

Ref: 2



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA
DE MEXICO**

FACULTAD DE CIENCIAS

**ESTUDIOS DE ALGUNOS SISTEMAS OPTICOS SENCILLOS
USADOS COMO CONCENTRADORES SOLARES**

Tesis Profesional

Que para obtener el Título de

F I S I C O

presenta

JUAN CARLOS ALONSO HUITRON

México, D. F.

1983



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

INDICE

INTRODUCCION	1
CAPITULO I PORQUE EL USO DE CONCENTRADORES: SU FUNCION PRINCIPAL	5
1.1 Formas de aprovechar la energia solar	5
1.1.1 Celdas fotovoltaicas	6
1.1.2 Convertidores termoelectricos	10
1.2 Definición del factor de concentración	15
CAPITULO II ASPECTOS RELEVANTES EN LA CONCENTRACION DE LA RADIACION SOLAR	22
2.1 Optica geométrica	22
2.2 La lente de aumento: región paraxial, rayos paralelos	27
2.3 Aberración esférica	29
2.4 Lente de aumento: sol con dimensiones	43
2.5 El factor de concentración máximo teórico .	61
CAPITULO III EL FACTOR DE CONCENTRACION Y CARACTERISTICAS DE ALGUNOS SISTEMAS OPTICOS	65
3.0 Lente esférico plana	67

3.1	Espejo parabólico	68
3.2	Concentradores cónicos	82
3.3	El concentrador parabólico compuesto	93
CAPITULO IV	COMPARACION DE LOS DISTINTOS SISTEMAS OPTICOS USADOS COMO CONCENTRADORES	108
4.1	Costo de los distintos sistemas ópticos ...	109
4.2	Algunas aplicaciones específicas de los concentradores, que permiten su comparación	111
4.2.1	Concentrador integrado a una celda fotovoltaica rectangular	112
4.2.2	Concentrador integrado a una celda fotovoltaica de forma circular	115
4.2.3	Concentrador para uso en una central heliotérmica	117
4.2.4	Concentradores usados como hornos solares .	119
CONCLUSIONES	121
APENDICE A	LEYES DE LA OPTICA GEOMETRICA EN FORMA VECTORIAL; TECNICA DE TRAZO DE RAYOS	123
A.1	LEY DE SNELL	123
A.2	LEY DE LA REFLEXION	125
A.3	TECNICA DEL TRAZO EXACTO DE RAYOS	127

APENDICE B	TRAZO DE RAYOS PARA UNA LENTE ESFERICO-PLANA CONCENTRANDO RAYOS PARALELOS AL EJE OPTICO.	129
B.1	REFRACCION EN LA PRIMER SUPERFICIE	129
B.2	REFRACCION EN LA SEGUNDA SUPERFICIE	131
B.3	PROGRAMA PARA EL TRAZO ESPECIFICADO	133
APENDICE C	TRAZO DE RAYOS PARA UNA LENTE ESFERICO-PLANA TOMANDO EN CUENTA LA EXTENSION ANGULAR DEL SOL	140
APENDICE D	TRAZO DE RAYOS PARA UN ESPEJO PARABOLICO ..	145
APENDICE E	CALCULO DEL COCIENTE DE LAS AREAS PARA LOS DISTINTOS SISTEMAS OPTICOS	151
REFERENCIAS	172

I N T R O D U C C I O N

Sabemos que todo ser vivo requiere periódicamente de cierta cantidad de energía para realizar sus funciones vitales y preservar su existencia. Los mecanismos por los cuales es obtenida, aprovechada y transformada, son muy diversos y complejos, así como lo son las fuentes energéticas. Un hecho irrefutable, es que diariamente grandes cantidades de energía son consumidas por los seres vivos. Ahora bien, de entre todos estos, el hombre se ha destacado por su capacidad para manipular y transformar el medio que le rodea para su bienestar y desarrollo. Esto lo convierte en el consumidor número uno de energía, pues no solo requiere de ella para su autoconsumo sino también para mantener en pie la infraestructura tecnológica que ha creado y que ya le es imprescindible. Es evidente entonces, que las exigencias de energía para el hombre son ya muy grandes, e irán aumentando conforme transcurra el tiempo, es por ésto que se ha visto en la necesidad de identificar y aprovechar prácticamente todas las fuentes de energía existentes sobre la tierra. Así, a través de la historia el hombre ha aprovechado las reservas de algunos minerales como el carbón, las reservas de algunos compuestos orgánicos como el petróleo, la madera, los vientos, las caídas de agua, en una mínima parte la energía proveniente del sol en forma de radiación, y recientemente la energía nuclear. Si analizamos con cuidado el proceso de la explotación y utilización de los recursos energéticos

más convencionales hasta ahora, como lo son; el carbón, la madera, el petróleo y el uranio, nos podemos percatar que se han originado serios problemas a la par de esto. Por un lado está la fuerte contaminación que existe casi en todos los países, tanto desarrollados como subdesarrollados, producto de los desechos que trae consigo la transformación de éstos energéticos. Por otra parte, es sabido que la distribución geográfica de las reservas energéticas, no es uniforme, lo que origina por un lado, que haya un fuerte distanciamiento económico entre los países que poseen o no tales reservas, y por otro, en los países que carecen de éstas, los costos de la energía son muy elevados debido a los gastos que implica su transportación. Finalmente, debido a las crecientes demandas de energía, y, a la finitud de las reservas de los energéticos convencionales, el fin de éstos se prevé que no es muy lejano. Una posible solución a todos estos problemas es utilizar la energía proveniente del sol. Esta fuente de energía resulta ser prácticamente inagotable (comparado con el tiempo de vida de muchas generaciones de seres humanos), su distribución geográfica es muy uniforme al menos en un gran porcentaje de la superficie terrestre, y su utilización va aunada de una gran "limpieza" en cuanto a contaminación se refiere. A pesar de que también tiene sus inconvenientes como el ser una fuente intermitente y que depende de la nubosidad de la atmósfera, entre otras cosas, puede resultar de gran beneficio para el hombre su aprovechamiento.

Desde hace algún tiempo se ha investigado acerca de las maneras en que se puede aprovechar la energía solar, aunque no con el auge requerido para que pueda sustituir a los energéticos convencionales. El aprovechamiento de la energía solar, está aún en proceso de desarrollo y requerirá de gran impulso tanto científico como tecnológico para que en un futuro pueda satisfacer las demandas energéticas a gran escala. Dentro de las perspectivas que se tienen para la utilización y a provechamiento eficiente de la energía solar, se encuentra el hacer uso de dispositivos conocidos como concentradores solares. La importancia de éstos radica en que, integrados a otros dispositivos que transforman la radiación solar en algún tipo de energía que utilice el hombre directamente (como la energía eléctrica), aumentarán su eficiencia.

El objetivo de este trabajo es hacer una revisión de algunos sistemas ópticos usados como concentradores y mostrar el papel tan importante que juegan en el aprovechamiento eficiente de la energía solar, así como la manera en que lo hacen. Se pretende con ésto, impulsar de alguna manera la utilización de la energía solar. Aunque el trabajo es desarrollado en forma teórica, el propósito final es que los resultados y datos mostrados sean útiles como preámbulo para un desarrollo práctico posterior, es por ésto, que está muy enfocado hacia algunas posibles aplicaciones bien concretas.

El trabajo está estructurado de la siguiente manera: en el primer capítulo se mencionan algunas formas particulares

de aprovechamiento de la energía solar en las que los concentradores solares juegan un papel muy importante. También se da a conocer cuál es la finalidad y característica principal de estos dispositivos, y se mencionan los dos casos más generales de concentradores que hay. En el segundo capítulo se dan las bases de óptica geométrica que se requieren para el desarrollo del trabajo, y se muestran los aspectos más relevantes en el proceso de la concentración de la radiación solar. Esto se hace a través de un estudio del funcionamiento del sistema óptico más común; la lente de aumento. Una vez que se tiene suficiente formalidad y familiaridad con el tema y el lenguaje involucrado, se inicia en el tercer capítulo un estudio de varios sistemas ópticos que pueden funcionar como concentradores. Por último, en base a este estudio, en el capítulo cuatro se comparan los distintos sistemas ópticos estudiados, a través de su aplicación a problemas bien concretos. Al final se dan las conclusiones que de este trabajo se desprenden.

C A P I T U L O I

PORQUE EL USO DE CONCENTRADORES: SU FUNCION PRINCIPAL

En este capítulo se plantean muy someramente algunas formas por medio de las cuales se puede aprovechar la energía solar. Se pretende hacer evidente que el uso de concentradores hace más eficiente el aprovechamiento de la radiación solar, y que en ocasiones resulta ser en sí una manera de utilizarla directamente. En base a esta discusión se define la propiedad -- más importante de estos dispositivos; EL FACTOR DE CONCENTRACION. Se mencionan definiciones alternativas que se pueden dar a esta cantidad, así como los dos tipos de concentradores que hay.

1.1 FORMAS DE APROVECHAR LA ENERGIA SOLAR

Existe una gran diversidad de formas de utilizar la energía solar, desde las más sencillas como lo son los calentadores solares de agua para uso doméstico, los dispositivos de calefacción solares, los alambiques solares para destilar agua, dispositivos para el secado de alimentos etc. (González Hurtado), hasta otras más refinadas entre las cuales podemos mencionar la conversión directa de la energía solar en energía -- química por medio de convertidores fotoquímicos (Brinkworth), la conversión de energía solar en energía eléctrica haciendo

uso de los convertidores fotovoltaicos y termoiónicos (Wilson), o la conversión combinada de energía solar en energía mecánica y luego en eléctrica usando dispositivos termoeléctricos. Estas formas de utilización de la energía solar están aún en proceso de optimización, pues aunque se tienen ya funcionando algunos dispositivos, las eficiencias son aún bajas, lo cual implica costos muy elevados.

Para ver más claramente el tipo de problemática involucrada en el aprovechamiento eficiente de la energía solar, a continuación se bosqueja la forma de operar de dos dispositivos en concreto: los convertidores fotovoltaicos y los termoeléctricos que son los que seguramente serán más viables a ser utilizados para satisfacer las demandas energéticas a gran escala.

1.1.1 CELDAS FOTOVOLTAICAS

Los convertidores fotovoltaicos comúnmente conocidos como celdas solares son dispositivos que se basan en las propiedades de algunos semiconductores cuando se las introducen impurezas (Bemski). Un ejemplo típico es la celda solar de silicio que consta de una pastilla de silicio impurificado con pequeñas cantidades de boro, llamado silicio tipo-p, en contacto con una capa delgada de silicio impurificado con fósforo, llamado silicio tipo-n. Estos cristales son eléctricamente neutros, pero las impurezas en ellos son tales que en el silicio tipo-n hay una concentración de electrones libres (electrones

de conducción) mayor que en el silicio tipo-p. Inversamente, en este último hay una concentración de huecos (cargas positivas) libres mayor que en el silicio tipo-n. Debido a esto, en la unión (n-p) llamada zona de transición, hay un gradiente de concentraciones de huecos y electrones libres que hace que estos últimos se muevan del lado n al lado p, y los primeros del lado p al lado n. Esto produce un exceso de cargas positivas en la región n y un exceso de cargas negativas en la región p. En estas condiciones, se produce un campo eléctrico muy elevado debido a las pequeñas dimensiones de la región de transición. Si en estas condiciones se hace incidir luz en cierto rango de frecuencias, sobre la capa de silicio tipo-n, la luz absorbida producirá pares de electrones y huecos. Debido al campo eléctrico existente, los huecos se moverán en la dirección p y los electrones en la dirección n, produciéndose así una diferencia de potencial entre las regiones de aproximadamente .6 Volts. Si se completa el circuito externo con una resistencia, se obtendrá como resultado una corriente eléctrica, (ver figura 1.1). De este modo se puede convertir la energía luminosa, en particular la proveniente del sol, en energía eléctrica. La eficiencia de una celda solar de silicio de un tamaño dado, se define como el cociente de la potencia que aparece a través de la resistencia (potencia de salida), entre la recibida cuando se expone directamente a la radiación solar (potencia de entrada).

Ahora bien, debido a limitaciones cuánticas no toda

la radiación solar que le llegue a la celda se convierte en energía eléctrica; en vez de ello gran parte de la radiación se pierde en proporcionarle energía térmica a la celda; además, -- hay pérdidas de energía por reflexiones de la luz incidente en la superficie frontal. Estas causas entre otras originan eficiencias reales del 15% (Chalmers), es decir, que exponiendo una celda fotovoltaica a la radiación solar directa, solamente una pequeña fracción de la energía total recibida es convertida en energía eléctrica.

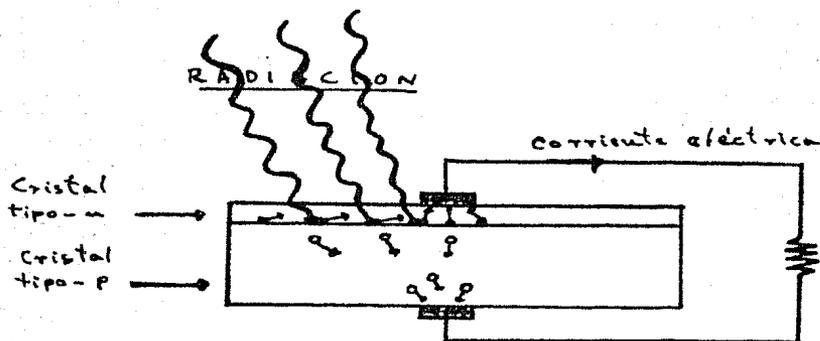


FIG 1.1 Celda solar de silicio. • electrones, ◻ huecos.

Debido por un lado, a esta baja eficiencia, y por otro, a la pureza y perfección cristalográfica que se requiere para que una celda alcance su más alto rendimiento, el costo de una central fotovoltaica resulta ser muy elevado. Para comparar con otro tipo de central, se pueden tomar datos de 1976 (Chalmers),

en que el costo de una central térmica de combustible era alrededor de 500 dólares por Kilowatt, mientras que una central fotovoltaica tenía un costo de unos 20000 dólares por kilowatt, ¡cuarenta veces mayor que el anterior!. Por esta razón, si se pretende que en un futuro la energía solar sustituya a otras fuentes convencionales como el petróleo o el uranio, debe buscarse la manera de reducir los costos de los dispositivos fotovoltaicos. una forma de hacer ésto se basa en una característica importante de las celdas solares; el hecho de que la corriente generada por éstas es directamente proporcional a la irradiancia incidente^(*), y como la potencia de salida es proporcional a la corriente, entoces se tendrá que si se aumenta la irradiancia que incide sobre una celda solar, se aumentará la potencia de salida y por consiguiente la eficiencia de la celda.

Aquí aparece la importancia que tendrá utilizar un dispositivo que concentre la radiación solar en una pequeña área de la celda, es decir, un concentrador solar, que tome la irradiancia original I proporcionada por el sol y produzca de algún modo una irradiancia I' aumentada en un factor C mayor que la unidad, reduciendo en el mismo factor el costo por Kilowatt proporcionado por una celda (sin considerar, por ahora, el costo mismo del concentrador). El uso de celdas solares con concentradores adaptados a éstas será costeable o no, dependiendo de varios factores como son: el factor de concentración que re irradiancia \equiv cantidad de energía por unidad de área y por unidad de tiempo.

(*)

sista una celda, y el costo del concentrador que se adapte a una celda dada. Es conveniente dar aquí algunos de los tamaños típicos de las celdas solares que en la práctica se producen, así como los factores de concentración que resisten. Se ha demostrado que son factibles factores de concentración de 8 a 10 sin que el funcionamiento de una celda de silicio sufra algún daño en tanto no se le permita calentarse demasiado. Por otro lado, se fabrican celdas de silicio rectangulares de 10 cm. de longitud por 2.5 cm. de ancho, y circulares con diámetros de 7 a 10 cm.. Estos datos serán de utilidad en el último capítulo como referencia para comparar los sistemas ópticos estudiados y sugerir cuál puede ser el más conveniente para ser utilizado en un caso particular. Por el momento con esto se muestra un problema o caso específico por el cual introducir el uso de concentradores solares puede ser conveniente. En la siguiente sección analizaremos otro caso.

1.1.2 CONVERTIDORES TERMOELECTRICOS

Los convertidores termoeléctricos son dispositivos que convierten primero la energía solar en energía mecánica para posteriormente transformarla a energía eléctrica por medio de un generador eléctrico. Así, una central solar o heliotérmica funciona lo mismo que una central nuclear. La única diferencia existente entre ellas reside en la forma como se obtiene el vapor de agua que va a mover el turbogenerador. En una central térmica este vapor de agua se obtiene por combustión de -

de carbón o petróleo, en una central nuclear se aprovecha para ello, el calor que se desprende de una reacción nuclear de fisión, y en una central heliotermica se utiliza la radiación solar. Sin entrar mucho en detalle, para ver el funcionamiento de esta última se puede partir del hecho de que una máquina -- trabajando en un ciclo de Carnot (Zemansky, cap. IX) tiene una eficiencia dada por:

$$\eta_c = 1 - \frac{T_f}{T_c} \quad (1.1.1)$$

siendo T_f la temperatura del foco frío y T_c la temperatura del foco caliente, ambas en grados Kelvin. Tal máquina se muestra en la figura 1.2, en donde Q_1 es el calor absorbido por la máquina, Q_2 el calor cedido y W el trabajo realizado por ésta.

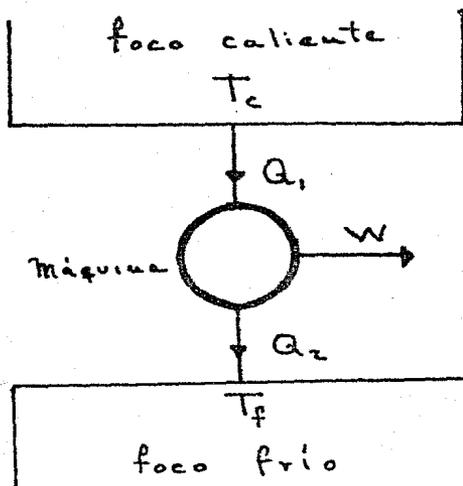


FIG. 1.2 Flujo de energía en una máquina de Carnot.

Ahora bien, una máquina de Carnot, es una máquina ideal en el sentido de que funciona a través de procesos reversibles y en la realidad todos los procesos son irreversibles, ésto hace - que el rendimiento de una máquina real sea menor que el de una máquina de Carnot. Una máquina real de vapor funciona aproximadamente como en un ciclo Rankine (Zemansky, cap.XII), para el cual la eficiencia tiene una expresión mucho más complicada -- que la dada por (1.1.1), de cualquier manera ésta dependerá básicamente de las diferencias entre las temperaturas del foco - frío y del foco caliente. Por ejemplo para una máquina que funcione según un ciclo Rankine entre focos a temperaturas $T_c = 513^{\circ}\text{K}$ y $T_f = 313^{\circ}\text{K}$ se encuentra (ver, Zemansky, pág.239) que tiene una eficiencia $\eta = 32\%$. En las centrales de vapor reales hay tantos procesos irreversibles que el rendimiento es mucho más bajo que ésta y resulta ser aproximadamente del 10% al 15%. En comparación una máquina de Carnot trabajando entre los mismos focos tendrá una eficiencia del 40%, es decir casi tres veces mayor. Ante estos resultados se puede suponer que las eficiencias de una máquina de vapor real y una de Carnot guardan la - relación:

$$\eta_r = \frac{1}{3} \eta_c \quad (1.1.2)$$

para cualquier valor de las temperaturas de los focos frío y - caliente. Aunque la relación (1.1.2) es un mera suposición, en base a ella se puede tener una idea de la eficiencia que se pue

de obtener con una central heliotérmica. en la mayoría de centrales térmicas el foco frío tendrá aproximadamente la temperatura dada en el ejemplo anterior ($T_f = 313^\circ\text{K} \approx 40^\circ\text{C}$), mientras que la temperatura del foco caliente dependerá del combustible y recipiente utilizados para calentar la caldera. Si se ha de utilizar la radiación solar, la temperatura del foco caliente dependerá fundamentalmente de las temperaturas que alcance el colector expuesto a la radiación solar, así como de la eficiencia de éste. La temperatura que alcanza un cuerpo expuesto a una irradiación I se deduce en base a la ecuación de Planck (Zemansky, secc.5.12), para la radiación de un cuerpo negro, - encontrándose que está dada por la expresión:

$$I = \frac{\epsilon}{\alpha} \sigma T^4 \quad (1.1.3)$$

(Brinkworth, pág.71), siendo ϵ la emisividad del cuerpo, α el poder de absorción (Zemansky, pág. 109-111), T la temperatura de equilibrio en grados Kelvin y σ la constante de Stefan-Boltzman cuyo valor es $\sigma = 5.67 \times 10^{-8} \text{ Watt/m}^2 (\text{K})^4$. Así, ya que la irradiación I recibida desde el sol sobre la superficie de la tierra es aproximadamente $I = 1 \text{ Kwatt/m}$ (Unsold, pág.151), si suponemos un colector con $\epsilon = \alpha$, la temperatura que alcanzará con la radiación directa del sol será $T_c \approx 364^\circ\text{K}$. La eficiencia de una máquina de vapor funcionando entre focos a temperaturas $T_f = 313^\circ\text{K}$ y $T_c = 364^\circ\text{K}$ será, en base a las expresiones (1.1.1) y (1.1.2), será demasiado baja, aproximadamente el 4%.

Nuevamente se ha llegado a que si se quiere tener una central heliotérmica con eficiencia comparable con la de una central termoeléctrica convencional, la manera más directa de hacerlo es concentrando la radiación solar, es decir aumentar la irradiancia original por un factor C mayor que la unidad, con lo cual se aumentará la temperatura en un factor según la ecuación (1.1.3), y por lo tanto se originará un aumento correspondiente en la eficiencia. Esto muestra lo importante que puede resultar el uso de un concentrador solar en una central heliotérmica. De este análisis puede verse que con factores de concentración de 25 en adelante se alcanzarán temperaturas suficientes para hacer trabajar a una máquina de vapor con una eficiencia adecuada (ver, Wolfgang, pág. 115). Por otro lado, se tienen datos (Ken Butti) de máquinas solares que se han montado en París, usando espejos cónicos, en donde el colector plano que forma la caldera ha tenido diámetros de hasta un metro. Con esto se ve de nuevo otra importante aplicación que pueden tener los concentradores solares, y además se tienen algunos datos que serán útiles más adelante.

Para finalizar esta sección se debe mencionar que -- existen también dispositivos como las cocinas y los hornos solares que son simplemente concentradores solares. una simple cocina solar alcanza rápidamente temperaturas capaces de cocer prácticamente comida en un período de poco menos de una hora, dependiendo este tiempo de si está resguardada o no del viento, y del factor de concentración que produzca el concentrador. Con

el uso de concentradores muy potentes que alcanzan a producir temperaturas muy elevadas se ha hecho posible perfeccionar materiales de alto poder refractario, por ejemplo en el Laboratorio de l'Énergie solaire, puesto en la región de Cerdeña en los Pirineos orientales, cerca de la frontera con España se han logrado obtener temperaturas de 3000 °C en un colector de 50 cm. de diámetro (Brinkworth, pág. 89), para lo cual se requiere de concentradores que produzcan factores de concentración del orden de 6000-8000. Es claro de esto, que un concentrador solar por sí solo proporciona una manera de aprovechar la radiación solar.

En esta sección se han mostrado varias aplicaciones directas de los concentradores solares que motivan el estudio de éstos. En la siguiente sección se inicia su estudio definiendo su característica más importante: el factor de concentración.

1.2 DEFINICION DEL FACTOR DE CONCENTRACION

Es claro de la sección anterior, que la finalidad de un concentrador solar es aumentar la irradiancia I recibida de el sol, en un factor $C > 1$, de modo que la irradiancia a la salida de éste sea

$$I' = C I \quad (1.2.1)$$

Es decir el concentrador toma un haz de luz solar y a la salida

nos entrega un haz de área transversal menor, por ello se puede visualizar un concentrador como una caja negra, con una abertura de entrada de área A que reciba la radiación solar y con una abertura de salida de área $A' < A$, de tamaño adecuado para que permita que toda la radiación incidente emerja justamente a través de ella como se muestra en la figura 1.3

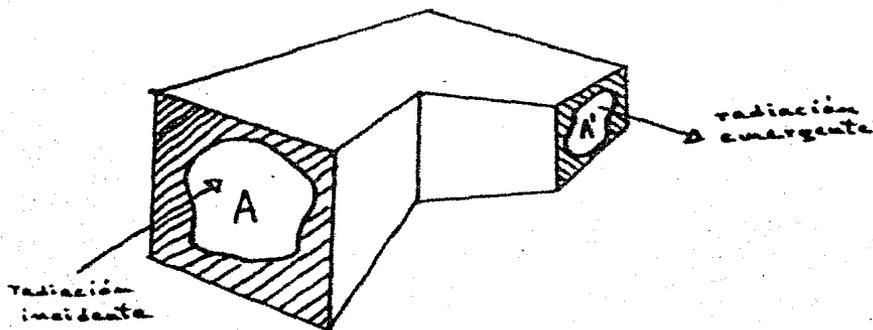


FIG. 1.3 Modelo tipo "caja negra" de un concentrador para definir el factor de concentración C .

De éste modo, dado que la irradiancia es la cantidad de energía por unidad de área y por unidad de tiempo que entra al concentrador y que se ha supuesto que toda la energía por unidad de tiempo que entra a éste, sale de él, solo que por un área menor, la ec.(1.2.1) se reduce en este caso a: $\frac{1}{A'} = C \frac{1}{A}$. Así, si se define el factor de concentración como:

$$C = \frac{A}{A'} \quad (1.2.2)$$

entonces el aumento en la irradiancia dependerá únicamente de qué tan pequeña se puede hacer el área de la abertura de salida (*). Debe señalarse que la orientación que tenga la abertura de salida respecto a la de entrada dependerá del sistema en cuestión.

En la definición dada por (1.2.2) del factor de concentración se está suponiendo un funcionamiento ideal en el sentido de que se supone que no hay pérdidas de energía, lo cual es difícil de conseguir en la práctica puesto que un concentrador real será un sistema óptico formado por superficies reflectoras que no son 100% reflectoras, y/o superficies refractoras que presentan algo de absorción o reflexión en las interfaces que separan los medios (Zajac, secc. 3.3.1 y 4.3.3), de modo que el factor en el cual se aumenta la irradiancia en la ec. (1.2.1) usando un determinado concentrador, será menor que el encontrado para éste usando la definición dada por (1.2.2). Se puede dar otra definición del factor de concentración más adecuada a los sistemas reales como por ejemplo, el "factor de -- concentración óptico sujeto a pérdidas" que se define como el factor de concentración dado por (1.2.2) menos la fracción de energía perdida por reflexiones, absorción, errores de fabricación etc., pero la expresión para este "factor de concentración sujeto a pérdidas" ya no es general sino que dependerá del tipo particular de concentrador en cuestión. Se pueden dar todavía otras definiciones alternativas del factor de concentración

(*) A menos que se especifique lo contrario, se supondrá de aquí en adelante que el área de salida es tal que permite salir toda la radiación que entra al concentrador.

(Welford), pero para los fines de este trabajo, no son de interés, puesto que aquí se adoptará la definición dada por la ec. (1.2.2). En estos términos nuestro estudio consistirá en lo siguiente: dado un haz de luz proveniente del sol incidiendo sobre la abertura de entrada de un concentrador con una geometría dada, determinar el tamaño más pequeño posible de la abertura de salida que permita que toda la radiación incidente emerja a través de ella, y analizar de que parámetros depende este tamaño. Con ésto se podrán determinar los valores posibles del factor de concentración del concentrador en cuestión.

Finalmente debemos mencionar los dos tipos de concentradores que hay: bidimensionales y tridimensionales. Estas denominaciones provienen del hecho de que el problema a analizar desde el punto de vista óptico, en el primer caso se tiene que hacer en un espacio de dos dimensiones, mientras que en segundo caso tiene que hacerse en tres dimensiones. Cuando el concentrador comprime el haz incidente de tal manera que el área transversal de éste disminuye en dos direcciones, el concentrador se denomina tridimensional y se denota por 3D de acuerdo con la nomenclatura dada por (Welford). Las figuras 1.4 (a) y (b) muestran las secciones transversales del haz incidente y emergente para dos concentradores 3D, con aberturas cuadrada y circular respectivamente. En ambos casos el factor de concentración será el cociente de las áreas de entrada y salida, que en este caso resulta ser:

$$C = \left(\frac{a}{a'} \right)^2 \quad (1.2.3)$$

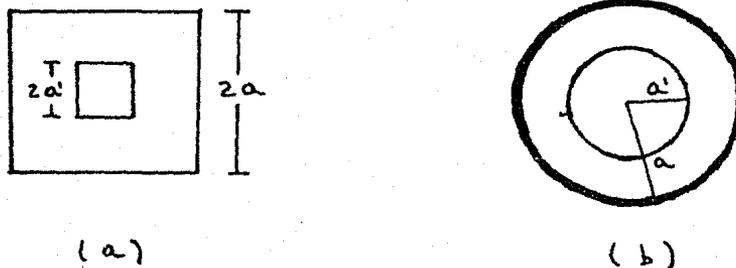


FIG. 1.4 Esquema mostrando las secciones transversales del haz incidente y emergente a través de un concentrador 3D con aberturas de entrada y salida; (a) cuadradas, (b) circulares.

Si el concentrador solo comprime el haz incidente disminuyendo su área en una dirección se le llama bidimensional y se denota por 2D. La figura 1.5 (a) muestra la sección transversal del haz incidente y emergente para un concentrador 2D, de canal -- mostrado en la figura 1.5 (b). El factor de concentración para el concentrador 2D resulta ser en este caso:

$$C = \frac{a}{a'} \quad (1.2.4)$$

De las expresiones (1.2.3) y (1.2.4) para el factor de concentración en el caso 3D y 2D respectivamente, es claro que con un concentrador 3D se podrán obtener factores de concentración mayores que con un concentrador 2D, para un cociente dado, --

por lo que se puede pensar que debido a esta ventaja será más conveniente usar un 3D que un 2D, sin embargo desde el punto de vista práctico, ya que un concentrador solar debe mantenerse alineado, apuntando al sol en el transcurso de todo el día, el concentrador 3D requerirá de un sistema de seguimiento del sol automático y bastante preciso que esté alineado a cada momento el eje óptico^(*) del concentrador con el sol.

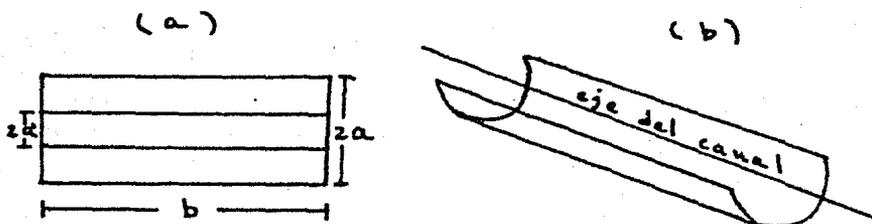


FIG. 1.5 (a) sección transversal del haz emergente e incidente para un concentrador 2D, (b) concentrador 2D de canal.

un concentrador 2D en cambio, no necesita girarse para seguir al sol todo el día, pues basta con orientarlo en la forma adecuada para que el eje del canal^(**) quede sobre el plano en que se encuentra la trayectoria del sol, y solo necesite orientarse en períodos de tiempo más largos. Esto hace que el montaje-

(*) más adelante se aclarará lo que es el eje óptico de un concentrador.

(**) no confundir el eje del canal 2D, con el eje óptico de éste. En principio estos dos ejes serán siempre perpendiculares entre sí.

de un concentrador 2D sea más económico que el de un 3D. Por otro lado, como se verá más adelante, el estudio de los concentradores 2D es más sencillo que el de los 3D. Así, ambos tipos de concentrador tienen sus ventajas y desventajas por lo que serán tomados en cuenta, los dos tipos, para estudiar sus características y poder decidir en un problema dado cual es el tipo más adecuado, o incluso en ocasiones, cual es el único tipo que se puede utilizar.

Con esto se tienen algunas ideas claras y concretas en cuanto a las aplicaciones, finalidad y tipos de concentradores que motivan el estudio de éstos. La revisión y estudio de algunos sistemas ópticos usados como tales se hace en base a conceptos de óptica geométrica y comienza en el siguiente capítulo.

C A P I T U L O I I

ASPECTOS RELEVANTES EN LA CONCENTRACION DE LA RADIACION SOLAR

En este capítulo se dan los conceptos de óptica geométrica básicos para el estudio de los sistemas ópticos usados como concentradores.

Aprovechando la simplicidad que hay en las ecuaciones que describen de manera aproximada el funcionamiento de -- las lentes, se inicia el estudio de los concentradores con el análisis de una lente de aumento, primero en la aproximación -- paraxial y luego de manera más exacta por medio del trazo de -- rayos. Esto permite identificar las características y paráme-- tros relevantes en el proceso de la concentración solar. De é-- ste análisis se vislumbra además la existencia de un factor de -- de concentración máximo.

Finalmente se menciona que en base a la óptica de -- Hamilton se puede mostrar que, efectivamente, hay un factor de -- concentración máximo teórico para todo sistema óptico que -- centre radiación solar. Se da la expresión para este máximo -- teórico y se discute su importancia y aplicaciones.

2.1 OPTICA GEOMETRICA

Cuando se tiene un problema, en donde solamente inter-- esa la propagación y manipulación de la luz, como en este --

caso, se recurre a la aproximación llamada óptica geométrica. En ésta el tamaño de la longitud de onda de la luz se considera despreciable ($\lambda \rightarrow 0$), y por tanto las leyes que rigen el comportamiento de la luz son formuladas en un lenguaje fundamentalmente geométrico. Para ello, la descripción de los fenómenos se hace en términos de rayos de luz que se definen como líneas en la dirección en que se propaga la energía luminosa-- (Zajac, secc. 4.2.3), junto con superficies que reflejan y/o transmiten la luz. Existen principios muy generales que gobiernan o al menos describen el comportamiento de la luz, tales como el principio de Huygens, el principio de Fermat y el teorema de Malus y Dupin (Zajac, cap. 1V). A partir de éstos tenemos dos cosas muy importantes para el desarrollo de este trabajo. Por un lado, podremos visualizar al sol como un objeto formado por una infinidad de fuentes luminosas puntuales que emiten rayos en todas direcciones, y por otro, tenemos las leyes básicas de la óptica geométrica que serán fundamentales para nuestro desarrollo. La deducción de estas leyes a partir de los principios fundamentales puede verse también en (Zajac, cap. 1V), aquí únicamente las enunciaremos.

Cuando la luz incide sobre una superficie que separa dos medios ópticamente diferentes^(*) parte de la luz se refleja y parte se transmite. La ley de la reflexión establece que el rayo reflejado y el rayo incidente hacen el mismo ángulo con la normal a la superficie y que ambos están en el plano de in-

(*) ópticamente diferentes significa que tienen índices de refracción diferentes.

incidencia ^(*). La ley de la refracción establece que el seno del ángulo θ_t entre el rayo transmitido y la normal a la superficie es proporcional al seno del ángulo θ_i entre la normal y el rayo incidente, siendo la constante de proporcionalidad el cociente del índice de refracción del medio de incidencia n_i , entre el índice de refracción del medio de transmisión n_t , y que ambos rayos están sobre el plano de incidencia; en donde los índices de refracción están dados por $n_t = \frac{v_i}{c}$ y $n_i = \frac{v_t}{c}$ siendo v_t y v_i la velocidad de la luz en los medios de transmisión y de incidencia respectivamente y c la velocidad de la luz en el vacío. Matemáticamente se expresan simplemente como:

Ley de la reflexión $\theta_i = \theta_r$ (2.1.1)

Ley de la refracción $n_i \text{Sen}(\theta_i) = n_t \text{Sen}(\theta_t)$ (2.1.2)

La figura 2.1 muestra los parámetros involucrados.

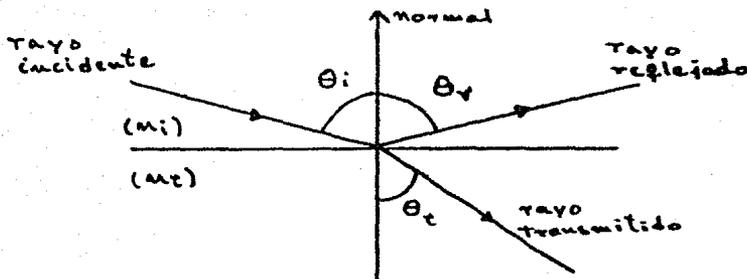


FIG. 2.1 Leyes básicas de la óptica geométrica.

(*) El plano de incidencia se define como el plano generado por la normal a la superficie y el rayo incidente.

En el apéndice A se formulan estas leyes en forma vectorial y se dan las expresiones que serán utilizadas más adelante cuando se haga el trazo de rayos.

Ahora bien, en base a los principios mencionados o a las leyes de la óptica geométrica, es directo deducir la ecuación de Gauss para lentes delgadas simples (ver, Zajac, cap. V o Sears, cap. III).

$$\frac{1}{S_o} + \frac{1}{S_i} = \frac{1}{f} \quad (2.1.3)$$

en donde

$$\frac{1}{f} = \left(\frac{n_l}{n_m} - 1 \right) \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \quad (2.1.4)$$

La ecuación (2.1.3) describe el comportamiento de las lentes delgadas simples ($d \rightarrow 0$), en la región paraxial, formadas por superficies esféricas de radios r_1 y r_2 , centradas en un eje común, n_l es el índice de refracción de la lente y n_m el índice de refracción del medio en que está sumergida. S_o y S_i , son las distancias del objeto y de la imagen a la lente respectivamente, ambas medidas a lo largo del eje óptico definido como la línea que pasa por los centros de las dos superficies que forman la lente. f es la distancia focal paraxial. La figura 2.2 muestra la manera en que una lente convergente en la aproximación paraxial, forma una imagen real de un objeto real. De esta misma figura es fácil deducir también el aumento trans

versal producido por la lente, que se define como el cociente del tamaño del objeto Y_o , entre el tamaño de la imagen Y_i (bajo cierta convención de signos, seguida en, (Zajac)), que queda expresado como

$$M_T = \frac{Y_o}{Y_i} = - \frac{S_i}{S_o} \quad (2.1.5)$$

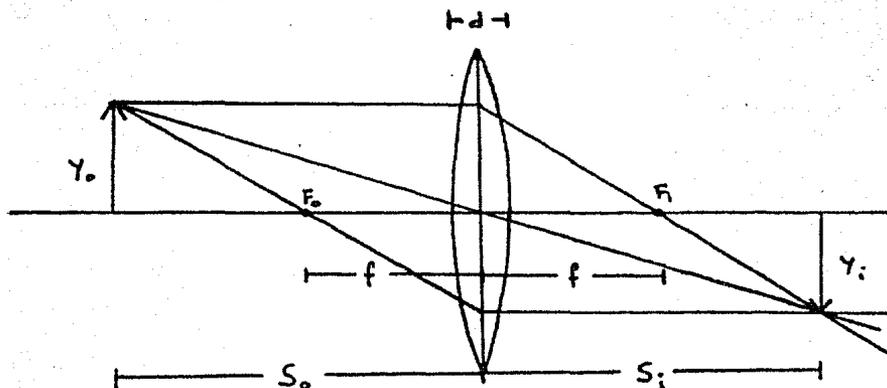


FIG. 2.2 Formación de la imagen de un objeto, producida por una lente convergente, en la aproximación paraxial.

En esta figura son mostrados los parámetros mencionados. Se han trazado los rayos que determinan gráficamente la posición y tamaño de la imagen.

Es muy importante recalcar que todas las expresiones anteriores son válidas solamente en la aproximación paraxial, en la que se supone que los ángulos que hacen los rayos incidentes y emergentes son pequeños, siendo éstos medidos respecto

a las normales a las superficies refractoras y respecto al eje óptico de la lente; tan pequeños que se pueda hacer la aproximación $S_{e.m.}(\theta) \approx e$ y $C_{o.m.}(\theta) \approx 1$ llamada también aproximación de primer orden. A pesar de ser una aproximación, juega un papel muy importante dentro de la óptica geométrica, pues no obstante su sencillez, contiene los elementos suficientes para explicar el funcionamiento de los sistemas ópticos formadores de imagen.

Con ésto se tienen ya los conceptos básicos de óptica geométrica que serán utilizados para el estudio de algunos sistemas ópticos usados como concentradores, que es el objetivo central de este trabajo.

En la siguiente sección nos introducimos al problema de la concentración de la radiación solar de la manera más sencilla; analizando como concentra una lupa los rayos del sol y de que parámetros y aspectos depende tal concentración.

2.2 LA LENTE DE AUMENTO:

Región paraxial, rayos paralelos.

Sabemos que si se coloca una lupa entre los rayos directos del sol y una hoja de papel, a una determinada distancia entre éstos, los rayos forman una pequeña mancha de luz. La radiación se ha concentrado en una pequeña zona, por lo tanto el papel empieza quemarse. La explicación de como ocurre

la concentración se puede dar en base a las ecuaciones de la sección anterior, y haciendo un modelo de la situación física para atacar el problema de la manera más simple y directa. Este modelo consiste en considerar que dada la lejanía del sol se puede suponer que los rayos que provienen de éste, llegan a la lente prácticamente paralelos entre sí, y al eje óptico de la lente, si ésta se alinea en la forma adecuada. En términos de las ecuaciones (2.1.3) y (2.1.5), esto se traduce en considerar $S_o \rightarrow \infty$, lo cual implica que la posición de la imagen será $S_i = f$ y el aumento transversal será $M_T = 0$. La figura 2.3 muestra como los rayos paralelos son desviados al atravesar la lente y son dirigidos hacia un mismo punto sobre el eje de la lente, conocido como punto focal paraxial.

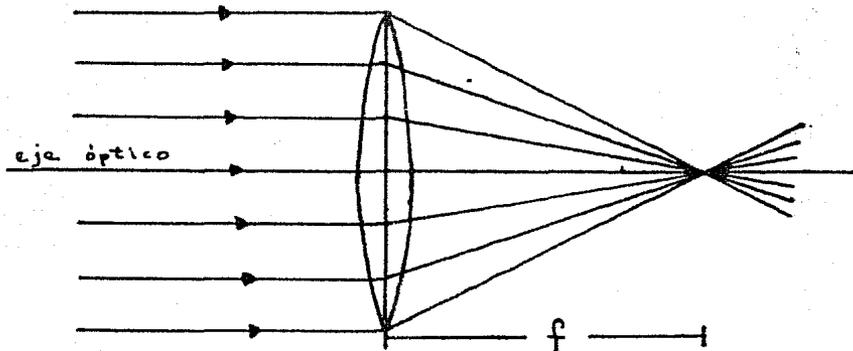


FIG. 2.3 Esquema mostrando la concentración de rayos paralelos, hecha por una lente funcionando en la región paraxial.

Bajo estas consideraciones, en base a la definición del factor de concentración, en este caso sería infinito ($C \rightarrow \infty$), independientemente de las características de la lente (diámetro, distancia focal, etc.). Este resultado físicamente no tiene ningún sentido puesto que se tendría una densidad de energía infinita, y por consiguiente se podrían obtener temperaturas infinitas con una simple lente. La experiencia muestra que ésto no sucede así, de hecho al iniciar esta sección se dijo "los rayos forman una pequeña mancha de luz". El resultado inaceptable se debe por un lado, a que las ecuaciones usadas son válidas solamente en la región paraxial, y por ser ésta una aproximación no puede explicar de manera exacta como funciona una lente real. Por otro lado, en el modelo se ha considerado implícitamente a el sol como una fuente puntual, lo cual es también una aproximación, puesto que éste tiene un tamaño y por lo tanto subtende un pequeño ángulo visto desde la tierra. De cualquier manera la descripción hecha aquí nos dá una primera idea de como se concentra la luz y sirve como base para ir apreciando como afectan por separado cada uno de los aspectos mencionados. En las siguientes secciones iremos quitando una a una las suposiciones adoptadas aquí hasta considerar en la última sección todos los parámetros más relevantes que intervienen en la concentración de la radiación solar.

2.3 ABERRACION ESFERICA.

Para analizar el funcionamiento de una lente fuera

de la región paraxial se pueden seguir dos caminos. Uno, es -- construir ecuaciones análogas a las de la región paraxial pero con una aproximación mejor, por ejemplo la teoría de tercer orden (Jenkins, cap. IX) en la cual se utiliza para deducir las ecuaciones que describan el comportamiento de las lentes, la a aproximación $\text{Sen}(\theta) \approx \theta - \frac{\theta^3}{3!}$, $\text{Cos}(\theta) \approx 1 - \frac{\theta^2}{2!}$. Otro camino más directo y exacto, es seguir la trayectoria de los rayos usando la ley de Snell o de refracción. Esta técnica es conocida como trazo exacto de rayos. En uno u otro caso lo que se encuentra es que no todos los rayos que provienen de un punto de la fuente luminosa (en este caso el sol), convergen en un mismo punto en la imagen, ésto conduce a que la imagen formada sea una mancha borrosa. Estos efectos son conocidos como aberraciones y están presentes en mayor o menor grado, en casi cualquier sistema real. Las diferencias que hay entre la imagen predicha -- por la región paraxial y la predicha por la teoría de tercer -- orden están incluidas en las cinco aberraciones monocromáticas primarias (aberración esférica, coma, astigmatismo, curvatura de campo y distorsión), (Zajac, secc.6.3.1). El tipo y grado-- de aberración dependerá del arreglo de rayos incidentes y del sistema óptico utilizado, por ejemplo, para el caso considerado en la sección anterior, de rayos paralelos al eje óptico incidiendo sobre la lente, lo que se encuentra en base a la teoría de tercer orden o al trazo de rayos, es que los rayos que inciden en la parte más exterior de la lente se enfocarán sobre el eje a una distancia más cercana que los rayos paraxia--

les (los más cercanos al eje de la lente) como muestra la figura 2.4

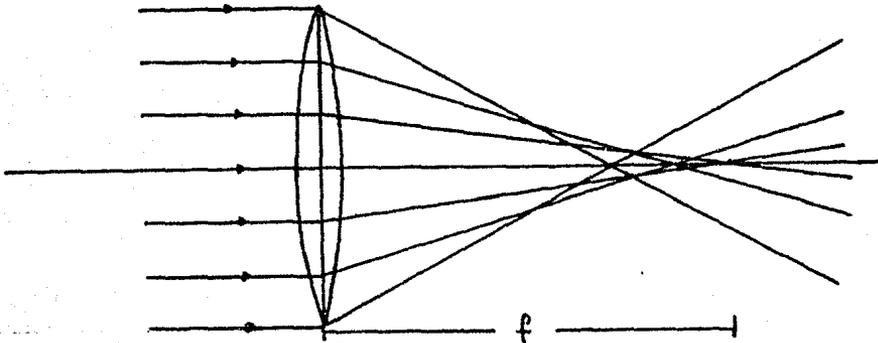


FIG. 2.4 Aberración esférica. f es la distancia focal para rayos paralelos.

Este efecto es conocido como aberración esférica.

Es claro de lo dicho anteriormente que la aberración esférica determinará en buena medida el factor de concentración de una lente pues básicamente determina el tamaño del manchón luminoso, por lo tanto es de interés hacer aquí un análisis de esta aberración por medio del trazo exacto de rayos para una lente particular.

Se ha escogido como caso particular una lente esférica coplana debido a que es la que presenta menos aberración esférica para la configuración de rayos paralelos incidiendo sobre la superficie esférica, (ver, Sears, cap.V). El índice de refracción de la lente se toma como $n=1.5$ que es un índice de re-

fracción fácilmente obtenible en la práctica y típico de los vidrios. Se hace el trazo de rayos para varias lentes esférico planas de distinto número-f. Este número-f denotado por $f/\#$ es un parámetro de una lente, definido como el cociente de su distancia focal paraxial (dada por la ec. (2.1.4)), entre su diámetro D , es decir

$$f/\# = \frac{f}{D} \quad (2.3.1)$$

y es un parámetro muy útil en este caso pues determina el factor de concentración de la lente.^(*)

El desarrollo de todo el proceso seguido para el trazo exacto de rayos en éste caso, así como el programa utilizado puede verse en el apéndice B. Aquí solo se presentan y discuten los resultados más importantes.

En las figuras 2.5 (a), (b), (c), (d), (e), (f), y (g) se muestra el trazo de rayos hecho para las lentes esférico-planas, todas de índice de refracción $N=1.5$ pero con números-f distintos, de valor $f/\# = 1, 1.5, 2, 3, 4, 5$ y 6 respectivamente. Como puede observarse, estas figuras verifican lo dicho anteriormente; presentan aberración esférica, pero además puede verse que la lente que presenta más aberración esférica es la de menor $f/\#$, y que este efecto va disminuyendo al aumentar $f/\#$. Conectando ésto con el problema de la concentración de la radiación solar lo que se concluye es que aún cuando se consi-

(*) Usualmente se asocia el $f/\#$, en fotografía, con la luminosidad o rapidez de una lente.

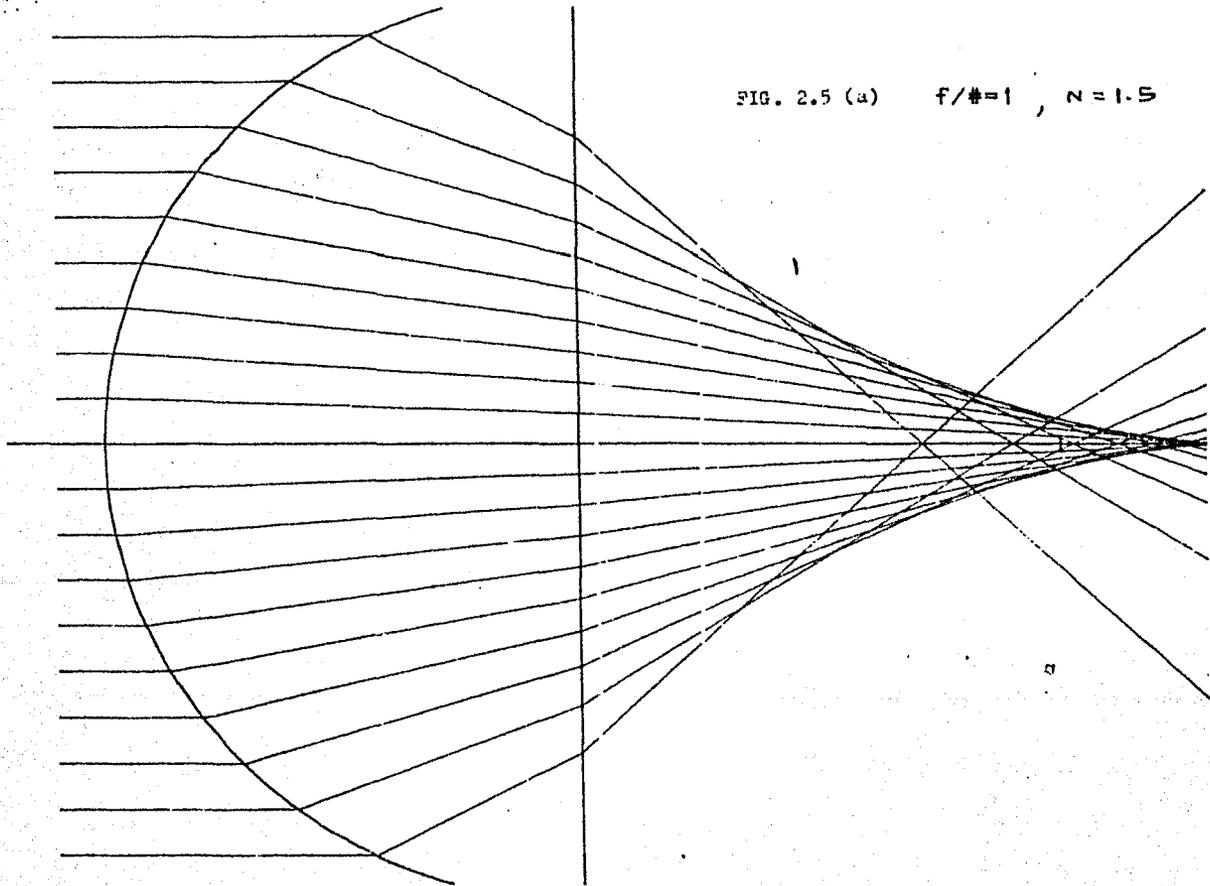


FIG. 2.5 (a) $f/\# = 1$, $n = 1.5$

2.5

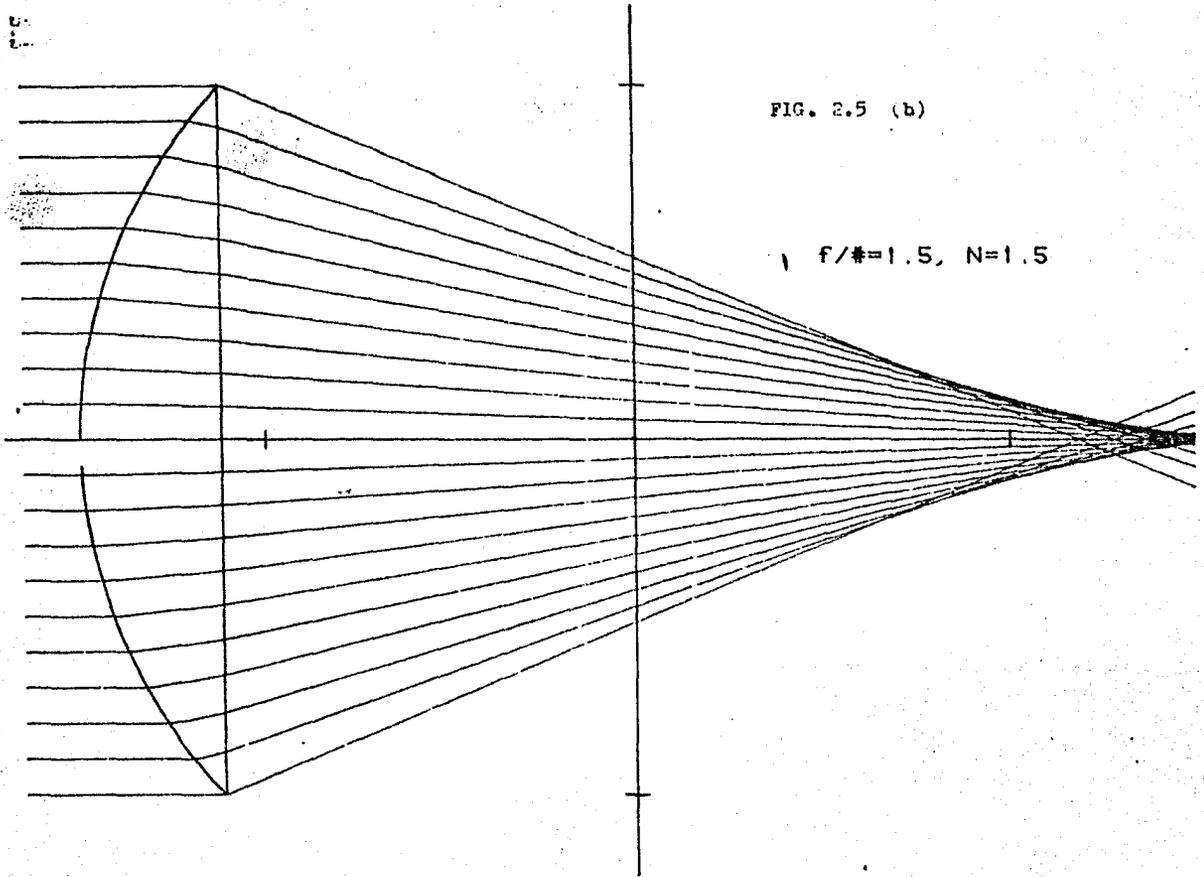
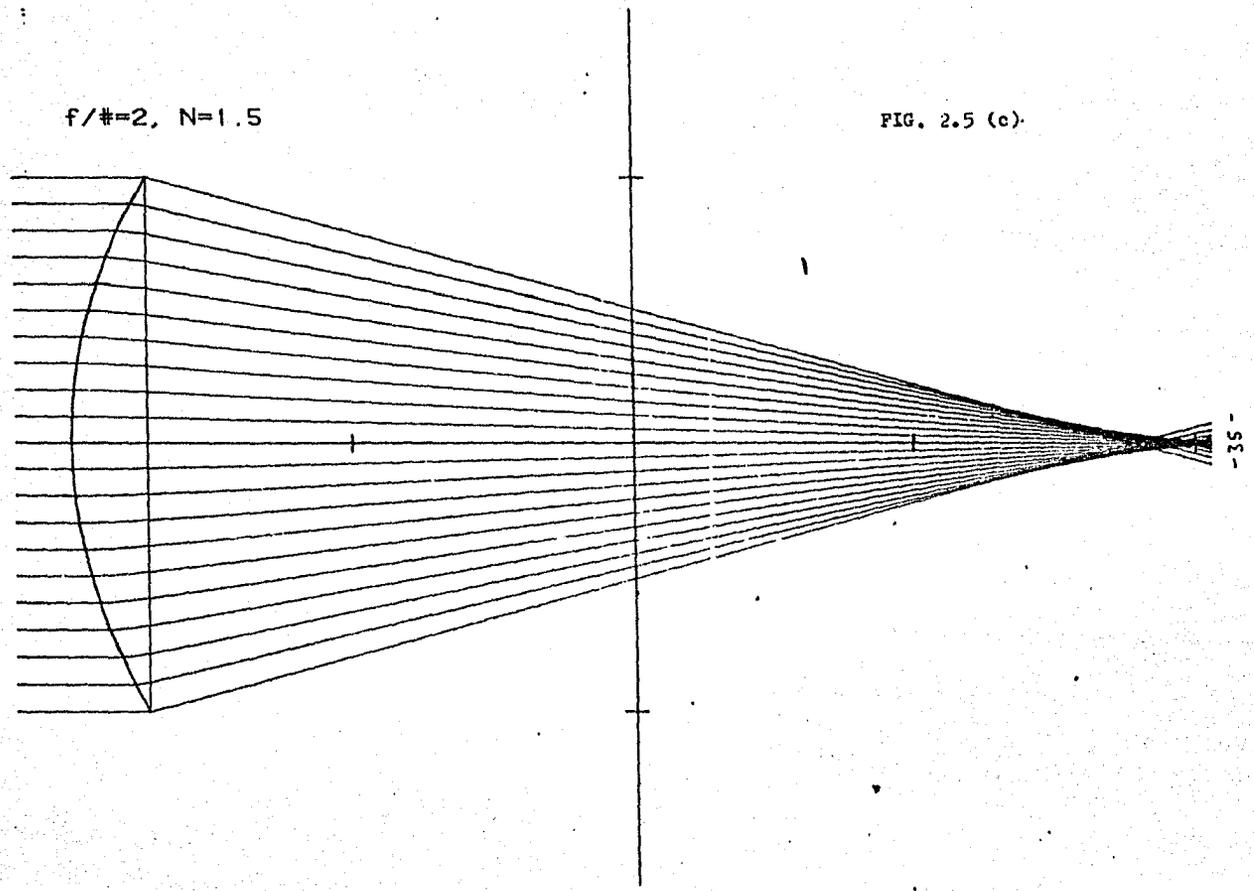


FIG. 2.5 (b)

$f/\# = 1.5$, $N = 1.5$



$f/\# = 2, N = 1.5$

FIG. 2.5 (c)

$f/\# = 3$, $N = 1.5$

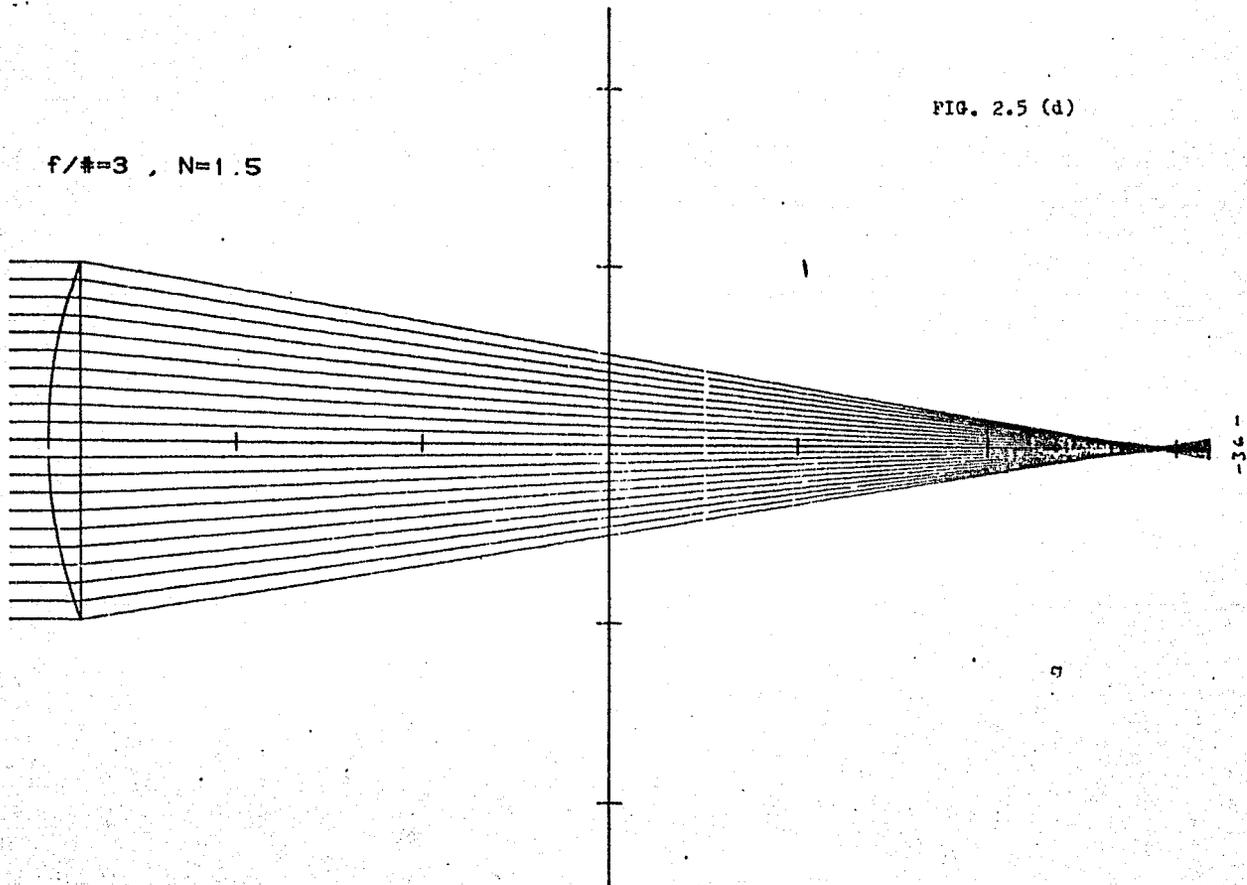
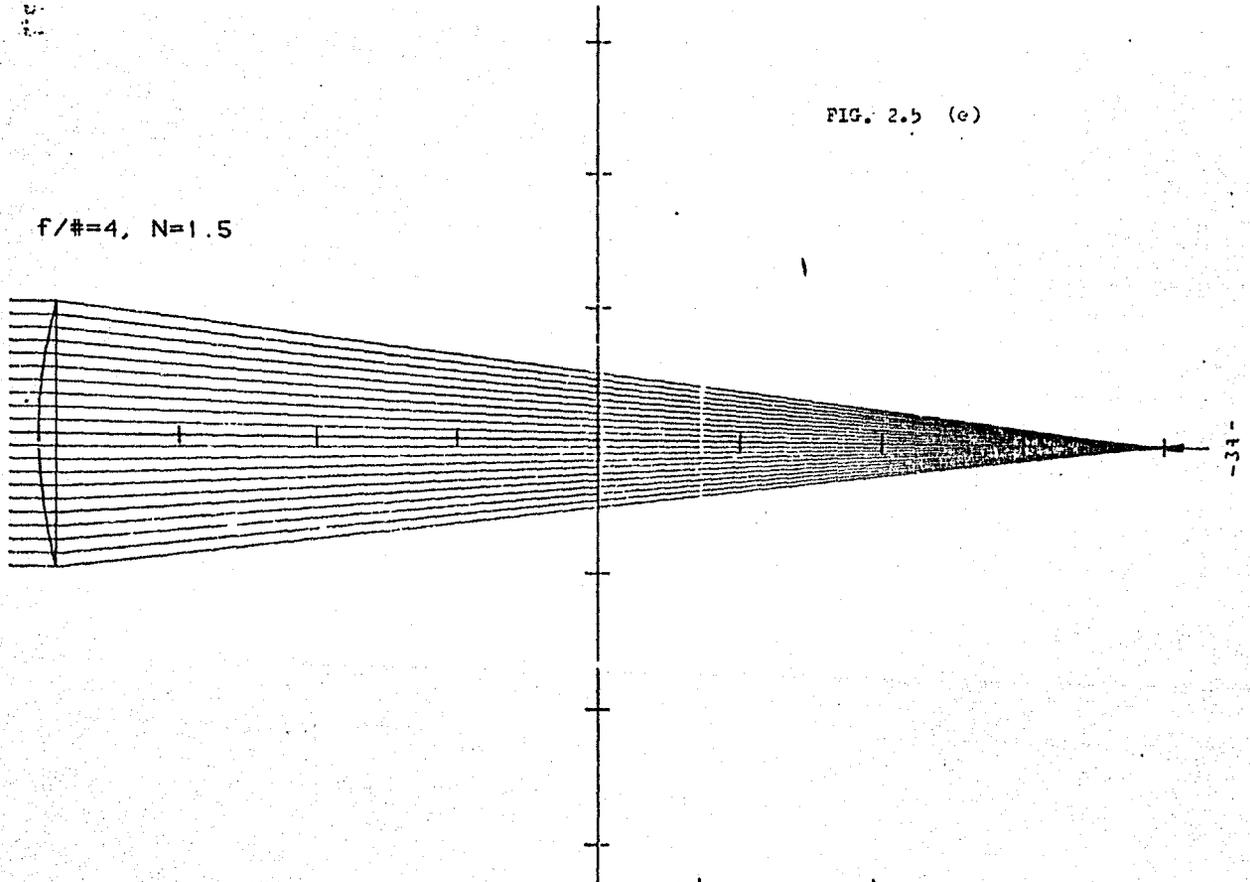


FIG. 2.5 (d)

2.1

$f/\# = 4, N = 1.5$

FIG. 2.5 (e)



34

$f/\# = 5, N = 1.5$

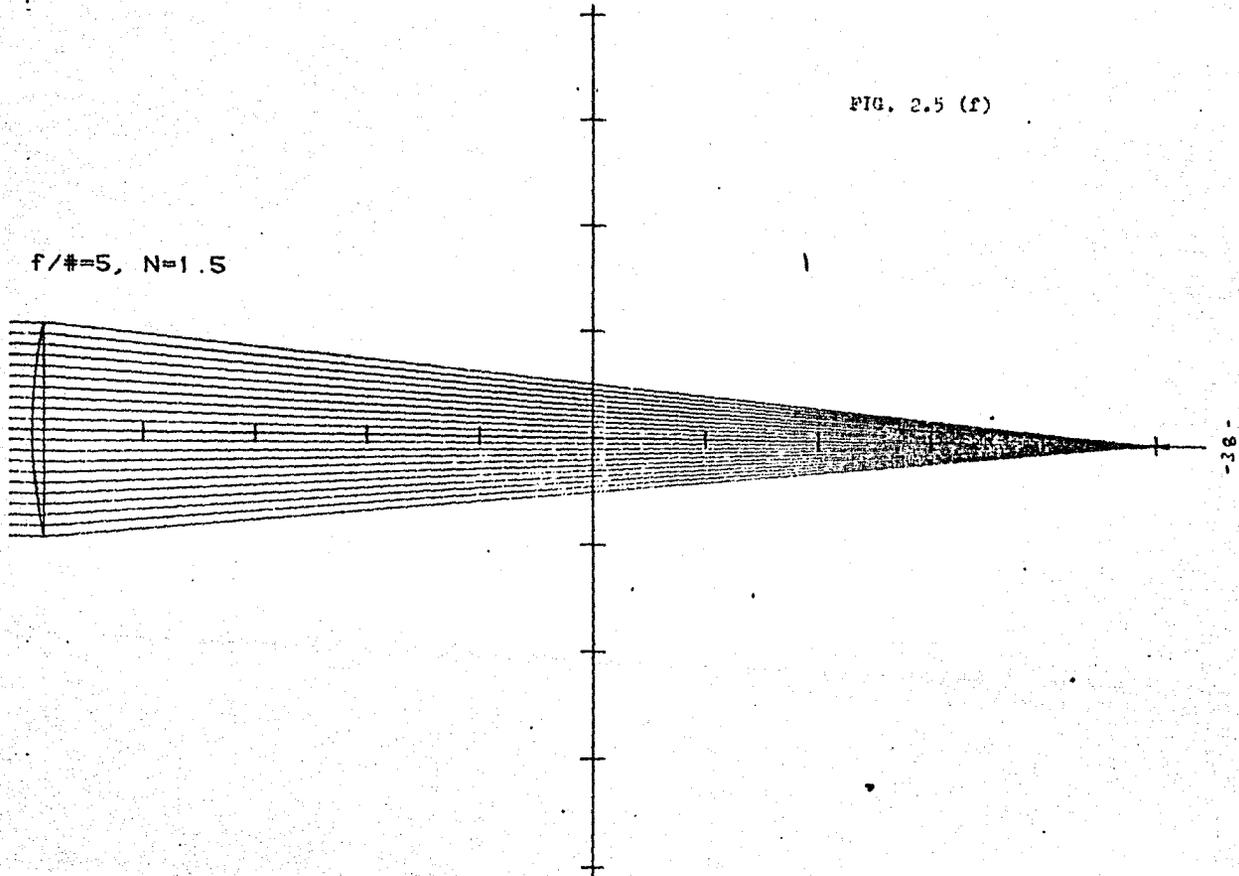


FIG. 2.5 (f)

2
1

$f/\# = 6, N = 1.5$

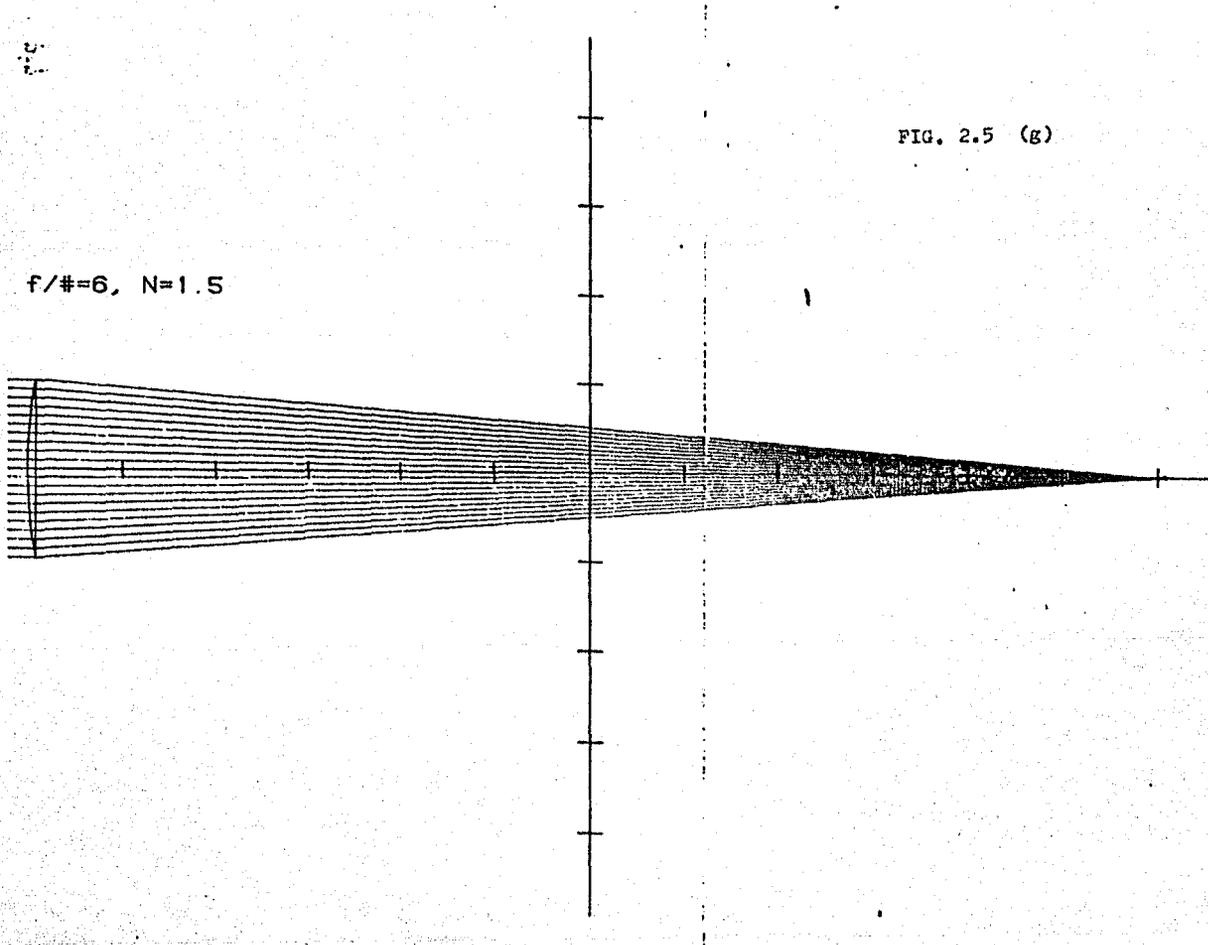


FIG. 2.5 (g)

dere al sol sin dimensiones, la imagen formada por una lente - no será puntual, sino que será una mancha borrosa de determinado diámetro. El tamaño de esta mancha dependerá por un lado, - de donde se coloque la pantalla y por otro, de qué $f/\#$ tiene - la lente. De las figuras 2.5 puede verse que para un $f/\#$ dado, hay una posición de la pantalla en donde la imagen borrosa tendrá su diámetro más pequeño. A este manchón circular en el caso 3D dada la simetría y rectangular en el caso 2D, se le conoce como círculo de mínima confusión (Zajac, cap. VI). También -- puede observarse que el diámetro de este círculo disminuye al aumentar el $f/\#$, acercándose a la vez hacia el plano focal paraxial. Así, si se toma para cada lente como abertura de entrada su diámetro D y como abertura de salida el diámetro de su círculo de mínima confusión D_m , ambos medidos a partir del trazo de rayos se obtendrá una medida del factor de concentración C , que será finito en este caso.

En la tabla 2.1 se muestran los valores (redondeados) obtenidos para el factor de concentración para cada $f/\#$ y para los dos tipos de lentes 2D y 3D, usando las definiciones correspondientes

$$\text{(caso 2D)} \quad C = \frac{D}{D_m} \quad (2.3.2)$$

$$\text{(caso 3D)} \quad C = \left(\frac{D}{D_m} \right)^2 \quad (2.3.3)$$

Finalmente, las figuras 2.6 (a) y (b) muestran las

gráficas de C Vs f/# para los casos 2D y 3D respectivamente. -

f/#	FACTOR DE CONCENTRACION	
	T I P O	
	2 D	3 D
1	8	64
1.5	23	529
2	45	2025
3	104	10816
4	156	24336
5	164	26896
6	174	30276

TABLA 2.1 Factores de concentración para una lente esférico plana concentrando rayos solares, suponiendo que inciden paralelos entre sí y al eje óptico. Estos FC han sido medidos a partir del trazo exacto de rayos.

De tales gráficas puede observarse que para ambos casos al aumentar el f/# aumenta el factor de concentración. A pesar de que en este análisis no se ha considerado el tamaño del sol, nos da una mejor idea del proceso de la concentración solar, encontrando ahora que el f/# influye en el factor de concentración pues determina la cantidad de aberración esférica presente en la lente. Sin embargo, este análisis predice que se puede obtener un factor de concentración casi tan grande como se desea simplemente usando una lente de un f/# muy grande. Como

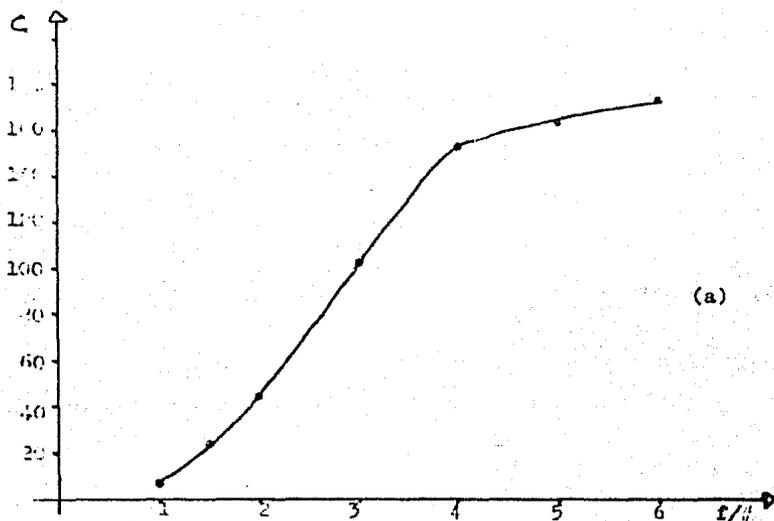
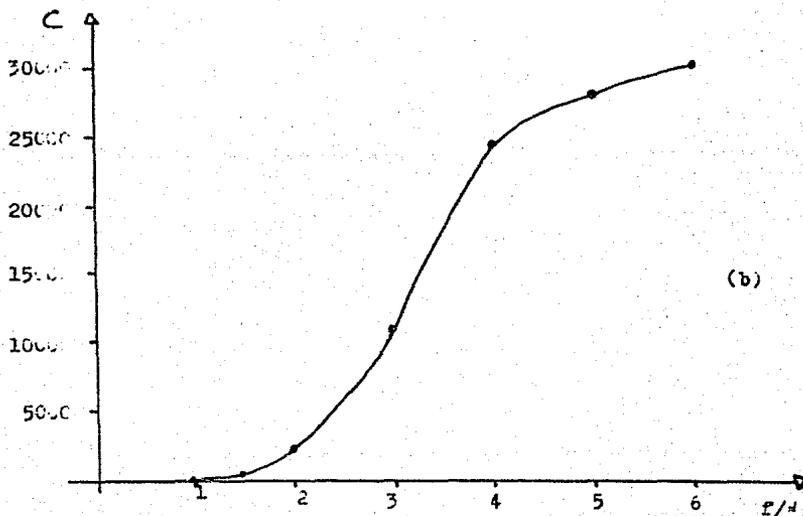


FIG. 2.6 Gráfica de C Vs $f/\#$ para lentes esférico-planas concentrando rayos paralelos, con los valores de la tabla 2.1. (a) caso 2D, (b) caso 3D.



se verá en la siguiente sección las cosas no suceden así debido a la extensión angular del sol.

2.4 LENTE DE AUMENTO: Sol con dimensiones.

Se sabe que el sol se encuentra a una distancia muy grande de la tierra (la distancia promedio tierra-sol es aproximadamente 1.49×10^8 Kms.), pero también tiene un diámetro muy grande, (aproximadamente 1.392×10^6 Km., (Unsöld)), de modo que visto por un observador en la tierra, éste subtende un ángulo de aproximadamente .01 radián (Unsöld, pág. 146). Como se muestra en esta sección aunque este ángulo es muy pequeño, cambia radicalmente la dependencia del factor de concentración con el f/# de la lente utilizada.

En el lenguaje de rayos lo que se tendrá ahora es que los rayos que provengan de un punto del sol fuera del eje óptico de la lente ya no serán paralelos a éste, sin embargo se puede aún considerar que tales rayos son paralelos entre sí. Esto es debido, a que para un punto del sol el ángulo que subtienda la abertura de entrada de un sistema óptico usado como concentrador por muy grande que sea (por ejemplo 10 metros), será del orden de 10^{-4} radianes.

Entonces la configuración de rayos se debe considerar, tomando en cuenta la extensión angular del sol, que es la mostrada en la figura 2.7 en la cual se ha supuesto implícitamente que el sol está perfectamente alineado con el eje óptico de la lente, y θ es el ángulo que hacen los rayos provenientes de

los bordes superior e inferior del sol con tal eje, y que son los que determinan el tamaño de la imagen.

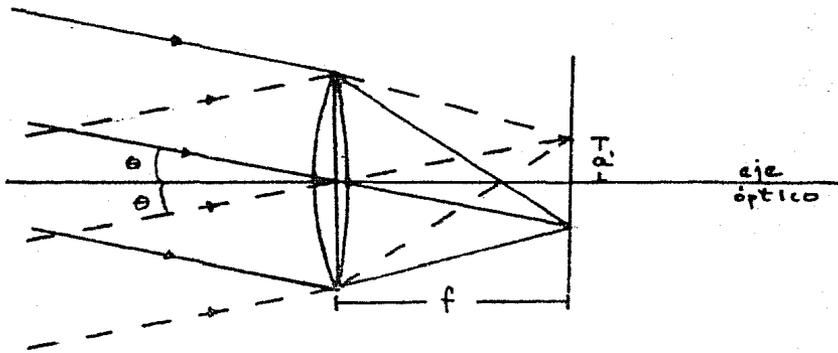


FIG. 2.7 Concentración de rayos solares hecha por una lente - funcionando en la aproximación paraxial, considerando la extensión angular del sol

Los rayos que inciden sobre la lente con pendiente negativa -- (líneas continuas) provienen del punto extremo superior del -- sol; mientras que los que llegan con pendiente positiva (líneas punteadas) provienen del extremo inferior del sol.

Tomando de nuevo como base la aproximación paraxial, la ecuación (2.1.3) implica que $S_i = f$ pues $S_o \rightarrow \infty$ pero ahora el tamaño de la imagen del sol se puede calcular de la figura 2.7 usando la misma aproximación

$$\theta \approx \tan(\theta) = \frac{a'}{f} \quad (2.4.1)$$

siendo θ el semiángulo que subtiende el sol, de modo que en estos términos, usando la definición del factor de concentra--

ción, en este caso será:

$$\text{(caso 2D)} \quad C = \frac{1}{2\theta f/\#} = \frac{D}{2f\theta} \quad (2.4.2)$$

$$\text{(caso 3D)} \quad C = \left(\frac{1}{2\theta f/\#} \right)^2 \quad (2.4.3)$$

Puede apreciarse de estas ecuaciones que ahora el factor de -- concentración aumenta al disminuir el $f/\#$, y para ver la mane- ra en que esto sucede cuántitativamente y cualitativamente, en las figuras 2.8 (a) y (b) se han hecho las gráficas de C Vs $f/\#$ para los casos 2D y 3D respectivamente, tomando algunos valores del $f/\#$ y considerando $\theta = .005$ radianes. Ahora bien, es claro que estos resultados están en contraposición con los de la sección anterior en donde se encontró que el factor de concentra- ción aumenta al aumentar el $f/\#$, sin embargo no hay porqué a- larmarse pues lo hecho hasta aquí muestra que los factores que hemos considerado por separado afectan de manera opuesta al -- factor de concentración; al considerar ambos efectos a la vez lo que se obtenga será el resultado de la competencia entre-- éstos. Para mostrar ésto hagamos de nuevo el trazo exacto de rayos, pero esta vez considerando las dimensiones del sol.

Nuevamente el desarrollo de las ecuaciones utilizadas para el trazo exacto de rayos en este caso, incluyendo el pro- grama, se dá en el apéndice C. Se ha tomado de nuevo una lente esférico plana de índice de refracción $n=1.5$. El semiángulo que subtienden los rayos se toma como $\theta = .005$ radianes, que

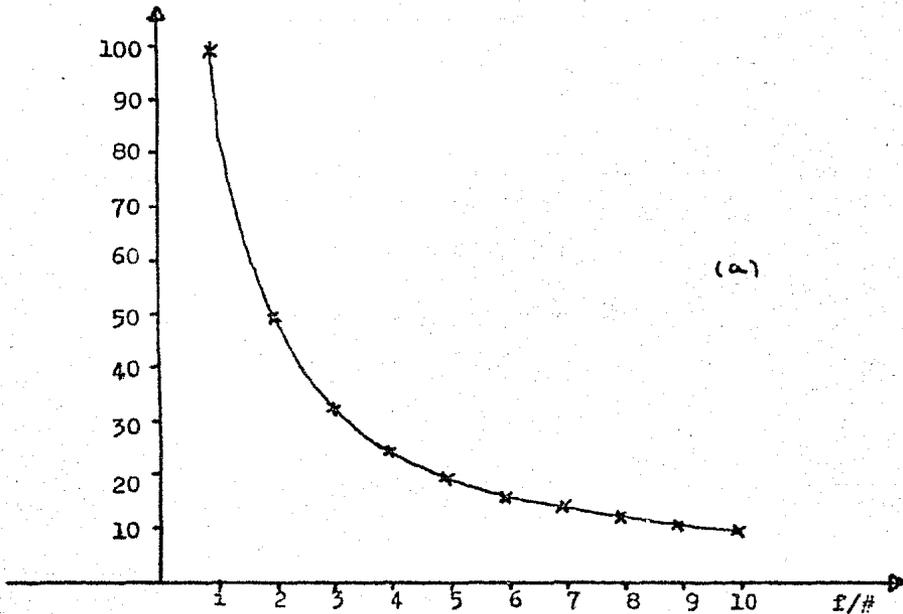
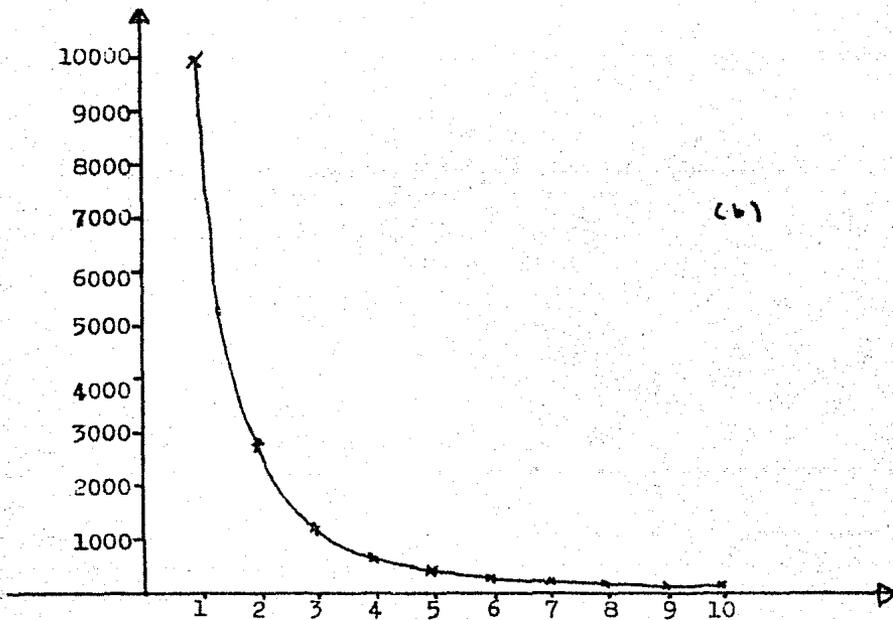


FIG. 2.8 Gráficas de C Vs $f/\#$ para la lente esférico-plana en la aproximación paraxial, considerando las dimensiones del sol.



es la mitad del ángulo que subtende el sol, se ha supuesto además que el eje óptico de la lente coincide con el centro del sol.

Las figuras 2.9 (a) hasta (f) muestran el trazo de rayos para varias lentes cuyo $f/\#$ va en orden ascendente. Puede observarse de éstas que iniciando con la lente de $f/\# = 1$, el diámetro del círculo de mínima confusión va disminuyendo al aumentar el $f/\#$, pero aproximadamente de la lente con $f/\# = 4$ en adelante éste diámetro permanece constante, aunque el diámetro de la lente disminuye. Nuevamente a partir de este trazo exacto de rayos se puede medir el factor de concentración de cada lente midiendo su diámetro y el diámetro del círculo de mínima confusión, y tomando el cociente entre ellos. Los valores medidos aparecen en la tabla 2.2 para los dos tipos de concentradores 2D y 3D y en las figuras 2.10 (a) y (b) se grafican estos valores para tener una idea más clara de lo que está sucediendo.

Analizando estas gráficas se obtienen características muy interesantes sobre el funcionamiento de la lente como concentrador. Primero, puede verse que para lentes de $f/\#$ pequeño el factor de concentración aumenta al aumentar $f/\#$, es decir que en esta región los resultados concuerdan con los obtenidos en la sección 2.3. Para $f/\#$ grandes las gráficas concuerdan al menos cualitativamente con las anteriores mostradas en las figuras 2.8, es decir, que al aumentar el $f/\#$ disminuye el factor de concentración.

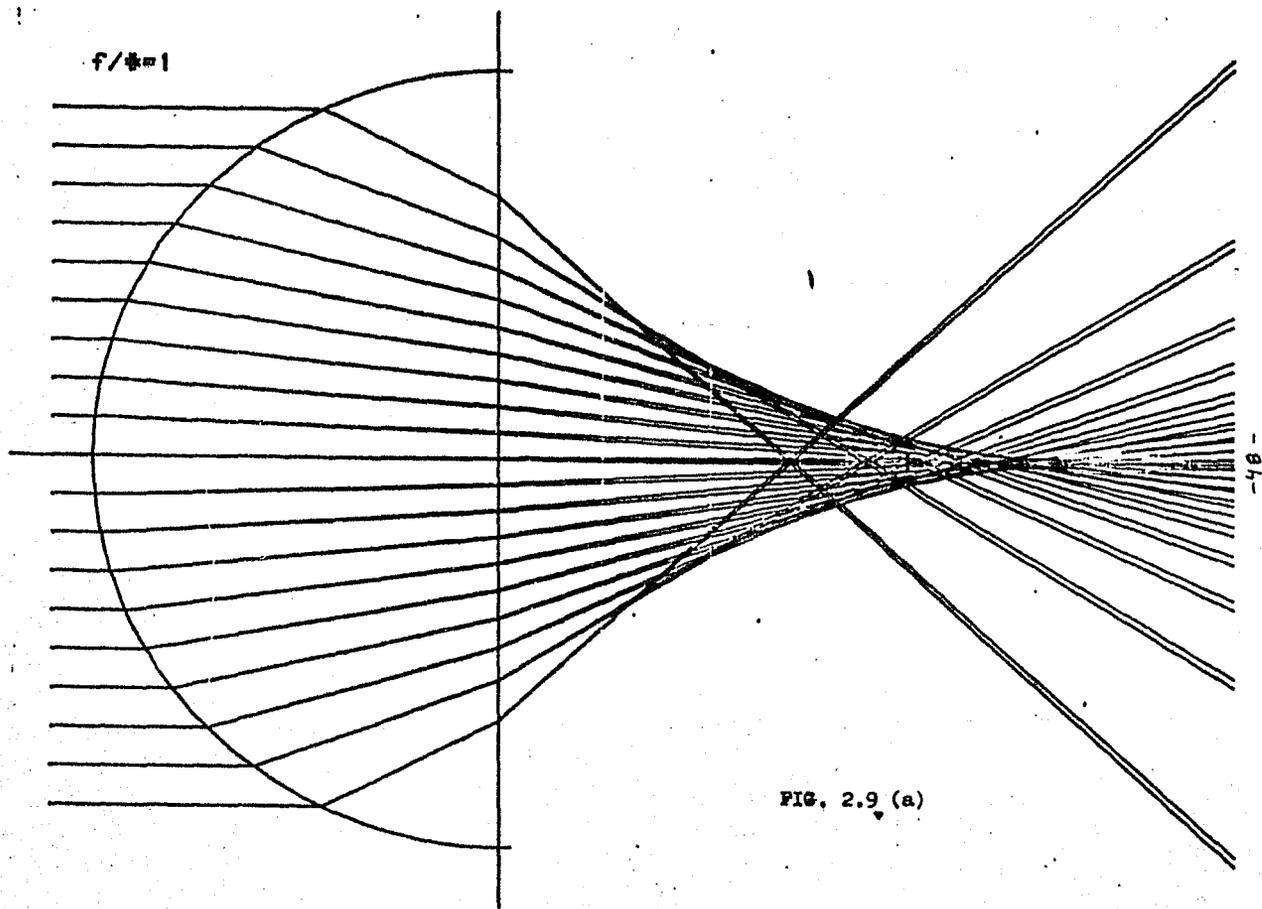


FIG. 2.9 (a)

$f/\phi=2$

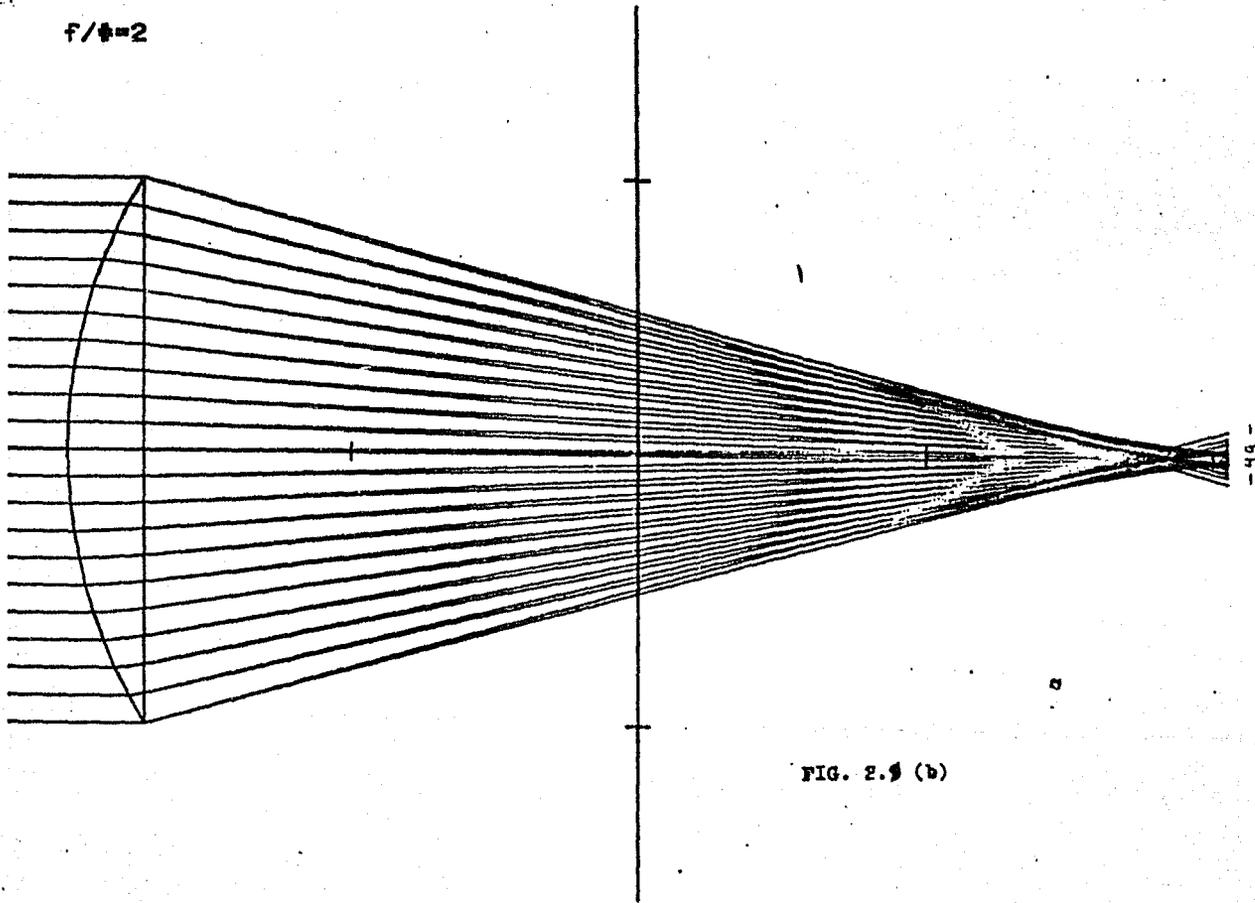


FIG. 2.9 (b)

$f/\# = 2.5$

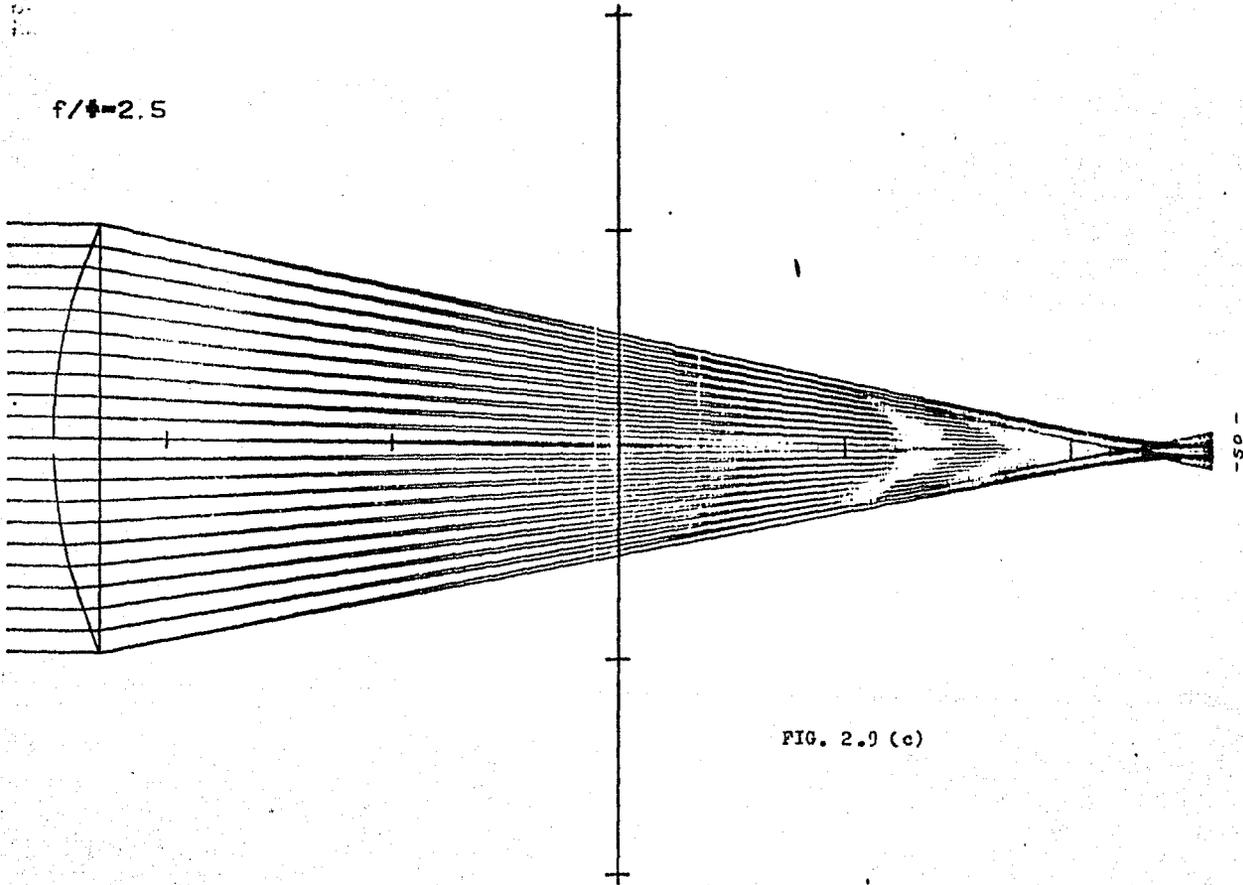


FIG. 2.9 (c)

f/#=3

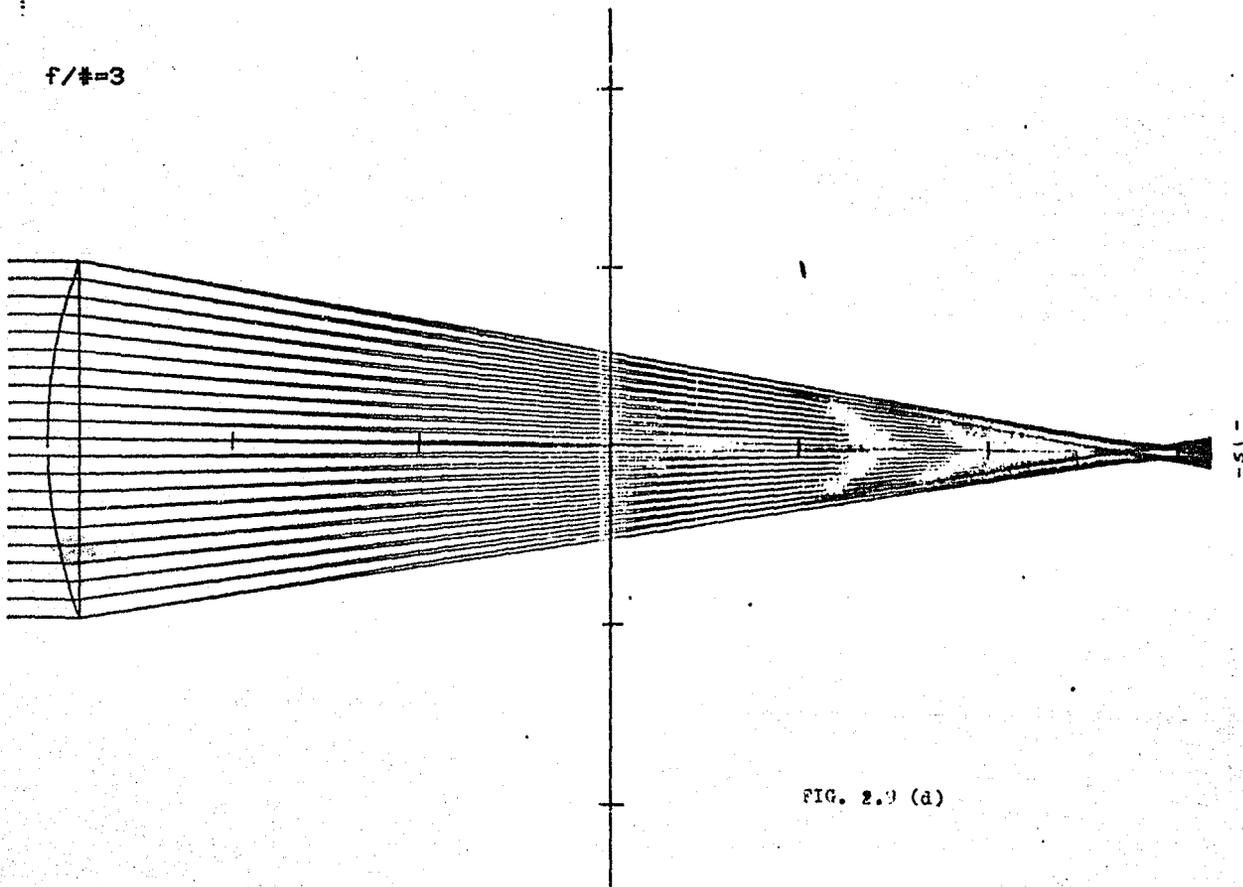


FIG. 2.9 (d)

$f/\# = 3.5$

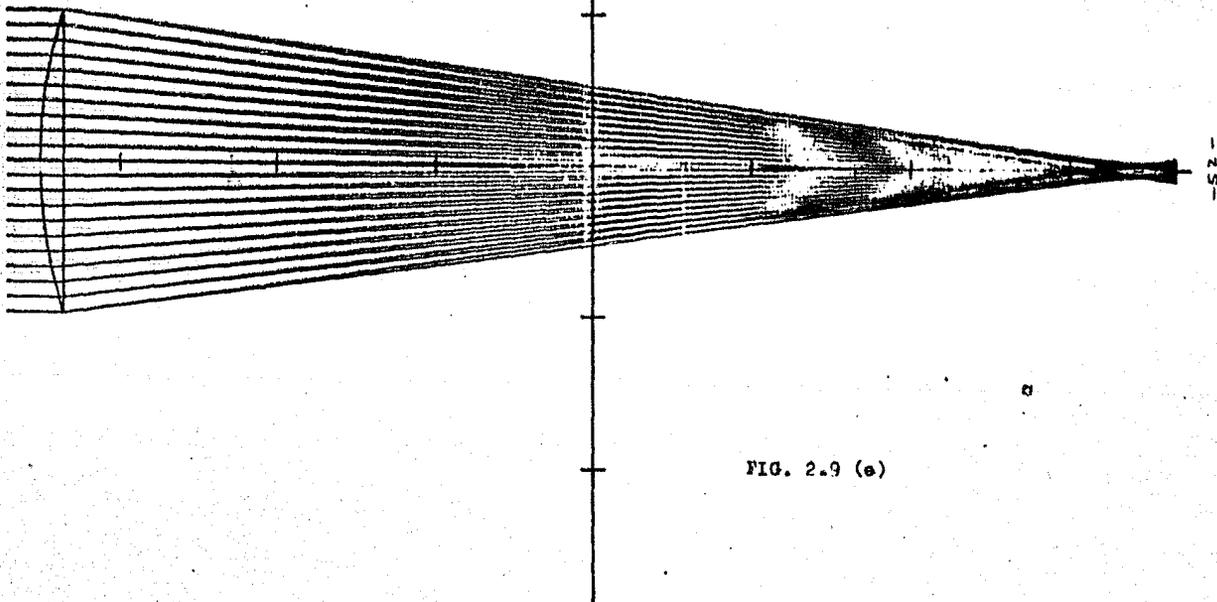


FIG. 2.9 (e)

5
11

$f/\# = 4$

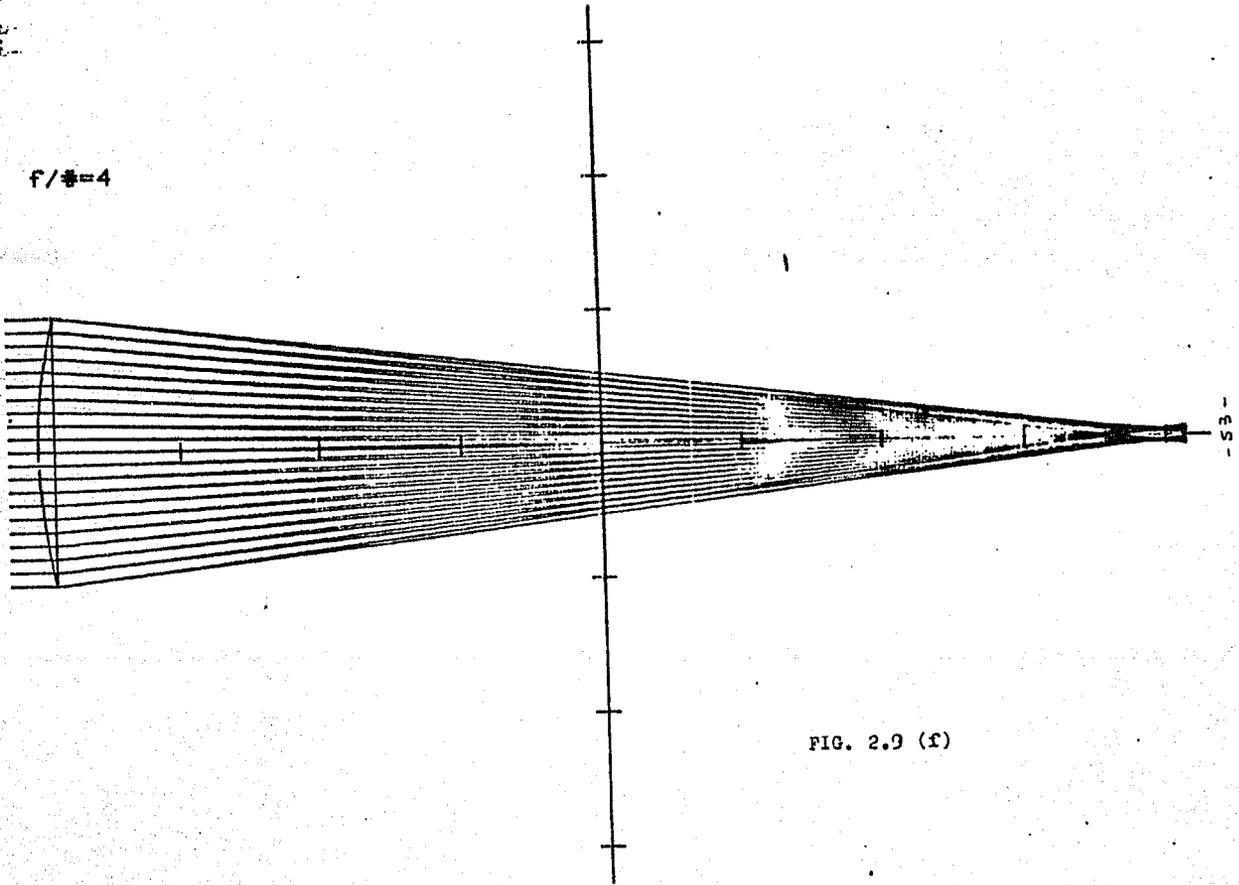
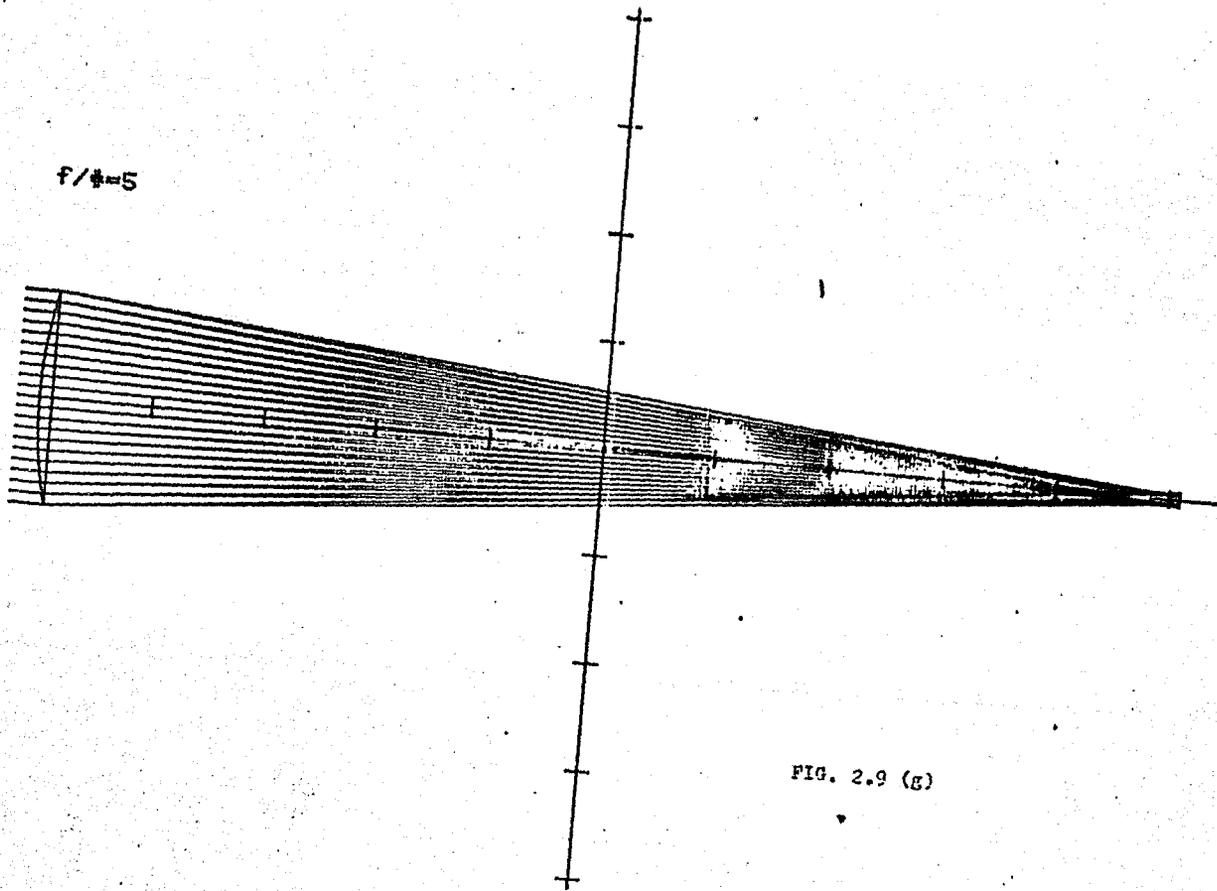


FIG. 2.9 (f)

$f/\lambda=5$



-54-

FIG. 2.9 (g)

$f/t=6$

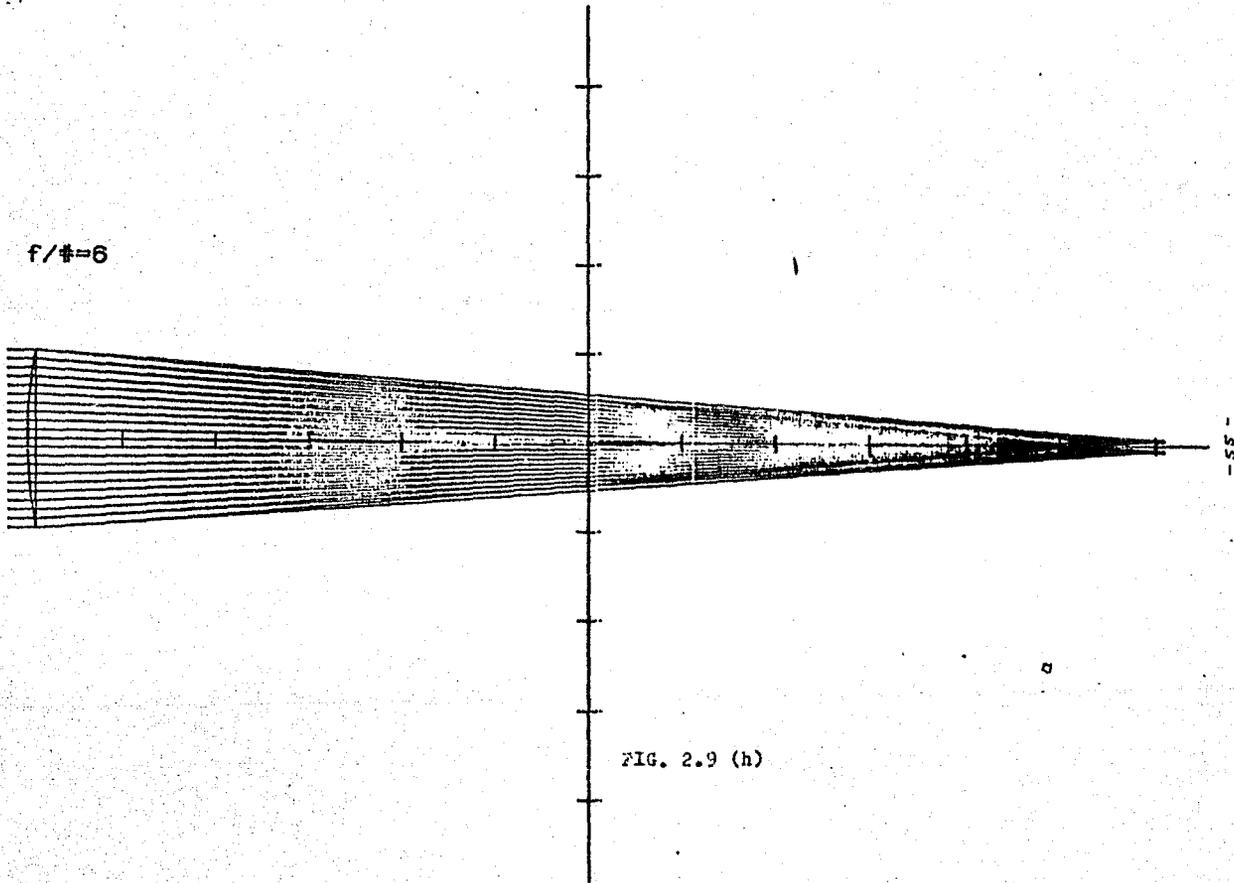


FIG. 2.9 (h)

U.
L.

$f/\lambda=8$

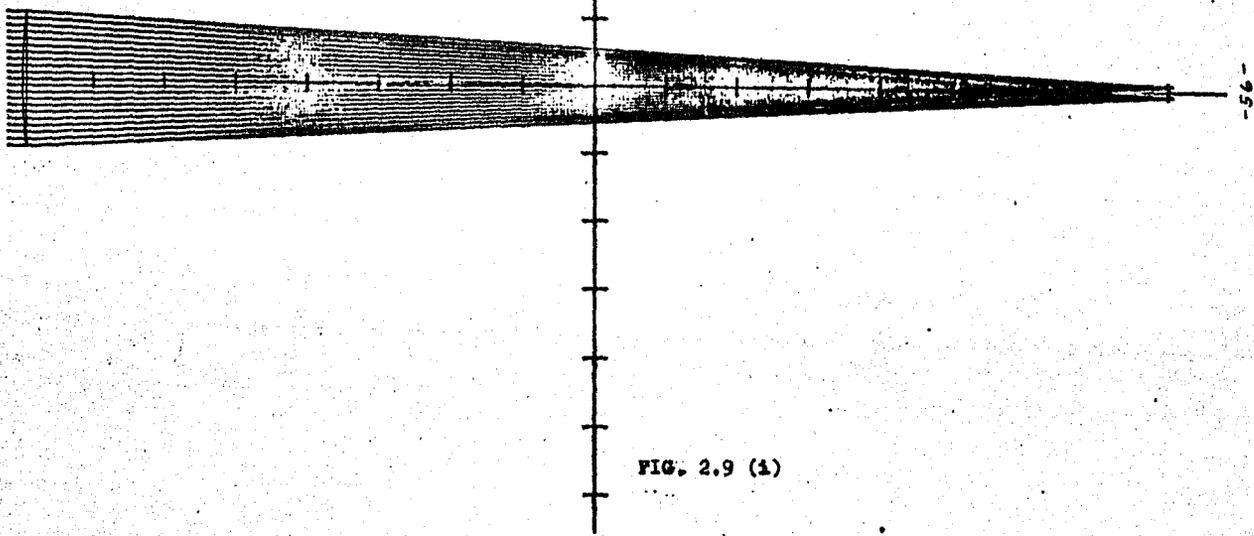


FIG. 2.9 (1)

$f/\lambda = 10$

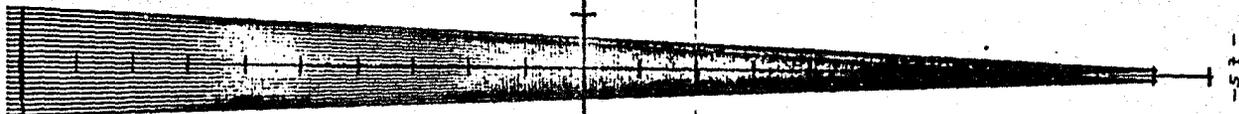


FIG. 2.9 (J)

	FACTOR DE CONCENTRACION	
	T	P O
f/#	2 0	3 0
1.0	8	5 9
2.0	2 2	5 0 3
2.5	2 5	6 2 5
3.0	2 3	5 4 4
3.5	2 1	5 0 6
4.0	2 0	3 8 5
5.0	1 6	2 4 6
6.0	1 3	1 6 9
8.0	1 0	9 6
10.0	8	6 0

TABLA 2.2 Factores de concentración para una lente esférico-plana concentrando rayos solares, tomando en cuenta el tamaño del sol. Los valores fueron obtenidos a partir del trazo de rayos.

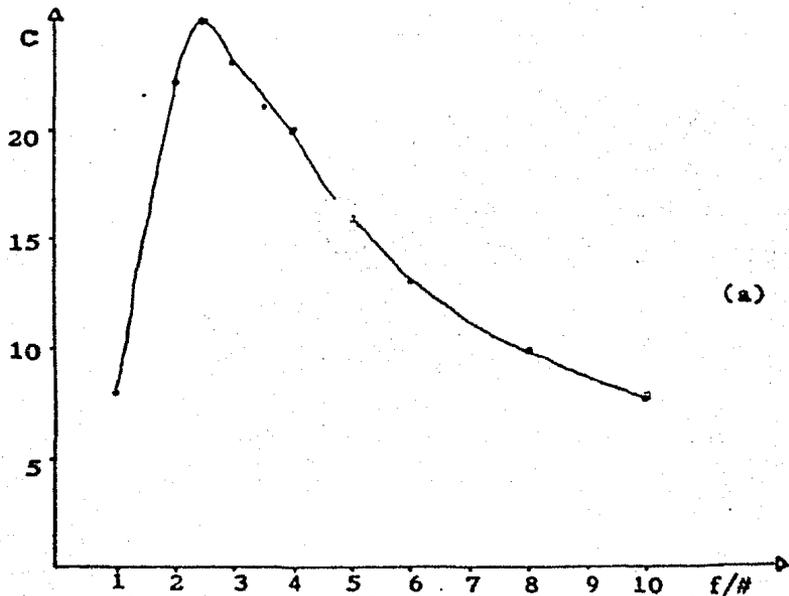
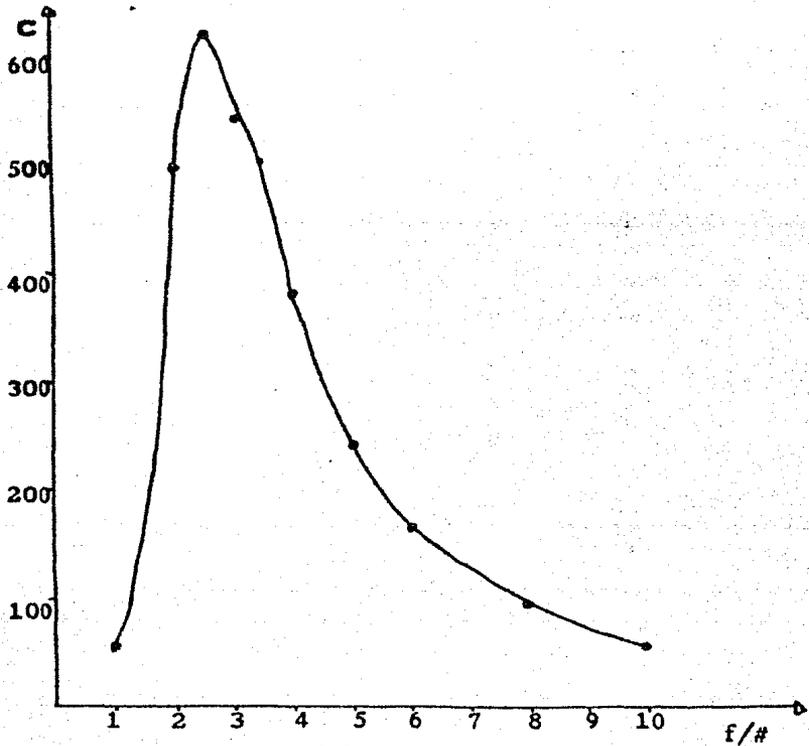


FIG. 2.10 Gráficas de C Vs f/# para una lente esférico-pla
na concentrando rayos solares, hechas a partir -
del trazo de rayos. (a) caso 2D, (b) caso 3D.



De lo anterior se puede concluir lo siguiente: para lentes con $f/\#$ pequeño las aberraciones prácticamente determinan el factor de concentración, de modo que la extensión angular del sol pasa a ser secundaria. Para lentes con $f/\#$ grande lo que determina el factor de concentración es el tamaño del sol, siendo ahora despreciables los efectos de las aberraciones. Otro aspecto interesante de las gráficas mostradas en la figura 2.10, es lo que sucede para valores intermedios del $f/\#$ de la lente, puede observarse la existencia de un factor de concentración máximo, producto de la fuerte competencia entre los dos efectos; aberraciones y extensión angular del sol. Ahora bien, el tamaño del sol es un parámetro prácticamente fijo y que no se puede manipular, sin embargo las aberraciones de la lente dependerán de su geometría y características, que sí pueden ser objeto de manipulación, es de esperarse entonces que con sistemas ópticos con otras geometrías se podrán obtener factores de concentración máximos con un valor mayor o menor que el encontrado en este caso particular. Resulta lógico pensar que un sistema óptico que tenga un factor de concentración máximo muy grande será un "mejor" concentrador que otros que lo tengan menor, y aunque esta aseveración es muy ambigua como se verá en el último capítulo, es tentador buscar la geometría que debe tener un sistema óptico para que se obtenga con él un factor de concentración máximo tan grande como se quiera.

Ante esto surge la pregunta, de si se podrá realmente

se llegar a obtener un factor de concentración tan grande como se quiera o si hay limitaciones y si las hay, de que dependen. La respuesta es que se ha demostrado que existe un factor de concentración máximo teórico que limita el factor de concentración que se puede alcanzar por un sistema óptico usado como concentrador. En la siguiente y última sección se menciona como está dado este factor de concentración máximo teórico y de que depende, así como sus implicaciones más importantes.

2.5 EL FACTOR DE CONCENTRACION MAXIMO TEORICO

La demostración de la existencia de un factor de concentración máximo teórico puede verse en (Welford), aquí, para no desviarnos mucho de nuestro objetivo central solamente mostraremos los resultados más importantes. Antes de hacer esto debemos mencionar algunas cosas al respecto; la demostración mencionada se basa en una teoría de la óptica geométrica a un nivel diferente del utilizado hasta ahora, lo que se conoce como la teoría geométrica de la imagen óptica desarrollada por Hamilton (Born y Wolf). Aunque esta teoría no tiene conexión práctica con el diseño de sistemas ópticos, es muy poderosa cuando se busca conocer propiedades muy generales de éstos. Así, dada su generalidad, con la demostración de la existencia de un factor de concentración máximo teórico se limita en forma general el factor de concentración máximo que pueda alcanzarse con un sistema óptico real cualquiera.

Lo que se demuestra es que el factor de concentra-

ción de un sistema óptico funcionando en forma ideal como concentrador bidimensional, está dado por

$$C = \frac{a}{a'} = \frac{n' \text{Sen}(\theta')}{n \text{Sen}(\theta)} \quad (2.5.1)$$

En donde n y n' son los índices de refracción del medio a la entrada y a la salida del concentrador respectivamente, θ es el semiángulo que subtiende la fuente luminosa con el eje del concentrador, suponiendo que la fuente está alineada perfectamente con el concentrador, y θ' es el mayor ángulo que subtienden los rayos emergentes con el eje del concentrador. La figura 2.10 muestra los parámetros.

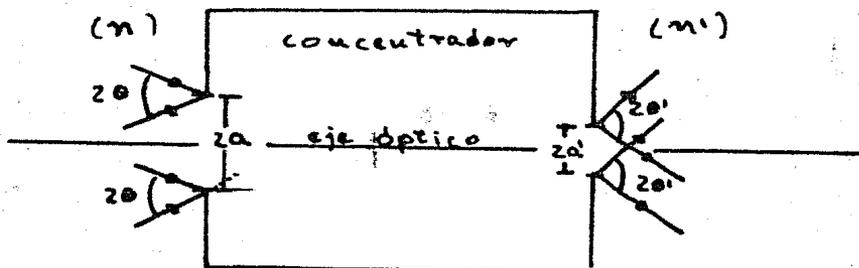


FIG. 2.10 Concentrador bidimensional sobre el cual incide un haz de rayos de anchura $2a$ y extensión angular 2θ . La anchura es reducida a $2a'$ y la extensión angular aumentada a $2\theta'$.

Analogamente, para un concentrador ideal tridimensional se demuestra que el factor de concentración está dado por;

$$C = \left(\frac{a}{a'} \right)^2 = \left(\frac{n' \text{Sen}(\theta')}{n \text{Sen}(\theta)} \right)^2 \quad (2.5.2)$$

De las expresiones anteriores es inmediato que el factor de --
concentración máximo teórico se obtendrá cuando el ángulo
alcance su valor máximo posible que es: $\theta' = \frac{\pi}{2}$, de modo que
el factor de concentración máximo teórico resulta ser para el
caso 2D:

$$C_m = \frac{n'}{n \text{ Sen}(\theta)} \quad (2.5.3)$$

y para el caso 3D:

$$C_m = \left(\frac{n'}{n \text{ Sen}(\theta)} \right)^2 \quad (2.5.4)$$

Así puede verse que este factor de concentración máxi
mo teórico para un concentrador ideal, depende exclusiva-
de la extensión angular de la fuente y de los índices de refrac
ción de los medios de entrada y salida del concentrador, así
mientras más grande sea la extensión angular de la fuente, me-
nor será el factor de concentración máximo teórico, debe seña-
larse también que en la práctica generalmente los índices de -
refracción toman casi siempre valores entre 1 y 2 de modo que
éstos no alteran mucho al valor máximo teórico.

Para concentradores solares debemos tomar la exten-
sión angular de el sol $\theta = .005 \text{ rad.}$, y en el caso más com-
mún, como índices de refracción de los medios de entrada y sa-
lida, el del aire, es decir $n' = n = 1$, entonces en el ca-
so 2D el factor de concentración máximo teórico que tendrá un

concentrador solar ideal será:

$$C_{m\acute{a}x} = 200 \quad (2.5.5)$$

mientras que en el caso 3D sera:

$$C_{m\acute{a}x} = 40000 \quad (2.5.6)$$

los resultados mostrados (resultados teóricos), son importantes por lo siguiente: primero hay que señalar que las expresiones (2.5.1) y (2.5.2) expresan la manera en que deben estar relacionadas la abertura de entrada y salida en un concentrador, para que éste funcione al menos en teoría como un concentrador ideal. Por otro lado, también se deriva de las expresiones mostradas, que solamente un concentrador funcionando en forma ideal podrá alcanzar el factor de concentración - máximo teórico. Finalmente, las expresiones (2.5.5) y (2.5.6) dan valores límites que sirven como base para comparar los factores de concentración de los sistemas ópticos estudiados y apreciar que tan "buenos concentradores" son.

Con lo hecho en este capítulo se tiene suficiente información acerca de los aspectos más importantes que determinan el factor de concentración y lo máximo que se puede esperar de los sistemas ópticos en general usados como concentradores. Lo que resta es hacer un estudio particular de algunos de ellos.

C A P I T U L O I I I

EL FACTOR DE CONCENTRACION Y CARACTERISTICAS DE ALGUNOS SISTEMAS OPTICOS.

En el capítulo I se hizo evidente la utilidad de los concentradores solares en el aprovechamiento eficiente de la energía solar. También es evidente que dependiendo de la forma en que se vaya a aprovechar ésta energía se requerirá de un determinado valor del factor de concentración o de un tipo especial de concentrador. Resulta pues de gran utilidad estudiar las características particulares de algunos sistemas ópticos usados como concentradores, así como conocer todos los posibles valores para el factor de concentración que se pueden obtener con cada uno de ellos, en función de sus parámetros.

En este capítulo se hace un estudio del factor de concentración de dos sistemas ópticos formadores de imagen: la lente esférico-plana y el espejo parabólico, y, de dos sistemas ópticos no formadores de imagen: el espejo cónico truncado y el concentrador parabólico compuesto. Con la información obtenida se tendrán al menos cuatro alternativas de donde se pueda escoger el adecuado o el más conveniente para un problema dado.

Es importante señalar que todo el análisis que se siguió en el capítulo anterior y el que se hace aquí, está restringido únicamente a rayos meridionales, es decir para los rayos que estén contenidos en algún plano que contenga al eje óptico de un sistema dado (por ejemplo todos los que están en

los diagramas), para los cuales es más sencillo seguir su comportamiento. En el caso de los concentradores bidimensionales 2D, esta restricción no tiene importancia, pues el conocer el comportamiento de los rayos meridionales automáticamente implica conocer el de los rayos no meridionales. Para mostrar esto basta con observar que la normal a la superficie de los concentradores 2D no tiene componente paralela a la longitud de el canal que los forma, de modo que la ley de la reflexión o de la refracción, según sea el caso, puede ser aplicada en dos dimensiones solamente, pues el coseno director de un rayo no meridional en la dirección a lo largo del canal, es constante. Así, los rayos no meridionales que en éste caso serán los que no estén contenidos en un plano perpendicular a la longitud de el canal, pueden ser estudiados usando simplemente sus proyecciones sobre éste plano. Tales proyecciones se comportan como rayos meridionales.

Para concentradores 3D que en el caso estudiado aquí serán figuras de revolución, no se puede asegurar nada acerca de los rayos no meridionales (aquellos que no están sobre algún plano que contenga al eje óptico del sistema en cuestión), en base a el conocimiento del comportamiento de los meridionales. Por lo tanto los resultados que se obtengan en éste capítulo, para concentradores 2D, serán válidos aún fuera de la sección meridional, mientras que para los concentradores 3D los valores que se obtengan para los factores de concentración deben tomarse como valores límite, puesto que los rayos no meridionales pueden producir disminuciones en este factor, aunque

es de esperarse que su comportamiento no se aleje demasiado del de los rayos meridionales. Dicho ésto, podemos comenzar el estudio de los sistemas ópticos propuestos.

3.0 LENTE ESFERICO-PLANA

La lente esférico plana, de hecho, ya ha sido analizada en el capítulo anterior. Aquí solo recalcaremos lo más importante, y haremos algunos comentarios en torno a ella.

Puede apreciarse de las gráficas mostradas en las figuras 2.10(a) y (b) del capítulo anterior, que el factor de concentración en el caso 2D varía entre los valores 1 y 25, mientras que en el caso 3D toma valores entre 1 y 625, dependiendo su valor únicamente del $f/\#$ de la lente con el índice de refracción dado. Vemos pues que sus factores de concentración, en ambos casos están muy por debajo del valor máximo teórico, y, que la causa de ésto son principalmente las aberraciones presentes. Aún así, tales valores pueden ser de utilidad en ciertos casos como los mencionados en el primer capítulo.

Es conveniente de una vez mencionar algunas diferencias que hay en cuanto a fabricación, entre los sistemas refractores y reflectores, para argumentar porqué el trabajo realizado aquí, está enfocado básicamente hacia el estudio de sistemas ópticos reflectores. Las diferencias son evidentes: una lente debe ser transparente y estar libre de burbujas, inhomogeneidades, etc. Un espejo de superficie frontal obviamente no necesita serlo, en efecto, ni siquiera necesita ser transparente. Una lente puede apoyarse solo por su periferia y puede com

barse por su propio peso; un espejo se puede sujetar tanto de su periferia como de su cara posterior. Además hay otra diferencia en cuanto a que un sistema refractor tendrá aberración cromática (Jenkins, secc. 9.13) debido a la dependencia del índice de refracción con la longitud de onda de la luz (Zajac, secc. 3.3.1), lo cuál originará disminuciones en el factor de concentración producido por una lente. un espejo no tiene este problema pues solamente hace uso de la reflexión. Por éstas razones entre otras, para concentradores grandes predominarán los sistemas ópticos reflectores.

3.1 ESPEJO PARABOLICO

La superficie de un espejo parabólico usado como concentrador 3D es la superficie que se obtiene de rotar una parábola alrededor de su eje focal, mientras que en el caso 2D es un canal con perfil parabólico. Es bien conocido que un espejo de este tipo enfoca todos los rayos paralelos a su eje focal exactamente en su foco, en terminología usada, no tiene aberración esférica. Sin embargo para rayos fuera de eje tendrá aberraciones de otro tipo.

Para estudiar las características de estos espejos se utilizará nuevamente la técnica del trazo exacto de rayos, ésta vez usando la ley de la reflexión en forma vectorial. El desarrollo de las ecuaciones para este trazo puede verse en el apéndice D. De nuevo se han tomado solo los rayos que provienen del borde superior e inferior del sol, considerando que éste subtende un semiángulo $\theta = .005$ radianes, y que el eje de la

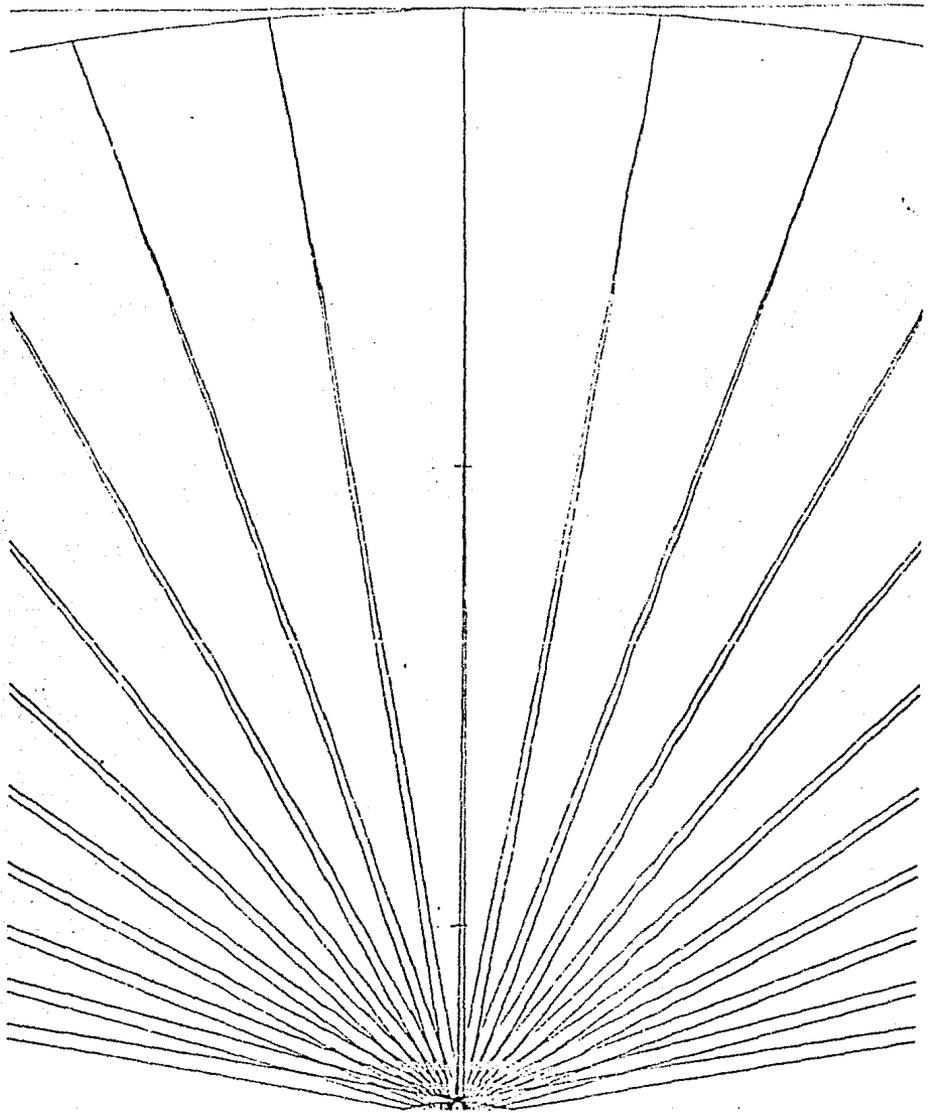


FIG. 3.1 (a) Concentración de rayos solares hecha por un espejo parabólico de $f/\# = 0.3$

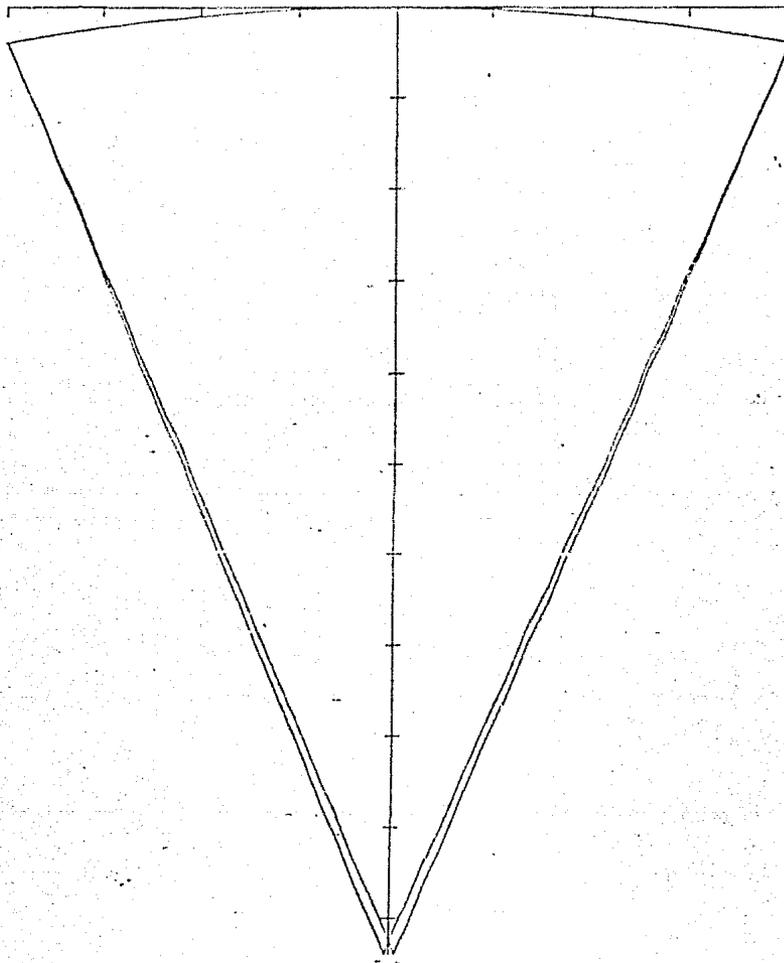


FIG. 3.1 (b) Rayos marginales provenientes de los bordes de un espejo parabólico de $f/9.113$.

parábola que forma el concentrador está alineado con el centro del sol. La figura 3.1 (a) muestra como concentra estos rayos un espejo de $f/\# = .3$, aunque en esta figura solo aparece una parte del espejo. Puede observarse que este espejo parabólico produce una imagen en la que se presenta una aberración parecida a la coma positiva (Jenkins, secc9.7), es decir los rayos que provienen de un mismo punto del sol y que son reflejados más cerca del eje del espejo forman una imagen también más cercana al eje que la formada por los rayos que inciden mas hacia los bordes, de manera que esta vez el tamaño del círculo de mínima confusión estará prácticamente determinado por los rayos que inciden exactamente en los bordes del espejo, que se conocen como rayos marginales. Esta observación es muy importante pues permite como se verá enseguida, encontrar una expresión para el factor de concentración como función del $f/\#$ del espejo. Para hacer ésto, en la figura 3.1 (b) se han trazado solamente los rayos marginales para un espejo parabólico de $f/\# = 1.3$, en ésta, los rayos que forman su imagen en el punto 1 provienen del borde superior del sol, y los que la forman en el punto 2 provienen del borde inferior. Aprovechando la simetría de las imágenes 1 y 2 mostradas en ésta figura, y para facilitar los cálculos, tomaremos solamente los rayos que provienen del borde superior del sol, y en particular el que incide sobre el borde superior del espejo, como el mostrado en la figura 3.2. En base a ésta se tiene que:

$$\tan(A_0) = \frac{a+a'}{p-x_0} \quad (3.1.1)$$

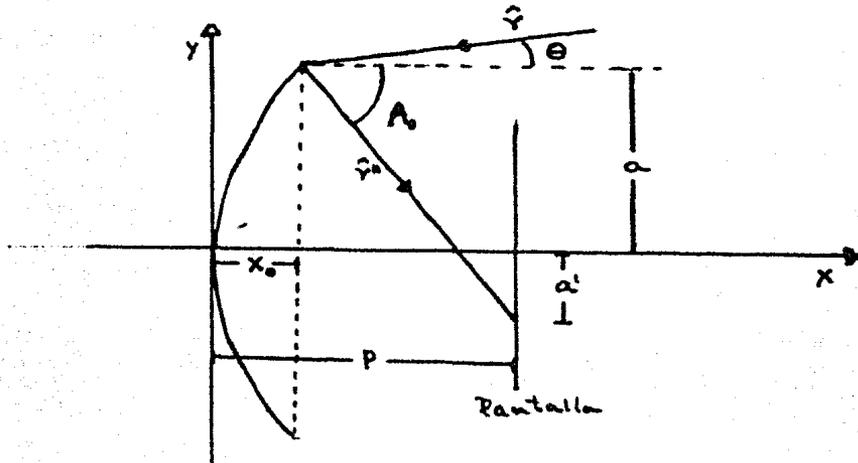


FIG. 3.2 Rayo marginal que determina el tamaño del círculo de mínima confusión producido por un espejo parabólico-concentrando rayos solares.

en donde X es la coordenada X del punto del borde superior del espejo, la cual se obtiene de la ec. (D.1) de la parábola dada en el apéndice D, sustituyendo $y=a$ es decir

$$x_0 = \frac{a^2}{4p} \quad (3.1.2)$$

sustituyendo esta expresión en (3.1.1) y despejando $a+a'$ se tiene:

$$a + a' = \frac{4p^2 - a^2}{4p} \tan(A_0) \quad (3.1.3)$$

se pretende encontrar de esta ecuación una relación entre el factor de concentración $c = \frac{a}{a'}$ y el $f/\#$ del espejo que será de-

notado por $f/\# = F$. Así, de la definición de F se deriva que:

$$P = 2a.F \quad (3.1.4)$$

sustituyendo esta expresión en la ec. (3.1.3) se obtiene

$$a + a' = a \left(\frac{16F^2 - 1}{8F} \right) \tan(A_0) \quad (3.1.5)$$

de donde finalmente despejando $\frac{a}{a'}$ se tiene que el factor de -- concentración está dado por

$$C = \frac{a}{a'} = \frac{8F}{(16F^2 - 1) \tan(A_0) - 8F} \quad (3.1.6)$$

solo falta encontrar la expresión para el ángulo A_0 en función de F .

De la figura 3.2 se ve que A_0 es el ángulo que hace el rayo marginal que proviene de la parte superior del sol después de reflejarse, con el eje X. Este ángulo se obtiene de la expresión (D.12) del apéndice D tomando la proyección del rayo \hat{r}'' sobre el eje X_r pero evaluando en $y=a$ es decir:

$$\cos(A_0) = \hat{r}'' \cdot \hat{x} \Big|_{y=a} \quad (3.1.7)$$

y de una vez, ya que buscamos $\tan(A_0)$ conviene evaluar

$$\sin(A_0) = -\hat{r}'' \cdot \hat{y} \Big|_{y=a} \quad (3.1.8)$$

evaluando estas expresiones se tiene

$$\tan(A_0) = \frac{\text{Sen}(\theta) + \frac{2a}{a^2 + 4P^2} (2P \cos(\theta) - a \text{Sen}(\theta))}{-\text{Cos}(\theta) + \frac{4P}{a^2 + 4P^2} (2P \cos(\theta) - a \text{Sen}(\theta))} \quad (3.1.9)$$

en donde se ha usado la ec.(D.12) tomando el signo superior - que es el que determina a el rayo dado, y la ec. (D.9). Haciendo algunas manipulaciones algebraicas se obtiene:

$$\tan(A_0) = \frac{(4P^2 - a^2) \text{Sen}(\theta) + 4aP \cos(\theta)}{(4P^2 - a^2) \cos(\theta) - 4aP \text{Sen}(\theta)} \quad (3.1.10)$$

sustituyendo en esta expresión la expresión para la distancia focal P se llega a que:

$$\tan(A_0) = \frac{(16F^2 - 1) \text{Sen}(\theta) + 8F \cos(\theta)}{(16F^2 - 1) \cos(\theta) - 8F \text{Sen}(\theta)} \quad (3.1.11)$$

si ahora se sustituye esta expresión en (3.1.6) se obtiene:

$$C = \frac{8F [(16F^2 - 1) \cos(\theta) - 8F \text{Sen}(\theta)]}{(16F^2 - 1) [(16F^2 - 1) \text{Sen}(\theta) + 8F \cos(\theta)] - 8F [(16F^2 - 1) \cos(\theta) - 8F \text{Sen}(\theta)]} \quad (3.1.12)$$

y finalmente cancelando términos se tiene:

$$C = \frac{8F [(16F^2 - 1) \cos(\theta) - 8F \text{Sen}(\theta)]}{[(16F^2 - 1)^2 + 64F^2] \text{Sen}(\theta)} \quad (3.1.13)$$

que es la ecuación que expresa el factor de concentración de un espejo parabólico 2D, como función de su $f/\#$. Para el caso tridimensional 3D la expresión será (3.1.13) elevada al ...

cuadrado.

Las figuras 3.3 (a) y (b) muestra las gráficas de C vs F para los valores de $F \geq \frac{1}{4}$ que son para los cuales tiene sentido la ecuación (3.1.13). Estas gráficas muestran un comportamiento semejante al de las obtenidas en el capítulo anterior para la lente esférico-plana. Primero, al aumentar el $f/\#$, el factor de concentración $FC^{(*)}$ también aumenta pero muy rápidamente, hasta alcanzar su valor máximo cuando $f/\# = .61$. Este valor máximo en el caso 2D es:

$$C_{máx} = 97.5 \quad (3.1.14)$$

y en el caso 3D es:

$$C_{máx} = 9899 \quad (3.1.15)$$

para valores del $f/\#$ mayores que .61 el FC disminuye en forma - cada vez más lenta. Aunque todavía no se tienen suficientes elementos para comparar al espejo parabólico con la lente esférico-plana, se puede decir que en cuanto a FC se refiere, el - espejo parabólico es mejor concentrador que la lente de aumento pues tiene factores de concentración muy por encima de los de ésta. En particular el FC máximo para el espejo parabólico 3D es aproximadamente 15 veces mayor que para la lente esférico-plana, y en el caso 2D es 4 veces más grande. Esta diferen-

(*) De aquí en adelante denotaremos por FC al factor de concentración.

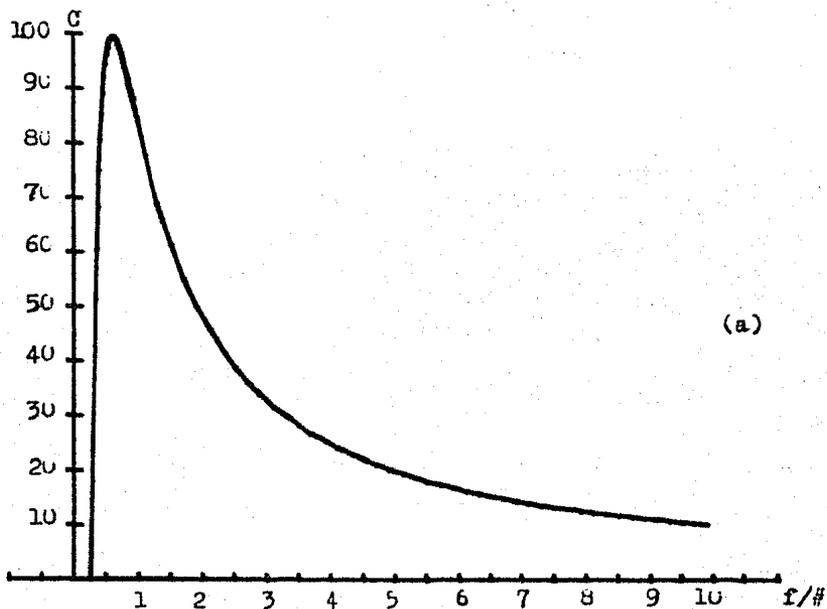
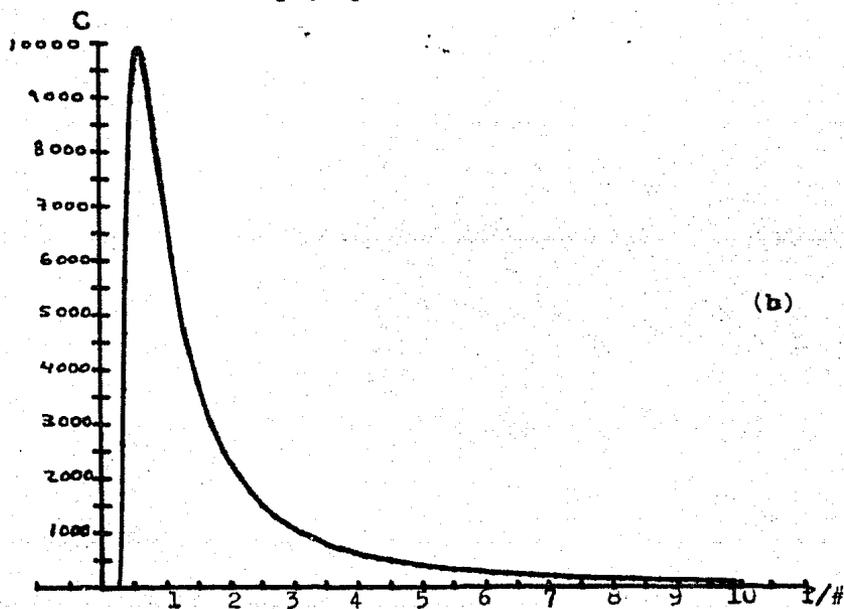


FIG. 3.3 Gráficas de factor de concentración contra $f/\#$ para un espejo parabólico (a) 2D y (b) 3D.



cia se debe a que en la lente esférico-plana está presente la aberración esférica, mientras que en el espejo parabólico no hay este tipo de aberración. La comparación también muestra que la aberración esférica presente, en la lente disminuye más lentamente al aumentar $f/\#$, que como disminuye la aberración comática en el espejo parabólico puesto que para este último el FC máximo se alcanza para un $f/\# = .61$ mientras que para la lente lo alcanza para un $f/\# = 2.5$. Para valores de $f/\#$ grandes ambos sistemas se comportan en forma semejante en el sentido de que sus factores de concentración toman valores parecidos, esto es porque para $f/\#$ grandes las aberraciones disminuyen, y lo que determina básicamente el FC es la extensión angular del sol.

De todo este análisis se pueden dar conclusiones no solo para el espejo parabólico sino para los sistemas formadores de imagen en general. El FC máximo de un sistema de este tipo depende especialmente de las aberraciones como lo demuestra el hecho de que al quitar una clase de aberración en el espejo parabólico el FC alcanzó casi el 50% y el 25% del valor del FC máximo teórico para los casos 2D y 3D respectivamente. Si se pretendiera entonces alcanzar el FC máximo teórico con un sistema formador de imagen, lo que se tendría que hacer sería un sistema con un $f/\#$ muy pequeño y que a la vez estuviera libre de aberraciones, ya que en este caso se podría aplicar - por ejemplo para una lente, la ec. (2.4.2) ó (2.4.3) del capítulo anterior válida para la región paraxial. De hecho puede

verse que para un $f/\# = .5$ los valores que se obtienen de éstas expresiones concuerdan exactamente con los valores para el factor de concentración máximo teórico. Ahora bien, los sistemas ópticos de $f/\#$ más pequeño y casi libres de aberraciones que se han construido hasta ahora son lentes objetivos de microscopio y lentes de cámaras fotográficas de alto funcionamiento y alcanzan valores de $f/\# = 1$. Con éstos sistemas se pueden obtener factores de concentración semejantes a los de el espejo parabólico pero con estructuras muy complejas y el costo que tendrían si se usáran de un tamaño útil para el aprovechamiento de la energía solar sería definitivamente prohibitivo (William.M). Se puede afirmar entonces que el espejo parabólico es entre los sistemas formadores de imagen el más adecuado para la concentración de la radiación solar debido a los valores del FC que puede alcanzar y que además éstos no dependen de su tamaño, es decir, se puede construir un espejo parabólico del tamaño que se necesite y con un mismo valor del FC.

Para finalizar ésta sección es pertinente hacer algunos comentarios acerca de lo importante que es la alineación de un sistema óptico de este tipo. Hasta aquí se ha supuesto que los sistemas ópticos están perfectamente alineados con el centro del sol, de modo que a cada lado del eje óptico de un sistema dado, el sol subtiende un semiángulo de exactamente la mitad de su extensión angular. En la práctica esta alineación es un problema realmente fuerte, tanto técnico como teórico que queda fuera de los puntos a tratar en

este trabajo. Simplemente por completez, a continuación mostramos como influye la desalineación en el FC. En las figuras -- 3.4 (a) y (b) se han construido las mismas graficas $C \sqrt{F}$ hechas anteriormente para $\theta = .005$ rad., pero ahora se muestran también para ángulos mayores, en particular, para $\theta = .01$ y $\theta = .02$, que puede darse por ejemplo si el sistema seguidor del sol sufre vibraciones. En estas graficas puede verse que al aumentar el ángulo en un cierto factor, el FC disminuye en el mismo factor para un concentrador 2D, y en ese factor al cuadrado en el caso del concentrador 3D. Esto muestra que en la practica el funcionamiento adecuado de un sistema óptico usado como concentrador, dependerá en buena medida del mecanismo de alineación utilizado. Bajo estas observaciones se seguirá suponiendo para el análisis de los demás sistemas ópticos, una alineación perfecta.

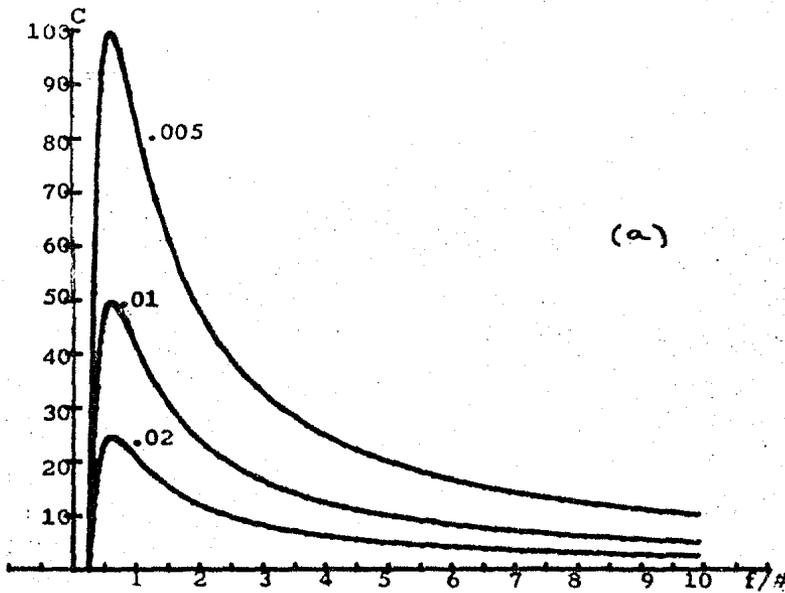
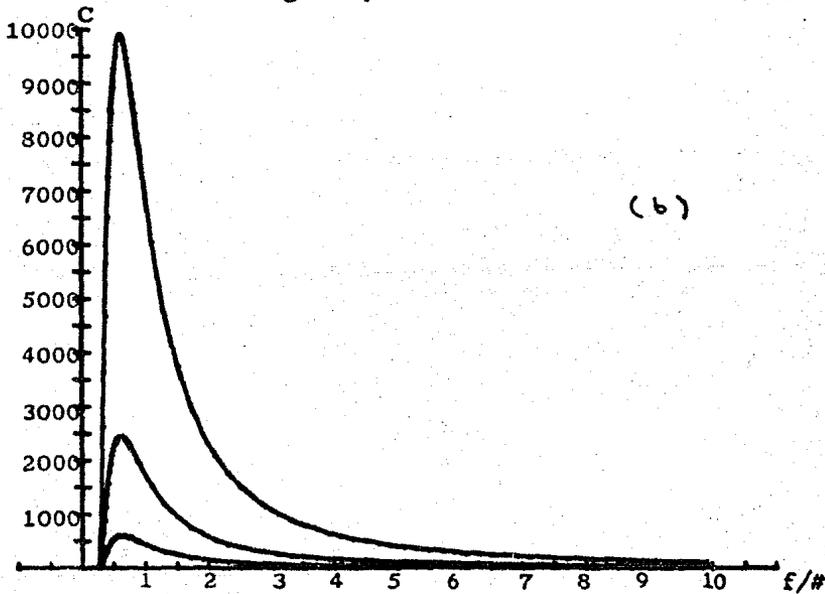


FIG. 3.4 Gráficas de C VS $f/\#$ para espejos parabólicos (a) 2D y (b) 3D , considerando ángulos mayores que el semiángulo que subtiende el sol $\theta = .005$ rad.



SISTEMAS NO FORMADORES DE IMAGEN

En la sección anterior se vió que el factor de concentración máximo que se puede alcanzar con un sistema formador de imagen está limitado por las aberraciones. Ahora bien, tales sistemas como su nombre lo indica han sido diseñados con la finalidad de que formen imágenes, no con la finalidad de -- concentrar luz, y, aunque como también se vió pueden dar buenos resultados cuando se usan como concentradores, resulta interesante preguntarse si los sistemas ópticos diseñados para concentrar luz serán más eficientes. Hay que observar que si la finalidad de un sistema es concentrar luz no es necesario que todos los rayos extremos que provienen del sol y que entran al sistema como rayos marginales (es decir incidiendo en los bordes de la abertura de entrada), formen una imagen puntual en la abertura de salida, sino únicamente se requiere -- que todos ellos salgan por el borde de ésta, o más generalmente que también sean rayos marginales en ella. Este es un principio conocido como "principio de rayos extremos" (Welford, pag 48), y los sistemas basados en él se conocen como sistemas no formadores de imagen. A continuación se hace un estudio de dos sistemas de este tipo, el espejo cónico truncado y el concentrador parabólico compuesto.

3.2 CONCENTRADORES CONICOS

Los concentradores no formadores de imagen más primitivos son los llamados conos de luz. Se trata de una superficie cónica truncada en el caso 3D y de un canal formado por dos planos separados e inclinados en el caso 2D, que se ha planteado en sus paredes internas de tal modo que estas funcionan como espejos. Si el cono es tal que su perfil hace un ángulo γ y θ es el semiángulo que hace un rayo marginal con el eje del cono, entonces este rayo saldrá por la abertura de salida (el extremo más angosto del cono), después de exactamente una reflexión si se cumple la condición $2\gamma = \frac{\pi}{2} - \theta$. Esto puede verse de la figura 3.5, usando la ley de la reflexión.

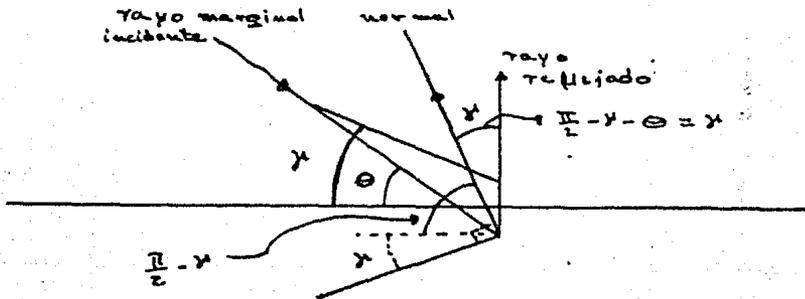


FIG. 3.5 Rayo marginal sobre un concentrador cónico. θ es el ángulo que hace el rayo con el eje del cono y γ el que hace el perfil del cono con su propio eje.

Puede verse también que la condición anterior no implica que -

todos los rayos que entren por la abertura de entrada (extremo más amplio del cono), salgan por la abertura de salida. De hecho todos los demás rayos que incidan al ángulo ϵ con el eje del cono y que no sean marginales, serán regresados hacia la abertura de entrada, de modo que jamás saldrán por la abertura de salida. Se debe buscar entonces la condición para que todos los rayos que entren al cono por la abertura de entrada haciendo ángulos con el eje de éste menores o iguales que ϵ , salgan por la abertura de salida, pues de otro modo será muy poco eficiente como concentrador. A continuación bosquejaremos el método seguido por (Williamson) para el diseño geométrico del cono que cumpla con las condiciones mencionadas, considerando lo más importante para nuestro propósito de concentrar la radiación solar. La idea del proceso es mostrada en la figura 3.6. En ésta, el cono en su posición original es designado por abcd. En lugar de seguir la imagen de un rayo que originalmente entra por la abertura de entrada del cono, y sufre varias reflexiones dentro de éste, lo que se hace es continuar el rayo a lo largo de su dirección original y construir geométricamente varias de las imágenes que el cono produce de sí mismo. Estas imágenes se obtienen en la figura 3.6 rotando el cono sobre su lado ab, luego sobre el lado ae de su primer imagen y así sucesivamente. De este modo, se puede asegurar que el rayo que entró al cono, saldrá por la abertura de salida si la línea que forma la continuación del rayo a lo largo de su dirección original, interseca al polígono formado por las posi-

ciones sucesivas de la abertura de salida. Así por ejemplo el rayo BB mostrado en la figura 3.6 emergerá por la abertura de salida del cono, despues de sufrir dos reflexiones, mientras que el AA nunca emergerá por ésta.

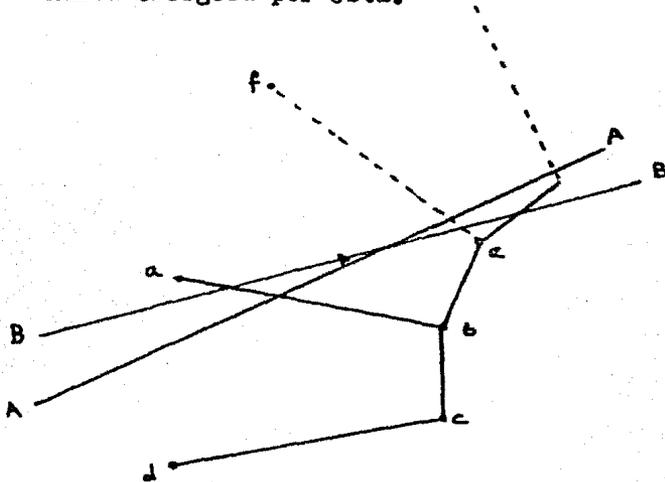


FIG. 3.6 método geométrico del trazo de rayos en un cono simple.

Con esta técnica entonces, se puede encontrar la condición para que todos los rayos provenientes del sol que entren por la abertura de entrada del cono, salgan por su abertura de salida. Nuevamente debemos suponer que el eje óptico del cono (su eje de simetría), está perfectamente alineado con el centro del sol. En la figura 3.7 se muestra un rayo marginal proveniente del borde inferior del sol, cuyo ángulo con el eje del cono es Θ , el diámetro de la abertura de entrada es 2α . Se muestra además, un círculo cuyo centro está a una distancia d de

la abertura de entrada del cono y sobre el eje de éste, de tal manera que su periferia en algún punto es tangente al rayo marginal designado por AB, este círculo representa ahora el polígono que fué generado por las rotaciones sucesivas del cono h_a chas en la figura 3.6.

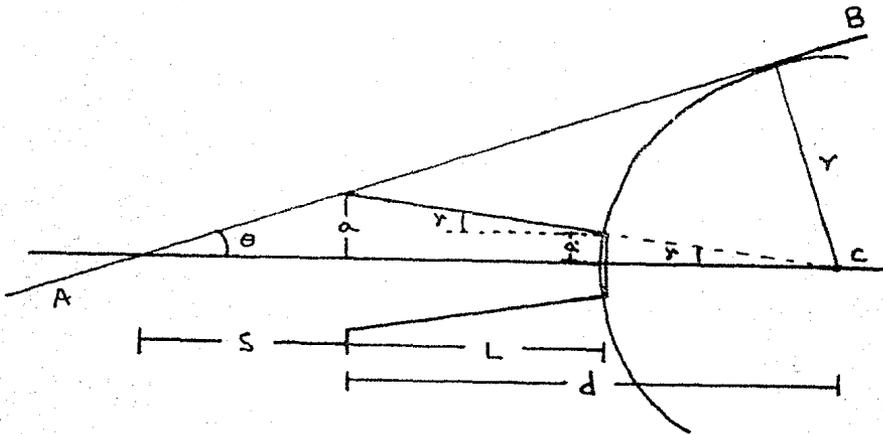


FIG. 3.7 diseño de un concentrador cónico.

El ángulo del cono está determinado por la línea que va del - centro de éste círculo al borde de la abertura de entrada. La longitud del cono L , está determinada por la distancia desde la abertura de entrada hasta el punto donde la línea anteriormente mencionada intersecta al círculo, tomando esta distancia a lo largo del eje del cono. Dada esta construcción se puede afirmar que cualquier rayo que incida por la abertura de entrada del cono con ángulos menores o iguales que θ , saldrá

por el extremo pequeño del cono. Representando por a' el radio de la abertura de salida y en base a la figura 3.7 es inmediata la relación

$$S = \frac{a}{\tan(\theta)} \quad (3.2.1)$$

también es fácil ver que:

$$r = (s+d) \tan(\theta) \quad (3.2.2)$$

del mismo modo:

$$\frac{a - a'}{L} = \frac{a}{d} \quad (3.2.3)$$

finalmente se tiene también que:

$$d = r + L \quad (3.2.4)$$

ésta ecuación según muestra la misma figura 3.7, es aproximada pero hay que señalar que la aproximación puede ser tan buena - como se quiera puesto que la distancia d es arbitraria. Se puede tomar entonces una distancia $d \rightarrow \infty$ con lo cual esta última ecuación se vuelve exacta. Una vez aclarado ésto, haciendo las manipulaciones algebraicas correspondientes sobre las ecuaciones anteriores se obtiene que la longitud del cono está dada por:

$$L = \frac{(a - a') \cos(\theta)}{\frac{a'}{a} - \text{Sen}(\theta)} \quad (3.2.5)$$

esta ecuación será útil tal cual, más adelante, de momento conviene reescribirla en la forma de una ecuación general cuadrática en a , con la finalidad de llegar a una expresión para el factor de concentración del cono diseñado. Así la ecuación (3.2.5) reescrita es:

$$\cos(\theta) a^2 + (L \text{Sen}(\theta) - a' \cos(\theta)) a - L a' = 0 \quad (3.2.6)$$

resolviendo esta ecuación cuadrática para a se tiene:

$$a = \frac{-(L \text{Sen}(\theta) - a' \cos(\theta)) + \sqrt{(L \text{Sen}(\theta) - a' \cos(\theta))^2 + 4L a' \cos(\theta)}}{2 \cos(\theta)} \quad (3.2.7)$$

en donde se ha tomado el signo positivo que es el signo que da valores de a positivos. En base a esta última ecuación es inmediato dar la expresión para el factor de concentración del espejo cónico 2D que resulta ser:

$$C = \frac{-(L \text{Sen}(\theta) - a' \cos(\theta)) + \sqrt{(L \text{Sen}(\theta) - a' \cos(\theta))^2 + 4L a' \cos(\theta)}}{2 \cos(\theta)} \quad (3.2.8)$$

para el caso 3D solamente hay que elevar esta expresión al cuadrado. Puede verse también de la ec. (3.2.8) que el FC del concentrador cónico dependerá de dos parámetros que en este ca

so son la longitud L y la abertura de salida a' del cono. Entoces para hacer gráficas que muestren los valores posibles del factor de concentración habrá que fijar alguno de estos parámetros. Las figuras 3.8 (a) y (b) muestran las gráficas del FC contra la longitud, para espejos cónicos 2D y 3D respectivamente, tomando distintos valores para el radio de la abertura de salida. Como puede verse éstas gráficas significativamente distintas a las encontradas para espejos parabólicos, muestran - que el FC de los espejos cónicos tiende al valor máximo teórico asintóticamente, y de hecho lo alcanzarán solo para $L \rightarrow \infty$. - es decir no hay un valor finito de la longitud para el cual el FC alcance un valor máximo. Debe observarse que se han tomado longitudes del cono impracticables, esto por un lado sirve para ver el comportamiento asintótico, y por otro para mostrar que para factores de concentración grandes las longitudes son efectivamente tan grandes que resultan imprácticos, por ejemplo si se desea un concentrador cónico que produzca un factor de concentración $C = 10000$ y que tenga una abertura de salida de radio $a' = 1$ cm., éste debe tener una longitud de ;aproximadamente 200 metros!. Otra característica que puede observarse de las gráficas es que para una longitud dada del cono, el FC disminuye al aumentar el radio de la abertura de salida. En las figuras 3.9 (a) y (b) se han hecho las mismas gráficas de C Vs L para un concentrador cónico 2D, pero esta vez para valores más prácticos de la longitud, así por ejemplo de la figura 3.9 (a) puede apreciarse que para espejos cónicos con lon

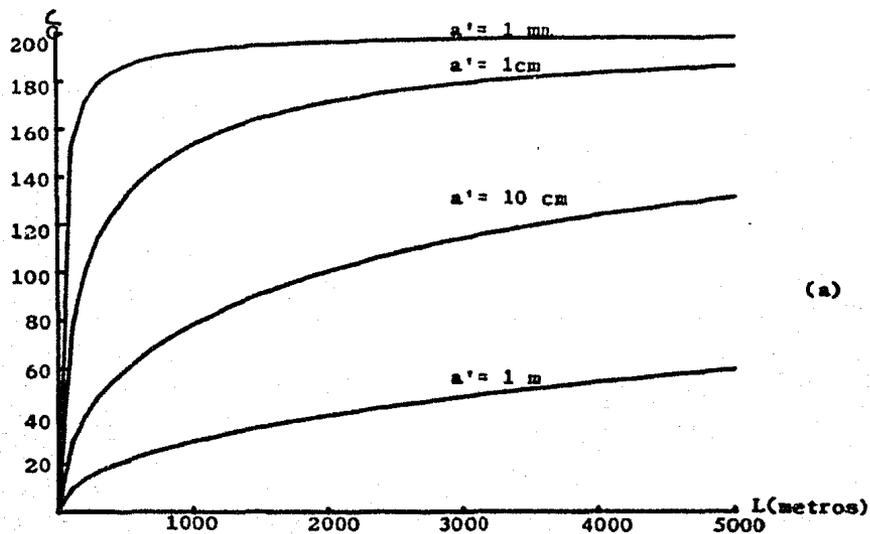
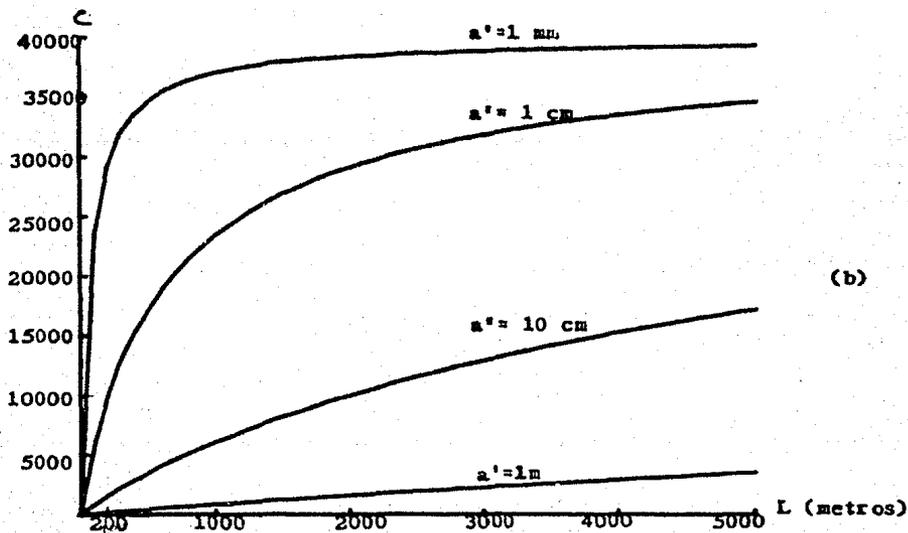


FIG. 3.8 Gráficas de factor de concentración contra longitud para espejos cónicos (a) 2D, (b) 3D, tomando varios valores del radio de la abertura de salida a' .



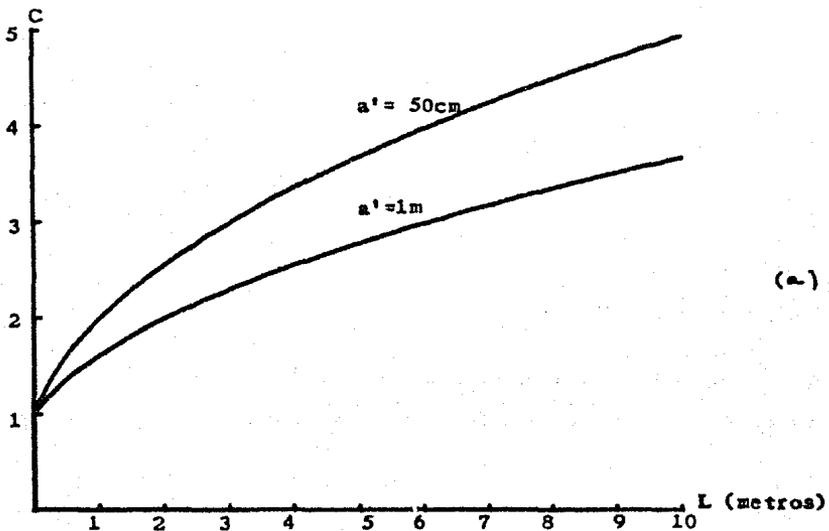
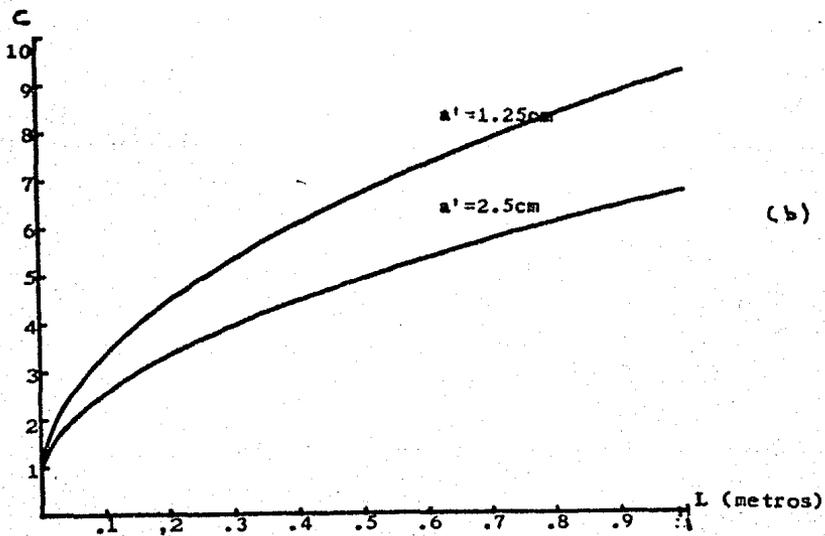


FIG.3.9 Gráficas de factor de concentración contra longitud para valores prácticos de ésta, tomando distintos valores para el radio de la abertura de salida a' , para concentradores cónicos 2D.



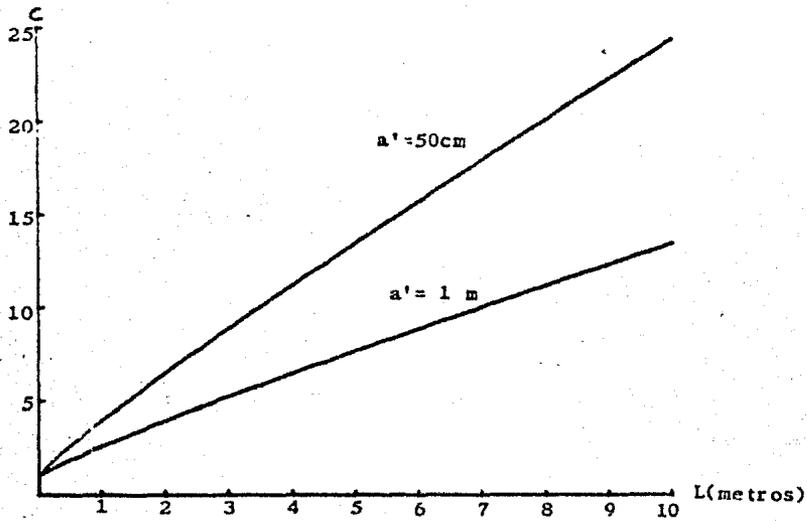
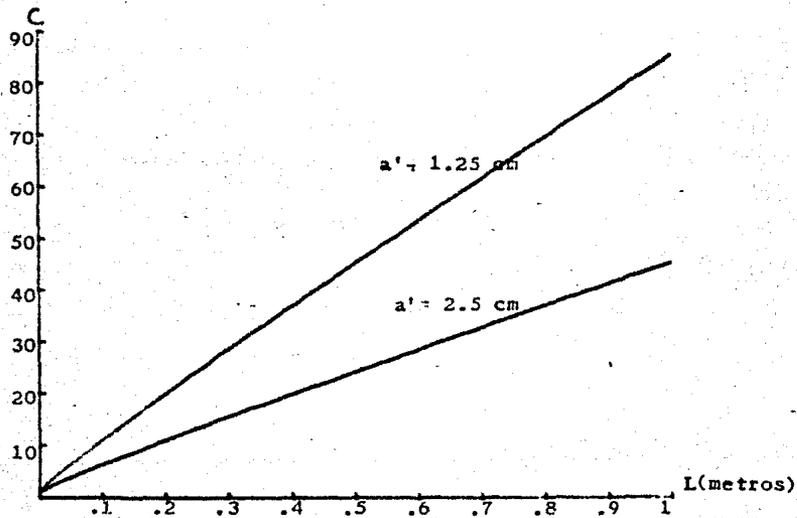


FIG. 3.10 Gráficas de factor de concentración contra longitud para valores prácticos de ésta, tomando distintos valores para el radio de la abertura de salida a' , para concentradores cónicos 30.



gitudes entre 0 y 10 metros se obtienen factores de concentración entre 1 y 5 para aberturas de salida de 50 cm. de radio, y entre 1 y 4 para aberturas de salida de 1 metro de radio. Análogamente en la figura 3.9 (b) se observa que para conos con longitudes entre 0 y 1 metro se obtienen factores de concentración entre 1 y 10, y entre 1 y 7 para aberturas de salida de radios de 1.25 cm. y 2.5 cm. respectivamente. Finalmente en -- las figuras 3.10 se hacen las misma gráficas para el caso del cono 3D, mostrándose que para los mismos valores de la longitud y de el radio de la abertura de salida, que para el caso - 2D, los valores del FC se elevan al cuadrado.

Puede concluirse de este análisis que el concentrador gónico será conveniente cuando se requiera de factores de concentración bajos. Hay que señalar también que este sistema es demasiado simple comparado con los sistemas formadores de imagen, y su forma sugiere el camino que se puede seguir para la construcción geométrica de otros concentradores, en particular para el concentrador parabólico compuesto que será estudiado en la siguiente sección.

3.3 EL CONCENTRADOR PARABOLICO COMPUESTO

Tomando de nuevo como base el "principio de rayos extremos", es posible diseñar el perfil de un concentrador parecido al espejo cónico, pero que puede ser más eficiente: el concentrador parabólico compuesto, que abreviaremos por CPC. Seguiremos muy de cerca la descripción hecha por (Welford). Como muestra la figura 3.11, en base a un análisis de los rayos meridionales provenientes del borde superior e inferior del sol, es sencilla la construcción geométrica del CPC si además suponemos que éste está perfectamente alineado con el sol.

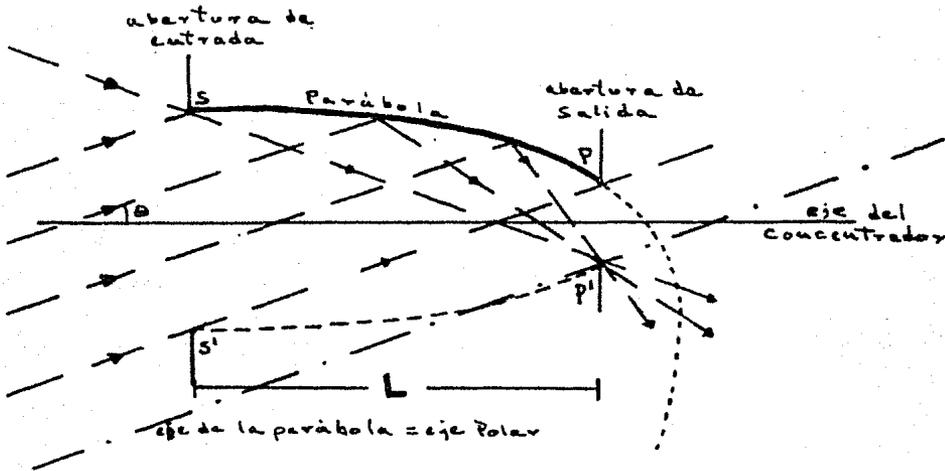


FIG. 3.11 Construcción geométrica del perfil del CPC a partir del "principio de los rayos extremos".

El perfil superior del CPC denotado en la figura por se será una porción de una parábola que tenga su eje focal paralelo a

la dirección de los rayos provenientes del borde inferior del sol, de esta manera todos estos rayos serán enfocados en el punto P' que es el foco de la parábola. Análogamente el perfil inferior del CPC denotado en la figura por $s'g'$, será una porción de otra parábola, ahora con su eje focal paralelo a la dirección de los rayos provenientes del borde superior del sol, que de este modo serán enfocados ahora en el punto P , foco de esta segunda parábola. La distancia entre los dos focos mencionados determina el diámetro de la abertura de salida del CPC, el eje óptico de éste es el eje de simetría mostrado en la figura, la abertura de entrada la determinan las intersecciones de las dos parábolas con los rayos que pasan por los focos P y P' , estas intersecciones son denotadas en la figura por s y s' . La longitud del concentrador es la distancia entre las aberturas de entrada y salida medida a lo largo del eje óptico. Con esta construcción se asegura que todos los rayos meridionales provenientes del sol que entren al concentrador por su abertura de entrada salgan por su abertura de salida. Así el CPC en el caso 2D será un canal formado por las dos secciones parabólicas mencionadas (de ahí el nombre de concentrador parabólico compuesto). En el caso 3D la superficie de el concentrador será la que resulte de rotar los perfiles parabólicos alrededor del eje de simetría.

En este caso, de nuevo es posible deducir una ecuación para el factor de concentración de este sistema óptico - sin necesidad de recurrir al trazo de rayos, sino directamen-

te haciendo uso de la ecuación de la parábola y de la geometría del problema. Así recordando que la ecuación de una cónica en coordenadas polares toma su forma más sencilla y útil cuando uno de los focos está en el polo y el eje focal coincide -- con el eje polar y está dada por

$$r = \frac{2ef}{1 - e \cos(\phi)} \quad (3.3.1)$$

(Lehman, pag. 256), siendo r la distancia del polo a cualquier punto sobre la cónica, ϕ el ángulo que hace con el eje polar el radio que va del polo al punto en cuestión, f la longitud focal de la cónica y e su excentricidad. En el caso de la parábola la excentricidad vale 1, por lo tanto la ecuación de la parábola es:

$$r = \frac{2f}{1 - \cos(\phi)} \quad (3.3.2)$$

La figura 3.12 muestra estos parámetros para la parábola que forma uno de los brazos del concentrador parabólico compuesto con abertura de entrada de radio a y abertura de salida de radio a' . También se muestra el rayo extremo $Q'P'$ haciendo un ángulo θ con el eje del CPC. Haciendo uso de la figura 3.12 y de la ecuación (3.3.2) se tiene que:

$$\overline{PP'} = 2a' = \frac{2f}{1 - \cos(\pi/2 + \theta)} \quad (3.3.3)$$

de donde la longitud focal de la parábola se puede expresar como:

$$f = a'(1 + \sin(\theta)) \quad (3.3.4)$$

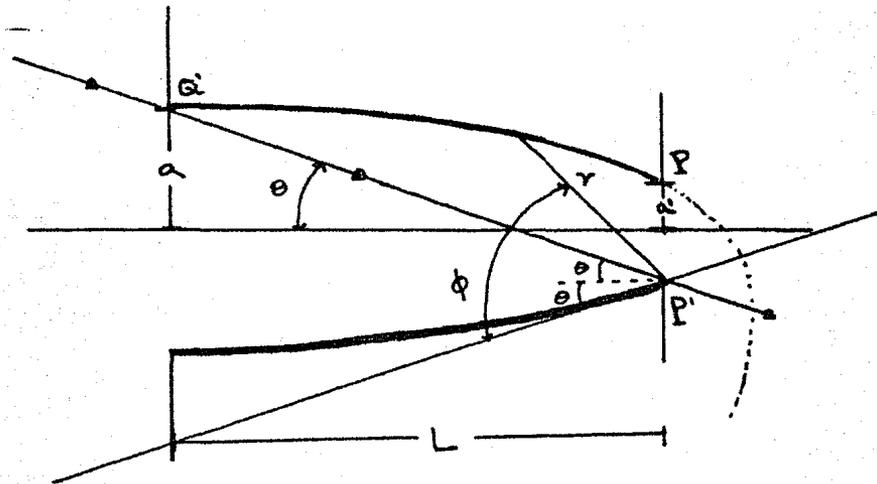


FIG. 3.12 Esquema del perfil del CPC, mostrando los parámetros más importantes.

También de esta figura se observa que:

$$\overline{Q'P'} = \frac{2f}{1 - \cos(2\theta)} \quad (3.3.5)$$

además,

$$a + a' = \overline{Q'P'} \sin(\theta) \quad (3.3.6)$$

combinando esta última ecuación con la anterior se llega a que

$$a + a' = \frac{2f \operatorname{Sen}(\theta)}{1 - \operatorname{Cos}(2\theta)} \quad (3.3.7)$$

sustituyendo ahora (3.3.4) en esta última ecuación y desarrollando $\operatorname{Cos}(2\theta)$ se obtiene la expresión:

$$a + a' = \frac{a'(1 + \operatorname{Sen}(\theta))}{\operatorname{Sen}(\theta)} \quad (3.3.8)$$

de esta ecuación es inmediato obtener el factor de concentración para el CPC, pero antes de darlo, de una vez conviene dar la expresión para la longitud del CPC, que resulta ser:

$$L = \overline{Q'P'} \operatorname{Cos}(\theta) \quad (3.3.9)$$

sustituyendo en esta expresión las ecuaciones (3.3.5) y (3.3.4) y reescribiendo $\operatorname{Cos}(2\theta)$ se obtiene finalmente:

$$L = \frac{a'(1 + \operatorname{Sen}(\theta))}{\operatorname{Sen}^2(\theta)} \operatorname{Cos}(\theta) \quad (3.3.10)$$

Ahora sí, ya que tenemos las expresiones que caracterizan al CPC, podemos empezar a analizar su funcionamiento. Como se dijo, de la expresión (3.3.8) es inmediato obtener la expresión para el factor de concentración del CPC, que en el caso 2D resulta ser:

$$C = \frac{a}{a'} = \frac{1}{\operatorname{Sen}(\theta)} \quad (3.3.11)$$

Para el caso 3D el factor de concentración del CPC es simplemente la expresión anterior elevada al cuadrado, es decir:

$$C = \left(\frac{a}{a'}\right)^2 = \frac{1}{\text{Sen}^2(\theta)} \quad (3.3.12)$$

De estas expresiones vemos que el factor de concentración que proporciona el CPC en ambos casos resulta ser ¡na da menos que el factor de concentración máximo teórico!, así, ya que para el caso 2D la expresión (3.3.11) es válida aún -- considerando los rayos no meridionales, se puede afirmar que se ha encontrado un concentrador 2D; el CPC, que funciona en teoría en forma ideal y que alcanza el FC máximo teórico. En el caso 3D sin embargo, no hay que olvidar que el análisis - hecho no es válido para rayos meridionales, por lo tanto en este caso no se alcanzará el valor máximo teórico del factor de concentración debido a que habrá una proporción de rayos - no meridionales que serán regresados por la abertura de entrada originando una disminución en éste (Welford, secc.4.4.3) De cualquier manera el factor de concentración estará bastante cerca del máximo teórico.

Hasta aquí, los resultados teóricos obtenidos para - el CPC son muy satisfactorios, sin embargo falta considerar - lo que sucede con la longitud de éste. Si en la expresión para la longitud del CPC (ec.(3.3.10)), se sustituye el valor -- $\theta = .005$ radianes, que es el semiángulo que subtiende el sol, se tiene que la longitud es proporcional al radio de la aber-

tura de salida del CPC, con un factor de proporcionalidad de valor ¡40200! aproximadamente. Esto muestra que el CPC tiene la gran desventaja de ser extremadamente largo comparado con el radio de la abertura de salida, ya que por ejemplo para una abertura de salida de radio $a' = 1$ cm la longitud será de 402 me tros, que es una longitud bastante difícil de conseguir en la práctica, y aún cuando se consiguiera sería extremadamente cos toso. Por otro lado, el CPC diseñado con el ángulo $\theta = .005$ rad. únicamente nos proporciona el factor de concentración máximo--teórico y no más, lo cual es también una desventaja pues no hay que olvidar que en la práctica se requiere de sistemas ópticos que proporcionen los factores de concentración necesarios para un problema particular y que además sean lo más económico, posi ble.

Ante estos problemas se han estudiado algunas modificaciones del CPC (Welford), que a continuación mostramos.

Una de las modificaciones es directa a partir de las expresiones anteriores para el factor de concentración y longitud del CPC, pues de éstas puede verse que el CPC está diseñado para trabajar en base a un ángulo de colección Θ , y por lo tanto si se modifica éste, se modificarán las características del concentrador. En concreto, de las expresiones (3.311) y (3.3.12) se tiene que si se aumenta el ángulo de colección a partir del valor $\Theta = .005$ rad. el factor de concentración de el CPC disminuye, en el caso 2D inversamente proporcional al se no del ángulo de colección, e inversamente proporcional al cu

drado del seno de este ángulo para el caso 3D. También puede verse de la expresión (3.3.10) para la longitud del CPC, que ésta disminuye (para ángulos de colección pequeños) al aumentar dicho ángulo, de manera inversamente proporcional al cuadrado del seno del ángulo. En las figuras 3.14 se han hecho dibujos que muestran cualitativamente como se reduce la longitud de un CPC al aumentar el ángulo de colección.

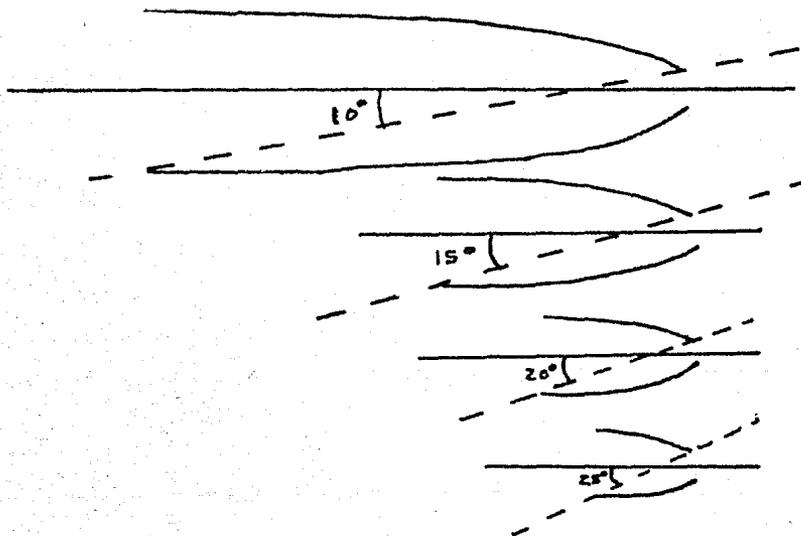


FIG. 3.13 Concentradores parabólicos compuestos con diferentes ángulos de colección y con aberturas de salida de igual diámetro (fig. tomada del Welford).

La manera en que se modifica la parábola que forma al CPC, se expresa la ec. (3.3.4) para la distancia focal de ésta.

Hay que señalar que aún cuando un CPC sea diseñado con un ángulo de colección Θ mayor que el semiángulo que subtende el sol, éste servirá para concentrar rayos solares, siempre y cuando el sol no se salga del ángulo que subtenden las líneas que determinan el ángulo de colección del concentrador, como muestra la figura 3.14. El factor de concentración que se obtenga será el correspondiente al ángulo de colección Θ , independientemente de la posición del sol dentro de los límites fijados. Esta observación es importante como punto a favor del concentrador parabólico compuesto pues implica que éste acepta un cierto grado de desalineación.

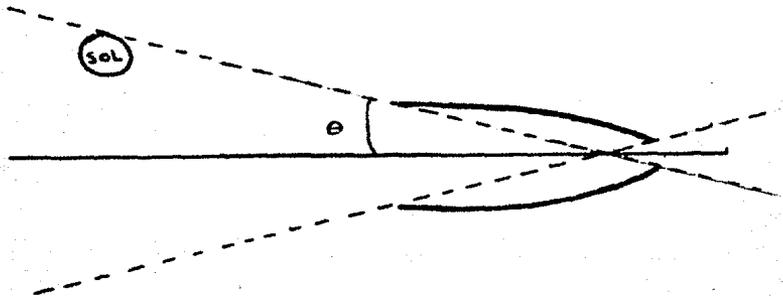


FIG. 3.14 Esquema mostrando en forma cualitativa la desalineación que acepta un CPC diseñado con un ángulo de colección $\Theta > .005$ rad. El tamaño del concentrador y la distancia del sol a éste no están en la proporción correcta.

De este análisis puede verse entonces que variando el ángulo de colección del CPC puede obtenerse al menos en --

teoría cualquier valor del factor de concentración menor o igual que el valor máximo teórico, reduciendo al mismo tiempo la longitud del concentrador y permitiendo que éste acepte -- pequeñas desalineaciones sin que el factor de concentración se vea afectado. Cuando se comparen los sistemas ópticos en el siguiente capítulo se verá que tan adecuado es el CPC modificado de la manera mencionada, para una aplicación dada.

Otra modificación que se puede hacer al CPC con la finalidad de reducir su longitud y consecuentemente obtener factores de concentración de distintos valores es truncarlo por el lado de la abertura de entrada. Si se observan las figuras anteriores en donde se ha dibujado el perfil del CPC -- puede verse que en todas éstas se exhibe una característica -- importante; las pendientes (respecto al eje del concentrador) de las rectas tangentes al perfil se hacen muy pequeñas al acercarse a la abertura de entrada, de hecho se puede demostrar que exactamente en la abertura de entrada el perfil es paralelo al eje óptico del concentrador, (Welford). Este hecho muestra que al truncar el CPC por la abertura de entrada, puede hacerse una reducción considerable en la longitud -- de éste con una reducción muy baja del factor de concentración, lo cual puede ser económicamente conveniente.

La figura 3.15 muestra el CPC truncado, en donde -- sus parámetros han sido denotados con el subíndice T. Puede apreciarse de ésta, que usando coordenadas polares es directo encontrar sus características principales como longitud y *fac*

tor de concentración, así, se tiene que la longitud es:

$$L_+ = \overline{S'A'} \cos(\phi_+ - \theta) \quad (3.3.13)$$

en donde en base a la ec. (3.3.2) para la parábola en coordenadas polares se tiene:

$$\overline{S'A'} = \frac{2f}{1 - \cos(\phi_+)} \quad (3.3.14)$$

sustituyendo en esta expresión la ecuación (3.3.4) para la -- distancia focal de la parábola que forma el perfil del CPC -- sin truncar, y lo que resulte lo sustituimos en (3.3.13) se obtiene finalmente que la longitud del CPC truncado está dada por:

$$L_+ = \frac{a'(1 + \text{Sen}(\theta)) \cos(\phi_+ - \theta)}{\text{Sen}^2(\phi_+/2)} \quad (3.3.15)$$

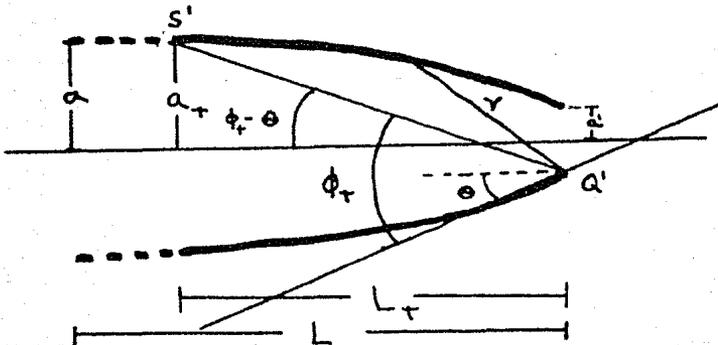


FIG. 3.15 Coordenadas polares usadas para la descripción del CPC truncado.

También de la figura se ve que:

$$a_r + a' = \overline{S'} a' \operatorname{Sen}(\phi_r - \theta) \quad (3.3.16)$$

siendo a_r el radio de la abertura de entrada del cono truncado. Sustituyendo en esta expresión la ec. (3.3.14) se obtiene que:

$$a_r + a' = \frac{f \operatorname{Sen}(\phi_r - \theta)}{\operatorname{Sen}^2(\phi_r/2)} \quad (3.3.17)$$

sustituyendo de nuevo en ésta la ec. (3.3.4), se obtiene:

$$a_r = \frac{a' (1 + \operatorname{Sen}(\theta)) \operatorname{Sen}(\phi_r - \theta)}{\operatorname{Sen}^2(\phi_r/2)} - a' \quad (3.3.18)$$

Así, el factor de concentración del CPC truncado resulta ser en el caso 2D:

$$C_T = \frac{a_r}{a'} = \frac{(1 + \operatorname{Sen}(\theta)) \operatorname{Sen}(\phi_r - \theta)}{\operatorname{Sen}^2(\phi_r/2)} - 1 \quad (3.3.19)$$

mientras que en el caso 3D, será esta expresión elevada al cubo, es decir:

$$C_T = \left[\frac{(1 + \operatorname{Sen}(\theta)) \operatorname{Sen}(\phi_r - \theta)}{\operatorname{Sen}^2(\phi_r/2)} - 1 \right]^2 \quad (3.3.20)$$

De esta manera tenemos ya las ecuaciones que describen el comportamiento del CPC truncado. Es importante recalcar que este

concentrador se obtiene a partir de un CPC diseñado con un cierto ángulo de colección Θ , simplemente truncándolo por la abertura de entrada. Ahora bien, para demostrar lo que se dijo anteriormente, de que al truncar el CPC se reduce considerablemente la longitud, y poco el factor de concentración, podemos analizar en base a las ecuaciones anteriores, la proporción en que decrecen estas cantidades respecto a los valores originales. Estas proporciones están dadas por las siguientes expresiones:

$$\frac{L_T}{L} = \frac{\cos(\phi_T - \Theta) \operatorname{Sen}^2(\Theta)}{\cos(\Theta) \operatorname{Sen}^2(\phi_T/2)} \quad (3.3.21)$$

para la longitud,

$$\frac{C_T}{C} = \frac{(1 + \operatorname{Sen}(\Theta)) \operatorname{Sen}(\phi_T - \Theta) \operatorname{Sen}(\Theta)}{\operatorname{Sen}^2(\phi_T/2)} - \operatorname{Sen}(\Theta) \quad (3.3.22)$$

para el factor de concentración en el caso 2D, y,

$$\frac{C_T}{C} = \left[\frac{(1 + \operatorname{Sen}(\Theta)) \operatorname{Sen}(\phi_T - \Theta)}{\operatorname{Sen}^2(\phi_T/2)} - 1 \right]^2 \operatorname{Sen}^2(\Theta) \quad (3.3.23)$$

para el FC en el caso 3D. Si las graficamos, se obtienen las gráficas que muestra la figura 3.16, en donde puede verse que efectivamente los factores de concentración decrecen más lentamente que la longitud, así por ejemplo para un ángulo de truncamiento de .02 rad. la longitud disminuye al 25% de su valor original mientras que el factor de concentración dismi-

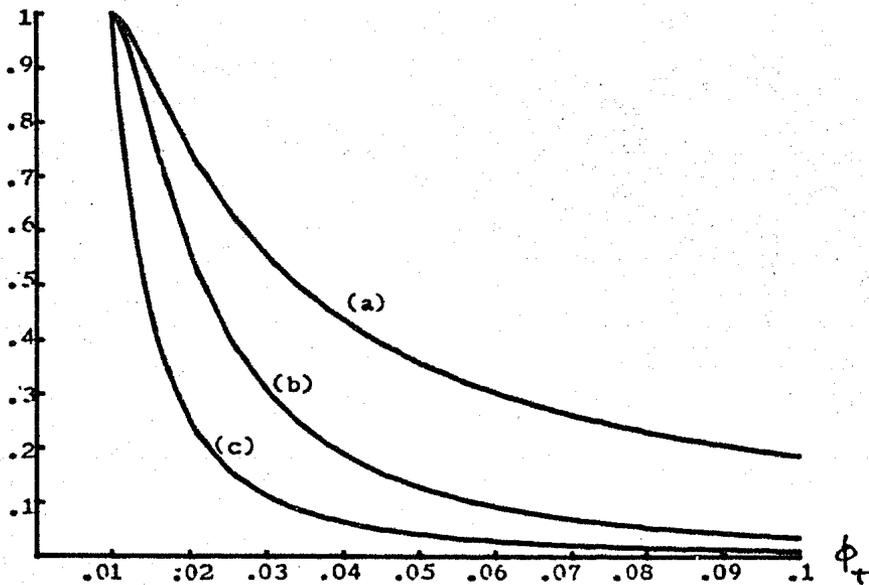


FIG. 3.16 Proporción en que decrece:
 (a) el factor de concentración en el caso 2D del CPC truncado
 (b) el factor de concentración del CPC truncado en el caso 3D.
 (c) la longitud del CPC truncado.
 todo, respecto al valor correspondiente para el CPC diseñado con un ángulo de colección $\theta = .005$ rad.

nuye solamente al 25% y al 75% de su valor original para los casos 3D y 2D respectivamente. Para hacer las gráficas anteriores se ha tomado como concentrador inicial un CPC diseñado con un ángulo de colección $\Theta = .005$ rad., ésto se señala porque como puede observarse de las ecuaciones para las proporciones, éstas dependen del ángulo de colección del CPC original.

En base a esta modificación también se puede obtener al menos en teoría cualquier valor del FC menor o igual que el FC máximo teórico que se requiera. Cuando se comparen los sistemas ópticos aquí estudiados se verá que tan conveniente es esta modificación.

Existen todavía otras modificaciones que se pueden hacer al CPC, como por ejemplo construirlo con un dieléctrico sólido y aprovechar el fenómeno de reflexión total interna (Zajac, secc.4.3.4). El tratamiento puede verse en (Welford).

Por ahora se tiene una buena cantidad de información para poder hacer una comparación de los sistemas ópticos aquí estudiados, usados como concentradores solares aplicados a problemas específicos, comparación que a la vez nos dará información más detallada acerca de éstos.

C A P I T U L O I V

COMPARACION DE LOS DISTINTOS SISTEMAS OPTICOS USADOS COMO CONCENTRADORES

Se ha visto a través de este trabajo que los distintos sistemas ópticos estudiados muestran cada uno de ellos, - características muy peculiares, exhibiendo también que hay -- ventajas de unos sobre otros en diversos aspectos, sin embargo en general no se puede decir cual de los concentradores es el mejor si no se especifica para que fin será utilizado.

En este capítulo se hace una comparación de los sistemas ópticos ya estudiados. Para hacer ésto daremos algunos ejemplos particulares de aplicación de los concentradores en los que se requiere que éstos tengan una abertura de determinada forma y tamaño, y que proporcionen unvalor específico -- del factor de concentración. Se tomará en cuenta para la comparación aspectos tales como: longitud del concentrador, costos de de producción (principalmente cantidad de material y - tallado de las superficies), facilidad de construcción y forma en que concentran la luz. En base a los resultados teóricos que se tienen y a nuestros criterios adoptados, se elige en cada caso particular de aplicación, el sistema óptico más adecuado, argumentando el porqué de la elección.

4.1 COSTO DE LOS DISTINTOS SISTEMAS OPTICOS

No se puede dar el costo preciso de un sistema óptico en base a puros argumentos teóricos, sino hasta que se haya construido en la práctica, sin embargo en general se encuentra que el costo de material y tallado para un concentrador reflector está gobernado por el cociente del área de la superficie del espejo entre el área de su abertura de entrada (Welford), por lo tanto supondremos aquí, que el costo de los sistemas ópticos reflectores que hemos estudiado, es directamente proporcional a esta cantidad y que el factor de proporcionalidad es el mismo para todos. Para sistemas refractores el costo tendrá que ver con esta cantidad también, pero el factor de proporcionalidad no será el mismo que para los sistemas reflectores, ya que además su costo debe también ser proporcional a la cantidad de dieléctrico (volumen), necesario para la construcción del sistema refractor. Por esta razón, en la comparación que se hará en este capítulo solamente tomaremos en cuenta a los sistemas reflectores pues no tiene sentido incluir en particular a la lente, si no se conoce en que tanto difieren los factores de proporcionalidad mencionados. Ahora bien, aún cuando dos sistemas reflectores distintos lleguen a tener la misma cantidad y tipo de material utilizado para su construcción, en la práctica podrá diferir su costo debido a la facilidad con que se construya uno y otro, entendiéndose por facilidad o dificultad la cantidad de tiempo invertido en la construcción del concentrador y que tan so-

fisticada sea la técnica seguida para ésto.

Tenemos pues dos aspectos que determinan en buena medida el costo de los sistemas reflectores, que debemos tomar en cuenta para hacer la comparación.

Para considerar al menos en forma cualitativa el aspecto de la dificultad o facilidad de construcción definiremos un factor de dificultad que denotaremos por FD , del modo siguiente, al sistema óptico reflector de los que se han estudiado, más fácil o menos difícil de construir se le asociará un $FD=1$, al siguiente engrado de dificultad según la experiencia le asociaremos un $FD=2$ etc.. De esta manera, en concreto al espejo cónico tanto 2D, como 3D le asociaremos un $FD=1$ por ser en base a la práctica el más sencillo de los estudiados puesto que en el caso 2D consiste simplemente en dos superficies planas y en el caso 3D su perfil es lineal. Al espejo parabólico le asociaremos un $FD=2$, por ser en el caso 2D un canal parabólico centrado en su eje y en el caso 3D un paraboloide de revolución. Al CPC se le asociará un $FD=3$ por ser una superficie de revolución fuera de eje en el caso 3D, y secciones también fuera de eje en el caso 2D, finalmente al CPC truncado se le asociará un $FD=4$ por ser superficies como en el caso anterior pero además cortadas. Como se dijo este FD solamente da una idea cualitativa de lo que sucede en la práctica y por lo tanto no debe entenderse como que el espejo parabólico por ejemplo sea dos veces más costoso en cuanto a dificultad que el cónico, sino simplemente que será más

difícil y en cuanto a esto se refiere, más costoso.

Para considerar el costo del material y tallado de de los concentradores, sí se puede hacer una evaluación cuantitativa de la cantidad que lo determina; el cociente de el área de la superficie entre el área de la abertura de entrada, que denotaremos por Q . El cálculo de esta cantidad se hace en el apéndice B para cada uno de los concentradores y se llega a expresiones tales que su valor se pueda especificar a partir de un valor dado del factor de concentración y del radio de la abertura de salida que se requiera, que serán los datos de los que se partirá en las siguientes secciones para hacer la comparación.

Así, en base a todas las ecuaciones del capítulo III que describen las características de los concentradores estudiados y las del apéndice B se obtienen las cantidades que hacen posible una comparación de los sistemas ópticos tratados.

4.2 ALGUNAS APLICACIONES ESPECÍFICAS DE LOS CONCENTRADORES , QUE PERMITEN SU COMPARACION

En esta sección, se hace la comparación de los distintos sistemas ópticos estudiados, haciendo uso de la información que hasta ahora se tiene, y suponiendo aplicaciones ya muy particulares. Cabe señalar que el análisis y la información obtenidos hasta aquí no es exhaustivo, puesto que en la construcción de un sistema óptico intervienen todavía muchos aspectos no considerados aquí, además de que en este estudio

se han hecho muchos supuestos de funcionamiento ideal de los concentradores, sin embargo las comparaciones hechas aquí sirven como una primera idea de cual puede ser el concentrador más adecuado a un problema particular. No hay que olvidar que en física, generalmente los problemas se atacan de esta manera. Dicho esto, comenzamos la comparación con una aplicación de los concentradores muy particular; a una celda fotovoltaica.

4.2.1 CONCENTRADOR INTEGRADO A UNA CELDA FOTOVOLTAICA DE FORMA RECTANGULAR

Como se dijo en el capítulo I, se tienen referencias de que se producen celdas fotovoltaicas rectangulares de 10 cm de largo, por 2.5 cm de ancho, y que éstas soportan factores de concentración con valores entre 8 y 10. Así, aquí su pondremos una celda solar con estas dimensiones, y que deseamos hacerle incidir la radiación solar concentrada en un factor de 8. Se necesita entonces para comenzar, un concentrador que proporcione este factor de concentración y que además ten ga una abertura de salida rectangular y con las dimensiones dadas. Inmediatamente vemos que de los concentradores tratados, los que tienen aberturas de salida rectangulares son los bidimensionales (2D), por lo tanto sólo debemos discernir de entre éstos cual puede ser el más adecuado. Ahora bien, dado que el ancho d de la celda solar considerada es 2.5 cm, todos los concentradores 2D aplicables a este caso específico deben tener aberturas de salida de radio $a' = 1.25$ cm. En la tabla

4.1 se muestran los valores que toman los parámetros que hacen posible la comparación, para cada uno de los concentradores 2D con factor de concentración $C=8$ y abertura de salida de radio $a'=1.25$ cm, calculados a partir de las ecuaciones que se tienen para cada uno de ellos.

CONCENTRADOR 2D	C	F	L	R	P	Θ	ϕ_r
PARABOLICO	8.057	.2616	.048	1.136	.05	.005	-----
	8.052	12.4	.001	1.000	2.49	.005	-----
CONICO	8.004	-----	.73	7.343	-----	.005	-----
CPC	8.020	-----	.89	9.062	-----	.125	-----
CPC TRUNCADO	8.018	-----	.25	2.655	-----	.005	.434

TABLA 4.1 Valores que toman los parámetros más importantes de los distintos concentradores estudiados 2D, -- con factor de concentración $C=8$ y abertura de salida $a'=1.25$ cm.

En esta tabla, C es el factor de concentración que proporciona cada uno de los concentradores, F es el $f/\#$ del sistema óptico, definido en este caso unicamente para el espejo parabólico, L es la longitud dada en metros definida como la distancia entre las aberturas de entrada y salida, R es el cociente de el área de la superficie del concentrador entre el área de la abertura de entrada, Θ es el ángulo de colección en radianes, ϕ_r es el ángulo de truncamiento (definido solo para el -

CPC truncado), finalmente, P es la distancia focal paraxial expresada en metros y definida únicamente para el espejo parabólico.

Puede verse de esta tabla que el concentrador más - costoso en cuanto a material se refiere es el CPC, además es el de mayor longitud y tiene un $FD=3$, por lo cual de entrada debe ser descartado. Luego en costo de material sigue el espejo cónico, el CPC truncado y el espejo parabólico en orden -- descendente. A pesar de que en este aspecto el espejo cónico es casi 3 veces más costoso que el CPC truncado, el primero es mucho más sencillo de construir que el segundo, de hecho el cónico es el más sencillo ($FD=1$) y el CPC truncado es el -- más complicado ($FD=4$), por lo tanto de estos dos escogemos -- el cónico ya que la construcción de éste es inmediata; sólo -- se necesitan dos espejos planos debidamente separados e incli- nados. Quedan solamente éste y el espejo parabólico. Obviamen- te que el parabólico es el menos costoso en material para am- bos $f/\#$, sin embargo tiene una desventaja, y es que su abertu- ra de salida se interpone entre la abertura de entrada y los rayos incidentes, lo cual por un lado implica que la celda ha- ga sombra reduciendo en una unidad el factor de concentración que se obtenga (lo cual es fácil de mostrar en base a la defi- nición del factor de concentración), y por otro lado requiere de colocar la celda fotovoltaica, por decirlo así de cabeza, ya que la luz debe incidir en una celda simple, nadamás por un lado, lo cual puede crear problemas, Un tercer problema -

que aparece en el espejo parabólico de $f/\#$ pequeño es que la concentración no es muy uniforme, siendo más intensa hacia el centro de la abertura de salida que hacia los bordes de ésta. El espejo cónico no tiene estos problemas pues su abertura de salida está después de la abertura de entrada, y además mezcla más la luz al concentrarla, produciendo una mayor uniformidad en la concentración, además este sistema es todavía mucho más sencillo que el espejo parabólico. En base a esto, nuestra elección se inclina por el espejo cónico a pesar de que requiere más cantidad de material que el parabólico, sobre todo por la cuestión de la sencillez. Debe aclararse que esta elección no es determinante pues está abierta a objeciones que la práctica puede dar y en última instancia será la que confirme o deseche la elección. Debe aclararse que en este ejemplo la elección no es inmediata pues hay gran competencia entre el espejo cónico y el parabólico. Por otro lado, no se ha considerado costos de alineación y hay que señalar que en este aspecto como se vió en el capítulo III el CPC con ángulos de colección grandes, por lo que su uso puede en determinado momento llegar a ser importante.

4.2.2 CONCENTRADOR INTEGRADO A UNA CELDA FOTOVOLTAICA DE FORMA CIRCULAR

En este caso nuevamente tomaremos el ejemplo de una celda solar, pero ahora de forma circular, tomando otra vez como factor de concentración, un valor de 8, y como aber-

tura de salida una de radio $a' = 5$ cm , ya que las celdas circulares por lo general tienen diámetros de 10 cm. Los concentradores adaptables a este tipo de celdas claramente son los tridimensionales (3D) ya estudiados. La tabla 4.2 muestra los valores que toman los parámetros en este caso, mismos parámetro que en el caso anterior.

CONCENTRADOR 3D	C	F	L	R	P	θ	ϕ_T
PARABOLICO	8.30	.2549	.070	1.210	.073	.005	----
	8.02	35.3	.0005	1.000	9.99	.005	----
CONICO	8.01	-----	.263	2.658	-----	.005	----
CPC	8.05	-----	.509	6.124	-----	.360	----
CPC TRUNCADO	8.10	-----	.136	1.612	-----	.005	.96

TABLA 4.2 Valores de los distintos parámetros de los concentradores 3D estudiados, con factor de concentración $C = 8$ y abertura de salida de radio $a' = 5$ cm.

Puede apreciarse de la tabla 4.2, que en este caso los valores del cociente de las áreas no difieren mucho unos de otros, sobre todo entre el espejo cónico, el parabólico y el CPC. Por lo tanto, en base a los argumentos dados en el ejemplo anterior optamos nuevamente por el concentrador cónico. En comparación con los concentradores del ejemplo anterior puede verse que en este caso los costos de material son menores y las longitudes también, sin embargo los costos de cons--

trucción y de alineación serán mayores en este caso que en el anterior, de manera que el tipo de celda y concentrador más conveniente para el aprovechamiento eficiente de la energía solar dependerá de cual de los aspectos mencionados domine.

4.2.3 CONCENTRADOR PARA USO EN UNA CENTRAL HELIO- TERMICA

En este caso debemos suponer un factor de concentración de valor $C=25$, que es el que aproximadamente produce temperaturas adecuadas para que funcione una máquina térmica (aproximadamente 600°C). Por otro lado el colector lo supondremos plano y con opción a ser circular o rectangular. Un valor típico del radio del círculo o del semiancho del rectángulo que forma el colector según sea el caso es de $a'=50$ cm. Así en este caso ambos tipos de concentrador 2D y 3D se pueden adaptar.

En la tabla 4.3 se muestran los valores de los parámetros usuales. En ésta se han sombreado los concentradores cónico, CPC y CPC truncado en el caso 2D para señalar que en principio estos se deben descartar por tener longitudes imprácticas, también el CPC 3D se puede descartar debido a la misma razón. de entre los restantes debemos señalar que en los espejos parabólicos 2D y 3D de $f/\#$ grande se tiene una distancia focal también grande lo cual es una gran desventaja pues implica que el colector debe estar aproximadamente a 100 metros de distancia del espejo. Así, solo queda elegir entre

CONCENTRADOR	C	F	L	R	P	Θ	ϕ_T
PARABOLICO 2D	25.05	.2853	5.487	1.116	7.146	.005	----
	25.06	3.94	.397	1.001	98.73	.005	----
PARABOLICO 3D	25.63	.2577	1.227	1.207	1.304	.005	----
	25.01	19.98	.015	1.000	99.91	.005	----
CONICO 2D	25.01	----	343.0	27.44	----	.005	----
CONICO 3D	25.01	----	10.26	5.015	----	.005	----
CFC 2D	25.01	----	324.9	26.06	----	.04	----
CFC 3D	25.08	-----	14.74	9.78	----	.201	----
CFC TRUNCADO 2D	25.03	-----	89.76	7.26	----	.005	.149
CFC TRUNCADO 3D	25.04	-----	4.05	2.375	-----	.005	.642

TABLA 4.3 Valores de los distintos concentradores con factor de concentración $C=25$ y abertura de salida de radio $a'=50$ cm.

el CFC 3D truncado, el espejo cónico y los espejos parabólicos 2D y 3D de $f/\#$ pequeño. De entre estos puede verse que el CFC truncado y el espejo cónico aunque son realizables en la práctica son demasiado grandes comparados con el espejo parabólico 3D de $f/\#=.2577$, por lo tanto éste será el concentrador más adecuado para ser utilizado en una central heliotérmica. Cabe señalar que en este caso y en los anteriores no se debe des--

cartar completamente la posibilidad de que los otros sistemas sean útiles, aquí simplemente se está sugiriendo en base a algunos argumentos cual puede ser el más adecuado.

4.2.4 CONCENTRADORES USADOS COMO HORNOS SOLARES

En esta última subsección, tomaremos como referencia el hecho de que existen hornos solares que proporcionan factores de concentración tales que originan temperaturas arriba de los 3000°C . Por lo tanto debemos investigar de entre los sistemas ópticos estudiados, cuales son los que proporcionan tales factores de concentración. En base a la ecuación (1.1.3) para la temperatura de un cuerpo expuesto a una cierta irradiancia al llegar al equilibrio, puede verse que un valor adecuado del factor de concentración, es por ejemplo de 8000. Por otro lado, un buen tamaño en el sentido práctico, para la abertura de salida es que ésta tenga un radio de $a' = 25$ cm.

Tomando estos datos como referencia de nuevo se calculan los valores correspondientes de los distintos parámetros de los concentradores 3D que son los únicos que pueden alcanzar éstos factores de concentración pues como se vió anteriormente el máximo teórico para los sistemas 2D concentrando rayos solares es 200. La tabla 4.4 muestra las características de los sistemas que al menos en teoría alcanzan el factor de concentración dado. De esta tabla es inmediato que solamente el espejo parabólico tiene tamaños realizables en la práctica. siendo posibles los dos valores del $f/\#$ del espejo.

CONCENTRADOR 3D	C	F	L	R	P		
PARABOLICO	8007.	.453	6.17	1.072	20.2	.005	----
	8007.	.874	3.19	1.020	39.1	.005	-----
CONICO	8000.	-----	3578.	161.8	-----	.005	-----
CPC	8000.	-----	2022.	150.4	-----	.0111	-----
CPC TRUNCADO	8000.	-----	670.7	41.2	-----	.005	.0387

TABLA 4.4 Características de algunos sistemas ópticos 3D propuestos como concentradores, todos con abertura de salida de radio $a' = 25$ cm y factor de concentración de aproximadamente $C=8000$.

Esto muestra la diferencia tan grande que hay entre las aplicaciones de los concentradores y las posibilidades que tiene cada uno de ellos, y confirma lo que se ha dicho; no hay un "mejor" concentrador en abstracto

CONCLUSIONES

Se ha mostrado con ésto, que para los problemas concretos mencionados de utilización de la energía solar, existe en cada caso al menos un sistema óptico con posibilidades a ser utilizado como concentrador desde el punto de vista práctico, lo cual muestra que si se le da impulso al estudio del diseño y construcción a gran escala de sistemas ópticos concentradores, hay grandes posibilidades de que la energía solar se aproveche en forma eficiente, pues como pudo verse de la comparación se tienen sistemas como el CPC y el CPC truncado que tienen tamaños y costos de material convenientes pero que están limitados por su difícil construcción debido a que son superficies fuera de eje.

En cuanto a los sistemas ópticos estudiados se refiere, es evidente que no se puede decir que alguno de ellos sea el "mejor" concentrador puesto que todos tienen sus ventajas y sus desventajas, y como se ha visto solo en base a alguna aplicación se puede decir cual es el más conveniente y aún en este caso hay varias alternativas.

La continuación del trabajo tiene varias alternativas. Por un lado se puede extender este estudio teórico a otros sistemas usados como concentradores, como los sistemas de espejos planos que consiste en un conjunto de éstos debidamente orientados para que todos dirijan los rayos del sol hacia un mismo colector, o bien hacia otro concentrador como

alguno de los aquí estudiados, con esta misma idea se pueden estudiar sistemas compuestos por dos concentradores de tal manera que uno concentre la radiación ya concentrada por el anterior, otro tipo de sistemas como lo son las lentes holográficas etc.. Por otro lado, con los datos que se tienen aquí se puede ir al diseño experimental de algún concentrador aplicado a algún problema particular y checar su funcionamiento. Una tercera alternativa es estudiar la manera práctica de reducir los costos en cuanto a dificultad se refiere de algunos sistemas como los concentradores parabólicos compuestos.

Hay otro aspecto muy importante en el proceso de la concentración solar y que solo fué mencionado de lado en éste trabajo y es el problema de la alineación que debe tener un sistema óptico, y aunque se sale un poco de los dominios de la óptica debe estudiarse en forma exhaustiva.

Con esto damos por terminado el trabajo aquí realizado, con una visión del panorama y perspectivas a seguir.

A P E N D I C E A

LEYES DE LA OPTICA GEOMETRICA EN FORMA VECTORIAL; TECNICA DE TRAZO DE RAYOS

A.1 LEY DE SNELL

En la sección 2.1 se expresó la ley de la refracción o ley de Snell por medio de la ecuación (2.1.2). Aquí se llegará a la expresión vectorial que se utiliza en el proceso del trazo de rayos.

La figura A.1 muestra dos vectores unitarios \hat{r} y \hat{r}' a lo largo del rayo incidente y transmitido respectivamente y un vector también unitario \hat{n} a lo largo de la normal a la superficie refractora, en el punto de incidencia. La dirección del vector normal \hat{n} se toma de tal manera que vaya del medio incidente cuyo índice de refracción es N_i , al medio de transmisión con índice N_t .

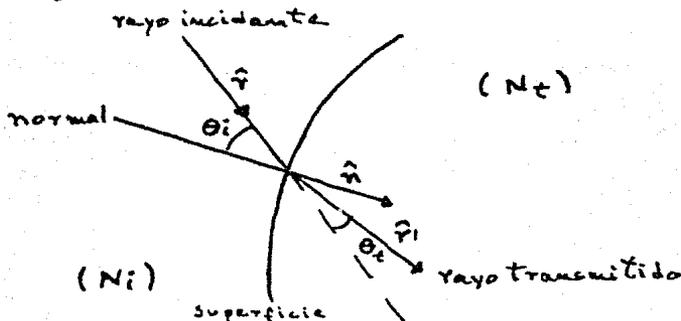


FIG. A.1 Formulación vectorial de la ley de la refracción, y son los ángulos de incidencia y refracción respectivamente.

Como se estableció en la sección 2.1 la ley de Snell se expresa usualmente como:

$$N_i \text{Sen}(\theta_i) = N_t \text{Sen}(\theta_t) \quad (\text{A.1})$$

Ahora bien, en base a la figura A.1. dado que los tres vectores \hat{v} , \hat{v}' y \hat{n} son coplanares, la expresión vectorial:

$$N_i (\hat{v} \times \hat{n}) = N_t (\hat{v}' \times \hat{n}) \quad (\text{A.2})$$

contiene a la ecuación (A.1), ya que el módulo de un producto vectorial entre dos vectores unitarios es igual al seno del ángulo entre ellos. De ésta ecuación se obtiene la expresión para el vector \hat{v}' que será la que se utilice para el trazo exacto de rayos. Así, para despejar \hat{v}' multiplicamos la ecuación anterior vectorialmente por \hat{n} , obteniendo:

$$N_i (\hat{n} \times \hat{v} \times \hat{n}) = N_t (\hat{n} \times \hat{v}' \times \hat{n}) \quad (\text{A.3})$$

usando una identidad vectorial, ésta se escribe como:

$$N_i [(\hat{n} \cdot \hat{n}) \hat{v} - (\hat{n} \cdot \hat{v}) \hat{n}] = N_t [(\hat{n} \cdot \hat{n}) \hat{v}' - (\hat{n} \cdot \hat{v}') \hat{n}]$$

y ya que $\hat{n} \cdot \hat{n} = 1$, reagrupando términos se obtiene:

$$N_t \hat{v}' = N_i \hat{v} + N_t (\hat{n} \cdot \hat{v}') \hat{n} - N_i (\hat{n} \cdot \hat{v}) \hat{n} \quad (\text{A.4})$$

Si se utiliza la ec. (A.1) y el hecho de que

$$\hat{n} \cdot \hat{r}' = \cos(\theta_t) = \sqrt{1 - \text{sen}^2(\theta_t)}$$

se tiene:

$$\hat{n} \cdot \hat{r}' = \sqrt{1 - \left(\frac{N_i}{N_t} \text{Sen}(\theta_i)\right)^2}$$

finalmente ya que $\text{Sen}^2 \theta = 1 - \text{Cos}^2 \theta$ se llega a que:

$$\hat{n} \cdot \hat{r}' = \sqrt{1 - \left(\frac{N_i}{N_t}\right)^2 + \frac{N_i^2}{N_t^2} (\hat{n} \cdot \hat{r})^2} \quad (\text{A.5})$$

Así, sustituyendo (A.5) en (A.4) y reagrupando términos se obtiene la ecuación

$$\hat{r}' = \frac{N_i}{N_t} \hat{r} + \left[\sqrt{1 - \frac{N_i^2}{N_t^2} + \frac{N_i^2}{N_t^2} (\hat{n} \cdot \hat{r})^2} - \frac{N_i}{N_t} (\hat{n} \cdot \hat{r}) \right] \hat{n} \quad (\text{A.6})$$

De esta ecuación se puede conocer la dirección \hat{r}' del rayo refractado si se conoce la dirección del rayo incidente \hat{r} , la normal a la superficie \hat{n} en el punto de incidencia y los índices de refracción N_i y N_t , de los medios correspondientes.

A.2 LEY DE LA REFLEXION

Aquí en forma similar se da la expresión vectorial de la ley de la reflexión partiendo de la ecuación $\theta_i = \theta_r$. Se construye de nuevo el vector unitario \hat{r} en la dirección de el rayo incidente, el vector \hat{r}'' en la dirección del rayo reflejado y el vector unitario \hat{n} normal a la superficie en el punto

de incidencia, como muestra la figura A.2.

En este caso, como los vectores \hat{v} y \hat{v}'' hacen el mismo ángulo con la dirección de la normal, se puede construir un triángulo isósceles cuyos lados iguales tengan longitud unitaria y cuya base tiene una longitud $2(\hat{n} \cdot \hat{v})$.

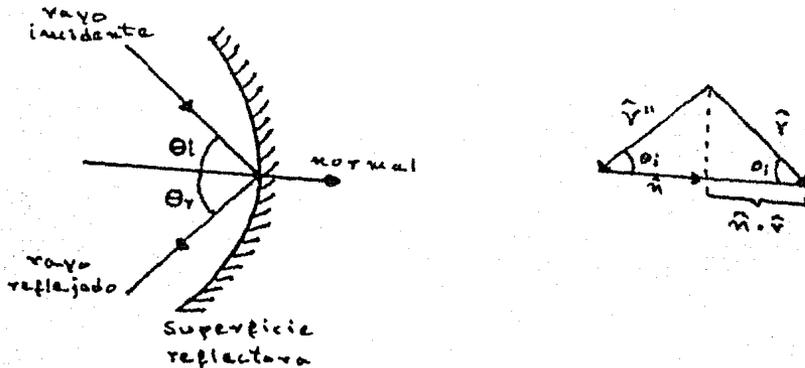


FIG. A.2 Formulación vectorial de la ley de la reflexión.

De modo que $\hat{v} - \hat{v}''$ nos dá un vector en la dirección de \hat{n} , de magnitud $2(\hat{n} \cdot \hat{v})$, es decir

$$\hat{v} - \hat{v}'' = 2(\hat{n} \cdot \hat{v}) \hat{n} \quad (\text{A.7})$$

así, la ley de la reflexión en forma vectorial es:

$$\hat{v}'' = \hat{v} - 2(\hat{n} \cdot \hat{v}) \hat{n} \quad (\text{A.8})$$

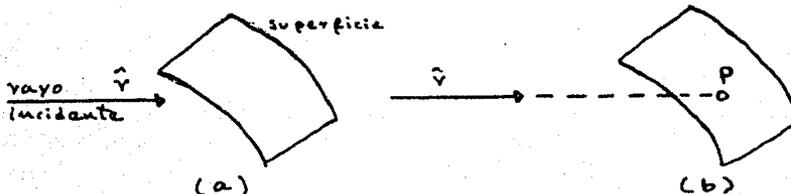
De esta expresión se puede conocer la dirección del rayo refla

jado \hat{v} " conociendo la dirección del rayo incidente \hat{v} y la normal a la superficie en el punto de incidencia.

A.3 TÉCNICA DEL TRAZO EXACTO DE RAYOS

Teniendo ya las leyes de reflexión y refracción en forma vectorial, el procedimiento seguido para hacer el trazo exacto de rayos es muy sencillo.

Lo primero que se hace es dar el punto de la superficie sobre el que incide el rayo original, éste es un problema geométrico que se resuelve conociendo la dirección del rayo incidente y la forma de la superficie. Luego, se encuentra la normal a la superficie en el punto de incidencia que también se obtiene conociendo la forma de la superficie. Finalmente, se aplica la ecuación (A.6) o (A.8) para encontrar la dirección del rayo refractado o reflejado según sea el caso. La figura A.3 muestra las etapas seguidas para el trazo de rayos. El proceso se repite si hay más reflexiones o refracciones. Naturalmente todo esto se hace utilizando técnicas de computación representando los vectores unitarios por sus componentes, es decir, por los cosenos directores de estos vectores con respecto a algún sistema de coordenadas usado para definir la forma de la superficie reflectora o refractora.



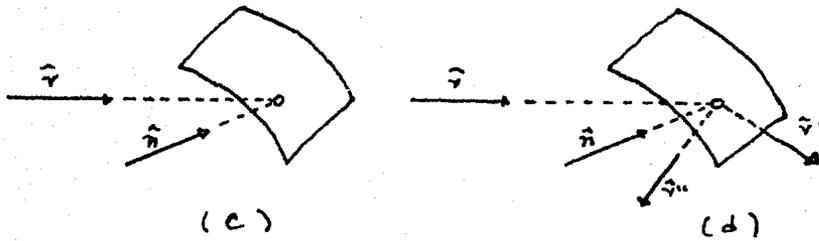


FIG. A.3 Las etapas en el trazo de rayos.
 (a) Se conocen la dirección del rayo incidente \vec{v} y la forma de la superficie.
 (b) se encuentra el punto de incidencia P
 (c) se calcula la normal \hat{n} en ese punto
 (d) aplicando la ec. (A.6) o (A.8) se encuentra el rayo refractado \vec{v}' , o el rayo reflejado \vec{v}'' según sea el caso.

A P E N D I C E B

TRAZO DE RAYOS PARA UNALENTE ESFERICO-PLANA CONCENTRANDO RAYOS PARALELOS AL EJE OPTICO

B.1 REFRACCION EN LA PRIMER SUPERFICIE

Dado que se está considerando que los rayos de incidencia son paralelos al eje optico de la lente, usando coordenadas cartesianas y haciendo coincidir la dirección X con él, - la dirección de cualquier rayo de incidencia será:

$$\hat{\gamma} = \hat{c} \quad (\text{B.1})$$

Dada la simetría, el trazo se puede hacer únicamente en el plano XY. Así, la ecuación del perfil esférico puede expresarse - en forma conveniente por la ecuación de un círculo de radio R con centro en el origen, es decir:

$$x^2 + y^2 = R^2 \quad (\text{B.2})$$

de modo que los puntos de incidencia serán de la forma

$$(\sqrt{R^2 - y^2}, y) \quad (\text{B.3})$$

La normal a la superficie en cada punto será en la dirección - radial, como muestra la figura B.1. Así, el vector normal uni-

tario en cada punto será:

$$\hat{n}_1 = \cos(\phi) \hat{z} - \text{Sen}(\phi) \hat{j} \quad (\text{B.4})$$

con la condición de que:

$$\cos(\phi) = \frac{\sqrt{R^2 - Y^2}}{R} \quad ; \quad \text{Sen}(\phi) = \frac{Y}{R}$$

así el vector normal unitario queda finalmente expresado como:

$$\hat{n}_1 = \sqrt{1 - \frac{Y^2}{R^2}} \hat{z} - \frac{Y}{R} \hat{j} \quad (\text{B.5})$$

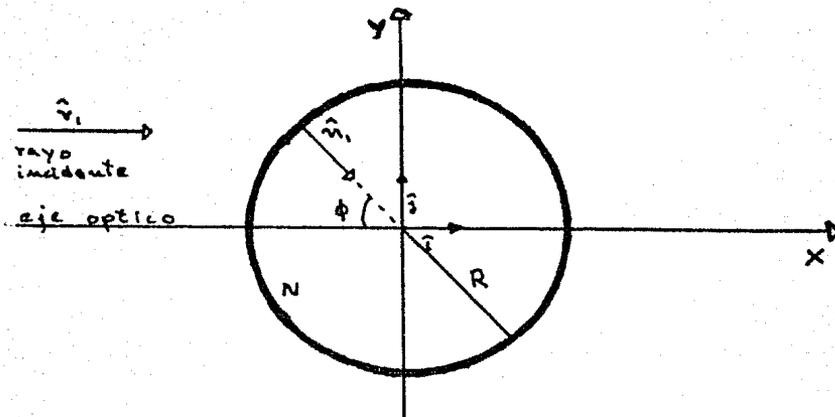


FIG. B.1 Refracción en una superficie esférica.

Así, teniendo ya \hat{r}_1 y \hat{n}_1 dados por las expresiones (B.1) y -- (B.5) y considerando que el medio de incidencia es aire $N_i = 1$ y el medio del que está hecha la lente tiene índice de refracción $N_t = N$, entonces en base a la expresión (A.6) del apéndice

anterior, la dirección del rayo transmitido queda expresada como:

$$\hat{Y}_1' = \frac{1}{N} \left[1 + \left(N \sqrt{1 - \frac{1}{N^2} + \frac{1}{N^2} \left(1 - \frac{Y^2}{R^2} \right)} - \sqrt{1 - \frac{Y^2}{R^2}} \right) \sqrt{1 - \frac{Y^2}{R^2}} \right] \hat{C} +$$

$$- \left[N \sqrt{1 - \frac{1}{N^2} + \frac{1}{N^2} \left(1 - \frac{Y^2}{R^2} \right)} - \sqrt{1 - \frac{Y^2}{R^2}} \right] \frac{Y}{NR} \hat{I} \quad (\text{B.6})$$

B.2 REFRACCION EN LA SEGUNDA SUPERFICIE

Para la refracción en la segunda superficie debe tomarse la dirección del rayo de incidencia igual a la dirección que traen los rayos refractados en la primera superficie, es decir

$$\hat{Y}_2 = \hat{Y}_1' \quad (\text{B.7})$$

siendo \hat{Y}_1' el vector dado por la expresión (B.6), y \hat{Y}_2 el vector unitario en la dirección del rayo incidente sobre la segunda superficie. Ahora bien, dado que la segunda superficie es plana, en cualquier punto de incidencia la normal a la superficie será

$$\hat{N}_2 = \hat{C} \quad (\text{B.8})$$

Usando de nuevo la expresión (A.6) para la ley de Snell y considerando ahora $N_i = N$ y $N_t = 1$ pues en este caso los rayos van de la lente al aire, se encuentra que la dirección del rayo

yo emergente de la lente (ver figura B.2)

$$\hat{Y}_2' = N \hat{Y}_2 + \left[\sqrt{1 - N^2 + N^2 (\hat{n}_z \cdot \hat{Y}_2)^2} - N (\hat{n}_z \cdot \hat{Y}_2) \right] \hat{M}_z \quad (\text{B.9})$$

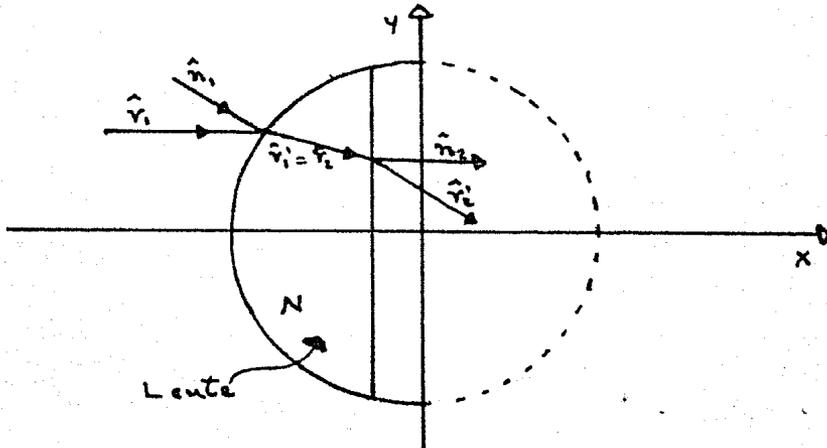


FIG. B.2 Esquema mostrando todos los vectores unitarios que intervienen en el trazo de rayos a través de una lente esférico-plana.

sustituyendo en esta expresión las expresiones (B.6), (B.7) y (B.8), y cancelando y reagrupando términos se obtiene que el rayo emergente queda finalmente expresado por la ecuación

$$\hat{Y}_2' = \sqrt{1 - N^2 + \frac{1}{N^2} \left[\frac{1}{N} + \left(\sqrt{1 - \frac{1}{N^2} + \frac{1}{N^2} \left(1 - \frac{Y^2}{R^2} \right)} - \frac{1}{N} \sqrt{1 - \frac{Y^2}{R^2}} \right) \sqrt{1 - \frac{Y^2}{R^2}} \right]^2} \hat{e}_x +$$

$$- \left[N \sqrt{1 - \frac{1}{N^2} + \frac{1}{N^2} \left(1 - \frac{Y^2}{R^2} \right)} - \sqrt{1 - \frac{Y^2}{R^2}} \right] \frac{Y}{NR} \hat{e}_y \quad (\text{B.10})$$

B.3 PROGRAMA PARA EL TRAZO DE RAYOS ESPECIFICADO

Para hacer el programa que realice el trazo de rayos hay que hacer lo siguiente: dado un rayo paralelo al eje óptico de la lente incidiendo sobre la superficie esférica a alguna altura y medida desde su eje, encontrar a que altura de la superficie plana incide, y finalmente a que altura incide sobre una pantalla plana perpendicular al eje de la lente y colgada a una distancia P de la superficie plana de la lente.

Aquí se expresarán estas cantidades como función de la altura inicial de un rayo y , y el número- f ($f/\#$) de la lente. Para ésto hay que especificar las características de la lente, tales como su diámetro, su espesor, su distancia focal paraxial, su radio de curvatura etc., todo como función de su $f/\#$. Dado que el $f/\#$ de una lente se define como el cociente de su distancia focal paraxial f entre su diámetro D , es conveniente para el desarrollo del programa fijar el diámetro de la lente y dejar libre la distancia focal. Con ésto no se pierde generalidad en los resultados obtenidos.

Así, se tomará para mayor simplicidad un diámetro $D=2$, de modo que de la definición de $f/\#$ que denotaremos por F , se obtiene que la distancia focal de la lente es:

$$f = 2F \quad (B.11)$$

Si se usa además la definición de la distancia focal en la región paraxial dada por la ecuación (2.1.4), entonces como para

ésta lente $n_2 = N$, $n_m = 1$, $r_1 = R$ y $r_2 \rightarrow \infty$, se tendrá que;

$$\frac{1}{f} = (N - 1) \frac{1}{R} \quad (\text{B.12})$$

despejando R de esta ecuación y sustituyendo (B.11) se tiene:

$$R = (N - 1) 2F \quad (\text{B.13})$$

que es la expresión para el radio de curvatura de la superficie esférica de la lente. El espesor E de la lente se puede encontrar en la misma forma como función de la altura Y , en base a la figura B.3.

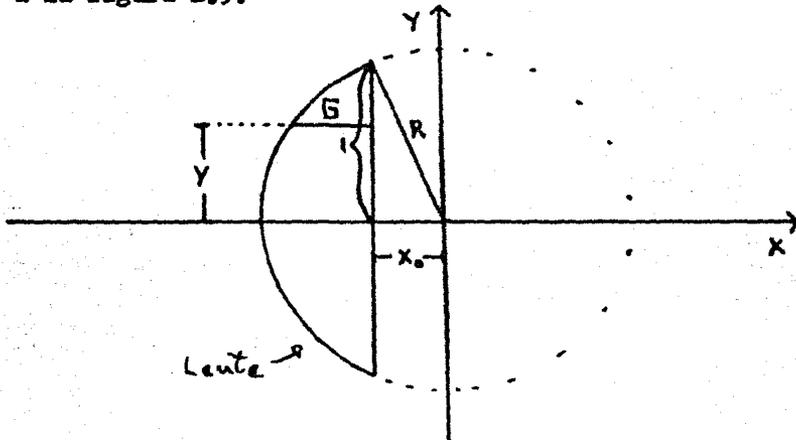


FIG. B.3 Lente esférico-plana con diámetro de magnitud $2Y$, - radio de curvatura R y espesor E que depende de la altura Y .

Puede observarse de ésta figura que;

$$x_0 = \sqrt{R^2 - 1} \quad (\text{B.14})$$

entonces el espesor dado por $G = x - x_0$, siendo x un punto sobre la superficie esférica de la lente, queda expresado en función de la altura Y , como:

$$G = \sqrt{R^2 - Y^2} - \sqrt{R^2 - 1} \quad (\text{B.15})$$

Para calcular la altura Y_2 a la que incide sobre la superficie plana un cierto rayo después de refractarse en la superficie esférica se usa la figura B.4

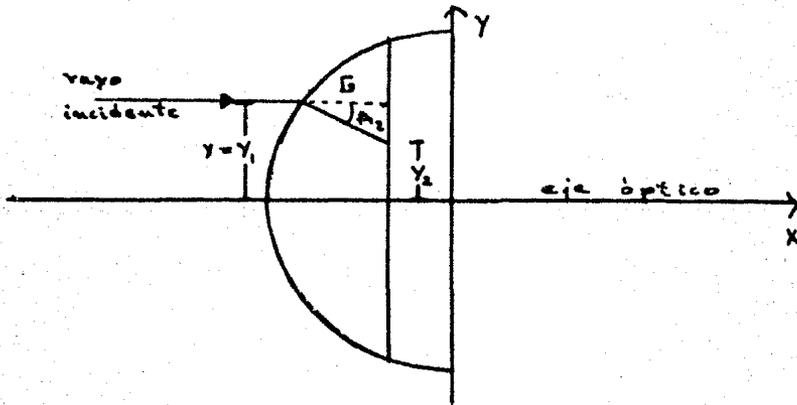


FIG. B.4. Altura a la cual incide un rayo sobre la segunda superficie de una lente esférico plana.

como se puede ver de ésta,

$$\tan(A_2) = \frac{Y - Y_2}{G} \quad (\text{B.16})$$

donde el ángulo A_2 es el ángulo que hace el rayo transmitido a la lente con su eje óptico, dado por

$$\cos(A_2) = \hat{r}_1 \cdot \hat{i} \quad (\text{B.17})$$

siendo \hat{r}_1 el vector unitario dado por la expresión (B.6). Así:

$$A_2 = \arccos \left[\frac{1}{N} \left\{ 1 + \left(N \sqrt{1 - \frac{1}{N^2} + \frac{1}{N^2} \left(1 - \frac{Y^2}{R^2} \right)} - \sqrt{1 - \frac{Y^2}{R^2}} \right) \sqrt{1 - \frac{Y^2}{R^2}} \right\} \right] \quad (\text{B.18})$$

de modo que despejando Y_2 de (B.16) se tiene:

$$Y_2 = Y \mp \left[\tan(A_2) \right] \quad (\text{B.19})$$

El signo negativo de ésta expresión se toma si Y es positiva y el signo positivo si Y es negativa, con lo cual se toman en cuenta todos los rayos que incidan sobre la lente.

Finalmente para calcular la altura Y_3 a la que incide un rayo emergente sobre la pantalla, se usa la figura B.5

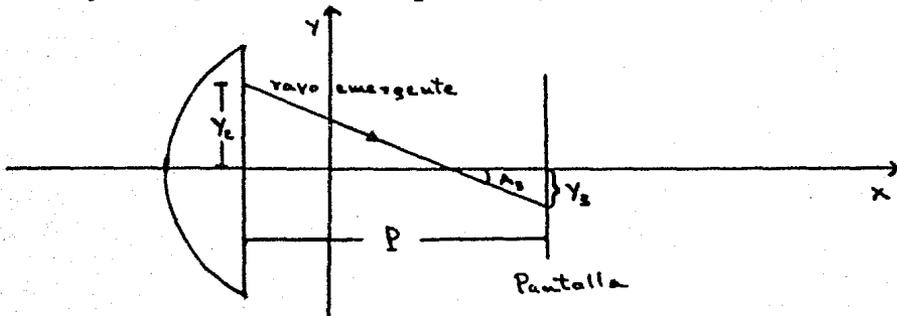


FIG. B.5 Altura Y_3 a la cual incide un rayo emergente de la lente esférico-plana, sobre una pantalla colocada a una distancia P de la superficie plana.

En base a esta figura se tiene que :

$$\tan(A_3) = \frac{Y_2 - Y_3}{P} \quad (\text{B.20})$$

si $y > 0$ y:

$$\tan(A_3) = \frac{Y_3 - Y_2}{P} \quad (\text{B.21})$$

si $y < 0$, es decir:

$$Y_3 = Y_2 \mp P \tan(A_3) \quad (\text{B.22})$$

tomando la misma convención de signos que para la ec. (B.19).

El ángulo A_3 es el ángulo que hace el rayo emergente con el eje óptico de la lente, por lo que éste está dado como:

$$\cos(A_3) = \hat{Y}_2' - \hat{C} \quad (\text{B.23})$$

con \hat{Y}_2' dado por la expresión (B.10), de modo que:

$$A_3 = \arccos \left[1 - N^2 + N^2 \left\{ \frac{1}{N} + \left[1 - \frac{1}{N^2} + \frac{1}{N^2} \left(1 - \frac{Y^2}{R^2} \right) - \frac{1}{N} \sqrt{1 - \frac{Y^2}{R^2}} \right] \sqrt{1 - \frac{Y^2}{R^2}} \right\}^2 \right] \quad (\text{B.24})$$

Con esto tenemos dadas todas las cantidades necesarias para el trazo de rayos en función de la altura de incidencia de un rayo sobre la lente, el $f/\#$ de ésta y su índice de refracción.-- El programa 1 mostrado en la última página de éste apéndice se ha hecho en lenguaje basic. Hay que señalar que en éste programa

se ha tomado $S = f$, $\gamma = \gamma_0$. Para correr el programa hay que dar como datos iniciales el número-f = F de la lente, el índice de refracción y la distancia P a la que se encuentra la - pantalla que se tomará casi siempre como $P = S$. Con estos datos el programa grafica la lente y calcula; dada una altura del rayo de incidencia como se refracta a través de la lente.

```

1000 INPUT F,N,P
2000 S=2*F
3000 R=(N-1)*2*F
4000 WINDOW -(R+0.2),17*9/16-(R+0.2),-17*9/32/1.3,17*9/32/1.3
5000 AXIS @1:1,1
6000 MOVE @1:-R,0
7000 FOR X=-R TO -SQR(R^2-1) STEP 0.0025
8000 DRAW @1:X,SQR(R^2-X^2)
9000 NEXT X
10000 FOR X=-SQR(R^2-1) TO -R STEP -0.0025
11000 DRAW @1:X,-SQR(R^2-X^2)
12000 NEXT X
13000 FOR Y1=-1 TO 1 STEP 0.1
14000 G=SQR(R^2-Y1^2)-SQR(R^2-1)
15000 B=SQR(1-Y1^2/R^2)
16000 C=SQR(1-1/N^2+B^2/N^2)-B/N
17000 D=-C*Y1/R
18000 A2=ACS(1/N+C*SQR(1-Y1^2/R^2))
19000 A3=ACS(SQR(1-N^2+N^2*(1/N+C*SQR(1-Y1^2/R^2))^2))
20000 Y2=Y1-SGN(Y1)*G*TAN(A2)
21000 Y3=Y2-SGN(Y1)*F*TAN(A3)
22000 MOVE @1:-R+0.1*R,Y1
23000 DRAW @1:-SQR(R^2-Y1^2),Y1
24000 DRAW @1:-SQR(R^2-1),Y2
25000 DRAW @1:F-SQR(R^2-1),Y3
26000 NEXT Y1
27000 END

```

PROGRAMA 1

- 131 -

A P E N D I C E C

TRAZO DE RAYOS PARA UNA LENTE ESFERICA PLANA TOMANDO EN CUENTA LA EXTENSION ANGULAR DEL SOL

Las ecuaciones desarrolladas en este caso son básicamente las mismas que en el apéndice anterior, con la diferencia de que ahora los rayos incidentes tienen cierta inclinación. Se considerarán solamente los rayos que provienen de los bordes del sol, que son los que determinan el tamaño de la imagen. Usando de nuevo coordenadas cartesianas el vector unitario que da la dirección de cualquiera de estos rayos está dado por:

$$\hat{r}_i = \cos(\theta) \hat{i} \mp \sin(\theta) \hat{j} \quad (C.1)$$

suponiendo que el eje X coincide con el eje óptico de la lente y éste está alineado con el centro del sol. En esta expresión el signo superior e inferior corresponden a las direcciones de los rayos que provienen del borde superior e inferior del sol respectivamente, como muestra la figura C.1

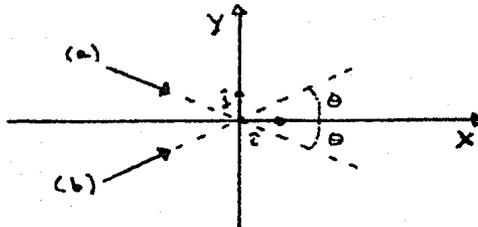


FIG. C.1 (a) Rayo que proviene del extremo superior del sol.
 (b) Rayo que proviene del extremo inferior del sol.
 $2\theta =$ extensión angular del sol.

A partir de aquí, todo el desarrollo es el mismo que el hecho en el apéndice B, por lo tanto solo se darán las expresiones necesarias.

La normal a la primer superficie está dada nuevamente por

$$\hat{n}_1 = \sqrt{1 - \frac{Y^2}{R^2}} \hat{i} - \frac{Y}{R} \hat{j} \quad (C.2)$$

Usando la ec. (A.6) para la ley de Snell y las ecuaciones (C.1) y (C.2) se obtiene que la dirección del rayo transmitido a la lente después de refractarse en la primer superficie es:

$$\hat{Y}_1' = \hat{i} \left\{ \frac{\cos(\theta)}{N} + \left[\sqrt{1 - \frac{1}{N^2} + \frac{1}{N^2} \left(\cos(\theta) \sqrt{1 - \frac{Y^2}{R^2}} \pm \text{Sen}(\theta) \frac{Y}{R} \right)^2} + \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{N} \left(\cos(\theta) \sqrt{1 - \frac{Y^2}{R^2}} \pm \text{Sen}(\theta) \frac{Y}{R} \right) \right] \sqrt{1 - \frac{Y^2}{R^2}} \right\} + \hat{j} \left\{ \mp \frac{\text{Sen}(\theta)}{N} + \right. \\ \left. - \left[\sqrt{1 - \frac{1}{N^2} + \frac{1}{N^2} \left(\cos(\theta) \sqrt{1 - \frac{Y^2}{R^2}} \pm \text{Sen}(\theta) \frac{Y}{R} \right)^2} - \frac{1}{N} \left(\cos(\theta) \sqrt{1 - \frac{Y^2}{R^2}} \pm \text{Sen}(\theta) \frac{Y}{R} \right) \right] \frac{Y}{R} \right\} \quad (C.3)$$

para simplificar esta ecuación, se define

$$B = \cos(\theta) \sqrt{1 - \frac{Y^2}{R^2}} \pm \text{Sen}(\theta) \frac{Y}{R} \quad (C.4)$$

sustituyendo esta expresión en (C.3) se tiene:

$$\hat{Y}_1' = \hat{i} \left\{ \frac{\cos(\theta)}{N} + \left[\sqrt{1 - \frac{1}{N^2} + \frac{B^2}{N^2}} - \frac{B}{N} \right] \sqrt{1 - \frac{Y^2}{R^2}} \right\} + \\ + \hat{j} \left\{ \mp \frac{\text{Sen}(\theta)}{N} - \left[\sqrt{1 - \frac{1}{N^2} + \frac{B^2}{N^2}} - \frac{B}{N} \right] \frac{Y}{R} \right\} \quad (C.5)$$

si además se define

$$C = \sqrt{1 - \frac{1}{N^2} + \frac{B^2}{N^2}} - \frac{B}{N} \quad (C.6)$$

se simplifica todavía más la expresión, quedando finalmente:

$$\hat{\gamma}_1' = \hat{c} \left[\frac{\cos(\theta)}{N} + c \sqrt{1 - \frac{y^2}{R^2}} \right] + \hat{j} \left[\frac{\sin(\theta)}{N} - c \frac{y}{R} \right] \quad (C.7)$$

Analógicamente para la refracción en la superficie -- plana se tiene que $\hat{n}_2 = \hat{i}$ y $\hat{\gamma}_2 = \hat{\gamma}_1'$, de modo que usando ésto y de nuevo la ec. (A.6) se obtiene que la dirección del rayo emergente de la lente es:

$$\hat{\gamma}_2 = \left[\sqrt{1 - N^2 + N^2 \left(\frac{\cos(\theta)}{N} + c \sqrt{1 - \frac{y^2}{R^2}} \right)^2} \right] \hat{i} + N \left[\frac{\sin(\theta)}{N} - \frac{cy}{R} \right] \hat{j} \quad (C.8)$$

En base a estas ecuaciones, las alturas de los rayos sobre la superficie plana de la lente y sobre la pantalla colocada a la distancia φ de ésta, pueden ser calculadas. Así, la altura y_2 a la cual incide un rayo sobre la superficie plana de la lente es de nuevo

$$y_2 = y \mp \varphi \tan(A_2) \quad (C.9)$$

con A_2 dado en base a la ec. (C.7), por:

$$\cos(A_2) = \hat{i} \cdot \hat{\gamma}_1' = \frac{\cos(\theta)}{N} + c \sqrt{1 - \frac{y^2}{R^2}} \quad (C.10)$$

y con φ dado por la expresión (B.15). Del mismo modo, la al-

tura Y_3 a la cual un rayo emergente de la lente incide sobre la pantalla es:

$$Y_3 = Y_2 \mp P \tan(A_3) \quad (C.11)$$

en donde usando (C.8) se tiene que:

$$\cos(A_3) = \hat{i} \cdot \hat{y}_2 = \sqrt{1 - N^2 + N^2 \left(\frac{\cos(\theta)}{N} + C \sqrt{1 - \frac{Y^2}{R^2}} \right)^2} \quad (C.12)$$

Con estas ecuaciones se construye el programa 2 que es mostrado en la siguiente página, que hará el trazo de rayos en este caso. En el programa se ha tomado $\theta = A_1 = .005$ y que es el semiángulo que subtiende el sol.

```

1000 INPUT F,N,P
2000 READ A1
3000 DATA 0.005
4000 S=I*F
5000 R=(N-1)*2*F
6000 WINDOW -(R+0.2),17*S/16-(R+0.2),-17*S/32/1.3,17*S/32/1.3
7000 AXIS @1:1,1
8000 MOVE @1:-R,0
9000 FOR X=-R TO -SQR(R^2-1) STEP 0.0025
10000 DRAW @1:X,SQR(R^2-X^2)
11000 NEXT X
12000 FOR X=-SQR(R^2-1) TO -R STEP -0.0025
13000 DRAW @1:X,-SQR(R^2-X^2)
14000 NEXT X
15000 FOR I=-1 TO 1 STEP 2
16000 FOR Y1=-1 TO 1 STEP 0.1
17000 G=SQR(R^2-Y1^2)-SQR(R^2-1)
18000 H=COS(A1)*SQR(1-Y1^2/R^2)-I*SIN(A1)*Y1/R
19000 C=SQR(1-1/N^2+H^2/N^2)-B/N
20000 D=I*SIN(A1)/N-C*Y1/R
21000 A2=ACS(COS(A1)/N+C*SQR(1-Y1^2/R^2))
22000 A3=ACS(SQR(1-N^2/N^2)*(COS(A1)/N+C*SQR(1-Y1^2/R^2))^2)
23000 Y2=Y1-SGN(Y1)*G*TAN(A2)
24000 Y3=Y2-SGN(Y1)*H*TAN(A3)
25000 MOVE @1:-(R+0.1)*R,Y1
26000 DRAW @1:-SQR(R^2-Y1^2),Y1
27000 DRAW @1:-SQR(R^2-1),Y2
28000 DRAW @1:F-SQR(R^2-1),Y3
29000 NEXT Y1
30000 NEXT I
31000 END

```

A P E N D I C E D

TRAZO DE RAYOS PARA UN ESPEJO PARABOLICO

Para describir el perfil del espejo parabólico, es conveniente usar la ecuación de una parábola en el caso más sencillo, en coordenadas cartesianas con su eje focal paralelo al eje X y vértice en el origen (0,0), la cual es:

$$Y^2 = 4PX \quad (D.1)$$

si se toma $P > 0$, la parábola se abrirá hacia la derecha como muestra la figura D.1. El foco de la parábola tiene coordenadas (P,0).

Para utilizar la ley de la reflexión en forma vectorial hay que especificar el vector normal \hat{n} a la superficie de la parábola en cada punto. Esto es sencillo, usando el cálculo diferencial ya que la pendiente de una recta tangente a la curva en un punto es

$$\tan(\alpha) = \frac{dy}{dx} \quad (D.2)$$

ahora bien, usando la expresión (D.1) para tomar la derivada se tiene que:

$$\tan(\alpha) = \pm \frac{2P}{\sqrt{4PX}} = \frac{2P}{Y} \quad (D.3)$$

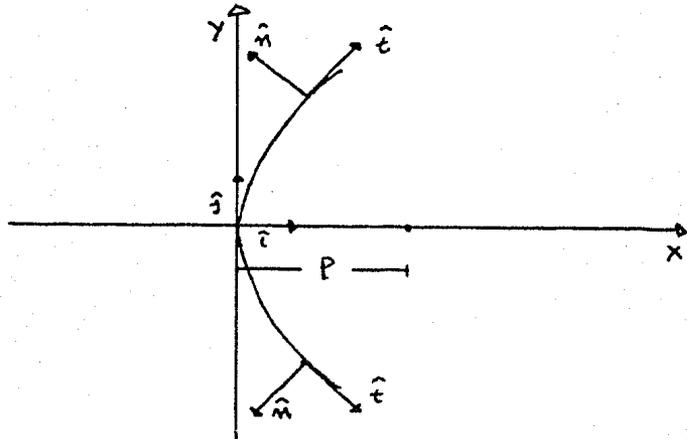


FIG. D.1 Perfil de un espejo parabólico mostrando un vector normal \hat{n} y un vector \hat{t} en dos puntos sobre éste.

Así, un vector tangente a la parábola en un punto es:

$$\hat{t} = \hat{i} \cos(\alpha) \pm \hat{j} \text{Sen}(\alpha) \quad (D.4)$$

siendo α el ángulo dado por la expresión (D.3). El signo superior se toma para puntos sobre la parte superior de la parábola y el signo inferior para puntos sobre la parte inferior. Ahora bien, es posible expresar al vector \hat{t} como función únicamente de la coordenada y . Para esto, de la expresión dada por (D.3) manipulándola obtenemos que:

$$\text{Sen}(\alpha) = \frac{2P}{\sqrt{y^2 + 4P^2}} \quad (D.5)$$

y también que

$$\cos(\alpha) = \frac{|Y|}{\sqrt{Y^2 + 4P^2}} \quad (D.6)$$

sustituyendo estas dos ultimas expresiones en (D.4) obtenemos;

$$\hat{e} = \frac{|Y|}{\sqrt{Y^2 + 4P^2}} \hat{c} + \frac{2P}{\sqrt{Y^2 + 4P^2}} \hat{j} \quad (D.7)$$

dado este vector tangente, el vector normal será el mostrado en la figura D.1 tal que $\hat{n} \cdot \hat{e} = 0$, o sea:

$$\hat{n} = - \frac{2P}{\sqrt{Y^2 + 4P^2}} \hat{c} + \frac{|Y|}{\sqrt{Y^2 + 4P^2}} \hat{j} \quad (D.8)$$

finalmente, usando el hecho de que $|Y| = \pm Y$ y definiendo

$$B = \sqrt{Y^2 + 4P^2} \quad (D.9)$$

el vector normal se puede expresar como:

$$\hat{n} = - \frac{2P}{B} \hat{c} + \frac{Y}{B} \hat{j} \quad (D.10)$$

Ahora, considerando rayos meridionales provenientes del sol, suponiendo que éste está centrado con el eje óptico del espejo (eje focal de la parábola), los rayos del sol provenientes de los bordes superior e inferior, y que son los que determinarán el tamaño de la imagen de éste, están dados por el vector unitario:

$$\hat{\gamma} = -\hat{i} \cos(\theta) \mp \text{sen}(\theta) \hat{j} \quad (\text{D.11})$$

en donde $\theta = 0.05$ rad. y debe tomarse el signo superior para los rayos que provienen de la parte superior del sol, y el inferior para los que vienen de la parte inferior.

Usando la expresión (A.8) para la ley de la reflexión y las expresiones (D.10) y (D.11) se tiene que la dirección de los rayos reflejados estará dada por

$$\hat{\gamma}'' = \left[-\cos(\theta) + \frac{4P}{B} \left(\cos(\theta) \frac{zP}{B} \mp \text{Sen}(\theta) \frac{Y}{B} \right) \right] \hat{i} + \left[\mp \text{Sen}(\theta) - \frac{2Y}{B} \left(\cos(\theta) \frac{zP}{B} \mp \text{Sen}(\theta) \frac{Y}{B} \right) \right] \hat{j} \quad (\text{D.12})$$

Ahora bien para hacer el programa que haga el trazo de rayos, hay que calcular la altura a la cual un rayo reflejado en el espejo parabólico intersecta a una pantalla colocada en el plano focal P.

Según muestra la figura D.2, para rayos reflejados -

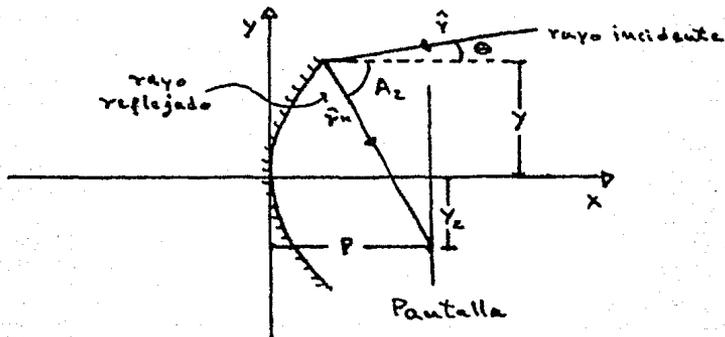


FIG. D.2 Rayo reflejado incidiendo sobre una pantalla a una altura y_2 .

en la parte superior del espejo se tiene que $\tan(A_2) = \frac{Y - Y_2}{P - X}$ en donde $X = \frac{Y^2}{4P}$ de donde:

$$Y_2 = Y - \left(P - \frac{Y^2}{4P}\right) \tan(A_2) \quad (D.13)$$

y para rayos reflejados en la parte inferior es fácil ver que:

$$Y_2 = Y + \left(P - \frac{Y^2}{4P}\right) \tan(A_2) \quad (D.14)$$

así, finalmente Y_2 se podrá expresar como:

$$Y_2 = Y - \text{SGN}(Y) \left(P - \frac{Y^2}{4P}\right) \tan(A_2) \quad (D.15)$$

donde $\text{SGN}(Y)$ es el signo de Y . El ángulo A_2 es el ángulo que hace un rayo reflejado con el eje X y está dado por:

$$\cos(A_2) = \cos(\theta) \left(\frac{BP^2}{B^2} - 1\right) \mp \text{Sen}(\theta) \frac{4PY}{B^2} \quad (D.16)$$

así, el programa es el mostrado en la página siguiente. Se ha hecho el trazo de rayos para varios $f/\#$ del espejo, denotando $f/\# = F$, $\theta = A_1$, $Y = Y_1$, y fijando el diámetro del espejo como $D=2$.

```

400 INPUT F
500 READ A1
600 DATA 0.005
700 P=2*F
800 WINDOW 0,P,-P/2.6,P/2.6
900 AXIS @1:0.25,0.25
1000 MOVE @1:0,0
1100 FOR X=0 TO 1/(4*P) STEP 0.005
1200 DRAW @1:X,SQR(4*P*X)
1300 NEXT X
1400 MOVE @1:0,0
1500 FOR X=0 TO 1/(4*P) STEP 0.005
1600 DRAW @1:X,-SQR(4*P*X)
1700 NEXT X
1800 FOR I=-1 TO 1 STEP 2
1900 FOR Y1=-1 TO 1 STEP 0.1
2000 B=SQR(Y1^2+4*P^2)
2100 A2=ACOS((B*P^2/B^2-1)*COS(A1)-I*4*P*Y1*SIN(A1)/B^2)
2200 IF Y1=0 THEN 2500
2300 Y2=Y1-SGN(Y1)*(P-Y1^2/(4*P))*TAN(A2)
2400 GO TO 2600
2500 Y2=-P*I*TAN(A2)
2600 PRINT @5:1,Y1,Y2,A2
2700 MOVE @1:Y1^2/(4*P),Y1
2800 DRAW @1:P,Y2
2900 NEXT Y1
3000 NEXT I

```

A P E N D I C E

CALCULO DEL COCIENTE DE LAS AREAS PARA LOS DISTINTOS SISTEMAS OPTICOS.

Para calcular el área de la superficie se los distintos sistemas ópticos se seguirá el siguiente procedimiento basado en el cálculo diferencial: en el caso de concentradores 2D lo que se hace básicamente es calcular la longitud de la curva que forma el perfil del concentrador y multiplicarla por el -- largo que denotaremos por S en todos los casos. Para ésto nos basaremos en la fórmula para la longitud de una curva en un -- plano dada por

$$l = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx \quad (E.1)$$

(Courant, Vol. I). Para el caso de concentradores 3D los cuales en general son superficies de revolución, se usará la fórmula para el área de una superficie de revolución, que en coordenadas cartesianas es:

$$A = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} x \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx \quad (E.2)$$

(courant, Vol. II). Por otro lado, supondremos que todos los -- concentradores 2D tienen una abertura de entrada de ancho $2a$ y de largo S , de modo que el área de la abertura de entrada

para todos los concentradores 2D el área de la abertura de entrada estará dada por:

$$A'_2 = 2as \quad (E.3)$$

Análogamente, supondremos que todos los concentradores tienen aberturas de entrada de radio a , para el caso 3D, de modo que el área de su abertura de entrada será:

$$A'_3 = \pi a^2 \quad (E.4)$$

Con estas fórmulas será inmediato expresar el cociente de las áreas para cada caso. A continuación haremos este cálculo para cada uno de los sistemas ópticos estudiados en el capítulo III.

E.1 CONCENTRADOR PARABOLICO

En este caso la ecuación que describe el perfil del canal en el caso 2D es la ecuación de la parábola:

$$y = \frac{x^2}{4f} \quad (E.5)$$

La figura E.1 muestra los parámetros que caracterizan al concentrador. Derivando la expresión anterior y sustituyendo en la fórmula (E.1) se obtiene:

$$l = 2 \int_0^a \sqrt{1 + \frac{x^2}{4P^2}} dx \quad (E.6)$$

reescribiendo esta integral y usando la fórmula (2.262) que viene al final del apéndice se tiene que:

$$l = \frac{x}{4P} \sqrt{4P^2 + x^2} \Big|_0^a + 2P \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{4P^2 + x^2}} \quad (E.7)$$

usando ahora la fórmula (2.261) y evaluando se obtiene:

$$l = \frac{a}{2P} \sqrt{4P^2 + a^2} + 2P \ln \left[\frac{\sqrt{4P^2 + a^2} + a}{2P} \right] \quad (E.8)$$

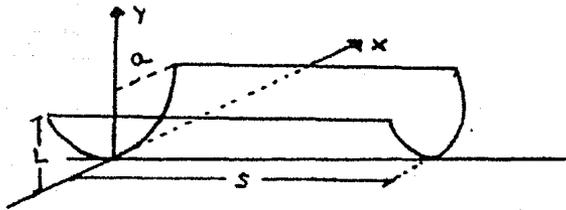


FIG. E.1 Concentrador parabólico 2D con longitud L , largo s y abertura de entrada de radio a .

Para los fines que se persiguen en el capítulo IV es conveniente expresar la longitud en función del $f/f = F$ y del radio a de la abertura de salida. Para ésto usamos la definición dada en el capítulo I para el factor de concentración en el caso 2D, dada por la ec. (1.2.4) y que es:

$$C = \frac{a}{a'} \quad (\text{E.9})$$

y la definición de $f/\# = F$, que en este caso resulta ser:

$$F = \frac{P}{2a} \quad (\text{E.10})$$

así, de estas dos últimas ecuaciones se tiene que:

$$P = 2a'cF \quad (\text{E.11})$$

sustituyendo (E.11) y (E.9) en (E.8), y haciendo un poco de álgebra se obtiene que:

$$l = \frac{ca'}{4F} \sqrt{16F^2 + 1} + 4a'cF \ln \left[\frac{\sqrt{16F^2 + 1} + 1}{4F} \right] \quad (\text{E.12})$$

si ahora denotamos por A_{2p} el área de la superficie del concentrador parabólico 2D, usando (E.12) se obtiene que:

$$A_{2p} = \frac{ca's}{4F} \sqrt{16F^2 + 1} + 4a'cFs \ln \left[\frac{\sqrt{16F^2 + 1} + 1}{4F} \right] \quad (\text{E.13})$$

Por otro lado si denotamos por A'_{2p} el área de la abertura de entrada de éste concentrador, sustituyendo la ecuación (E.9) en (E.3) se tendrá:

$$A'_{2p} = 2ca's \quad (\text{E.14})$$

Así, dividiendo la ec. (E.13) entre la ec.(E.14) se obtiene que el cociente de las áreas para el concentrador parabólico 2D, - que denotaremos por R_{2p} queda finalmente expresado como:

$$R_{2p} = \frac{1}{8F} \sqrt{16F^2 + 1} + 2F \ln \left[\frac{\sqrt{16F^2 + 1} + 1}{4F} \right] \quad (E.15)$$

Para el caso del concentrador parabólico 3D mostrado en la figura E.2, usando la ecuación de la parábola (E.5)

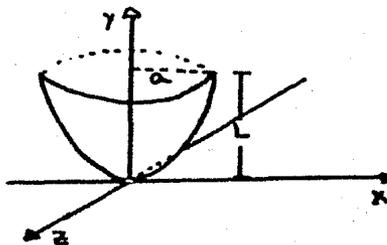


FIG.E.2 Concentrador parabólico 3D con abertura de entrada de radio a y longitud L .

nuevamente y la fórmula (E.2) para el área de la superficie de revolución se obtiene que el área de su superficie, denotada por A_{3p} es:

$$A_{3p} = 2\pi \int_0^a x \sqrt{1 + \frac{x^2}{4F^2}} dx \quad (E.16)$$

Esta integral es directa, de modo que integrando y evaluando obtenemos:

$$A_{3P} = \frac{8\pi}{3} P^2 \left[\left(1 + \frac{a^2}{4P^2} \right)^{3/2} - 1 \right] \quad (\text{E.17})$$

Nuevamente es conveniente dejar esta expresión en términos del radio de la abertura de salida a' y del $f/\# = F$. Para hacer esto usamos la definición del factor de concentración para un -- concentrador 3D dada por:

$$C = \left(\frac{a}{a'} \right)^2 \quad (\text{E.18})$$

usando ésta y (E.10) se obtiene que:

$$P^2 = 4F^2 C a'^2 \quad (\text{E.19})$$

Así, sustituyendo esta expresión en (E.17), se tendrá que el área del concentrador parabólico 3D es:

$$A_{3P} = \frac{32\pi}{3} F^2 C a'^2 \left[\left(1 + \frac{1}{16F^2} \right)^{3/2} - 1 \right] \quad (\text{E.20})$$

Para calcular el área de la abertura de entrada del concentrador parabólico 3D, denotada por A'_{3P} , sustituimos -- (E.18) en (E.4) y obtenemos:

$$A'_{3P} = \pi C a'^2 \quad (\text{E.21})$$

Finalmente, el cociente de las áreas R_{3P} para el concentrador

parabólico 3D quedará expresado como:

$$R_{3D} = \frac{3z}{3} F^2 \left[\left(1 + \frac{1}{16F^2} \right)^{3/2} - 1 \right] \quad (E.22)$$

Hay que señalar que aunque las expresiones (E.15) y (E.22) para el cociente de las áreas, en los casos 2D y 3D respectivamente, están dadas en función de F , no debemos olvidar que se tiene una ecuación del factor de concentración contra F , por lo tanto usando todas las ecuaciones, se puede conocer el cociente de las áreas como función del factor de concentración.

E.2 CONCENTRADOR CONICO

Para el concentrador cónico 2D es muy sencillo encontrar la longitud del perfil, pues se trata esencialmente de dos rectas (ver, figura E.3).

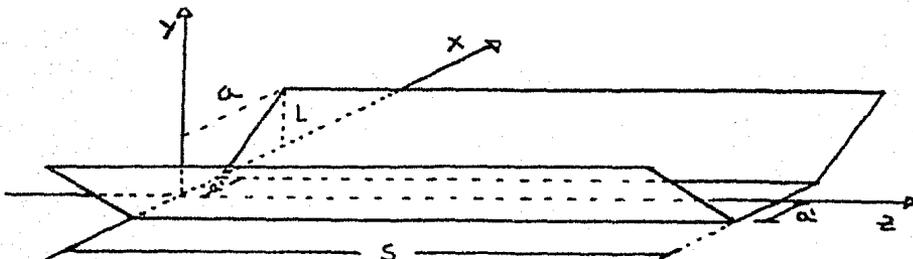


FIG. E.3 Concentrador cónico 2D

Es fácil ver de la figura que la longitud de las dos rectas que forman el perfil, juntas, es:

$$l = 2 \sqrt{L^2 + (a-a')^2} \quad (\text{E.23})$$

multiplicando esta ecuación por S y sustituyendo (E.9) se obtiene la expresión para el área de la superficie del concentrador cónico 2D denotada por A_{2c} , que es:

$$A_{2c} = 2S \sqrt{L^2 + a'^2(c-1)^2} \quad (\text{E.24})$$

si ahora se usa la expresión encontrada en el capítulo III para la longitud del cono

$$L = \frac{(a-a') \cos(\theta)}{\frac{a'}{a} - \text{Sen}(\theta)} \quad (\text{E.25})$$

y se sustituye de nuevo (E.9) en (E.25) y lo que resulte lo -- sustitufmos en (E.24) se obtiene finalmente

$$A_{2c} = 2sa'(c-1) \sqrt{\frac{c^2 \cos^2(\theta)}{(1-c \text{Sen}(\theta))^2} + 1} \quad (\text{E.26})$$

La expresión para el área de la abertura de entrada, es la misma que la que se encontró para el concentrador parabólico, es decir la ec. (E.14), de manera que el cociente R_{2c} para el -- concentrador cónico resulta ser:

$$R_{2c} = \frac{c-1}{c} \sqrt{\frac{c^2 \cos^2(\theta)}{(1-c \text{Sen}(\theta))^2} + 1} \quad (\text{E.27})$$

En el caso del concentrador cónico 3D, el perfil es nuevamente un segmento de recta cuya ecuación es:

$$y = m (x - a') \quad (\text{E.28})$$

donde la pendiente, como muestra la figura E.4 está dada por:

$$m = \tan(\phi) = \frac{L}{a - a'} \quad (\text{E.29})$$

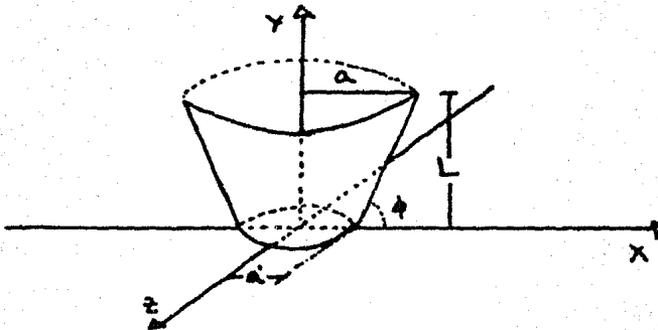


FIG. E.4 Concentrador cónico 3D.

entonces la ecuación del perfil es:

$$y = \frac{L}{a - a'} (x - a') \quad (\text{E.30})$$

usando la fórmula (E.2) se tiene que el área del concentrador cónico está dada por:

$$A_{3c} = 2\pi \int_{a'}^a x \sqrt{1 + \left(\frac{L}{a - a'}\right)^2} \quad (\text{E.31})$$

esta integral es directa, de modo que integrando y evaluando:

$$A_{3c} = \pi(a+a') \sqrt{L^2 + (a-a')^2} \quad (E.32)$$

usando de nuevo la expresión (E.25) para la longitud del cono y sustituyendo en ésta la ec. (E.18) se obtiene que:

$$L = \frac{a'(\sqrt{c}-1)\sqrt{c} \cos(\theta)}{1 - \sqrt{c} \operatorname{Sen}(\theta)} \quad (E.33)$$

sustituyendo ahora (E.33) y (E.18) en (E.32) obtenemos:

$$A_{3c} = \pi a'^2 (c-1) \sqrt{\frac{c \cos^2(\theta)}{(1 - \sqrt{c} \operatorname{Sen}(\theta))^2} + 1} \quad (E.34)$$

Para el área de la abertura de entrada podemos tomar la expresión (E.21), de manera que usando ésta y la expresión (E.34) es inmediato ver que el cociente de las áreas para el concentrador cónico 3D es:

$$R_{3c} = \frac{c-1}{c} \sqrt{\frac{c \cos^2(\theta)}{(1 - \sqrt{c} \operatorname{Sen}(\theta))^2} + 1} \quad (E.35)$$

Puede verse de las expresiones (E.27) y (E.35), que están expresadas en función únicamente del factor de concentración.

B.3 CONCENTRADOR PARABOLICO COMPUESTO

El perfil del concentrador parabólico compuesto tiene su expresión más sencilla en coordenadas esféricas, y fué dada en el capítulo III por la ecuación:

$$r = \frac{z f}{1 - \cos(\phi)} \quad (\text{B.36})$$

que puede escribirse también como:

$$r = \frac{f}{\text{Sen}^2(\phi/2)} \quad (\text{B.37})$$

La figura B.5 muestra los parámetros involucrados.

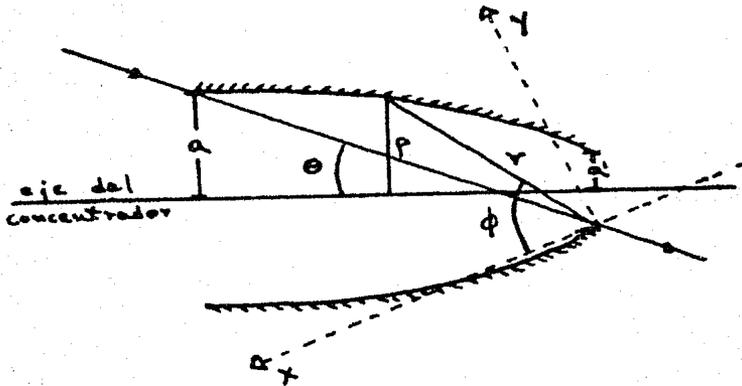


FIG. B.5 Sección transversal de un concentrador parabólico--compuesto.

Ahora bien, en el caso 2D, para calcular la longitud del perfil hay que usar la fórmula para la longitud de una curva en coordenadas polares dada por:

$$l = \int_{\phi_1}^{\phi_2} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2} d\phi \quad (E.38)$$

(Courant, Vol. I). Así, usando la expresión (E.37) para calcular la derivada y sustituyendo en (E.38) se obtiene que:

$$l = 2 \int_{\phi_1}^{\phi_2} \sqrt{\frac{f^2}{\text{Sen}^4(\phi/2)} + \frac{f^2 \cos^2(\phi/2)}{\text{Sen}^6(\phi/2)}} d\phi \quad (E.39)$$

en donde los límites de integración se encuentran en base a la figura E.5 y son: $\phi_1 = 2\theta$ y $\phi_2 = \theta + \frac{\pi}{2}$, siendo θ el ángulo de colección del concentrador. Si se multiplica esta expresión por S , y se simplifica, se obtendrá que el área de la superficie del concentrador parabólico compuesto 2D es:

$$A_{zpc} = 2Sf \int_{2\theta}^{\theta + \frac{\pi}{2}} \frac{1}{\text{Sen}^3(\phi/2)} d\phi \quad (E.40)$$

calculando esta integral haciendo uso de la fórmula (2.526)* y evaluando, se obtiene finalmente que:

$$A_{zpc} = 2Sf \left[\ln \left(\frac{\tan(\frac{\theta}{4} + \frac{\pi}{8})}{\tan(\theta/2)} - \frac{\cos(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4})}{\text{Sen}^2(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4})} + \frac{\cos(\theta)}{\text{Sen}(\theta)} \right) \right] \quad (E.41)$$

Es conveniente eliminar el parámetro f de esta ecuación. Pa-

* Todas las fórmulas integrales usadas aquí se dan al final del apéndice.

ra ésto sustituimos la ecuación (3.3.4) que es:

$$f = a' (1 + \text{Sen}(\theta)) \quad (\text{E.42})$$

en la ecuación (E.41), para finalmente obtener

$$A_{zpc} = 2a's(1 + \text{Sen}(\theta)) \left[\ln \left(\frac{\tan\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)}{\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)} \right) - \frac{\text{Cos}\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)}{\text{Sen}^2\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)} + \frac{\text{Cos}(\theta)}{\text{Sen}^2(\theta)} \right] \quad (\text{E.43})$$

Ahora bien, el área de la abertura de entrada en este caso está dada por (E.14), pero es conveniente sustituir en ésta la expresión para el factor de concentración del CPC 2D dada en el capítulo III por (3.3.31) y que es:

$$C = \frac{1}{\text{Sen}(\theta)} \quad (\text{E.44})$$

así, haciendo lo mencionado se obtiene que:

$$A'_{zpc} = \frac{2a's}{\text{Sen}(\theta)} \quad (\text{E.45})$$

de manera que el cociente de las áreas para el CPC 2D resulta ser:

$$R_{zpc} = \text{Sen}(\theta) (1 + \text{Sen}(\theta)) \left[\ln \left(\frac{\tan\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)}{\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)} \right) - \frac{\text{Cos}\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)}{\text{Sen}^2\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)} + \frac{\text{Cos}(\theta)}{\text{Sen}^2(\theta)} \right] \quad (\text{E.46})$$

Analogamente, para el CPC 3D, es conveniente usar la fórmula para el área de una superficie de revolución en coorde-

nadas polares (Courant, Vol.II), dada por:

$$A = 2\pi \int_{\phi_1}^{\phi_2} \rho \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2} d\phi \quad (E.47)$$

donde ρ , como se muestra en la figura E.5 está dada por:

$$\rho = r \operatorname{Sen}(\phi - \theta) - a' \quad (E.48)$$

sustituyendo ahora (E.37) en esta ecuación se obtiene:

$$\rho = \frac{f \operatorname{Sen}(\phi - \theta)}{\operatorname{Sen}^2(\phi/2)} - a' \quad (E.49)$$

así, ya que el término dentro de la raíz cuadrada de la expresión (E.47) es el mismo que el de la expresión (E.38) del caso anterior, sustituyendo (E.49) y los términos correspondientes en la ec.(E.47) se tiene que el área del CPC 2D está expresada como:

$$A_{3pc} = 2\pi \left[f^2 \int_{2\theta}^{\theta + \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{Sen}(\phi - \theta)}{\operatorname{Sen}^5(\phi/2)} d\phi - \int_{2\theta}^{\theta + \frac{\pi}{2}} \frac{a' f}{\operatorname{Sen}^3(\phi/2)} d\phi \right] \quad (E.50)$$

Con la finalidad de simplificar las integrales, desarrollando el seno de la diferencia y expresando $\cos(\phi) = 1 - 2\operatorname{Sen}^2(\frac{\phi}{2})$, se llega haciendo lo conveniente a que:

$$A_{3pc} = 2\pi \left[f^2 \cos(\theta) \int_{2\theta}^{\theta + \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{Sen}(\phi)}{\operatorname{Sen}^5(\phi/2)} d\phi - f^2 \operatorname{Sen}(\theta) \int_{2\theta}^{\theta + \frac{\pi}{2}} \frac{1}{\operatorname{Sen}^5(\phi/2)} d\phi + (2f^2 \operatorname{Sen}(\theta) - a' f) \int_{2\theta}^{\theta + \frac{\pi}{2}} \frac{1}{\operatorname{Sen}^3(\phi/2)} d\phi \right] \quad (E.51)$$

Haciendo las integrales anteriores usando las fórmulas que vienen al final del apéndice (2.542), (2.526)3. , (2.526)5. y evaluando se obtiene:

$$\begin{aligned}
 A_{3pc} = & 2\pi \left[\frac{-4f^2 \cos(\theta)}{3 \operatorname{Sen}^3\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)} + 2f^2 \operatorname{Sen}(\theta) \left\{ \frac{\cos\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)}{4 \operatorname{Sen}^4\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)} + \frac{3 \cos\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)}{8 \operatorname{Sen}^2\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)} + \right. \\
 & \left. - \frac{3}{8} \ln \left[\tan\left(\frac{\theta}{4} + \frac{\pi}{8}\right) \right] \right\} + (2f^2 \operatorname{Sen}(\theta) - a^2 f) \left(\frac{-\cos\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)}{\operatorname{Sen}^2\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)} + \ln \left[\tan\left(\frac{\theta}{4} + \frac{\pi}{8}\right) \right] \right) \right] \\
 & + 2\pi \left[\frac{-4f^2 \cos(\theta)}{3 \operatorname{Sen}^3(\theta)} + 2f^2 \operatorname{Sen}(\theta) \left(\frac{\cos(\theta)}{4 \operatorname{Sen}^4(\theta)} + \frac{3 \cos(\theta)}{8 \operatorname{Sen}^2(\theta)} - \frac{3}{8} \ln \left[\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] \right) + \right. \\
 & \left. + (2f^2 \operatorname{Sen}(\theta) - a^2 f) \left(\frac{-\cos(\theta)}{\operatorname{Sen}^2(\theta)} + \ln \left[\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] \right) \right]
 \end{aligned}$$

(B.52)

si en esta expresión se agrupan los términos con las mismas potencias de f y se sustituye la expresión (B.42) para la distancia focal se obtiene que el área de la superficie del concentrador parabólico compuesto 3D es:

$$\begin{aligned}
 A_{3pc} = & 2\pi a^2 (1 + \operatorname{Sen} \theta)^2 \left[-4 \cos(\theta) \left(\frac{1}{3 \operatorname{Sen}^3\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)} - \frac{1}{3 \operatorname{Sen}^3(\theta)} \right) + \right. \\
 & \left. + 2 \operatorname{Sen}(\theta) \left\{ \frac{\cos\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)}{4 \operatorname{Sen}^4\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)} + \frac{3 \cos\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)}{8 \operatorname{Sen}^2\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)} - \frac{3}{8} \ln \left[\tan\left(\frac{\theta}{4} + \frac{\pi}{8}\right) \right] \right\} + \right. \\
 & \left. + (2 \operatorname{Sen}(\theta) - a^2 f) \left(\frac{-\cos\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)}{\operatorname{Sen}^2\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)} + \ln \left[\tan\left(\frac{\theta}{4} + \frac{\pi}{8}\right) \right] \right) \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \frac{\cos\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)}{\text{Sen}^2\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)} + \ln\left[\tan\left(\frac{\theta}{4} + \frac{\pi}{8}\right)\right] - \frac{\cos(\theta)}{4\text{Sen}^2(\theta)} - \frac{3\cos(\theta)}{8\text{Sen}^2(\theta)} + \frac{3}{8} \ln\left[\tan\left(\frac{\theta}{4}\right)\right] + \\
 & + \left. \frac{\cos(\theta)}{\text{Sen}^2(\theta)} - \ln\left[\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right] \right\} + 2\pi a^2 (1 + \text{Sen}(\theta)) \left[\frac{\cos\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)}{\text{Sen}^2\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)} + \right.
 \end{aligned}$$

$$\left. - \ln\left[\tan\left(\frac{\theta}{4} + \frac{\pi}{8}\right)\right] - \frac{\cos(\theta)}{\text{Sen}^2(\theta)} + \ln\left[\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right] \right\}$$

(E.53)

Por otro lado, el área de la abertura de entrada está dada por la expresión (E.21), que usando la ecuación para el factor de concentración del CPC 3D, se puede escribir como:

$$A'_{3pc} = \frac{\pi a^2}{\text{Sen}^2(\theta)} \quad (E.54)$$

De estas dos expresiones se obtiene que el cociente de las áreas para el CPC en el caso 3D es:

$$\begin{aligned}
 R_{3pc} = & 2\text{Sen}^2(\theta)(1 + \text{Sen}(\theta))^2 \left[-4\cos(\theta) \left(\frac{1}{3\text{Sen}^3\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)} - \frac{1}{3\text{Sen}^3(\theta)} \right) + \right. \\
 & \left. 2\text{Sen}(\theta) \left\{ \frac{\cos\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)}{4\text{Sen}^4\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)} + \frac{3\cos\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)}{8\text{Sen}^2\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)} - \frac{3}{8} \ln\left[\tan\left(\frac{\theta}{4} + \frac{\pi}{8}\right)\right] + \right. \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{\cos\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)}{\sin^2\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)} + \ln\left[\tan\left(\frac{\theta}{4} + \frac{\pi}{8}\right)\right] - \frac{\cos(\theta)}{4\sin^4(\theta)} - \frac{3\cos(\theta)}{8\sin^2(\theta)} + \frac{3}{8} \ln\left(\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) + \\
& \left. + \frac{\cos(\theta)}{\sin^2(\theta)} - \ln\left[\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]\right\} + 2\sin^2(\theta)(1 + \sin(\theta)) \left[\frac{\cos\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)}{\sin^2\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)} + \right. \\
& \left. - \ln\left[\tan\left(\frac{\theta}{4} + \frac{\pi}{8}\right)\right] - \frac{\cos(\theta)}{\sin^2(\theta)} + \ln\left[\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right] \right] \quad (E.55)
\end{aligned}$$

Para el concentrador parabólico compuesto truncado las expresiones de las áreas son las mismas, excepto que hay que cambiar los límites de integración. En este caso los límites serán $\phi_1 = \phi_T$, $\phi_2 = \theta + \frac{\pi}{2}$, por lo tanto en el caso 2D el área del CPC truncado será:

$$A_{2per} = 2a'(1 + \sin(\theta))s \left[\ln\left[\frac{\tan\left(\frac{\theta}{4} + \frac{\pi}{8}\right)}{\tan\left(\frac{\phi_T}{4}\right)}\right] - \frac{\cos\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)}{\sin^2\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)} + \frac{\cos(\phi_T/2)}{\sin^2(\phi_T/2)} \right] \quad (E.56)$$

mientras que el área de su abertura de entrada estará dada por:

$$A'_{2per} = 2sa_T \quad (E.57)$$

donde a_T esta expresada por la ecuación (3.3.18), escrita a continuación:

$$a_T = \frac{a'(1 + \sin(\theta))\sin(\phi_T - \theta)}{\sin^2(\phi_T/2)} - a' \quad (E.58)$$

de modo que si sustituimos esta expresión en (E.57) y el resultado lo usamos para obtener el cociente de las áreas, se obtiene que la expresión para este cociente en el caso del CFC truncado 2D es:

$$R_{2pcr} = \frac{\text{Sen}^2(\phi_r/2) (1 + \text{Sen}(\theta))}{(1 + \text{Sen}(\theta)) \text{Sen}(\phi_r - \theta) - \text{Sen}^2(\phi_r/2)} \left[\ln \left(\frac{\tan(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4})}{\tan(\phi_r/4)} \right) + \right. \\ \left. - \frac{\cos(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4})}{\text{Sen}^2(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4})} + \frac{\cos(\phi_r/2)}{\text{Sen}^2(\phi_r/2)} \right] \quad (\text{E.59})$$

En el caso del CFC truncado 3D el área de su superficie es:

$$A_{3pcr} = 2\pi \left[\frac{-4f^2 \cos(\theta)}{3 \text{Sen}^3(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4})} + 2f^2 \text{Sen}(\theta) \left(\frac{\cos(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4})}{4 \text{Sen}^4(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4})} + \frac{3 \cos(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4})}{8 \text{Sen}^2(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4})} + \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{3}{8} \ln \left[\tan \left(\frac{\theta}{4} + \frac{\pi}{8} \right) \right] \right) + (2f^2 \text{Sen}(\theta) - a^2 f) \left(- \frac{\cos(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4})}{\text{Sen}^2(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4})} + \ln \left[\tan \left(\frac{\theta}{4} + \frac{\pi}{8} \right) \right] \right) \right] \\ - 2\pi \left[\frac{-4f^2 \cos(\theta)}{3 \text{Sen}^3(\phi_r/2)} + 2f^2 \text{Sen}(\theta) \left(\frac{\cos(\phi_r/2)}{4 \text{Sen}^4(\phi_r/2)} + \frac{3 \cos(\phi_r/2)}{8 \text{Sen}^2(\phi_r/2)} + \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{3}{8} \ln \left[\tan \left(\phi_r/4 \right) \right] \right) + (2f^2 \text{Sen}(\theta) - a^2 f) \left(\frac{-\cos(\phi_r/2)}{\text{Sen}^2(\phi_r/2)} + \ln \left[\tan \left(\phi_r/4 \right) \right] \right) \right] \quad (\text{E.60})$$

así, agrupando los términos con las mismas potencias de f y sustituyendo la expresión (E.42) se obtiene que:

$$\begin{aligned}
 A_{3\text{PET}} &= 2\pi a^2 (1 + \sin(\theta))^2 \left[\frac{-4 \cos(\theta)}{3 \sin^2(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4})} + \frac{4 \cos(\theta)}{3 \sin^2(\frac{\theta}{2})} + 2 \sin(\theta) \left(\frac{\cos(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4})}{4 \sin^2(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4})} + \right. \right. \\
 &\left. \left. \frac{3 \cos(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4})}{8 \sin^2(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4})} - \frac{3}{8} \ln \left[\tan \left(\frac{\theta}{4} + \frac{\pi}{8} \right) \right] - \frac{\cos(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4})}{\sin^2(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4})} + \ln \left[\tan \left(\frac{\theta}{4} + \frac{\pi}{8} \right) \right] + \right. \\
 &\left. - \frac{\cos(\frac{\theta}{2})}{4 \sin^4(\frac{\theta}{2})} - \frac{3 \cos(\frac{\theta}{2})}{8 \sin^2(\frac{\theta}{2})} + \frac{3}{8} \ln \left[\tan \left(\frac{\theta}{4} \right) \right] + \frac{\cos(\frac{\theta}{2})}{\sin^2(\frac{\theta}{2})} + \right. \\
 &\left. \left. - \ln \left[\tan \left(\frac{\theta}{4} \right) \right] \right\} + 2\pi a^2 (1 + \sin(\theta)) \left[\frac{\cos(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4})}{\sin^2(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4})} - \ln \left[\tan \left(\frac{\theta}{4} + \frac{\pi}{8} \right) \right] + \right. \\
 &\left. \left. - \frac{\cos(\frac{\theta}{2})}{\sin^2(\frac{\theta}{2})} + \ln \left[\tan \left(\frac{\theta}{4} \right) \right] \right] \quad (E.61)
 \end{aligned}$$

El área de la abertura de entrada esta dada en este caso por la expresión:

$$A_{3\text{PET}}^1 = \pi a^2 \quad (E.62)$$

sustituyendo en esta expresión (E.58) y dividiendo (E.61) entre el resultado, se obtiene finalmente que el cociente de -- las áreas para el CPC 3D está dado por:

$$\begin{aligned}
R_{3\text{pec}} = & \left[\frac{(1+\text{Sen}(\theta)) \text{Sen}(\phi+\theta)}{\text{Sen}^2(\phi+2)} - 1 \right]^{-2} \left[\frac{-4 \cos(\theta)}{3 \text{Sen}^3(\frac{\phi}{2} + \frac{\pi}{4})} + \frac{4 \cos(\theta)}{3 \text{Sen}^3(\phi+2)} + \right. \\
& 2 \text{Sen}(\theta) \left\{ \frac{\cos(\frac{\phi}{2} + \frac{\pi}{4})}{4 \text{Sen}^4(\frac{\phi}{2} + \frac{\pi}{4})} + \frac{3 \cos(\frac{\phi}{2} + \frac{\pi}{4})}{8 \text{Sen}^2(\frac{\phi}{2} + \frac{\pi}{4})} - \frac{3}{8} \ln \left[\tan \left(\frac{\phi}{4} + \frac{\pi}{8} \right) \right] + \right. \\
& - \frac{\cos(\frac{\phi}{2} + \frac{\pi}{4})}{\text{Sen}^2(\frac{\phi}{2} + \frac{\pi}{4})} + \ln \left[\tan \left(\frac{\phi}{4} + \frac{\pi}{8} \right) \right] - \frac{\cos(\phi+2)}{4 \text{Sen}^4(\phi+2)} - \frac{3 \cos(\phi+2)}{8 \text{Sen}^2(\phi+2)} + \\
& \left. \left. + \frac{3}{8} \ln \left[\tan \left(\phi+4 \right) \right] + \frac{\cos(\phi+2)}{\text{Sen}^2(\phi+2)} - \ln \left[\tan \left(\phi+4 \right) \right] \right\} \right] + \\
& 2(1+\text{Sen}(\theta)) \left[\frac{(1+\text{Sen}(\theta)) \text{Sen}(\phi+\theta)}{\text{Sen}^2(\phi+2)} - 1 \right]^{-2} \left[\frac{\cos(\frac{\phi}{2} + \frac{\pi}{4})}{\text{Sen}^2(\frac{\phi}{2} + \frac{\pi}{4})} - \ln \left[\tan \left(\frac{\phi}{4} + \frac{\pi}{8} \right) \right] + \right. \\
& \left. - \frac{\cos(\phi+2)}{\text{Sen}^2(\phi+2)} + \ln \left[\tan \left(\phi+4 \right) \right] \right]
\end{aligned}$$

(3.63)

Con esto se tienen ya las expresiones para el cociente de las áreas de cada uno de los concentradores, escritas de tal manera que con estas expresiones y con las del capítulo - III, se puede obtener; dado un valor del factor de concentración y del radio de la abertura de salida de un concentrador, el valor correspondiente del cociente de sus áreas.

FORMULAS DE INTEGRALES USADAS EN ESTE APENDICE

Todas estas fórmulas fueron obtenidas de las tablas de (Gradshtein).

$$(2.261) \int \frac{dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{c}} \ln \left[2\sqrt{c(a+bx+cx^2)} + 2xc + b \right]$$

($c > 0$)

$$(2.262) \int \sqrt{a+bx+cx^2} dx = \frac{2cx+b}{4c} \sqrt{a+bx+cx^2} + \frac{A}{8c} \int \frac{dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}}$$

($\Delta = 4ac - b^2$)

$$(2.526) 3. \int \frac{dx}{\operatorname{Sen}^3(x)} = -\frac{1}{2} \frac{\cos(x)}{\operatorname{Sen}^2(x)} + \frac{1}{2} \ln \left[\tan \left(\frac{x}{2} \right) \right]$$

$$(2.526) 5. \int \frac{dx}{\operatorname{Sen}^5(x)} = \frac{-\cos(x)}{4\operatorname{Sen}^4(x)} - \frac{3}{8} \frac{\cos(x)}{\operatorname{Sen}^2(x)} + \frac{3}{8} \ln \left[\tan \left(\frac{x}{2} \right) \right]$$

$$(2.543) \int \frac{\operatorname{Sen}(2x)}{\operatorname{Sen}^n(x)} dx = -\frac{2}{(n-2)\operatorname{Sen}^{n-2}(x)}$$

R E F E R E N C I A S

Bemsky, George

Semiconductores

Secretaria General de la Organización de los Estados
americanos, Washington, D.C.U.S.A. (1970)

Born, M., and Wolf, E.

Principles of Optics 5^a ed.

Pergamon Press, Oxford. G.B. (1975)

Brinkworth, B.J.

Energía solar para el hombre

H. BLUME, Rosario, Argentina (1981)

Butti, K. and Perlin, J.

The History of Terrestrial uses of Solar Energy

Solar Energy Handbook

Chalmers, B.

Generación fotovoltaica de electricidad

Investigación y Ciencia, núm. 3, Diciembre 1976, España.

Courant, R. y Jhon, F

Introducción al Cálculo y al Análisis Matemático. Vol I y II

LIMUSA, México, D.F.

Donald E. Williamson

Cone Channel Condenser Optics

Journal of the Optical Society of America.

Vol. 42, núm. 10, Octubre

González Hurtado Julia

Energía Solar

ALHAMBRA, España. (1980)

Gradshtein, I.S. and Ryzhik, I.M.

Table of integrals, series, and products.

ACADAMIC PRESS. New York (1980)

Jenkins, F.A

Fundamentals of optics, 3^a ed.

Mc GRAW-HILL Kogakusha, LTD, Tokyo. (1957)

Lehman Charles H.

Geometría Analítica

U.T.E.H.A. (1956)

Sears F.W.

Fundamentos de Física III (óptica)

AGUILAR , (1967)

Steadman Philip

Energía Medio Ambiente y Edificación

H. BLUME, (1978)

Unsol, 1

El nuevo cosmos

SIGLO VEINTIUNO, España, (1977)

Welford, W.T and Winston, R.

The optics of nonimaging concentrators: Light and Solar Energy

ACADEMIC PRESS, New York, (1978)

Wilson J.I.B.

La energía solar

ALHAMBRA, México D.F. (1982)

Wolfgang Palz

Electricidad solar

BLUME, Barcelona, España. (1978)

Zajac, A. y Hecht, E.

Optica

Fondo Educativo Interamericano, S.A. E.U.A. (1977)

Zemansky, W.M.

Calor y Termodinámica.

AGUILAR, Madrid. (1973)