

21/18



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

Facultad de Ciencias

**INTERPOLACION Y CONFIGURACION DE DATOS
GEOFISICOS**

T E S I S

Que para obtener el título de:

F I S I C O

P r e s e n t a :

Pedro González Casanova Henríquez

México, D. F.

1983



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

RESUMEN

En esta tesis se presenta la teoría matemática de la interpolación de datos por medio de 'splines' (tiras).

Adicionalmente se muestra la versatilidad de estos métodos para su aplicación en la interpolación de datos geofísicos.

Se realiza una clasificación del tipo de tiras y se efectúa una evaluación de la exactitud de los datos obtenidos mediante esta teoría (precisión de los datos interpolados) utilizando datos geomagnéticos.

Con objeto de cubrir dos de los pasos básicos en el procesamiento de datos geofísicos (interpolación y configuración) se presenta además un algoritmo de configuración de contornos.

I N D I C E

introduccion general

1.1 CAPITULO 1

Introducción 1

Sec. 1 Tiras inidimensionales 9

Sec. 2 Tiras cuasibidimensionales 29

Sec. 3 Tiras estrictamente bidimensionales 52

2.1 CAPITULO 2

Configuración de contornos 76

3.1 CONCLUSIONES

93

I N T R O D U C C I O N

Para la construcción de modelos (gravimétricos, magnetométricos, eléctricos, etc.) a partir de valores de campo uno de los primeros pasos en exploración geofísica es el suavizamiento por medio de interpolación y la configuración en enrejados regulares de dichos valores.

La necesidad de interpolar los datos de campo responde a que la mayoría de los métodos de interpretación de datos geofísicos suponen que éstos se encuentran regularmente espaciados. Esta condición resulta igualmente necesaria para los algoritmos de configuración. Sin embargo no siempre los valores de campo se encuentran distribuidos en una rejilla equispaciada.

Es posible clasificar los métodos de interpolación -- (Crain 1979) en dos categorías generales: los métodos de superficies matemáticas y las de superficies numéricas. Al primer grupo corresponden los algoritmos cuyo propósito es obtener una superficie analítica que pasa por los puntos de interés. Las superficies numéricas en cambio tienen por objeto obtener un grupo discreto de puntos interpolados a partir de sus vecinos. Es decir -- que la diferencia estriba en que en el primer caso calculamos -- los puntos a partir de la ecuación de la superficie, mientras -- que en el segundo dicha ecuación no es calculada.

Crain y Bhatta Charya (1967) realizaron una evaluación_

CAPITULO 1

INTERPOLACION POR TIRAS

INTRODUCCION.-

Es conveniente iniciar este capítulo con una descripción general del enfoque a seguir. Supongamos que tenemos una barra metálica delgada a la que flexionamos obligándola a pasar por los puntos que nos interesa interpolar. La curva generada mediante este procedimiento la denominaremos tira o spline unidimensional. Como demostraremos más adelante esta curva corresponde a un conjunto de polinomios cúbicos cada uno de los cuales está ubicado entre dos valores de campo. Dichos polinomios mantienen la continuidad de la primera y segunda derivada así como la continuidad del valor de la función en los puntos en que se unen.

Las tiras cúbicas bidimensionales comprenden en esencia el mismo concepto. Se trata de la generación de una superficie mediante la flexión de una placa metálica delgada que obligamos a pasar por los puntos que deseamos interpolar. Existen en general dos procedimientos distintos para generar estas superficies y por ello resulta conveniente dividir a las tiras bidimensionales en dos categorías: las cuasi-bidimensionales y las estrictamente bidimensionales. La diferencia estriba en que las superficies del primer grupo suponen que los valores de campo están más o menos distribuidos en torno a líneas paralelas (por ejemplo líneas de vuelo), mientras que el segundo -

de la eficiencia y exactitud de varios de estos métodos, concluyendo que desde el punto de vista de la eficiencia (exactitud de los datos interpolados) los algoritmos de funciones cuadráticas de peso medio resultan óptimos. Para análisis cuantitativos de mayor precisión, encontraron que los métodos más adecuados son los que utilizan ajustes de mínimos cuadrados mediante polinomios ortogonales generados por el procedimiento Gram-Schmidt. En trabajos posteriores Battacharya (1969) propone un método de interpolación basado en una forma particular de superficies de orden cúbico. De acuerdo a este autor este método resulta más exacto que el de polinomios ortogonales.

El trabajo de Battacharya induce distintas publicaciones que constituyen en esencia variaciones a su algoritmo (K.L. Rasmussen et al. 1979, Heising et al 1971, Thomson R.F. 1970, etc.)

Investigaciones posteriores de la teoría de tiras (J.-Duchon 1975, Paihava et. al 1976, Greace Wahba 1980 etc.) arrojan nuevas formas de construcción de las superficies. Estos trabajos no constituyen solo alteraciones a la formulación de Battacharya, sino que fundamentan la construcción de las superficies analíticas en principios esencialmente distintos. Hasta donde tenemos conocimiento estos algoritmos no han sido evaluados (exactitud de los datos interpolados; tiempo de procesamiento empleado) para modelos geofísicos.

En el presente trabajo se pretende hacer una revisión de la teoría matemática de las tiras con objeto de tener una visión conjunta de las mismas hasta publicaciones recientes. Siguiendo este propósito el trabajo está organizado partiendo de las formulaciones más simples (ie unidimensionales) para arribar posteriormente a formulaciones más complejas de carácter bidimensional se propone así mismo una clasificación de los distintos métodos en dos categorías generales que nos permite distinguir dos formas de construcción de las superficies de interpolación, cuyos fundamentos son distintos.

Así mismo el presente trabajo se propone evaluar la exactitud y precisión de la interpolación por tiras para modelos geomagnéticos en distintas condiciones. El objeto de este último punto consiste en tener algún indicador (aunque sea en base a modelos particulares) de la eficiencia y exactitud de esta forma particular de interpolación de datos. El carácter particular de la evaluación hace imposible responder con exactitud a una pregunta básica: ¿al utilizar interpolación por tiras que precisión y eficiencia se alcanza? De hecho nuestro objetivo consiste simplemente en dar una indicación particular que ayude a ubicar a un posible usuario de los sistemas de interpolación.

Entre los objetivos se encuentran también el de establecer ante el lector las limitaciones de los distintos métodos de tal suerte que pueda concluir con mayor facilidad que algo--

ritmos de interpolación por tiras fallarían ante sus necesidades concretas y cuales no.

El presente trabajo intenta cubrir mediante programas dos pasos dentro del procesamiento de datos geofísicos que resultan fundamentales, a saber el de interpolación de datos y el de configuración de los mismos.

En relación con este último propósito se discute un algoritmo de configuración de contornos o isolineas que cubra el aspecto de graficación.

grupo parte de una distribución aleatoria de puntos en el plano. La idea que da fundamento al primer grupo (cuasi-bidimensional) es que la tira cúbica superficial se puede construir a partir de conjuntos de splines unidimensionales. El segundo grupo (el estrictamente bidimensional) se construye en cambio a partir de la minimización del cuadrado de la curvatura de una superficie sujeta a la condición de que pase por los valores de campo que se desea interpolar.

Es decir que el segundo grupo se construye a partir de un concepto bidimensional mientras que el primer grupo parte de un concepto unidimensional para llegar a la obtención de una superficie.

Desde 1960, las funciones de tiras han sido utilizadas para la interpolación de datos geofísicos irregularmente espaciados sobre una línea (Ahlberg, Nilson y Walsh 1967). La interpolación por tiras se ha extendido exitosamente al tratamiento de datos bidimensionales distribuidos en una rejilla regular (Battacharyya, 1969, Heissin, Lee Price y Powers, 1972, Dooley 1976). Simultáneamente se formularon algoritmos para la interpolación de datos, aleatoriamente distribuidos en el plano (Briggs 1976).

En 1979 RasMussen y Harma reportaron: "Distintos autores han dado ejemplos prácticos para demostrar la eficiencia de las tiras como medios de interpolación para producir mapas de -

configuración resultan cualitativamente mejores que los dibujados manualmente, dejan sin contestar una pregunta básica. Esto es, ¿que tan precisa es la interpolación en términos de errores absolutos? Hasta donde sabemos esta pregunta no ha sido tratada anteriormente". Dichos autores realizan una evaluación numérica del problema con base en modelos (comparando datos exactos generados por el modelo con datos interpolados por medio de tiras), concluyendo que para distintos cuerpos y condiciones la interpolación por tiras resulta excelente.

Cabe destacar sin embargo que esta respuesta se limita a algoritmos cuasi-bidimensionales, es decir a algoritmos de la primera categoría. Como señalamos estos algoritmos no pueden aplicarse a distribuciones de datos completamente aleatorios, mientras que los métodos estrictamente bidimensionales si.

En términos generales tenemos dos fuentes de error debido a la aplicación de los métodos del primer grupo, a distribuciones de datos cercanas a líneas paralelas: Primero que los datos no caen exactamente sobre una línea y segundo que las líneas no son exactamente paralelas.

Estas limitaciones no se presentan en los algoritmos estrictamente bidimensionales y por ello es de esperarse que la exactitud de la interpolación mejore para estos métodos. Hasta donde tenemos conocimiento, no existe, sin embargo, una evalua-

ción de la eficiencia y exactitud de estos algoritmos.

En este capítulo se expondrán los siguientes temas:

Sec. 1.- Tiras cúbicas unidimensionales

Sec. 2.- Tiras cuasi-bidimensionales

Sec. 3.- Tiras estrictamente bidimensionales

1.1 TIRAS UNIDIMENSIONALES

En esta sección dedicada a estudiar el tratamiento del caso más simple de interpolación por tiras se desarrollan dos enfoques para llegar a la construcción de ellas. El presentar la exposición de esta forma obedece a la división que establecimos en la introducción para los métodos de interpolación bidimensional. Ambos tratamientos tienen su equivalente en el caso unidimensional.

En el primer enfoque se parte únicamente de consideraciones matemáticas. Se plantea el problema de ajustar una curva compuesta por polinomios cúbicos a n puntos distribuidos en R^2 . Cada polinomio se ubica entre dos puntos de la distribución debiendo cubrirse las siguientes condiciones en los puntos de unión de los polinomios: debe existir continuidad de la primera y segunda derivada. Como se demostrará la curva construída de esta forma, que se denomina tira unidimensional, es única cuando se fijan los valores de las primeras derivadas en los extremos.

El segundo enfoque parte de un concepto variacional. En este caso se plantea la obtención de la curva que resulta de flexionar una barra metálica delgada, de tal modo que pasa por los puntos de interés. De acuerdo al principio de mínima acción de Hamilton la curva obtenida de este modo será aquella que minimice la energía de flexión de la barra. Se desea entonces obtener una función que minimice la integral de la diferencial de

energía y que al mismo tiempo pase por los valores de campo a partir de los cuales se desea interpolar. Para el caso de una barra metálica delgada la diferencial de energía es proporcional al cuadrado de la curvatura (L. Elsgoltz 1975). Como se demostrará la solución variacional así planteada corresponde a un conjunto de polinomios cúbicos, que mantienen la continuidad de la primera derivada, de la segunda derivada y del valor de la función. Es decir que la solución es precisamente una tira cúbica unidimensional.

1.1.1. Enfoque basado en el ajuste a una curva compuesta por polinomios cúbicos.

Supóngase una distribución de puntos X_i , $i = 1, \dots, n$ ($X_{i-1} < X_i$) y un conjunto de funciones $u(x)$ que asumen los valores U_i , $i=1..n$ en dichos puntos. La función de interpolación, como se señaló, está formada por polinomios cúbicos en cada intervalo $[X_{i-1}, X_i]$. Llamaremos $P_i = U'(x)$ a las primeras derivadas de la función en las junturas, es decir de los puntos donde las cúbicas se conectan.

La proposición básica que queremos demostrar es la siguiente: para cada conjunto $\{U_0, U_1, \dots, U_I, P_0, P_I\}$ existe un y solo un $u(x)$ en (x_0, \dots, x_I) tal que $u(x_i) = U_i$ $i=0, \dots, I$ $u'(x_0) = P_0$; $u'(x_I) = P_I$

Para llegar a este resultado es preciso primero simpli

ficar la situación. Como señalamos partimos del conocimiento de los valores del polinomio en los puntos juntura y de las primeras derivadas del mismo en los extremos. Veamos en primer lugar que ocurre con el polinomio entre dos juntas. Dado que trabajamos con un polinomio de 3er. grado las incógnitas que tenemos son las cuatro coeficientes de P. Hagamos transitoriamente una suposición más fuerte sobre los datos de que disponemos: partamos del supuesto de que dados dos puntos juntas contiguos, no solo conocemos el valor en ellos, sino que además conocemos las primeras derivadas. Esta suposición transitoria nos permite ver un hecho inmediato: a saber que dados dos puntos juntura tenemos cuatro ecuaciones lineales y 4 coeficientes que son incógnitas.

Es pausable suponer que dados los valores en dos puntos y sus primeras derivadas existe un y solo un polinomio cúbico entre ellos. Para encontrar la expresión del polinomio partiremos del sistema de ecuaciones lineales (1.1). Posteriormente veremos si el determinante es distinto de cero para demostrar la unicidad de la solución. Encontramos entonces la expresión del polinomio, Supongamos que tenemos dos juntas a, b entonces:

$$C(a) = \alpha_0$$

$$C'(a) = \alpha_1$$

$$C(b) = \alpha_0 + \alpha_1 (b-a) + \alpha_2 (b-a)^2 + \alpha_3 (b-a)^3$$

$$C'(b) = \alpha_1 + 2 \alpha_2 (b-a) + 3 \alpha_3 (b-a)^2$$

etonces: χ

$$\begin{bmatrix} C(a) \\ C'(a) \\ C(b) \\ C'(b) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & b-a & (b-a)^2 & (b-a)^3 \\ 0 & 1 & 1(b-a) & 3(b-a)^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} \chi:$$

$$\begin{bmatrix} C(a) \\ C'(a) \\ C(b)-C(a)-(b-a) C'(a) \\ C'(b)-C'(a) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (b-a)^2 & (b-a)^3 \\ 0 & 0 & 2(b-a) & 3(b-a)^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix}$$

Sea:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (b-a)^2 & (b-a)^3 \\ 0 & 0 & 2(b-a) & 3(b-a)^2 \end{bmatrix}$$

ent:

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3(b-a)^2 / D(M) & (b-a)^3 / D(M) \\ 0 & 0 & 2(b-a) / D(M) & (b-a)^2 / D(M) \end{bmatrix}$$

donde:

$$D(M) = \text{Det}(M) = \det \begin{vmatrix} (b-a)^2 & (b-a)^3 \\ 2(b-a) & 3(b-a) \end{vmatrix}$$

$$= (b-a)^2 \cdot 3(b-a) - 2(b-a) \cdot (b-a)^3$$
$$= 3(b-a)^3 - 2(b-a)^4 = (b-a)^3 \quad \text{y:}$$

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3(b-a)^{-2} & -(b-a)^{-1} \\ 0 & 0 & -2(b-a)^{-1} & (b-a)^{-2} \end{bmatrix}$$

para demostrar la existencia basta probar que el determinante -
de M^{-1} $\neq 0$ para $a \neq b$: y

$$\text{Det}(M^{-1}) = \det \begin{vmatrix} 3(b-a)^{-2} & -(b-a)^{-1} \\ -2(b-a)^{-1} & (b-a)^{-2} \end{vmatrix}$$

$$= 3(b-a)^{-4} - 2(b-a)^{-4} = (b-a)^{-4} \neq 0$$

Para encontrar el polinomio hay que resolver el sistema:

$$\bar{a} = (M^{-1}) \bar{c} \quad \text{donde:}$$

$$= \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} \text{ y } \bar{C} = \begin{bmatrix} C(a) \\ C'(a) \\ C(b)-C(a)-(b-a) C'(a) \\ C'(b)-C'(a) \end{bmatrix}$$

Es decir: $\alpha_0 = C(a)$; $\alpha_1 = C'(a)$ y

$$\alpha_2 = \frac{3}{(b-a)^2} (C(b) - C(a) - (b-a) C'(a) - \frac{1}{(b-a)} (C'(b)-C'(a)))$$

$$\alpha_3 = \frac{-2}{(b-a)^3} (C(b) - C(a) - (b-a) C'(a) + \frac{1}{(b-a)^2} (C'(b)-C'(a)))$$

o sea:

$$\alpha_2 = \frac{3}{(b-a)^2} (C_b - C_a) - \frac{3}{(b-a)} C'_a - \frac{(C'_b - C'_a)}{b-a}$$

$$= \frac{3}{(b-a)^2} (C_b - C_a) - \frac{3C'_a + C'_b - C'_a}{b-a}$$

$$\alpha_2 = \frac{3}{(b-a)^2} (C_b - C_a) - \frac{2 C'_a + C'_b}{b-a} \quad \text{y}$$

$$\alpha_3 = \frac{-2}{(b-a)^3} (C_b - C_a) + \frac{2 C'_a + C'_b - C'_a}{(b-a)^2}$$

$$\alpha_3 = \frac{-2}{(b-a)^3} (C_b - C_a) + \frac{C'_a + C'_b}{(b-a)^2}$$

Entonces substituyendo los coef. en la expresión general de un polinomio cúbico, obtenemos:

$$C(x) = C(a) + C'(a)(x-a) + \left[3 \frac{C(b) - C(a)}{(b-a)^2} - \frac{C'(b) + 2C'(a)}{b-a} \right] (x-a)^2 + \left[\frac{-2}{(b-a)^3} (C(b) - C(a)) + \frac{C'(a) + C'(b)}{(b-a)^2} \right] (x-a)^3 \quad (2)$$

Que es la expresión del polinomio entre dos juntas a y b. Hasta este momento sabemos que dados dos puntos y sus derivadas hay un y solo un polinomio cúbico que pasa por ellos. No es difícil ver que si tenemos n puntos y sus primeras derivadas entonces existe un y solo un conjunto de polinomios cúbicos que pasan por ellos:



Ahora bien hemos supuesto que en cada U_i tenemos el valor de la primera derivada. Esta condición hace que el método sea poco práctico pues en general tendremos los valores de campo (magnético, gravimétrico, etc.) pero no las derivadas en las juntas. Existe sin embargo una forma de obtener las primeras derivadas en las juntas si suponemos dos cosas; a) que conocemos las primeras derivadas en el primero y el último punto y b) que la curva formada de polinomios tiene continuidad en la segunda derivada. Esta última condición se traduce en la introducción de un nuevo sistema de ecuaciones lineales que

nos permite obtener las primeras derivadas intermedias; $P_2 \dots P_{n-1}$. Por comodidad supongamos primero que tenemos 3 puntos - X_0, X_1, X_2 y sean $V(X)$ y $W(X)$ polinomios cúbicos que satisfacen; $U_1 = V(X_1) = W(X_1)$ y $V'(X_1) = W'(X_1) = P_1$. Derivando dos veces la ecuación (2) y haciendo $a = X_1$; $b = X_0$ obtenemos:

$$y \quad \begin{aligned} V''(X_1) &= \frac{-2}{\Delta X_0} \quad 3 \left[\frac{V(X) - U_1}{\Delta X_0} - V'(X_0) - 2P \right] \\ W''(X_1) &= \frac{-2}{\Delta X_1} \quad 3 \left[\frac{W(X_2) - U_1}{\Delta X_1} - W'(X_2) - 2P_1 \right] \end{aligned}$$

Suponiendo continuidad en la segunda derivada, esto es igualando las dos ecuaciones anteriores obtenemos:

$$\begin{aligned} &\Delta X_1 V'(X_0) + 2 (\Delta X_1 + \Delta X_0) P_1 + \Delta X_0 W'(X_2) \\ = &3 \left[\frac{\Delta X_0}{\Delta X_1} (W(X_2) - U_1) + \frac{\Delta X_1}{\Delta X_0} (U_1 - V(X_0)) \right] \end{aligned}$$

Que es una ecuación de recurrencia que nos permite calcular la derivada intermedia P_1 . No es difícil ver que este resultado es generalizable, esto es que:

$$\begin{aligned} &\Delta X_i P_{i-1} + 2 (\Delta X_i + \Delta X_{i-1}) P_i + \Delta X_{i-1} P_{i+1} \\ = &3 \left[\Delta X_{i-1} \frac{\Delta U_i}{\Delta X} + \Delta X_i \frac{\Delta U_{i-1}}{\Delta X_{i-1}} \right] \quad i=1 \dots I-1 \end{aligned}$$

Con $I-1$ incógnitas, $P_i \quad i=1, \dots, I-1$. Este sistema li

neal tiene una matriz tridiagonal que es estrictamente diagonal dominante, por tanto (M. Marcus 1962), tiene únicamente -- eigen valores distintos de cero. Es decir que se trata de una matriz singular siendo por tanto linealmente independientes -- las I-1 ecuaciones con esto quedan determinados de forma única las P_i , $i=1 \dots I-1$ incógnitas.

Con lo anterior queda demostrada la proposición que hicimos al inicio de la sección. De hecho hemos visto que si conocemos U_i y P_i $i=0, \dots, I$ tendremos exactamente un conjunto de polinomios cúbicos con juntas $X_1 \dots X_I$ que satisface - - - $U(X_i) = U_i$. Pero por otra parte hemos visto que si pedimos continuidad de la segunda derivada en las juntas, basta tener las primeras derivadas en los extremos para tener las P_i restantes.

Resulta inmediato entonces, que basta pedir la continuidad de la primera y segunda derivada en las juntas para tener exactamente un polinomio cúbico suave a pedazos que asuma los valores U_i en $U(X_i)$

1.1.2. Enfoque Variacional

abordaremos ahora el problema desde un punto de vista variacional. Como se señalo al principio de esta seccion - en este segundo enfoque nos planteamos la obtension de la curva que resulta de flexionar una barra metalica delgada. Dicha curva debe pasar por los puntos que se desea interpolar. Para su obtensinn acudiremos al principio de minima energia de Hamilton , es decir , que la forma que asumira la barra deformada sera aquella que haga minima la energia de flexion. Esta - energia, como se mencionó'es proporcional al cuadrado de la curvatura.

La formulacion matematica de lo anterior equivale a en contrar una funcion $g(x)$ que minimice la funcional 1.1 y que - satisfaga que $g(x_i) = y_i$, $i=0, \dots, n$ donde y_i son los valores de campo conocidos y x_i las coordenadas de dichos valores.

$$J = \int (g''(x))^2 dx$$

Existe un conjunto infinito de funciones que pasan por y_i en las coordenadas x_i , pero solo un subconjunto de ellas - tiene la caracteristica de que ademas minimiza la funcional J. para comprender cualitativamente el tipo de curva que buscamos recordemos que la curvatura se define como la variacion de la - pendiente al variar la longitud de arco. Estamos interesados - entonces, en una funcion g que haga minima la pendiente en todos y cada una de las diferenciales de longitud de arco. Se puede decir que la curva buscada es aquella que tenga variaciones ~~menos~~ abruptas

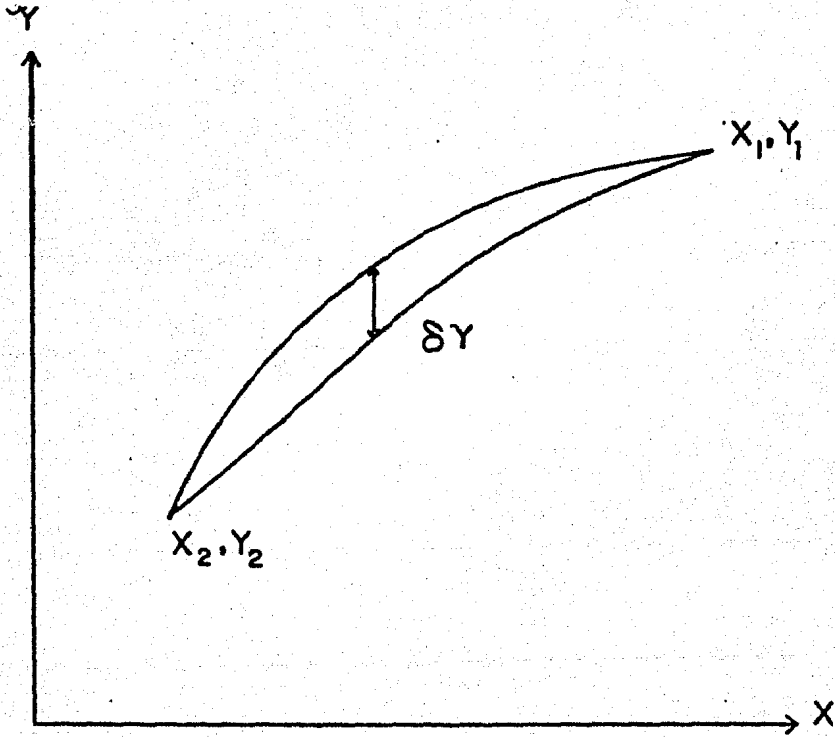
de la pendiente, o bien la curva más suave que pase por los puntos de interés.

Procedamos ahora a resolver la funcional 1.1. queremos encontrar una trayectoria de integración que vaya de $(X_0, g(X_0))$ a $(X_n, g(X_n))$ que minimice J . Para ello asumiremos la existencia de una trayectoria óptima $g(x)$, esto es una trayectoria aceptable para la cual J sea un extremo. Se trata entonces de comparar J evaluada en la trayectoria óptima (desconocida) con las J obtenidas de trayectorias vecinas. En la fig. 1.1 se muestran dos posibles trayectorias. La diferencia entre ellas para una x dada se llama variación de J , δy . La δy se puede describir convenientemente si introducimos una nueva función $h(x)$ que defina la deformación arbitraria de la trayectoria y un factor de escala α que defina la magnitud de la variación. La trayectoria variada o vecina a la óptima será entonces:

$$g(x, \alpha) = g(x, 0) + \alpha h(x)$$

con la introducción del parámetro α es posible cambiar la forma de $g(x, \alpha)$ de manera completamente arbitraria pero manteniéndola infinitesimalmente cercana a $g(x, 0)$, si hacemos α suficientemente pequeño.

Tomemos $g(x, 0)$ como la trayectoria desconocida que minimiza J y $g(x, \alpha)$ como la trayectoria vecina. Entonces la funcional J será ahora función de un nuevo parámetro α :



- FIG 1 -

$$1.1' \quad J(\alpha) = \int (g''(x,0) + \alpha h''(x))^2 dx$$

La condición para encontrar un valor extremo es:

$$1.2 \quad \left[\frac{\partial J(\alpha)}{\partial \alpha} \right]_{\alpha=0} = 0$$

La ecuación que nos proponemos resolver quedará:

$$\left[\frac{\partial}{\partial \alpha} \int_{x_0}^{x_n} (g''(x) + \alpha h''(x))^2 dx \right]_{\alpha=0} = 0$$

Ahora bien hay que recordar que hasta este momento - no nos hemos referido a las constricciones o restricciones a - las que está sujeta la barra, ésto es, al hecho de que $g(x_i) = Y_i$ para $i=0, \dots, n$. Antes de proseguir con el tratamiento matemático de las condiciones de contorno nos plantearemos una generalización de las mismas. Hasta el momento se ha considerado que la barra deformada debe pasar por los puntos Y_i en las - - coord. X_i . Se puede considerar sin embargo que la barra pase - por una vecindad de estos puntos. Esto equivale a permitir que la curva de deformación de la barra sea más suave. El grado de suavidad dependerá del radio de la vecindad en cada punto, de - tal modo que cuando el radio es cero obligamos a la barra a pa - sar por los puntos Y_i .

Lo anterior lo podemos expresar obligando que la función $g(x)$ cumpla con:

$$1.3 \quad \sum_{i=0}^n \left[\frac{g(X_i) - Y_i}{\delta Y_i} \right]^2 \leq S$$

El parámetro δY_i nos permite fijar el grado de suavizado por punto, mientras que S es un factor que multiplica a todos los radios de las vecindades.

Nótese que la desigualdad 1.3 se puede expresar como una igualdad con ayuda de un parámetro B arbitrario:

$$1.4 \quad \sum_{i=0}^n \left[\frac{g(x_i) - Y_i}{\delta Y_i} \right]^2 = S - B^2$$

el valor de B controlará que tan cerca de Y_i se encuentra el punto de deformación.

Ahora bien, para tratar las condiciones de frontera 1.3 desde un punto de vista variacional es necesario introducir los parámetros de Lagrange. La idea básica consiste en introducir directamente en la funcional 1.2 las condiciones de frontera 1.3

Es decir que se considera el problema de encontrar -- una función $g(x)$ que no solo minimice la integral J sino que si simultáneamente cumpla con las constricciones. De (1.1) y (1.4) -- obtenemos:

$$1.5 \quad J = \int_{x_0}^{x_n} (g''(x))^2 dx + P \left[\sum_{i=0}^n \frac{[g(X_i) - Y_i]^2}{\delta Y_i} + B^2 - S \right]$$

Los multiplicadores de Lagrange P obedecen a que si minimizamos únicamente la parte integral de la ec. 1.5 obtenemos el mínimo global, mientras que al introducir P forzamos a encontrar la extremal (máximo o mínimo) sujeto a las condiciones de frontera. En la fig. 1.2 se muestra para una superficie dada el mínimo global (X_0, Y_0) y al mismo tiempo el mínimo relativo sujeto a la condición de frontera $Y(X)$.

Por otro lado a la barra no la estamos obligando a pasar por los puntos sino por una vecindad de ellos. Nuevamente podemos encontrar distintas soluciones que estén dentro de la vecindad. Dado que la cercanía de la función a los Y_i está controlada por B (ec. 1.4) pediremos además que su cumpla:

$$1.7 \quad \left[\frac{\partial J(B)}{\partial B} \right] = 0$$

Es decir que $g(x)$ pase por la vecindad pero lo más cerca posible de Y_i .

Las ecuaciones 1.2, 1.5, 1.6 y 1.7 nos permiten encontrar la función g .

De 1.2 y 1.5:

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} \left[\int_{X_0}^{X_n} (g''(x) + \lambda h''(x))^2 dx + P \sum_{i=0}^n \left[\frac{g(X_i) + \lambda h(X_i) - Y_i}{\delta Y_i} \right]^2 + S^2 - S \right]_{\lambda=0} = 0$$

el primer término de esta ecuación es

$$\begin{aligned} &= \left[\frac{\partial}{\partial \lambda} \int_{X_0}^{X_n} (g''^2 + 2 \lambda g'' h'' + (\lambda h'')^2) dx \right]_{\lambda=0} \\ &= \left[2 \int_{X_0}^{X_n} g'' h'' + 2 \int_{X_0}^{X_n} \lambda (h'')^2 dx \right]_{\lambda=0} \\ &= 2 \int_{X_0}^{X_n} g'' h'' dx \end{aligned}$$

y el segundo

$$\begin{aligned} &= P \left[\frac{\partial}{\partial \lambda} \sum_{i=0}^n \left\{ \frac{g(X_i) + \lambda h(X_i) - Y_i}{\delta Y_i} \right\}^2 \right]_{\lambda=0} \\ &= 2P \left[\sum_{i=0}^n h(X_i) \frac{g(X_i) - Y_i + \lambda h(X_i)}{\delta Y_i} \right]_{\lambda=0} \end{aligned}$$

Por tanto nos queda la expresión:

$$\int_{X_0}^{X_n} g'' h'' dx + P \sum_{i=0}^n \frac{g(X_i) - Y_i}{\delta Y_i^2} h(X_i) = 0$$

el primer término de esta expresión está integrado sobre todo el intervalo, tomando en particular la integral de X_i a X_{i+1} - para i arbitraria obtenemos:

$$\int_{X_i}^{X_{i+1}} g''h'' dx = - \int_{X_i}^{X_{i+1}} g'' h' + \left[g''h' \right]_{X_i}^{X_{i+1}} dx$$

pero

$$- \int_{X_i}^{X_{i+1}} g'' h' dx = \int_{X_i}^{X_{i+1}} g'' h + \left[g'' h \right]_{X_i}^{X_{i+1}} dx$$

Por tanto:

$$\int_{X_i}^{X_{i+1}} g'' h'' = + \int_{X_i}^{X_{i+1}} g'' h dx - \left[g'' h' \right]_{X_i}^{X_{i+1}} + \left[g'' h \right]_{X_i}^{X_{i+1}}$$

De donde se ve que para todo el intervalo:

$$\int_{X_0}^{X_n} g'' h'' dx + \sum_{i=0}^n \left[g''(X_{i+1}) + h'(X_{i+1})_+ - g''(X_{i+1})h(X_{i+1})_+ \right]$$

$$- \left\{ (g''(X_i)_- h'(X_i)_- - g''(X_i)_- h(X_i)_-) \right\} +$$

$$2 P \sum_0^n \frac{g(X_i) - Y_i}{\delta Y_i^2} \quad h(X_i) = 0$$

ahora bien dado que $h(x)$ es continua:

$$h(X_i)_+ = h(X_i)_- \quad \text{y} \quad h'(X_i)_+ = h'(X_i)_-$$

Por tanto:

$$\int_{X_0}^{X_n} g'' h'' dx + h'(X_0)g''(X_0)_- + h'(X_n)g''(X_n)_+$$

$$+ h(X_0)_- g''(X_0)_- + h(X_n)_+ g''(X_n)_+ + \sum h'(X)_i \left[g''(X_i)_- - g''(X_i)_+ \right]$$

$$+ 2P \sum h(X_i) \frac{g(X_i) - Y_i}{\delta Y_i^2} = 0$$

SI suponemos que las derivadas en los extremos de la barra son cero, es decir que está empotrada entonces la ec. anterior se reduce a:

$$\int_{X_0}^{X_n} g''''(x) h(x) dx + \sum_{i=1}^{n-1} h'(x) \left[g''(X_i)_- - g''(X_i)_+ \right]$$

$$+ \sum_{i=1}^{n-1} h(X_i) \left[(g''(X_i)_+ - g''(X_i)_-) + 2P \frac{g(X_i) - Y_i}{\delta Y_i} \right] = 0$$

Ahora bien dado que la función h(x) es arbitraria -- los términos en h(Xi) y h'(xi) son linealmente independientes. Por otra parte los términos de la sumatoria contienen solo valores discretos de h mientras que la integral comprende todos los valores de h(x) entre X0 y Xn. La única posibilidad para que la suma de estos tres términos sea cero es que lo sea cada uno de ellos por separado:

$$\int_{X_0}^{X_n} g''''(x) h(x) = 0$$

$$\sum_{i=1}^h h'(X_i) \left[g''(X_i)_- - g''(X_i)_+ \right] = 0$$

$$\sum h(X_i) \left[(g'''(X_i)_+ - g'''(X_i)_-) + 2P \frac{g(X_i) - Y_i}{\delta Y_i^2} \right] = 0$$

Usando nuevamente el hecho de que $h(x)$ es arbitraria y recordando que si la segunda derivada de una función en un punto es continua, también debe ser continua la primera derivada en ese punto, obtenemos:

1.9 $g'''(x) = 0$ Ecuación Euler - 'Lagrange

$$-g'''(X_i)_+ + g'''(X_i)_- = 2P \left[\frac{g(X_i) - Y_i}{\delta Y_i^2} \right]$$

$$g''(X_i)_+ - g''(X_i)_- = 0$$

$$g'(X_i)_+ - g'(X_i)_- = 0 \quad 1.9$$

$$g(X_i)_+ - g(X_i)_- = 0$$

Una solución de la ecuación 1.8 es:

$$g_{xk}(x) = a_i + b_i (X - X_i) + c_i (X - X_i)^2 + d_i (X - X_i)^3$$

La determinación de las constantes de este polinomio lo tenemos a partir de las condiciones de continuidad 1.9.

La continuidad en la segunda derivada se puede expresar como:

$$g''_{x_{i+1}}(X_{i+1}) = g''_{x_i}(X_{i+1})$$

donde:

$$g''_{xi+1}(x) = 2 C_{i+1} + 6 d_{i+1} (X - X_{i+1})$$

$$g''_{xi}(x) = 2 C_i + 6 d_i (X - X_i) \text{ por tanto}$$

$$d_i = \frac{C_{i+1} - C_i}{3 h_i} \quad -1.10-$$

de la continuidad de $g^{\circ}(x)$, obtenemos:

$$g_{i+1}(X_{i+1}) = g_{xi}(X_{i+1})$$

de donde:

$$b_i = \frac{a_{i+1} - a_i}{h_i} - C_i h_i - d_i h_i^2 \quad 1.11$$

de la co-continuidad en la primera derivada:

$$g'_{xi+1}(X_{i+1}) = g'_{xi}(X_{i+1})$$

$$b_{i+1} - b_i = 2 C_i h_i + 3 d_i h_i^2$$

manipulando esta última expresión y utilizando las ec. 1.10, y 1.11 obtenemos:

$$\begin{aligned} C_{i-1} \left[\frac{h_i - 1}{3} \right] + \frac{2}{3} (h_i - 1 + h_i) C_i + C_{i+1} \left[\frac{h_i}{3} \right] &= \\ = \left[\frac{a_{i+1}}{h_i} - \frac{a_i}{h_i} - \frac{a_i}{h_i - 1} + \frac{a_{i-1}}{h_i - 1} \right] &-1.12- \end{aligned}$$

por último utilizando la continuidad de la tercera derivada:

$$g'''_{xi+1}(X_{i+1}) - g'''_{xi}(X_{i-1}) = 2P \frac{a_i - y_i}{\delta y_i^2}$$

de donde:

$$6(di-di+1) = 2P \frac{ai-yi}{\delta yi^2}$$

utilizando la ec. 1.10 obtenemos:

$$\left[\frac{Ci-1}{hi+1} - \frac{Ci}{hi-1} - \frac{Ci}{hi} + \frac{Ci+1}{hi} \right] = \frac{P(Yi-ai)}{\delta Yi^2} \quad 1.13$$

Las expresiones 1.12 y 1.13 se pueden escribir en forma matricial si hacemos las siguientes definiciones:

$$C = (C_1 \dots C_{n-1})^T$$

$$Y = (a_0 \dots a_n)^T$$

$$D = \text{diag} (\delta Y_0 \dots \delta Y_n)$$

T una matriz tridiagonal de orden n-1:

$$T_{ii} = 2(h_{i+1} + h_i)/3, T_{i, i+1} = T_{i+1, i} = h_i/3$$

Y Q una matriz tridiagonal con:

$$q_{i-1, i} = 1/h_{i-1}, q_{ii} = 1/h_{i-1} - 1/h_i, q_{i+1, i} = 1/h_i$$

de acuerdo a estas def. la ecuación 1.13 queda como:

$$QC = PD^{-2} (y-a) \quad 1.14$$

y la ec. 1.12 como:

$$Tc = Q^T a \quad 1.15$$

Para separar la variable c multiplicamos la ec. 1.14 por $Q^T d^2$:

$$Q^T D^2 QC = Q^T P (y-a)$$

$$Q^T D^2 QC + PQ^T a = PQ^T Y \quad \text{y usando} \quad 1.15$$

$$(Q^T D^2 Q + PT) C = PQ^T y \quad 1.16$$

y de 1.14:

$$a = y - p^{-1} D^2 Q C \quad 1.17$$

Por tanto si conocemos el valor del parámetro lagrangiano P, entonces a partir de la ecuación 1.16 podemos obtener el vector C y de la ec. 1.17 el vector a. El resto de los coeficientes b_i y d_i los podemos calcular de las fórmulas de recurrencia 1.10 y 1-11. Con esto tenemos determinados los valores de los coeficientes del polinomio cúbico en cada intervalo. - Hasta aquí hemos supuesto, sin embargo, que conocemos el valor del multiplicador de lagrange P. Para calcularlo recurriremos a las e. 1.6 y 1.7

Ahora bien de acuerdo a la ec. 1.4:

$$\sum_{i=0}^n \left[\frac{a_i - y_i}{\delta x_i} \right]^2 = S - S^2 \quad 1.18$$

Y de acuerdo a 1.6 $\frac{\partial J}{\partial S} = 0$ de donde

$$P S = 0 \quad 1.19$$

La parte derecha de la ec. 1.18 la podemos expresar en forma matricial:

$$\sum \left[\frac{a_i - y_i}{\delta x_i} \right]^2 = [(a - y) D^{-1}]^2 \quad \text{pero de acuerdo a la ec.}$$

1.17 $a - y = -P^{-1} D^2 Q C$ por tanto:

$$= [D^{-1} P^{-1} D^2 Q C]^2 = [P^{-1} D Q C]^2 \quad \text{ahora bien, por 1.16}$$

$$= D Q (Q^T D^2 Q + P T) P Q^T Y]^2$$

Por tanto si, por comodidad, definimos la función F

(P) como:

$$1.20 \quad F(P) = \left[DQ (Q^T D^1 Q + PT) Q^T Y \right] \quad \text{entonces la ecuación --}$$

1.18 queda como:

$$1.21 \quad F^2(P) = S - \beta^2$$

Para determinar el multiplicador de lagrange P obser_ vamos que de acuerdo a la ec. 1.19 $P\beta = 0$. De donde $P=0$ ó $\beta=0$. El primer caso, que significa que las condiciones a la fronte_ ra no influyen en J, nos reducen el polinomio a una recta. En_ efecto, combinando las ec. 1.16 y 1.17 obtenemos:

$$a = y - D^2 Q (Q^T D^2 Q + PT)^{-1} Q^T y$$

y como $P=0$

$$a = y - D^2 Q (Q^T D^2 Q)^{-1} Q^T y.$$

El segundo caso, o sea cuando $\beta = 0$, nos conduce de_ acuerdo a 1.21 a:

$$F(P) = S \frac{1}{2}$$

La solución de esta ecuación nos permite obtener el_ valor de P. Con esto queda completamente determinado el ajuste de interpolación.

1.2 TIRAS CUASI-BIDIMENSIONALES

En el método cuasi-bidimensional se trata de obtener una superficie cúbica bidimensional a partir de tiras unidimensionales. Iniciaremos el tratamiento de esta formulación considerando que se tiene una rejilla regular que se desea interpolar. Es decir, que como punto de partida, no nos plantearemos el problema de generar una rejilla regular de puntos, partiendo de una distribución aleatoria, sino que abordaremos el problema considerando que la rejilla ya es regular. Posteriormente replantearemos el problema cuando esta hipótesis no se cumple.

Dado que tenemos una malla regular, aunque no necesariamente equiespaciada, podemos considerar que se tiene una serie de líneas rectas paralelas al eje 'X'. Sobre estas líneas podemos ajustar tiras unidimensionales para obtener puntos equiespaciados en la dirección de las ordenadas. Con esto, logramos que la rejilla esté interpolada y regularizada en la dirección 'X' pero no en la dirección 'Y'. Para lograr esto último ajustamos tiras en la dirección Y interpolando con un ΔY arbitrario, el resultado es una rejilla equiespaciada.

Matemáticamente esto equivale a realizar una composición de tiras ortogonales:

$$(2.1) \quad u(X,Y) = \sum_{m=0}^{J+2} \sum_{n=0}^{J+2} \beta_{mn} \phi_m(X) \psi_n(Y)$$

donde ϕ_m y ψ_n son funciones cúbicas suaves a tramos de clase C^2 .

Ahora bien, las funciones φ_m y φ_n son dos conjuntos de tiras unidimensionales en direcciones ortogonales. De acuerdo a lo dicho en la sección 1 de este capítulo a cada función $\varphi(x) \in S(X, X_0, \dots, X_n)$ le corresponde un y solo un vector $\{U_0, \dots, U_I, P_0, P_I\}$ de $I+3$ elementos. Esto significa que existe un isomorfismo entre el conjunto de vectores R^{n+2} y el conjunto de tiras cúbicas unidimensionales. Pero dado que R^{n+2} es un espacio lineal, entonces la existencia de un isomorfismo implica que el conjunto de tiras $\varphi(X) \in S(X_0, \dots, X_n)$ es también un espacio lineal de dimensión $I+3$.

Una base del espacio lineal φ_m es el conjunto de funciones $\varphi_i(x) \in S(X; X_0 \dots X_I)$, $i=0, \dots, I+2$ definidas por:

$$\varphi_i(X_j) = \delta_{ij} \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases} \quad \varphi_j(X_0) = \varphi_j(X_I) = 0$$

$$(2.2) \quad i, j = 0, \dots, I$$

$$\varphi_{I+1}(X_i) = \varphi_{I+2}(X_i) = 0 \text{ para } i=0, \dots, I$$

$$\varphi'_{I+1}(X_0) = \varphi'_{I+2}(X_I) = 1; \quad \varphi'_{I+1}(X_I) = \varphi'_{I+2}(X_0) = 0$$

La demostración de esto resulta de la definición de base de un espacio lineal (ie. un conjunto linealmente indep. que genera el espacio).

En el caso unidimensional demostramos que la tira cúbica que pásara por I puntos, es única si fijamos las primeras derivadas en los extremos. Demostraremos ahora que la tira bi-

cúbica $u(x,y)$ dada por 2.1 es única si:

$$\begin{aligned}
 (2.3) \quad & U_{ij} = U(X_i, Y_j) \quad i = 0, \dots, I; \quad j = 0, \dots, J \\
 & P_{ij} = U_x(X_i, Y_j) \quad i = 0, I; \quad j = 0, \dots, J \\
 & q_{ij} = U_y(X_i, Y_j) \quad i = 0, \dots, J; \quad j = 0, I \\
 \text{y} \quad & S_{ij} = U_{xy}(X_i, Y_j) \quad i = 0, I; \quad j = 0, J
 \end{aligned}$$

son valores conocidos.

Las ecuaciones 2.2 así como sus equivalentes para ψ_n (y) implican, que para funciones de la forma 2.1, las ecuaciones 2.3 son equivalentes a:

$$\begin{aligned}
 (2.4) \quad & U_{ij} = u(X_i, Y_j) \\
 & \begin{matrix} I+2 & J+2 \\ \Sigma & \Sigma \end{matrix} \beta_{mn} \vartheta_m(X_i) \psi_m(Y_j) = \beta_{ij}, \quad i=0, \dots, I \\
 & \quad \quad \quad m=0 \quad \quad n=0 \\
 & \quad \quad \quad ; \quad j=0, \dots, J \\
 & P_{ij} = U_x(X_i, Y_j) = \Sigma \Sigma \beta_{mn} \vartheta'_m(X_i) \psi_m(Y_j) = \\
 & \quad \quad \quad \left\{ \begin{array}{l} \beta_{I+1, j}, \quad i = 0 \\ \beta_{I+2, j}, \quad i = I \end{array} \right. \\
 & \quad \quad \quad j = 0, \dots, J \\
 & q_{ij} = U_y(X_i, Y_j) = \Sigma \Sigma \beta_{mn} \vartheta_m(X_i) \psi'_m(Y_j) = \\
 & \quad \quad \quad \left\{ \begin{array}{l} \beta_{i, j+1}, \quad i = 0 \\ \beta_{i, I+2}, \quad j = J \end{array} \right. \\
 & \quad \quad \quad i = 0, \dots, I \\
 & S_{ij} = U_{xy}(X_i, Y_j) = \Sigma \Sigma \beta_{mn} \vartheta'_m(X_i) \psi'_n(Y_j)
 \end{aligned}$$

$$= \begin{cases} \beta_{I+1, J+1}, i = 0, j = 0 \\ \beta_{I+1, J+2}, i = 0, j = J \\ \beta_{I+2, J+2}, i = I, j = 0 \\ \beta_{I+2, J+2}, i = I, j = J \end{cases}$$

La unicidad de la solución es resultado entonces de que los coeficientes β_{mn} aparecen exactamente una vez en las $(I+3)(J+3)$ ecuaciones anteriores.

Para calcular los coeficientes de los polinomios b_i cúbicos, consideraremos un rectángulo arbitrario de la malla:

$$R_{ij}, X_{i-1} \leq X \leq X_i; Y_{j-1} \leq Y \leq Y_j.$$

La ecuación 2.1 se puede expresar como:

$$U(X_i, Y_j) = C_{ij}(X, Y) = \sum_{m,n=0}^3 \delta_{mn}^{ij} (X - X_{i-1})^m (Y - Y_{j-1})^n$$

donde los subíndices i, j indican la ubicación del rectángulo en la rejilla.

Supongamos entonces que los valores $U_{ij}, P_{ij}, Q_{ij}, Y - S_{ij}$ son conocidos en las esquinas de R_{ij} .

Sea $\Delta x = X - X_i - 1, \Delta y = Y - Y_j - 1$

$\Delta x^k = (\Delta x)^k \cdot y \Delta y = (y)^k$

Entonces:

$C(x, y) =$

$$\begin{aligned} & \delta_{00} \Delta x^0 \Delta y^0 + \delta_{01} \Delta x^0 \Delta y^1 + \delta_{02} \Delta x^0 \Delta y^2 + \delta_{03} \Delta x^0 \Delta y^3 \\ + & \delta_{10} \Delta x^1 \Delta y^0 + \delta_{11} \Delta x^1 \Delta y^1 + \delta_{12} \Delta x^1 \Delta y^2 + \delta_{13} \Delta x^1 \Delta y^3 \\ + & \delta_{20} \Delta x^2 \Delta y^0 + \delta_{21} \Delta x^2 \Delta y^1 + \delta_{22} \Delta x^2 \Delta y^2 + \delta_{23} \Delta x^2 \Delta y^3 \\ + & \delta_{30} \Delta x^3 \Delta y^0 + \delta_{31} \Delta x^3 \Delta y^1 + \delta_{32} \Delta x^3 \Delta y^2 + \delta_{33} \Delta x^3 \Delta y^3 \end{aligned}$$

$\frac{\partial}{\partial x} C(x, y) = C_x =$

$$\begin{aligned} & \delta'_{10} \Delta x^0 \Delta y^0 + \delta'_{11} \Delta x^0 \Delta y^1 + \delta'_{12} \Delta x^0 \Delta y^2 + \delta'_{13} \Delta x^0 \Delta y^3 \\ + & \delta'_{20} 2 \Delta x^1 \Delta y^0 + \delta'_{21} 2 \Delta x^1 \Delta y^1 + \delta'_{22} 2 \Delta x^1 \Delta y^2 + \delta'_{23} 2 \Delta x^1 \Delta y^3 \\ + & \delta'_{30} 3 \Delta x^2 \Delta y^0 + \delta'_{31} 3 \Delta x^2 \Delta y^1 + \delta'_{32} 3 \Delta x^2 \Delta y^2 + \delta'_{33} 3 \Delta x^2 \Delta y^3 \end{aligned}$$

$\frac{\partial}{\partial y} C(x, y) = C_y =$

$$\begin{aligned} & \delta'_{01} \Delta x^0 \Delta y^0 + \delta'_{02} 2 \Delta x^0 \Delta y^1 + \delta'_{03} 3 \Delta x^0 \Delta y^2 \\ + & \delta'_{11} \Delta x^1 \Delta y^0 + \delta'_{12} 2 \Delta x^1 \Delta y^1 + \delta'_{13} 3 \Delta x^1 \Delta y^2 \\ + & \delta'_{21} \Delta x^2 \Delta y^0 + \delta'_{22} 2 \Delta x^2 \Delta y^1 + \delta'_{23} 3 \Delta x^2 \Delta y^2 \\ + & \delta'_{31} \Delta x^3 \Delta y^0 + \delta'_{32} 2 \Delta x^3 \Delta y^1 + \delta'_{33} 3 \Delta x^3 \Delta y^2 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} C(x, y) = C_{xy} =$$

$$\begin{aligned} & \delta'_{11} \Delta X^0 \Delta Y^0 + \delta'_{12} 2 \Delta X^0 \Delta Y^1 + \delta'_{13} 3 \Delta X^0 \Delta Y^2 \\ + & \delta'_{21} 2 \Delta X^1 \Delta Y^0 + \delta'_{22} 4 \Delta X^1 \Delta Y^1 + \delta'_{23} 6 \Delta X^1 \Delta Y^2 \\ + & \delta'_{31} 3 \Delta X^2 \Delta Y^0 + \delta'_{32} 6 \Delta X^2 \Delta Y^1 + \delta'_{33} 9 \Delta X^2 \Delta Y^2 \end{aligned}$$

dado que los cuatro términos anteriores pueden ser evaluados en los intervalos:

$$[x_i - 1, x_i] \quad [y_j - 1, y_j]$$

entonces tenemos los siguientes términos:

$$C(x_i - 1, y_j - 1) = \delta'_{00}$$

$$C(x_i - 1, y_j) = \delta'_{00} \Delta Y_j^0 + \delta'_{01} \Delta Y_j^1 + \delta'_{02} \Delta Y_j^2 + \delta'_{03} \Delta Y_j^3$$

$$C(x_i, y_j - 1) = \delta'_{00} \Delta X_i^0 + \delta'_{10} \Delta X_i^1 + \delta'_{20} \Delta X_i^2 + \delta'_{30} \Delta X_i^3$$

$$C(x_i, y_j) = \text{idem.}$$

$$C_x(x_i - 1, y_j - 1) = \delta'_{10}$$

$$C_x(x_i - 1, y_j) = \delta'_{10} + \delta'_{11} \Delta Y_j^1 + \delta'_{12} \Delta Y_j^2 + \delta'_{13} \Delta Y_j^3$$

$$C_x(x_i, y_j - 1) = \delta'_{10} + \delta'_{20} \Delta X_i^1 + \delta'_{30} \Delta X_i^2$$

$$C_x(x_i, y_j) = \text{idem.}$$

$$\begin{aligned}
 C_y(X_i - 1, Y_j - 1) &= \delta'_{01} \\
 C_y(X_i - 1, Y_j) &= \delta'_{01} + 2 \delta'_{02} \Delta Y_j^1 + 3 \delta'_{03} \Delta Y_j^2 \\
 C_y(X_i, Y_j - 1) &= \delta'_{01} + \delta'_{11} \Delta X_i + \delta'_{21} \Delta X_i^2 + \delta'_{31} \Delta X_i^3 \\
 C_y(X_i, Y_j) &= \text{idem.}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 C_{xy}(X_i - 1, Y_j - 1) &= \delta'_{11} \\
 C_{xy}(X_i - 1, Y_j) &= \delta'_{11} + 2 \delta'_{12} \Delta Y_j^1 + 3 \delta'_{13} \Delta Y_j^2 \\
 C_{xy}(X_i, Y_j - 1) &= \delta'_{11} + 2 \delta'_{21} \Delta X_i + 3 \delta'_{31} \Delta X_i^2 \\
 C_{xy}(X_i, Y_j) &= \text{idem.}
 \end{aligned}$$

ahora bien sea

$$k_{ij} = \begin{bmatrix}
 C(X_i-1, Y_j-1) & C_y(X_i-1, Y_j-1) & C(X_i-1, Y_j) & C_y(X_i-1, Y_j) \\
 C_x(X_i-1, Y_j-1) & C_{xy}(X_i-1, Y_j-1) & C_x(X_i-1, Y_j) & C_{xy}(X_i-1, Y_j) \\
 C(X_i, Y_j-1) & C_y(X_i, Y_j-1) & C(X_i, Y_j) & C_y(X_i, Y_j) \\
 C_x(X_i, Y_j-1) & C_{xy}(X_i, Y_j-1) & C(X_i, Y_j) & C_{xy}(X_i, Y_j)
 \end{bmatrix}$$

entonces:

$$k_{ij} = \begin{bmatrix} \Delta x_{i-1}^0 & \Delta x_{i-1}^1 & \Delta x_{i-1}^2 & \Delta x_{i-1}^3 \\ 0 & \Delta x_{i-1}^0 & 2 \Delta x_{i-1}^1 & 3 \Delta x_{i-1}^2 \\ \Delta x_i^0 & \Delta x_i^1 & \Delta x_i^2 & \Delta x_i^3 \\ 0 & \Delta x_i^0 & 2 \Delta x_i^1 & 3 \Delta x_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{00} & \delta_{01} & \delta_{02} & \delta_{03} \\ \delta_{10} & \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{20} & \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{30} & \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta y_j^0 & 0 & \Delta y_j^1 & 0 \\ \Delta y_{j-1}^1 & \Delta y_{j-1}^0 & \Delta y_j^1 & \Delta y_j^0 \\ \Delta y_{j-1}^2 & 2 \Delta y_{j-1}^1 & \Delta y_j^2 & 2 \Delta y_j^1 \\ \Delta y_{j-1}^3 & 3 \Delta y_{j-1}^2 & \Delta y_j^3 & 3 \Delta y_j^2 \end{bmatrix}$$

y dado que: $\Delta x_a = x_a - x_{i-1} - 1$; $\Delta y_a = y_a - y_{j-1} - 1$ entonces:

$$k_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & \Delta x_i & \Delta x_i^2 & \Delta x_i^3 \\ 0 & 1 & 2 \Delta x_i^1 & 3 \Delta x_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{00} & \delta_{01} & \delta_{02} & \delta_{03} \\ \delta_{10} & \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{20} & \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{30} & \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \Delta y_j & 1 \\ 0 & 0 & \Delta y_j^2 & 2 \Delta y_j^1 \\ 0 & 0 & \Delta y_j^3 & 3 \Delta y_j^2 \end{bmatrix}$$

de donde tenemos la siguiente ecuación matricial:

$$\begin{aligned} [K] &= [X] [Y] [Y] \\ &= [X] [Y] [Y]^t \end{aligned} \quad \text{Sea } Y \text{ y } Y^t$$

ahora bien sea M la matriz

$$M(h) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & h & h^2 & h^3 \\ 0 & 1 & 2h & 3h^2 \end{bmatrix}$$

de donde vemos que:

$$[X] = M(\Delta x_i);$$

$$[Y] = [X]' = M(\Delta y_j) \quad \text{sea:}$$

$$A(h) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3/h^2 & -2/h & 3/h^2 & -1/h \\ 2/h^3 & 1/h^2 & -2/h^3 & 1/h \end{bmatrix}$$

entonces: $[A(h)] \cdot [M(h)] = I$ o bien
 $[A] = [M]^{-1}$ por tanto:

$$\begin{aligned} [A] [K] [A]' &= [A] [M(\Delta x_i)] [Y] [M(\Delta y_i)]' [A]' \\ &= I [Y] ([A] [M(\Delta y_i)]') \\ &= I [Y] I^t = I [Y] I = [Y] \quad \text{y por tanto} \end{aligned}$$

$$[A] [K] [A]^t + [\delta] \quad (2.5)$$

La matrix K contiene los valores del polinomio y de sus derivadas en los vertices del rectángulo (que hemos supuesto conocidos), mientras que la matriz A está formada por elementos que dependen de las dimensiones del rectángulo. De aquí, podemos concluir que los coeficientes δ_{ij} que determinan el polinomio bicúbico de una celda están dados mediante la ecuación (2.5).

Hasta este momento hemos supuesto que los valores de U, P, q, S son conocidos en los cuatro vertices del rectángulo. Los datos de entrada de que disponemos en toda la malla) están dados por la ec. (2.3). Para obtener las p, q, s restantes acudismo, al igual que en el caso unidimensional (veáse ec. 2) a la continuidad de la segunda derivada. De donde obtenemos:

$$\begin{aligned} & \Delta Y_j - 1 Q_{i, j+1} + 2 (\Delta Y_j - 1 + \Delta Y_j) Q_{ij} + \Delta Y_j Q_{i, j-1} \\ & \quad (3a.) \\ = & \quad 3 \left[\frac{\Delta Y_j - 1}{\Delta Y_j} (u_{i, j+1} - U_{ij}) + \frac{\Delta Y_j}{\Delta Y_j - 1} (U_{ij} - u_{i, j-1}) \right] \\ & \quad j = 1, \dots, J-1; i = 0, \dots, I \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \Delta Y_j - 1 S_{i, j+1} + 2 (\Delta Y_j - 1 + \Delta Y_j) S_{ij} + \Delta Y_j S_{i, j-1} \\ & \quad (4a) \\ = & \quad 3 \left[\frac{\Delta Y_j - 1}{\Delta Y_j} (P_{i, j+1} - P_{i, j}) + \frac{\Delta Y_j}{\Delta Y_j - 1} (P_{ij} - P_{i, j-1}) \right] \\ & \quad j = 1, \dots, J-1 \end{aligned}$$

$$\Delta X_i - 1 P_{i+1,j} + 2 (\Delta X_{i-1} + \Delta X_i) P_{ij} + \Delta X_i P_{i-1,j}$$

(1a)

$$= 3 \left[\frac{\Delta X_{i-1}}{\Delta X_i} (U_{i+1} - U_{ij}) + \frac{\Delta X_i}{\Delta X_{i-1}} (U_{ij} - U_{i-1,j}) \right];$$

$$i = 1, \dots, I-1; j = 0, J$$

$$\Delta X_i - 1 S_{i+1,j} + 2 (\Delta X_{i-1} + \Delta X_i) S_{ij} + \Delta X_i S_{i-1,j}$$

(2a).

$$= 3 \left[\frac{\Delta X_{i-1}}{\Delta X_i} (Q_{i+1,j} - Q_{ij}) + \frac{\Delta X_i}{\Delta X_{i-1}} (Q_{ij} - Q_{i-1,j}) \right]$$

$$i = 1 \dots I-1, i=0, \dots, J$$

El enfoque desarrollado hasta este punto nos da la posibilidad de obtener la tira siempre que tengamos a los valores de campo distribuidos en una red regular. La aplicación geofísica de estos conceptos recae fundamentalmente sobre la interpolación de datos aeromagnéticos (o para cualquier tipo de datos geofísicos distribuidos en forma de líneas). La razón estriba en que la distribución de valores de campo es sobre líneas de vuelo. Los requisitos matemáticos para la validez del algoritmo anterior son: que las tiras unidimensionales estén sobre líneas rectas y que las rectas sean paralelas entre sí. Como sabemos ninguna de estas dos condiciones se cumplen en la realidad y de aquí que el método cuasibidimensional tenga estas dos fuentes de error. Para minimizar estas dificultades se desarrollaron dos tipos de métodos: los que utilizan mínimos cuadrados y proyecciones lineales para lograr que los valores de campo caigan sobre líneas rectas (Batacharrya, Rosmunsen) y

los métodos que utilizan funciones paramétricas para ajustar - las tiras unidimensionales (Heising 1976, Rasmunssen 1976). Di- cho de otra forma el primer grupo hace que trabajemos sobre lí- neas rectas, mientras que en el segundo trabajamos con polígo- nos cercanos a líneas rectas. El segundo método tiene la venta- ja de que interpolamos con los valores de campo originales pe- ro tiene la limitación de que la dispersión de pendientes es - muy grande. En el otro grupo este problema no se presenta pero el ajuste de una recta y la proyección lineal de los valores - originales introduce una fuente de error.

METODO DE LINEAS RECTAS

Nos proponemos ahora presentar dos de los desarro- llos más representativos de estos grupos. La simplicidad del - primero de ellos nos permite presentarlo en forma algorítmica:

- a) Ajuste por mínimos cuadrados de una recta (l_1) a cada lí- neas de vuelo (espacio de distancias).
- b) Para obtener los valores de campo sobre la línea ajustada (l_1) procedemos como sigue:
 - i) Para todos los datos alrededor de la recta l_1 , calcula- mos su distancia perpendicular (d) la localización del punto proyectado (p , véase fig. 2.2)
 - ii) Si $d < \text{cte. arbitraria}$. El valor del campo en el proyec- tado es igual al valor del campo en punto original.
 - iii) Si dos puntos consecutivos están en lados opuestos a la

línea (l_1) hacemos una interpolación lineal sobre el -- campo.

iv) Llamemos PIVOTE al punto sobre l_1 , con campo conocido o calculado, que esté más cercano a la esquina sureste, - localización del pivote.

v) Empezamos la interpolación (que se explica adelante) -- con respecto a los puntos en la dirección noreste.

vi) Hacemos la interpolación en la dirección suroeste. (véase fig. 2.21)

vii) Para la interpolación calculamos:

- Distancia del punto original al pivote (d_1)
- Distancia del punto proyectado al pivote (d_2)

Conocemos:

- El campo en el punto original (f_o)
- El campo en el pivote (F_{p1})

entonces el campo en el punto proyectado

F_p será:

$$F_p = \frac{d_2}{d_1} F_o + \frac{(1-d_2)}{d_1} F_{p1}$$

- Este punto con campo calculado se transforma en el nue vo pivote, el proceso continúa hasta el último punto. (véase fig. 2).

c) Ajustamos una tira cúbica, a los valores del campo pro-- yectadas.

d) A partir de las tiras ajustadas, calculamos los valores_

de campo sobre la línea (l_1), espaciados a un intervalo -- constante K la dirección Norte-sur, (véase fig. 3).

- e) El proceso anterior se repite para todas las líneas de vue lo (fig. 3)
- f) Sobre las líneas (2) este-oeste ajustamos una cubicspline_ unidimensional e interplamos los valores de campo al inter_ valo constante K .

FIG. 2.21

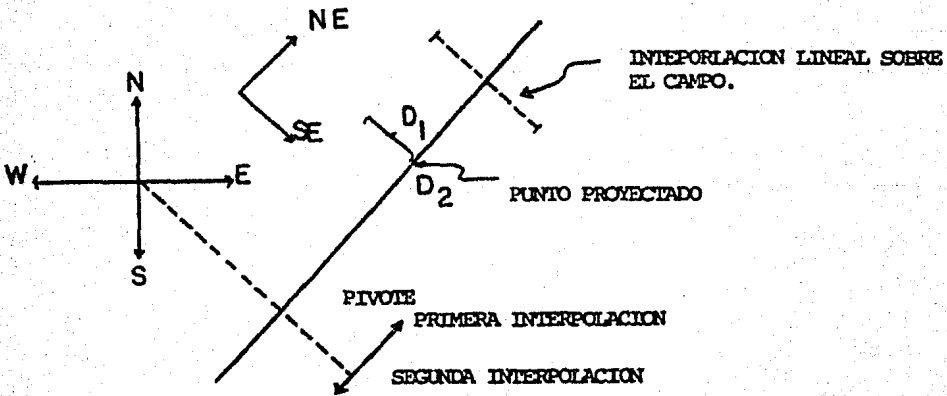
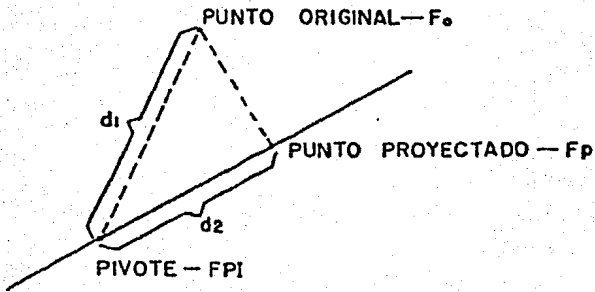
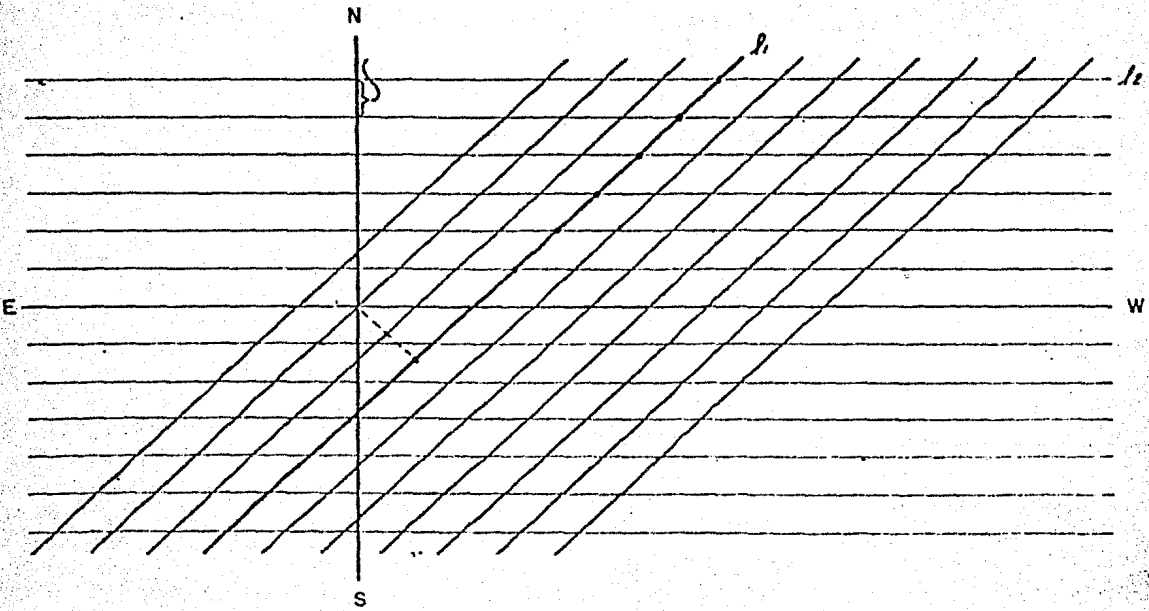


FIG. 2 :



$$F_p = \frac{d_2}{d_1} F_o + \left(1 - \frac{d_2}{d_1}\right) F_{PI}$$

FIG. 3 :



METODO PARAMETRICO

En la formulación paramétrica de interpolación cuasidimensional, partimos de una distribución de puntos aleatoria pero topológicamente equivalente a una rejilla regular:

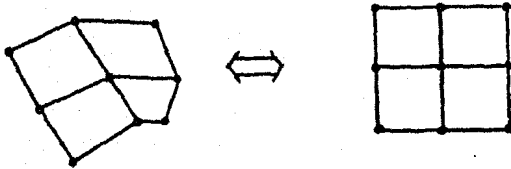


FIG. 2.1-

Supongamos que tenemos una distribución de puntos como los de la figura 2.

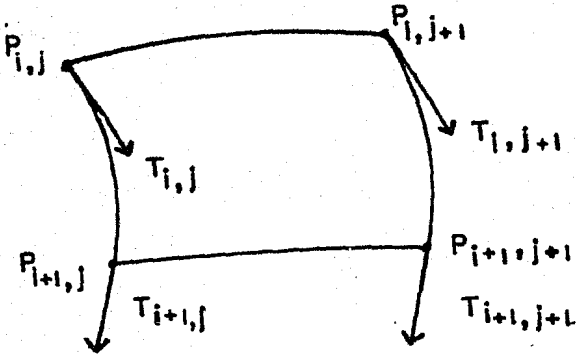
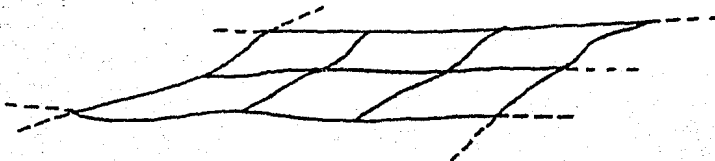


FIG. 2.2-

Donde T_{ij} son las derivadas en los puntos P_{ij}

Estos cuatro puntos definen la superficie bicúbica i, j , que a su vez es colindante con otras superficies bicúbicas que forman finalmente la tira bidimensional.



A cada superficie i, j le podemos asignar cuatro polinomios cúbicos unidimensionales que corresponden a dos puntos y sus respectivas derivadas (sec. 1): $K_1 = (P_{i,j}, P'_{i,j}, T_{i,j}, T'_{i,j})$, K_2, K_3, K_4 .

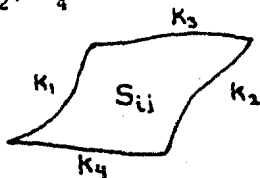


FIG. 2.3-

Partiremos del tratamiento de la superficie básica S_{ij} (Fig. 3): P. La idea consiste en realizar una composición de tiras, una en la dirección paramétrica v y otra en la dirección u de tal modo que la función resultante sea una función $P(u, v)$. Parametrizamos K_1 y K_2 con respecto a la variable u , y parametrizamos K_3, K_4 con respecto a la variable v . Localizamos entonces, dos puntos $P(u) \in K_1$ y $Q(u) \in K_2$ (ver fig. 2.4). Interpolamos desde K_1 a K_4 en la variable u , mediante un segmento de curva que tenga como punto de partida $Q(u)$ y de llegada $P(u)$. Parametrizamos entonces, este segmento de curva con respecto a la variable v construyendo el polinomio bicúbico $(P(u), Q(u), X(u), Y(u))$ donde X, Y que representan las derivadas, están dados por:

$$(2.6) \quad X(u) = (au^3 + bu^2 + cu + d) S_{ij} + (eu^3 + fu^2 + gu + h) S_{i+1,j}$$

$$Y(u) = (au^3 + bu^2 + cu + d) S_{i,j+1} + (eu^3 + fu^2 + gu + h) S_{i+1,j+1}$$

Las S_{ij} son tangentes mostradas en la fig. 2.4. La ec. 2.6

nos permite interpolar cúbicamente las tangentes S a lo largo de la dirección u , de tal modo que en los vértices de la celda, $X(u)$ valga S_{ij} ó $S_{i+1,j}$ y $Y(u)$, $S_{i,j+1}$ ó $S_{i+1,j+1}$

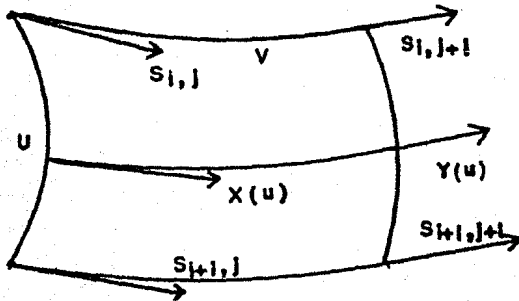


FIG. 2.4

Si por comodidad suponemos que las variables u,v están normalizadas al intervalo $[0,1]$, las condiciones sobre x,y serán:

$$(2.7) \quad \begin{aligned} X(0) &= S_{i,j} & X(1) &= S_{i+1,j} \\ Y(0) &= S_{i,j+1} & Y(1) &= S_{i+1,j+1} \end{aligned}$$

Ahora bien, hemos supuesto que tenemos un polinomio cúbico en la dirección paramétrica v :

$$P(v) ; v^3 a_3 + v^2 a_2 + v a_1 + a_0$$

y que dicho polinomio está comprendido entre los puntos $P(u)$ y $Q(u)$ con derivadas $X(u)$ y $Y(u)$ en los extremos. Entonces de acuerdo a la sec. 1 de este cap. (pág.) tendremos que:

$$(2.8) \quad \begin{aligned} P(u,v) &= v^3 [2(P(u)-Q(u)) + X(u) + Y(u)] \\ &+ v^2 [3(Q(u)-P(u)) + 2X(u)+Y(u)] \end{aligned}$$

$$+ V X(u)$$

$$+ P(u)$$

Este polinomio bicúbico corresponde a la celda S_{ij} . Pse puede expresar como:

$$(2.9) P(u,v) = \sum_{p=0}^3 \sum_{q=0}^3 u^p v^q R_{pq} \quad 0 \leq (u, v) \leq 1$$

de este modo el problema puede plantearse en términos de la obtención de las ctes. R_{pq} en función de valores conocidos. De acuerdo a la ec. (2.8) hay cuatro funciones que analizar: P,Q, X;Y. Las dos primeras están ya expresadas en términos de cantidades conocidas, puesto que P(u) está relacionado (

sec. 1) a $(P_{i,j}, P_{i,j+1}, T_{i,j}, T_{i+1,j})$ y Q(u) está asociado a $(P_{i,j+1}, P_{i+1,j+1}, T_{i,j+1}, T_{i+1,j+1})$. El problema se reduce entonces al cálculo de las ctes. a,b,c,d,e,f,g,h de la ec. (2.6). Para ello es necesario observar que la tangencia entre dos sábanas contiguas S se preserva a lo largo de K_1 y K_2 . Esto ocurre por la construcción misma de X(u); y (u) puesto -- que X(u) fué calculado para la sábana S_{ij} mientras que Y(u) se calculó para la sábana $S_{i,j+1}$. Ahora bien, estamos interesados en la obtención de una superficie que tenga continuidad de la primera derivada en todos los burdes. K_1 y K_2 cumplen por construcción esta condición pero ésto no ocurre para K_3 y K_4 por -- ello demandamos que:

$$\left. \frac{\partial P(u,v)}{\partial u} \right|_{u=1} = \left. \frac{\partial Q(u,v)}{\partial u} \right|_{u=1} \quad (2.10)$$

Conde: $P(u,v) \in S_{ij}$ y $Q(u,v) \in S_{i+1,j}$.

Para lograr la determinación de las constantes de la expresión (2.9) utilizaremos primero la ec. (2.10). De acuerdo

la sección 1 tenemos que:

$$P(u) = U^3[2(P_{ij} - P_{i+1,j}) + T_{ij} + T_{i+1,j}] + u^2[3(P_{i+1,j} - P_{ij})] \quad (2.11)$$

$$- 2 T_{ij} - T_{i+1,j}] + U T_{ij} + P_{ij}$$

$$y \quad Q(u) = U^3[2(P_{i,j+1} - P_{i+1,j+1}) + T_{i,j+1} + T_{i+1,j+1}] + U^2[3(P_{i+1,j+1} - P_{i,j+1}) + 2 T_{i,j+1} - T_{i+1,j+1}] + U T_{i,j+1} + P_{i,j+1}$$

Derivando $P(u)$, $Q(u)$, $X(u)$; $Y(u)$ y evaluándolo en i , obtenemos de acuerdo a la expresión (2.8):

$$\left. \frac{\partial P(u,v)}{\partial u} \right|_{u=1} = v^3[2(T_{i+1,j} - T_{i+1,j+1}) + (3a+2b+c)$$

$$(S_{ij} + S_{i,j+1}) + (3e+2f+g)(S_{i+1,j} + S_{i+1,j+1})] +$$

$$v^2[3(T_{i+1,j+1} - T_{i+1,j}) - (3a+2b+c)(2S_{ij} + S_{i,j+1})$$

$$- (3e+2f+g)(2S_{i+1,j} + S_{i+1,j+1})]$$

$$+ v[(3a+2b+c)S_{ij} + (3e+2f+g)S_{i+1,j} + T_{i+1,j}]$$

De igual forma obtenemos:

$$\left. \frac{\partial Q(U,v)}{\partial u} \right|_{u=0} = v^3[2(T_{i+1,j} - T_{i+1,j+1}) + c(S_{i+1,j} +$$

$$S_{i+1,j+1})] + v^2[3(T_{i+1,j+1} - T_{i+1,j}) - c(2S_{i+1,j} +$$

$$S_{i+1,j+1}) + vc(S_{i+1,j} + T_{i+1,j})]$$

De donde igualando términos de la misma potencia en v:

$$3e+2f+g = 0 \quad (2.12)$$

$$3a+2b+c = 0$$

$$g = 0$$

Pero de acuerdo a las condiciones de frontera ec. obtenemos:

$$d=1, h=0, a+b+c+d=0, e+f+g+h = 1 \quad (2.13)$$

de donde juntando las ec. (2.11) y (2.12) obtenemos:

$$\begin{aligned} 3a+2b+c &= 0 \\ -c+3e+2f &= 0 \quad (2.14) \\ a+b+c &= 0 \\ e+f &= 0 \end{aligned}$$

Interpolando cúbicamente las tangentes en la frontera - paramétrica $u=0$, obtenemos:

$$\left. \frac{\partial P(u,v)}{\partial u} \right|_{u=0} = (av^3 + bv^2 + cv + d) T_{ij} + (ev^3 + fv^2 + gv + h) \cdot T_{i,j+1}$$

Utilizando la ec. (2.11) y comparándola con la ecuación 2.14 obtenemos que las constantes buscadas son:

$$a=2, b=-3, e=-2, f=3$$

Substituyendo en la ec. 2.8 las expresiones analíticas de $P(u)$, $Q(u)$, $X(u)$; $y(u)$ y comparándola con la expresión general para un polinomio bicúbico (ec. 2.9) obtenemos que las --- constantes R_{ij} son:

$$R_{00} = P_{ij}$$

$$R_{01} = S_{ij}$$

$$R_{02} = 3(P_{i,j+1} - P_{ij}) - (2 S_{ij} + S_{i,j+1})$$

$$R_{03} = 2(P_{ij} - P_{i,j+1}) + (S_{ij} + S_{i,j+1})$$

$$R_{10} = T_{ij}$$

$$R_{11} = 0$$

$$R_{12} = 3(T_{i,j+1} - T_{ij})$$

$$R_{13} = 2(T_{ij} - T_{i,j+1})$$

$$R_{20} = 3(P_{i+1,j} - P_{ij}) - 2(T_{ij} + T_{i+1,j})$$

$$R_{21} = 3(S_{i+1,j} - S_{ij})$$

$$R_{22} = 3[3(P_{i+1,j+1} - P_{ij+1} + P_{ij} - P_{i+1,j}) + 2(T_{ij} - T_{i,j+1}) + (T_{i+1,j} - T_{i+1,j+1}) + 2(S_{ij} - S_{i+1,j}) + (S_{i+1,j+1})]$$

$$R_{23} = 2[3(P_{i+1,j} - P_{ij} + P_{ij+1} - P_{i+1,j+1}) + 2(T_{ij+1} - T_{ij}) + (T_{i+1,j+1} - T_{i+1,j}) + 3(S_{i+1,j} + S_{i+1,j+1} - S_{ij} - S_{ij+1})]$$

$$R_{3.0} = 2(P_{ij} - P_{i+1,j}) + T_{ij} + T_{i+1,j}$$

$$R_{3.1} = 2(S_{ij} - S_{i+1,j})$$

$$R_{32} = 3[2(P_{ij+1} - P_{i+1,j+1} + P_{i+1,j} - P_{ij}) + (T_{ij+1} + T_{i+1,j+1}) - (T_{ij} + T_{i+1,j}) + 4(S_{i+1,j} - S_{ij}) + 2(S_{i+1,j+1} - S_{ij+1})]$$

$$R_{33} = 2[2(P_{ij} - P_{i+1,j} + P_{i+1,j+1} - P_{ij+1}) + (T_{ij} + T_{i+1,j}) - (T_{ij+1} + T_{i+1,j+1}) + (S_{ij} - S_{i+1,j} + S_{ij+1} - S_{i+1,j+1})]$$

Con los coeficientes anteriores completamos la interpolación cuasibidimensional paramétrica. Hemos visto hasta este punto que los métodos cuasi-bidimen. tienen básicamente la limitación de que deben ser aplicados a configuraciones espaciales cercanas a líneas paralelas (por ej. líneas de vuelo).

A continuación abordaremos un método (estrictamente bidimensional) que no tiene estas limitaciones pero que resulta más costoso por consumir más tiempo de máquina que los métodos anteriores. Debe concluirse entonces que cuando la distribución espacial es cercana a líneas rectas los algoritmos cuasibid. resultan más baratos. En cambio el método que veremos a continuación se puede utilizar para cualquier distribución - - aleatoria de datos.

3) TIRAS Estrictamente BIDIMENSIONALES

La energía de flexión de una placa curvada (Landau y Lifshitz 1964) esta dada por:

$$E = K \iint \left[\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right]^2 + 2(1 - \sigma) \left\{ \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right]^2 - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right\} \right] dx dy \quad (3.1)$$

Donde K es una constante que depende del módulo de young Y y σ , denominado coeficiente de Poisson, representa el grado de contracción transversal cuando aplicamos un esfuerzo tensionante en sentido longitudinal o viceversa. La variación de este coeficiente se encuentra entre cero y $\frac{1}{2}$. El caucho es un material para el cual σ es del orden de $\frac{1}{2}$ mientras que los metales tienen un $\sigma \sim 0$. La suavidad de la deformación, depende de la rigidez y dado que nosotros estamos interesados en una interpolación lo más suave posible consideraremos que $\sigma = 0$. De este modo 3.1 queda como:

$$(3.2) \quad E = \iint \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right]^2 + 2 \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right]^2 + \left[\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right]^2 dx dy.$$

Al igual que en el caso de la barra deformada (sección 1) nos planteamos la obtención de una función $g(x,y)$ que minimice la funcional (3.2) y que tome los valores $g(t_i)$ en los puntos $t_i = (x_i, y_i)$ $i = 0, \dots, n$.

Podríamos proceder a la obtención de la ecuación Euler-Lagrange por un procedimiento variacional. Existe sin embargo una forma de plantear este problema que resulta mucho más concisa y elegante.

La minimización de la funcional (3.2) comprende en esencia dos problemas: el relativo a las condiciones de frontera y el que corresponde a la obtención de la extremal de la integral de energía. Estos dos puntos pueden simularse por medio de dos transformaciones lineales definidas sobre determinados espacios y con ciertas normas. La idea básica consiste en substituir el planteamiento variacional de encontrar una trayectoria mínima por otro en el que nos proponemos minimizar una norma en un cierto espacio de funciones. Dicho de otro modo el problema variacional lo hacemos equivalente a encontrar una transf. lineal T y una determinada norma, tal que la minimización de dicha norma en el contradominio de T minimiza la funcional (3.2)

Procedamos pues a la obtención de las transformaciones lineales y de las normas que simulen la minimización funcional. Consideremos dos transformaciones lineales T y A:

$$T: \bar{X} + \bar{Y}$$

$$A: \bar{X} + B$$

Mediante la transformación T simularemos la integral (3.2) mientras que la transformación A se relaciona con las

condiciones de frontera. Supongamos que \mathcal{E} es \mathbb{R}^n mientras que \bar{X} es un espacio de funciones. La transformación A nos relaciona cada función de \bar{X} con un vector de \mathbb{R}^n . De hecho si consideramos que la superficie que nos interesa encontrar es una función g perteneciente al espacio X , sabemos que dicha función debe tomar el valor $g(t_i)$ en los puntos $T_i, i=1, \dots, n$ por tanto si definimos la transformación A como:

$$A(v) = (v(a_1), \dots, v(a_n))$$

donde $v(a_i)$ los identificamos con los valores de deformación de la placa, entonces la función que nos interesa encontrar debe estar en $A^{-1}(v)$. Dicho de otra forma, hay infinitas funciones que toman los valores $v(a_i)$ en los puntos a_i (estamos interesados en una función de este conjunto); lo que la transformación A nos permite es la definición de este conjunto, a saber $A^{-1}(v)$.

Lo anterior nos permite simular las condiciones de frontera: supongamos que queremos encontrar la función de deformación de una placa que pase por determinados puntos. Los puntos o valores de deformación son de hecho un punto de \mathbb{R}^n es decir de \mathcal{E} . Entonces, dado un vector de \mathcal{E} mediante $A^{-1}(\mathcal{E})$ encontramos todas las funciones que pasan por los valores de interés.

Nuestro problema se reduce entonces a la simulación de la funcional (). Supongamos que la transformación T es el -

bigradiente ieque:

$$(3.3) \quad T: V \rightarrow (D_i D_j V; i, j = 1, 2)$$

donde el contradominio de T (ie) es el conjunto de cuadru--
pletas: $Y = (Y_{ij}, i, j, 1, 2)$ con la norma

$$(3.4) \quad |Y|_Y^2 = \sum_{i,j} \int_{R^2} |Y_{ij}(t)|^2 dt$$

y el producto escalar:

$$(Y, Y')_Y = \sum_{i,j} \int_{R^2} Y_{ij}(t) Y'_{ij}(t) dt$$

la ecuación (3.4) la podemos expresar como:

$$|Y|_Y^2 = \int (|Y_{11}|^2 + |Y_{12}|^2 + |Y_{21}|^2 + |Y_{22}|^2) dt$$

pero de acuerdo a la definición de T

$$|Y|_Y^2 = \int \left(\left| \frac{\partial^2 V}{\partial t_1} \right|^2 + 2 \left| \frac{\partial^2 V}{\partial t_1 \partial t_2} \right|^2 + \left| \frac{\partial^2 V}{\partial t_2} \right|^2 \right) dt$$

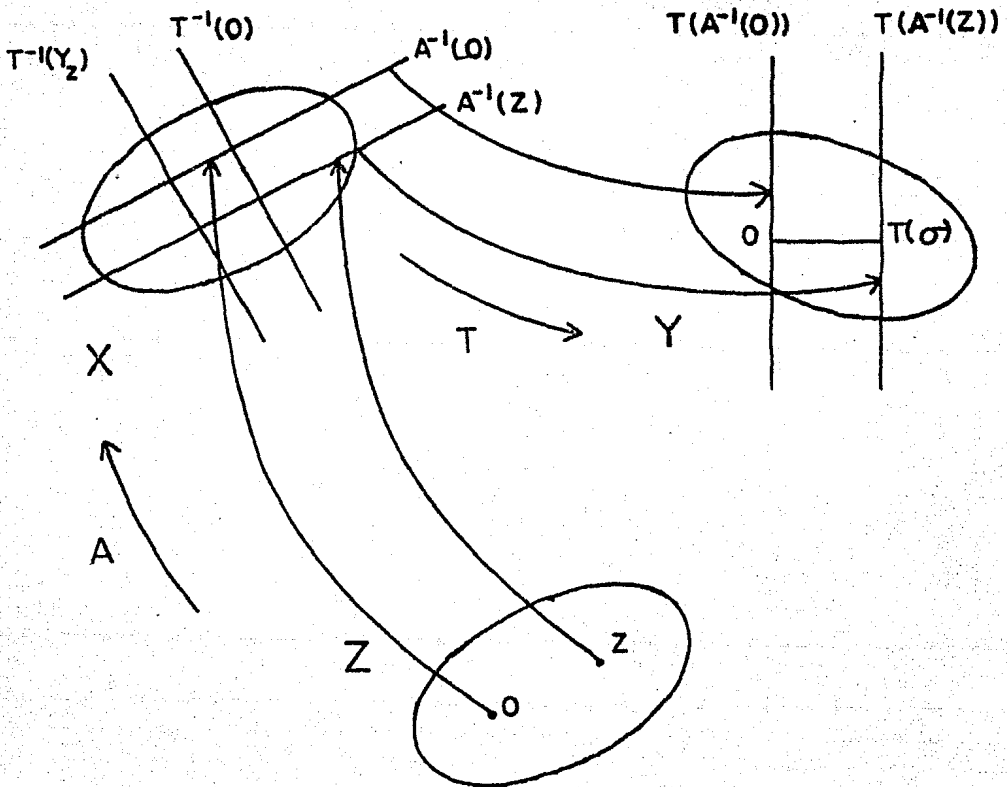
que es precisamente la funcional (2.3). La norma del espacio \bar{X} la definimos como:

$$|V|_X^2 = |V(b_1)|^2 + |V(b_2)|^2 + |V(b_3)|^2 + \sum_{ij} \int |D_i D_j V(t)|^2 dt$$

Supongamos entonces que tenemos un punto del espacio \mathcal{B} es decir que definimos por donde queremos que pase la placa. La función que buscamos (véase Fig. 3.1 debe estar en el espacio lineal $A^{-1}(\mathcal{B})$. Ahora bien, si aplicamos a este último es-

pacio lineal la transformación T obtendremos el espacio lineal $T(A^{-1}(S))$. La función que buscamos es aquel elemento de $A^{-1}(S)$ que al aplicarle T este lo más cerca posible del cero en \underline{Y} . - Esto último es una consecuencia de la definición que hemos hecho de la transformación T y de la definición de la norma en \underline{Y}

FIG 3.1



Llamemos σ a la función de interés. Por lo dicho $T(\sigma)$ - debe estar lo más cerca posible del cero de \bar{Y} pero para que - ésto ocurra por un lado $\sigma \in T(A^{-1}(8))$ y por otro debe estar - en un subespacio ortogonal a $T(A^{-1}(0))$ ie $\sigma \in T^{\perp}(A^{-1}(0))$. Por - tanto si suponemos que $T(X) \in T(A^{-1}(0))$ entonces lo anterior - significa que:

$$\langle T(\sigma), T(X) \rangle_y = 0$$

Ahora bien, si cambiamos de dominio y de norma de tal - modo que pasamos al espacio adjunto obtenemos:

$$(3.5) \quad \langle T(\sigma), T(X) \rangle_y = \langle T^T T \sigma, X \rangle_x = 0$$

Pero $X \in A^{-1}(0)$ es decir del $N(A)$. Por tanto la ecua-- ción anterior nos dice que $T^T T \sigma$ debe estar en $N^{\perp}(A)$. Esto - último significa que $T^T T \sigma$ se puede expresar como combinación lineal de los renglones de A (es decir de la transformación a vista como matriz).

Dicho de otra forma:

$$(3.6) \quad T^T T \sigma = A^T \lambda$$

En la ecuación 3.5 hemos supuesto que $X \in A^{-1}(0)$

Supongamos un $X \in \bar{X}$ arbitraria, entonces tendremos que:

$$\langle T \sigma, T x \rangle = \langle T^T T \sigma, X \rangle$$

Pero de acuerdo a la ecuación (3.6)

$$= \langle A^T \lambda, X \rangle \text{ y por tanto}$$

$$(3.7) \quad \langle T \sigma, T x \rangle_y = \langle \lambda, A x \rangle \quad \forall X \in \bar{X}$$

y este último producto interior esta en Z . Es decir que hemos relacionado la condición de minimización de la norma en \bar{V} con una condición en el espacio B .

Ahora bien $A(v) = V(a_i) \cdot \forall v \in \bar{X}$, y de acuerdo a la definición del producto interior en \bar{V} obtenemos:

$$(3.8) \int D_{ik} \sigma(t) D_{i'k} V(t) dt = \sum_{i=1}^n \lambda_i V(a_i)$$

$$\forall v \in \bar{X}$$

Pero de acuerdo a la definición de la delta de dirac. - la parte derecha de la ec. 2.8 la podemos expresar como:

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i V(a_i) = \left\langle \sum_i \lambda_i \delta_{ai}, V \right\rangle$$

y por tanto:

$$\begin{aligned} \sum_{j,k} \langle D_j D_k, D_{i'k} V \rangle &= \left\langle \sum_i \lambda_i \delta_{ai}, V \right\rangle \\ = \sum_{i,k} \langle D_j^2 D_k^2 \sigma, V \rangle &= \langle A^2 \sigma, V \rangle = \langle \sum_i \lambda_i \delta_{ai}, V \rangle \end{aligned}$$

de donde obtenemos que:

$$(3.9) \quad A^2 \sigma = \sum_i \lambda_i \delta_{ai}$$

que es justamente la ecuación Euler lagrange de la funcional (3.2). Nótese que la obtención de la ecuación de Euler ha consistido básicamente en establecer una relación directa entre el espacio B y el espacio Y minimizando la norma en este últi

mo espacio.

Para determinar las condiciones de frontera recurrimos a la ecuación (3.8). V es una función arbitraria del espacio \underline{X} que a su vez es el dominio de la transformación T . El Kernel de esta última transformación, que está definida como el bi-gradiente, (Ec. 3.3) es el conjunto de los polinomios de primer grado en R^2 . Si hacemos que V sea un elemento del Kernel de T entonces la parte derecha de la ecuación 3.8 es cero, y de esto obtenemos:

$$(3.10) \quad \sum_{i=1}^n \lambda_i \psi(a_i) = 0$$

donde ψ es un polinomio bidimensional de primer grado. Si los puntos de deformación de la placa a_i tienen coordenadas (X_i, Y_i) entonces la ecuación 3.10 se puede expresar como:

$$(3.11) \quad \sum \lambda_i = 0 ; \sum \lambda_i X_i = 0 ; \sum \lambda_i Y_i = 0$$

Las ecuaciones (3.9) y (3.11) determinan la función de deformación o tira. La ecuación (3.9) se conoce como ecuación biarmónica y para encontrar su solución acudiremos al hecho --

(LAURENT 1966) de que si $H(t) = \frac{1}{2H} |t|^2 \log |t|$

entonces $\Delta^2 H = \delta$, es decir que $H(t)$ es un Kernel de dicha ecuación. En efecto consideremos la función:

$$(3.12) \quad u = \sum \lambda_i \delta a_i * H$$

entonces

$$\Delta^2 u = \Delta^2 \left(\sum \lambda_i \delta a_i * H \right) = \sum \lambda_i \delta a_i * \Delta^2 H$$

$$= \sum \lambda_i \delta_{ai} * \delta = \sum \lambda_i \delta_{ai}$$

es decir que la función u definida por 3.12 más una función -- del Kernel de la transf. T ie un pol de primer grado es solu-- ción de la ec. 3.9

Los resultados anteriores pueden escribirse en forma ma tricial de la siguiente forma: la función de interpolación - $\sigma(t)$ que minimiza la funcional (3.2) está dada por:

$$\sigma(t) = \sum_{i=1}^n \lambda_i k(t-t^i) + a_1 X + a_2 Y + a_3$$

donde $t = (X, Y)$

$$k(\omega) = |\omega|^2 \log |\omega| ; |\omega|^2 = \omega_x^2 + \omega_y^2$$

y donde los coeficientes $\lambda_1 \dots \lambda_n, a_1, a_2, a_3$ satisfacen las ecuaciones:

$$K\lambda + E\alpha = B \quad (3.13)$$

$$E^T \lambda = 0 \quad (3.14)$$

donde

$$E = \begin{bmatrix} 1 & X_1 & Y_1 \\ 1 & X_2 & Y_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & X_n & Y_n \end{bmatrix}$$

$$K = (K_{ij})$$

$$K_{ij} = K(t^i - t^j), i \neq j$$

$$K_{ii} = 0$$

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda \end{bmatrix}$$

$$\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix}$$

Reproduciremos ahora un método (Paihuaetal. 1976) para obtener numéricamente los coeficientes de la función $\sigma(t)$. Este método se conoce como método de proyección.

El propósito de este método consiste en lograr una simplificación del sistema matricial (3.13) y (3.14) mediante proyecciones. En efecto, consideremos el subespacio vectorial de R definido por:

$$\xi = \{(V_1, V_2, \dots, V_n)^T \in R^n \mid V_i = a + bxi + C_{yi}, \\ i = 1, 2, \dots, n \}$$

Este subespacio de R^n tiene por componentes básica vector polinomios de primer grado generados por los vectores columna de la matriz E . Es decir dado que los vectores.

$$\begin{aligned} u_1 &= (1, 1, \dots, 1)^t \\ u_2 &= (x_1, x_2, \dots, x_n)^t \\ u_3 &= (y_1, y_2, \dots, y_n)^t \end{aligned} \quad (3.15)$$

Son linealmente independientes y generan E , son entonces una base de este subespacio. Por comodidad podemos generar una base ortonormal mediante el procedimiento de Gram-Schmidt,

a partir de la base 3.15. Definimos las componentes de esta base como:

$$\hat{V} = (\hat{V}_1, \hat{V}_2, \hat{V}_3)$$

donde

$$\hat{V}_1 = \frac{V_1}{n} \quad ; \quad \hat{V}_2 = \frac{V_2}{|V_2|} \quad ; \quad \hat{V}_3 = \frac{V_3}{|V_3|}$$

$$y \quad V_1 = u_1$$

$$V_2 = u_2 = \langle u_2, \hat{V}_1 \rangle V_1 ;$$

$$V_3 = u_3 - \langle u_3, \hat{V}_1 \rangle \hat{V}_1 - \langle u_3, \hat{V}_2 \rangle V_2$$

Si observamos el sistema matricial (3.13) y (3.14) encontraremos que la matriz E, que es base del subespacio E, aparece en ambos sistemas de ecuaciones matriciales. Pero aún más, el hecho de que $E^T \Lambda = 0$ significa que Λ se encuentra en el subespacio ortogonal a E i.e. $E^\perp \equiv \mathcal{F}$. Es este punto el que nos sugiere utilizar proyecciones para simplificar el sistema matricial.

Dado que los vectores columnas de V son ortogonales entonces la proyección ortogonal de R^n sobre E está dada por:

$$Q = VV^t$$

mientras que la proyección de R^n sobre el espacio ortogonal a E, i.e. \mathcal{F} , es:

$$P = I - Q.$$

Como señalamos la ec. (3.14) sugiere la posibilidad de proyectar el sistema matricial 3.13 y 3.15 sobre \mathcal{F} con objeto de simplificarlo. En efecto la ec. 3.15 proyectada nos da:

$$P \hat{K} \Lambda + PE = PB$$

Pero dado que Λ de acuerdo a la ecuación 3.14 se encuentra \mathcal{F} entonces la proyección de Λ sobre \mathcal{F} debe ser Λ es decir que

$$P \Lambda = \Lambda$$

Esta ecuación es la ecuación equivalente a 3.14 en el espacio \mathcal{F} . De este modo obtenemos que

$$P \hat{K} P \Lambda + PE = PB$$

Pero, por otra parte, las columnas de la matriz E se encuentran completamente contenidas dentro del espacio E (de hecho son una base del mismo). Por tanto la proyección de estos vectores en el espacio ortogonal \mathcal{F} debe ser necesariamente cero, i.e.:

$$PE = 0$$

De donde obtenemos que:

$$P \hat{K} P \Lambda = PB$$

con esto hemos logrado la simplificación del sistema matricial original (3.13) y (3.14) que se reduce entonces a:

$$P \hat{K} P \Lambda = PB$$

$$P \Lambda = \Lambda$$

Por comodidad podemos definir las matrices

$$A = P \hat{K} P ; \quad b = PB$$

de tal forma que nuestro sistema matricial queda:

$$A \Lambda = b \quad (3.15)$$

$$P \Lambda = \Lambda \quad (3.16)$$

Por tanto, nuestro problema se reduce a encontrar una Λ^* que sea solución del sistema (3.15) y después proyectar mediante P dicha Λ^* sobre el espacio \mathcal{F} , ésta es la solución que buscamos.

Un resultado adicional del método de proyección que lo hace computacionalmente hablando más simple es (PAIHUA 1976) - que la matriz A es positiva definida, cuestión que nos permite utilizar el algoritmo de Cholesky para resolver el sistema - - (3.15).

Hasta este punto hemos logrado obtener los coeficientes Λ de la función σ de interpolación tipo placa delgada. Para calcular los coeficientes α partimos de la ec.:

$$E \alpha = B - \hat{K} \Lambda$$

Resulta conveniente utilizar en vez de E la matriz equivalente con vectores columna ortonormalizados por el procedimiento de Gram Shmith. Es decir la substitución de E por V con el consecuente cambio en el vector α . Obtenemos en consecuencia la ec.:

$$V \hat{\alpha} = B - \hat{K} \Lambda$$

Pero por tener V vectores col ortonormales tendremos:

$$\hat{\alpha} = -V^T * [\hat{K} \Lambda - B]$$

De donde utilizando la base ortonormal $[\hat{V}_1, \hat{V}_2, \hat{V}_3]$ obtenemos:

$$\alpha_1 = n a_2 / \langle V_2, V_1 \rangle - \langle V_2, V_3 \rangle \cdot a_3$$

$$\alpha_2 = n a / \langle V_3, V_3 \rangle$$

$$\alpha_3 = a - \frac{1}{n} \langle u_2, u_2 \rangle \cdot a_2 - \langle V_2, V_3 \rangle \cdot a_3$$

Con lo que obtenemos la determinación de todos los coeficientes de la solución a la funcional 2.3.

DISCUSION AL CAPITULO 1

En 1967 Rasmusen y Sharma realizan una evaluación entre los métodos cuasibidimensionales paramétricos y no paramétricos concluyendo que para los métodos no paramétricos el error medio, el error máximo y la desviación estándar son en promedio 50% más grandes que para los métodos paramétricos, analizando la anomalía generada por un prisma. Apuntan sin embargo que el tiempo de procesamiento empleado por los métodos paramétricos es 50% menor que para los no-paramétricos.

En el presente trabajo se reprodujeron las condiciones utilizadas por Rasmusen con objeto de comparar la diferencia de exactitud entre el método cuasibidimensional y el método estrictamente bidimensional. Para ello se utilizaron 3 prismas de espesor 30 km, a 3 profundidades distintas los cuales difieren en la amplitud de la anomalía y en los gradientes asociados a ella. El campo magnético terrestre considerado fue de 50,000 γ , la inclinación de 75° y la declinación de 0.0°. Las tres profundidades a la cara superior del prisma fueron de 1.0 km, 0.5 km. y 0.25 km. con un espesor de 30 km. los tres tipos de prismas tenían las siguientes características: Largo 2 km, ancho 6 km., largo 8 km., ancho 6 km. y largo 16 km. Bajo estas condiciones se procedió a generar mediante un programa de cálculo de anomalías para prismas (PLUFF 1976) un conjunto de rejillas regulares (de 41 x 41 puntos equiespaciados a 1 km) -

para cada prisma. A partir de la rejilla regular se construyeron rejillas con mayor espaciamiento (2 km entre línea y línea) y se procedió a interpolar a 1 km. mediante tiras estrictamente bidimensionales. La matriz de datos exactos se restó de la matriz de datos interpolados para obtener las matrices de errores. En la tabla 1 se muestran los datos obtenidos por Rasmussen para el método cuasibidimensional no-paramétrico. Como se puede observar el método estrictamente bidimensional resulta ser prácticamente tan exacto como el cuasibidimensional (la diferencia del error máximo entre los dos métodos es de 2.7%, -- mientras que la desviación estandar y el error medio son prácticamente iguales). Aunque no se tiene el tiempo de procesamiento para el método cuasibidimensional es seguro que el estrictamente bidimensional resulta ser considerablemente más alto.

La importancia del método estrictamente bidimensional radica en la exactitud para el manejo de datos enteramente aleatorios. Con objeto de demostrar lo anterior se consideraron tres grupos de distribuciones aleatorias. Para cada una de estas distribuciones se interpoló obteniéndose una rejilla regular a un Km de separación. El error medio, máximo y la desviación estandar de la matriz de errores (diferencia entre valores exactos e interpolados) se muestran en las tablas 3,4 y 5. Como se puede apreciar los errores disminuyen considerablemente (ver gráfica 1) con el aumento en la densidad de puntos.

En la gráfica 2 se puede observar como la profundidad de los modelos induce alteraciones insignificantes sobre el error máximo. Los valores de desviación estandar, con máximos de 3.53, 2.5 y 1.75, para distribuciones de 300, 600 y 900 puntos respectivamente (gráfica 3) nos indican una baja dispersión de los errores.

Comparando los errores para la interpolación sobre rejilla cuasi regular (Tabla 1) y para una distribución aleatoria de 900 puntos (Tabla 5) observamos que los errores son aproximadamente del mismo orden (graf. 1). En general podemos afirmar que para las distribuciones elegidas y para los modelos magnéticos fijados la evaluación estadística del método estrictamente bidimensional resulta bueno.

TABLA 1

PROF.	ANCHO.	E. MED.	% EMED.	E.MAX.	% EMAX.	D.E.	% D.S.	V. MAX.	GAD.
1.0	4	0.68	0.12	25.06	4.39	2.68	0.47	571	237
1.0	8	1.12	0.16	21.24	3.03	3.43	0.49	701	259
1.0	16	2.09	0.28	20.94	2.80	4.78	0.64	748	263
0.5	4	1.39	0.18	74.28	9.56	6.75	0.87	777	458
0.5	8	2.38	0.28	71.65	8.43	9.26	1.09	850	477
0.5	16	4.53	0.51	71.74	8.07	13.06	1.47	889	473
0.25	4	2.40	0.27	141.67	15.3	12.87	1.39	926	748
0.25	8	4.67	0.47	141.29	14.2	18.00	1.81	995	758
0.25	16	8.95	0.87	169.78	16.5	62.15	6.04	1029	761

(800 puntos en rejilla regular)

(datos Rasmussen)

TABLA 2

PROF.	ANCHO.	E. MED.	% EMED.	E. MAX.	% EMAX.	D.E.	% D.S.	V. MAX	GAD.
1.0	4	1.47	0.25	47.36	8.06	4.60	0.78	587.3	240.3
1.0	8	1.74	0.25	48.44	7.01	5.01	0.72	690.0	265.0
1.0	16	2.17	0.29	55.06	7.56	5.45	0.74	727.7	274.3
0.5	4	3.13	0.40	106.35	13.65	10.30	1.32	778.7	459.0
0.5	8	7.78	0.44	108.45	12.72	11.27	1.32	852.1	479.8
0.5	16	4.70	0.53	111.99	12.78	12.02	1.37	876.0	476.0
0.25	4	4.50	0.50	160.50	18.02	15.08	1.69	890.3	759.5
0.25	8	5.52	0.58	165.13	17.48	16.51	1.74	944.1	778.0
0.25	16	6.94	0.72	167.25	17.41	17.66	1.83	960.5	793.2

(800 puntos en rejilla regular)

TABLA 3

PROF.	ANCHO.	E. MED.	% EMED.	E. MAX.	% EMAX.	D.E.	% D.S.	V. MAX	GAD.
1.0	4	2.44	0.41	87.28	14.86	5.33	0.90	587.2	240.3
1.0	8	3.39	0.49	74.16	10.74	5.80	0.85	690.0	265.0
1.0	16	5.94	0.81	119.30	16.39	9.11	1.25	727.7	274.3
0.5	4	5.25	0.67	207.65	26.66	12.19	1.56	778.7	459.0
0.5	8	7.53	0.88	173.92	20.41	14.40	1.69	852.1	479.8
0.5	16	12.79	1.46	232.30	26.51	20.70	2.36	876.0	476.0
0.25	4	8.17	0.91	339.40	33.12	20.05	2.25	890.3	759.5
0.25	8	12.09	1.28	268.60	28.45	24.56	2.60	944.1	778.0
0.25	16	20.24	2.10	352.92	36.73	33.94	3.53	960.5	793.2

(300 puntos aleatorios)

TABLA 4

PROF.	ANCHO.	E. MED.	% EMED.	E. MAX.	% EMAX.	D.E.	% D.S.	V. MAX	GAD.
1.0	4	1.1929	0.20	67.97	11.57	3.28	0.55	587.3	240.3
1.0	4	1.51	0.21	42.14	6.10	3.26	0.4	690.0	265.0
1.0	16	2.4	0.32	42.0	5.77	3.64	0.50	727.7	274.3
0.5	4	2.90	0.37	160.08	20.55	8.52	1.09	778.7	459.0
0.5	8	3.801	0.4461	110.9	13.02	9.18	1.07	852.1	479.8
0.5	16	5.714	0.65	107.4	12.26	10.08	1.15	876.0	476.0
0.25	4	5.044	0.56	247.19	27.7	15.92	1.7	890.3	749.0
0.25	8	7.011	0.74	220.13	23.31	17.9	1.90	944.1	778.0
0.25	16	10.87	1.13	215.9	22.4	20.6	2.15	960.5	793.2

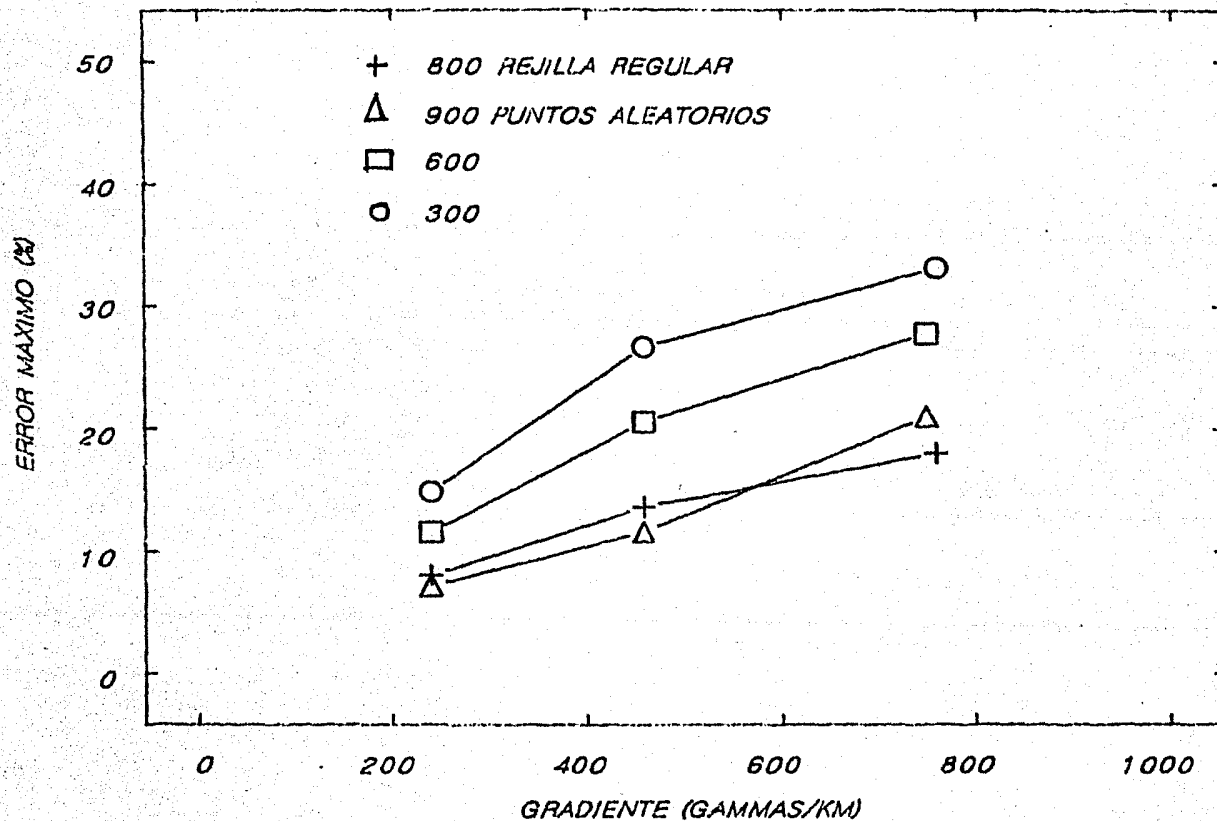
(600 puntos aleatorios)

TABLA 5

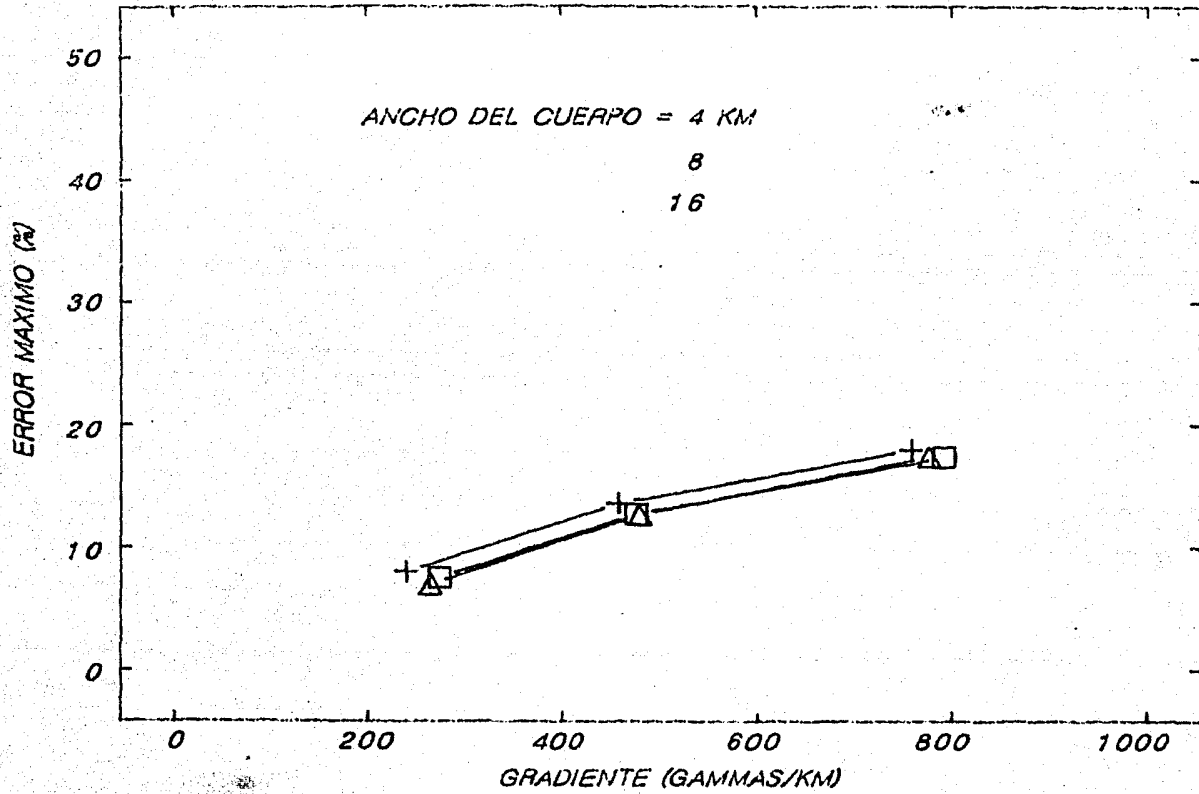
PROF.	ANCHO.	E. MED.	% EMED.	E.MAX.	% EMAX.	D.E.	% D.S.	V.MAX	GAD.
1.0	4	0.71	0.12	42.25	7.19	2.05	0.35	587.2	240.3
1.0	8	0.86	0.12	21.69	3.14	1.85	0.26	690.0	265.0
1.0	16	1.32	0.18	20.96	2.88	2.03	0.27	727.7	274.3
0.5	4	1.87	0.24	90.50	11.62	5.96	0.76	778.7	459.0
0.5	8	2.13	0.25	72.10	8.46	5.36	0.63	852.1	479.8
0.5	16	3.82	0.43	72.19	8.24	6.88	0.78	876.0	476.0
0.25	4	3.86	0.43	187.06	21.00	12.87	1.44	890.3	749.5
0.25	8	2.13	0.25	72.10	8.46	5.36	0.63	852.1	778.0
0.25	16	8.41	0.87	17.95	18.6	16.82	1.75	960.6	793.2

(900 puntos aleatorios)

GRAFICA 1



GRAFICA 2



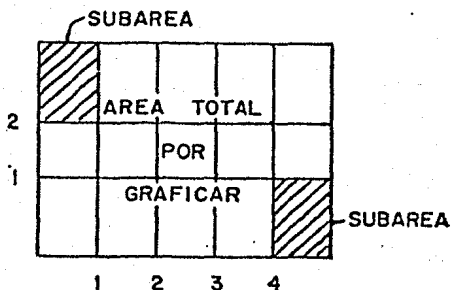
CONFIGURACION DE CONTORNOS

I.- SUB-AREAS

El algoritmo de contornos (Mac. Intoch 1975) parte de considerar que el área por graficar, o bien, es lo suficientemente grande como para exceder la capacidad del sistema, o bien - aun pudiendo la computadora soportar esta cantidad de datos, la vuelta ineficiente.

El problema consiste, por tanto, en la división del - - área total de graficación en sub-áreas. El número de particiones que se desee, es un dato de entrada que depende de las características del sistema y debe, por ello, ser fijado por el usuario. Concretamente se debe especificar el número de particiones en 'x' y el número de particiones en 'y':

FIG. 3.1



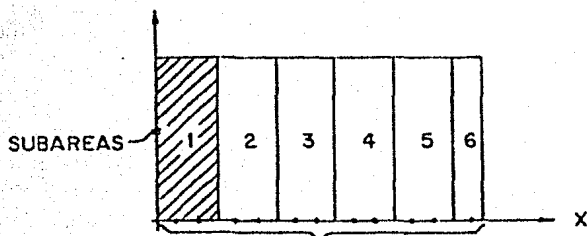
K_x = Número de particiones en x = 4

K_y = Número de particiones en y = 2

Número de sub-áreas = 15

La división de las sub-áreas se realiza en la subrutina PLTKP y el algoritmo es el siguiente:

El tamaño de la sub-área en cada eje, se calcula dividiendo el número de puntos en X (N_x) o el número de puntos en Y (N_y) entre K_x ; K_y respectivamente, es decir, entre el número de particiones de cada eje. El primer punto a resolver es que el cociente N_x/K_x o N_y/K_y puede no ser entero, o dicho de otro modo: que dado el número total de puntos en algún eje, y el número de particiones que se desea en el mismo, no nos sea posible tener la misma cantidad de puntos en cada sub-área (Fig.#2)



PARTE X DEL AREA TOTAL

EJEMPLO:

FIG. 3.2

$$N_x = 11 \quad K_x = 7$$

$$\frac{N_x}{K_x} = \frac{11}{7} \text{ QUE NO ES ENTERO}$$

Y POR TANTO EN TODAS LAS SUBAREAS EXEPTO EN LA SEXTA TENEMOS 2 PUNTOS.

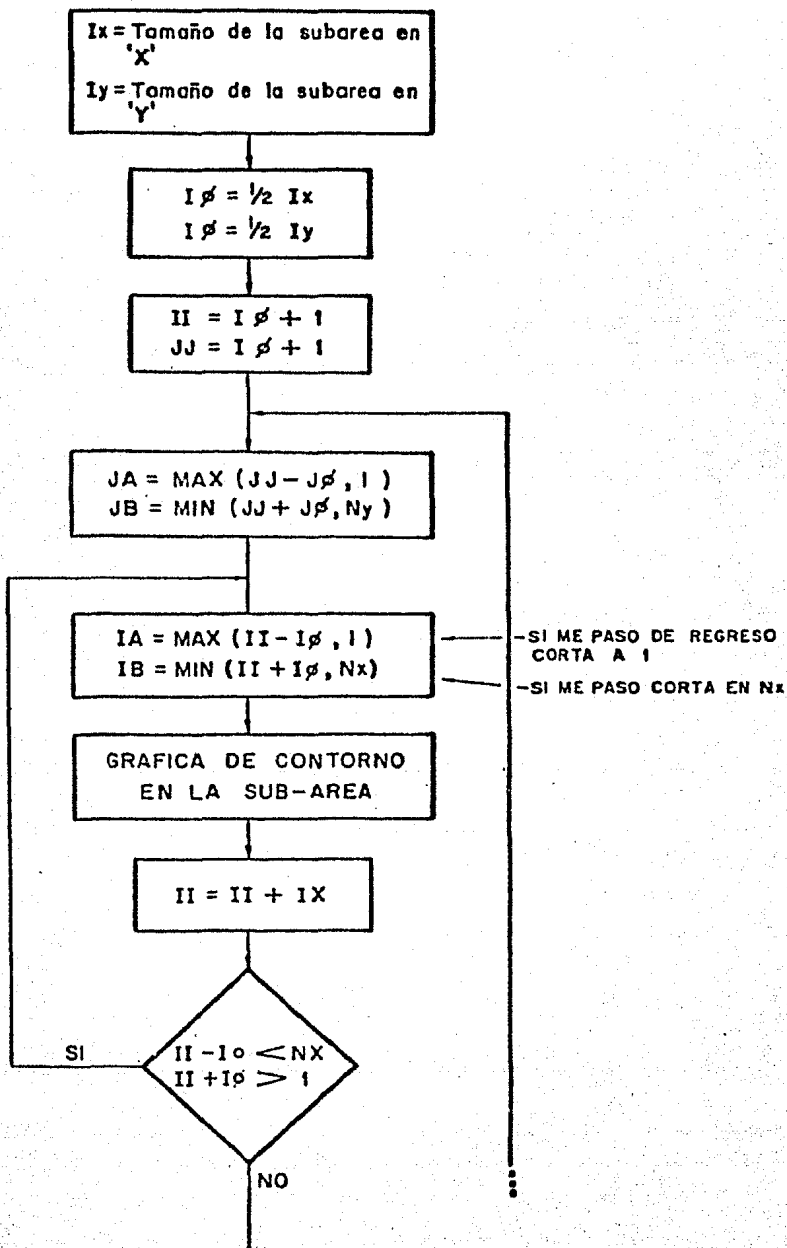
Ello implica que si cubrimos el área total incrementando un número constante de puntos, por fuerza, o nos pasamos del área total o no llegamos a su frontera.

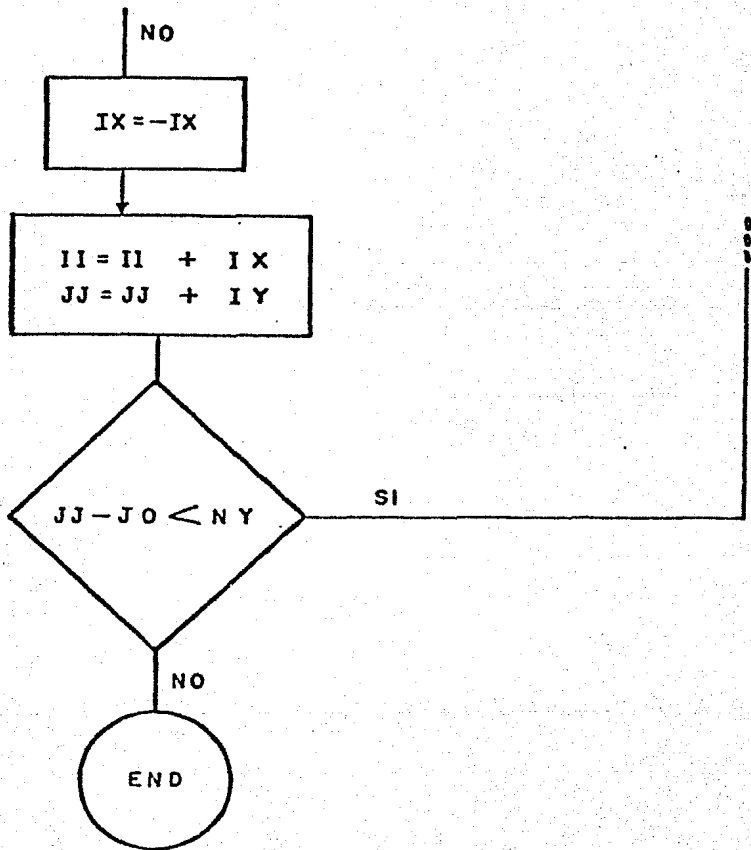
Para resolver esto procedemos de la siguiente manera:

Si el cociente N_x/K_x no es entero redondeamos por arri

DIAGRAMA DE FLUJO No. 1

DIVISION DEL AREA TOTAL DE GRAF. EN SUB-AREAS



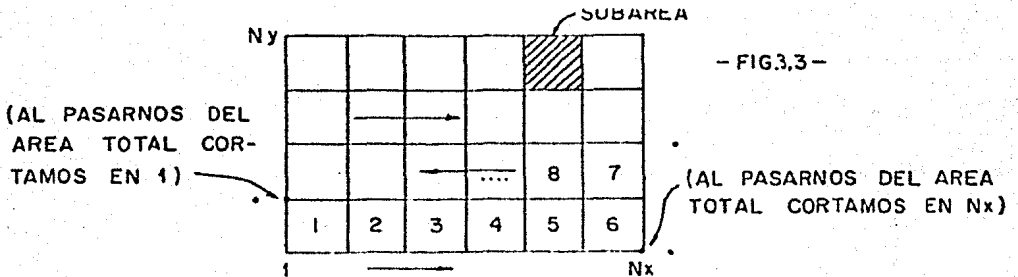


ba, de tal manera, que en este caso siempre nos pasaremos del valor N_x .

En el momento en que nos pasamos de los límites del - - área total de graficación cortamos en N_x (diagrama de flujo #1).

Cuando terminamos la graficación de las sub-áreas en la dirección x , incrementamos la 'y' y graficamos las sub-áreas en sentido inverso (véase fig. 3.3). En este caso pasarnos de lími te del área total significará que el valor de nuestra iteración es menor que 1 y por tanto hacemos el corte a este valor.

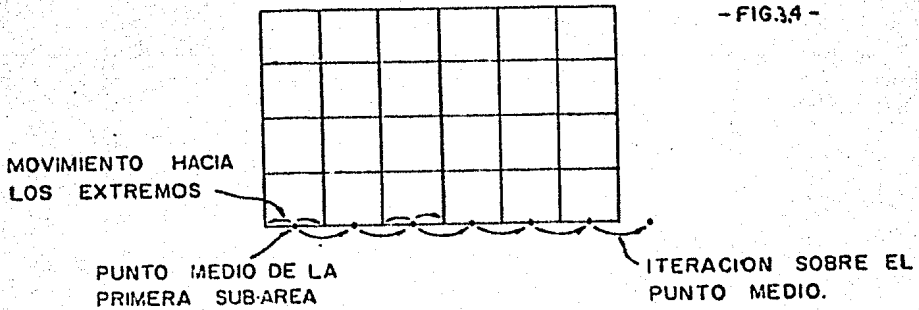
FIG. 3.3



Si revisamos el algoritmo 1, veremos que la iteración o sea, el paso de una sub-área a otra se realiza sobre la base del punto medio de la sub-área (fig. 3.4). El propósito de esto consiste en reducir la iteración a una variable: Tomamos el punto medio de una sub-área, y realizamos movimientos a la izquierda y a la derecha de este punto, de tal forma que obtenemos los extre

mos de la sub-área. A continuación movemos el punto medio a la siguiente sub-área repetimos el proceso hasta cubrir el área total.

FIG. 3.4



PARAMETROS SOBRE LA SUBROUTINA DE SUBDIVISION DE AREAS.

VARIABLE DE ENTRADA:

- Z1 - Valor mínimo de la matriz de campo.
- Z2 - Valor máximo de la matriz de campo.
- ZE - Matriz de campo.
- NZ - Número de contornos que se desea graficar
- Kx - Número de particiones en x Sub-áreas
- Ky - Número de particiones en y
- Nx - Número de columnas de ZE Area total de graficación
- Ny - Número de renglones de ZE
- PL - Subrutina de graficación en nuestro caso:

PLKTP (se explica adelante)

VARIABLE DE USO INTERNO:

- IØ - Mitad de puntos de la sub-área en x.
- JØ - Mitad de puntos de la sub-área en y.
- Ix - Número de puntos de la sub-área en x.
- Iy - Número de puntos de la sub-área en y.
- DZ - Incrementando entre cada contorno en gammas.
- JA -
- JB -
- IA - Límites de la sub-área.
- IB -

II. CONTORNOS POR SUB-AREA

II.-A DICRIMINACION BOOLEANA.

Una vez localizadas las sub-áreas el siguiente problema es la graficación de los contornos en cada una de ellas. En el programa actual* el usuario da como variables de entrada el número de contornos (NZ) que desea graficar. La primera parte del algoritmo consiste en calcular el valor máximo (Z1) y mínimo (Z2) de la matriz de campo (subrutina mín-máx), con la ecuación:

$$DZ = \frac{Z2 - Z1}{NZ-1}$$

calcula el espaciamiento en unidades de campo (ie gammas) que debe existir entre cada contorno. El diagrama de flujo #1 se ve entonces complementando en la parte que dice "Gráfica de Contornos en la Sub-área". (Véase diagrama de flujo #2). Como puede verse se trata de un simple Loop cerrado que va de 1 a NZ (número de contornos). Incrementando el valor de campo por contorno en DZ. Lo importante es que en cada pasada del loop se aplica la subrutina KNOSC que es la encargada de graficar un contorno dado. Esta rutina es la que explicaremos a continuación.

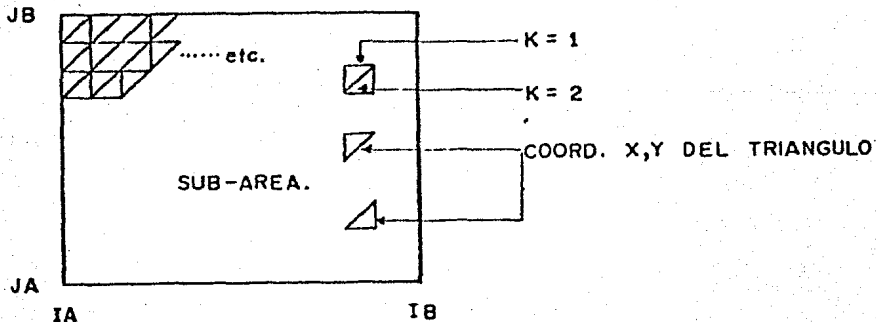
Supongamos que deseamos obtener la gráfica de un contorno de x gammas, el primer paso que da el algoritmo es la determinación de "por donde pasa el contorno".

*) Al final de este apartado se emplea una modificación.

Recordamos que nos encontramos en una sub-área que tiene $(IB-IA) \times (JB-JA)$ puntos con sus respectivos valores de campo. La primera forma que podemos idear para saber por donde pasa el contorno, es tomar el valor de campo de los vértices de cada rectángulo que toma la matriz y ver si el contorno atraviesa alguno de sus lados. Este método puede simplificarse, sin embargo, si en vez de rectángulos tomamos triángulos, y la razón es simplemente que se reduce el número de lados, por donde puede entrar o salir el contorno.

Por esto el algoritmo considera todos los rectángulos que componen la matriz divididos por su diagonal (véase fig. # 3.5). Es decir consideramos que la matriz original esta formada por triángulos.

FIG. 3.5



Simular el problema anterior resulta relativamente fácil:

Primero definimos una matriz Booleana de tres dimensiones:

FE (x, y, k) en donde:

x, y representan las coordenadas del triángulo, es decir, de los tres puntos tomamos el que se encuentre más a la izquierda y más abajo.

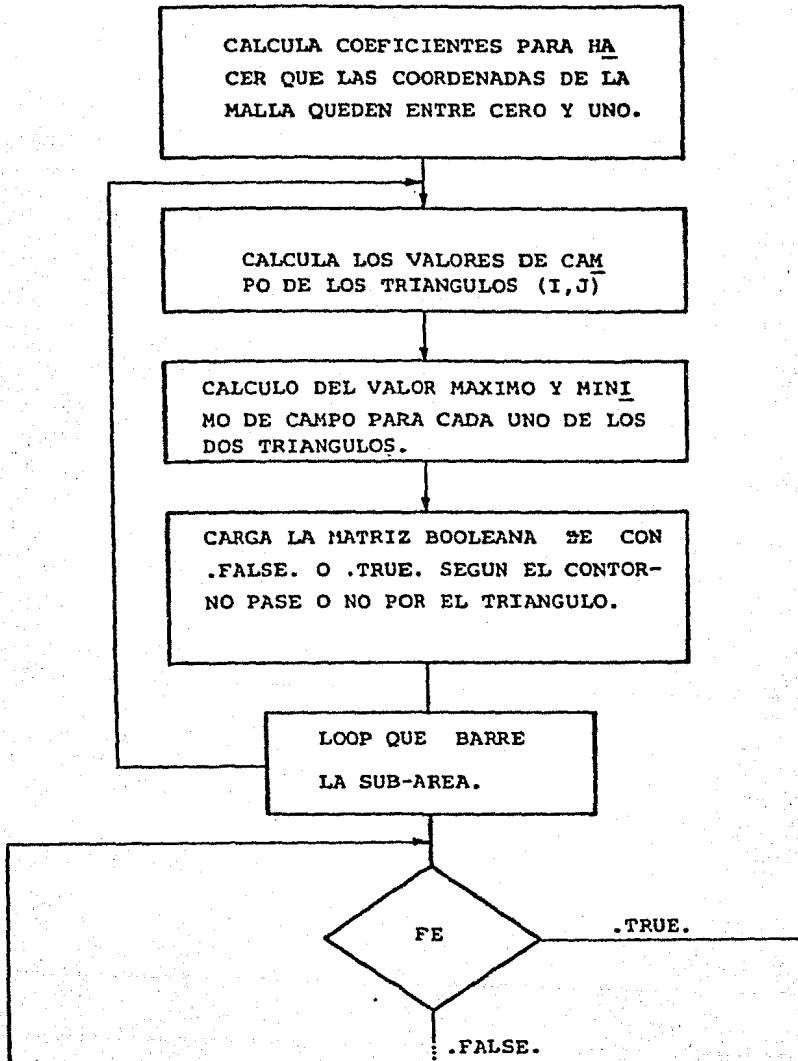
(Nótese que en cada renglón hay IB-1 triángulos mientras que en cada columna JB-1).

K Puede tomar el valor 1 ó 2 dependiendo de que se trate del triángulo de arriba o de abajo respectivamente.

Por convención si FE tiene valor .FALSE. significa que el contorno atraviesa el triángulo y si es .TRUE. que no pasa por él.

DIAGRAMA DE FLUJO No. 2

GRAFICACION DE UNA CURVA DE NIVEL EN UNA
SUB-AREA DADA (SUBROUTINA KONSC)



CALCULO DE COORDENADAS DEL TRIANGULO INICIAL (KONIT)

CALCULO DE LOS VALORES DE CAMPO DEL TRIANGULO INICIAL

SALVA LOS VALORES DEL TRIANGULO INICIAL

CALCULA EL PUNTO DE PARTIDA MEDIANTE LA FUNCION ϵP Y MUEVE LA PLUMA A ESE PUNTO ; USA LOS COEF. X_S ; Y_S .

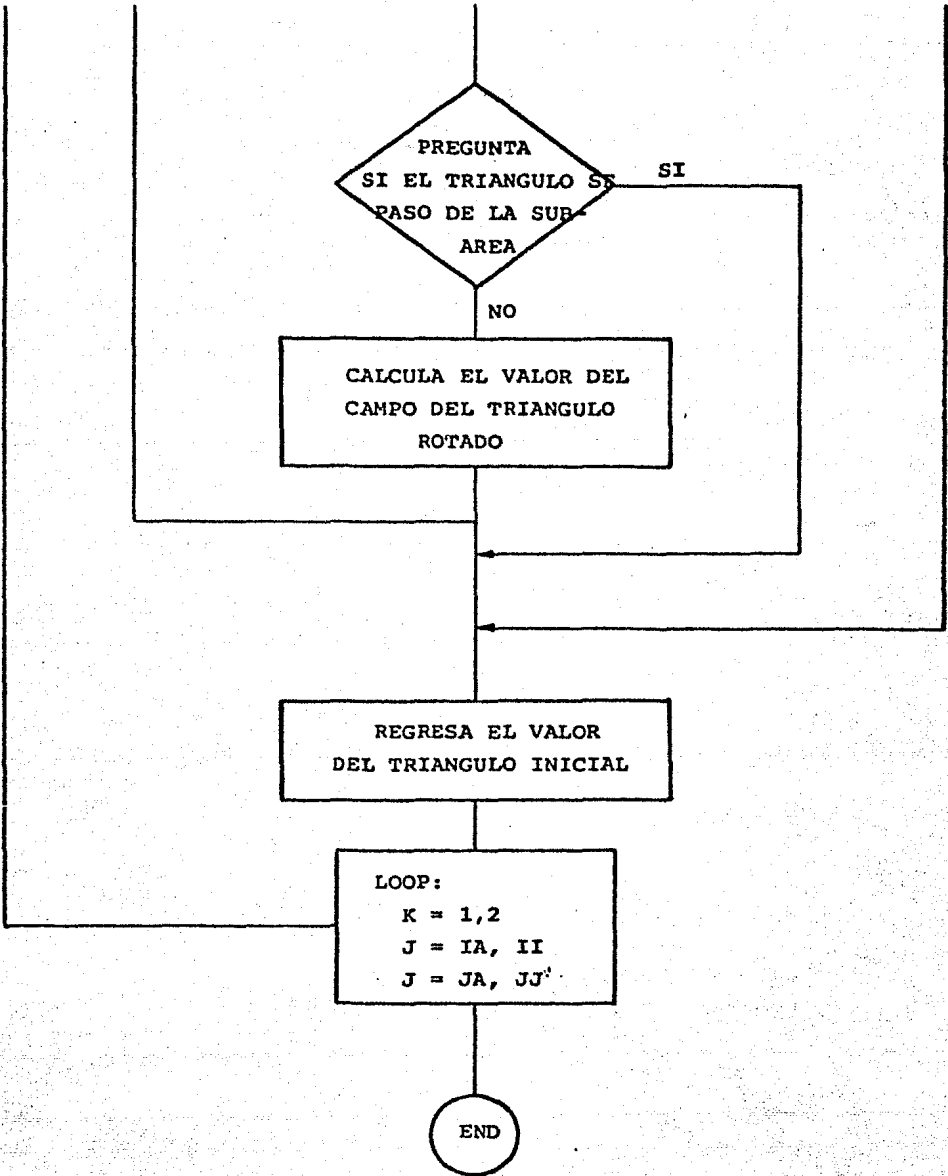
ROTA LAS COORDENADAS DEL TRIANGULO

CALCULA EL PUNTO DE LLEGADA Y GRAFICA EL SEGMENTO DE CONTORNO. USA COEF. X_S ; Y_S

PREGUNTA SI
EL CONTORNO PASA POR
EL TRIANGULO ROTADO

NO

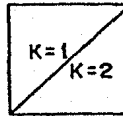
SI



El problema entonces consiste en barrer toda la matriz preguntando triángulo por triángulo si el contorno pasa o no.

Supongamos por comodidad que nos encontramos en el primer punto de la sub-área, es decir, en IA, JA. Entonces las coordenadas:

IA, JA
IA, JA + 1
IA + 1, JA
IA + 1, JA + 1



representan el primer cuadro de la sub-área en donde hay dos triángulos. Ayudados por la matriz de campo de la sub-área podemos saber la intensidad magnética de cada punto. Para determinar si el contorno de valor x , que queremos graficar, pasa o no por el primer triángulo tomamos los tres valores de campo correspondientes (F1, F2, F3) y procedemos como sigue:

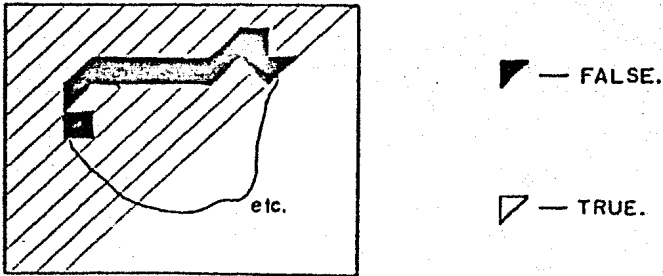
SEA F MAX = máximo (F1, F2, F3)
Y F MIN = mínimo (F1, F2, F3)
SI F MIN \times F MAX entonces el contorno pasa y
FE (IA, JA, 1) = .FALSE.

Si esta relación no se cumple:

FE (IA, JA, 1) = .TRUE. o sea el contorno no pasa.

Por comodidad elegimos el primer cuadro y el primer triángulo de la sub-área, pero es fácil ver que si iteramos x , y ; para cada coordenada tomamos $K = 1$ y $K = 2$ barreremos toda la sub-área. Hasta ahora tenemos una discriminación booleana del contorno:

FIG. 3.6



II.-B INTERPOLACION Y GRAFICACION DE LOS CONTORNOS

El paso anterior nos permite saber en cual triángulo de la matriz hay que efectuar interpolación para graficar y en cual triángulo no.

Un posible camino lógico que podríamos seguir es el de barrer nuevamente toda la matriz, y solo ahí donde FE fuera .FALSE. efectuamos la interpolación encontrando los dos puntos

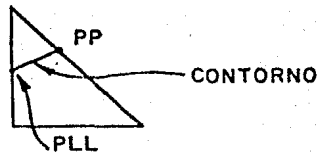
por donde el contorno atraviesa el triángulo y graficar. Sin embargo, hay dos elementos que hacen inconveniente este proceso: Primero que cada vez que termináramos de delinear un segmento del contorno en un triángulo, hay que llamar a plot con pluma levantada para ir al siguiente triángulo. (lo que implica un considerable número de llamadas a PLOT); y el Segundo que existe un método que no solo evita lo anterior, sino que además reduce el número de interpolaciones a la mitad. Este proceso es el que se explicará a continuación:

En primer lugar empezamos por barrer la matriz booleana hasta algún triángulo que resulte .FALSE.; entonces a través de la Subrutina Konit calculamos y guardamos en memoria las vértices de este triángulo que será el punto de partida. En seguida y con ayuda de la matriz de campo, obtenemos la intensidad magnética de cada uno de los vértices. De esta forma tenemos ubicada las coordenadas y el valor de campo del triángulo de partida.

Ahora bien, el algoritmo se basa fundamentalmente en la siguiente consideración:

En general tendremos en cada triángulo dos puntos por donde pasará el contorno, el de partida (PP), y el de llegada -- (PLL).

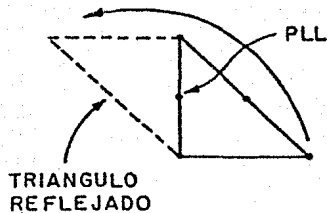
FIG. 3.7



La idea para evitar interpolaciones y mov. de pluma es calcular un nuevo triángulo, tal que:

- A) El lado del triángulo inicial que contiene al punto de llegada, sea un lado del nuevo triángulo.
- B) Que la diagonal del nuevo triángulo mantenga la inclinación de la diagonal del triángulo anterior

FIG. 3.8



En esencia lo anterior significa efectuar una reflexión de uno de los vértices del Δ inicial, sobre el lado que contiene al PLL. El punto de llegada del Δ se transforma entonces en el punto de partida del nuevo triángulo. El algoritmo continúa

con el cálculo del nuevo punto de llegada y con la consecuente -
graficación del nuevo segmento del contorno.

La repetición del proceso anterior, significa ir siguiendo (y graficando) el contorno a través de la malla de triángulos. Ahora bien, una vez graficado el contorno sobre un triángulo calculado, éste debe cambiar de signo booleano, es decir, - - puesto que el segmento ya fue graficado, el Δ , debe tomar el valor .True. dentro de la matriz booleana.

El propósito de esto, se debe a dos consideraciones:

- a) Supongamos que seguimos la graficación de un contorno cerrado (FIG. 3.9), la pregunta que surge es: ¿En qué momento hemos concluido la graficación del contorno? Si cambiamos de signo booleano a los -- triángulos graficados, cuando regresemos al triángulo inicial (que es el momento en que debe detenerse la grf. del contorno), éste tendrá un valor .True., y por lo tanto se interrumpe el proceso.
- b) El segundo elemento por considerar es, que una curva de nivel puede constar de dos o más curvas cerradas (véase FIG.3.10). El proceso anterior nos - conduce, sin embargo, a la graficación de UNA SOLA CURVA CERRADA . Para obtener el contorno completo el algoritmo debe regresar a la matriz BOOLEANA --

original y seleccionar un segundo triángulo inicial de partida. La repetición de lo anterior nos garantiza la graficación completa del contorno.

Bajo esta consideración, resulta necesario - - cambiar de signo booleano, a todo triángulo graficado, de tal suerte que cuando se inicie la búsqueda booleana de la siguiente curva cerrada, la primera resulte invisible.

FIG. 3.9

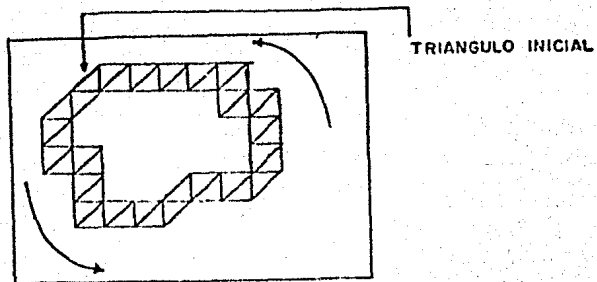
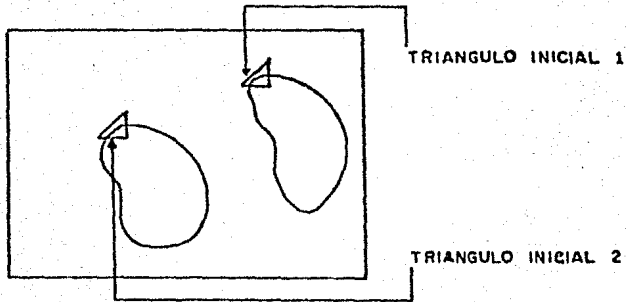


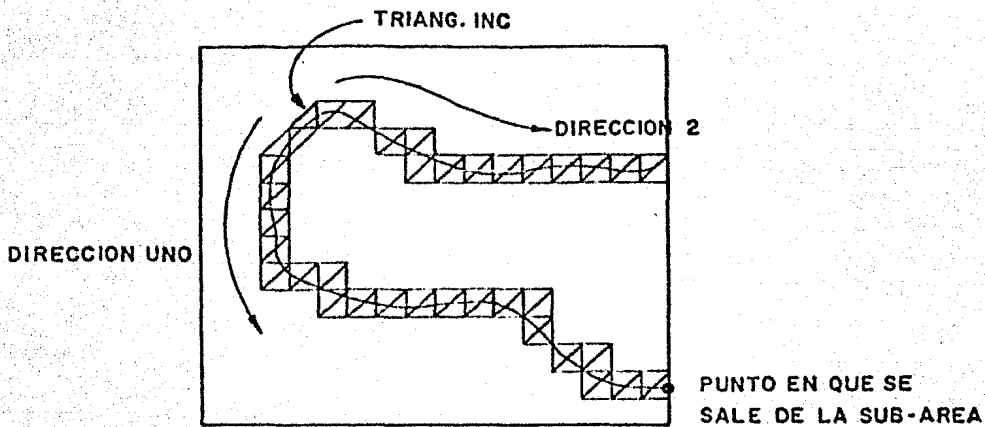
FIG. 3.10



(Ambas curvas cerradas corresponden al mismo contorno).

Ahora bien, ¿Qué ocurre cuando el contorno se sale de una de las sub-áreas o del área total de graficación? (véase - FIG. 3.11)

FIG. 3.11

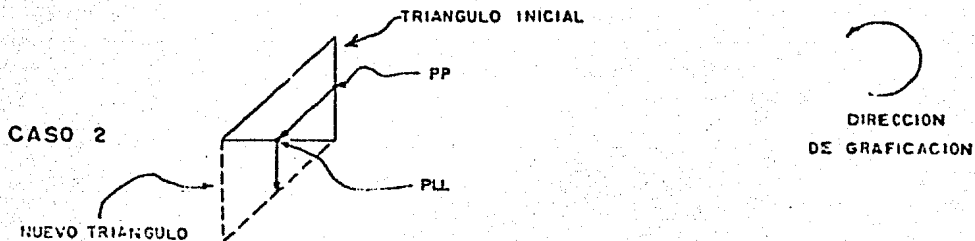
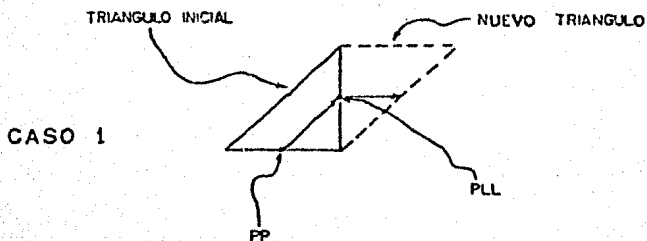


El algoritmo procede de la siguiente forma:

- a) Cada vez que calcula el vértice de un nuevo triángulo pregunta si éste se encuentra contenido dentro de los límites de la sub-área.
- b) Si se encuentra, procede a graficar y calcular el siguiente triángulo.
- c) Si se sale, regresa al triángulo inicial y termina la curva graficando en sentido inverso.

Lo anterior implica que siempre debemos guardar el Δ inicial (KONSA), y que si nos salimos de la sub-área debemos poder recuperar su valor (KONRE).

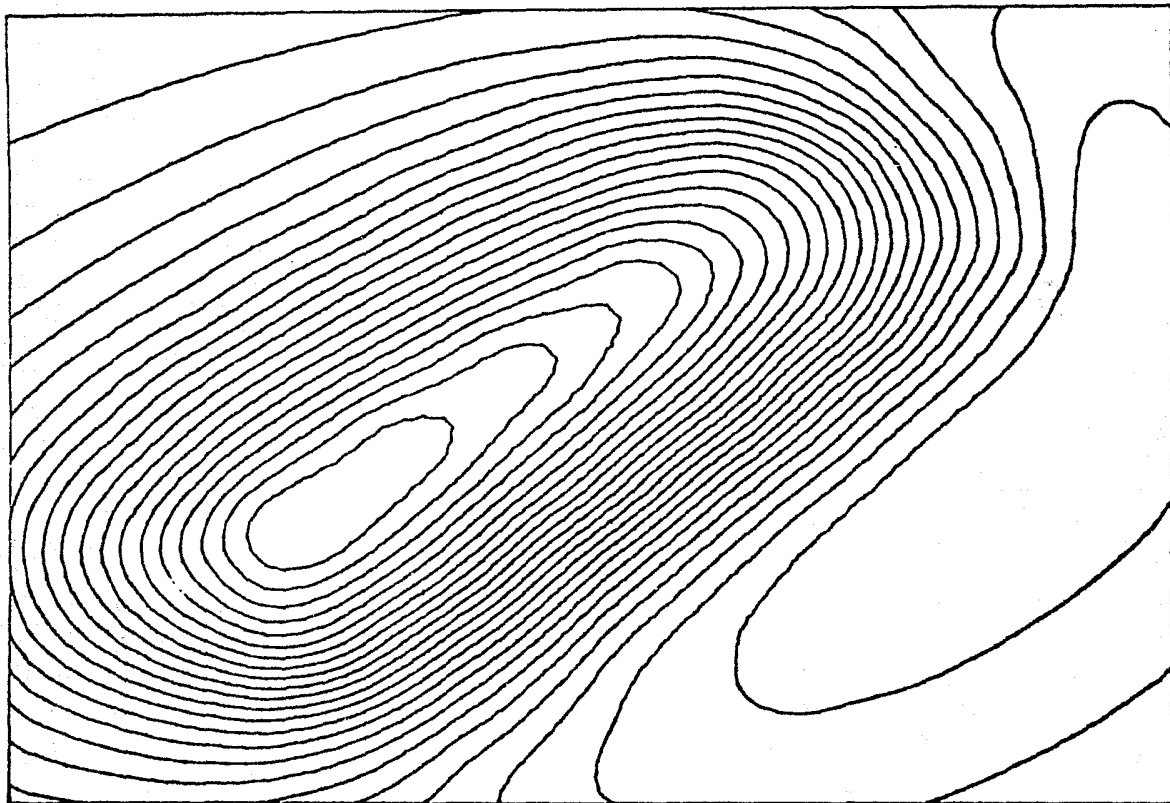
Para lograr que la graficación no se realice nuevamente en el sentido ya graficado, es necesario que (KONSA) en el momento de almacenar el Δ inicial el P de partida se cambie por el punto de llegada y al revés (véase FIG. 3.12)



Lo anterior completa la graficación de un contorno (un valor determinado en gammas por ejemplo), para una sub-área. Y como señalamos al principio de este apartado, esta Rutina para diferentes valores de gammas, completa la graficación de los contornos por sub-área. Finalmente el movimiento de sub-áreas ya explicando completa la graficación del área total.

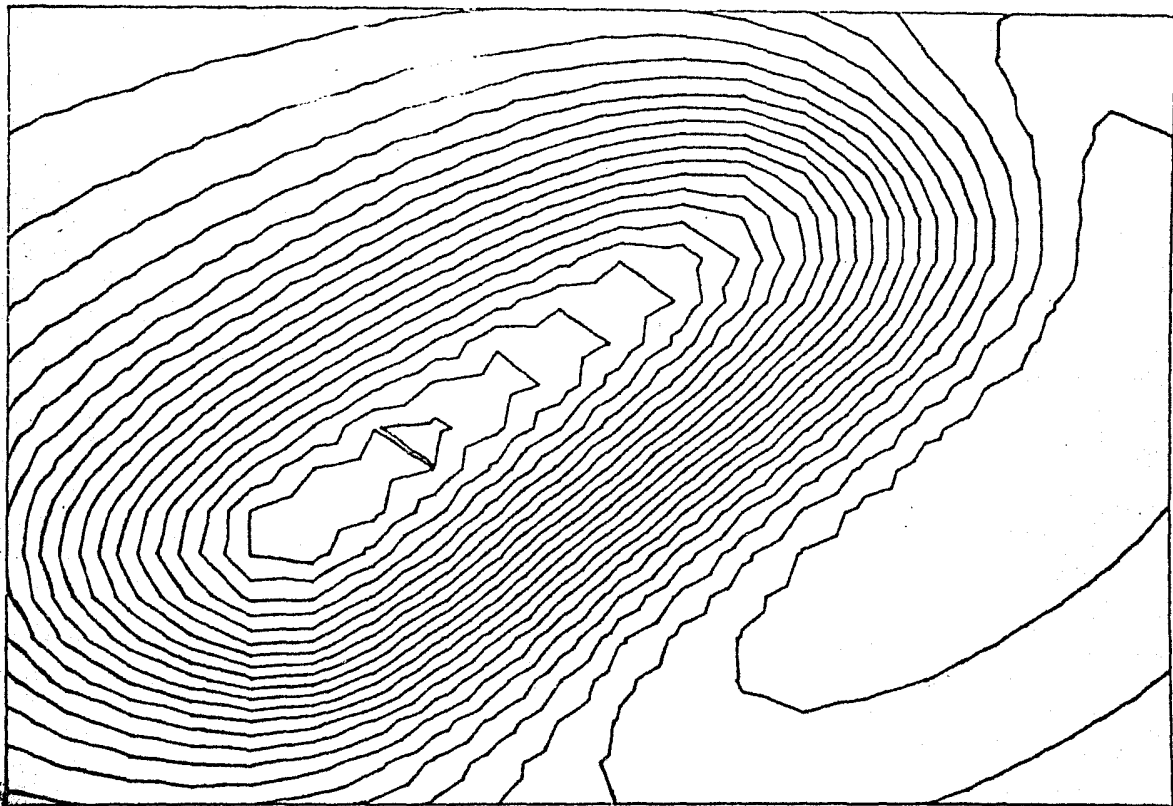
En las graficas 4,5,6 se muestra la aplicacion del algoritmo de configuración para un campo magnetico dipolar - con diferentes densidades de puntos en la rejilla regular equiespaciada.

GRAFICA 4



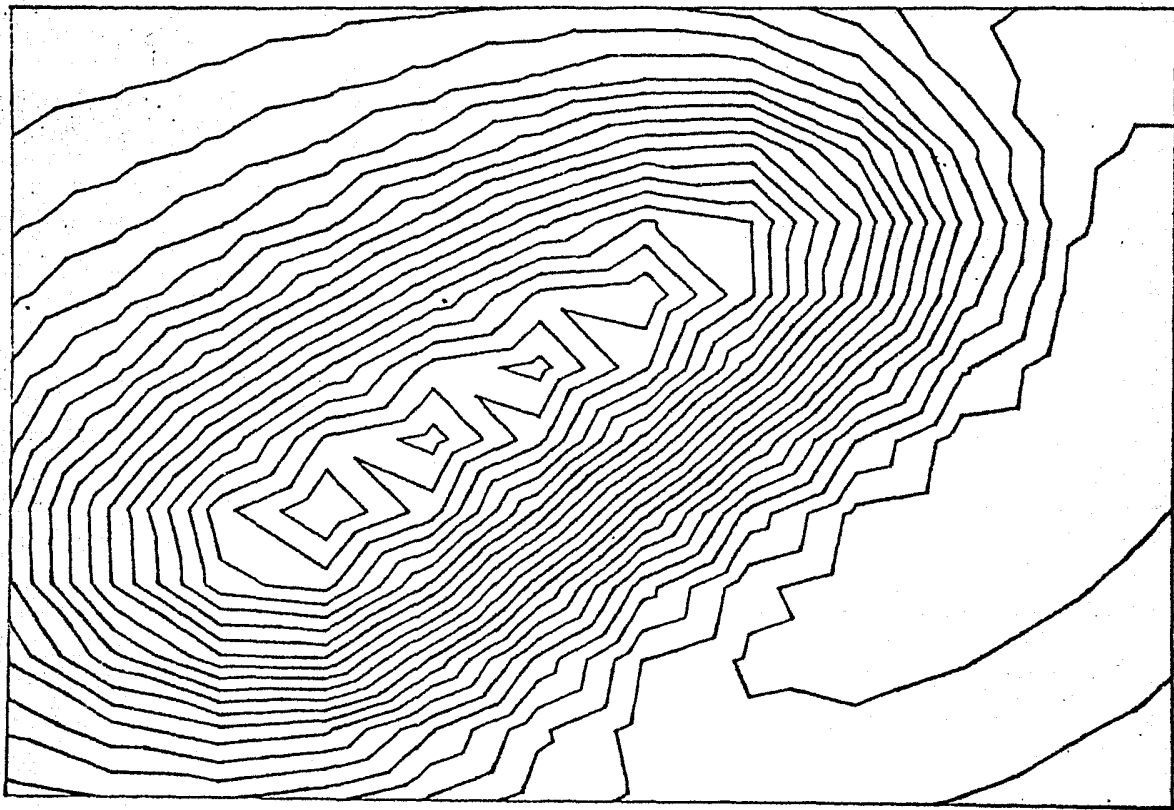
Num.de puntos 60 X 60

GRAFICA 5



Num. de puntos 20 X 20

GRAFICA 6



Num. de puntos 12 X 12

C O N C L U S I O N E S

A lo largo de la exposición anterior hemos revisado - distintos enfoques y métodos de abordar la construcción de tiras unidimensionales y bidimensionales. La primera observación de - importancia es que todos los métodos encierran en esencia un mismo concepto: la minimización de la curvatura. Este criterio desde el punto de vista de la aplicación geofísica significa que - ante la ausencia de información la interpolación se realiza lo más suavemente que sea posible.

La teoría de las tiras adquiere entonces una integridad. En el caso unidimensional demostramos la equivalencia entre dos enfoques matemáticos en apariencia distintos: requerir - la continuidad en la primera y segunda derivadas, y requerir que la curvatura sea mínima. Estas condiciones resultan ser equivalentes tanto para el caso unidimensional como para el caso bidimensional. En este último sólo cuando los puntos estén distribuidos sobre rejillas regulares.

Hay que destacar que en el caso de las tiras estrictamente bidimensionales, es equivalente pedir la minimización de - una norma en un determinado espacio de funciones que utilizar el enfoque variacional clásico para obtener la ecuación Euler Lagrange.

Los métodos presentados representan diferentes enfo-

ques matemáticos para abordar un mismo problema, pero arrojando distintos algoritmos prácticos de interpolación que pueden ser - utilizables dependiendo de la forma en que tengamos distribuidos los datos.

En este sentido hay que destacar la diferencia que se presenta entre los métodos cuasibidimensionales y los estrictamente bidimensionales. La importancia práctica de esta diferencia estriba en que los métodos cuasibidimensionales sólo son utilizables cuando los datos de campo están distribuidos en líneas paralelas o casi paralelas. Mientras mayor sea la dispersión de los datos respecto a esta distribución, mayor será la fuente de errores. De hecho el método resulta inaplicable cuando la distribución de datos es aleatoria.

En general es posible concluir (véase discusión al -- Cap. 1) que siempre que tengamos distribuciones de datos cercanos a líneas paralelas el método cuasibidimensional no paramétrico resulta menos costoso y suficientemente preciso (el error máximo para el cuerpo más superficial ie de mayor gradiente es de 18%).

La verdadera importancia del método estrictamente bidimensional radica en su versatilidad para el manejo de datos -- aleatorios (el error máximo para el gradiente más alto es de 21% en una distribución aleatoria de 900 puntos). En muchos algorit

mos es válido sólo hasta un cierto punto (ej funciones cuadráticas de peso medio, interpolación lagrangiana etc.) por otra parte de acuerdo a la evaluación realizada por Crain (1970) se desprende que el método estrictamente bidimensional es más preciso que los métodos conocidos hasta ese momento.

En 1981 además del método de interpolación por tiras aparece otro que alcanza una precisión mayor que los métodos evaluados por Crain. Este método es el Krigin (Ref) que fundamenta la interpolación en las características estadísticas de la vecindad del punto a interpolar. Hasta donde sabemos, sin embargo, no existe una comparación de la eficiencia y exactitud relativa de las tiras y el método de Krigin, lo que si se sabe es que este método requiere de tiempo de proceso considerablemente mayor.

Por último es de destacarse que la densidad de valores de campo para un mismo gradiente influye considerablemente en la exactitud de la interpolación. Por ejemplo en el caso del gradiente más alto los errores máximos de 300, 600 y 900 puntos aleatorios son respectivamente: 36.73%, 22.4% y 18.6%. El error medio más alto para la distribución de 900 puntos es de 0.87% y para la de 300 de 2.10%.

APENDICE 1

Supongamos que tenemos el sistema matricial $\bar{A} x = \bar{b}$. La existencia de un vector \bar{x} que satisfaga esta ecuación significa que el vector \bar{b} se puede expresar como una combinación lineal de los vectores columna de la matriz A. Si estos vectores son linealmente independientes entonces forman la base de un espacio si suponemos que la matriz A cumple con este requisito entonces la existencia de un vector \bar{x} que resuelva el sistema significa que \bar{b} se encuentra totalmente contenido en dicho subespacio. En caso contrario es decir que \bar{b} se salga del subespacio indica que el sistema matricial es inconsistente en cuyo caso la solución del sistema no es única debiendo pensarse entonces, en términos de una solución óptima.

Si \bar{b} no está en el subespacio, encontrar una \bar{x} óptima, significa encontrar el vector dentro del subespacio de columnas que se encuentre más cerca de \bar{b} (ver fig.). Este vector es naturalmente la proyección de \bar{b} en el subespacio. Como se muestra en la fig. 1, el vector $A\bar{x} - \bar{b}$ representa el error que para ser mínimo debe ser perpendicular al subespacio (como puede observarse si $Ax - b = 0$ entonces \bar{b} forma parte del subespacio)

Para determinar la matriz de proyección \bar{P} procedemos como sigue: Cada vector en el espacio de columnas de A es una combinación lineal de las columnas de A. En otras palabras es un vector de la forma Ay . Para cualquier elección de y este vec

tor en el plano debe ser perpendicular al vector de error $Ax-b$:

$$(Ay)^T (A\bar{x} - b) = 0$$

$$y^T A^T A\bar{x} - A^T b = 0$$

Pero esto es posible sólo si el término entre paréntesis es cero:

$$A^T A\bar{x} = A^T b$$

Este sistema es conocido como ecuaciones normales. Si las columnas de A son linealmente independientes $A^T A$ es invertible y

$$\bar{x} = (A^T A)^{-1} A^T b$$

La proyección de b en el esp. de col. es por tanto.

$$P = A\bar{x} = A(A^T A)^{-1} A^T b$$

En el caso específico en que los vectores columna de A sean ortonormales: $(A^T A)^{-1} = I$ y por tanto $P = A A^T b$ donde la mat. de proy. es $A A^T$.

REFERENCES

- 1) Ahlberg I.N. Nilson E.N. and Walsh J.L. (1967)
The Theory of Splines and their Applications
Academic Press New York
- 2) Battacharyya B.K. (1969)
Bicubic interpolation as a Methods for treatement of
potencial Field data Geophysics, 34, 669-674
- 3) Blondi C. Rocca F. and Zanoletti s(1977),
Methos for contouring irregularly spaced data,
Geophysical Prospecting, 25 96-119
- 4) Briggs I.C. (1974)
Machine Countoring using minimon curvature,
Geophysics, 39, 39-48
- 5) Birkhoff G. and Garabedian H.L. (1960)
Surface Interpolation I.Math; Phys, 394 258-268
- 6) Crain E.R. (1972) Review of gravity and Magnetic
data procesing systems. Journal of the Canadian
Society of Exploration. Geophysist, 8, 54-77
- 7) Crain I.K. (1970) Computer interpolation and Contouring
of two-dimensional data: A review Geoexplor, v8 71-86

- 8) Crain I.K. and Battacharyya B.K. (1967)
Treatment of non-equispaced two-dimensional
data with a digital computer: Geo explor, v5 173-194
- 9) De Boor (1962) Bicubic spline interpolation:
J. Math and Phys, v41, 212-218
- 10) Pooley J.C. (1976) two-dimensional interpolation of
irregular spaced data using Polynomial splines,
Physics of the Earth and Planetary Int, 12, 180-187
- 11) Duchon J. (1976) Interpolation des fonctions de deux
variables suivant le principe de la flexión des plaques
Mince Mathematiques appliqueés scientifica et medical de
Grenoble
- 12) Duchon J. (1977) Splines Minimizing Rotation Invariant
semi-norms in sobol ev spaces.
Universite scientifique el Medicale Laboratoire de
Mathematique Appliqueés, B.P. 53 - 3841
- 13) Duchon J. (1976) Fonctions-Spline a energie invariant
par rotation RR, 27
- 14) Ferguson J. (1964) Multivariable curve interpolation
Journal of the Association for computing Machinery
Vol. 11, No.2, 221-228

- 15) Grant (1971) Review of data processing and interpretation
Methods in gravity and Magnetism
Geophysics, Vol. 37, No. 4 647-661
- 16) Heissing, H.K. Lee, A. Piece and Powers E.N. (1972)
Automatic contouring using bicubic functions
Geophysics, 37, 669-674
- 17) Marcus M. (1960) Basic theorems in matrix theory
NBS Appl. Math Series, 57.
- 18) Laurent P.J. (1966) Approximation et optimisation
Herman Paris
- 19) Paihua L., Dias U.F. (1976) un ensemble de programmes
pour l'interpolation des fonctions spline du type Plaque
Mince.
- 20) Felto C.R. Elkins T.A. and Boyd H.A. (1968)
Automatic contouring of irregularly spaced
data Geophysics, 33: 424-430
- 21) Shepard D. (1968) a two dimensional interpolation
function for irregularly-spaced
data ACM Nat cont. 517-524

- 22) Thompson R.F. (1960) Spline interpolation on a digital computer, preprint X - 692-70-261
Goddard Space Flight Center, PP26, Greenbelt
Maryland U.S.A.

- 23) Wahba G. and Wendel J.B. (1980) Some New Mathematical Methods for Variational objective analysis Using Splines and Cross Validation.