de primera o segunda clase respectivamente. Si se escoge $F(y_b)=y_b$ se puede representar esta última ecuación como:

$$y_a y_b-(k_a y)_b y_a=i(A^{-1})_{ab} \qquad 8.57$$

Las propiedades de conmutación de las dos clases de variables dinámicas aparecen ahora como:

$$[z_k, z_\ell] = i(a^{-1})_{k\ell} \qquad 8.58.1$$

$$\{\xi_k, \xi_\ell\} = (\alpha^{-1})_{k\ell} \qquad 8.58.2$$

$$[z_k, \xi_\ell] = 0 \qquad 8.58.3$$

9.- VARIABLES COMPLEMENTARIAS DE PRIMERA CLASE

En esta sección se identificarán a las variables de primera clase con las variables de momento y posición con que hemos trabajado en un principio.

Para la matriz antisimétrica a tenemos:

$$\det a = \det a^T = \det(-a) = (-1)^n \det(a) \qquad 9.1$$

lo que nos dice que si n es el número de variables de este tipo, este número debe ser par, $n = 2m$.

Aplicando el teorema 4 del apéndice III, se ve que se puede encontrar una transformación de las variables de este tipo donde la matriz a es diagonal por bloques, siendo cada una de las m submatrices de la forma:

$$\tilde{a} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad 9.2$$

Esta representación de la matriz a relaciona a las variables dinámicas por pares, a las cuales llamaremos p_k y q_k con k 1,...,m. Para un solo par de estas variables el término cinético del Lagrangiano se puede escribir como:

$$\frac{1}{4}\{z, \tilde{a}z\} = \frac{1}{4}\left((p_k\ q_k) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{dp_k}{dt} \\ \frac{dq_k}{dt} \end{pmatrix} \right. +$$

$$\left(\frac{dp_k}{dt} \quad \frac{dq_k}{dt} \right) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_k \\ q_k \end{pmatrix} \Bigg)$$

$$= \frac{1}{4} \left(-q_k \frac{dp_k}{dt} + p_k \frac{dq_k}{dt} + \frac{dq_k}{dt} p_k - \frac{dp_k}{dt} q_k \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(p_k \cdot \frac{dq_k}{dt} - q_k \cdot \frac{dp_k}{dt} \right) \qquad 9.3$$

donde esta última notación indica simetrización con respecto a todas las variables. Por lo que el término cinético completo será:

$$\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{m} \left(p_k \cdot \frac{dq_k}{dt} - q_k \cdot \frac{dp_k}{dt} \right) \qquad 9.4$$

En esta representación las ecuaciones de movimiento serán ahora dadas por:

$$\frac{dq_k}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_k} \qquad 9.5.1$$

$$k = 1, \ldots, m$$

$$-\frac{dp_k}{dt} = \frac{\partial H}{\partial q_k} \qquad 9.5.2$$

y el generador tomará la forma:

$$G_z = \frac{1}{2} \sum_k \left(p_k \delta q_k - \delta p_k q_k \right) \qquad 9.6$$

Las relaciones de conmutación tendrán la forma canónica:

$$[q_k, q_l] = [p_k, p_l] = 0 \qquad 9.7.1$$

$$[q_k, p_l] = i \delta_{k,l} \qquad 9.7.2$$

Por último se puede aprovechar la libertad de agregar una derivada total al Lagrangiano, en la forma:

$$\bar{L} = L + \frac{dW}{dt} \qquad 9.8$$

para obtener representaciones alternativas del término cinético y de los generadores. Escogiendo:

$$W = \frac{1}{2} \sum_k p_k \cdot q_k \qquad 9.9$$

se obtiene un nuevo término cinético dado por:

$$\sum_{k=1}^{m} p_k \cdot \frac{dq_k}{dt} \qquad 9.10$$

y los generadores

$$G_q = \sum_k p_k \, \delta q_k \qquad 9.11$$

Si se escoge el signo opuesto para W se obtiene el término cinético:

$$-\sum_{k=1}^{m} q_k \cdot \frac{dp_k}{dt} \qquad 9.12$$

y los nuevos generadores infinitesimales:

$$G_p = -\sum_k \delta p_k \, q_k \qquad 9.13$$

Comparando con la ec. 9.6 vemos que G_q genera transformaciones en los operadores q_k dejando inalterados los p_k, G_p tiene la interpretación inversa.

De la clasificación de las variables en dos tipos diferentes, se ha podido generalizar de una manera consistente el principio de acción, que además de las variables dinámicas usuales de momento y posición incorpora un nuevo tipo de variables, las variables de segunda clase, que son el objeto de estudio de la siguiente sección.

10.- VARIABLES DE SEGUNDA CLASE

La necesidad de un número par de variables y la posibilidad de dividirlas en dos conjuntos complementarios también aparece para las variables de segunda clase. Utilizando el teorema 4 del apéndice III, vemos que la matriz α puede ser reducida a la matriz unidad por una transformación -- real de las variables. Con esto las nuevas variables canónicas y hermíticas, ξ , obedecen:

$$\{\xi_a, \xi_b\} = \delta_{ab} \qquad 10.1$$

lo que significa que dos operadores ξ cualesquiera anticonmutan, y el cuadrado de cada operador es un múltiplo común - del operador unidad.

La forma canónica de las ecuaciones de movimiento- son ahora:

$$i\frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{\partial_l H}{\partial \xi} = -\frac{\partial_r H}{\partial \xi} \qquad 10.2$$

Para un sistema descrito por variables de segunda- clase, e requisito de que el álgebra de mediciones sea derivado de las variables dinámicas fundamentales, implica que - a partir de estas variables podamos construir un operador -- que tenga las propiedades de las $\delta\xi_a$. Para un número par- de las variables, 2r, el producto de todas las ξ_a anticonmuta con cada una de las ξ_a , pero no existe un operador de esta forma para un número impar de estas variables. Se concluye por lo tanto que debe existir un número par de variables dinámicas de segunda clase.

Dividiendo estas variables en dos grupos con el mismo número de elementos, $\xi^{(1)}$ y $\xi^{(2)}$, el término cinético para las variables de segunda clase, lo podemos escribir como:

$$\frac{i}{4}\left[\xi, \frac{d\xi}{dt}\right] = \frac{i}{4}\left(\left[\xi^{(1)}, \frac{d\xi^{(1)}}{dt}\right] + \left[\xi^{(2)}, \frac{d\xi^{(2)}}{dt}\right]\right.$$
$$= \frac{i}{2}\sum_{\ell}^{r} \xi_\ell^{(1)} \cdot \frac{d\xi^{(1)}}{dt} + \xi_\ell^{(2)} \cdot \frac{d\xi^{(2)}}{dt} \qquad 10.3$$

donde el punto significa antisimetrización respecto a las variables de segunda clase.

Una descripción que emplee variables complementarias aparece con la introducción de variables no hermíticas-canónicas, definidas por:

$$q = 2^{-\frac{1}{2}} \left(\xi^{(2)} + i\, \xi^{(1)} \right) \qquad 10.4.1$$

$$p = i\, q^{+} = 2^{-\frac{1}{2}} \left(\xi^{(1)} + i\, \xi^{(2)} \right) \qquad 10.4.2$$

que convierten al término cinético en:

$$\frac{1}{2} \left(p \cdot \frac{dq}{dt} - \frac{dp}{dt} \cdot q \right) \qquad 10.5$$

Observemos que esta estructura es aplicable a las dos clases de variables dinámicas.

Con esto las ecuaciones de movimiento:

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\partial_\ell H}{\partial p} \qquad 10.6.1$$

$$-\frac{dp}{dt} = \frac{\partial_r H}{\partial q} \qquad 10.6.2$$

y los generadores de cambios infinitesimales en q y p:

$$G_q = p\delta q \qquad 10.7.1$$

$$G_p = -\delta p q \qquad 10.7.2$$

pueden referirse a las dos clases de variables dinámicas. La distinción entre las dos clases de variables esta implícita- entra relación entre las derivadas derecha e izquierda y en- general en las propiedades como operadores de las variaciones δq y δp .

Las relaciones de conmutación de estas nuevas va-- riables se pueden derivar directamente de las ecs 10.1, re-- sultando:

$$\{q_k, q_\lambda\} = \{p_k, p_\lambda\} = 0 \qquad 10.8.1$$

$$\{q_k, p_\lambda\} = i\,\delta_{k\lambda} \qquad 10.8.2$$

Por la relación entre las variables p_k y q_k dada -- por la ec. 10.4.2 las ecuaciones de movimiento y las relacio nes de conmutación pueden escribirse en la forma:

$$i\frac{dq_k}{dt} = \frac{\partial_\ell H}{\partial q_k^+} \qquad 10.9.1$$

y
$$-i\frac{dq_k^+}{dt} = \frac{\partial_r H}{\partial q_k}$$

$$\{q_k, q_\lambda\} = \{q_k^+, q_\lambda^+\} = 0 \qquad 10.10$$

$$\{q_k, q_\lambda^+\} = \delta_{k\lambda} \qquad 10.11$$

II.- SISTEMAS CON VARIABLES DE UN SOLO TIPO

En este capítulo utlizaremos los conceptos desarrollados en la primera parte, aplicandolos a sistemas que tienen solamente variables de un solo tipo. Para variables de primera clase ejemplificaremos con el oscilador armónico mostrando como utilizamos el principio variacional. En este caso es posible integrar las ecuaciones de movimiento de los operadores (ecs. lineales) lo cual permite obtener la función de transformación de una manera simple.

Posteriormente desarrollaremos más ampliamente el método para el caso de un oscilador armónico amortiguado sobre el cual actúa una fuerza externa, en donde la frecuencia ω ,el factor de amortiguamiento, γ , y la fuerza externa son funciones generales del tiempo. Por último presentaremos como una introducción al siguiente capítulo un sistema que contiene solamente variables de segunda clase.

1.- OSCILADOR ARMONICO

Para cualquier sistema siempre podemos escoger la representación en la cual calcularemos la función de transformación. Por ejemplo, podemos escoger como estado inicial del sistema, un estado propio del operador de posición, o de momento o de la energía y también para el estado final podemos hacer una selección arbitraria. Escojamos aquí como estados inicial y final, estados propios del operador de posición q, es decir calcularemos la función de transformación $\langle q_1' t_1 | q_2' t_2 \rangle$, donde q_1' y q_2' son valores propios del operador de posición a t_1 y t_2 respectivamente, donde t_1 y t_2 representan los tiempos final e inicial.

Para un oscilador armónico el Hamiltoniano está dado por:

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega_0^2 q^2 \qquad 1.1$$

donde m es la masa de la partícula y ω_0 es la frecuencia del oscilador, en este caso constante.

Los generadores de las transformaciones infinitesimales en los estados final e inicial, están dados por:

$$\begin{aligned} G &= p\,\delta q - H\,\delta t \\ &= p\,\delta q - \frac{p^2}{2m}\delta t - \frac{1}{2} m \omega_0^2 q^2 \delta t \end{aligned} \qquad 1.2$$

en la representación escogida.

El principio variacional nos dice entonces que para encontrar $\langle q_1' t_1 | q_2' t_2 \rangle$ tenemos que resolver la ecuación:

$$\delta \langle q_1' t_1 | q_2' t_2 \rangle = \frac{i}{\hbar} \langle q_1' t_1 | \delta \int_{t_2}^{t_1} dt\, L \,| q_2' t_2 \rangle = \frac{i}{\hbar} \langle q_1' t_1 | G_1 - G_2 | q_2' t_2 \rangle \qquad 1.3$$

donde:

$$\begin{aligned} \langle q_1' t_1 | G_1 - G_2 | q_2' t_2 \rangle = \langle q_1' t_1 | & p_1 \delta q_1 - \frac{p_1^2}{2m}\delta t_1 - \frac{1}{2} m \omega_0^2 q_1^2 \delta t_1 \\ & - p_2 \delta q_2 + \frac{p_2^2}{2m} \delta t_2 + \frac{1}{2} m \omega_0^2 q_2^2 \delta t_2 | q_2' t_2 \rangle \end{aligned} \qquad 1.4$$

en que los subíndices nos indican el tiempo al cual estan -- referidos los operadores y las variaciones.

Para poder aplicar los operadores a los estados -- $\langle q_1' t_1|$ y $|q_2' t_2\rangle$ necesitamos expresar los operadores de - momento en términos de q_1 y q_2, lo cual requiere que resolvamos las ecuaciones de movimiento para los operadores q y p,

$$\frac{\partial H}{\partial p} = \frac{dq}{dt} \quad , \quad \frac{\partial H}{\partial q} = -\frac{dp}{dt} \qquad 1.5$$

que en nuestro caso se reducen a:

$$\frac{p}{m} = \frac{dq}{dt} \qquad 1.6$$

y

$$m\omega_o^2 q = -\frac{dp}{dt} \qquad 1.7$$

Las cuales podemos escribir en la forma:

$$\begin{pmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{m} \\ -m\omega_o^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} \qquad 1.8$$

Esta última ecuación representa un sistema de ecuaciones acopladas. Ahora, podemos desacoplar este sistema diagonalizando a la matriz:

$$\underset{\sim}{M} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{m} \\ -m\omega_o^2 & 0 \end{pmatrix} \qquad 1.9$$

lo cual es posible si encontramos una matriz $\underset{\sim}{A}$ tal que: — $\underset{\sim}{A}^{-1}\underset{\sim}{M}\underset{\sim}{A}$ sea diagonal. Por los métodos tradicionales podemos-encontrar que $\underset{\sim}{A}$ esta dada por:

$$\underset{\sim}{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ im\omega_0 & -im\omega_0 \end{pmatrix} \frac{1}{(1-m^2\omega_0^2)^{1/2}} \qquad 1.10$$

Calculando $\underset{\sim}{A}^{-1}\underset{\sim}{M}\underset{\sim}{A}$ tenemos:

$$\underset{\sim}{A}^{-1}\underset{\sim}{M}A = i\omega_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad 1.11$$

Si aplicamos esta transformación a la ec. 1.8 en la forma:

$$\underset{\sim}{A}^{-1}\begin{pmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{pmatrix} = \underset{\sim}{A}^{-1}M\underset{\sim}{A}\underset{\sim}{A}^{-1}\begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} \qquad 1.12$$

se llega al sistema de ecuaciones desacoplado:

$$\begin{pmatrix} \dot{\zeta} \\ \dot{\xi} \end{pmatrix} = i\omega_0 \begin{pmatrix} \zeta \\ \xi \end{pmatrix} \qquad 1.13$$

donde:

$$\zeta = -im\omega_0 q - p \qquad 1.14$$

y

$$\xi = -im\omega_0 q + p \qquad 1.15$$

Resolviendo las ecuaciones 1.13, aplicando las condiciones iniciales para q y p en la forma:

$$\zeta_2 = -im\omega_0 q_2 - p_2 \qquad 1.16.1$$

y

$$\xi_2 = -i m \omega_0 q_2 + p_2 \qquad 1.16.2$$

tenemos:

$$\zeta(t) = \zeta_2 \, e^{i\omega(t-t_2)} \qquad 1.17.1$$

$$\xi(t) = \xi_2 \, e^{i\omega(t-t_2)} \qquad 1.17.2$$

A partir de estas ecuaciones, evaluadas al tiempo-t_1, y de las definiciones de ζ y ξ, ecs. 1.14 y 1.15, tenemos que encontrar a p_1 y p_2 como funciones de q_1, q_2, t_1 y t_2. Esto es simplemente álgebra siendo el resultado final:

$$p_1 = m\omega_0 \left[q_1 \cot \omega_0 T - q_2 \csc \omega_0 T \right] \qquad 1.18$$

y

$$p_2 = m\omega_0 \left[q_1 \csc \omega_0 T - q_2 \cot \omega_0 T \right] \qquad 1.19$$

donde:

$$T = t_1 - t_2 \qquad 1.20$$

Utlizando la ec. 1.18 podemos encontrar p_1^2 llegando a:

$$p_1^2 = m^2\omega_0^2 \left[q_1^2 \cot \omega_0 T + q_2^2 \csc \omega_0 T - q_1 q_2 \csc \omega_0 T \cot \omega_0 T - q_2 q_1 \csc \omega_0 T \cot \omega_0 T \right] \qquad 1.21$$

con una expresión análoga para p_2^2. Vemos de esta última ecuación que todavía no podemos aplicar p_1^2 (y p_2^2) a los estados $\langle q_1' t_1 |$ y $| q_2' t_2 \rangle$ hasta que no transformemos el término que contiene a $q_2 q_1$ a la forma $q_1 q_2$. Recordemos que en general dos operadores a tiempos deferentes no conmutan, por lo que- es necesario encontrar el conmutador $[q_1, q_2]$. Podemos hallar este último a partir del conmutador canónico:

$$[q_1, p_1] = i\hbar \qquad 1.22$$

si expresamos a p_1 como en 1.18, obtenemos:

$$[q_1, q_2] = \frac{-i\hbar}{m\omega_0} \operatorname{sen} \omega_0 T \qquad 1.23$$

De esta manera podemos escribir a p_1^2 y p_2^2 en la forma adecuada y aplicarlos, junto con los demás términos, a los estados final e inicial en la ecuación 1.4. Esta se reduce a:

$$\begin{aligned}
\delta\langle q_1' t_1 | q_2' t_2\rangle &= \langle q_1' t_1 | G_1 - G_2 | q_2' t_2\rangle \\
&= \Big\{ m\omega_0 \left(q_1' \cot\omega_0 T - q_2' \csc\omega_0 T\right)\delta q_1' - \frac{m\omega_0^2}{2}\Big(q_1'^2 \cot^2\omega_0 T \\
&\quad + q_2'^2 \csc^2\omega_0 T - q_1' q_2' (2\cot\omega_0 T \csc\omega_0 T) - \frac{i\hbar}{m\omega_0}\cot\omega_0 T\Big)\delta t_1 \\
&\quad - \frac{1}{2} m\omega_0^2 q_1'^2 \delta t_1 - m\omega_0 \left(q_1' \csc\omega_0 T - q_2' \cot\omega_0 T\right)\delta q_2' \\
&\quad + \frac{m\omega_0^2}{2}\Big(q_1'^2 \csc^2\omega_0 T + q_2'^2 \cot^2\omega_0 T - q_1' q_2' (2\csc\omega_0 T \cot\omega_0 T) \\
&\quad - \frac{i\hbar}{m\omega_0}\cot\omega_0 T\Big)\delta t_2 + \frac{1}{2} m\omega_0^2 q_2'^2 \delta t_2 \Big\} \langle q_1' t_1 | q_2' t_2\rangle
\end{aligned}$$

1.24

Para poder integrar esta última ecuación observemos que:

$$\delta_q\left(\frac{q_1'^2}{2}\cot\omega_0 T - q_1' q_2' \csc\omega_0 T + \frac{q_2'^2}{2}\cot\omega_0 T\right)$$
$$= (q_1'\cot\omega_0 T - q_2'\csc\omega_0 T)\,\delta q_1 - (q_1'\csc\omega_0 T - q_2'\cot\omega_0 T)\,\delta q_2 \qquad 1.25$$

$$\delta_{t_1}\left(\frac{q_1'^2}{2}\cot\omega_0 T - q_1' q_2' \csc\omega_0 T + \frac{q_2'^2}{2}\cot\omega_0 T\right)$$
$$= -\frac{\omega_0}{2}\Big(q_1'^2\cot^2\omega_0 T - 2q_1' q_2'\cot\omega_0 T\csc\omega_0 T +$$
$$q_2'^2\csc^2\omega_0 T\Big)\,\delta t_1 - \frac{q_1'^2}{2}\,\omega_0\,\delta t_1 \qquad 1.26$$

Reescribiendo la ec. 1.24 en términos de 1.25, 1.26 y su análogo para δ_{t_2} tenemos:

$$\delta\langle q_1' t_1 | q_2' t_2\rangle$$
$$= \Big\{ m\omega_0\,\delta\Big(\frac{q_1'^2}{2}\cot\omega_0 T - q_1' q_2'\csc\omega_0 T + \frac{q_2'^2}{2}\cot\omega_0 T$$
$$+ \frac{i\hbar\omega_0}{2}\cot\omega_0 T\,\delta T\Big\}\langle q_1' t_1 | q_2' t_2\rangle \qquad 1.27$$

donde:

$$\delta = \delta_q + \delta_T = \delta_q + \delta_{t_1} + \delta_{t_2} \qquad 1.28$$

Utilizando:

$$\delta_T \ln|\operatorname{sen}\omega_0 T| = \omega_0\cot\omega_0 T\,\delta T \qquad 1.29$$

se llega finalmente a:

$$\delta\langle q_1' t_1 | q_2' t_2\rangle = \delta\Big(-\frac{i^2}{2}\Big\{\frac{m\omega_0}{\hbar}\big(q_1'^2 \cot\omega_0 T - 2q_1' q_2' \csc\omega_0 T$$

$$+ q_2' \cot\omega_0 T\big) - \ln|\operatorname{sen}\omega_0 T|\Big\}\Big)\langle q_1' t_1 | q_2' t_2\rangle \qquad 1.30$$

donde la variación δ es con respecto a todas las variables-independientes q_1', q_2', t_1, t_2. Podemos integrar directamente esta ecuación resultando:

$$\langle q_1' t_1 | q_2' t_2\rangle = \frac{A}{\sqrt{\operatorname{sen}\omega_0 T}}\, e^{\,i\frac{m\omega_0}{2\hbar}\left(q_1'^2 \cot\omega_0 T - 2q_1' q_2' \csc\omega_0 T + q_2'^2 \cot\omega_0 T\right)} \qquad 1.31$$

La constante de integración A, se encuentra directamente de la condición de normalización:

$$\lim_{t_1 \to t_2} \langle q_1' t_1 | q_2' t_2\rangle = \delta(q_1' - q_2') \qquad 1.32$$

y resulta ser:

$$A = \sqrt{\frac{m\omega_0}{2\pi i\hbar}} \qquad 1.33$$

de esta manera obtenemos finalmente la función de transformación:

$$\langle q_1' t_1 | q_2' t_2\rangle = \sqrt{\frac{m\omega_0}{2\pi i\hbar \operatorname{sen}\omega_0 T}}\; e^{\,i\frac{m\omega_0}{2\hbar}\cot\omega_0 T\left(q_1'^2 + q_2'^2 - \frac{2q_1' q_2'}{\cos\omega_0 T}\right)} \qquad 1.34$$

Esta función de transformación contiene toda la información sobre el sistema. Cabe aquí señalar que la ec. 1.34 es exactamente igual al propagador para el oscilador armónico que se obtiene de la teoría de integrales de trayectoria de Feynmann[8]. Una manera de obtener el espectro de energía - para este sistema, a partir de la función de transformación-

1.34, se muestra en el apéndice IV, obteniéndose el espec--- tro ya conocido. En la siguiente sección resolveremos el pro blema del oscilador armónico amortiguadosobre el cual actua- una fuerza externa donde la frecuencia $\omega(t)$, el factor de- amortiguamiento $\Gamma(t)$ y la fuerza externa $F(t)$ son funciones generales del tiempo. El método empleado es una extensión de las ideas recién desarrolladas para el oscilador armónico -- simple.

2.- OSCILADOR ARMONICO AMORTIGUADO

En esta sección resolveremos primeramente el oscilador armónico amortiguado y posteriormente usando este re-- sultado introduciremos la fuerza externa $F(t)$. Es prudente - señalar que el iscilador armónico amortiguado con funciones- generales del tiempo representa un sistema unidimensional -- con un Hamiltoniano cuadrático para el cual es posible ha--- llar la función de transformación con una dependencia explí- cita de las coordenadas inicial y final mientras que la de-- pendencia temporal esta dada implícitamente a través de cier tas funciones auxiliares. Aunque este sistema ya ha sido re- suelto en la literatura por métodos diferentes, el objetivo- de esta sección es mostrar mediante un sistema no trivial la aplicación de la teoría desarrollada en el capítulo anterior (refs. 9,10).

El sistema considerado como el análogo cuántico -- del oscilador armónico amortiguado con parámetros dependientes del tiempo esta descrito por el Hamiltoniano:

$$\hat{H}(t) = \frac{1}{2}\left[p^2 e^{-2\Gamma} + \omega^2 e^{2\Gamma} q^2 \right] \qquad 2.1$$

donde hemos supuesto $m=1$.

Las ecuaciones de movimiento para este sistema son:

$$\dot{q} = p\, e^{-2\Gamma} \qquad 2.2$$

y

$$\dot{p} = \omega^2 e^{2\Gamma} q \qquad 2.3$$

A partir de éstas ecuaciones llegamos directamente a que la ecuación que debe satisfacer el operador q es:

$$\ddot{q} + 2\dot{\Gamma}\dot{q} + \omega^2 q = 0 \qquad 2.4$$

Debido a la forma lineal de esta ecuación, podemos escribir la solución general en la forma:

$$q(t) = \alpha(t)\, q_1 + \beta(t)\, q_2 \qquad 2.5$$

donde las funciones α y β satisfacen las condiciones de -- frontera:

$$\alpha(1) = 1 \qquad 2.6.1.$$

$$\alpha(2) = 0 \qquad 2.6.2$$

y

$$\beta(1) = 0 \qquad 2.6.3$$

$$\beta(2) = 1 \qquad 2.6.4$$

Aquí denotamos por 1 y 2 a el tiempo final t_1 y al tiempo -- inicial t_2 respectivamente.

Por lo anterior es directo que la representación - más adecuada para calcular la función de transformación será aquella dada por estados propios del operador de posición, - $\langle q_1' t_1 | q_2' t_2 \rangle$.

Substituyendo 2.5 en 2.6, vemos que las funciones- α y β deben satisfacer las ecuaciones:

$$\ddot{\alpha}(t) + 2\dot{\Gamma}\dot{\alpha} + \omega^2\alpha = 0 \qquad 2.7.1$$

$$\ddot{\beta}(t) + 2\dot{\Gamma}\dot{\beta} + \omega^2\beta = 0 \qquad 2.7.2$$

A partir de 2.2 y 2.5 podemos expresar el opera--- dor p como función de q_1, q_2 y t, resultando:

$$p = (\dot{\alpha}(t)\, q_1 + \dot{\beta}(t)\, q_2)\, e^{2\Gamma(t)} \qquad 2.8$$

Para poder expresar p^2 en la forma adecuada, como- en la sección anterior, tenemos que encontrar el conmutador- $[q_1, q_2]$, lo cual se hace de manera similar llegándose a:

$$[q_1, q_2] = \frac{i\hbar\, e^{-2\Gamma(1)}}{\dot{\beta}(1)} \qquad 2.9$$

Podemos simplificar el problema, sin perder generalidad, si consideramos que el tiempo inicial es fijo $t_2 = 0$ y no esta sujeto a variación, es decir, $\delta t_2 = 0$, por lo que- obtendremos la función de transformación al resolver la ecuación:

$$\delta\langle q_1' t_1 | q_2' 0\rangle = \frac{i}{\hbar}\langle q_1' t_1 | p_1\delta q_1 - H\delta t_1 - p_2\delta t_2 | q_2' 0\rangle \qquad 2.10$$

Expresando a el Hamiltoniano en términos de q_1, q_2 se llega a que (de aquí en adelante $\alpha(0)$, $\beta(0)$, $\Gamma(0)$ son funciones evaluadas en $t_2 = 0$):

$$\frac{i}{\hbar}\langle q_1' t_1 | p_1 \delta q_1 - H_1 \delta t_1 - p_2 \delta q_2 | q_2' 0\rangle$$

$$= \frac{i}{\hbar}\langle q_1' t_1 | (\dot\alpha(1) q_1 + \dot\beta(1) q_2)\, e^{2\Gamma(1)} \delta q_1' - \frac{1}{2}\Big[\big(\dot\alpha^2(1) q_1^2 + \dot\alpha(1)\dot\beta(1) q_1 q_2$$

$$+ \dot\alpha(1)\beta(1)\Big(q_1 q_2 - \frac{i\hbar\, e^{-2\Gamma(1)}}{\beta(1)}\Big) + \dot\beta^2(1) q_2^2\big) e^{-2\Gamma(1)} + \omega^2 \alpha^2(1)\, e^{2\Gamma(1)} q_1^2\Big]\delta t_1$$

$$- (\dot\alpha(0) q_1' + \dot\beta(0) q_2')\, e^{2\Gamma(0)} \delta q_2' \,|\, q_2'(0)\rangle \qquad 2.11$$

Aplicando los operadores:

$$\delta\langle q_1' t_1 | q_2' 0\rangle = \frac{i}{\hbar}\Big\{\frac{1}{2} q_1'^2 (-\dot\alpha^2(1) - \omega^2(1))\, e^{2\Gamma(1)} \delta t_1 +$$

$$\frac{1}{2} q_2'^2 (-\dot\beta(1)\, e^{2\Gamma(1)})\delta t_1 + q_1' q_2' (-\dot\alpha(1)\dot\beta(1))\, e^{2\Gamma(1)} \delta t_1 +$$

$$q_1' (\dot\alpha(1)\dot\beta(1))\, e^{2\Gamma(1)} \delta t_1 + q_1' (\dot\alpha(1)\, e^{2\Gamma(1)} \delta q_1 - \dot\alpha(0)\, e^{2\Gamma(0)} \delta q_2')$$

$$+ q_2' (\dot\beta(1)\, e^{2\Gamma(1)} \delta q_1 - \dot\beta(0)\, e^{2\Gamma(0)} \delta q_2) + \frac{\dot\alpha(1)}{2} i\hbar\, \delta t_1\Big\}\langle q_1' t_1 | q_2' 0\rangle \qquad 2.12$$

Aquí nos enfrentamos al siguiente problema, en general las variaciones son respecto a los tiempos t_1 y t_2, por lo que para poder integrar ésta última ecuación necesitamos conocer la dependencia explícita de las funciones α y β -- con respecto a las condiciones de frontera, es decir, como varían α y β al variar t_1 y t_2, lo cual no conocemos ya que no hemos resuelto las ecs 2.7. Podemos superar este problema si logramos extraer explícitamente la dependencia en t_1 y t_2 de las funciones α y β . Se puede lograr esto si escribimos α y β en términos de dos funciones auxiliares λ_1 y λ_2 de la siguiente forma:

$$\alpha(t) = A\lambda_1(t) + B\lambda_2(t) \qquad 2.13.1$$

y

$$\beta(t) = C\lambda_1(t) + D\lambda_2(t) \qquad 2.13.2$$

Introduciendo las condiciones de frontera podemos evaluar -- las constantes y escribir a α y β como:

$$\alpha(t) = \frac{\lambda_1(0)\lambda_2(t) - \lambda_1(t)\lambda_2(0)}{\Lambda} \qquad 2.14.1$$

y

$$\beta(t) = \frac{\lambda_2(1)\lambda_1(t) - \lambda_1(1)\lambda_2(t)}{\Lambda} \qquad 2.14.2$$

donde

$$\Lambda = \lambda_2(1)\lambda_1(0) - \lambda_2(0)\lambda_1(1) \qquad 2.14.3$$

Observemos que λ_1 y λ_2 satisfacen las mismas -- ecs 2.7 pero sus condiciones de frontera pueden ser cuales-- quiera. Sin embargo $\alpha(t)$ y $\beta(t)$ son independientes de es-- tas puesto que estancompletamente determinadas por las ecs.- 2.7 y las condiciones de borde 2.6. Lo importante es enton-- ces que se ha podido extraer la dependencia explícita en t_1- y t_2 de las funciones α y β .

Para integrar la ec. 2.12 consideremos separadamen te cada uno de los factores de los productos de coordenadas- que aparecen en ella.

Primeramente observemos que:

$$\frac{d}{dt}\left(\ln\left(\dot{\lambda}_1(t)\lambda_2(t) - \dot{\lambda}_2(t)\lambda_1(t)\right) + 2\Gamma(t)\right) = 0 \qquad 2.15$$

donde hemos utilizado las ecs. diferenciales que satisfacen - λ_1 y λ_2. Por lo tanto:

$$(\dot{\lambda}_1(t)\lambda_2(t) - \dot{\lambda}_2(t)\lambda_1(t))\, e^{2\rho(t)} = K , \qquad 2.16$$

Integraremos la ec. 2.12 separando los diferentes-términos que nos darán la misma dependencia en las coordenadas q_1' y q_2'.

i) Para encontrar la dependencia final en $q_1'q_2'$, tenemos que-integrar:

$$q_1'q_2'(-\dot{\alpha}(1)\dot{\beta}(1))\, e^{2\rho(1)}\delta t_1 - \dot{\alpha}(0)\, q_1'\, e^{2\rho(0)}\delta q_2 + \dot{\beta}(1)\, e^{2\rho(1)} q_2'\delta q_1 \qquad 2.17$$

De 2.14.1 observemos que (recordando que $t_2 = 0$):

$$e^{2\rho(0)}\dot{\alpha}(0) = -\frac{(\lambda_1(0)\dot{\lambda}_2(0) - \dot{\lambda}_1(0)\lambda_2(0))}{\Lambda} e^{2\rho(0)} = \frac{K}{\Lambda} \qquad 2.18$$

Similarmente:

$$\dot{\beta}(1)\, e^{2\rho(1)} = \frac{K}{\Lambda} \qquad 2.19$$

Ahora:

$$\frac{d}{dt_1}\dot{\beta}(1)\, e^{2\rho(1)} = \frac{d}{dt_1}\frac{K}{\Lambda} \qquad 2.20$$

Podemos evaluar ésta última derivada ya que conocemos la dependencia explícita de Λ en t_1:

$$\frac{d}{dt_1}\frac{K}{\Lambda} = \frac{d}{dt_1}\frac{K}{\lambda_2(1)\lambda_1(0) - \lambda_2(0)\lambda_1(1)}$$

$$= -K\,\frac{\dot{\lambda}_2(1)\lambda_1(0) - \lambda_2(0)\dot{\lambda}_1(1)}{\Lambda^2}$$

$$= -\dot{\beta}(1)\,\dot{\alpha}(1)\, e^{2\rho(1)} \qquad 2.21$$

$$\alpha(t) = A\lambda_1(t) + B\lambda_2(t) \qquad 2.13.1$$

y

$$\beta(t) = C\lambda_1(t) + D\lambda_2(t) \qquad 2.13.2$$

Introduciendo las condiciones de frontera podemos evaluar -- las constantes y escribir a α y β como:

$$\alpha(t) = \frac{\lambda_1(0)\lambda_2(t) - \lambda_1(t)\lambda_2(0)}{\Lambda} \qquad 2.14.1$$

y

$$\beta(t) = \frac{\lambda_2(1)\lambda_1(t) - \lambda_1(1)\lambda_2(t)}{\Lambda} \qquad 2.14.2$$

donde

$$\Lambda = \lambda_2(1)\lambda_1(0) - \lambda_2(0)\lambda_1(1) \qquad 2.14.3$$

Observemos que λ_1 y λ_2 satisfacen las mismas -- ecs 2.7 pero sus condiciones de frontera pueden ser cuales-- quiera. Sin embargo $\alpha(t)$ y $\beta(t)$ son independientes de es-- tas puesto que estancompletamente determinadas por las ecs.- 2.7 y las condiciones de borde 2.6. Lo importante es enton-- ces que se ha podido extraer la dependencia explícita en t_1- y t_2 de las funciones α y β .

Para integrar la ec. 2.12 consideremos separadamen te cada uno de los factores de los productos de coordenadas- que aparecen en ella.

Primeramente observemos que:

$$\frac{d}{dt}\left(\ln\left(\dot{\lambda}_1(t)\lambda_2(t) - \dot{\lambda}_2(t)\lambda_1(t) + 2\Gamma(t)\right)\right) = 0 \qquad 2.15$$

Por lo tanto:

$$\frac{d}{dt_1}\dot{\beta}(1)\,e^{2\Gamma(1)} = -\dot{\beta}(1)\,\dot{\alpha}(1)\,e^{2\Gamma(1)} \qquad 2.22$$

Utilizando 2.18, 2.19 y 2.22 tenemos después de integrar que el término proporcional a $q_1'q_2'$ satisface:

$$q_1'q_2'\frac{d}{dt_1}\dot{\beta}(1)\,e^{2\Gamma(1)}\,\delta t_1 + \dot{\beta}(1)\,e^{2\Gamma(1)}(q_1'\,\delta q_2 + q_2'\,\delta q_1) = \delta(\dot{\beta}(1)\,e^{2\Gamma(1)}\,q_1'q_2')$$

2.23

ii) Dependencia en $q_1'^2$:

Ahora tenemos que integrar:

$$-\frac{1}{2}q_1'^2(\dot{\alpha}(1)^2 + \omega^2(1)\,\alpha(1))\,e^{2\Gamma(1)}\,\delta t_1 + q_1'\,\dot{\alpha}(1)\,e^{2\Gamma(1)}\,\delta q_1 \qquad 2.24$$

Observemos que:

$$\frac{d}{dt_1}\dot{\alpha}(1)\,e^{2\Gamma(1)} = \frac{d}{dt_1}\;\frac{\lambda_1(0)\,\dot{\lambda}_2(1) - \dot{\lambda}_1(1)\,\lambda_2(0)}{\lambda_2(1)\,\lambda_1(0) - \lambda_2(0)\,\lambda_1(1)}\;e^{2\Gamma(1)}$$

$$= e^{2\Gamma(1)}\left[2\dot{\Gamma}(1)\,\dot{\alpha}(1) + \frac{\lambda_1(0)\,\ddot{\lambda}_2(0) - \lambda_1(1)\,\lambda_2(0)}{\Lambda} - \frac{(\lambda_1(0)\,\dot{\lambda}_2(1) - \lambda_1(1)\,\lambda_2(0))^2}{\Lambda^2}\right]$$

Utilizando la expresión de α en términos de λ_1 y λ_2 vemos que

$$\frac{d}{dt_1}\dot{\alpha}(1)\,e^{2\Gamma(1)} = e^{2\Gamma(1)}\left[2\dot{\Gamma}(1)\,\dot{\alpha}(1) + \ddot{\alpha}(1) - \dot{\alpha}(1)\right] \qquad 2.26$$

La cual de acuerdo a la ec. 2.7.1 podemos escribir como:

$$\frac{d}{dt_1}\dot{\alpha}(1)\,e^{2\Gamma(1)} = -e^{2\Gamma(1)}(\dot{\alpha}(1)^2 + \omega^2(1)\,\alpha(1)) \qquad 2.27$$

Por lo tanto podemos integrar 2.24, obteniendo:

$$-\frac{1}{2}q_1'^2(\dot{\alpha}(1)^2 + \omega^2(1)\,\alpha(1))\,e^{2\Gamma(1)}\,\delta t_1 + q_1'\,\dot{\alpha}(1)\,e^{2\Gamma(1)}\,\delta q_1 = \delta\left(\dot{\alpha}(1)\,e^{2\Gamma(1)}\,\frac{q_1'^2}{2}\right)$$

2.28

iii) Dependencia en $q_2'^2$:

De igual manera que en el caso anterior se llega a que:

$$\frac{1}{2} q_1'^2 (-\dot{\beta}(1)\, e^{2\Gamma(1)})\, \delta t_1 + q_2' (-\dot{\beta}(0)\, e^{2\Gamma(0)})\, \delta q_2$$

$$= \delta(-\dot{\beta}(0)\, e^{2\dot{\Gamma}(0)}\, q_2'^2) \qquad 2.29$$

y finalmente

iv) Factor Independiente

Similarmente vemos que:

$$\frac{d}{dt_1} \ln (\dot{\beta}(1)\, e^{2\Gamma(1)}) = -\dot{\alpha}(1) \qquad 2.30$$

De la ec. 2.16 sabemos:

$$\dot{\beta}(1)\, e^{2\Gamma(1)} = -\dot{\alpha}(0)\, e^{2\Gamma(0)} \qquad 2.31$$

Por lo que:

$$\frac{\dot{\alpha}(1)\, i\hbar}{2}\, \delta t_1 = \delta\left(-\frac{i\hbar}{2} \ln (-\dot{\alpha}(0)\, e^{2\Gamma(0)})\right) \qquad 2.32$$

Con las ecs. 2.23, 2.28, 2.29 y 2.31 la ec. 2.12 se transforma en:

$$\delta \langle q_1' t_1 | q_2' 0\rangle = \frac{i}{\hbar}\, \delta\Big\{ \dot{\beta}(1)\, e^{2\Gamma(1)}\, q_1' q_2' + \dot{\alpha}(1)\, e^{2\Gamma(1)} \frac{q_1'^2}{2}$$

$$-\dot{\beta}(0)\, e^{2\Gamma(0)} \frac{q_2'^2}{2} - \frac{i\hbar}{2} \ln(-\dot{\alpha}(0)\, e^{2\Gamma(0)})\Big\} \langle q_1' t_1 | q_2' 0\rangle \qquad 2.33$$

Y de esta última ecuación obtenemos la función de transformación buscada:

$$\langle q_1' t_1 | q_2' 0\rangle = \left[\frac{\dot{\alpha}(0)\, e^{2\Gamma(0)}}{2\pi i \hbar}\right]^{1/2} \exp\Big\{-\frac{i}{\hbar}(-\dot{\alpha}(1)\, e^{2\Gamma(1)}\, q_1'^2$$

$$-2\dot{\beta}(1)\, e^{2\Gamma(1)}\, q_1' q_2' + \dot{\beta}(0)\, e^{2\Gamma(0)}\, q_2'^2\Big\} \qquad 2.34$$

De aquí es posible teoricamente obtener toda la información sobre el sistema.

3.- OSCILADOR ARMONICO AMORTIGUADO FORZADO

El sistema es ahora descrito por el Hamiltoniano:

$$\hat{H}(t) = \frac{1}{2}\left[p^2 e^{-2\Gamma(t)} + \omega^2(t)\, e^{2\Gamma(t)} q^2\right] - f e^{2\Gamma(t)} q \qquad 3.1$$

por lo que las ecuaciones de movimiento son:

$$\dot{q} = p\, e^{-2\Gamma} \qquad 3.2.1$$

$$-\dot{p} = q\,\omega^2(t)\, e^{2\Gamma(t)} - f e^{2\Gamma(t)} \qquad 3.2.2$$

donde al eliminar p queda:

$$\ddot{q} + 2\dot{\Gamma}\dot{q} + q\,\omega^2 = f(t) \qquad 3.3$$

Aprovechando los resultados de la sección anterior encontraremos la función de transformación para este sistema de la siguiente manera. Nosotros inicialmente tenemos la opción de hacer variaciones sobre el Hamiltoniano, por lo que podemos variar este con respecto al nuevo término, en este caso la fuerza externa, de tal manera que esto se reduzca al caso anterior cuando $f = 0$. Esto es, si δ_f indica variaciones en la fuerza externa tenemos, aplicando el principio de acción,

$$\delta_f \langle q_1', t_1 | q_2', 0\rangle = \frac{i}{\hbar}\langle q_1', t_1 | \int_{t_2}^{t_1} \delta_f L(t)\, dt \,| q_2', 0\rangle \qquad 3.4$$

donde:

$$\delta_f L(t) = e^{2\Gamma(t)} \delta f(t)\, q \qquad 3.5$$

Como antes tenemos que encontrar una solución a la ec. 3.3 y ésta está dada por:

$$q(t) = q_h(t) + \int_0^{t_1} G(t,t')\, f(t')\, dt' \qquad 3.6$$

donde q_h es la solución a la ecuación homogénea 2.5 con — las condiciones de frontera 2.6. G(t, t') es el operador de - Green que satisface la ecuación:

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} + 2\dot{\Gamma} \frac{d}{dt} + \omega^2 \right) G(t,t') = \delta(t-t') \qquad 3.7$$

con las condiciones de frontera:

$$G(0,t') = 0 \qquad 3.8.1$$

$$G(1,t') = 0 \qquad 3.8.2$$

siendo continuo para t = t'.

Debido a la ec. 3.7, G(t, t') debe satisfacer:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{t'-\varepsilon}^{t'+\varepsilon} \left(\frac{d^2}{dt^2} + 2\dot{\Gamma} \frac{d}{dt} + \omega^2 \right) G(t,t')\, dt = 1 \qquad 3.9$$

la cual se reduce a la condición:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left(\frac{d}{dt} G(t,t') \Big|_{t=t'+\varepsilon} - \frac{d}{dt} G(t,t') \Big|_{t=t'-\varepsilon} \right) = 1 \qquad 3.10$$

Ahora, satisfaciendo las condiciones de frontera - 3.8 proponemos para G(t, t') la forma:

$$G_1(t,t') = A\, \alpha(t)\, \beta(t')\, e^{2\Gamma(t')} \qquad t < t' \qquad 3.11.1$$

$$G(t,t') = A\,\alpha(t')\,\beta(t)\,e^{2\Gamma(t')} \qquad t'<t \qquad 3.11.2$$

donde α y β son las funciones definidas en la ec. 2.5 con -- las condiciones de frontera 2.6 y A es una constante por determinar. La única restricción sobre la constante A esta dada por la ec. 3.10 de la cual resulta que A debe satisfacer:

$$\left(\alpha(t')\dot{\beta}(t') - \beta(t')\,\dot{\alpha}(t')\right) A\, e^{2\Gamma(t')} = 1 \qquad 3.12$$

escribiendo $\alpha(t)$ y $\beta(t)$ como en 2.14 y utilizando la ec. 2.16 se puede demostrar que:

$$A = \frac{1}{K} \qquad 3.13$$

Podemos evaluar el valor de la constante a cual--- quier tiempo. Haciendo esto en la ec. 3.12 se encuentra que:

$$A = \frac{1}{\dot{\beta}(1)\, e^{2\Gamma(1)}} = -\frac{1}{\dot{\alpha}(0)\, e^{2\Gamma(0)}} \qquad 3.14$$

Volviendo a la ec. 3.4 tenemos:

$$\delta_f \langle q_1' t_1 | q_2' 0\rangle = \frac{i}{\hbar} \langle q_1' t_1 | \int_0^{t_1} \delta f(t)\, e^{2\Gamma(t)} \left(\alpha(t) q_1 + \beta(t) q_2 + \int_0^{t_1} G(t,t') f(t')\, dt'\right) dt \,|\, q_2' 0\rangle$$

$$= \left(\int_0^{t_1} \delta f(t)\, e^{2\Gamma(t)} q_1'\, dt + \int_0^{t_1} \delta f(t)\, e^{2\Gamma(t)} \beta(t)\, q_2'\, dt + \int_0^{t_1} \delta f(t)\, e^{2\Gamma(t)} \int_0^{t_1} G(t,t')\, f(t')\, dt'\, dt\right) \langle q_1' t_1 | q_2' 0\rangle$$

3.15

El último término de esta ecuación lo podemos escribir utilizando las ecs. 3.11 como:

$$\int_0^{t_1} \delta f(t)\, e^{2\Gamma(t)} \int_0^{t_1} G(t,t')\, dt\,dt' = \int_0^{t_1}\int_0^{t_1} \delta f(t)\, P(t,t')\, f(t')\, dt\,dt' \qquad 3.16$$

donde:

$$P(t,t') = A\, e^{2\Gamma(t)} \alpha(t)\, \beta(t')\, e^{2\Gamma(t')} \qquad t < t' \qquad 3.17.1$$

$$P(t,t') = A\, e^{2\Gamma(t)} \alpha(t')\, \beta(t)\, e^{2\Gamma(t')} \qquad t' < t \qquad 3.17.2$$

Ya que P(t , t') es simétrico en t, t' podemos entonces escribir este término como:

$$\frac{1}{2}\, \delta_f \left(\int_0^{t_1}\int_0^{t_1} f(t)\, P(t,t')\, f(t')\, dt'\,dt \right) \qquad 3.18$$

Con esto la ec. 3.15 se transforma en:

$$\delta_f \ln \langle q_1' t_1 | q_2' 0 \rangle = \delta_f \left[\frac{i}{\hbar} \left(\int_0^{t_1} f(t)\, e^{2\Gamma(t)} \alpha(t)\, q_1'\, dt + \int_0^{t_1} f(t)\, e^{2\Gamma(t)} \beta(t)\, q_2'\, dt + \frac{1}{2} \int_0^{t_1}\int_0^{t_1} f(t)\, P(t,t')\, f(t')\, dt'\,dt \right) \right] \qquad 3.19$$

que al integrar nos da:

$$\langle q_1' t_1 | q_2' 0 \rangle = \langle q_1' t_1 | q_2' 0 \rangle^{f=0} \exp\left\{ \frac{i}{\hbar} \left(\int_0^{t_1} f(t)\, e^{2\Gamma(t)} \alpha(t)\, q_1'\, dt + q_2' \int_0^{t_1} f(t)\, e^{2\Gamma(t)} \beta(t)\, dt + \frac{1}{2} \int_0^{t_1}\int_0^{t_1} f(t)\, P(t,t')\, f(t')\, dt'\,dt \right) \right\} \qquad 3.20$$

Utilizando la expresión para $\langle q_1' t_1 | q_2' 0 \rangle$ obtenida en la sección anterior llegamos a nuestro resultado final:

$$
\begin{aligned}
\langle q_1' t_1 | q_2' 0 \rangle = \left[\frac{\dot{\alpha}(0)\, e^{2\Gamma(0)}}{2\pi i \hbar} \right] \exp\Big\{ -\frac{i}{\hbar} \Big(& -\dot{\alpha}(1)\, e^{2\Gamma(1)} q_1'^{2} \\
& - 2\dot{\beta}(1)\, e^{2\Gamma(1)} q_1' q_2' + \dot{\beta}(0)\, e^{2\Gamma(0)} q_2'^{2} - 2 q_1' \int_0^{t_1} \alpha(t) f(t)\, e^{2\Gamma(t)} dt \\
& - 2 q_2' \int_0^{t_1} \beta(t) f(t)\, e^{2\Gamma(t)} dt - \frac{1}{\dot{\beta}(1)\, e^{2\Gamma(1)}} \Big(\int_0^{t_1} \beta(t) f(t)\, e^{2\Gamma(t)} dt \times \\
& \int_0^{t_1} \alpha(t') f(t')\, e^{2\Gamma(t')} dt' + \int_0^{t_1} \alpha(t) f(t)\, e^{2\Gamma(t)} dt \times \\
& \int_0^{t_1} \beta(t') f(t')\, e^{2\Gamma(t')} dt' \Big) \Big) \Big\}
\end{aligned}
\qquad 3.21
$$

El oscilador armónico amortiguado forzado presentado aquí, ya ha sido resuelto con anterioridad mediante otros métodos (refs. 9, 10).

En el apéndice V se demuestra la equivalencia de la ec. 3.21 con ambos resultados. Esto constituye una verificación independiente de dichos resultados.

4.- OSCILADOR ARMONICO PARA LAS VARIABLES DE SEGUNDA CLASE

Queremos mostrar aquí como se trabaja un sistema con variables de segunda clase. Para esto escogimos el análogo al oscilador armónico en este tipo de variables.

Escojamos para la función de transformación, la --representación dada por el conjunto de variables no hermíticas q y p, definidas por las ecs. I.10.4, cuyas propiedades-fueron desarrolladas al final del primer capítulo.

Recordemos que p esta definido por:

$$p = i\hbar q^{+} \qquad 4.1$$

y que se satisface la relación de anticonmutación

$$\{ q, p \} = i\hbar \qquad 4.2$$

El Hamiltoniano para este sistema esta dado por:

$$H = \hbar\omega q^{+} q = -i\omega p q \qquad 4.3$$

en analogía con el tratamiento del oscilador armónico usual-en términos de los operadores de subida y bajada ($H=\hbar\omega a^{+}a$).

Del principio de acción estacionario tenemos:

$$\delta \langle p_1 t_1 | q_2' t_2 \rangle = \frac{i}{\hbar} \langle p_1' t_1 | G_{p_1} - H_1 \delta t_1 - G_{q_2} + H_2 \delta t_2 | q_2' t_2 \rangle \qquad 4.4$$

donde p_1' y q_2' son los valores propios de p y q a los tiem--pos t_1, t_2 respectivamente y G_p, G_q son los generadores de-transformaciones en p y q y están dados por las ecs. I.10.7.

A partir de las ecs. 10.6 que definen las ecuaciones de movimiento para este tipo de variables, para el Hamiltoniano 4.3 se obtienen:

$$\frac{dq}{dt} = -i\omega q \qquad 4.5.1$$

y

$$\frac{dp}{dt} = +i\omega p \qquad 4.5.2$$

las cuales al integrar, con las condiciones iniciales

$$q(t_2) = q_2 \qquad 4.6.1$$

y

$$p(t_1) = p_1 \qquad 4.6.2$$

nos dan la evolución de éstos operadores en el tiempo:

$$q(t) = q_2\, e^{-i\omega(t-t_2)} \qquad 4.7.1$$

y

$$p(t) = p_1\, e^{-i\omega(t_1-t)} \qquad 4.7.2$$

A diferencia de las variables de primera clase, -- las variaciones δp y δq para las variables de segunda clase- no se comportan como simples números sino que satisfacen las relaciones de anticonmutación:

$$\{q, \delta p\} = 0 \qquad 4.8.1$$

$$\{\delta q, p\} = 0 \qquad 4.8.2$$

$$\{\delta p, p\} = 0 \qquad 4.8.3$$

$$\{\delta q, q\} = 0 \qquad 4.8.4$$

Por lo tanto substituyendo la forma de los generadores y del Hamiltoniano en la ec. 4.4, y aplicando los operadores sobre los estados final e inicial tenemos:

$$\delta \langle p_1' t_1 | q_2' t_2 \rangle = \left(-\delta p_1 \, q_2' \, e^{i\omega (t_1 - t_2)} + i \omega \, p_1' q_2' \, e^{-i\omega (t_1 - t_2)} \delta t_1 - p_1' \, e^{-i\omega (t_1 - t_2)} \delta q_2 - i \omega \, p_1' \, e^{-i\omega (t_1 - t_2)} q_2' \, \delta t_2 \right) \langle p_1' t_1 | q_2' t_2 \rangle \qquad 4.9$$

Observando que:

$$\delta \left(- p_1' q_2' \, e^{-i\omega (t_1 - t_2)} \right) = - \delta p_1 \, q_2' \, e^{-i\omega (t_1 - t_2)} + i \omega \, p_1' q_2' \, e^{-i\omega (t_1 - t_2)} \delta t_1 - p_1' \, \delta q_2 \, e^{-i\omega (t_1 - t_2)} - p_1' q_2' \, e^{-i\omega (t_1 - t_2)} \delta t_2 \qquad 4.10$$

se cumple entonces que:

$$\delta \ln \langle p_1' t_1 | q_2' t_2 \rangle = \delta \left(- \frac{i}{\hbar} \, p_1' q_2' \, e^{-i\omega (t_1 - t_2)} \right) \qquad 4.11$$

que al integrar nos da:

$$\langle p_1' t_1 | q_2' t_2 \rangle = A \, e^{- \frac{i}{\hbar} p_1' q_2' \, e^{-i\omega (t_1 - t_2)}} \qquad 4.12$$

A partir de la teoría general, al definir la integración sobre variables de segunda clase (que se definirán en el siguiente capítulo), es posible demostrar que A = 1, con lo que llegamos a nuestro resultado final:

$$\langle p_1' t_1 | q_2' t_2 \rangle = e^{- \frac{i}{\hbar} p_1' q_2' \, e^{-i\omega (t_1 - t_2)}} \qquad 4.13$$

CONCLUSIONES

Como una plicación de la teoría desarrollada en el capítulo anterior, hemos calculado la función de transformación para un sistema unidimensional que representa al oscilador armónico amortiguado forzado cuyos parámetros son funciones arbitrarias del tiempo.

La razón de la selección de este sistema en especial es la siguiente. El Principio de Acción nos permite obtener toda la información de la evolución temporal del sistema de dos formas diferentes: 1) Resolviendo la ecuación de Schrödinger para encontrar la función de onda del sistema. 2) Resolviendo las ecuaciones de movimiento de los operadores necesarios para encontrar la función de transformación. En general estas son tareas complicadas para un sistema arbitrario, sin embargo al estar representado el oscilador amortiguado forzado por un Hamiltoniano cuadrático en q y p, obtenemos ecuaciones de movimiento lineales que nos permiten en forma explícita la dependencia en los operadores y dejar la dependencia temporal en forma implícita en términos de las funciones $\alpha(t)$ y $\beta(t)$.

Un aspecto importante de este trabajo, es de que a pesar de no haber resuelto las ecuaciones de movimiento para α y β pudimos extraer en forma explícita la dependencia en los tiempos final e inicial para estas funciones, con el uso de otras funciones auxiliares. De esta manera fue posible hacer la integración con respecto a los tiempos final e inicial, t_1 y t_2.

El cálculo presentado constituye una forma independiente de obtener la función de Green para este sistema. En la literatura existen métodos alternativos para obtener dicha función de transformación[9,10] basados esencialmente en el uso de constantes de movimiento. Nuestra fórmula general, ec. 3.21, permite recuperar esos resultados.

En el cálculo efectuado por Khandekar y Lawande la función de transformación depende aparentemente de condiciones de borde arbitrarias a través de las funciones auxiliares ρ, μ definidas en las ecs. A.V.2. Nuestra manera de recuperar su resultado muestra claramente que no existe tal dependencia, lo cual es satisfactorio desde el punto de vista físico.

III.- PRINCIPIO VARIACIONAL Y SUPERSIMETRIA EN MECANICA CUANTICA

1.- OBJETIVOS

Hemos mostrado en las secciones anteriores una --- forma alternativa de construir la mecánica cuántica. El principio variacional de Schwinger, nos muestra, la existencia - de dos tipos de variables, de primera y de segunda clase que satisfacen relaciones de conmutación y anticonmutación res-- pectivamente. Nos proponemos ahora trabajar con un sistema - que presente los dos tipos de variables.

Nuestro objetivo es estudiar aunque de manera simplificada un tipo de teorías de reciente aparición en la física, dentro de las teorías cuánticas de campo. Estas teo--- rías están basadas en la existencia de transformaciones de - simetría que relacionan a las dos clases de partículas ele-- mentales, es decir, los fermiones (como el electrón, el protón y el neutrón) y los bosones (como el fotón). Los fermiones y los bosones tienen propiedades estadísticas totalmente diferentes, por lo que al haber encontrado una simetría que- los relacione constituye un paso más en la unificación de -- las teorías en la física. Este nuevo tipo de simetría se conoce con el nombre de Supersimtría.[11]

El objetivo entonces de este capítulo, y en sí el- de este trabajo, es simplificando el formalismo de las teo--

rías cuánticas de campo, construir ejemplos de sistemas supersimétricos en Mecánica Cuántica.

Por esto entenderemos[12] un sistema con 2d grados de libertad bosónicos: variables dinámicas $x_1, \ldots, x_d$ y momentos canónicos conjugados $p_1, \ldots, p_d$ (todas ellas variables de primera clase) y r variables dinámicas fermiónicas : $\psi_1, \ldots, \psi_r$, todas ellas variables de segunda clase que satisfacen el álgebra:

$$\{\psi_i, \psi_j\} = \hbar\, \delta_{i,j} \qquad (i,j = 1, \ldots, r) \qquad 1.1$$

$$[x_m, p_n] = \hbar i\, \delta_{mn} \qquad (m,n = 1, \ldots, d) \qquad 1.2$$

$$[\psi_i, x_m] = [x_m, x_n] = [p_n, p_m] = [\psi_i, p_m] = 0 \qquad 1.3$$

$$x_m^+ = x_m \quad , \quad p_m^+ = p_m \quad , \quad \psi_i = \psi_i^+ \qquad 1.4$$

deducida a partir del principio de acción. El operador Hamiltoniano del sistema dependerá de estas variables:

$$H = H(x_1, \ldots, x_d, p_1, \ldots, p_d, \psi_1, \ldots, \psi_r) \qquad 1.5$$

En analogía con las transformaciones que mezclan fermiones, bosones en teoría de campos, buscaremos transformaciones que nos permitan relacionar las variables de primera y segunda clase entre sí. Es decir, existirán generadores de las tarnsformaciones tales que al actuar sobre las variables bosónicas y fermiónicas, produzcan combinaciones entre ellas. Además pediremos que estos generadores conmuten con H con el objeto de que dichas transformaciones sean simetrías-del sistema. Este capítulo esta estructurado de la siguiente manera. Primeramente derivaremos un Lagrangiano supersimétrico clásico en una dimensión, usando una adaptación del formalismo para supercampos desarrollado por Salam y Strathdee[13]. Este Lagrangiano es clásico porque consideramos a las variables de momento y posición como números que conmutan y a las variables ψ_i como números de Grassmann (ie., números que anticonmutan). Esta elección corresponde al límite $\hbar \to 0$ en las relaciones (1.1 - 1.4).

Posteriormente con el fin de trabajar con un sistema fśico clásico más realista, generalizaremos esta construcción a tres dimensiones. Y a continuación construiremos la versión cuántica de este modelo en base al principio de acción. En este caso podemos encontrar un significado físico para los diferentes términos que aparecen en el Hamiltoniano en términos de la interacción entre dos partículas de spin 1/2.

2.- DERIVACION DE UN LAGRANGIANO SUPERSIMETRICO CLASICO EN UNA DIMENSION[14,15]

Como ya dijimos, encontraremos aquí un Lagrangiano supersimétrico en una dimensión. Este Lagrangiano presentará la característica de tener variables de las dos clases combinadas de una manera no trivial.

Un modo conveniente de describir la supersimetría-es utilizar el formalismo de superespacio. Para la teoría--- de campo en una dimensión temporal (Mecánica Clásica), las- coordenadas de este superespacio son el tiempo ordinario τ,- junto con las coordenadas fermiónicas θ y θ^* que satisfacen

$$\{\theta,\theta^*\} = \{\theta,\theta\} = 0 \qquad 2.1$$

y

$$[\theta,t] = 0 \qquad 2.2$$

Vemos que θ y θ^* son números de Grassmann. La = supersimetría está definida como la invariancia bajo translaciones en este superespacio. De un modo más preciso, la -- transformación infinitesimal de supersimetría en este espacio geométrico está definida como:

$$t' = t - i\,(\theta^*\varepsilon - \varepsilon^*\theta) \qquad 2.3.1$$

$$\theta' = \theta + \varepsilon \qquad 2.3.2$$

$$\theta^{*\prime} = \theta^* + \varepsilon^* \qquad 2.3.3$$

En esta expresión $\mathcal{E}$ es un número de Grassmann infinitesimal y $\mathcal{E}^*$ es su complejo conjugado.

Si definimos la propiedad de conjugación entre dos números de Grassmann como:

$$(a\,b)^* = b^*a^* \qquad 2.4$$

observamos que la transformación para el tiempo es real y -- par, es decir conmuta con cualquier otro elemento del álge--

bra. Una transformación finita supersimétrica en dicho espacio está definida por:

$$L = e^{i(\epsilon^{*} Q^{+} + Q\epsilon)} \qquad 2.5$$

donde Q y Q^{+} son los generadores de la transformación, ec. 2.3, (Q^{+} denota el operador adjunto de Q).

El operador adjunto en este superespacio está definido de acuerdo al producto:

$$\langle f | g \rangle = \int dt\, d\theta\, d\theta^{*}\, f^{*} g \qquad 2.6.1$$

donde la integración sobre las variables de Grassmann está definida por:

$$\int \eta\, d\eta = 1 \quad , \quad \int d\eta = 0 \qquad 2.6.2$$

y las funciones f y g definidas en este superespacio toman la forma general:

$$f(t,\theta,\theta^{*}) = A(t) + B(t)\theta + C(t)\theta^{*} + D(t)\theta\theta^{*} \qquad 2.7$$

debido a la propiedad $(\theta)^{2} = (\theta^{*})^{2} = 0$.

Es fácil ver entonces que L es unitario. A continuación hallaremos la representación de los generadores de la transformacion (2.3) en el espacio de supercoordenadas.

La transformación de cualquier cantidad física A está dada por:

$$A' = L A L^{+} \qquad 2.8$$

por lo que para una transformación infinitesimal tenemos:

$$\delta A = i\left[\varepsilon^{*} Q^{+} + Q\varepsilon, A\right] \qquad 2.9$$

donde:

$$\delta A = A' - A \qquad 2.10$$

Aplicando la ley de transformación (2.3) a las --
coordenadas obtenemos:

$$\delta t = i\left[\varepsilon^{*} Q^{+} + Q\varepsilon, t\right] \qquad 2.11.1$$

$$\delta \theta = i\left[\varepsilon^{*} Q^{+} + Q\varepsilon, \theta\right] \qquad 2.11.2$$

$$\delta \theta^{*} = i\left[\varepsilon^{*} Q^{+} + Q\varepsilon, \theta^{*}\right] \qquad 2.11.3$$

Por otro lado queremos que:

$$\delta t = -i\left(\theta^{*}\varepsilon - \varepsilon^{*}\theta\right) \qquad 2.12.1$$

$$\delta \theta = \varepsilon \qquad 2.12.2$$

$$\delta \theta^{*} = \varepsilon^{*}$$

de acuerdo con las ecuaciones 2.3. De este modo las representaciones de Q y Q^{+} deben ser tales que las ecuaciones 2.11 y 2.12 sean consistentes.

Es posible comprobar que podemos representar a Q y Q^{+} por:

$$Q = i\,\partial_{\theta} - \theta^{*}\partial_{t} \qquad 2.13.1$$

$$Q^{+} = -i\,\partial_{\theta^{*}} + \theta\,\partial_{t} \qquad 2.13.2$$

donde ∂_{θ} y $\partial_{\theta^{*}}$ simbolizan diferenciación sobre las varia--

bles de Grassmann de acuerdo a:

$$\partial_\theta \theta = \partial_{\theta^*} \theta^* = 1 \qquad 2.14.1$$

$$\partial_{\theta^*} \theta = \partial_\theta \theta^* = 0 \qquad 2.14.2$$

$$\partial_\theta (\theta\theta^*) = - \partial_\theta (\theta^*\theta) = \theta^* \qquad 2.14.3$$

$$- \partial_{\theta^*}(\theta\theta^*) = \partial_{\theta^*} (\theta^*\theta) = \theta \qquad 2.14.4$$

Es conveniente hacer notar que las derivadas respecto a θ y θ^* son por la izquierda y que el operador adjunto de ∂_θ bajo el producto escalar definido por la ec. 2.6 es ∂_{θ^*}.

De aquí mediante simple cálculo, se ve que los generadores Q y Q^+ satisfacen:

$$\{ Q, Q^+ \} = 2i\, \partial_t = 2H \qquad 2.15$$

con

$$[Q, H] = 0 \qquad 2.16$$

Esto nos dice que dos transformaciones de supersimetría generan una translación temporal y además implica que las transformaciones de supersimetría conmutan conmutan con las translaciones temporales. Esta álgebra de Supersimetría que aquí hemos hallado en la representación del superespacio es válida en cualquier otro espacio de representación.

En particular, la Mecánica Cuántica Supersimétrica será una representación de dicha álgebra en el espacio de operadores definidos por las ecuaciones 1.1, 1.2, 1.3 y 1.4 . En este caso la relación 2.15 nos sugiere como construir el-

Hamiltoniano del sistema y la relación 2.16 nos dice que las transformaciones de Supersimetría generadas por Q y Q^{+} son en efecto simetrías del problema.

Como un paso previo a la construcción de un sistema cuántico invariante bajo supersimetría buzcaremos una realización clásica (en el sentido $\hbar \rightarrow 0$ en 1.1 - 1.4) de esta simetría. Específicamente consideraremos una partícula en una dimensión cuyas variables dinámicas son la posición $x(t)$, el momento canónico conjugado $p(t)$ (o en su defecto la velocidad $\dot{x}(t)$) y una variable de Grassmann adicional $\psi(t)$ que especificaremos más adelante. Como es usual describiremos el sistema mediante un Lagrangiano que es función de las variables dinámicas ($\dot{x}$, p , $\dot{\psi}$) y exigiremos invariancia de la acción ante transformaciones supersimétricas de estas variables que también especificaremos más adelante.

Una manera sistemática de construir dicho Lagrangiano es a partir del superespacio donde la invariancia ante supersimetría equivale a invariancia bajo translaciones. La variable dinámica natural aquí es un supercampo $\Phi(t,\theta,\theta^{*})$ que es un elemento del álgebra de Grassmann. Las variables dinámicas de la teoría clasica aparecerán entonces como los términos en la expansión del supercampo Φ . En efecto, si definimos un supercampo real y par en el álgebra de Grassmann:

$$\Phi(t,\theta,\theta^{*}) = \Phi^{*}(t,\theta,\theta^{*}) \qquad 2.17$$

éste es un polinomio en θ , θ^{*} y debe tener la forma:

$$\phi(t,\theta,\theta^*) = x(t) + i\,\theta\psi(t) - i\,\psi^*(t)\theta^* + \theta^*\theta\, D(t) \qquad 2.18$$

donde x(t), D(t) son funciones númericas no-Grassmannianas y $\psi(t)$ es una variable compleja de Grassmann. Identificaremos x(t) como la posición de la partícula y $\psi(t)$ como la variable de Grassmann asociada. La interpretación de D(t) se dará más adelante. En otras palabras, podemos pensar que $\phi(t,\theta,\theta^*)$ en 2.18 corresponde a la extensión de la variable posición al superespacio.

En este trabajo no exploraremos la posibilidad de definir una extensión similar para la variable momentum p(t). De este modo comenzaremos por construir un Lagrangiano que contenga términos cuadráticos en la velocidad $\dot{x}(t)$ (Lagrangiano de segundo orden) que posteriormente escribiremos en una formulación de primer orden apropiada para el uso del principio de acción.

Para escribir el término cinético del Lagrangiano, necesitamos una generalización a superespacio de la derivada con respecto al tiempo, que sea covariante bajo supertranslaciones.

En nuestro caso la situación es aún más simple ya que es posible definir derivadas que son invariantes bajo supertranslaciones, del mismo modo como ∂_x es invariante bajo la translación $x \longrightarrow x + a$. Es posible comprobar que las derivadas

$$D_\theta = \partial_\theta - i\,\theta^*\partial_t \qquad 2.19.1$$

$$D_{\theta^*} = \partial_{\theta^*} - i\,\theta\,\partial_t \qquad 2.19.2$$

satisfacen las relaciones $D'_\theta = D_\theta$, $D'_{\theta^*} = D_{\theta^*}$ con D'_θ , D_{θ^*} de finidas según 2.19 con las coordenads transladadas de acuerdo a 2.3. Esto puede verificarse usando:

$$\partial_\theta = \partial_{\theta'} - i\,\varepsilon^* \partial_{t'} \qquad 2.20.1$$

$$\partial_t = \partial_{t'} \qquad 2.20.2$$

Las derivadas D_θ y D_{θ^*} son de gran utilidad en - la construcción de invariantes supersimétricos.

A partir del supercampo $\Phi(t,\theta,\theta^*)$y de las deriva-- das D_θ y D_{θ^*} , es sencillo escribir acciones que sean invariantes bajo translaciones en superespacio. En efecto, cualquier expresión del tipo:

$$S = \int dt\, d\theta\, d\theta^* \, \tilde{\mathcal{L}} \left(D_\theta \Phi \,,\, D_{\theta^*} \Phi \,,\, \Phi \right) \qquad 2.21$$

que no incluya una dependencia explícita en las coordenadas- t, θ , θ^* será invariante bajosupertranslaciones siempre que supongamos que $\tilde{\mathcal{L}}$ es un escalar bajo estas transformaciones. En efecto, calculemos:

$$S' = \int dt\, d\theta\, d\theta^* \, \tilde{\mathcal{L}} \left(D_\theta \Phi' \,,\, D_{\theta^*} \Phi' \,,\, \Phi' \right) \qquad 2.22$$

donde Φ' es el supercampo transladado:

$$\begin{aligned} \Phi'(t,\theta,\theta^*) &= L\, \Phi(t,\theta,\theta^*)\, L^+ \\ &= \Phi(t',\theta',\theta'^*) \qquad 2.23 \end{aligned}$$

Usando el hecho que:

$$D_\theta = D'_\theta \quad ; \quad D_{\theta^*} = D'_\theta \qquad 2.24$$

junto con la propiedad de que el jacobiano de la transformación 2.3

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial t}{\partial t'} & \frac{\partial t}{\partial \theta'} & \frac{\partial t}{\partial \theta^{*\prime}} \\ \frac{\partial \theta}{\partial t'} & \frac{\partial \theta}{\partial \theta'} & \frac{\partial \theta}{\partial \theta^{*\prime}} \\ \frac{\partial \theta^*}{\partial t'} & \frac{\partial \theta^*}{\partial \theta'} & \frac{\partial \theta^*}{\partial \theta^{*\prime}} \end{vmatrix} \qquad 2.25$$

es uno y recordando que las variables de integración son mudas, obtenemos:

$$S' = \int dt' d\theta' d\theta'^{*} \tilde{\mathcal{L}} \left(D_\theta' \Phi(t', \theta', \theta^{*\prime}), D_{\theta^*}' \Phi(t', \theta', \theta'^{*}), \Phi(t', \theta', \theta'^{*}) \right) = S \qquad 2.26$$

En la acción 2.21, que es invariante bajo supertranslaciones siempre podemos efectuar la integración con respecto a las - variables de Grassmann θ y θ^*, obteniendose:

$$S = \int dt \, \mathcal{L} \, (x, \dot{x}, \psi, \dot{\psi}, D, D') \qquad 2.27$$

lo cual nos permite identificar a $\mathcal{L}$ como el Lagrangiano del sistema escrito en términos de sus variables dinámicas.

Ahora, es necesario determinar cuales son las transformaciones de supersimetría que la translación en superespacio induce en las variables dinámicas. Con este objeto consideremos el cambio del supercampo debido a una translación infinitesimal 2.3:

$$\delta \Phi = i \left[\varepsilon^* Q^\dagger + Q \varepsilon , \Phi \right] \qquad 2.28$$

donde

$$\delta\Phi = \Phi'(t,\theta,\theta^*) - \Phi(t,\theta,\theta^*)$$
$$= \Phi(t',\theta',\theta'^*) - \Phi(t,\theta,\theta^*) \qquad 2.29$$

Al desarrollar 2.28, encontramos:

$$\delta\Phi = \delta x(t) + i\,\theta\,\delta\psi(t) - i\,\delta\psi^*(t)\,\theta^* + \theta^*\theta\,\delta D(t) \qquad 2.30$$

donde:

$$i\,\delta x = \varepsilon^* i\psi^* - i\psi\varepsilon \qquad 2.31.1$$
$$\delta\psi = -i\,\varepsilon^* D + \varepsilon^* \dot{x} \qquad 2.31.2$$
$$\delta D = \varepsilon\dot{\psi} + \dot{\psi}^*\varepsilon^* = \frac{d}{dt}\left(\varepsilon\psi + i\psi^*\varepsilon^*\right) \qquad 2.31.3$$

Estas ecuaciones constituyen las transformaciones de supersimetría entre las variables dinámicas x, ψ , ψ^* y D.

Usando estas transformaciones en la acción 2.27 debe ser posible probar la invariancia en cada caso particular.

A continuación mostraremos como construir una acción invariante bajo supersimetría para la partícula unidimensional con variables de Grassmann asociadas. Recordando que el término cinético del Lagrangiano de la partícula unidimensional contiene $\frac{1}{2}\dot{x}(t)^2$, y que, la extensión de ∂_t a super-espacio está dada por D_θ y/o D_{θ^*} consideremos el término cinético de la forma:

$$S_c = \int dt\, d\theta^*\, d\theta\, \frac{1}{2}\left(D_\theta\Phi\right)^*\left(D_\theta\Phi\right) \qquad 2.32$$

Este término deberá contener $\frac{1}{2}\dot{x}(t)^2$ al reescribirlo en función de las variables dinámicas.

Para el término de interacción consideremos una función escalar de Φ de la forma:

$$f(\Phi) = \sum_n a_n \Phi^n \qquad 2.33$$

por lo que una posible acción invariante es:

$$S = \int dt\, d\theta^* d\theta \left(\frac{1}{2}|D_\theta \Phi|^2 - f(\phi)\right) \qquad 2.34$$

Ahora queremos hacer la integración respecto a las variables de Grassmann para obtener el Lagrangiano $\tilde{\mathcal{L}}(t)$ invariante bajo la transformación 2.31. Debido a las reglas usuales de integración, ecs. 2.6.2, necesitamos conocer solamente los coeficientes de $\theta^*\theta$ en $|D_\theta \Phi|^2$ y en la expresión para $f(\Phi)$. Las expresiones para $D_\theta \Phi$, $(D_\theta \phi)^*$ en términos de las variables dinámicas son:

$$D_\theta \Phi = i\psi - \theta^* D - i\theta^* \dot{x} + \theta^*\theta \dot{\psi} \qquad 2.35.1$$

$$(D_\theta \Phi)^* = -i\dot{\psi} - \theta D + i\theta \dot{x} + \theta^*\theta \dot{\psi}^* \qquad 2.35.2$$

para $|D_\theta \Phi|^2$ obtenemos directamente:

$$|D_\theta \Phi|^2 = (D_\theta \Phi)^*(D_\theta \Phi)$$

$$= \theta\theta^*(\dot{x}^2 + i(\psi^*\dot{\psi} - \dot{\psi}^*\psi) + D^2) + \dots \qquad 2.36$$

y para $f(\Phi)$ tenemos

$$f(\Phi) = \sum_n a_n \Phi^n$$

$$= \sum_n a_n (x(t) + i\theta\psi(t) - i\psi^*(t)\theta^* + \theta^*\theta D(t))^n$$

$$2.37$$

Podemos demostrar que:

$$[x(t), i\theta\psi(t)] = 0 \qquad 2.38.1$$

$$[i\theta\psi(t), -i\psi^*(t)\theta^*] = 0 \qquad 2.38.2$$

$$[i\theta\psi(t), \theta^*\theta D(t)] = 0 \qquad 2.38.3$$

y en general todos los conmutadores entre las componentes -- del campo son cero por lo que las podemos tratar como simples números y aplicar la fórmula:

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_p)^n = \sum_{n_1+n_2+\ldots+n_p} \frac{n!}{n_1!\, n_2! \ldots n_p!} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \ldots x_p^{n_p} \qquad 2.39$$

Para el caso de la ec. 2.37 el desarrollo 2.39 nos da para el n-ésimo término:

$$\theta\theta^*\left(n x^{n-1}(-D) + n(n-1)x^{n-2}\frac{[\psi,\psi^*]}{2}\right) \qquad 2.40$$

Con lo que llegamos a:

$$f(\phi) = \theta\theta^*\left(\sum_n n a_n x^{n-1}(-D) + \sum_n n(n-1) a_n x^{n-2}\frac{[\psi,\psi^*]}{2}\right)$$
$$= \theta\theta^*\left(-D f'(x) - \tfrac{1}{2}[\psi,\psi^*] f''(x)\right) \qquad 2.41$$

Integrando la ec. 2.34 sobre θ , θ^* obtenemos:

$$S = \int dt \left(\tfrac{1}{2}\dot{x}^2 + \tfrac{1}{2}(\psi^*\dot{\psi} - \dot{\psi}^*\psi) + \tfrac{1}{2}D^2 + D f'(x) + \frac{[\psi^*,\psi]}{2} f''(x)\right) \qquad 2.42$$

Podemos obtener las ecuaciones de movimiento para- este sistema pidiendo que la acción 2.42 sea un extremo con- respecto a variaciones arbitrarias en las variables dinámi--

cas x , ψ , ψ^* y D, con la restricción de que estas variaciones sean cero en los extremos. Esto es:

$$\delta x(t_1) = \delta x(t_2) = 0 \qquad 2.43.1$$

$$\delta\psi(t_1) = \delta\psi(t_2) = 0 \qquad 2.43.2$$

$$\delta\psi^*(t_1) = \delta\psi^*(t_2) = 0 \qquad 2.43.3$$

$$\delta D(t_1) = \delta D(t_2) = 0 \qquad 2.43.4$$

Para la componente D obtenemos la ecuación de movimiento

$$D = -f'(x) \qquad 2.44$$

D no tiene variación con respecto al tiempo y podemos considerarlo como un campo auxiliar. Sustituyendo 2.44 en la acción 2.42 obtenemos:

$$S = \int dt\, \mathcal{L}(t) \qquad 2.45$$

donde:

$$\mathcal{L}(t) = \frac{1}{2}\dot{x}^2 + \frac{i}{2}(\psi^*\dot{\psi} - \dot{\psi}^*\psi) - \frac{1}{2}f'(x)^2 + \frac{1}{2}[\psi^*,\psi]f''(x) \qquad 2.46$$

y las ecuaciones de movimiento resultan ser:

$$\ddot{x} + f'(x)f''(x) - \psi^*\psi f'''(x) = 0 \qquad 2.47.1$$

$$\dot{\psi} - i f''\psi = 0 \qquad 2.47.2$$

$$\dot{\psi}^* + i f''\psi^* = 0 \qquad 2.47.3$$

Aplicando sobre la acción 2.46 las transformacio - nes supersimétricas para x y ψ dadas por las ecs 2.31, obtenemos:

$$\delta_{S.S.} S = \int \frac{d}{dt} (\varepsilon^* X + X \varepsilon) \; dt \tag{2.48}$$

con

$$X = \frac{i}{2} (\dot{x} + i f'(x) \psi) \tag{2.49}$$

Esta última ecuación nos dice que bajo transformaciones de supersimetría el Lagrangiano varía por una derivada total, de tal manera que las ecs de movimiento 2.47 son - invariantes bajo transformaciones de supersimetría.

De la expresión para $\mathcal{L}(t)$ vemos, en primer lugar la forma que debe tener la interacción para que el sistema - sea supersimétrico, ésta depende de una función $f(x)$ que se - llama el superpotencial. En segundo lugar vemos la forma en que se combinan las variables de primera y segunda clase para tener un sistema supersimétrico.

Debido a la invariancia de las ecs. de movimiento sabemos por el teorema de Noether que existen cantidades conservadas asociadas a esta supersimetría. Estas cantidades se conservan en virtud de las ecs. de movimiento ($\delta S = 0$) y - en la versión cuántica, jugarán además el papel de generadores de la transformación.

Podemos encontrar las cantidades conservadas considerando las variaciones 2.31 como un caso particular de las-variaciones arbitrarias utilizadas para encontrar las ecs. - de movimiento, esto es haciendo a ε una función arbitraria- del tiempo, pero con las restricciones:

$$\varepsilon(t_1) = \varepsilon(t_2) = 0 \qquad 2.50$$

y pedir que $\delta S = 0$. Con lo que se obtiene:

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left[\varepsilon^* i \frac{d}{dt}\left(\dot{x} + i f'(x)\right)\psi^* - i\varepsilon \frac{d}{dt}\left(\dot{x} - i f'(x)\right)\psi\right] dt \qquad 2.51$$

y como ε y ε^* son funciones arbitrarias dentro del intervalo (t_1, t_2) se cumple que:

$$\frac{d}{dt}\tilde{Q} = 0 \qquad 2.52.1$$

$$\frac{d}{dt}\tilde{Q}^* = 0 \qquad 2.52.2$$

en virtud de las ecuaciones de movimiento y donde $\tilde{Q}$ y $\tilde{Q}^*$ son las cantidades conservadas definidas por:

$$\tilde{Q} = \left(\dot{x} - i f'(x)\right)\psi \qquad 2.53.1$$

$$\tilde{Q}^* = \left(\dot{x} + i f'(x)\right)\psi^* \qquad 2.53.2$$

Usando las ecuaciones de movimiento 2.47 es posible verificar explícitamente las ecs 2.52.

Para poder construir la teoría cuántica a la luz - del principio de acción de Schwinger, el cual está formulado en base a un Lagrangiano de primer orden para las variables- dinámicas, es conveniente transformar la teoría clasica a es ta forma. Las variables de Grassmann aparecen naturalmente en primer orden como se ve de la acción 2.46, de tal manera que solo necesitamos introducir la formulación de primer orden para las variables x . Con este objeto definamos un nuevo Lagrangiano $\tilde{\mathcal{L}}$ el cual va a ser función de las variables x , $\dot{x}$, ψ , $\dot{\psi}$, ψ^* y $\dot{\psi}^*$ y de una nueva variable p y su derivada $\dot{p}$, es decir, $\tilde{\mathcal{L}} = \tilde{\mathcal{L}}(x, \dot{x}, p, \dot{p}, \psi, \dot{\psi}, \psi^*, \dot{\psi}^*)$. Queremos que este nuevo Lagrangiano nos de las mismas ecs. de movimiento 2.47. Definamos el Hamiltoniano del sistema por:

$$H = \frac{1}{2} p^2 + \frac{1}{2} f'(x)^2 - \frac{[\psi^*, \psi]}{2} f''(x) \qquad 2.54.1$$

y $\tilde{\mathcal{L}}$ por:

$$\tilde{\mathcal{L}}(x, \dot{x}, p, \dot{p}, \psi, \dot{\psi}, \psi^*, \dot{\psi}) = p\dot{x} + \frac{i}{2}(\psi^* \dot{\psi} - \dot{\psi}^* \psi) - H \qquad 2.54.2$$

Afirmamos que este Lagrangiano $\tilde{\mathcal{L}}$ tiene las mismas ecs, de movimiento que $\mathcal{L}$ dado por la ec. 2.46 y ademas $p = \dot{x}$.

La ecuación de movimiento para p es:

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial \dot{p}} - \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial p} = 0 \qquad 2.55$$

Es fácil ver que esta ecuación nos implica:

$$p = \dot{x} \qquad 2.56$$

Similarmente obtenemos la ecuación de movimiento 2.47.1 al substitutir la ec. 2.55. Por último podemos verificar que las ecs. de movimiento para ψ y ψ^* están dadas directamente por las ecs. 2.47.2 y 2.47.3.

Con esto hemos transformado nuestra teoría clási-- ca en el formalismo Lagrangiano a una teoría de primer orden y hemos identificado al Hamiltoniano como la ec. 2.54.1 .

Podemos dentro de este nuevo lenguaje reescribir - a las cantidades $\tilde{Q}$ y $\tilde{Q}^*$ como:

$$\tilde{Q} = (p - i f'(x))\, \psi \qquad 2.58.1$$

$$\tilde{Q}^* = (p + i f'(x))\, \psi^* \qquad 2.58.2$$

En términos de las nuevas variables es posible ve- rificar que $\tilde{\mathcal{L}}$ es invariante bajo la siguiente transforma- ción de supersimetría:

$$i\,\delta x = \varepsilon^* \psi^* - \psi \varepsilon \qquad 2.59.1$$

$$\delta \psi = -i\, \varepsilon^* D + \varepsilon^* p \qquad 2.59.2$$

$$i\,\delta p = \varepsilon^* \dot{\psi}^* - \dot{\psi} \varepsilon \qquad 2.59.3$$

Hasta aquí hemos trabajado clasicamente, excepto - porque ψ y ψ^* son números de Grassmman. En la mecánica - cuántica los observables p , x , ψ , ψ^* y H tienen- que ser interpretados como operadores.

Las relaciones de (anti-)conmutación obtenidas -- del principio de acción para estos operadores son:

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar \qquad 2.60.1$$

$$\{\hat{\psi}, \hat{\psi}^\dagger\} = \hbar \qquad 2.60.2$$

$$[\hat{p}, \hat{\psi}] = [\hat{x}, \psi] = 0 \qquad 2.60.3$$

$$\{\hat{\psi}, \hat{\psi}\} = \{\psi^\dagger, \psi^\dagger\} = 0 \qquad 2.60.4$$

Donde ψ^* se convierte en $\hat{\psi}^+$, el operador adjunto de $\hat{\psi}$, aquí estamos empleando variables no hermíticas $\hat{\psi}$ y $\hat{\psi}^+$. Estas expresiones en el límite $\hbar \to 0$, se reducen a la teoría clásica.

Los operadores bosónicos (variables de primera clase) pueden, en la representación de coordenadas escribirse como:

$$\hat{x} = x \tag{2.61.1}$$

$$\hat{p} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \tag{2.61.2}$$

Las relaciones de anticonmutación fermiónicas, 2.60.2, para las variables de segunda clase, pueden ser representadas convenientemente por los operadores anticonmutativos:

$$\hat{\psi} = \zeta \tag{2.62.1}$$

$$\psi^+ = \hbar \frac{\partial}{\partial \zeta} \tag{2.62.2}$$

donde la derivada sobre ζ esta definida por la izquierda. Y los estados del sístema descritos por las funciones de onda:

$$\Psi(x,\zeta) = a_1(x) + \zeta a_2(x) \tag{2.63}$$

Ahora deseamos obtener la formulación cuántica de la teoría clásica desarrollada anteriormente; específicamente necesitamos la versión cuántica del Hamiltoniano 2.54. Con este objeto debemos reemplazar a las variables dinámicas x, p, ψ, ψ^* por los respectivos operadores definidos en 2.60. Usualmente esto representa problemas de ordenamiento -

que aquí evitaremos del siguiente modo. La estructura general del álgebra de supersimetrías nos dice:

$$\{ Q , Q^{+} \} = 2 i \partial_t \qquad 2.64$$

lo cual sugiere definir el Hamiltoniano como:

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \{ \hat{\tilde{Q}} , \hat{\tilde{Q}}^{+} \} \qquad 2.65$$

donde $\hat{\tilde{Q}}$ y $\hat{\tilde{Q}}^{+}$ son las versiones cuánticas de las ecs. 2.58 y están unívocamente determinadas por:

$$\hat{\tilde{Q}} = (\hat{p} - i f'(\hat{x})) \hat{\psi} \qquad 2.66.1$$

$$\hat{\tilde{Q}}^{+} = (\hat{p} + i f'(\hat{x})) \hat{\psi}^{+} \qquad 2.66.2$$

De esta manera obtenemos:

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \hat{p}^2 + \frac{1}{2} f'(\hat{x})^2 - \frac{1}{2} [\hat{\psi}^{+} , \hat{\psi}] f''(x) \qquad 2.67$$

y comprobamos que en el límite clásico se reduce a 2.54.

En la definición 2.65 hemos usado el hecho de que las cantidades clásicas conservadas, asociadas a una simetría se convierten en los generadores de dicha simetría cuando cuantizamos el sistema.

Con el objeto de verificar la consistencia de edta afirmación debemos mostrar que en efecto:

$$[\hat{\tilde{Q}} , \hat{H}] = 0 \qquad 2.68.1$$

$$[\hat{\tilde{Q}}^{+} , \hat{H}] = 0 \qquad 2.68.2$$

Esto es posible verificarlo mediante cálculo directo observando que $\hat{\hat{Q}}^2 = \hat{\hat{Q}}^{+2} = 0$. Además esperamos que las expresiones cuánticas correspondientes a las ecs. 2.58 se reduzcan a éstas en el límite $\hbar \to 0$. Para esto recordemos que la variación de un operador en la teoría cuántica esta dada por,... (I.5.10):

$$\delta X = \frac{i}{\hbar}[G, X] \qquad 2.69$$

donde G es el generador de la transformación.

En nuestro caso G es el generador de transformaciones supersimétricas y está dado por

$$G = \varepsilon^* \hat{\hat{Q}}^+ + \hat{\hat{Q}}\varepsilon \qquad 2.70$$

Aplicando la ec. 2.69, a cada uno de los operadores $\hat{x}$, $\hat{\psi}$ y $\hat{\psi}^+$, sobre una función de onda del tipo - 2.63 se encuentra que:

$$i\,\delta\hat{x} = \varepsilon^* \hat{\psi}^+ - \hat{\psi}\varepsilon \qquad 2.71.1$$

$$\delta\hat{\psi} = i\varepsilon^* f'(\hat{x}) + \varepsilon^* \hat{p} \qquad 2.71.2$$

las cuales en el límite $\hbar \to 0$ se reducen a las ecs. 2.58.

Con esto hemos comprobado que la teoría sigue siendo supersimétrica cuánticamente.

3.- GENERALIZACION A TRES DIMENSIONES

Nuestro objetivo será generalizar nuestro resultado anterior a tres dimensiones, es decir, queremos encontrar la formulación supersimétrica para una partícula cuyas variables dinámicas son la posición $\overline{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, el momento canónico conjugado $\overline{p}(t) = (p\ (t), p\ (t), p\ (t))$ y variables de Grassmann adicionales $\psi_i(t)$. De la misma manera que en una dimensión buscaremos primeramente una realización clásica para este sistema.

Dentro de esta generalización el formalismo del superespacio se mantiene igual al caso de una dimensión. Tenemos un superespacio con coordenadas t, θ y θ^* , con la misma transformación infinitesimal de supersimetría definida por las ecs. 2.3. Por lo tanto los generadores de translaciones supersimétricas Q y Q^+ , las derivadas invariantes D_θ y D_{θ^*} tienen las mismas expresiones dadas por las ecs. 2.13 y 2.19 y por último el álgebra no cambia, estando dada por las ecs. 1.1 - 1.4.

Definamos tres supercampos reales:

$$\Phi_i(t,\theta,\theta^*) = \Phi_i^*(t,\theta,\theta^*) \qquad i = 1,2,3 \qquad 3.1$$

Podemos pensar a estos tres campos como la superextensión de la variable de posición $\overline{r}(t)$. Exijamos además que el índice i se transforme como vector bajo rotaciones:

$$(\Phi_R)_i\,(t,\theta,\theta^*) = R_{ij}\,\Phi_j\,(t,\theta,\theta^*) \qquad 3.2$$

donde R_{ij} es cualquier matriz de rotación (hemos adoptado - la convención de suma para índices repetidos). Como veremos- más adelante exigiremos que nuestro sistema sea invariante - ante rotaciones. La forma explícita de estos supercampos es:

$$\Phi_i(t,\theta,\theta^*) = x_i(t) + i\,\theta\,\psi_i(t) - i\,\psi_i^*(t)\,\theta^* + \theta^*\theta\, D_i(t) \qquad 3.3$$

Trabajando de la misma manera que en una dimensión para cada uno de los campos Φ_j , podemos encontrar las transformaciones de supersimetría de las variables dinámicas resultando:

$$i\,\delta x_j = \epsilon^*\psi_j^* - \psi_j\,\epsilon \qquad 3.4.1$$

$$\delta\psi_j = -i\,\epsilon^* D_j + \epsilon^*\dot{x}_j \qquad 3.4.2$$

$$\delta D_j = \epsilon\,\dot{\psi}_j + \dot{\psi}_j\,\epsilon^* \qquad 3.4.3$$

Al igual que en una dimensión, con ayuda de los supercampos $\Phi_i(t,\theta,\theta^*)$ y de las derivadas D_θ y D_{θ^*} , podemos construir acciones supersimétricamente invariantes cuya forma general es:

$$S = \int dt\, d\theta\, d\theta^*\, \tilde{\mathcal{L}}\,(D_\theta\Phi_i\,, D_{\theta^*}\Phi_i\,, \Phi_i) \qquad 3.5$$

siempre que no incluyamos dependencia explícita en las coordenadas t, θ y θ^* .

Si ahora exigimos que la acción sea invariante ante rotaciones y como el índice se transforma ante éstas como vector, es necesario que los argumentos de $\tilde{\mathcal{L}}$ entren en la acción como productos escalares, es decir:

$$S=\int dt\, d\theta\, d\theta^{*}\ \tilde{\mathcal{L}}\big((D_\theta \phi_i)(D_\theta \phi_i),(D_\theta \phi_i)(D_{\theta^*} \phi_i),$$
$$(D_{\theta^*}\phi_i)(D_{\theta^*}^{*} \phi_i),\ldots,\phi_i \phi_i\big) \qquad 3.6$$

Con esto podemos escribir como una posible forma - para la parte cinética del Lagrangiano:

$$S_c=\int dt\,d\theta\,d\theta^{*}\ \frac{1}{2}\ (D_\theta \Phi_i)^{*}\,(D_\theta \Phi_i) \qquad 3.7$$

el cual como se verá mas adelante contiene $\frac{1}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)$ al escribirlo en términos de las variables dinámicas.

Escojamos la interacción de la forma $F(\phi_i \phi_i)$ siendo F una función escalar ante transformaciones de supersimetría y rotaciones. Sabemos entonces que esta acción es invariante ante rotaciones y transformaciones de supersimetría

Con esto podemos escribir:

$$F(\phi_j \phi_j)=\sum_n a_n\,(\phi_j \phi_j)^n$$
$$=\sum_n a_n\,(\phi_1 \phi_1+\phi_2 \phi_2+\phi_3 \phi_3) \qquad 3.8$$

si definimos:

$$r^2=x_1^2+x_2^2+x_3^2 \qquad 3.9.1$$

$$\lambda=2(x_1\psi_1+x_2\psi_2+x_3\psi_3) \qquad 3.9.2$$

$$\lambda^{*}=2(x_1\psi_1^{*}+x_2\psi_2^{*}+x_3\psi_3^{*}) \qquad 3.9.3$$

$$D=2(x_1D_1+x_2D_2+x_3D_3)+2(\psi_1^{*}\psi_1+\psi_2^{*}\psi_2+\psi_3^{*}\psi_3) \qquad 3.9.4$$

es fácil comprobar que:

$$\Phi_1^2+\Phi_2^2+\Phi_3^2=r^2+i\,\theta\lambda-i\,\lambda^{*}\theta^{*}+\theta^{*}\theta\, D \qquad 3.10$$

con lo que

$$F(\phi_i \phi_i) = \sum_n a_n (r^2 + i\theta\lambda - i\lambda^* \theta^* + \theta^* \theta D)^n \qquad 3.11$$

La acción tendrá aquí la forma:

$$S = \int dt\, d\theta\, d\theta^* \left(\frac{1}{2} (D_\theta \phi_i)^* (D_\theta \phi_i) - F(\phi_i \phi_i) \right) \qquad 3.12$$

Si trabajamos en la misma forma que en una dimensión al integar sobre $\theta\theta^*$ se llega a:

$$S = \int dt \Big(\frac{1}{2} (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2) + \frac{i}{2} (\psi_1^* \dot{\psi}_1 - \dot{\psi}_1^* \psi_1 + \psi_2^* \dot{\psi}_2 - \dot{\psi}_2^* \psi_2 + \psi_3^* \dot{\psi}_3 - \dot{\psi}_3^* \psi_3) + \frac{1}{2} (D_1^2 + D_2^2 + D_3^2) + D F'(r^2) + \frac{1}{2} [\lambda^*, \lambda] F''(r^2) \Big) \qquad 3.13$$

donde:

$$F'(r^2) = \frac{d}{d(r^2)} F(r^2) \qquad 3.14.1$$

$$F''(r^2) = \frac{d^2}{d(r^2)^2} F(r^2) \qquad 3.14.2$$

Una vez más podemos eliminar los campos auxiliares D_i usando sus ecuaciones de movimiento. Al hacer las variaciones en la acción sobre estos campos obtenemos:

$$\delta_{D_i} S = D_i + 2 x_i F'(r^2) = 0 \qquad 3.15$$

lo que implica que:

$$D_i = -2 x_i F'(r^2) \qquad 3.16$$

Definamos los vectores:

$$\bar{r} = (x_1, x_2, x_3) \qquad 3.17.1$$

$$\bar{\psi} = (\psi_1, \psi_2, \psi_3) \qquad 3.17.2$$

$$\psi^* = (\psi_1^*, \psi_2^*, \psi_3^*) \qquad 3.17.3$$

Ahora, al sustituir las ecs. 3.9, 3.15 y 3.17 en - la acción 3.12 y desarrollar los diferentes términos, llegamos a que la acción tiene la forma:

$$S = \int dt\, \mathcal{L}(t) \qquad 3.18$$

donde:

$$\mathcal{L}(t) = \frac{1}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2) + \frac{i}{2}(\bar{\psi}^* \cdot \dot{\bar{\psi}} - \dot{\bar{\psi}}^* \bar{\psi})$$
$$- 2 r^2 F'(r^2) + 2 \bar{\psi}^* \cdot \bar{\psi} F'(r^2) +$$
$$4 (\bar{r} \cdot \bar{\psi}^*)(\bar{r} \cdot \bar{\psi}) F''(r^2) \qquad 3.19$$

Transformemos ahora nuestra teoría a una formula-- ción Lagrangiana de primer orden, lo cual es necesario para- las variables dinámicas x_1, x_2, x_3. Esto es posible introduciendo tres variables auxiliares p_1, p_2, p_3 y definiendo el- Lagrangiano $\tilde{\mathcal{L}}$ por:

$$\tilde{\mathcal{L}}(x_i, p_i, \dot{x}_i, \dot{p}_i, \psi_i, \dot{\psi}_i, \psi_i^*, \dot{\psi}_i^*) =$$
$$p_1\dot{x}_1 + p_2\dot{x}_2 + p_3\dot{x}_3 + \frac{i}{2}(\psi_1^*\dot{\psi}_1 - \dot{\psi}_1^*\psi_1 + \psi_2^*\dot{\psi}_2$$
$$- \dot{\psi}_2^*\psi_2 + \psi_3^*\dot{\psi}_3 - \dot{\psi}_3^*\psi_3) - H(x_i, p_i, \dot{x}_i, p_i,$$
$$\psi_i, \dot{\psi}_i, \psi_i^*, \dot{\psi}_i^*)$$

$$3.20.1$$

donde:

$$H=\frac{1}{2}(p_1^2+p_2^2+p_3^2)+2r^2 F'(r^2)^2-2\,\bar{\psi}^*\cdot\bar{\psi}\,F'(r^2)$$
$$-4(\bar{r}\cdot\bar{\psi}^*)(\bar{r}\cdot\bar{\psi})\,F''(r^2) \qquad 3.20.2$$

es el Hamiltoniano del sistema.

Las ecuaciones de movimiento se obtienen de pedir que la acción:

$$S=\int_{t_2}^{t_1}\tilde{\mathcal{L}}\,dt \qquad 3.21$$

sea un extremo con respecto a variaciones (arbitrarias) de las variables dinámicas, con la restricción de que estas variaciones sean cero en los extremos, es decir:

$$\delta p_i(t_1)=\delta p_i(t_2)=0 \qquad 3.22.1$$
$$\delta x_i(t_1)=\delta x_i(t_2)=0 \qquad 3.22.2$$
$$\delta \psi_i(t_1)=\delta \psi_i(t_2)=0 \qquad 3.22.3$$
$$\delta \psi_i^*(t_1)=\delta \psi_i^*(t_2)=0 \qquad 3.22.4$$

Las ecuaciones de movimiento resultantes son:

$$p_j=\dot{x}_j \qquad 3.23.1$$

$$\dot{p}_j-x_j\big(-4F'(r^2)^2-8r^2F'(r^2)F''(r^2)+4\,\bar{\psi}^*\cdot\bar{\psi}+$$
$$8(\bar{r}\cdot\bar{\psi}^*)(\bar{r}\cdot\bar{\psi})\;F'(r^2)\big) \qquad 3.23.2$$

$$\dot{\psi}_j-i(\psi_j F'(r^2)+4x_j(\bar{r}\cdot\bar{\psi})\,F''(r^2)=0 \qquad 3.23.3$$

$$\dot{\psi}_j^*+i(\psi_j^* F'(r^2)+4x_j(\bar{r}\cdot\bar{\psi}^*)\,F''(r^2)=0 \qquad 3.23.4$$

siendo estas ecuaciones equivalentes a las que se obtienen-de variar la acción 3.18.

Necesitamos todavía demostrar que el Lagrangiano - es tal que las ecuaciones de movimiento 3.22 sean invariantes bajo transformaciones de supersimetría y para esto - necesitamos conocer la variación supersimétrica de p, δp, que- complete a las ecuaciones 3.4. Para demostrar la invariancia de las ecuaciones de movimiento es necesario que el aplicar- las transformaciones 2.31 (junto con δp supersimétrica) se llegue a que:

$$\delta_{s.s.} \tilde{S} = \int dt \frac{d}{dt} (X\varepsilon + \varepsilon^{*} X) \qquad 3.24$$

donde X es una función de las variables dinámicas, es decir:

$$X = X (\bar{x} , \bar{p} , \bar{\psi} , \bar{\psi}^{*}) \qquad 3.25$$

Podemos encontrar la variación supersimétrica de - la acción $\tilde{S}$, $\delta_{s.s.} \tilde{S}$, aplicando las variaciones dadas por - 2.31 en donde se ha reemplazado x_j por p_j en 2.31.2 y encontraremos $\delta_{ss} p$ pidiendo que $\delta_{s.s.} \tilde{S}$ se reduzca a la forma 3.24.- Es posible llegar a este resultado obteniendo:

$$X = \frac{i}{2} (\bar{p} + 2i F'(r^2) \bar{x}) \cdot \bar{\psi} \qquad 3.26$$

si δp_j supersimétrica está dado por:

$$\begin{aligned} \delta p_j = {} & \varepsilon^{*} (-4 x_j \bar{x} \cdot \bar{\psi}^{*} F''(r^2) - 2 \psi_j^{*} F'(r^2)) \\ & + (-4 x_j \bar{x} \cdot \bar{\psi} F''(r^2) - 2 \psi_j F'(r^2)) \varepsilon \end{aligned} \qquad 3.27$$

Con esto hemos demostrado que las ecs. de movi--- to son invariantes ante las transformaciones de supersime--

tría 2.31 y 3.27.

Debido a esto último, por el teorema de Noether, sabemos que existen cantidades conservadas asociadas a esta simetría. Encontraremos estas cantidades exigiendo que las variaciones supersimétricas $\delta_s x$, $\delta_s p$, $\delta_s \psi$ y $\delta_s \psi^*$ sean casos particulares de las variaciones arbitrarias de las variables dinámicas utilizadas para encontrar las ecs. de movimiento. Esto se puede lograr al definir:

$$i\,\delta x_{s j} = \varepsilon^*(t)\,\psi_j^* - \psi_j\,\varepsilon(t) \qquad 3.28.1$$

$$\delta p_{s j} = \varepsilon^*(t)\left(-4x_j\,\bar{x}\cdot\bar{\psi}^*\,F''(r^2) - 2\psi_j^*\,F'(r^2)\right) + \left(-4x_j\,\bar{x}\cdot\psi\;F''(r^2) - 2\psi_j\,F'(r^2)\right)\varepsilon(t) \qquad 3.28.2$$

$$\delta\psi_{s j} = -i\,\varepsilon^*(t)\,D_j + \varepsilon^*(t)\,p_j \qquad 3.28.3$$

$$\delta\psi_{s j}^* = i\,\varepsilon(t)\,D_j + \varepsilon(t)\,p_j \qquad 3.28.4$$

con ε y ε funciones arbitrarias del tiempo con las restricciones $\varepsilon(t_1) = \varepsilon(t_2) = \varepsilon^*(t_1) = \varepsilon^*(t_2) = 0$ y variar la acción 3.21 de acuerdo a éstas. Usando las ecuaciones de movimiento:

$$\delta_s \tilde{S} = 0 \qquad 3.29$$

y al desarrollar se obtiene:

$$0 = \delta_s\tilde{S} = \int_{t_2}^{t_1} dt\left[\varepsilon^*\frac{d}{dt}\left(\bar{p} + 2i\,\bar{x}\,F'(r^2)\right)\cdot\bar{\psi}^* + \frac{d}{dt}\left[\left(\bar{p} - 2i\,\bar{x}\;F'(r^2)\right)\cdot\bar{\psi}\right]\varepsilon\right] \qquad 3.30$$

Como ε y ε^* son funciones arbitrarias dentro del intervalo, se tiene que las cantidades conservadas $\tilde{Q}$ y $\tilde{Q}^*$ están dadas por:

$$\tilde{Q}^* = (\bar{p} + 2i\,\bar{x}\,F'(r^2))\cdot\bar{\psi}^* \qquad 3.31.1$$

$$\tilde{Q} = (\bar{p} - 2i\,\bar{x}\,F'(r^2))\cdot\bar{\psi} \qquad 3.31.2$$

Usando las ecs. de movimiento 3.23 es posible verificar explícitamente que:

$$\frac{d\tilde{Q}^*}{dt} = \frac{d\tilde{Q}}{dt} = 0 \qquad 3.32$$

Para construir la mecánica cuántica necesitamos -- transformar nuestras variables dinámicas a operadores. Introduzcamos el álgenra de estos operadores, de acuerdo con el - principio de acción con las siguientes relaciones de (anti)-conmutación:

$$[\hat{x}_j, \hat{p}_k] = i\hbar\,\delta_{jk} \qquad 3.33.1$$

$$\{\hat{\psi}_j, \hat{\psi}_k\} = \{\hat{\psi}_j^+, \hat{\psi}_k^+\} = 0 \qquad 3.33.2$$

$$\{\hat{\psi}_j, \hat{\psi}_k^+\} = \hbar\,\delta_{jk} \qquad 3.33.3$$

$$[\hat{x}_j, \hat{\psi}_k] = [\hat{p}_j, \hat{\psi}_k] = 0 \qquad 3.33.4$$

Por las mismas razones que explicamos en la teo-- ría unidimensional, definamos el Hamiltoniano cuántico $\hat{H}$ -- del sistema por:

$$H = \frac{1}{2}\{\hat{\tilde{Q}}, \hat{\tilde{Q}}\} \qquad 3.34$$

donde $\hat{\tilde{Q}}$ y $\hat{\tilde{Q}}^+$ son las versiones cuánticas de 3.31 y están unívocamente determinadas por:

$$\hat{\tilde{Q}}^+ = (\hat{\bar{p}} + 2i\,\hat{\bar{x}}\,F'(r^2))\cdot\hat{\bar{\psi}}^+ \qquad 3.35.1$$

$$\hat{\tilde{Q}} = (\hat{\bar{p}} - 2i\,\hat{\bar{x}}\,F'(r^2))\cdot\hat{\bar{\psi}} \qquad 3.35.2$$

De esta manera se obtiene para $\hat{H}$:

$$H=\frac{1}{2}\,\hat{p}\cdot\hat{p}+2r^2F'(\hat{r}^2)+F'(\hat{r}^2)\left(\hat{\psi}\cdot\hat{\psi}^{+}-\hat{\psi}^{+}\cdot\hat{\psi}\right)$$
$$+\,2F''(r^2)\left((\hat{x}\cdot\hat{\psi})(\hat{x}\cdot\hat{\psi}^{+})-(\hat{x}\cdot\hat{\psi}^{+})(\hat{x}\cdot\hat{\psi})\right) \qquad 3.36$$

el cual en el límite $\hbar\rightarrow 0$, se reduce a la ec. 3.20.

También se pueden demostrar las siguientes relaciones:

$$\hat{Q}^2=\hat{Q}^{+2}=0 \qquad 3.37.1$$

$$[\hat{Q},\hat{H}]=0 \qquad 3.37.2$$

$$[\hat{Q}^{+},\hat{H}]=0 \qquad 3.37.3$$

Por lo que las transformaciones generadas por los operadores $\hat{Q}$ y $\hat{Q}^{+}$ son una simetría del sistema cuántico.

4.- INTERPRETACION FISICA

En esta sección encontraremos una representación de los operadores $\hat{\psi}$ tal que nos permite identificar nuestro modelo con un sistema físico.

Escribamos el operador $\hat{\psi}$ en la forma:

$$\hat{\psi}=\frac{(\hat{a}+i\hat{b})}{\sqrt{2}} \qquad 4.1$$

donde $\hat{a}$ y $\hat{b}$ son operadores hermíticos los cuales debido a las ecs. 3.33, deben satisfacer:

$$\{\hat{a}_k,\hat{a}_j\}=\delta_{k,j} \qquad 4.2.1$$

$$\{\hat{b}_k,\hat{b}_j\}=\delta_{k,j} \qquad 4.2.2$$

$$\{\hat{a}_k, \hat{b}_l\} = 0 \qquad 4.2.3$$

Con esta representación es posible ver que:

$$\hat{\bar{\psi}} \cdot \hat{\bar{\psi}}^{+} - \hat{\bar{\psi}}^{+} \cdot \hat{\bar{\psi}} = 2i\bar{b}\cdot\bar{a} \qquad 4.3.1$$

y

$$(\hat{\bar{x}}\cdot\hat{\bar{\psi}})(\hat{\bar{x}}\cdot\hat{\bar{\psi}}^{+}) - (\hat{\bar{x}}\cdot\hat{\bar{\psi}}^{+})(\hat{\bar{x}}\cdot\hat{\bar{\psi}}) = 2i(\hat{\bar{x}}\cdot\hat{\bar{b}})(\hat{\bar{x}}\cdot\hat{\bar{a}}) \qquad 4.3.2$$

con lo que el Hamiltoniano toma la forma:

$$H = \frac{1}{2}\hat{\bar{p}}\cdot\hat{\bar{p}} + 2r^2F'(r^2)^2 + 2iF'(r^2)\,\hat{\bar{b}}\cdot\hat{\bar{a}} + 4iF''(r^2)(\hat{\bar{x}}\cdot\hat{\bar{b}})(\hat{\bar{x}}\cdot\hat{\bar{a}}) \qquad 4.4$$

Necesitamos ahora encontrar una representación de- los operadores $\hat{\bar{a}}$ y $\hat{\bar{b}}$ tal que se satisfagan las ecs. -- 4.2. Para esto recordemos que podemos representar el momento angular intrínseco de una partícula, spin, con número cuánti co de spin $s = \frac{1}{2}$, por las matrices de Pauli σ_1, σ_2 y σ_3 cuya representación explícita en matrices de 2 2 es:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad 4.5$$

y que satisfacen la relación de anticonmutación

$$\frac{1}{2}\{\sigma_k, \sigma_l\} = \delta_{kl} \qquad 4.6$$

Vemos que esta ecuación es similar en forma a las- ecs. 4.2.1 y 4.2.2. Es natural entonces proponer como repre- sentación para los operadores $\hat{\bar{a}}$ y $\hat{\bar{b}}$ la forma:

$$\hat{\bar{a}} = \lambda\, A \otimes \bar{\sigma}_I \otimes \mathbb{1} \qquad 4.7.1$$

$$\bar{b} = \lambda\, B \otimes \mathbb{1} \otimes \bar{\sigma}_{II} \qquad 4.7.2$$

donde λ es número, A y B, son matrices que como se verá más adelante escogeremos para satisfacer la ec. 4.23 y cada uno de los vectores $\bar{\sigma}_I$ y $\bar{\sigma}_{II}$ tiene por componentes las matrices de Pauli:

$$\bar{\sigma}_{I,II} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \qquad 4.8$$

Podemos satisfacer $\bar{a}^+ = \bar{a}$ y $\bar{b}^+ = b$, si consideramos:

$$\lambda = \lambda^* \;, \qquad 4.9.1$$

$$A = A^+ \qquad 4.9.2$$

$$B = B^+ \qquad 4.9.3$$

es decir si λ es real y, A, B son matrices hermíticas.

La relación 4.2.1 implica:

$$\begin{aligned} \delta_{ij} = \{a_i, a_j\} &= \lambda^2 \{A \otimes \sigma_i \otimes \mathbb{1}, A \otimes \sigma_j \otimes \mathbb{1}\} \\ &= \lambda^2 A^2 \otimes \{\sigma_i, \sigma_j\} \otimes \mathbb{1} \\ &= \lambda^2 A^2\, 2\, \delta_{ij} \end{aligned} \qquad 4.10$$

donde hemos eliminado la notación de producto directo. Es posible satisfacer la ec. 4.10 pidiendo que:

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad 4.11.1$$

$$A^2 = \mathbb{1} \qquad 4.11.2$$

Similarmente de 4.2.2 tenemos:

$$B^2 = \mathbb{1} \qquad 4.12$$

y 4.2.3 implica

$$0 = \{a_i, b_j\} = \lambda^2 \{A\,\sigma_{I_i}, B\,\sigma_{II_j}\}$$

$$= \lambda^2 \{A, B\}\, \sigma_{I_i}\, \sigma_{II_j} \qquad 4.13$$

Podemos satisfacer 4.13 pidiendo que:

$$\{A, B\} = 0 \qquad 4.14$$

Por último, podemos encontrar una representación - explícita de las matrices A y B, tal que se satisfagan las - ecs. 4.11, 4.12 y 4.14 si A y B están dadas por:

$$A = \rho_1^{(1)} \otimes \rho_3^{(2)} \qquad 4.15.1$$

$$B = \rho_2^{(1)} \otimes \mathbb{1}^{(2)} \qquad 4.15.2$$

donde $\bar{\rho}^{(1)}$ y $\bar{\rho}^{(2)}$ son otros dos conjuntos de matrices de Pauli independientes que operan en el espacio interno de cada - una de las partículas respectivamente.

Definiendo

$$\bar{S}_1 = \frac{\bar{\sigma}_I}{2} \qquad 4.16.1$$

y

$$\bar{S}_2 = \frac{\bar{\sigma}_{II}}{2} \qquad 4.16.2$$

tenemos que:

$$\hat{b} \cdot \hat{a} = 2\,BA\ \bar{S}_2 \cdot \bar{S}_1 \qquad 4.17.1$$

$$(\hat{\bar{x}} \cdot \hat{b})(\hat{\bar{x}} \cdot \hat{a}) = 2\,BA\ (\bar{x} \cdot \bar{S}_2)(\bar{x} \cdot \bar{S}_1) \qquad 4.17.2$$

con lo que el Hamiltoniano toma la forma:

$$H = \frac{1}{2}\left(\bar{p}^2 + 2r^2 F'(r^2)\right) + 2i\,BA\,F'(r^2)\,\bar{S}_2 \cdot \bar{S}_1$$
$$+ 4i\,BA\,F''(r^2)\,(\bar{x} \cdot \bar{S}_2)(\bar{x} \cdot \bar{S}_1) \qquad 4.18$$

Definiendo el operador hermítico $\mathbb{C}$ por:

$$\mathbb{C} = i\,BA \qquad 4.19.1$$

el cual es posible escribirlo como:

$$\mathbb{C} = i\left(\rho_3^{(1)} \otimes \rho_2^{(2)}\right)\left(\rho_1^{(1)} \otimes \mathbb{1}\right) = \rho_2^{(1)} \otimes \rho_2^{(2)} \qquad 4.19.2$$

llegamos a la forma final de nuestro Hamiltoniano:

$$H = \frac{1}{2}\left(\bar{p}^2 + r^2 V^2 + 4\,\mathbb{C}\left(V \bar{S}_1 \cdot \bar{S}_2 + r V'(r)\,(\bar{S}_1 \cdot \hat{r})(\bar{S}_2 \cdot \hat{r})\right)\right) \qquad 4.20$$

donde:

$$V(r) = 2\,F'(r^2) \qquad 4.21.1$$

$$V'(r) = \frac{d}{dr} V(r) \qquad 4.21.2$$

$$\hat{r} = \frac{\bar{r}}{r} \qquad 4.21.3$$

Hasta aquí podemos decir que nuestro Hamiltoniano-4.20 describe la interacción supersimétrica de dos partícu-las de spin $\frac{1}{2}$ cuyos momentos y coordenadas relativas están representados por los operadores $\bar{p}$ y $\bar{x}$ respectivamente. Ta-les partículas poseen además un espacio interno con un número cuántico adicional, $c^{(a)}$, ($a= 1,2$), relacionado con el operador $\mathbb{C}= \rho_2^{(1)} \otimes \rho_2^{(2)}$, y que está dado por los valores propios ± 1 de $\rho_2^{(a)}$. Este operador $\mathbb{C}$ es el único remanente del espacio interno, por lo que puede ser escrito efectivamente como el producto de las cargas internas: $\mathbb{C} = c = c^{(1)} c^{(2)}$

Por último notemos que el Hamiltoniano 4.20 exhibe interacciones central, spin - spin, y tensorial con sus coeficientes respectivos fuertemente correlacionados en términos del superpotencial V(r) como una consecuencia de la supersimetría subyacente en el modelo.

5.- PROPIEDADES DE CONMUTACION

En esta sección estudiaremos algunas propiedades mecánico cuánticas del sistema descrito por el Hamiltoniano 4.20. Por ejemplo, queremos saber cuales son las cantidades conservadas, a partir de las cuales podemos construir un conjunto completo de observables cuyos estados propios tendrán números cuánticos definidos. Además estudiaremos que efecto tienen los generadores de una transformación de supersimetría, Q y Q^+ , sobre estos estados.

Sabemos que las cantidades conservadas son aquellas para las cuales sus operadores conmutan con el Hamiltoniano, por lo que a continuación calcularemos estos conmutadores para los diferentes observables.

a) Momento Angular Total.

El momento angular total está definido por:

$$\bar{J} = \bar{L} + \bar{S} \qquad 5.1$$

donde $\bar{L}$ es el momento angular orbital y

$$\bar{S} = \bar{S}_1 + \bar{S}_2 \qquad 5.2$$

es el spin total y $\bar{S}_1$ y $\bar{S}_2$ son los spines de cada una de las partículas. J_z está entonces dado por:

$$J_z = L_z + S_{1z} + S_{2z} \qquad 5.3$$

Las tres componentes del operador de momento angular orbital $\bar{L}$ actúan solamente sobre las variables angulares θ y φ ; cosecuentemente, con todos los operadores que ac-- túan sobre la dependencia radial y con los operadores de --- spin. Tenemos entonces:

$$[H, J_z] = 2\left[\mathbb{C}\left(2F'(r^2)\,\bar{S}_2\cdot\bar{S}_1 + 4F''(r^2)(\bar{x}\cdot\bar{S}_2)(\bar{x}\cdot\bar{S}_1),\; L_z + S_{1z} + S_{2z}\right]\right. \qquad 5.4$$

El operador $\mathbb{C}$ actúa en un subespacio diferente al de los operadores de spin y del correspondiente a las coordenadas, de tal manera que:

$$[\mathbb{C}, \bar{S}_i] = 0 \qquad 5.5$$

Entonces:

$$[H, J_z] = 2\mathbb{C}\left(2F'(r^2)\right)\left[\bar{S}_2\cdot\bar{S}_1,\; S_{1z} + S_{2z}\right] + 4F''(r^2)\left[(\bar{x}\cdot S_2)(\bar{x}\cdot\bar{S}_1),\; L_z + S_{1z} + S_{2z}\right] \qquad 5.6$$

Ahora de la propiedad de conmutación para los operadores de-spin:

$$[S_i, S_j] = i\,\varepsilon_{ijk}\, S_k \qquad 5.7$$

y de:

$$[x_i, l_j] = i\,\varepsilon_{ijk}\, x_k \qquad 5.8$$

tenemos:

$$[\bar{S}_2\cdot\bar{S}_1, S_{1_3} + S_{2_3}] = S_{2_j}[S_{1_j}, S_{1_3}] + [S_{2_j}, S_{2_3}]S_{1_j}$$

$$= i(S_{2_j} S_{1_k}\varepsilon_{j3k} + \varepsilon_{j3k} S_{2_k} S_{1_j}) = 0 \qquad 5.9$$

y

$$[\bar{x}\cdot\bar{S}_1, l_3 + S_{1_3} + S_{2_3}] = [x_j, l_3]S_{1_j} + x_j[S_{1_j} + S_{1_3}]$$

$$= i(\varepsilon_{j3k}\, x_k\, S_{1_j} + \varepsilon_{j3k}\, x_j\, S_k) = 0 \qquad 5.10$$

Con la misma relación para $\bar{x}\cdot\bar{S}_2$; vemos entonces que

$$[H, J_z] = 0 \qquad 5.11$$

y similarmente

$$[H, J_x] = [H, J_y] = 0 \qquad 5.12$$

De aquí se sigue entonces que:

$$[H, J^2] = [H, J_x^2 + J_y^2 + J_z^2] = 0 \qquad 5.13$$

Con lo que concluimos que la magnitud del momento angular--- se conserva.

b) Spin Total $\bar{S}$

De la propiedad general para el momento angular de spin

$$[S_j, S^2] = 0 \qquad j = 1,2,3 \tag{5.14}$$

se sigue que:

$$[\bar{S}_2\cdot\bar{S}_1 , S_1^2] = [S_{1j}S_{2j} , S_1^2] = 0 \tag{5.15}$$

con la misma relación para $\bar{S}_2$. De este modo:

$$[\bar{S}_2\cdot\bar{S}_1 , S^2] = [\bar{S}_2\cdot\bar{S}_1 , S_1^2 + 2\,\bar{S}_1\cdot\bar{S}_2 + S_2^2]$$

$$= [\bar{S}_2\cdot\bar{S}_1 , S_1^2 + S_2^2] = 0 \tag{5.16}$$

Concluímos:

$$[(\bar{x}\cdot\bar{S}_1)(\bar{x}\cdot\bar{S}_2) , S^2] = x_j x_k [S_{1j}S_{2j} , S_1^2 + 2\bar{S}_1\cdot\bar{S}_2 + \bar{S}_2^2] \tag{5.17}$$

Al desarrollar obtenemos:

$$[(\bar{x}\cdot\bar{S}_1)(\bar{x}\cdot\bar{S}_2), S^2] = 2i\, x_j x_j (\varepsilon_{k\ell m} S_{1j} S_{1\ell} S_{2m} + \varepsilon_{j\ell m} S_{1m} S_{2\ell} S_{2k}) \tag{5.18}$$

Aprovechando que para spin $\frac{1}{2}$ se satisface:

$$S_k S_\ell = \frac{\delta_{k\ell}}{4} + \frac{i}{2}\varepsilon_{\ell k m} S_m \tag{5.19}$$

se llega a que:

$$[(\bar{x}\cdot\bar{S}_1)(\bar{x}\cdot\bar{S}_2), S^2] = x_j x_k (\varepsilon_{k\ell m}\varepsilon_{\ell j m} + \varepsilon_{j\ell m}\varepsilon_{k\ell r}) S_{1m} S_{2r} = 0 \tag{5.20}$$

por lo que de las ecs. 5.15 y 5.20 se concluye que:

$$[H, S^2] = 0 \tag{5.21}$$

Siguiendo los mismos procedimientos se puede demostrar que los siguientes conmutadores satisfacen:

$$[H, S_z] \neq 0 \qquad 5.22.1$$

$$[H, \lambda^2] \neq 0 \qquad 5.22.2$$

$$[H, \lambda_z] \neq 0 \qquad 5.22.3$$

c) Operador $\mathbb{C}$

Debido a que este operador actúa sobre un subespacio diferente al de todos los demás operadores que entran en H, es directo que:

$$[H, \mathbb{C}] = 0 \qquad 5.23$$

d) Operador de Paridad P

Utilizando el hecho de que la acción del operador P sobre los operadores x_i, p_i, L_i, y S_i es:

$$P x_i = -x_i \qquad 5.24.1$$

$$P p_i = -p_i \qquad 5.24.2$$

$$P L_i = L_i \qquad 5.24.3$$

$$P S_i = S_i \qquad 5.24.4$$

también es directo que

$$[H, P] = 0 \qquad 5.25$$

e) Generadores Q y Q^+

Como el Hamiltoniano lo hemos construido como $H = \frac{1}{2}\{Q, Q^+\}$ tenemos entonces:

$$[H,Q] = \frac{1}{2}\left(Q[Q^{+},Q] + [Q^{+},Q]Q\right) = \frac{1}{2}\left(QQ^{+}Q - QQ^{+}Q\right) \qquad 5.26$$

y similarmente:

$$[H,Q^{+}] = 0 \qquad 5.27$$

donde hemos utilizado que $Q^2 = Q^{+2} = 0$.

De este modo vemos que podemos escoger nuestro conjunto completo de observables como H, J^2, J_z, S^2, $\mathbb{C}$ y P, de tal suerte que rotularemos a las funciones de onda por los correspondientes números cuánticos.

El estudio del efecto de una transformación de supersimetría nos lleva al cálculo de los (anti-)conmutadores de Q y Q con los operadores J^2, J_z, S^2, $\mathbb{C}$ y P. Para lograr esto necesitamos encontrar la representación de Q y Q^{+} en términos de $\bar{S}_1$ y $\bar{S}_2$.

Recordando la definición de $\bar{\psi}$ en términos de los operadores $\bar{a}$ y $\bar{b}$, y definiendo el operador

$$\bar{\Pi} = \bar{p} - i\,\bar{x}\,F'(r^2) \qquad 5.28$$

podemos escribir a los generadores Q y Q^{+} como:

$$Q = \sqrt{2}\,\left(A\otimes\bar{\Pi}\cdot\bar{S}_1 + i\,B\otimes\bar{\Pi}\cdot\bar{S}_2\right) \qquad 5.29.1$$

$$Q^{+} = \sqrt{2}\,\left(A\otimes\bar{\Pi}^{+}\cdot\bar{S}_1 - i\,B\otimes\bar{\Pi}^{+}\cdot S_2\right) \qquad 5.29.2$$

f) $[Q, J^2]$

Calculemos primero el conmutador de Q con la componente j-ésima del momento angular total. Recordando que $\bar{p}$ y $\bar{x}$ son operadores vectoriales es directo que:

$$[\Pi_i , L_j] = i\, \varepsilon_{ijl} \Pi_l \qquad 5.30$$

Tenemos entonces:

$$[Q , J_j] = [Q , L_j + S_j] = [Q, L_j] + [Q , S_j] \qquad 5.31$$

Calculando cada uno de estos conmutadores:

$$[Q, L_j] = \sqrt{2}\ [A \otimes \bar{\Pi}\cdot\bar{S}_1 + i\, B \otimes \bar{\Pi}\cdot\bar{S}_2 \ , L_j]$$

$$= \sqrt{2}\ (A \otimes [\bar{\Pi}\cdot\bar{S}_1, L_j] + i\, B \otimes [\bar{\Pi}\cdot\bar{S}_2 , L_j] \qquad 5.32$$

vemos que:

$$[\bar{\Pi}\cdot\bar{S}_1 \ , L_j] = [\Pi_k S_{1k} , L_j] = S_{1k} [\Pi_k , L_j] \qquad 5.33$$

por lo que aplicando la ec. 5.30 tenemos:

$$[\bar{\Pi}\cdot\bar{S}_1 \ , L_j] = S_{1k}\, i\, \varepsilon_{jkl} \Pi_l = -i\, \varepsilon_{jkl} S_{1k} \Pi_l \qquad 5.34$$

lo cual podemos escribir como:

$$[\bar{\Pi}\cdot\bar{S}_1 , L_j] = -i\, (\bar{S}_1 \times \bar{\Pi})_j \qquad 5.35$$

con un resultado similar para $\bar{S}_2$, con lo que llegamos a:

$$[Q , L_j] = -i\sqrt{2}\, (A \otimes (\bar{S}_1 \times \bar{\Pi})_j + i\, B \otimes (\bar{S}_2 \times \bar{\Pi})_j \qquad 5.36$$

ahora:

$$[Q, S_j] = \sqrt{2}\ [A \otimes \bar{\Pi}\cdot\bar{S}_1 + i\, B \otimes \bar{\Pi}\cdot S_2 , S_{1j} + S_{2j}]$$

$$= \sqrt{2}\,(A \otimes [\bar{\Pi}\cdot\bar{S}_1 , S_{1j}] + i\, B \otimes [\bar{\Pi}\cdot\bar{S}_2 , S_{2j}]) \qquad 5.37$$

si observamos que:

$$[\Pi\cdot\bar{S}_1 , S_{1j}] = [\Pi_k S_{1k} , S_{1j}] = \Pi_k [S_{1k} , S_{1j}] = i\, \Pi_k \varepsilon_{kjl} S_{1l}$$

$$= i\,(\bar{S}_1 \times \Pi)_j \qquad 5.38$$

entonces:

$$[Q, S_j] = \sqrt{2}\, i\,(A \otimes (\bar{S}_1 \times \Pi)_j + i\, B \otimes (\bar{S}_2 \times \bar{\Pi})_j) \qquad 5.39$$

Regresándonos a la ec. 5.31 y aplicando las ecs. 5.36 y 5.39 obtenemos:

$$[Q, J_j] = 0 \qquad 5.40$$

de aquí vemos entonces que:

$$[Q, J^2] = [Q, J_x^2 + J_y^2 + J_z^2] = 0 \qquad 5.41$$

Esto significa que las transformaciones de supersimetría no - cambian el momento angular total del sistema.

g) $\{Q, \mathbb{C}\}$

$$\{Q, \mathbb{C}\} = \sqrt{2}\, \{A \otimes \bar{\Pi}\cdot\bar{S}_1 + i\, B \otimes \bar{\Pi}\cdot\bar{S}_2 , \mathbb{C}\}$$

$$= \sqrt{2}\left(\{A, \mathbb{C}\} \otimes \bar{\Pi}\cdot\bar{S}_1 + i\, \{B, \mathbb{C}\} \otimes \bar{\Pi}\cdot\bar{S}_2 \right) \qquad 5.42.1$$

Observando que:

$$\{A, \mathbb{C}\} = i\, \{A, BA\} = i\, \{A, B\}\, A = 0 \qquad 5.42.2$$

con un resultado análogo para B, obtenemos:

$$\{Q, \mathbb{C}\} = 0 \qquad 5.43$$

h) $\{Q, S^2\}$

Recordando que para spin $\frac{1}{2}$ podemos escribir:

$$S_1^2 = S_2^2 = \frac{3}{4} \qquad 5.44$$

obtenemos para S^2:

$$S^2 = S_1^2 + 2\bar{S}_1 \cdot \bar{S}_2 + S_2^2 = \frac{3}{2} + 2\bar{S}_1 \cdot \bar{S}_2 \qquad 5.45$$

por lo que:

$$\{Q, S^2\} = \{Q, \tfrac{3}{2} + 2\bar{S}_1 \cdot \bar{S}_2\} \qquad 5.46$$

Ahora:

$$\{Q, \bar{S}_1 \cdot \bar{S}_2\} = \sqrt{2}\left(A \otimes \{\bar{\Pi} \cdot \bar{S}_1, \bar{S}_1 \cdot \bar{S}_2\} + i B \otimes \{\bar{\Pi} \cdot \bar{S}_2, \bar{S}_1 \cdot \bar{S}_2\}\right) \qquad 5.47.1$$

$$\{\Pi \cdot \bar{S}_1, \bar{S}_1 \cdot \bar{S}_2\} = \{\Pi_i S_{1i}, S_{1j} S_{2j}\}$$

$$= \Pi_i \{S_{1i}, S_{1j}\} S_{2j} \qquad 5.47.2$$

Para spin $\frac{1}{2}$ sabemos:

$$\{S_{1i}, S_{1j}\} = \frac{1}{2}\delta_{ij} \qquad 5.48$$

Por lo que:

$$\{\bar{\Pi} \cdot \bar{S}_1, \bar{S}_1 \cdot \bar{S}_2\} = \frac{1}{2}\Pi_i S_{2j}\delta_{ij} = \frac{\bar{\Pi} \cdot \bar{S}_2}{2} \qquad 5.49$$

también:

$$\{\bar{\Pi} \cdot \bar{S}_2, \bar{S}_1 \cdot \bar{S}_2\} = \frac{\bar{\Pi} \cdot \bar{S}_1}{2} \qquad 5.50$$

Si observamos que:

$$\mathbb{C}\; B \otimes \bar{\Pi} \cdot \bar{S}_2 = -i\, A \otimes \bar{\Pi} \cdot \bar{S}_2 \qquad 5.51.1$$

$$\mathbb{C}\; A \otimes \bar{\Pi} \cdot \bar{S}_1 = i\, B \otimes \bar{\Pi} \cdot \bar{S}_1 \qquad 5.51.2$$

podemos escribir:

$$\{Q, \bar{S}_1 \cdot \bar{S}_2\} = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\mathbb{C}\, i\, B \otimes \bar{\Pi} \cdot \bar{S}_2 + \mathbb{C}\, A \otimes \bar{\Pi} \cdot \bar{S}_1 \right)$$
$$= \frac{\mathbb{C}\, Q}{2} \qquad 5.52$$

y utilizando esta ecuación en 5.46 obtenemos finalmente:

$$\{Q, S^2\} = (3 + \mathbb{C})\, Q \qquad 5.53$$

i) $\{Q, P\}$

Por último observando que para el operador de paridad tenemos:

$$P\, \Pi_i = -\Pi_i \qquad 5.54$$

vemos que:

$$\{Q, P\} = 0 \qquad 5.55$$

Finalmente, para un operador hermítico F sabemos que:

$$(QF)^+ = F Q^+ \qquad 5.56$$

por lo que las relaciones de (anti-)conmutación de Q^+ con los operadores anteriores pueden obtenerse de:

$$[Q, F]^+ + [Q^+, F] = 0 \qquad 5.57.1$$

$$\{Q, F\}^+ = \{Q^+, F\} \qquad 5.57.2$$

6.- EFECTO DE UNA TRANSFORMACION DE SUPERSIMETRIA SOBRE LOS ESTADOS PROPIOS DEL HAMILTONIANO

A partir de las relaciones de conmutación obtenidas en la sección anterior, vemos que es posible construir un conjunto completo de observables (que conmuten por pares), al cual es posible asociarle una base ortonormal de vectores propios en el espacio de estados del sistema.

Queremos estudiar aquí qué efecto tiene sobre esta base la aplicación de una transformación de supersimetría.

Este conjunto de observables, estará dado aquí por los operadores H, J^2, J_z, S^2, $\mathbb{C}$ y P, ya que estos operadores conmutan entre sí. Denotemos por $|\Psi\rangle$ un estado propio de estos operadores con valores propios E, j, m, s, c y p, respectivamente. Como los operadores Q y Q^+, que generan una transformación de supersimetría conmutan con H, J^2 y J_z los estados $Q|\Psi\rangle$, $Q^\dagger|\Psi\rangle$ satisfacen ($\hbar = 1$):

$$H\,Q|\Psi\rangle = E\,Q|\Psi\rangle \tag{6.1.1}$$

$$J^2 Q|\Psi\rangle = j(j+1)\,Q|\Psi\rangle \tag{6.1.2}$$

$$J_z Q|\Psi\rangle = m\,Q|\Psi\rangle \tag{6.1.3}$$

con las mismas relaciones para Q^+. Observamos también que:

$$\begin{aligned} P\,Q|\Psi\rangle &= -Q\,P|\Psi\rangle \\ &= -p\,Q|\Psi\rangle \end{aligned} \tag{6.2}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{C}\,Q|\Psi\rangle &= -Q\,\mathbb{C}|\Psi\rangle \\ &= -c\,Q|\Psi\rangle \end{aligned} \tag{6.3}$$

y finalmente a partir de las ecs. 5.53 y 5.57.2 vemos que:

$$S^2 Q|\psi\rangle = (3 - s(s+1) - c)\, Q|\psi\rangle \qquad 6.4$$

$$S^2 Q^{+}|\psi\rangle = (3 - s(s+1) - c)\, Q^{+}|\psi\rangle \qquad 6.5$$

podemos decir entonces de las ecs. 6.2 a 6.5 que una transformación de supersimetría altera al estado, pero como veremos a continuación podemos obtener mayor información de las dos últimas ecuaciones:

Como nuestro Hamiltoniano representa la acción entre dos partículas de spin $\frac{1}{2}$, por la regla de adición de momentos angulares sabemos que los posibles valores propios del spin total son $s = 0$, ó $s = 1$. Queremos saber aquí si los estados $Q|\psi\rangle$ y $Q^{+}|\psi\rangle$ tienen spin total definido.

Con nuestros resultados podemos construir la siguiente tabla para los posibles valores de $3 - s(s+1) \pm c$:

Tabla 1

s	c	3 - s(s + 1) - c	3 - s(s - 1) c
0	1	2	4
0	-1	4	2
1	1	0	2
1	-1	2	0

Para un mismo valor de E, j y m identificaremos los estados propios por $|s, c, p\rangle$ donde s, c y p son los valores propios de S^2, $\mathbb{C}$ y P. Sabemos que para que un estado $|\psi\rangle$ sea estado propio de S^2 se debe satisfacer que:

$$S^2|\psi\rangle = s(s+1)|\psi\rangle \qquad 6.6$$

con s entero o semientero, y como no existe esta s que satisfaga $s(s+1)=4$ podemos concluir que:

$$Q|0,-1,p\rangle = 0 \qquad 6.7$$

y

$$Q^{+}|0,1,p\rangle = 0 \qquad 6.8$$

Es decir, son aniquilados al aplicarles una transformación de supersimetría. Para los demás estados podemos escribir:

$$Q|0,1,p\rangle = \alpha|1,-1,-p\rangle \qquad 6.9.1$$

$$Q|1,1,p\rangle = \beta|0,-1,-p\rangle \qquad 6.9.2$$

$$Q|1,-1,p\rangle = \gamma|1,1,-p\rangle \qquad 6.9.3$$

$$Q^{+}|0,-1,p\rangle = \delta|1,1,-p\rangle \qquad 6.9.4$$

$$Q^{+}|1,1,p\rangle = \epsilon|1,-1,-p\rangle \qquad 6.9.5$$

$$Q^{+}|1,-1,p\rangle = \rho|0,1,-p\rangle \qquad 6.9.6$$

donde α, β, γ, δ, ϵ y ρ son números en general complejos y queremos saber cuales son sus posibles valores.

El Hamiltoniano está construido como $H = \frac{1}{2}\{Q, Q^{+}\}$ con lo que podemos ver directamente que:

$$H|0,1,p\rangle = \frac{1}{2}\alpha\rho|0,1,p\rangle \qquad 6.10.1$$

$$H|0,-1,p\rangle = \frac{1}{2}\delta\beta|0,-1,p\rangle \qquad 6.10.2$$

$$H|1,-1,p\rangle = \frac{1}{2}(\alpha\rho+\varepsilon\gamma)|1,-1,p\rangle \qquad 6.10.3$$

$$H|1,1,p\rangle = \frac{1}{2}(\epsilon\gamma+\varepsilon\gamma)|1,-1,p\rangle \qquad 6.10.4$$

Como estos estados tienen energía E podemos concluir:

$$\alpha \rho = 2E \qquad 6.11.1$$

$$\delta \beta = 2E \qquad 6.11.2$$

$$\varepsilon \gamma = 0 \qquad 6.11.3$$

Consideremos estados con energía $E \neq 0$. Sabemos que los operadores Q y Q^+ satisfacen:

$$Q^2 = Q^{+2} = 0 \qquad 6.12$$

por lo que:

$$Q^2 |0, 1, p\rangle = \alpha \gamma |1, 1, p\rangle = 0 \qquad 6.13.1$$

$$Q^{+2} |1, 1, p\rangle = \varepsilon \rho |1, -1, p\rangle = 0 \qquad 6.13.2$$

con lo que concluímos que:

Si nuestros estados están normalizados inicialmente a 1 podemos ver, por ejemplo:

$$\langle 1, 0| Q^+ Q |0, 1\rangle = |\alpha|^2 \langle 1, 0, p | 1, 0, p\rangle = |\alpha|^2 \qquad 6.14$$

Pero por otro lado

$$\langle 1, 0| Q^+ Q |0, 1\rangle = \langle 1, 0, p | Q^+ Q + Q Q^+ |1, 0, p\rangle = 2E. \qquad 6.15$$

con lo que concluímos que:

$$|\alpha|^2 = 2E \qquad 6.16$$

con un resultado similar para ρ, δ y β.

Con una selección adecuada de la fase podemos escri bir:

$$Q|0,1,p\rangle = \sqrt{2E}\,|1,-1,-p\rangle \qquad 6.17.1$$

$$Q^{+}|0,1,p\rangle = 0 \qquad 6.17.2$$

$$Q\,|0,-1,p\rangle = 0 \qquad 6.17.3$$

$$Q^{+}|0,-1,p\rangle = \sqrt{2E}\,|1,1,-p\rangle \qquad 6.17.4$$

$$Q\,|1,1,p\rangle = \sqrt{2E}\,|0,-1,-p\rangle \qquad 6.17.5$$

$$Q^{+}|1,1,p\rangle = 0 \qquad 6.17.6$$

$$Q\,|1,-1,p\rangle = 0 \qquad 6.17.7$$

$$Q^{+}|1,-1,p\rangle = \sqrt{2E}\,|0,1,-p\rangle \qquad 6.17.8$$

Cuando se trabaja con supersimetría en teorías cuánticas del campo, el efecto de una transformación de supersimetría es cambiar el spin de una partícula en cantidades semienteras ($\frac{\hbar}{2}$). Sin embargo en nuestro modelo, que representa la interacción de dos partículas de spin $\frac{1}{2}$, la supersimetría posee la propiedad de cambiar el spin total en cantidades enteras.

7.- COMPORTAMIENTO A LARGO ALCANCE DE LAS FUERZAS NUCLEARES COMO UNA MANIFESTACION DE LA SUPERSIMETRIA EN LA NATURALEZA.

En las teorías cuánticas del campo, la supersimetría ha sido objeto de gran atención, porque entre otras propiedades, posiblemente proporcione un camino natural para unificar la gravedad con las interacciones fuertes, débil y electromagnética. Esta simetría tiene la propiedad de transformar campos fermiónicos en campos bosónicos y viceversa.

Si la supersimetría tiene algo que ver con la naturaleza, debe estar rota, porque no se han observado fermiones y bosones con la misma masa. Las predicciones de muchos de los modelos existentes esperan ser probadas en los aceleradores de altas energías últimamente construidos. Sin embargo se han observado algunos fenómenos que pueden atribuirse a supersimetrías, mediante algunas aplicaciones del rompimiento de estas y que han predicho y confirmado correlaciones inesperadas entre núcleos par-par y par-impar[16].

En esta sección mostraremos que el potencial de largo alcance nucleón-nucleón,[17] es una realización particular del Hamiltoniano supersimétrico 4.20. El potencial nucleón-nucleon es bastante complicado a distancias cortas e intermedias ($r < 2$ fm) debido a efectos de muchas partículas, junto con el hecho de que diferentes tipos de mesones y bosones vectoriales se intercambian entre los núcleos. Sin embargo, el comportamiento a largo alcance del potencial ($r > 3$ fm) es debido-solamente al intercambio de piones, y tiene la forma:

$$V_\pi(r) = \pm 4\,(\bar{\tau}^{(1)}\cdot\bar{\tau}^{(2)})\,\big(V_S(r)\,\bar{S}_1\cdot\bar{S}_2 + (3(\bar{S}_1\cdot\hat{r})(\bar{S}_2\cdot\hat{r}) - \bar{S}_1\cdot\bar{S}_2)\,V_T(r)\big) \qquad 7.1$$

donde $\bar{\tau}^{(1)}$ y $\bar{\tau}^{(2)}$ se refieren al isospin de cada uno de los nucleones. Las funciones V_S y V_T están dadas por ($\hbar = c = 1$):

$$V_S = \frac{\mu}{3}\left(\frac{g^2}{4\pi}\right)\frac{e^{-x}}{x} \qquad 7.2.1$$

$$V_T = \frac{\mu}{3}\left(\frac{g^2}{4\pi}\right)\left(1 + \frac{3}{x} + \frac{3}{x^2}\right)\frac{e^{-x}}{x} \qquad 7.2.2$$

Aquí $x = \mu r$, donde μ es la masa del pión y g es la constante de acoplamiento pión-nucleón. En la ec. 7.1 el signo + en el lado derecho se refiere al potencial para la interacción nucleón-nucleón (o antinucleón-antinucleón), mientras el signo - describe el potencial de interacción nuclón-antinucleón (ref. 18).

Nosotros compararemos el potencial de intercambio de un pión (OPEP) dado por la ec. 7.1 con el potencial correspondiente dado por el Hamiltoniano supersimétrico 4.20.

En primer lugar notemos que el OPEP solamente requiere dos espacios internos diferentes, uno relacionado con el número cuántico bariónico y otro correspondiente al número de isospin. La estructura multiplicativa del operador $\mathbb{C}$ en 4.20 nos lleva a la identificación de cada carga $c^{(a)}$ con el número bariónico de cada nucleón. En su forma actual nuestro modelo supersimétrico no incluye el isospin de una manera natural, y cualquier comparación entre los potenciales 7.1 y 4.20 será hecha para cada canal de isospin: $\tau = (\bar{\tau}^{(1)}\cdot\bar{\tau}^{(2)}) = -3, 1$.

El siguiente paso es identificar los coeficientes de $\bar{S}_1 \cdot \bar{S}_2$ y $(\bar{S}_1 \cdot \hat{r})(\bar{S}_2 \cdot \hat{r})$ definidos en términos de las funciones 7.2 y verificar si se satisfacen las relaciones impuestas por la supersimetría.

Una comparación directa muestra que:

$$\frac{1}{2} V = \tau (V_S - V_T) \qquad 7.3$$

$$r \frac{d}{dr}\left(\frac{1}{2} V\right) = 3 \tau V_T \qquad 7.4$$

y lo que tenemos que determinar es sí esta última relación predicha por la supersimetría es cierta. En términos de la definición 7.3 la relación 7.4 puede ser reescrita como:

$$r \frac{d}{dr} (V_S - V_T) = 3 V_T \qquad 7.5$$

Un cálculo directo usando las expresiones 7.2 muestra que la igualdad 7.5 es exactamente satisfecha, lo que es un resultado sorprendente.

Cuando comparamos los potenciales en las ecs. 4.20 y 7.1 vemos que todavía tenemos el término central $\frac{1}{2} r^2 V^2$ que no está presente en el OPEP. Sin embargo, la elección de 7.3 para el superpotencial hace que el término central sea proporcional a e^{-2x}, el cual es dexpreciable cuando es comparado con los otros términos del potencial que se comportan como e^{-x} en la aproximación de largo alcance.

En la interpretación presentada aquí, la supersimetría está rota como puede verse del potencial nucleón-nucleón completo que liga al deuterón, por lo que no puede ser puede- ser positivo definido como lo implica $H = \frac{1}{2}\{Q, Q^+\}$.

Sería interesante entender las posibles implicaciones de las propiedades exhibidas aquí desde el punto de vista teórico de las teorías de campo, ya que si la predicción de la relación 7.4 no es mera coincidencia, ésta nos dice que la supersimetría es una buena simetría a bajas energías, lo cual no es lo esperado en el tratamiento usual dentro de las teorías supersimétricas[19].

CONCLUSIONES

En este capítulo se cojugan lo que a mi juicio, --- constituyen los dos aspectos más importantes del trabajo desarrollado en este trabajo. Primero, la formulación de la mecánica cuántica a través del principio de acción, nos muestra - la existencia de dos tipos de variables cuánticas con propiedades de conmutación diferentes y segundo, el requerimiento - de invariancia bajo supersimetrías como restricción en la --- construcción de sistemas que incluyen los dos tipos de variables. Hemos introducido la supersimetría como la invariancia ante translaciones en un superespacio. Esto nos permite construir de una manera sistemática acciones clásicas que son supersimetricamente invariantes y que estan construidas a partir de dos tipos diferentes de variables: variables que conmutan y variables que anticonmutan (números de Grassmann) que - corresponden al límite $\hbar \to 0$ de los dos tipos de variables - cuánticas mencionadas arriba. Invirtiendo el proceso es posible entonces cuantizar las variables cuánticas de acuerdo al Principio de Acción convirtiendo a los números que conmutan - en operadores bosónicos y a los números de Grassmann en operadores fermiónicos. Con esto obtenemos una formulación de la - Mecánica Supersimétrica.

El estudio de sistemas unidimensionales nos permitió la comprensión de muchas de las ideas generales que aparecen en supersimetría. Sin embargo estos sistemas se encuentran muy restringidos precisamente por ser unidimensionales.-

Con el objeto de tener una situación física más realista generalizamos el formalismo a tres dimensiones espaciales. En este caso las variables bosónicas (primera clase) estan representadas por los operadores $\bar{r}$ y $\bar{p}$ que interpretaremos como la posición relativa y momento relativo en un sistema de dos partículas.

Las variables fermiónicas (segunda clase) las hemos representado en términos de operadores de spin $\frac{1}{2}$ asociado a cada partícula, Sin embargo para satisfacer el álgebra de dichas variables es necesario introducir además un espacio interno adicional. De este modo el Hamiltoniano construido representa la interacción supersimétrica de dos partículas de spin $\frac{1}{2}$ cada una de las cuales posee un número cuántico adicional asociado a dicho espacio interno. Dicho Hamiltoniano posee términos de interacción central, spin-spin y tensorial. Un posible conjunto de observables esta dado por los operadores H, J^2, J_z, S^2 (spin total), P (paridad) y $\mathbb{C}$ (producto de los números cuánticos internos de cada partícula).

A continuación investigamos la acción de los generadores de supersimetría Q y Q^+ sobre los estados del sistema encontrando como resultados más importantes:

1) Ante una transformación de supersimetría sobre los estados propios del conjunto completo de observables escogido, se conservan la energía, la magnitud del momento angular total .... $\bar{J} = \bar{L} + S$ y su componente en la dirección z, J_z.

2) Cada uno de estos estados es aniquilados ya sea por Q ó por Q^+ .

3) Los números cuánticos restantes si sufren cambios bajo una transformación de supersimetría. La paridad P y la carga $\mathbb{C}$ cambían de signo. En lo que se refiere al Spin total, el efecto de una transformación de supersimetría, cuando no aniquila al estado, es cambiar dicho número cuántico en cantidades de $\pm\hbar$.

Finalmente hemos encontrado que la aproximación de largo alcance para cada canal de isospin del potencial nucleón-nucleón constituye un ejemplo físico de nuestro hamiltoniano, ec. 4.20. En este caso el número cuántico interno de cada partícula corresponde al número bariónico de cada nucleón.

El aspecto más importante de esta identificación es la verificación, en términos de funciones conocidas que caracterizan a este potencial, de una relación entre los coeficientes de las interacciones de spin-spin y tensorial predicha por la supersimetría.

APENDICE I.

SOBRE OPERADORES UNITARIOS

En este apéndice demostraremos el siguiente teorema sobre operadores unitarios utilizado en la sección I.4: "Si dos operadores tienen el mismo espectro, entonces están relacionados por una transformación unitaria".

Consideremos dos cantidades físicas representadas por los operadores hermíticos A y B respectivamente. Podemos representar a estos operadores, si $|a\rangle$ y $|b\rangle$ son sus vectores propios por:

$$A = \sum_{\ell} a_\ell |a_\ell\rangle\langle a_\ell| \qquad \text{A.I.1}$$

y

$$B = \sum_{\ell} b_\ell |b_\ell\rangle\langle b_\ell| \qquad \text{A.I.2}$$

donde a_ℓ y b_ℓ son reales y son los valores propios de A y B.

Los conjuntos $|a_\ell\rangle$ y $|b_\ell\rangle$ forman bases diferentes del espacio de estados. Construyamos los siguientes operadores:

$$U_{ab} = \sum_{\ell} |a_\ell\rangle\langle b_\ell| \qquad \text{A.I.3}$$

y

$$U_{ba} = \sum_{\ell} |b_\ell\rangle\langle a_\ell| \qquad \text{A.I.4}$$

que son tales que:

$$\langle a_\ell| U_{ab} = \langle b_\ell| \ , \quad U_{ab}|b_\ell\rangle = |a_\ell\rangle \qquad \text{A.I.5}$$

$$\langle b_\ell| U_{ba} = \langle a_\ell| , \quad U_{ba}|a_\ell\rangle = |b_\ell\rangle \qquad \text{A.I.6}$$

y que satisfacen:

$$U_{ab}U_{ba} = U_{ba}U_{ab} = \mathbb{1} \quad , \quad U_{ab}^{+} = U_{ba} \qquad A.I.7$$

que implica la propiedad de unitariedad

$$U^{+} = U^{-1} \qquad A.I.8$$

para U_{ab} y U_{ba}.

Ahora, si las dos propiedades A y B poseen el mismo espectro de valores, $a_\ell = b_\ell$, se satisface:

$$B = \sum_\ell b_\ell |b_\ell\rangle\langle b_\ell| = \sum_\ell a_\ell U_{ba} |a_\ell\rangle\langle a_\ell| U_{ab}$$

$$= U_{ba} A U_{ab} \qquad A.I.9$$

Por lo que los dos operadores están conectados por una transformación unitaria.

A nuestro juicio esta última ecuación es importante ya que si A y B representan la misma propiedad a diferentes tiempos en un sistema aislado, sus vectores propios están conectados por una transformación unitaria y entonces aquí vemos claro el porque queremos construir un principio dinámico para la función de transformación a partir de transformaciones unitarias infinitesimales.

APENDICE II

SOBRE LAS MATRICES k_a

El objetivo de este apéndice es demostrar la ec. 7.17, transformando las propiedades de conmutación de las variaciones $\delta \bar{x}_a$ con las variables $\bar{x}$ a la representación de las variables dinámicas x, estando estas relacionadas por una transformación lineal arbitraria:

$$\bar{x} = l x \qquad A.II.1$$

Partiendo de la ec. I.7.16:

$$\delta \bar{x}_a \bar{x}_b = (\bar{k}_a \bar{x})_b \, \delta \bar{x}_a \qquad A.II.2$$

sabemos:

$$\delta \bar{x} = l \, \delta x \qquad A.II.3$$

por lo que:

$$\begin{aligned} \delta \bar{x}_a \bar{x}_b &= \sum_s l_{as} \, \delta x_s \sum_r l_{br} x_r \\ &= \sum_{sr} l_{as} \, l_{br} \, \delta x_s \, x_r \\ &= \sum_{sr} l_{as} \, l_{br} \, (k_s x)_r \, \delta x_s \end{aligned} \qquad A.II.4$$

donde hemos utilizado la ec. I.7.1, entonces:

$$\delta \bar{x}_a \bar{x}_b = \sum_{srt} l_{br} \, l_{as} \, (k_s)_{rt} \, x_t \, \delta x_s \qquad A.II.5$$

por otro lado:

$$(\bar{k}_a \bar{x})_b \, \delta \bar{x}_a = \sum_t (\bar{k}_a)_{bt} \, \bar{x}_t \sum_s l_{as} \, \delta x_s$$

$$= \sum_{str} (\bar{k}_a)_{bt}\, l_{as}\, l_{tr}\, x_r\, \delta x_s \qquad A.II.6$$

por lo que:

$$\sum_{srt} l_{br}\, l_{as}\, (k_s)_{rt}\, x_t\, \delta x_s$$
$$= \sum_{srt} (\bar{k}_a)_{bt}\, l_{as}\, l_{tr}\, x_r\, \delta x_s \qquad A.II.7$$

intercambiando r por t y t por r en el lado derecho tenemos:

$$\sum_{srt} l_{br}\, l_{as}\, (k_s)_{rt}\, x_t\, \delta x_s$$
$$= \sum_{srt} (\bar{k}_a)_{br}\, l_{as}\, l_{rt}\, x_t\, \delta x_s \qquad A.II.8$$

multiplicando por $(l^{-1})_{cb}$ y sumando sobre b en el lado iz-- quierdo de esta última ecuación

$$\sum_{b} (l^{-1})_{cb} \left(\sum_{srt} l_{br}\, l_{as}\, (k_s)_{rt}\, x_t\, \delta x_s \right)$$
$$= \sum_{srt} \delta_{cr}\, l_{as}\, (k_s)_{rt}\, x_t\, \delta x_s$$
$$= \sum_{st} l_{as}\, (k_s)_{ct}\, x_t\, \delta x_s \qquad A.II.9$$

por lo que A.II.8 queda como:

$$\sum_{st} l_{as}\, (k_s)_{ct}\, x_t\, \delta x_s$$
$$= \sum_{srt} \sum_{b} (l^{-1})_{cb} (\bar{k}_a)_{br}\, l_{as}\, l_{rt}\, x_t\, \delta x_s \qquad A.II.10$$

usando:

$$\delta x_s = \sum_{pq} (l^{-1})_{sp}\, l_{pq}\, \delta x_q \qquad A.II.11$$

tenemos:

$$\sum_{pqt} \left(\sum_{s} l_{as}\, (k_s)_{ct}\, (l^{-1})_{sp} \right) l_{pq}\, x_t\, \delta x_q$$
$$= \sum_{pq} \sum_{srt} \sum_{b} (l^{-1})_{cb}\, (\bar{k}_a)_{br}\, l_{rt}\, l_{as}\, (l^{-1})_{sp}\, l_{pq}\, x_t\, \delta x_q \qquad A.II.12.$$

$$\sum_{pqt}\left(\sum_s l_{as}(k_s)_{ct}(l^{-1})_{sp}\right) l_{pq}\, x_t\, \delta x_q = \sum_{pqt} (l^{-1}\bar{k}_a\, l)_{ct}\, \delta_{ap}\, l_{pq}\, x_t\, \delta x_q \qquad \text{A.II. 13.}$$

lo cual podemos escribir como:

$$\sum_{pqt}\left(\sum_s l_{as}\, k_s\, l^{-1}_{sp}\right)_{ct} l_{pq}\, x_t\, \delta x_q = \sum_{pqt} (l^{-1}\bar{k}_a\, l)_{ct}\, \delta_{ap}\, l_{pq}\, x_t\, \delta x_q \qquad \text{A.II.14}$$

Utilizando la ec. I.7.15 obtenemos finalmente:

$$\sum_{pqt}\left(\sum_s l_{as}\, k_s\, l^{-1}_{sp}\right)_{ct} l_{pq}\, x_t\, \delta x_q = \sum_{pqt} (l^{-1}\bar{k}_a\, l)_{ct}\, \delta_{ap}\, l_{pq}\, x_t\, \delta x_q \qquad \text{A.II.15}$$

como l y δx_q son arbitrarias y las variables χ_t son independientes obtenemos finalmente la ec. I.7.17:

$$\sum_s l_{as}\, k_s\, (l^{-1})_{sp} = k_a\, \delta_{ap} \qquad \text{A.II.16}$$

APENDICE III

FORMAS BILINEALES[20]

En este apéndice, usaremos resultados del álgebra lineal para demostrar que siempre es posible construir una base del espacio en donde las matrices ∂ y α introducidas en las secciones I.8 y I.9 puedan escribirse en la formulación canónica para las variables de primera y segunda clase. El objetivo aquí es entonces presentar de una manera clara la teoría que nos permite lograr esto y como utilizar estos teoremas dentro del contexto del capítulo I.

1. Formas Bilineales

Definición. Sea V un espacio vectorial sobre el campo F. Una forma bilineal en V es una función que asigna a cada par ordenado de vectores α, β en V un escalar $f(\alpha,\beta)$ en F, tal que se satisface:

$$f(c\alpha_1 + \alpha_2, \beta) = c\,f(\alpha_1, \beta) + f(\alpha_2, \beta) \qquad \text{A.III.1}$$

$$f(\alpha, c\beta_1 + \beta_2) = c\,f(\alpha, \beta_1) + f(\alpha, \beta_2) \qquad \text{A.III.2}$$

Podemos ver que el conjunto de todas las formas bilineales en V es un subespacio del espacio de las funciones de $V \times V$ en F. Denotaremos éste espacio de formas bilineales en V por L(V,V,F).

Ahora, sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre el campo F y sea $B = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ una base ordenada para V. Supongamos que f es una forma bilineal en V. Si

$$\alpha = x_1\alpha_1 + \ldots + x_n\alpha_n \quad \text{y} \quad \beta = y_1\alpha_1 + \ldots + y_n\alpha_n \qquad \text{A.III.3}$$

son vectores en V, entonces

$$f(\alpha,\beta) = f\left(\sum_i x_i\alpha_i,\beta\right)$$
$$= \sum_i x_i\, f(\alpha_i,\beta)$$
$$= \sum_i x_i\, f\left(\alpha_i,\sum y_j\alpha_j\right)$$
$$= \sum_i \sum_j x_i y_j\, f(\alpha_i,\alpha_j) \qquad \text{A.III.4}$$

Si definimos $A_{ij}=f(\alpha_i,\alpha_j)$, entonces

$$f(\alpha,\beta) = \sum_i \sum_j A_{ij}\, x_i y_j$$
$$= X^T A Y \qquad \text{A.III.5}$$

donde X e Y son las matrices coordenadas de α y β en la base ordenada B. Por lo que cualquier forma bilineal en V es del tipo.

$$f(\alpha,\beta) = [\alpha]^t_B\, A\, [\beta]_B \qquad \text{A.III.6}$$

para alguna matriz A de n x n sobre F. Para nuestros propósitos es importante notar, de que si tenemos una matriz A de n x n podemos ver que la ec. A.III.6 define una forma bilineal f en V, tal que

Definición. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre el campo F. Para cada base ordenada B de V, la función que asocia a cada forma bilineal en V su matriz en la base ordenada B es un isomorfismo del espacio L(V,V,F) sobre el espacio de las matrices de n n definidas sobre el campo F

Dem. Observamos lineas arriba que $f \to [f]_B$ es una co rrespondencia uno a uno entre el conjunto de formas bilineales en V y el conjunto de las matrices de $n \times n$ sobre F. Veamos que es una transformación lineal, de

$$(cf+g)(\alpha_i,\alpha_j) = cf(\alpha_i,\alpha_j) + g(\alpha_i,\alpha_j)$$

para cada i y j. Esto nos dice simplemente que

$$[cf+g]_B = c[f]_B + [g]_B$$

Estaremos interesados en que le sucede a la matriz que representa a una forma bilineal, cuando cambiamos de una base ordenada a otra. Supongamos que $B=\{\alpha_1,\dots,\alpha_n\}$ y $B'=\{\alpha'_1,\dots,\alpha'_n\}$ son dos bases ordenadas de V y que f es una forma bilineal en V. La pregunta ahora es ¿ Como están las matrices $[f]_B$ y $[f]_{B'}$ relacionadas? Sea P la matriz (invertible) de $n \times n$ tal que

$$[\alpha]_B = P[\alpha]_{B'} \qquad \text{A.III.7}$$

para todo α en V. Para cualesquiera vectores α, β en V

$$\begin{aligned} f(\alpha,\beta) &= [\alpha]_B^T\,[f]_B\,[\beta]_B \\ &= (P[\alpha]_{B'})^T [f]_B\, P[\beta]_{B'} \\ &= [\alpha]_{B'}^T\,(P^T[f]_B P)\,[\beta]_{B'} \end{aligned} \qquad \text{A.III.8}$$

Por la definición y la unicidad de la matriz que representa a f en la base ordenada B', debemos tener:

$$[f]_{B'} = P^T[f]_B P \qquad \text{A.III.9}$$

Una consecuencia de ésta ecuación, es la siguiente: si A y B son matrices de $n \times n$ que representan a la misma forma bilineal en V en diferentes base, entonces A y B tienen el mismo rango. Esto es, si P es una matriz invertible de $n \times n$ y $B = P^T AP$ es evidente que A y B tienen el mismo rango. Esto hace posible las siguientes definiciones.

Definición. El rango de una forma bilineal es igual al rango de la matriz de la forma en cualquier base ordenada.

Definición. Una forma bilineal f en un espacio vectorial V de dimensión n es no singular si, rango $(f) = n$

2. Formas Bilineales Simétricas

El objeto principal de ésta sección es responder la siguiente pregunta: ¿ Si f es una forma bilineal sobre el espacio vectorial V de dimensión finita, cuando existe una base ordenada B en V tal que f esta representada por una matriz diagonal.

El teorema básico para lograr esto se presenta en casi todos los libros de álgebra lineal y es ampliamente conocido por lo que solo enunciaremos los resultados principales.

Definición. Sea f una forma bilineal en el espacio V. Decimos que f es simétrica si $f(\alpha,\beta) = f(\beta,\alpha)$ para cualquier par de vectores α , β en V.

Si V es de dimensión finita, la forma bilineal ' es simétrica si y solo si su matriz A en cualquier base ordenada es simétrica: $A^T = A$.

Teorema 2. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre un subcampo de los números complejos, y sea f una forma bilineal simétrica sobre V. Entonces existe una base ordenada para V en donde f está representada por una matriz diagonal.

Corolario. Sea F un subcampo de los números complejos, y sea A una matriz simétrica de $n \times n$ sobre F. Entonces existe una matriz P invertible sobre F tal que $P^T AP$ es diagonal. Pasemos ahora al teorema que aplicamos en la sección ... I.9.

Teorema 3. Sea V un espacio vectorial de dimensión n sobre los números complejos. Sea f una forma bilineal simétrica en V con rango r. Entonces existe una base ordenada ... $B = \{\beta_1, \ldots, \beta_n\}$ para V tal que:

i) La matriz asociada a f en la base ordenada B es diagonal,

ii)

$$f(\beta_j, \beta_j) = \begin{cases} 1, & j = 1, \ldots, r \\ 0, & j > r \end{cases}$$

Dem. Por el teorema 2, existe una base ordenada .. $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ para V tal que

$$f(\alpha_i, \alpha_j) = 0 \quad \text{para} \quad i \neq j$$

Como f tiene rango r, su matriz en la base ordenada $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ también. Por lo que debemos tener $f(\alpha_j, \alpha_j) \neq 0$ para r valores diferentes de j. Reordenando los vectores α_j, podemos suponer que

$$f(\alpha_j, \alpha_j) \neq 0 \quad , \quad j = 1, \ldots, r$$

si $\sqrt{f(\alpha_j,\alpha_j)}$ denota cualquier raíz compleja de $f(\alpha_j,\alpha_j)$, y si- definimos

$$\beta_j = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{f(\alpha_j,\alpha_j)}}\,\alpha_j & j = 1,\ldots,r \\ \alpha_j \quad , & j > r \end{cases}$$

la base $\{\beta_1,\ldots,\beta_n\}$ satisface las condiciones (i) y (ii).

3. Formas Bilineales Antisimétricas

En esta sección V será un espacio vectorial sobre - un subcampo F del campo de los números complejos.

Definición. Una forma bilineal f en V se llama antisimétrica si $f(\alpha,\beta) = -f(\beta,\alpha)$ para cualesquiera par de vectores α , β en V.

Probaremos aquí el siguiente teorema concerniente a la simplificación de la matriz de una forma bilineal antisimétrica para un espacio vectorial V de dimensión finita.

Teorema 4. Sea V un espacio vectorial de dimensión- n sobre un subcampo de los números complejos, y sea f una - forma bilineal antisimétrica en V. Entonces el rango de f es par y si $r = 2k$ existe una base ordenada para V en donde la matriz de f es la suma directa de la matriz cero de .... $(n - r)\times(n - r)$ y k copias de la matriz de 2×2

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Primero hagamos las siguientes observaciones, la -- forma bilineal f es antisimétrica si y solo si su matriz A en cualquier base ordenada es antisimétrica, $A^T = -A$. Cuando f es antisimétrica, la matriz de f en cualquier base ordenada-

tendrá los elementos de su diagonal igual a 0 ya que ..... .
$f(\alpha,\alpha) = -f(\alpha,\alpha)$ para todo α en V.

Supongamos que f es una forma bilineal antisimétrica diferente de cero en V. Como $f \neq 0$, existen vectores α, β en V tal que $f(\alpha,\beta) \neq 0$. Multiplicando α por un escalar conveniente, podemos suponer que $f(\alpha,\beta)=1$. Sea $\gamma = c\alpha + d\beta$ en el espacio generado por α y β. Entonces,

$$f(\gamma,\alpha) = f(c\alpha + d\beta, \alpha) = d\, f(\beta,\alpha) = -d$$

$$f(\gamma,\beta) = f(c\alpha + d\beta, \beta) = c\, f(\alpha,\beta) = c \qquad \text{A.III.10}$$

por lo que:

$$\gamma = f(\gamma,\beta)\alpha - f(\gamma,\alpha)\beta \qquad \text{A.III.11}$$

en particular, notamos que α y β son necesariamente linealmente independientes, por lo que si $\gamma = 0$, entonces ......
$f(\gamma,\alpha) = f(\gamma,\beta) = 0$.

Sea W el subespacio de dimensión 2 generado por α y β. Sea $W^{\perp}$ el conjunto de todos los vectores δ en V tales que $f(\delta,\alpha) = f(\delta,\beta) = 0$.

Afirmamos que $V = W \oplus W^{\perp}$. Sea ϵ un vector en V, y

$$\gamma = f(\epsilon,\beta)\alpha - f(\epsilon,\alpha)\beta \qquad \text{A.III.12}$$

$$\delta = \epsilon - \gamma \qquad \text{A.III.13}$$

Entonces γ esta en W, y δ en $W^{\perp}$ porque

$$\begin{aligned} f(\delta,\alpha) &= f(\epsilon - f(\epsilon,\beta)\alpha + f(\epsilon,\alpha)\beta, \alpha) \\ &= f(\epsilon,\alpha) + f(\epsilon,\alpha)\, f(\beta,\alpha) \\ &= 0 \end{aligned} \qquad \text{A.III.14}$$

y similarmente $f(\delta,\beta)$. Por lo que cualquier ϵ en V es de la forma $\epsilon=\gamma+\delta$ con γ en W y δ en $W^{\perp}$. De la ec. A.III.11 es claro que $W \cap W^{\perp} = \{0\}$ por lo que $V = W \oplus W^{\perp}$.

Ahora la restricción de f a $W^{\perp}$ es una forma bilineal antisimétrica en $W^{\perp}$. Esta restricción puede ser la forma cero. Si no lo es, existen vectores α' y β' en $W^{\perp}$ tales que $f(\alpha',\beta') = 1$. Si W' es el subespacio generado por α' y β' , debemos tener:

$$V = W \oplus W' \oplus W_0 \qquad \text{A.III.15}$$

donde W_o es el conjunto de todos los vectores δ en $W^{\perp}$ tales que $f(\alpha',\delta)=f(\beta',\delta)=0$. Si la restricción de f a W_o no es la forma cero, podemos seleccionar vectores α'' , β'' en W_o tales que $f(\alpha'',\beta'')=1$, y continuar la factorización.

En el caso de dimensión finita es claro que obtenemos una sucesión finita de pares de vectores,

$$(\alpha_1,\beta_1),\ (\alpha_2,\beta_2),\ldots,\ (\alpha_k,\beta_k) \qquad \text{A.III.16}$$

con las siguientes propiedades:

i) $f(\alpha_j,\beta_j)=1$; j 1,...,k

ii) $f(\alpha_i,\alpha_j) = f(\beta_i,\beta_j) = f(\alpha_i,\beta_j) = 0$, $i \neq j$

iii) Si W_j es el subespacio de dimensión 2 generado por α_j y β_j , entonces

$$V = W_1 \oplus \ldots \oplus W_k \oplus W_0 \qquad \text{A.III.17}$$

donde todo vector en W_o es ortogonal a todos los α_j y β_j y la restricción de f a W_o es la forma cero.

Dem. del teorema 4. Sean $\alpha_1, \beta_1, \ldots, \alpha_k, \beta_k$ que- satisfacen las condiciones (i),(ii),(iii) anteriores y sea — $\{\gamma_1, \ldots, \gamma_s\}$ cualquier base ordenada del subespacio W_0. Entonces

$$B = \{\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \ldots, \alpha_k, \beta_k, \gamma_1, \ldots, \gamma_s\}$$

es una base ordenada para V. De (i), (ii), (iii) es claro que la matriz de f en la base ordenada B es la suma directa de - la matriz 0 de $(n - r) \times (n - r)$ y k copias de la matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

y que el rango de la matriz y por tanto el de f es 2k.

Utilizando la notación del capítulo II y con la --- existencia de las bases descritas por los teoremas 3 y 4 podemos encontrar transformaciones lineales de las variables de - primera y segunda clase z y ζ respectivamente en donde- las nuevas variables tienen la forma canónica.

Por ejemplo para las variables de primera clase z, podemos encontrar una matriz P tal que

$$P^T \partial P = D \qquad A.III.18$$

donde D es la matriz descrita por el teorema 4 (recordemos -- que ∂ es no singular) y que el término cinético en el Lagrangiano para estas variables lo podemos escribir:

$$z^T \partial z = z^T P^{T^{-1}} D P^{-1} \frac{dz}{dt}$$

$$= (P^{-1} z)^T D \frac{d}{dt}(P^{-1} z) \qquad A.III.19$$

donde vemos que si $Q = P^{-1}$, $Q\mathfrak{z}$ es la transformación de las va riables que nos lleva a la descripción canónica. Teniendo un- tratamiento similar para las variables de segunda clase.

APENDICE IV

ESPECTRO DE ENERGIAS DEL OSCILADOR ARMONICO

Mostraremos en este apéndice como es posible obtener a través del formalismo del principio variacional el espectro de energías para un sistema dado. En general esta es una tarea complicada para un sistema arbitrario, sin embargo, mostraremos como es posible lograr esto para el caso del oscilador armónico.

Consideremos el oscilador armónico descrito por el Hamiltoniano:

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 q^2 \qquad \text{A.IV.1}$$

escalemos las variables de acuerdo con:

$$Q = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\, q \qquad \text{A.IV.2.1}$$

$$P = \frac{1}{\sqrt{m\omega\hbar}}\, p \qquad \text{A.IV.2.1}$$

las cuales al substituirlas en la ec. A.IV.1 nos resultan en

$$H = \hbar\omega H' \qquad \text{A.IV.3}$$

con:

$$H' = \frac{1}{2}(Q^2 + P^2) \qquad \text{A.IV.4}$$

haciendo un cambio a variables no hermíticas y , y^+ tenemos:

$$y = 2^{-\frac{1}{2}}(Q + iP) \qquad \text{A.IV.5.1.}$$

y

$$y^{+} = 2^{-\frac{1}{2}}(Q - iP) \qquad \text{A.IV.5.2}$$

podemos escribir entonces:

$$H = \hbar\omega\left(y^{+}y + \tfrac{1}{2}\right) \qquad \text{A.IV.6}$$

Trabajaremos con $\hat{H} = \hbar\omega y^{+}y$ ya que las funciones propias de $\hat{H}$ también lo son de H.

Esta forma de transformar al Hamiltoniano es particular del oscilador armónico y permite un tratamiento más sencillo, en esta descripción, para encontrar las funciones propias del Hamiltoniano y el espectro de energías.

Queremos obtener entonces la función de transformación $\langle y^{+\prime} t_1 | y'' t_2\rangle$ (donde y'' y $y^{+\prime}$ son los valores propios de los operadores y y y^{+} a los tiempos t_1, t_2 respectivamente), es decir:

$$y|y'' t_2\rangle = y''|y'' t_2\rangle \qquad \text{A.IV.7.1}$$

$$\langle y^{+\prime} t_1| y^{+} = \langle y^{+\prime} t_1| y^{+\prime} \qquad \text{A.IV.7.2}$$

para lo cual es necesario encontrar los generadores de transformaciones en estas variables G_y y G_{y^+} así como las ecs. de movimiento

a. Obtención de las ecs. de movimiento y los generadores.

Transformemos el Lagrangiano:

$$\begin{aligned} L &= P\cdot\frac{dQ}{dt} - \hat{H}(Q, P, t) \\ &= \frac{1}{2}\left(P\frac{dQ}{dt} + \frac{dQ}{dt}P\right) - \hat{H}(Q, P, t) \end{aligned} \qquad \text{A.IV.8}$$

a la descripción en las variables y , y^{+} .

Es directo:

$$Q = 2^{-\frac{1}{2}} (y + y^{+}) \qquad \text{A.IV.9.1}$$

$$P = \frac{2^{-\frac{1}{2}}}{i} (y - y^{+}) \qquad \text{A.IV.9.2}$$

por lo que:

$$P \cdot \frac{dQ}{dt} = \frac{1}{4i} \left(y \frac{dy}{dt} + y \frac{dy^{+}}{dt} - y^{+} \frac{dy}{dt} - y^{+} \frac{dy^{+}}{dt} + \frac{dy}{dt} y - \frac{dy}{dt} y - \frac{dy}{dt} y^{+} + \frac{dy^{+}}{dt} y - \frac{dy^{+}}{dt} \right) \qquad \text{A.IV.10}$$

Usando la libertad que tenemos de agregar o quitar derivadas totales al Lagrangiano, podemos escribir:

$$P \cdot \frac{dQ}{dt} = \frac{1}{4i} \left(y \frac{dy^{+}}{dt} - y^{+} \frac{dy}{dt} - \frac{dy}{dt} y^{+} + \frac{dy}{dt} y \right) \qquad \text{A.IV.11.}$$

Si ahora agregamos la derivada total:

$$- \frac{d}{dt} (y y^{+} + y^{+} y) \qquad \text{A.IV.12}$$

tenemos:

$$P \cdot \frac{dQ}{dt} = - \frac{1}{2i} \left(\frac{dy}{dt} y^{+} + y^{+} \frac{dy}{dt} \right) = i y^{+} \cdot \frac{dy}{dt} \qquad \text{A.IV.13}$$

y el Lagrangiano queda como:

$$L = i y^{+} \cdot \frac{dy}{dt} - \hat{H} (y, y^{+}, t) \qquad \text{A.IV.14.}$$

Ahora debemos calcular:

$$\delta\left(\int_{t_2}^{t_1} dt\, L\right) = \delta\left(\int_{t_2}^{t_1} dt\,\left(i\, y^{+}\cdot \frac{dy}{dt} - \hat{H}\right)\right) \qquad \text{A.IV.15}$$

Si observamos que:

$$\delta\left(\frac{i}{2}\left(\frac{dy}{dt}\,y^{+} + y^{+}\frac{dy}{dt}\right) - \hat{H}\,dt\right)$$

$$= d\left(i\, y^{+}\delta y - \hat{H}\,\delta t\right) + i\,\delta y^{+} dy - i\, dy^{+}\delta y$$

$$- \delta H\, dt + dH\,\delta t \qquad \text{A.IV.16}$$

para que la variación en A.IV.15 sea una diferencial total -
se necesita:

$$i\,\delta y^{+} dy - i\, dy^{+}\delta y - \delta\hat{H}\,dt + d\hat{H}\,\delta t = 0 \qquad \text{A.IV.17}$$

lo que implica:

$$\delta\hat{H} = i\,\frac{dy}{dt}\,\delta y^{+} - i\,\frac{dy^{+}}{dt}\,\delta y + \frac{dH}{dt}\,\delta t \qquad \text{A.IV.18}$$

pero sabemos que:

$$\delta\hat{H} = \frac{\partial\hat{H}}{\partial y^{+}}\,\delta y^{+} + \frac{\partial\hat{H}}{\partial y}\,\delta y + \frac{\partial H}{\partial t}\,\delta t \qquad \text{A.IV.19}$$

A partir de estas dos últimas ecuaciones obtenemos las ecuaciones de movimiento:

$$i\,\frac{dy}{dt} = \frac{\partial H}{\partial y^{+}} \qquad \text{A.IV.20.1}$$

$$-i\,\frac{dy}{dt} = \frac{\partial H}{\partial y} \qquad \text{A.IV.20.2}$$

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} \qquad \text{A.IV.20.3}$$

y regresandonos a la ec. A.IV.15 obtenemos:

$$\delta\left[\int_{t_2}^{t_1} dt\, L\right] = i\, y^{+}\delta y - H\,\delta t\Big|_{t_2}^{t_1} \qquad \text{A.IV.21}$$

Esta expresión es correcta para el tiempo t_2 donde $\delta y(t_2)=\delta y''$ si recordamos que queremos calcular la función de transformación $\langle y^{+\prime} t_1 | y'' t_2\rangle$; pero para el tiempo t_1 queremos el estado en la descripción dada por $y^{+\prime}$, por lo que la ec.-A.IV.21 no es la descripción adecuada al tiempo t_1. Es fácil arreglar esto agregando al Lagrangiano una derivada total -- con respecto al tiempo:

$$\tilde{L} = L + \frac{d}{dt}\left(-i\, y^{+}(t_1)\, y(t_1)\, \frac{t}{t_1 - t_2}\right) \qquad \text{A.IV.22}$$

con lo que se obtiene:

$$\delta\left[\int_{t_2}^{t_1} L\, dt\right] = -i\,\delta y_1^{+}\, y_1 - i\, y_2^{+}\,\delta y_2 - H\,\delta(t_1 - t_2) \qquad \text{A.IV.23}$$

La función de transformación buscada satisface entonces:

$$\begin{aligned}\delta\langle y^{+\prime} t_1 | y'' t_2\rangle &= i\,\langle y^{+\prime} t_1 | G_1 - G_2 | y'' t_2\rangle \\ &= i\,\langle y^{+\prime} t_1 | -i\, y_1\,\delta y_1^{+} - i\, y_2^{+}\,\delta y_2 - \hat{H}\,\delta(t_1 - t_2) | y'' t_2\rangle \qquad \text{A.IV.24}\end{aligned}$$

y podemos identificar los generadores:

$$G_{y_1^{+}} = -i\, y_1\,\delta y_1^{+} \qquad \text{A.IV.25.1}$$

$$G_{y_2} = -i\, y_2^{+}\,\delta y_2 \qquad \text{A.IV.25.2}$$

b. Algunas funciones de Transformación

Para calcular la función de transformación .... $\langle y^{+'} t_1 | y' t_2 \rangle$, especificamente su condición de normalización, - es necesario calcular algunas funciones de transformación adicionales.

Los vectores $|y' t\rangle$ están relacionados con los vectores $|q' t\rangle$ por la función de transformación $\langle q' t | y' t \rangle$ que satisface la ecuación diferencial:

$$\delta \langle q' t | y' t \rangle = i \langle q' t | G_q - G_y | y' t \rangle \qquad \text{A.IV.26}$$

Se puede ver directamente que podemos escribir los generadores G_q y G_y como:

$$i\, G_q = (2^{\frac{1}{2}} y - q)\, \delta q \qquad \text{A.IV.27.1}$$

y

$$-i\, G_y = (2^{\frac{1}{2}} q - y)\, \delta y \qquad \text{A.IV.27.2}$$

como estamos a un mismo tiempo podemos aplicar los operadores q y y directamente en la ec. A.IV.26, con lo que obtenemos:

$$\delta \langle q' t | y' t \rangle = \left[\delta q' (2^{\frac{1}{2}} y' - q') + (2^{\frac{1}{2}} - y')\, \delta y' \right] \langle q' t | y' t \rangle$$

$$= \delta \left(-\tfrac{1}{2} q'^2 + 2^{\frac{1}{2}} y' q' - \tfrac{1}{2} y'^2 \right) \langle q' t | y' t \rangle \qquad \text{A.IV.28}$$

lo que implica:

$$\langle q' t | y' t \rangle = C \exp\left(-\tfrac{1}{2} q'^2 + 2^{\frac{1}{2}} y' q' - \tfrac{1}{2} y'^2 \right) \qquad \text{A.IV.29}$$

Dado que el adjunto de la ecuación

$$y | y' \rangle = y' | y' \rangle \qquad \text{A.IV.30}$$

es la ecuación:

$$\langle y^{+\prime\prime} | y^{+} = \langle y^{+\prime} | y^{+\prime} \qquad \text{A.IV.31}$$

concluímos que:

$$y^{\prime +} = \qquad \text{A.IV.32}$$

lo cual utilizamos en:

$$\begin{aligned}\langle y^{+\prime} t | y'' t \rangle &= \int \langle y^{+\prime} t | q' t \rangle \, dq' \langle q' t | y'' t \rangle \\ &= |c|^2 \int e^{(-\frac{1}{2} q'^2 + 2^{\frac{1}{2}} y^{+\prime} q' - \frac{1}{2} y^{+\prime 2})} e^{(-\frac{1}{2} q'^2 + 2^{\frac{1}{2}} q' y'' - \frac{1}{2} y''^2)} dq' \\ &= |c|^2 e^{y^{+\prime} y''} \int e^{-(q' - 2^{\frac{1}{2}} (y^{+\prime} + y''))^2} dq' \\ &= |c|^2 \pi^{\frac{1}{2}} e^{y^{+\prime} y''} \end{aligned} \qquad \text{A.IV.33}$$

Notemos que la norma de los vectores $\langle y^{+\prime} t|$ y $|y' t\rangle$ depende del valor propio, por lo que escojamos, para $y' = 0$

$$\langle y^{+\prime} t | y' t \rangle = 1 = |c|^2 e^{0} \pi^{1/2} \qquad \text{A.IV.34}$$

con lo que determinamos el valor de la constante:

$$|c|^2 = \pi^{-\frac{1}{2}} \qquad \text{A.IV.35}$$

y escogiendo la fase para C, podemos escribir

$$\langle y^{+\prime} t | y'' t \rangle = e^{y^{+\prime}} e^{y''} = e^{|y'|^2} \qquad \text{A.IV.36}$$

c. Cálculo del espectro de Energía

Tenemos al fin todos los elementos para calcular - el espectro del oscilador, pero antes de seguir recordemos - que precisamente hemos escogido esta descripción en las va--

riables y', $y^{+'}$, porqué es en esta donde, como veremos, es fácil obtener los valores propios de la energía.

De las ecs. de movimiento ($\hbar = 1$):

$$\frac{\partial \hat{H}}{\partial y^+} = \omega y \qquad \text{A.IV.37.1}$$

$$\frac{\partial \hat{H}}{\partial y} = \omega y^+ \qquad \text{A.IV.37.2}$$

Por lo tanto:

$$i \frac{dy}{dt} = \omega y \qquad \text{A.IV.38.1}$$

$$-i \frac{dy^+}{dt} = \omega y^+ \qquad \text{A.IV.38.2}$$

que junto con las condiciones $y(t_2) = y_2$, $y^+(t_1) = y_1^+$ nos permiten escribir:

$$y_1 = e^{-i\omega(t_1 - t_2)} y_2 \qquad \text{A.IV.39.1}$$

$$y_1^+ = e^{i\omega(t_1 - t_2)} y_2^+ \qquad \text{A.IV.39.2}$$

Observando que:

$$\hat{H} = \omega y_1^+ y_1 = \omega y_2^+ y_2 = \omega y_1^+ e^{-i\omega(t_1 - t_2)} y_2 \qquad \text{A.IV.40}$$

por lo que utilizando las ecs. A.IV.34 en A.IV.24, tenemos:

$$\delta \langle y^{+'} t_1 | y'' t_2 \rangle = i \langle y^{+'} t_1 | -i\, e^{-i\omega T} \delta y_1^+ y_2 - i\, e^{-i\omega T} y_1^+ \delta y_2 - \omega y_1^+ e^{i\omega T} y_2 \delta T | y'' t_2 \rangle$$

$$= i \left[-i\, y'' e^{-i\omega T} \delta y^+ - i\, e^{-i\omega T} y^{+'} \delta y - \omega y^{+'} e^{-i\omega T} y'' \delta T \right] \langle y^{+'} t_1 | y'' t_2 \rangle \qquad \text{A.IV.41}$$

donde T $t_1 - t_2$, que podemos escribir como:

$$\delta \ln \langle y^{+\prime} t_1 | y'' t_2 \rangle = C\, e^{y^{+\prime} e^{-i\omega T} y''} \qquad \text{A.IV.42}$$

Ahora, de A.IV.35 sabemos:

$$\lim_{t_1 \to t_2} \langle y^{+\prime} t_1 | y'' t_2 \rangle = e^{y^{+\prime} y''} \qquad \text{A.IV.43}$$

por lo que $C = 1$ y entonces

$$\langle y^{+\prime} t_1 | y'' t_2 \rangle = e^{y^{\prime} e^{-i\omega T} y''} \qquad \text{A.IV.44}$$

De aquí podemos calcular el espectro de energías y las funciones propias de y y de y^+ de la manera siguiente, como:

$$\langle y^{+\prime} t_1 | y'' t_2 \rangle = \langle y^{+\prime} t_2 | e^{-i\hat{H}T} | y'' t_2 \rangle$$

$$= \sum_E \langle y^{+\prime} t_2 | E \rangle\, e^{iET} \langle E | y'' t_2 \rangle \qquad \text{A.IV.45}$$

donde E y $|E\rangle$ son la energía y los estados propios de $\hat{H}$. Pero esto es igual a:

$$e^{y^{+\prime} e^{i\omega T} y''} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(y^{+\prime} e^{-i\omega T} y'')^n}{n!}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{+\prime n}}{\sqrt{n!}}\, e^{-in\omega T}\, \frac{y''^{n}}{\sqrt{n!}} \qquad \text{A.IV.46}$$

por lo que comparandolas ecs. A.IV.45 y A.IV.46 vemos que:

$$E_n = n\omega\hbar \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \qquad \text{A.IV.47}$$

con lo que llegamos al resultado ya conocido para la energía del oscilador armónico:

$$E = (n + \tfrac{1}{2})\hbar\omega \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \qquad \text{A.IV.48}$$

Con esto hemos ejemplificado la manera de obtener - el espectro de enrgías a partir del conocimiento de la fun-- ción de transformación, la cual contiene toda la información sobre el sistema.

APENDICE V

La función de transformación para el oscilador armónico amortiguado con una frecuencia dependiente del tiempo sobre el cual actúa una fuerza perturbativa también dependiente del tiempo ya ha sido resuelta anteriormente aplicando métodos generales para la construcción de la función de Green del sistema basándose en el uso de integrales de movimiento para sistemas cuánticos[9,10].

El objetivo que perseguimos en éste apéndice es mostrar que nuestro resultado obtenido en el capítulo II,ec. II.3.21, es el mismo que el reportado en la literatura, con lo que comprobamos la validez del método.

a. Resultado de D.C. Khandekar y S.V. Lawande (K & L)

A partir del cálculo de una constante de movimiento y mediante una transformación canónica estos autores obtienen la siguiente expresión para la función de transformación:

$$\langle q_1' t_1 | q_2' t_2 \rangle = \frac{e^{\frac{r}{4}(t_1+t_2)}}{\sqrt{2\pi i \rho_1 \rho_2 \operatorname{sen}(\mu_1-\mu_2)}}$$

$$\times \exp\left\{ \frac{i}{2\hbar} \left[q_1'^2 \left\{ e^{rt_1}\left(\frac{\dot{\rho}_1}{\rho_1} - \frac{r}{2} \right) + \frac{e^{rt_1}}{\rho_1^2} \frac{\cos(\mu_1-\mu_2)}{\operatorname{sen}(\mu_1-\mu_2)} \right\} \right.\right.$$

$$\left.\left. + q_2'^2 \left\{ - e^{rt_2}\left(\frac{\dot{\rho}_2}{\rho_2} - \frac{r}{2} \right) + \frac{e^{rt_2}}{\rho_2^2} \frac{\cos(\mu_1-\mu_2)}{\operatorname{sen}(\mu_1-\mu_2)} \right\} \right] \right\}$$

$$\times \exp\left\{\frac{i}{2\hbar}\left[q_1' \left\{ \frac{2 U_1 e^{\frac{rt_1}{2}}}{\rho_1} + \frac{2 e^{\frac{rt_1}{2}}}{\rho_1} V_1 \frac{\cos(\mu_1-\mu_2)}{\operatorname{sen}(\mu_1-\mu_2)} \right.\right.\right.$$

$$- \frac{2 e^{r\frac{t_1}{2}}}{\rho_1} \frac{V_2}{\operatorname{sen}(\mu_1-\mu_1)} + q_2 \left\{ -2 \frac{U_2 e^{\frac{rt_2}{2}}}{\rho_2} + \frac{2V_2 e^{\frac{rt_2}{2}}}{\rho_2} \frac{\cos(\mu_1-\mu_2)}{\operatorname{sen}(\mu_1-\mu_2)} \right.$$

$$\left.\left.\left. - \frac{2 e^{rt_2}}{\rho_2} \frac{V_1}{\operatorname{sen}(\mu_1-\mu_2)} \right\}\right]\right\}$$

$$\times \exp\left\{ \frac{i}{2\hbar}\left[-2 q_1' q_2' \frac{e^{\frac{r}{2}(t_1+t_2)}}{\rho_1 \rho_2} \frac{1}{\operatorname{sen}(\mu_1-\mu_2)} \right]\right\}$$

$$\times \exp\left\{ \frac{i}{2\hbar}\left\{ -\int_{t_2}^{t_1} \frac{U^2-V^2}{\rho^2}\, dt + (V_1^2+V_2^2) \frac{\cos(\mu_1-\mu_2)}{\operatorname{sen}(\mu_1-\mu_2)} \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{2V_1V_2}{\operatorname{sen}(\mu_1-\mu_2)} \right\}\right\}$$

A. V. 1

Aquí $\rho(t)$ y $\mu(t)$ satisfacen las ecs.

$$\ddot{\rho} + \Omega^2(t)\rho - \rho^{-3} = 0 \qquad \text{A. V. 2.1}$$

$$\rho^2 \dot{\mu} = 1 \qquad \text{A. V. 2.2}$$

y

$$\Omega^2 = \omega^2(t) - \frac{r^2}{4} \qquad \text{A. V. 3.1}$$

$$U(t) = \int_{t_2}^{t} e^{\frac{r\tau}{2}} f(\tau)\rho(\tau)\cos(\mu(\tau)-\mu(t))\, d\tau$$

A.V 3.2

$$V(t)=\int_{t_2}^{t} e^{\frac{r\tau}{2}}\, f(\tau)\, \rho(\tau)\, \mathrm{sen}\,(\mu(\tau)-\mu(t))\, d\tau \qquad \text{A.V.3.3}$$

Donde $\omega(t)$ es la frecuencia, el factor de amortiguamiento esta dado por $2\Gamma(t)=rt$ siendo r una constante y $f(t)$ es la fuerza perturbativa.

El problema que observamos en ésta función de transformación es que las condiciones de frontera para las funciones ρ y μ en las ecs. A.V.2 no estan claramente determinadas y entonces la función de transformación depende aparentemente de parámetros no físicos.

b. Nuestro Resultado

Comprobaremos que la función de transformación dada por la ec. II.3.21 es equivalente a la ec. A.V.1. Partamos -- del Lagrangiano que nos describe a este sistema:

$$L=\left(\tfrac{1}{2}\dot{q}^2-\tfrac{1}{2}\,\omega^2(t)\,q^2+f(t)\,q\right)e^{rt} \qquad \text{A.V.4}$$

que nos lleva a la ecuación de movimiento:

$$\ddot{q}+2\Gamma\dot{q}+q\,\omega^2=f \qquad \text{A.V.5}$$

Propongamos como solución para la ecuación homogénea en A.V.5:

$$q(t)=\bar{\rho}(t)\left[A\,e^{i\mu(t)}+B\,e^{-i\mu(t)}\right] \qquad \text{A.V.6}$$

Introduciendo las condiciones de frontera:

$$q(t_1)=q_1' \qquad \text{A.V.7.1}$$

$$q(t_2) = q_2' \qquad \text{A.V.7.2}$$

en la ec. A.V.6, nos permite calcular las constantes A y B - en términos de los valores para las funciones $\bar{\rho}$ y μ a los tiempos t_1 y t_2: $\bar{\rho}_1$, $\bar{\rho}_2$, μ_1 y μ_2 . Lo cual nos permite- escribir a q(t) como:

$$q(t) = q_1 \left(\frac{\bar{\rho}(t)}{\bar{\rho}_1} \; \frac{sen(\mu(t) - \mu_2)}{sen(\mu_1 - \mu_2)} \right) + q_2 \left(\frac{\bar{\rho}(t)}{\bar{\rho}_2} \; \frac{sen(\mu_1 - \mu(t))}{sen(\mu_1 - \mu_2)} \right) \qquad \text{A.V.8}$$

Para encontrar las ecs. de movimiento que satisfacen $\bar{\rho}(t)$ y $\mu(t)$ sustituyamos la expresión A.V.6 en la ec. de- movimiento para q. Separando las partes real e imaginaria se obtiene:

$$\ddot{\bar{\rho}} - \dot{\mu}^2 \bar{\rho} + r \dot{\bar{\rho}} + \omega^2 \bar{\rho} = 0 \qquad \text{A.V.9.1}$$

$$2 \dot{\bar{\rho}} \dot{\mu} + \ddot{\mu} \bar{\rho} + r \dot{\mu} \bar{\rho} = 0 \qquad \text{A.V.9.2}$$

Haciendo el cambio de variable $\bar{\rho} = e^{-\frac{1}{2}rt} \rho$, llegamos directamente a las ecuaciones A.V.2. Y podemos escribir entonces q(t) - como:

$$q(t) = \alpha(t) q_1 + \beta(t) q_2 \qquad \text{A.V.10}$$

donde identificamos a:

$$\alpha(t) = e^{-\frac{\gamma}{2}(t-t_1)} \frac{\rho \; sen(\mu - \mu_2)}{\rho_1 \; sen(\mu_1 - \mu_2)} \qquad \text{A.V.11.1}$$

$$\beta(t) = e^{-\frac{\gamma}{2}(t-t_2)} \frac{\rho \; sen(\mu_1 - \mu)}{\rho_1 \; sen(\mu_1 - \mu_2)} \qquad \text{A.V.11.2}$$

que son las funciones introducidas en la solución general desarrollada en el capítulo II.

Es claro que éstas funciones satisfacen las condiciones de frontera dadas por las ecs. II.2.6:

$$\alpha(1) = 1 \qquad A.V.12.1$$

$$\alpha(2) = 0 \qquad A.V.12.2$$

$$\beta(1) = 0 \qquad A.V.12.3$$

$$\beta(2) = 1 \qquad A.V.12.4$$

y las ecuaciones diferenciales:

$$\ddot{\alpha} + 2\dot{\Gamma}\dot{\alpha} + \alpha\omega^2 = 0 \qquad A.V.13.1$$

$$\ddot{\beta} + 2\dot{\Gamma}\dot{\beta} + \beta\omega^2 = 0 \qquad A.V.13.2$$

independientemente de las condiciones de frontera de ρ y μ Esto permite ver que el resultado final en términos de ρ y μ debe ser independiente de las condiciones de frontera de estas funciones: Con esto podemos aplicar la ec. A.V.10 directamente a nuestro resultado dado por la ec. II.3.21 con estas expresiones para las funciones $\alpha(t)$ y $\beta(t)$.

Es simplemente materia de cálculo el comprobar que tanto el factor de normalización como los diferentes términos que comprenden a $q_1'^2$, $q_2'^2$, $q_1'q_2'$, q_1' y q_2' en la ec. II.3.21 nos llevan a las mismas expresiones en la ec. A.V.1, siendo el único factor que presenta ciertos problemas el independiente de q_1' y q_2', que desarrollaremos aquí con cierto detalle. Para el factor independiente tenemos en nuestro cálculo (recordando $t_2 = 0$):

$$\frac{1}{\dot{\beta}(1)\, e^{2\Gamma(1)}} \left(\int_0^{t_1} \beta(t) f(t)\, e^{2\Gamma(t)} dt \int_0^{t} \alpha(t') f(t')\, e^{2\Gamma(t')} dt' + \int_0^{t_1} \alpha(t) f(t)\, e^{2\Gamma(t)} dt \int_t^{t_1} \beta(t') f(t')\, e^{2\Gamma(t')} dt' \right)$$

$$= \int_0^{t_1} dt \int_0^{t} dt'\; e^{\frac{r}{2}(t+t')} \rho(t)\, \rho(t')\, f(t)\, f(t') \left(\frac{\mathrm{sen}\,(\mu(t)-\mu_2)\,\mathrm{sen}\,(\mu_1-\mu(t'))}{e_1 e_2\, \mathrm{sen}^2\,(\mu_1-\mu_2)} \right.$$

$$\left. \times\; e^{\frac{r}{2}t_1} \frac{1}{\dot{\beta}(1)\, e^{2\Gamma(1)}} \right)$$

$$+ \int_0^{t_1} dt \int_t^{t_1} dt'\; e^{\frac{r}{2}(t+t')} \rho(t)\, \rho(t')\, f(t)\, f(t') \left(\frac{\mathrm{sen}\,(\mu(t')-\mu_2)\,\mathrm{sen}\,(\mu_1-\mu(t))}{e_1 e_2\, \mathrm{sen}^2\,(\mu_1-\mu_2)} \right.$$

$$\left. \times\; e^{\frac{r}{2}t_1} \frac{1}{\dot{\beta}(1)\, e^{2\Gamma(1)}} \right) \qquad \text{A. V.14}$$

Se puede comprobar que:

$$e^{\frac{r}{2}t_1} \frac{1}{e_1 e_2\, \dot{\beta}(1)\, e^{2\Gamma(1)}\, \mathrm{sen}\,(\mu_1-\mu_2)} = -1 \qquad \text{A.V.15}$$

Por lo que el término independiente toma la forma:

$$\int_0^{t_1} dt \int_t^{t_1} dt'\; G(t)\, G(t') \frac{\mathrm{sen}\,(\mu(t)-\mu_2)\,\mathrm{sen}\,(\mu(t')-\mu_1)}{\mathrm{sen}\,(\mu_1-\mu_2)}$$

$$+ \int_0^{t_1} dt \int_0^{t} G(t)\, G(t') \frac{\mathrm{sen}\,(\mu(t')-\mu_2)\,\mathrm{sen}\,(\mu(t)-\mu_1)}{\mathrm{sen}\,(\mu_1-\mu_2)}$$

$$\text{A.V.16}$$

donde:

$$G(t) = e^{\frac{rt}{2}} f(t)\, \rho(t) \qquad \text{A.V.17}$$

Tenemos ahora que verificar la equivalencia de - - esta última expresión, con el factor independiente de la fórmula de K & L. De esta, definiendo $\phi(\tau,t)=\mu(\tau)-\mu(t)$ (y como- $V_2=0$), tenemos

$$-\int_0^{t_1}\frac{U^2-V^2}{\rho^2}\,dt+\left(\int_0^{t_1}\varsigma(t)\,\mathrm{sen}\,\phi(\tau,t_1)\,d\tau\right)^2\frac{\cos(\mu_1-\mu_2)}{\mathrm{sen}\,(\mu_1-\mu_2)}$$

$$=-\int_0^{t_1}\frac{dt}{\rho^2}\left[\left(\int_0^t\varsigma(\tau)\cos\phi(\tau,t)d\tau\right)^2-\left(\int_0^t\varsigma(\tau)\,\mathrm{sen}\,\phi(\tau,t)\,d\tau\right)^2\right.$$

$$+\left[\int_0^{t_1}dt\,\varsigma(t)\,\mathrm{sen}\,\phi(t,t_1)\int_0 d\tau\,\varsigma(\tau)\,\mathrm{sen}\,\phi(\tau,t_1)\right]\frac{\cos(\mu_1-\mu_2)}{\mathrm{sen}\,(\mu_1-\mu_2)}$$

$$=-\int_0^{t_1}\frac{dt}{\rho^2}\left[\int_0^t d\tau\int_0^t d\tau'\,\varsigma(\tau)\varsigma(\tau')\Big(\cos(\mu(\tau)-\mu(t))\,\cos(\mu(\tau')-\mu(t))\right.$$

$$\left.-\,\mathrm{sen}\,(\mu(\tau)-\mu(t))\,\mathrm{sen}\,(\mu(\tau')-\mu(t))\right]$$

$$+\int_0^{t_1}dt\int_0^{t_1}d\tau\,\varsigma(t)\,\varsigma(\tau')\,\mathrm{sen}\,(\mu(t)-\mu(t_1))\,\mathrm{sen}(\mu(\tau)-\mu(t_1))\,\frac{\cos(\mu_1-\mu_2)}{\mathrm{sen}(\mu_1-\mu_2)}$$

A.V.18

lo cual podemos escribir como:

$$=-\int_0^{t_1}dt\int_0^t d\tau\,h(t,\tau)+\int_0^{t_1}dt\int_0^{t_1}d\tau\,h_2(t,\tau)\qquad \text{A.V.19}$$

donde:

$$h(t,\tau)=\int_0^{t_1}d\tau'\,h_1(t,\tau,\tau')\qquad \text{A.V.20}$$

y $h_1(t,\tau,\tau')$ y $h_2(t,\tau)$ estan definidas de acuerdo con - las integrales que aparecen en la ec. A.V.18.

Nuestro problema es el siguiente, queremos obtener de aquí A.V.16, pero en esta ecuación aparecen solamente integrales dobles, por lo que en la ec. A.V.19 debemos encontrar la maner de realizar explicitamente una integración donde aparecen las integrales triples para poder llegar a la forma deseada. Esto lo realizaremos de la siguiente manera. Guiandonos por la fig. 1, sin cambiar el área de integración, podemos intercambiar los signos de integración y obtener:

$$\int_0^{t_1} dt \int_0^{t} d\tau\, h(t,\tau) = \int_0^{t_1} d\tau \int_{\tau}^{t_1} dt\, h(t,\tau)$$

$$= \int_0^{t_1} d\tau \left[\int_{\tau}^{t_1} dt \int_0^{t} d\tau'\, h_1(t,\tau,\tau') \right. \qquad \text{A.V.21}$$

De acuerdo con la fig. 2 podemos ahora intercambiar la integración sobre las variables t y τ', separar esta integrar y escribir:

$$\int_0^{t_1} dt \int_0^{t} d\tau\, h(t,\tau) = \int_0^{t_1} d\tau \left\{ \int_0^{t_1} d\tau' \int_{\tau'}^{t_1} dt - \int_0^{\tau} d\tau' \int_{\tau'}^{\tau} dt \right\} h_1(t,\tau,\tau')$$

A.V.22

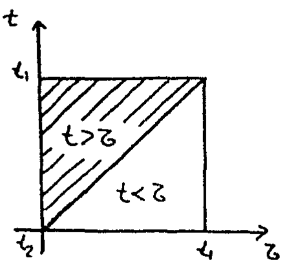

fig. 1

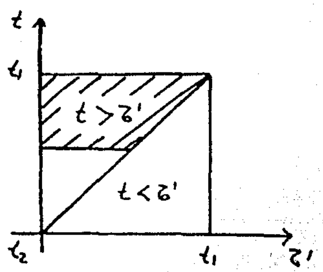

fig. 2

Con lo que podemos escribir el término independiente como:

$$= -\int_0^{t_1} dz \left\{ \int_0^{t_1} dz' \int_{z'}^{t_1} dt - \int_0^{z} dz' \int_{z'}^{z} dt \right\} h_1(t,z,z') + \int_0^{t_1} dt \int_0^{t_1} dz\, h_2(t,z) \qquad \text{A.V.23}$$

Utilizando la ec. A.V.2.2 es posible realizar las siguientes integrales:

$$\int_{z'}^{t_1} dt\, h_1(t,z,z') = -\frac{1}{2}\, G(z)\, G(z') \left[\operatorname{sen}\left(\mu(z)+\mu(z')-2\mu_1\right) - \left(\mu(z)-\mu(z')\right) \right] \qquad \text{A.V.24}$$

$$\int_{z'}^{z} dt\, h_1(t,z,z') = G(z)\, G(z')\, \operatorname{sen}\left(\mu(z')-\mu(z)\right) \qquad \text{A.V.25}$$

con lo que despúes de algunos arreglos es posible escribir la ec. A.V.23 en la forma:

$$\int_0^{t_1} dz \int_0^{z} G(z)\, G(z') \Big[\frac{1}{2} \operatorname{sen}\left(\mu(z)+\mu(z')-2\mu_1\right) - \frac{1}{2} \operatorname{sen}\left(\mu(z)-\mu(z')\right)$$

$$+ \operatorname{sen}\left(\mu(z)-\mu(z')\right) + \operatorname{sen}\left(\mu(z)-\mu_1\right) \operatorname{sen}\left(\mu(z')-\mu_1\right) \frac{\cos(\mu_1-\mu_2)}{\operatorname{sen}(\mu_1-\mu_2)} \Big]$$

$$+ \int_0^{t_1} dz \int_{z}^{t_1} dz'\, G(z)\, G(z') \Big[\frac{1}{2} \operatorname{sen}\left(\mu(z)+\mu(z')-2\mu_1\right)$$

$$- \frac{1}{2} \operatorname{sen}\left(\mu(z)-\mu(z')\right) + \operatorname{sen}\left(\mu(z)-\mu_1\right) \operatorname{sen}\left(\mu(z')-\mu_1\right) \frac{\cos(\mu_1-\mu_2)}{\operatorname{sen}(\mu_1-\mu_2)} \Big] \qquad \text{A.V.26}$$

Con esto hemos logrado escribir los límites de integración en la misma forma que en la ec. A.V.16. Usando relaciones trigonométricas comunmente conocidas, es directo comprobar que A.V.26 es igual a A.V.16, con lo que hemos logrado el objetivo planteado al inicio de este apéndice.

Por otro lado de nuestro resultado, ec. II.3.21,- - si substituimos las expresiones de α y β en términos de λ_1 y λ_2, ecs. II.2.14, obtenemos directamente el resultado- de Dodonov, Kurmyshev y Man'ko[10].

R E F E R E N C I A S

1. J. Schwinger, Proc. Nat. Acad. Sci. 45, 1542(1959)

2. J. Schwinger, Proc. Nat. Acad. Sci. 46, 257(1960)

3. J. Schwinger, Proc. Nat. Acad. Sci. 46, 570(1960)

4. J. Schwinger, Proc. Nat. Acad. Sci. 46, 883(1960)

5. J. Schwinger, "Quantum Kinematics and Dynamics" (W:A: Benjamin Inc. New York 1970)

6. J. Schwinger, Phil. Mag. 44, 1171(1953)

7. Otra manera de demostrar la existencia de las dos clases de variables puede encontrarse en:
J. Schwinger, Proc. Nat. Acad. Sci. 47, 1075(1961)
J. Schwinger, Proc. Nat. Acad. Sci. 48, 603(1962)

8. P. Feynmann y R. Hibbs, "Quantum Mechanics and Path — Integrals". (Mc. Graw Hill, New York 1965).

9. D.C. Khandekar y S.V. Lawande, Physics Letters Vol 67A, num. 3, 175(1978)

10. V.V. Dodonov, E.V. Kurmyshev y V.I. Man'ko, Physics -- Letters Vol 72A, num. 1,10(1979)

11. Freedman, D.Z. y Von Nieuwenhuizen, Scientific Ameri-merican 238, 126(1978)

12. M. de Crombrugghe y V. Rittenberg, Supersymmetric Quantum Mechanics, Universitat Bonn Preprint, Dec. 1982 -- ISSN-0172-8733

13. A. Salam y J. Strathdee, Phys. Rev. D 11, 1521(1975)

14. F. Cooper y B. Freedman, Los Alamos preprint LA-UR-82-2144

15. P. Salomnson y J.W. van Hotten, Nucl. Phys. B196, 509 (1982)

16. F. Iachello, Phys Rev. Lett. 44, 772(1980); A.B. Balantekin, I. Bars y F. Iachello, Nucl. Phys. A370, 284(1981); Sung Hong Zhov, A. Frank y P. van Isacker, " U(6112) Supersymmetries in Nuclei", a publicarse en Phys. Lett. B

17. J.M. Eisenberg y W. Greiner, "Microscopic Theory of the Nucleus" (North Holland Publishing Company, Amsterdam, 1972)

18. W.W. Buck, C.B. Dover y J.M. Richard, Ann. Phys, -- (New York) 121, 47(1979).

19. U. Lindström, "Introductory Lectures on Supersymmetry, Superspace and Supergravity" University of Stockholm, Enero 1981.

20. K. Hoffman y R. Kunze "Linear Algebra" (Prentice - Hall Inc., 1961)