

28 No 39

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO.

DESARROLLO DEL MODELO GEOSTROFICO Y SU
APLICACION A DOS ESTACIONES OCEANOGRÁ-
FICAS DEL CRUCERO ALMEX III.

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE FISICO
PRESENTA:

SERGIO SALAS DIAZ.

MEXICO, D.F.

1982.



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

INDICE

PROLOGO.

INTRODUCCION.

Cap. I Observaciones Oceanográficas y Análisis de Datos

Cap. II Fuerzas debidas a Gradientes de Presión.

Cap. III Fuerzas de Fricción

Cap. IV Fuerza de Coriolis

Cap. V Ecuación de Movimiento

Cap. VI Modelo Geostrófico

Cap. VII Aplicación del Modelo a dos Estaciones del
Crucero Oceanográfico "ALMEX III".

CONCLUSION

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS.

PROLOGO

La importancia que tiene la investigación oceanográfica se hace evidente ante el hecho de que nuestro planeta se encuentra cubierto, en su mayor parte, por agua en la superficie.

Los océanos influyen de manera directa sobre los continentes, creando condiciones que van desde situaciones benéficas, hasta verdaderos desastres.

El estudio de los fenómenos que se dan en los océanos compete a especialistas de diversas áreas como son Química, Física, Biología y Geología, por lo que la descripción total de estas masas de agua se torna en extremo compleja.

La circulación de los cuerpos de agua es uno de los problemas más interesantes en el campo de la Oceanografía y le toca a la Física, que con auxilio de las matemáticas, aborda tales problemas en el contexto que, en general, da lugar a la Oceanografía Física

El presente trabajo pretende, tomando los aspectos físico-matemáticos correspondientes, formular un modelo que diagnostique, en primera instancia, las velocidades que presentan estos cuerpos de agua conocido el campo de presión.

Y ya una vez obtenido, se aplicará utilizando los datos recogidos en el Crucero Oceanográfico "ALMEX III".

INTRODUCCION

El estudio de la Oceanografía Física no sólo requiere del entendimiento de las fuerzas principales que causan los movimientos del agua, sino también de las fuerzas secundarias que modifican dichos movimientos, aunque no las originan. Las fuerzas principales incluyen la gravedad y las fuerzas del viento. Las fuerzas secundarias incluyen la fricción y el efecto de Coriolis.

Esta tesis considerará las características de los campos de las fuerzas responsables de los movimientos y se computan las corrientes que resultan al hacer algunas suposiciones acerca de las características del movimiento así mismo utiliza los campos de temperatura y salinidad además del efecto de Coriolis.

El crucero "ALMEX III" (Alemán-Mexicano) es parte de un proyecto para estudiar procesos hidrodinámicos y termodinámicos en el Golfo de California. Dicho crucero se realizó en el mes de mayo de 1981 a bordo del Buque Oceanográfico Mexicano "Mariano Matamoros" perteneciente a la Secretaría de Marina.

En dicho crucero se realizaron calas hidrográficas para obtener los parámetros de salinidad y temperatura que se utilizaron en el modelo geostrofico.

La coordinación del programa ha sido responsabilidad del Prof. J. Sundermann del Instituto de Oceanografía de la Universidad de Hamburgo, y del Dr. Nicolás Gr^ujalva del Instituto Oceanográfico de Manzanillo, perteneciente a la Secretaría de Marina y del Centro de Ciencias de la Atmósfera de la UNAM.

Desafortunadamente, se perdió, en un lanzamiento, el corrientímetro, por lo que no se logró obtener el campo de velocidades; hecho que impide la confrontación, con los valores de velocidad, calculados por el modelo

CAPITULO 1

OBSERVACIONES OCEANOGRAFICAS Y ANALISIS DE DATOS.

El agua de mar presenta, de manera global, características fundamentalmente uniformes. Estas características se manifiestan en sus propiedades físicas y químicas y es en las variaciones relativamente pequeñas de estas propiedades que es posible formular conclusiones acerca del comportamiento de las aguas oceánicas.

Las características más sobresalientes del agua de mar son indudablemente su temperatura y su contenido de sales disueltas o salinidad, y por lo tanto, la determinación de estos parámetros tiene una importancia sobresaliente.

Una metodología adecuada para la determinación y análisis de datos oceanográficos ha sido desarrollada con anterioridad (ref. 10, 11, 12).

SALINIDAD

La salinidad se define convencionalmente como la cantidad total, en gramos, de materia sólida disuelta en un kilogramo de agua habiendo sido transformados todos los carbonatos en óxidos, el bromo y el yodo reemplazados por cloro, y toda la materia orgánica oxidada, secando el todo a una tem-

peratura de 480°C.

La determinación de la salinidad de esta manera exige la aplicación de una técnica muy refinada que es impráctica de lograr en los casos aplicados y comunes de investigación.

Como alternativa, es posible determinar la salinidad por la medición de la clorinidad por titulación, conducción o inducción (ref. 10).

La clorinidad se define como la cantidad en partes por mil de cloro, iodo y bromo expresada en gramos por kilogramos de agua de mar suponiendo que los dos últimos han sido reemplazados por el primero. Debido al principio de la constancia de composición del agua de mar, el cual establece que las propiedades de los iones principales son relativamente constantes entre sí en todo el océano (hipótesis de Dittmar), se puede calcular la salinidad de la manera siguiente:

$$(1.1) \quad \text{SO}/00 = 0.030 + 1.805 \quad \text{Cl } 0/00$$

Esta ecuación fue usada desde 1901 hasta 1966 cuando fue reemplazada por la relación más exacta:

$$(1.2) \quad \text{SO}/00 = 1.80655 \quad \text{Cl } 0/00$$

Es por otra parte sabido, que la conductividad del agua de mar depende fuertemente de la salinidad de ésta. Lo anterior ha permitido el desarrollo de técnicas prácticas en las que se determina la conductividad, calculándose la salinidad a partir de ella. Estas técnicas son mucho más rápidas y permiten su aplicación en el campo sin la necesidad de contar con un laboratorio químico.

La UNESCO y el Instituto Nacional de Oceanografía de Gran Bretaña publicaron en 1966 las Tablas Oceanográficas Internacionales, que son útiles para obtener las relaciones entre la conductividad eléctrica, la salinidad y la clorinidad.

La determinación de la salinidad independientemente de el método que se use para evaluarla, debe ser determinada hasta tres decimales. La exactitud de una sola determinación de salinidad por titulación es de ± 0.017 0/00, por conducción es ± 0.005 0/00 y por inducción es de ± 0.003 0/00.

TEMPERATURA IN SITU

Las botellas comúnmente utilizadas para el muestreo de agua de mar, llevan desde uno hasta tres termómetros. Cada una, uno o dos protegidos de los efectos de presión por una envoltura de vidrio y uno no protegido, teniendo ambos tipos de termómetro una exactitud de $\pm 0.01^{\circ}\text{C}$.

Los termómetros no protegidos se utilizan solamente a profundidades mayores de 200 m debido al efecto mínimo e inconsecuente del limitado cambio de presión, en las primeras capas oceánicas.

La profundidad de muestreo se calcula en base a la diferencia de las temperaturas registradas por ambos tipos de termómetros ya que ésta es debida al efecto de presión. A los valores de cada termómetro debe corregirse el error instrumental y compararlos después con ángulos de longitudes de cable.

Se aplican dos correcciones a las lecturas de los termómetros protegidos y no protegidos, la primera es para corregir errores en la escala causada por irregularidades en el diámetro del tubo del termómetro y es una corrección particular, proporcionada por el fabricante para cada termómetro.

Ya que la temperatura y la presión a las cuales se leen los termómetros son diferentes a aquellos a las cuales se tomó la muestra, debe aplicarse una segunda corrección expansión del vidrio y el mercurio.

Las temperaturas in situ para termómetros protegidos y no protegidos son las siguientes (ref 13):

(1.3) Termómetros protegidos (a dos decimales).

$$T_w = T' + \frac{(T' - t)(T' + V_o)}{K - V_o + t - 2T'} + I$$

(1.4) Termómetros no protegidos (a dos decimales).

$$T_u = T'_u + \frac{(T'_u + V_o)(T_w - t_u)}{K - T_w + T'_u} + I_u$$

donde:

- T_w - Temperatura in situ, o sea la lectura corregida del termómetro protegido.
- T_u - Temperatura corregida del termómetro no protegido.
- T' - Lectura del termómetro protegido.
- T'_u - Lectura del termómetro no protegido.
- t, t_u - Temperatura a la cual se lee el termómetro (la temperatura del termómetro auxiliar corregido por errores de escala).
- V_o - Volumen de mercurio debajo de la marca de 0°C a una temperatura de 0°C en unidades de grados centígrados de escala. Constante proporcionada en el certificado de cada termómetro.
- K - Una constante que depende del tipo de vidrio del termómetro. Es la diferencia entre los coe

ficientes de expansión del vidrio y del mercurio. Igualmente proporcionada en el certificado.

- I - Corrección de la escala por la curva de calibración que corresponde a T' o T'_u . Proporcionada por el fabricante.

Se puede determinar la profundidad de muestreo utilizando la longitud de ángulo del cable solamente si el ángulo es menor de 5° y la longitud del cable es de varios cientos de metros.

La profundidad de muestras profundas se puede determinar por medio de la diferencia entre las lecturas de los termómetros protegidos y no protegidos, según la expresión:

$$(1.5) \quad P = \frac{T_u - T_w}{\rho m Q} \quad \text{en metros}$$

donde:

- P - Profundidad de muestreo, o sea de inversión de la botella de muestreo.
- T_w - Temperatura corregida del termómetro protegido.
- T_u - Temperatura corregida del termómetro no protegido.

- ρ_m - Densidad media en el lugar de muestreo
- Q - Coeficiente de presión del termómetro protegido una constante (aproximadamente 0.01) proporcionada en el certificado del termómetro.

Siendo la densidad aproximadamente unitaria y usando Q igual a 0.01, la profundidad de muestreo es aproximadamente $100 (T_u - T_w)$ metros. El error con el uso de la ecuación completa es ± 5 m. con profundidades menores de 1000 m, y un 0.5% de la longitud del cable con profundidades mayores de 1000 m.

DENSIDAD - LA ECUACION DE ESTADO.

La ecuación de estado describe la densidad (gravedad específica, volumen específico, etc.) como función de la salinidad, de la temperatura y de la presión in situ. La densidad del agua marina varía entre unos $0.9960 \text{ gr cm}^{-3}$ cerca del hielo en fusión, hasta unos $1.0757 \text{ gr cm}^{-3}$ en el fondo de cuencas profundas donde los efectos de presión son importantes. La densidad media de las aguas superficiales es aproximadamente entre 1.025 gr cm^{-3} .

En oceanografía física, es necesario medir la densidad hasta por lo menos cinco decimales. Para reducir al mínimo

los errores de anotación y para mayor comodidad, se usa el sistema de sigma en vez de la densidad. En dicho sistema se reemplaza al densidad in situ ($\rho_{s,t,p}$) por sigma in situ ($\sigma_{s,t,p}$). Los subscritos s,t y p indican la salinidad, la temperatura y la profundidad (o presión) respectivamente, de la muestra. La sigma in situ es una medición de la densidad de la muestra en el sitio de muestreo y se define por

$$(1.6) \quad \sigma_{s,t,p} = 10^3 (\rho_{s,t,p} - 1)$$

Si la densidad es referida a la superficie del mar, la presión hidrostática es nula, se indica por sigma -t, que tiene la definición siguiente:

$$(1.7) \quad \sigma_t = \sigma_{s,t,o} = 10^3 (\rho_{s,t,o} - 1).$$

La densidad in situ se puede determinar mediante las expresiones de Knudsen (1901), Forch, et al (1902), y Ekman (1908), utilizandose para este efecto las determinaciones de la profundidad (presión) de muestreo, la salinidad, y la temperatura de la muestra. Knudsen (1901) determinó la anomalía de gravedad específica ($\sigma_o = \sigma_{s,o,o} = 10^3 (\rho_{s,o,o} - 1)$) como función de la clorinidad. La relación es en base a la salinidad $S = 0.03 + 1.8050 \text{ cl O/00}$.

$$(1.8) \sigma_o = -0.069 + 1.4708 Cl - 1.57 \times 10^{-3} Cl^2 + 3.98 \times 10^{-5} Cl^3$$

$$(1.9) \sigma_o = 0.814876577S - 0.00048249614S^2 + 0.00676786136S^3 - 0.0934$$

Mediante la comparación de estas ecuaciones con otras, derivadas en base a datos adicionales, Carrit y Carpenter (1958) determinaron que σ_o puede variar unas ± 0.04 unidades por lo menos, ya que la salinidad tiene una inexactitud de ± 0.017 o/oo a causa de la variación regional en las proporciones de iones disueltos. Así, al definir la salinidad y la densidad en función de la clorinidad, esto proporciona un límite natural a la exactitud con la que dichos parámetros pueden ser obtenidos y por lo general es inútil hacer determinaciones de salinidad con una exactitud superior a ± 0.02 o/oo. En la determinación de salinidad por inducción, existen límites similares.

Forsch et al (1902), relacionaron la densidad a la temperatura y Knudsen (1901) resumió las relaciones entre densidad, salinidad y temperatura en sus tablas hidrográficas que aún se usan hoy en día. En dichas tablas, los efectos de temperatura están expresados por D donde $\sigma_t = \sigma_o - D$. Forsch et al (1902) obtuvieron $\sigma_t = A + B\sigma_o + C\sigma_o^2$, pero Knudsen (1901) modificó la ecuación a:

(1.10)

$$\sigma_t = \Sigma_t + (\sigma_o + 0.1324) \{1 - A_t + B_t (\sigma_o - 0.1324)\}$$

donde:

$$\Sigma_t = \frac{(t-3.98)^2}{503.570} \cdot \frac{(t+283)}{(t+67.26)}$$

$$A_t = 4.7867 \times 10^{-3} t - 9.8185 \times 10^{-5} t^2 + 1.0843 \times 10^{-6} t^3$$

$$B_t = 1.8030 \times 10^{-5} t - 8.164 \times 10^{-7} t^2 + 1.667 \times 10^{-8} t^3$$

Posteriores determinaciones de σ_t (Bien, et al 1935) han provocado variaciones del orden de ± 0.02 unidades de los valores obtenidos por Knudsen (1901).

A nivel mundial, las variaciones de temperatura predominan sobre las de salinidad en su influencia sobre la densidad. Por los contrastes mundiales en la temperatura (1°C a 20°C), $\sigma_{340/00, t, 0}$ varía entre 27.32 y 21.00 ($\Delta\sigma = 7.3$) Por los contrastes de salinidad (33 o/oo a 37 o/oo) $\sigma_{S, 20^\circ\text{C}, 0}$ varía entre 23.26 y 26.30 ($\Delta\sigma = 4.05$).

Los efectos de presión son aún menores. Entre la superficie y 500 metros de profundidad el cambio de presión produce en un agua de 0°C y 34.58 o/oo un cambio de $\Delta\sigma=3.00$ sin considerar los efectos del cambio adiabático de temperatura

De igual, si no mayor importancia que la densidad es su recíproco, el volumen específico. Ekman (1908), relacionó el volumen específico a la presión y Bjerknes y Sandström (1910), y Sverdrup (1933) publicaron tablas de volumen específico. La expresión debida a Ekman es:

(1.11)

$$\alpha_{s,t,p} = \alpha_t (1 - k_p) \text{ml gm}^{-1} = 1.000027 \alpha_t (1 - k_p) \text{cm}^3 \text{gm}^{-1}$$

donde:

α_t - el volumen específico en la superficie del mar
(presión total = presión atmosférica)

$\alpha_{s,t,p}$ - Volumen específico in situ donde existe la presión p.

p - La presión en decibares (presión total in situ menos una atmósfera standard, donde un atmósfera de presión es igual a 10.1324 decibares)

k - Compresibilidad media

$$k = 10^{-9} \left\{ \frac{4886}{1 + 1.83 \times 10^{-5} p} - (227 + 28.23t - 0.551t^2 + 4 \times 10^{-3} t^3) \right.$$

$$\left. + 10^{-4} p (105.5 + 9.50t - 0.158t^2) - 1.5 \times 10^{-8} t p^2 \right.$$

$$\left. - \frac{(\sigma_0 - 28)}{10} \{ (147.3 - 2.72t + 0.04t^2) - \right.$$

$$\left. 10^{-4} p (32.4 - 0.87t + 2 \times 10^{-3} t^2) \} + \frac{(\sigma_0 - 28)^2}{10} \{ 4.5 - 0.1t - 10^{-4} p \right.$$

$$(1.8-0.06t)\}}\}$$

Eckart (1958) determinó que los errores aleatorios en la estimación del volumen específico son aproximadamente $\pm 2 \times 10^{-4}$ ml/g y que los errores sistemáticos son probablemente mayores de $\pm 2 \times 10^{-7}$ p ml/gm, donde p es la presión total (presión atmosférica más la presión hidrostática) en de cibares.

Revisiones recientes de los valores del volumen específico indican que aunque las ecuaciones clásicas de Ekman son suficientemente precisas en la mayoría de los casos, los errores se incrementan con un aumento de temperatura y una disminución de salinidad. Li (1967) ha recomendado el uso de la ecuación de Tait-Gibson para reducir dichos errores. Se puede aplicar esta ecuación en los rangos de $0 < T < 20^{\circ}\text{C}$, $0 < p < 1000$ bares y $30 < S < 40$ o/oo

$$(1.12) \quad \alpha \text{ in situ} = \alpha_{s,t,o} - (1-S)10^{-3} C \log \frac{A+P}{A+I}$$

Donde:

S es la salinidad

$$C = 0.315 \alpha_{o,t,o}$$

$$A = (2.6708 \times 10^3 + 6.89656S) + (19.39 - 0.0703178S)T - 0.223T^2$$

Si consideramos un océano standard de $S = 35$ o/oo y $T = 0^\circ\text{C}$ podemos escribir:

$$\alpha_{s,t,p} = \alpha_{35,0,p} + \delta$$

Donde δ es la anomalía de volumen específico que indica como se diferencia el océano real del océano ideal de $S = 35$ o/oo y $T = 0^\circ\text{C}$.

Por la expansión de Taylor

(1.13)

$$\alpha_{35+\Delta S, 0+\Delta t, 0+\Delta p} = \left\{ \alpha_{35,0,p} + \frac{d\alpha}{dp} dp \right\} + \left\{ \frac{d\alpha}{ds} ds + \frac{d\alpha}{dt} dt + \frac{d\alpha}{ds} \left(\frac{d\alpha}{dt} dt \right) ds \right\} + \frac{d\alpha}{dp} \left(\frac{d\alpha}{ds} ds \right) dp + \frac{d\alpha}{dp} \left(\frac{d\alpha}{dt} dt \right) dp + \dots$$

o sea en forma reducida:

(1.14)

$$\alpha_{s,t,p} = \alpha_{35,0,p} + \Delta_{s,t} + \delta_{s,p} + \delta_{t,p} = \alpha_{35,0,p} + \delta$$

Cuyos términos son en el mismo orden que en la primera ecuación

El segundo término a la derecha ($\Delta_{s,t}$) se llama la anomalía termostérica. Existen tablas standard para la determinación de cada término, por ejemplo, en Svedrup et al (1942); U.S. Navy Hydrographic Office (1951); y otros.

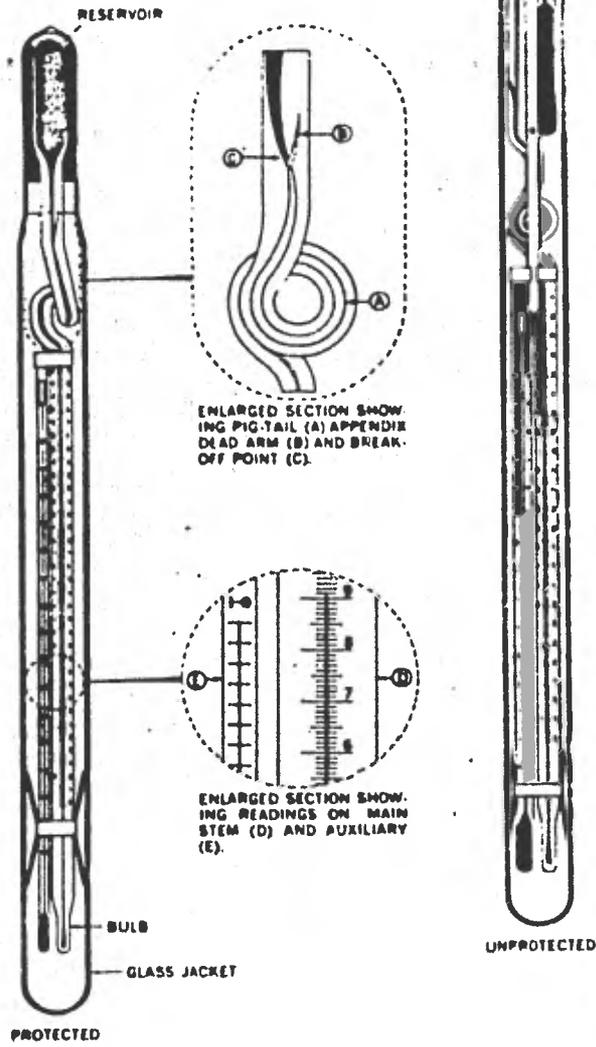


figura 1

CAPITULO II

FUERZAS DEBIDAS A GRADIENTES DE PRESION.

La palabra latina equilibrium implica un estado de balance entre las fuerzas que actúan sobre un fluido. Cuando este estado de equilibrio entre las fuerzas que actúan sobre el fluido no se da, provoca que el fluido adquiera un movimiento acelerado.

Las fuerzas que actúan sobre un fluido, generalmente se clasifican de dos maneras, esto es, se hace una distinción entre las fuerzas de cuerpo y las fuerzas de superficie, o de otra manera, en fuerzas externas y fuerzas internas.

La fuerza de cuerpo que actúa sobre un fluido arbitrario depende directamente de la masa del mismo, y ejemplos de este tipo de fuerzas son, las gravitacionales, la centrífuga, etc. Estas fuerzas se dice que son de largo alcance ya que se transmiten en el vacío, y además para que esta transmisión se de no requieren que exista un contacto físico entre el fluido y sus alrededores.

Las fuerzas de superficie, a diferencia de las fuerzas

de cuerpo, dependen de la extensión superficial de el material y únicamente pueden ser transmitidas a través del contacto superficial con sus alrededores por lo que se les denomina fuerzas de corto alcance. Un ejemplo de este tipo de fuerza son las fuerzas de fricción y tienen origen molecular siendo apreciables solamente cuando la distancia entre los elementos que interactúan es del orden de las distancias intermoleculares.

Una de las fuerzas de masa que influirá en el movimiento neto de un fluido es aquella que se origina debido a la diferencia de presión que se ejerce sobre el fluido.

Para analizar esto, considérese las presiones que se ejercen sobre un volumen de fluido arbitrario, como se muestra en la figura 2.

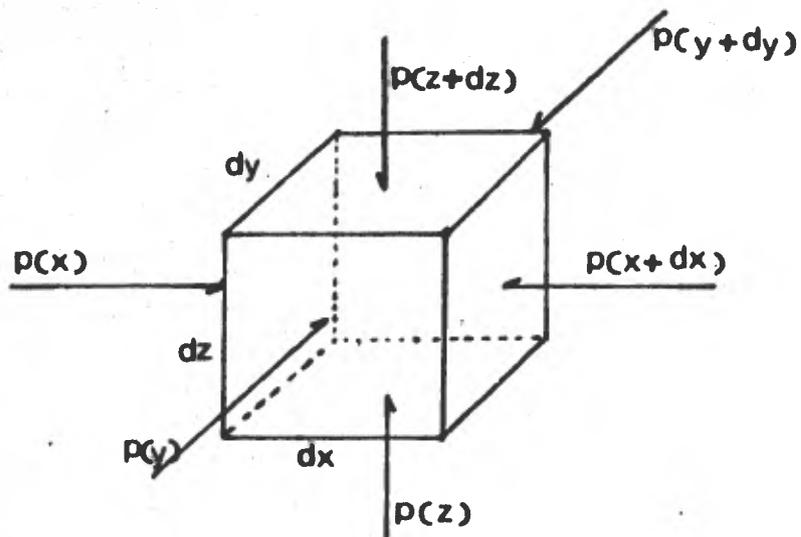


figura 2

Recordando que la presión se define como la fuerza por unidad de área, es posible expresar el balance de fuerzas sobre el elemento de volumen $dx dy dz$ de la siguiente manera:

$$\Sigma F_x = p(x) dy dz - p(x+dx) dy dz \quad (2.1)$$

desarrollando $p(x+dx)$ en una serie de Taylor y despreciando los términos de orden mayor que uno se tiene:

$$\Sigma F_x = p(x) dy dz - \left\{ p(x) + \frac{\partial p}{\partial x} dx \right\} dy dz \quad (2.2)$$

$$\Sigma F_x = p(x) dy dz - p(x) dy dz - \frac{\partial p}{\partial x} dx dy dz$$

$$\Sigma F_x = - \frac{\partial p}{\partial x} dx dy dz \quad (2.3)$$

Por otro lado la segunda ley de Newton se puede escribir como:

$$\Sigma F_x = m a_x \quad (2.4)$$

La cual al ser substituida en (2.3) se obtiene:

$$m a_x = - \frac{\partial p}{\partial x} dx dy dz \quad (2.5)$$

$$a_x = - \frac{\partial p}{\partial x} \frac{dydz}{m}$$

$$a_x = - \frac{\partial p}{\partial x} \frac{1}{\rho} \quad (2.6)$$

en donde ρ es la densidad del elemento de fluido.

Procediendo de la misma manera, para obtener las componentes de la aceleración en los ejes "y" y "z", se obtienen las siguientes expresiones.

$$a_y = - \frac{\partial p}{\partial y} \frac{1}{\rho} \quad (2.7)$$

$$a_z = - \frac{\partial p}{\partial z} \frac{1}{\rho} \quad (2.8)$$

En otras palabras, la fuerza por unidad de masa debida a un gradiente de presión, se puede escribir en forma general como:

$$\bar{a} = \frac{1}{\rho} \nabla p \quad (2.9)$$

$$\text{en donde } \nabla p = i \frac{\partial p}{\partial x} + j \frac{\partial p}{\partial y} + k \frac{\partial p}{\partial z}$$

Estas ecuaciones nos permiten evaluar el campo de velocidades de un fluido al ser integrada la ecuación (2.9) y conocido el campo de presión y densidad.

CAPITULO III
FUERZAS DE FRICCION.

Como se mencionó en el capítulo anterior, las fuerzas que actúan sobre un fluido se pueden clasificar en dos tipos, las fuerzas de cuerpo y las fuerzas de superficie, de estas últimas es posible reconocer a las fuerzas de fricción, las cuales están presentes en el océano, cuando las velocidades varían en el espacio, y son el resultado de una transferencia de momento entre capas de diferente velocidad.

En el caso de movimiento laminar, donde las capas individuales o partículas de fluido se deslizan unas sobre otras sin perturbarse por movimientos macroscópicos (tales como el desplazamiento vertical), el intercambio de momento entre las placas es el resultado del movimiento molecular.

Si por ejemplo consideramos la velocidad en dirección de las x , y ésta cambia en magnitud respecto del eje Z , es posible expresar esta razón de cambio de la manera siguiente

$$\frac{du}{dz} \qquad (3.0)$$

Esta razón de cambio dará lugar a un rozamiento entre las diferentes capas contenidas en el eje Z . Este razona-

miento se le suele denominar esfuerzo cortante y se le denota con la letra τ , el cual es proporcional a la razón de cambio antes dicha y la cual puede quedar expresada de la siguiente forma de acuerdo a la ley de Newton (ref.4).

$$\tau = \mu \frac{du}{dz} \quad (3.1)$$

Esta ecuación se puede interpretar como que el esfuerzo por unidad de área es igual a una constante de proporcionalidad que se denota con la letra μ y que representa el valor del coeficiente de viscosidad dinámica del fluido multiplicado por la razón de cambio de la velocidad.

En algunos casos, se usa el cociente μ/ρ que se le denomina coeficiente de viscosidad cinemática. (ref. 3)

En el océano, los efectos de presión y salinidad sobre el valor del coeficiente de viscosidad dinámica, son significativos así como los cambios de temperatura reducen el valor del coeficiente de acuerdo a la siguiente relación (ref. 4 y 5).

$$\mu = \frac{0.01779}{1+0.03368T+0.00022T^2} \text{ dinas seg/cm}^2.$$

Consideraré ahora un cubo de volumen $\Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z$ de un fluido sobre el cual actúan fuerzas de superficie según la figura 3, y que tiene un movimiento laminar.

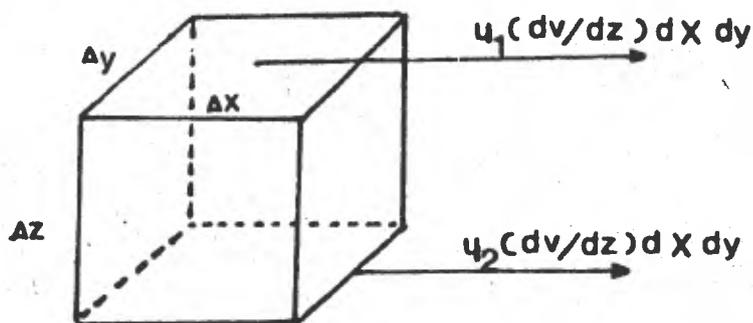


figura 3

Sobre la cara superior del cubo el esfuerzo por unidad de área es:

$$\tau_1 = \left(\mu_1 \frac{dv}{dz} \right)_1$$

y el esfuerzo total sobre esa área $\Delta x \Delta y$ es:

$$\tau_1 \Delta x \Delta y = \mu_1 \left(\frac{dv}{dz} \right)_1 \Delta x \Delta y \quad (3.4)$$

De la misma manera los esfuerzos sobre la superficie inferior son

$$\tau_2 \Delta x \Delta y = \mu_2 \left(\frac{dv}{dz} \right)_2 \Delta x \Delta y \quad (3.5)$$

y la fuerza que actúa sobre el cubo es igual a la diferencia de (3.4) y (3.5)

$$\tau_1 \Delta x \Delta y - \tau_2 \Delta x \Delta y \quad (3.6)$$

$$(\tau_1 - \tau_2) \Delta x \Delta y \quad (3.7)$$

y la fuerza por unidad de volumen es:

$$\frac{(\tau_1 - \tau_2) \Delta x \Delta y}{\Delta x \Delta y \Delta z}$$

introduciendo diferenciales se obtiene (ref. 6)

$$R = \frac{d\tau}{dz} = \mu \frac{d^2u}{dz^2} \quad (3.9)$$

ecuación en la que se considera μ constante.

Es posible hacer un análisis semejante para un fluido que presente un movimiento turbulento y no laminar como el que anteriormente se trató.

Recordando que el movimiento turbulento tiene como característica esencial un gradiente de velocidades, lo que implica que existe un transporte de momento a través de la superficie normal a el gradiente, hecho que da lugar a un intercambio de fluido ocasionando que éste, en una región de alta velocidad, se frene, en tanto que en una región de baja velocidad se acelere. En otras palabras, un esfuerzo se ejerce sobre una superficie a través de la cual se está manifestando dicho transporte de momento, y este esfuerzo es igual a la razón de transporte de momento a través de la superficie.

Consideraré que, en cualquier punto de el espacio, la velocidad puede considerarse como la suma de dos diferentes velocidades \bar{v} y v' , en donde la primera representa la velocidad

promedio en ese punto durante un periodo grande de tiempo, y la segunda representa una perturbación debida a la turbulencia. Con esta idea se pueden escribir las componentes de la velocidad para cualquier tiempo de la manera siguiente:

$$v_x = \bar{v}_x + v'_x$$

$$v_y = \bar{v}_y + v'_y \quad (3.10)$$

$$v_z = \bar{v}_z + v'_z$$

Estas últimas ecuaciones permiten interpretar al flujo como la composición de dos sistemas, uno que representa un flujo promedio, el cual puede ser estacionario o acelerado, dependiendo de las fuerzas presentes, y otro que representa el movimiento turbulento irregular, el cual es sobrepuesto al flujo promedio y cuya naturaleza no es conocida para cualquier tiempo (ref. 6)

Suponiendo que el flujo promedio sólo está en dirección del eje X, y que las velocidades promedio en "Y" y en "Z" son iguales a cero, se reducen las ecuaciones (3.10) a la siguiente forma:

$$V_x = \bar{V}_x + V'_x$$

$$V_y = V'_y \quad (3.11)$$

$$V_z = V'_z$$

Sumadas a la anterior suposición, consideraré que la velocidad promedio en x varía sólo en dirección del eje z, mientras que en dirección del eje x es constante.

Además, consideraré que pequeñas masas de agua se mueven una distancia promedio en sentido vertical denotada por l_z , por lo que el momento de este movimiento medio se expresa como:

$$\rho \bar{V}_x + l_z \frac{d(\rho \bar{V}_x)}{dz} \quad (3.12)$$

Este momento debe ser proporcional a la diferencia entre el momento promedio original de la masa de fluido $\rho \bar{V}_x$ y el momento promedio en la localidad donde el intercambio tiene lugar.

El momento resultante por unidad de tiempo debe ser proporcional a el valor numérico promedio de la velocidad

vertical de la masa pequeña de fluido, que se denota por $|\bar{v}'_z|$. De aquí que la relación para el transporte de momento es:

$$M = - K |\bar{v}'_z| l_z \frac{d(\rho \bar{v}_x)}{dz} \quad (3.13)$$

en donde:

M = transporte de momento

K = constante de proporcionalidad.

El factor de proporcionalidad puede ser absorbido por l_z , lo que significa que l_z puede ser definido de tal manera que $K = 1$.

Si se desprecian las variaciones de la densidad, la ecuación (3.13) se reduce a la siguiente forma:

$$M = - A_z \frac{d\bar{v}}{dz} \quad (3.14)$$

en donde:

$$A_z = \rho |\bar{v}'_z| l_z$$

El signo menos indica que el transporte tiene lugar hacia regiones de baja velocidad.

Las dimensiones del transporte de momento son dimensiones de esfuerzo, y en ausencia del signo menos, es igual al esfuerzo sobre una superficie que como se vió anteriormente, se denota con la letra τ . Este esfuerzo existe propiamente al intercambio turbulento de masa y es ejercido sobre una superficie unitaria en el plano XY.

Con estas consideraciones, es posible expresar el esfuerzo superficial como:

$$\tau_{xz} = A_z \frac{d\bar{v}_x}{dz} \quad (3.15)$$

En esta última ecuación (3.15), τ_{xz} significa el esfuerzo cortante que actúa en la dirección de las "X", y a lo largo de una superficie que es normal al eje "Z".

El coeficiente A_z tiene las mismas dimensiones que la viscosidad dinámica μ , y se le denomina eddy viscosity. La diferencia fundamental entre ambas cantidades es la siguiente: la viscosidad dinámica es una propiedad característica del fluido que es independiente del estado de movimiento, en tanto que el eddy viscosity no es una propiedad del fluido y depende del estado de movimiento del fluido.

El valor numérico de este coeficiente denominado eddy

viscosity presenta un amplio rango que depende del tipo de movimiento y en el océano, de la lejanía a la costa.

En oceanografía, sólo se han logrado conocer el orden de magnitud de estos coeficientes (ref. 6)

Si considero ahora, que el movimiento, además de la componente en la dirección "X", tiene también una componente en dirección del eje de las "Y", sobre una superficie normal al eje Z:

$$\tau_{yz} = A_z \frac{dV_y}{dz} \quad (3.16)$$

La presencia de cuatro nuevos esfuerzos, resultan de suponer que la velocidad promedio no varía en el plano horizontal y que $\bar{V}_z = 0$, y son las siguientes:

$$\begin{aligned} \tau_{xy} &= A_y \frac{\partial \bar{V}_x}{\partial y} & \tau_{yx} &= A_x \frac{\partial \bar{V}_y}{\partial x} \\ \tau_{zy} &= A_y \frac{\partial \bar{V}_z}{\partial y} & \tau_{zx} &= A_x \frac{\partial \bar{V}_z}{\partial x} \end{aligned} \quad (3.17)$$

En donde los coeficientes A_x y A_y son:

$$A_x = \rho |\bar{V}'_x| l_x \quad A_y = \rho |\bar{V}'_y| l_y \quad (3.18)$$

Utilizando la anterior discusión y auxiliándome de la figura 4, obtendré las expresiones para las aceleraciones que sobre el fluido producen estos esfuerzos.

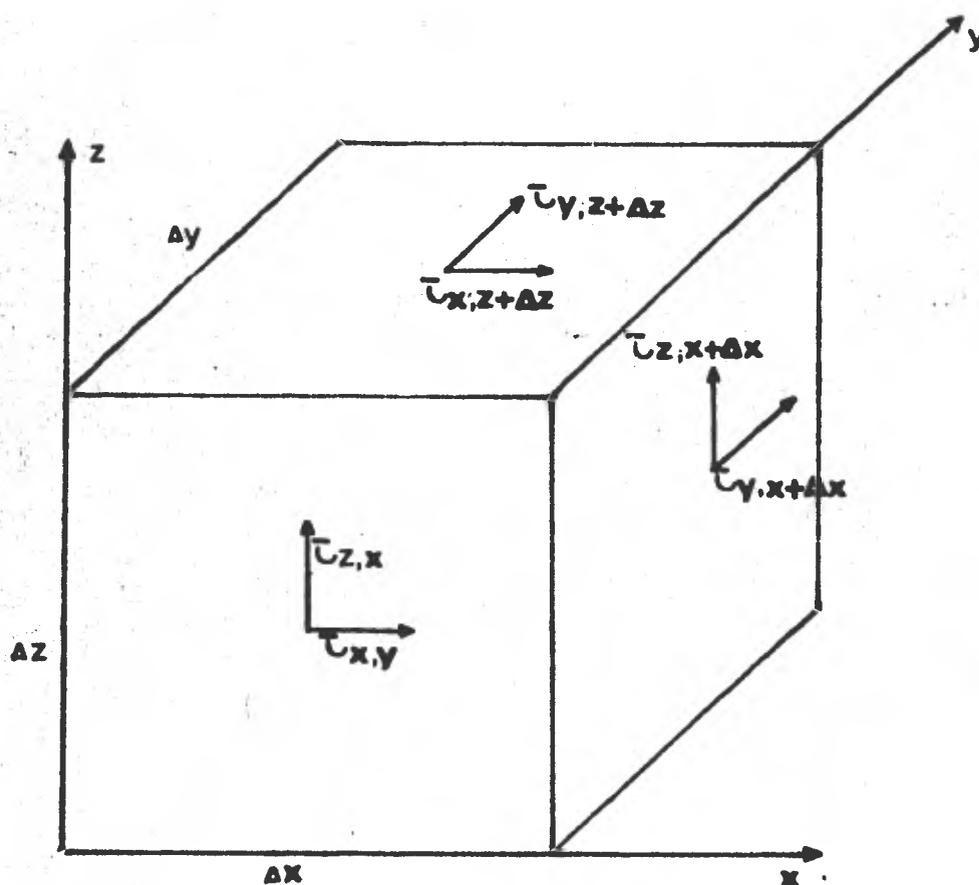


figura 4

Inicialmente consideré el balance de esfuerzo en el eje X:

$$\Sigma F_x = \tau_{xz}(z)\Delta x\Delta y - \tau_{xz}(z + \Delta z)\Delta x\Delta y \quad (3.19)$$

Desarrollando en serie de Taylor el término $\tau_{xz}(z + \Delta z)$, y despreciando los términos de orden mayor que uno, se tiene:

$$\Sigma F_x = \tau_{xz}(z) - \left\{ \tau_{xz}(z) + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \Delta z \right\} \Delta x\Delta y \quad (3.20)$$

$$\Sigma F_x = - \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \Delta z \Delta x\Delta y \quad (3.21)$$

$$a_x = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \quad (3.22)$$

$$a_{xz} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \left(A_z \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial z} \right) \quad (3.23)$$

Si considero el balance de esfuerzos para los otros dos ejes, y desarrollando los términos en la forma anterior, se obtienen las aceleraciones correspondientes:

$$a_{yz} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \left(A_z \frac{\partial v_y}{\partial z} \right)$$

$$a_{xy} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} \left(A_y \frac{\partial v_x}{\partial y} \right)$$

$$a_{yx} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} \left(A_x \frac{\partial v_y}{\partial x} \right)$$

$$a_{zy} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} \left(A_y \frac{\partial v_z}{\partial y} \right)$$

$$a_{zx} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} \left(A_x \frac{\partial v_z}{\partial x} \right)$$

o bien:

$$a_x = -\frac{1}{\rho} \left\{ \frac{\partial}{\partial z} \left(A_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(A_y \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \right\}$$

$$a_y = -\frac{1}{\rho} \left\{ \frac{\partial}{\partial z} \left(A_z \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(A_x \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) \right\}$$

$$a_z = -\frac{1}{\rho} \left\{ \frac{\partial}{\partial y} \left(A_y \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(A_x \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \right\}$$

considerando que

$$\bar{a} = \hat{i} a_x + \hat{j} a_y + \hat{k} a_z$$

$$\bar{v} = \hat{i} v_x + \hat{j} v_y + \hat{k} v_x$$

se obtiene la aceleración neta del fluido dada por la siguiente expresión:

$$\bar{a} = \hat{i} \left\{ -\frac{1}{\rho} \left(A_z \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} + A_y \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \right) \right\} + \hat{j} \left\{ -\frac{1}{\rho} \left(A_z \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} + A_x \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} \right) \right\}$$

$$+ \hat{k} \left\{ - \frac{1}{\rho} \left(A_y \frac{\delta^2 v_z}{\delta y^2} + A_x \frac{\delta^2 v_z}{\delta x^2} \right) \right\} \quad (3.27)$$

Los términos de fricción tratados en este capítulo son los más importantes (ref.6) cuando uno trata corrientes en un océano donde la velocidad vertical es, tan pequeña que los gradientes de la velocidad vertical son despreciables.

CAPITULO IV

FUERZA DE CORIOLIS

Existen ciertos campos de estudio en donde, para describir el movimiento de una partícula, se escoge, como sistema de referencia, a la tierra.

La descripción del movimiento de una partícula sobre la superficie de la tierra no podrá ser la misma si se usa como sistema de referencia a un sistema en el espacio exterior o a la tierra misma, ya que ésta es un sistema de referencia rotando.

La discrepancia entre las dos observaciones se explica introduciendo lo que comunmente se denomina fuerzas ficticias, estas fuerzas existen en sistemas rotando, pero fuera de ellos son nulas.

Enfocando la atención sobre la tierra como sistema de referencia, encontramos que el tiempo de un día sidéreo es de 24 hrs. 56 min 4.09 seg. o de 86104.09 seg, de donde se calcula que la velocidad angular de la tierra es de 7.3×10^{-5} rad. seg.⁻¹ en dirección oeste a este (ref. 7)

El hecho de que esté rotando la tierra implica que para describir el movimiento de una partícula sobre su superficie, es necesario introducir dos fuerzas ficticias que justifiquen dicho movimiento. La primera de las fuerzas es la fuerza centrífuga que actúa en dirección perpendicular al eje de rotación y se escribe como $m\Omega^2 R$, en donde m es la masa de la partícula; R es su distancia perpendicular al eje de rotación y Ω es la velocidad angular de la tierra. Esta fuerza tiene como efecto el sumarse vectorialmente a la fuerza de gravedad que siente la partícula, dando lugar a un nuevo valor de aceleración gravitacional llamada gravedad modificada, la cual absorbe el efecto de la fuerza centrífuga. La variación de esta gravedad modificada respecto del valor de gravedad convencional, es muy pequeña y el efecto es pequeño y despreciable en la mayoría de los casos.

La segunda fuerza ficticia que se asocia al movimiento de la tierra es la fuerza de Coriolis.

Para llegar a la expresión de dicha fuerza me auxiliaré con la figura 5, y consideraré primero un movimiento zonal hacia el este en el hemisferio norte. "

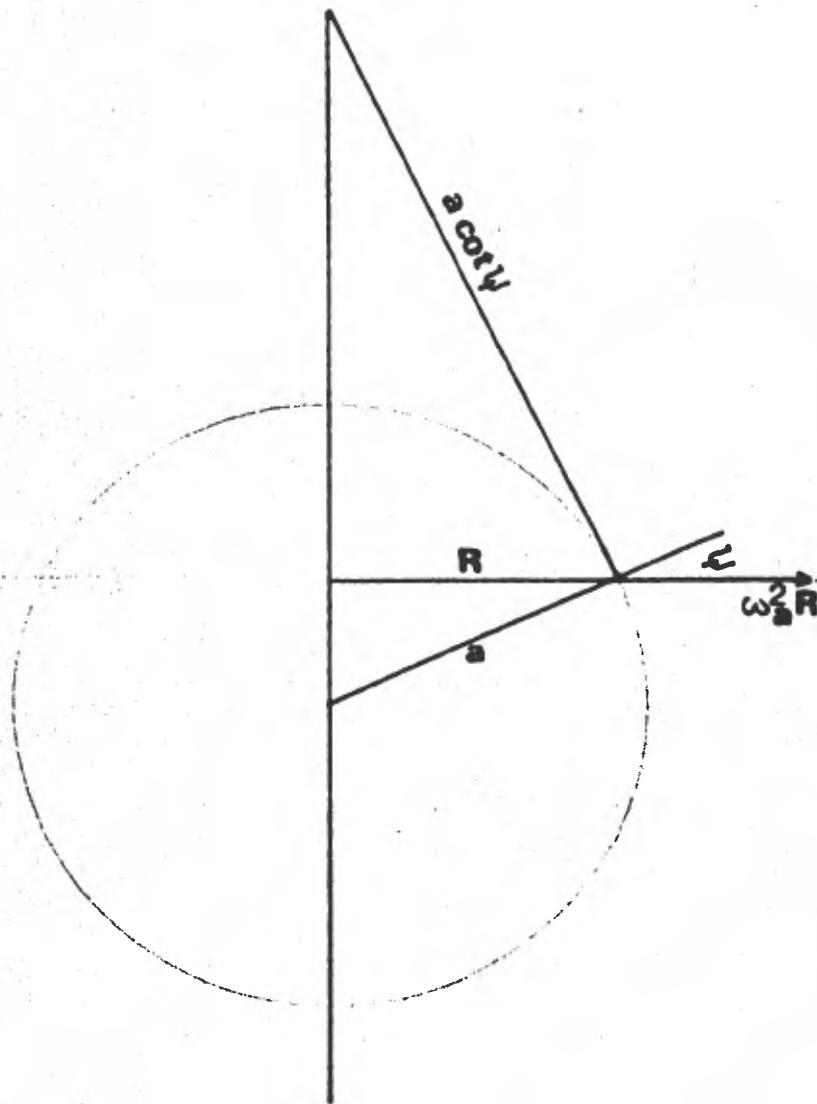


figura 5

Una partícula sobre la superficie está siempre sujeta a una aceleración centrífuga $C = \Omega^2 R$, debida a la rotación de la tierra. Si se le suma una velocidad V_e extra hacia el este, lo que equivaldría a sumarle una velocidad angular $W = V_e/R$ da lugar a que la rotación absoluta relativa a un sistema fijo de coordenadas es $W_a = \Omega + W$, y la aceleración centrífuga

$$C_a = W_a^2 R \quad (4.1)$$

La aceleración centrífuga adicional debida a la velocidad V_e es:

$$C_v = C_a - C$$

$$C_v = W_a^2 R - \Omega^2 R$$

$$C_v = (\Omega + W)^2 R - \Omega^2 R$$

$$C_v = W^2 R + 2W\Omega R$$

$$C_v = (V_e^2/R) + 2 \Omega V_e \quad (4.2)$$

La componente horizontal (componente en el plano tangente) de la aceleración es:

$$C_{Hv} = 2\Omega V_e \text{sen}\psi + \frac{V_e^2 \text{sen}\psi}{R} \quad (4.3)$$

y observando de la figura 5 que $R = a \cos \psi$, la ecuación (4.3) se convierte en:

$$C_{Hv} = 2\Omega V_e \text{sen}\psi + \frac{V_e^2}{a \cot\psi} \quad (4.4)$$

En donde $a \cot \psi$ es la distancia a lo largo del plano tangente a su intersección en el eje de rotación. Este es el radio de curvatura de la proyección de el círculo de latitud sobre el plano tangente (figura 6).

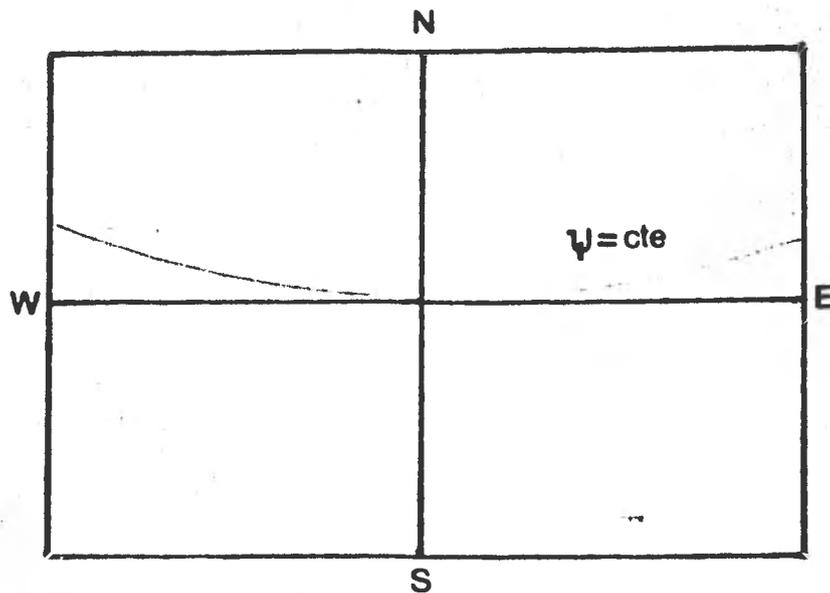


figura 6

El término $\frac{v_e^2}{a \cot \psi}$ es entonces la componente horizontal de la aceleración, la cual debe ser balanceada hacia afuera para mantener a la partícula moviéndose a lo largo de la trayectoria en un gran círculo.

El término $2\Omega v_e \sin \psi$ es la componente horizontal de la aceleración, llamada de coriolis, la cual en la figura 5 se puede observar que está dirigida hacia el sur y a la derecha de la velocidad.

Para un movimiento hacia el oeste, esta aceleración deberá ser hacia el norte. El término $v_e^2/a \cot \psi$ es una aceleración hacia el sur en cada caso.

Consideraré ahora el caso de un movimiento horizontal meridional dirigido hacia el norte (a lo largo de una línea de longitud constante).

Aquí es necesario considerar que el momento angular por unidad de masa (ωR^2) alrededor del eje terrestre se conserva.

Considerando como anteriormente se expuso que:

$$W_a = \Omega + W$$

Se expresa la consideración de conservación de momento en la forma siguiente:

$$d(WaR^2) = 0 \quad (4.5)$$

$$R^2 dW_a + 2RW_a dR = 0 \quad (4.6)$$

o

$$RdW_a + 2W_a dR = 0 \quad (4.7)$$

Escribiendo a R como:

$$R = a \cos \psi$$

$$dR = -a \operatorname{sen} \psi d\psi$$

$$dR = -\operatorname{sen} \psi dS \quad (4.8)$$

Siendo que:

$$dR = -\operatorname{sen} \psi V_n dt \quad (4.9)$$

La ecuación (4.7) se puede reescribir como:

$$RdWa + 2Wa(-\text{sen}\psi V_n dt) = 0 \quad (4.10)$$

o bien

$$R \frac{dWa}{dt} = 2Wa \text{ sen}\psi v_n \quad (4.11)$$

$$R \frac{dWa}{dt} = 2 (\Omega + W) V_n \text{ sen}\psi \quad (4.12)$$

El término de la derecha en la ecuación (4.12) corresponde implícitamente a la aceleración horizontal hacia el este y debido a que estoy considerando un movimiento con componente este oeste, da lugar a tener $W = 0$. Por lo que la ecuación (4.12) se reduce a:

$$C_{HV} \text{ (hacia el este)} = 2\Omega V_n \text{ sen}\psi \quad (4.13)$$

Esta última ecuación muestra que la aceleración está dirigida hacia la derecha de la velocidad.

Con un análisis semejante (ref.7) es posible mostrar que en el hemisferio sur, la componente horizontal de la aceleración de Coriolis está dirigida hacia la izquierda de la velocidad horizontal.

Los movimientos horizontales hacia el polo inducen

aceleraciones relativas en la misma dirección como la rotación de la tierra. De manera que se conserve el momento angular

El movimiento zonal induce una aceleración centrífuga adicional, la cual, tiene una componente hacia el ecuador en el plano horizontal para movimientos en sentido de la rotación de la tierra y una componente hacia el polo para movimientos contrarios al sentido de rotación terrestre.

Algunos puntos que destacan por su importancia sobre la aceleración de Coriolis son los siguientes:

- 1.- La aceleración existe únicamente cuando existe una velocidad relativa a la superficie de la tierra.
- 2.- La magnitud de la componente horizontal está dada por la siguiente expresión:

$$2\Omega \sin \psi V$$

donde Ω es la velocidad angular de la tierra

ψ es la latitud

V es la velocidad horizontal

- 3.- No existe componente horizontal en el ecuador, en don

de $\sin \psi = 0$

- 4.- La aceleración está en dirección normal a la velocidad y a la derecha en el hemisferio norte, y a la izquierda en el hemisferio sur.
- 5.- No se realiza ningún trabajo ya que no existe componente de la aceleración en la dirección del movimiento

Un cálculo de la aceleración de Coriolis a 45° de latitud se logra considerando que la velocidad de la tierra es de 7.292×10^{-5} radianes por segundo, por lo que evaluando la expresión para el parámetro de Coriolis

$$2\Omega \sin \psi = 103 \times 10^{-4} \text{ seg}^{-1} \quad (4.14)$$

Para dar una idea de los valores que toma la aceleración de Coriolis, considérese una corriente cuya velocidad es de un nudo (1 milla náutica por hora). La aceleración de Coriolis será:

$$2\Omega \sin \psi V = 2.86 \times 10^{-8} \frac{\text{millas náuticas}}{\text{seg}^2}$$

En una hora que le toma a esta corriente viajar una

milla, el desplazamiento transversal calculado de $S = 1/2 at^2$ es de 0.186 millas náuticas, que es alrededor del 20% de la distancia que viajó.

Hasta aquí se ha considerado la componente horizontal de la aceleración de Coriolis asociada a movimientos horizontales, que es lo que más se usa en Oceanografía, pero es necesario recordar que el movimiento vertical también está influenciado por la aceleración de Coriolis y que existe una componente asociada con el movimiento vertical.

Esta componente vertical surge únicamente de la componente este-oeste de la velocidad horizontal, y del desarrollo de las ecuaciones (4.2) a (4.13), se ve que la aceleración vertical está dada por:

$$2\Omega V_e \cos\psi + \frac{v^2}{a}$$

y está dirigida en sentido opuesto a la aceleración de la gravedad (hacia arriba) para V_e positiva.

Esta componente tiene su máximo valor en el ecuador y tiene valor cero en los polos.

Caundo se realizan mediciones de gravedad desde una

plataforma en movimiento, es necesario hacerles una corrección que se denomina de "Eotvos". Por ejemplo, con una velocidad de 10 nudos (cerca de 500 cm/seg), la componente vertical en el ecuador es de 0.05 cm/seg^2 .

Esta cantidad puede ser un factor limitante en la exactitud de los valores de gravimetría que se realizan sobre el mar.

CAPITULO V

ECUACION DE MOVIMIENTO

Sistema de Referencia.

Para iniciar el estudio de la descripción del movimiento en el océano, es necesario considerar que el sistema de referencia más natural, sobre el cual es conveniente realizar dicha descripción es aquel sistema que rote con la velocidad angular planetaria. Claro está que los fenómenos que se estudien, ellos mismos no dependen del sistema de referencia que escojamos; pero es necesario tener en cuenta que la descripción que hagamos de ellos depende del sistema que escojamos.

Por ejemplo, si considero a un observador en un sistema de referencia rotando, este observador, dirá que aquellos objetos en sistemas de referencia inerciales seguirán una trayectoria curva, hecho que dará lugar a pensar que tales objetos se encuentran sometidos a una aceleración.

De la mecánica se sabe que estos sistemas acelerados se encuentran descritos por la segunda ley de Newton (ref. 8), la cual para sistemas inerciales se puede escribir de la siguiente manera:

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i = m\vec{a} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m \frac{d\vec{v}_a}{dt} \quad (5.1)$$

en donde:

$\frac{d}{dt}$ es la derivada total respecto al tiempo

\vec{v}_a es la velocidad absoluta

\vec{F}_i

La ambigüedad que se presenta a la descripción del movimiento a partir de la segunda ley de Newton en sistemas inerciales cuando ella se aplica a sistemas no inerciales, se resuelva en la medida en que se pueda reescribir esta segunda ley de Newton, en términos que son directamente observados desde el sistema de referencia no inercial.

Para el efecto, consideraré un vector \vec{A} , el cual tiene magnitud constante, y rota con una velocidad angular Ω .

La representación de este vector \vec{A} en un sistema de ejes x' , y' , z' rotando con velocidad angular Ω (fig. 7) es la siguiente:

$$\vec{A} = A'_x \hat{i} + A'_y \hat{j} + A'_z \hat{k} \quad (5.2)$$

Con objeto de establecer la dependencia de este vector respecto al tiempo, tomaré la derivada total del vector \vec{A} , la cual queda de la manera siguiente:

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{dA'_x}{dt} \hat{i} + \frac{dA'_y}{dt} \hat{j} + \frac{dA'_z}{dt} \hat{k} + A'_x \frac{d\hat{i}}{dt} + A'_y \frac{d\hat{j}}{dt} + A'_z \frac{d\hat{k}}{dt}$$

Auxiliándome de la figura 8 obtendré el cambio del valor \vec{r} en el tiempo, quedando como sigue:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

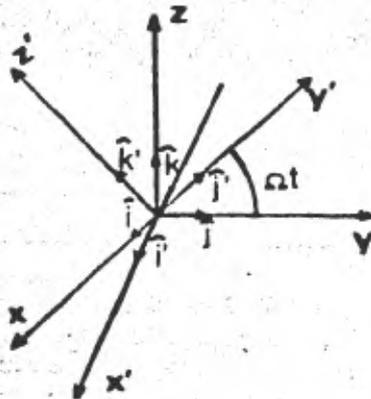


figura 7

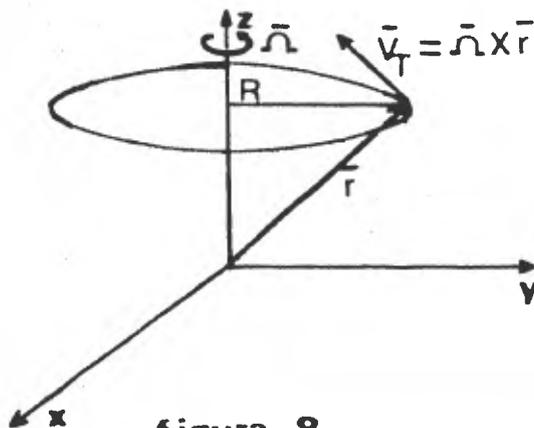


figura 8

Aplicando el mismo razonamiento, calcularé de la siguiente manera el cambio de los vectores unitarios

$$\frac{d\hat{i}}{dt} = \bar{\omega}_x \hat{i}$$

$$\frac{d\hat{j}}{dt} = \bar{\omega}_x \hat{j} \quad (5.5)$$

$$\frac{d\hat{k}}{dt} = \bar{\omega}_x \hat{k}$$

Ahora sustituyendo estos términos (5.5) en la ecuación (5.3) se obtiene:

$$\frac{d\bar{A}}{dt} = \frac{d}{dt} (A'_x \hat{i} + A'_y \hat{j} + A'_z \hat{k}) + \bar{\omega}_x (A'_x \hat{i} + A'_y \hat{j} + A'_z \hat{k})$$

$$\frac{d\bar{A}}{dt} = \frac{dA'}{dt} + \bar{\omega}_x \bar{A}' \quad (5.6)$$

Esta última ecuación nos dice que la descripción del movimiento respecto del sistema inercial es igual a la descripción respecto del sistema rotando más una contribución debida a la rotación.

Este resultado se generaliza en el siguiente operador:

$$\left(\frac{d}{dt}\right)_I = \left(\frac{d}{dt}\right)_R + \bar{\omega}_x \quad (5.7)$$

en donde:

$\left(\frac{d}{dt}\right)_I$ - derivada total respecto a un sistema inercial

$\left(\frac{d}{dt}\right)_R$ - derivada total respecto a un sistema no inercial (rotando)

$\bar{\omega} \times \bar{r}$ - contribución debida a la rotación.

Ahora consideraré a un elemento de fluido arbitrario, cuya posición está determinada por su vector posición \bar{r} .

El cambio de este vector con respecto del tiempo en un sistema rotando, según la ecuación 5.7, estará expresado como:

$$\left(\frac{d\bar{r}}{dt}\right)_I = \left(\frac{d\bar{r}}{dt}\right)_R + \bar{\omega} \times \bar{r} \quad (5.8)$$

o bien:

$$\bar{v}_I = \bar{v}_R + \bar{\omega} \times \bar{r} \quad (5.9)$$

en donde:

\bar{v}_I - es la velocidad del elemento de fluido en el

sistema de referencia inercial

\bar{v}_R - es la velocidad relativa en el sistema de referencia no inercial.

Si ahora aplico la ecuación (5.7) a la ecuación (5.9), obtengo las variaciones de la velocidad respecto del tiempo en el sistema de referencia tanto inercial como no inercial.

$$\left(\frac{d\bar{v}}{dt}\right)_I = \left(\frac{d\bar{v}}{dt}\right)_R + \bar{\Omega} \times \bar{v}_I \quad (5.10)$$

$$\left(\frac{d\bar{v}}{dt}\right)_I = \left(\frac{d\bar{v}}{dt}\right)_R + \frac{d}{dt} (\bar{\Omega} \times \bar{r}) + \bar{\Omega} \times (\bar{v}_R + \bar{\Omega} \times \bar{r}) \quad (5.11)$$

$$\left(\frac{d\bar{v}}{dt}\right)_I = \left(\frac{d\bar{v}}{dt}\right)_R + \frac{d\bar{\Omega}}{dt} \times \bar{r} + \bar{\Omega} \times \left(\frac{d\bar{r}}{dt}\right)_R + \bar{\Omega} \times (\bar{v}_R + \bar{\Omega} \times \bar{r}) \quad (5.12)$$

$$\left(\frac{d\bar{v}}{dt}\right)_I = \left(\frac{d\bar{v}}{dt}\right)_R + \frac{d\bar{\Omega}}{dt} \times \bar{r} + \bar{\Omega} \times \bar{v}_R + \bar{\Omega} \times (\bar{\Omega} \times \bar{r}) + \bar{\Omega} \times \bar{v}_R \quad (5.13)$$

$$\left(\frac{d\bar{v}}{dt}\right)_I = \left(\frac{d\bar{v}}{dt}\right)_R + \frac{d\bar{\Omega}}{dt} \times \bar{r} + 2\bar{\Omega} \times \bar{v}_R + \bar{\Omega} \times (\bar{\Omega} \times \bar{r}) \quad (5.14)$$

$$\left(\frac{d\bar{v}}{dt}\right)_I = \left(\frac{d\bar{v}}{dt}\right)_R + 2\bar{\Omega} \times \bar{v}_R + \bar{\Omega} \times (\bar{\Omega} \times \bar{r}) + \frac{d\bar{\Omega}}{dt} \times \bar{r} \quad (5.15)$$

La discrepancia entre las aceleraciones registradas en los dos sistemas de referencia son precisamente los tres términos a la derecha en la ecuación (5.15), términos que se

identifican de la siguiente manera:

El término $2\bar{\Omega}\bar{X}\bar{V}_R$ es la aceleración de Coriolis anteriormente descrita. El término $\bar{\Omega}\bar{X}(\bar{\Omega}\bar{X}\bar{r})$ corresponde a la aceleración centrípeta, y el último término $d\bar{\Omega}/dt \bar{X}\bar{r}$ es una contribución debida a las variaciones de la rotación misma. Este término es poco importante para fenómenos oceanográficos, a menos que dichos fenómenos tengan escalas de tiempo muy grandes.

Con objeto de completar el desarrollo de la ecuación (5.15), utilizaré la siguiente identidad vectorial (ref.2)

$$\bar{A}\bar{X}(\bar{B}\bar{X}\bar{C}) = (\bar{A}\cdot\bar{C})\bar{B} - (\bar{A}\cdot\bar{B})\bar{C}$$

aplicándola al término $\bar{\Omega}\bar{X}(\bar{\Omega}\bar{X}\bar{r})$ queda:

$$\bar{\Omega}\bar{X}(\bar{\Omega}\bar{X}\bar{r}) = (\bar{\Omega}\cdot\bar{r})\bar{\Omega} - (\bar{\Omega}\cdot\bar{\Omega})\bar{r}$$

$$\bar{\Omega}\bar{X}(\bar{\Omega}\bar{X}\bar{r}) = -\bar{\Omega}^2\bar{r} \quad (5.16)$$

donde \bar{r} es el radio vector perpendicular al eje de rotación (fig. 8).

Sustituyendo (5.16) en (5.15)

$$\left(\frac{d\bar{V}}{dt}\right)_I = \left(\frac{d\bar{V}}{dt}\right)_R + 2\bar{\Omega}\bar{X}\bar{V}_R - \bar{\Omega}^2\bar{r} \quad (5.17)$$

Tomando en cuenta que las fuerzas reales que actúan, tanto en los sistemas oceánicos como atmosféricos, son principalmente la fuerza gravitacional, la fuerza debida al gradiente de presión, y las fuerzas de fricción, es posible escribir la segunda ley de Newton en la forma siguiente:

$$\frac{d\bar{v}}{dt} + 2\bar{\Omega} \times \bar{v} - \bar{\Omega}^2 \bar{R} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + G \frac{M_T}{r} \bar{r} + \bar{F} \quad (5.18)$$

donde \bar{F} representa los términos de fricción.

Asociando términos, se obtiene:

$$\frac{d\bar{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p - 2\bar{\Omega} \times \bar{v} + \bar{\Omega}^2 \bar{R} + G \frac{M_T}{r} \bar{r} + \bar{F} \quad (5.19)$$

En esta ecuación se puede definir una gravedad efectiva \bar{g} que estaría dada por la suma de la aceleración de la gravedad $G \frac{M_T}{r}$ y el término $\bar{\Omega}^2 \bar{R}$, lo que haría de la ecuación (5.19) reducirse a la forma:

$$\frac{d\bar{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p - 2\bar{\Omega} \times \bar{v} + \bar{g} + \bar{F} \quad (5.20)$$

Esta última ecuación describe el movimiento de la porción de fluido arbitrario que he considerado, en términos que son observados directamente desde el sistema de referen-

cia no inercial, por lo que a esta ecuación se le denomina ecuación de movimiento.

CAPITULO VI

MODELO GEOSTROFICO

Con objeto de llegar a la descripción geostrófica de una parcela de agua, consideraré nuevamente la ecuación de movimiento (5.20), la cual así planteada, generalmente no es aplicable, de manera directa, a los sistemas oceanográficos ya que el origen que se consideró para llegar a ellas se localiza en el centro de la tierra, y como los datos que se obtienen son a partir de su superficie, es conveniente transformar la ecuación de movimiento (5.2) a un sistema con origen en la superficie de la tierra, a un sistema como este se le denomina "Sistema tangente a la superficie".

Escogiendo el eje "x" del sistema de referencia en el sentido positivo hacia el este, el eje "y" en sentido positivo hacia el norte, y eje "z" en sentido positivo hacia afuera de la superficie terrestre de manera perpendicular a ella, en otras palabras, expresaré la ecuación de movimiento (5.20) en coordenadas esféricas.

Para hacer esto, descompondré al vector velocidad \bar{v} en sus respectivas componentes "x", "y" y "z", las cuales son: U, v y w.

Considerando además las identidades de transformación de un sistema cartesiano a un sistema esférico dadas por las siguientes expresiones (ref 9).

$$\begin{aligned} X &= r \cos \theta \cos \phi \\ Y &= r \cos \theta \sin \theta \\ Z &= r \sin \theta \end{aligned} \quad (6.1)$$

Además recordando a el operador derivada material, el cual se expresa como (ref 9).

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z} \quad (6.2)$$

Inicialmente expresaré el cambio de la velocidad respecto del tiempo en función de sus componentes:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \hat{i} \frac{dU}{dt} + \hat{j} \frac{dv}{dt} + \hat{k} \frac{dw}{dt} + U \frac{d\hat{i}}{dt} + v \frac{d\hat{j}}{dt} + w \frac{d\hat{k}}{dt} \quad (6.3)$$

Ahora es necesario saber a que es igual las derivadas de los vectores unitarios

$$\frac{d\hat{i}}{dt}, \frac{d\hat{j}}{dt}, \text{ y } \frac{d\hat{k}}{dt}$$

Utilizando la ecuación (6.2) expresaré a $\frac{d\hat{i}}{dt}$ como:

$$\frac{d\hat{i}}{dt} = \frac{\delta\hat{i}}{\delta t} + U \frac{\delta\hat{i}}{\delta x} + v \frac{\delta\hat{i}}{\delta y} + w \frac{\delta\hat{i}}{\delta z} \quad (6,4)$$

El cambio local de el vector unitario \hat{i} es nulo y ademas $\hat{i} = \hat{i}(x)$; $\hat{i} \neq \hat{i}(y)$; y $\hat{i} \neq \hat{i}(z)$ por lo tanto:

$$\frac{d\hat{i}}{dt} = U \frac{\delta\hat{i}}{\delta x} \quad (6.5)$$

Auxiliándome de la figura 9 evaluaré $\frac{\delta\hat{i}}{\delta x}$

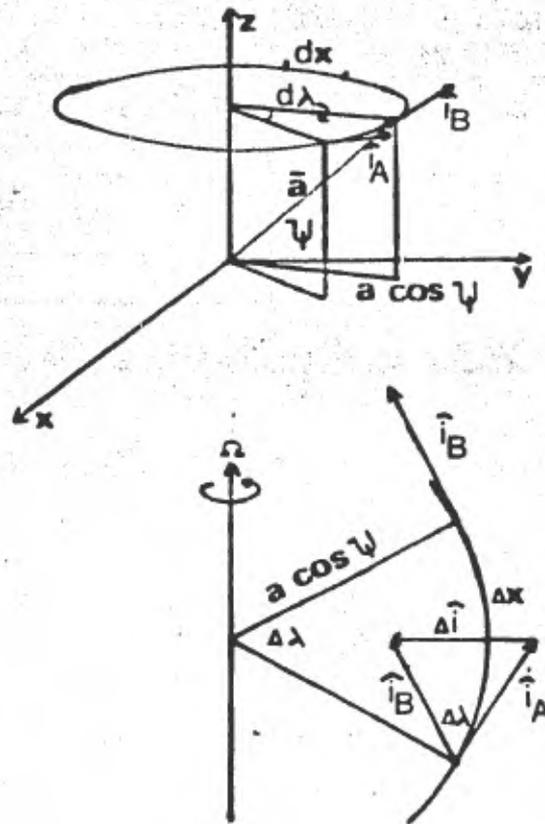


figura 9

$\frac{\delta \hat{i}}{\delta x}$; será igual a la magnitud de $\frac{\delta \hat{i}}{\delta x}$ por un vector unitario que le determinará su dirección el cual, como puede apreciarse en la figura 9, $\Delta \hat{i}$ tiene dirección perpendicular al eje de rotación.

Tomando en cuenta la definición deradian, se puede escribir

$$\frac{\delta \hat{i}}{\delta x} = \left| \frac{\delta \hat{i}}{\delta x} \right| \cdot (\text{su vector unitario}) \quad (6.6)$$

pero:

$$\left| \frac{\delta \hat{i}}{\delta x} \right| = \lim_{\delta x \rightarrow 0} \left| \frac{\delta \hat{i}}{\delta x} \right| = \frac{\Delta \lambda |\hat{i}_A|}{\Delta \lambda \cos \psi}$$

o bien

$$\left| \frac{\delta \hat{i}}{\delta x} \right| = \frac{1}{a \cos \psi}$$

Es posible apreciar de la figura 9 que $\Delta \hat{i}$ sólo depende de \hat{j} y \hat{k} ; $\Delta \hat{i} = \Delta \hat{i}(\hat{j}, \hat{k})$ por lo que con ayuda de la figura 10 se obtiene esta dependencia.

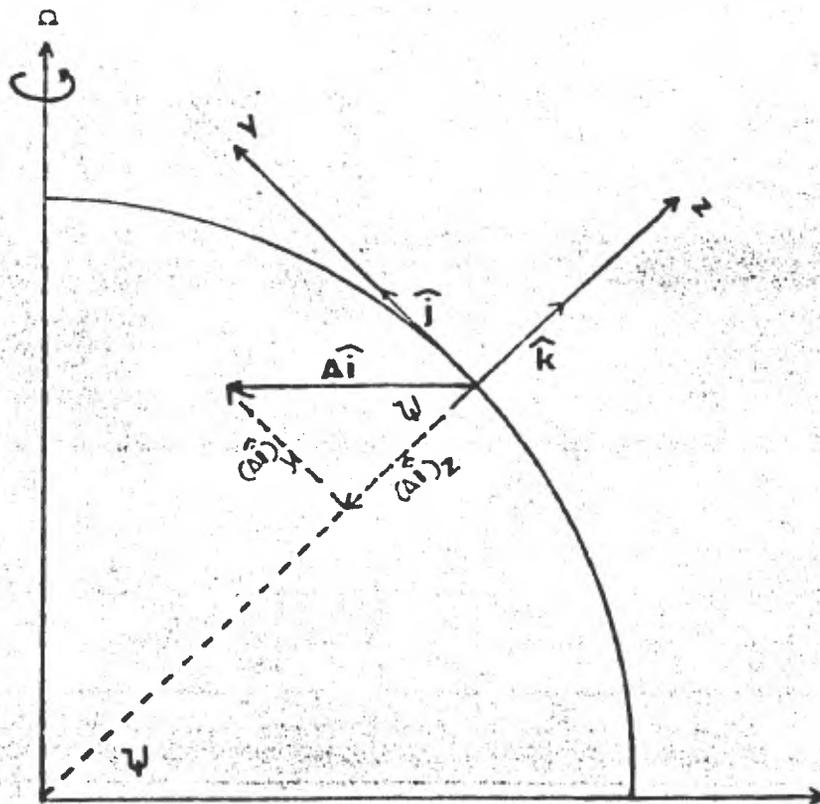


figura 10

$$\Delta \hat{i} = \text{sen} \psi \hat{j} - \text{cos} \psi \hat{k} \quad (6.8)$$

Sustituyendo en la ecuación (6.6) se tiene:

$$\frac{\delta \hat{i}}{\delta x} = \frac{1}{a \cos \psi} (\text{sen} \psi \hat{j} - \text{cos} \psi \hat{k}) \quad (6.9)$$

$$\frac{\delta \hat{i}}{\delta x} = \frac{\tan \psi}{a} \hat{j} - \frac{1}{a} \hat{k} \quad (6.10)$$

por lo que:

$$\frac{d\hat{i}}{dt} = U \frac{\tan \psi}{a} \hat{j} - \frac{U}{a} \hat{k} \quad (6.11)$$

Ahora para calcular $\frac{d\hat{j}}{dt}$ también utilizaré la ecuación (6.2)

$$\frac{d\hat{j}}{dt} = \frac{\delta\hat{j}}{\delta t} + U \frac{\delta\hat{j}}{\delta x} + v \frac{\delta\hat{j}}{\delta y} + w \frac{\delta\hat{j}}{\delta z}$$

En donde el cambio local de \hat{j} es nulo y con ayuda de la figura 11 se observa que $\hat{j} = \hat{j}(x, y)$ únicamente por lo que:

$$\frac{d\hat{j}}{dt} = U \frac{\delta\hat{j}}{\delta x} + v \frac{\delta\hat{j}}{\delta y} \quad (6.12)$$

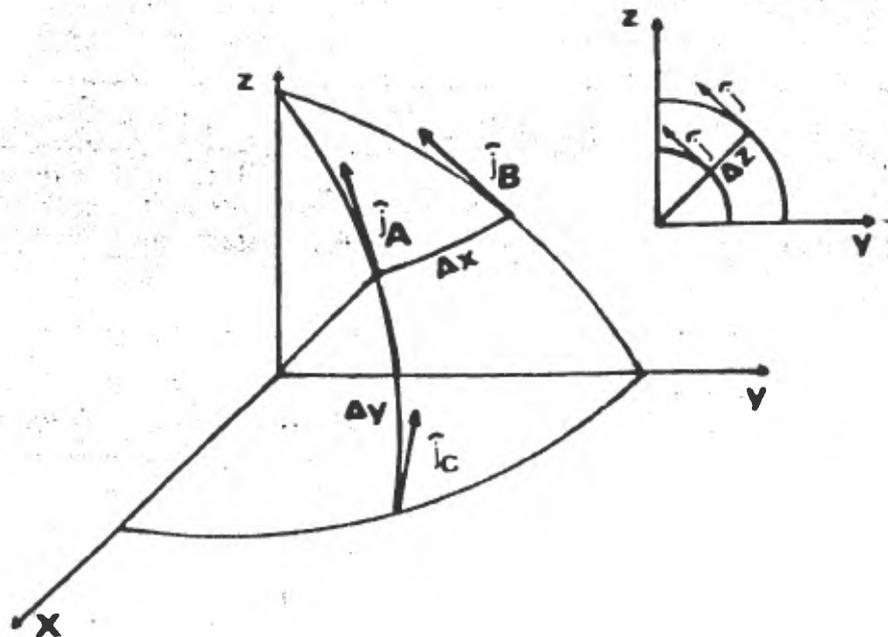


figura 11

Para calcular $\frac{\delta \hat{j}}{\delta x}$ me auxiliaré de la figura 12

$$\frac{\delta \hat{j}}{\delta x} = \left| \frac{\delta \hat{j}}{\delta x} \right| \cdot (\text{vector unitario}) \quad (6.13)$$

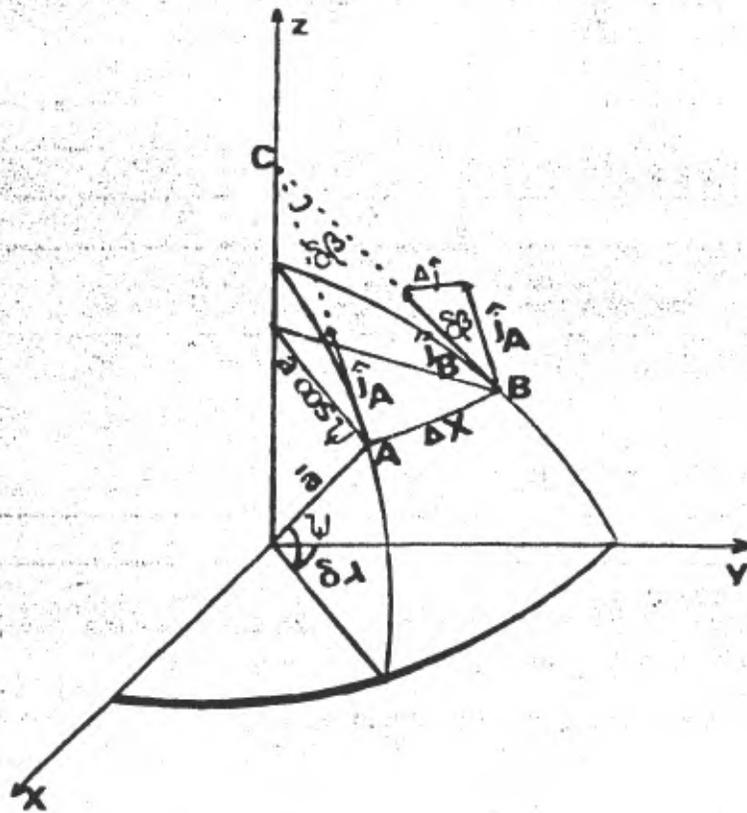


figura 12

Se tiene:

$$\left| \frac{\delta \hat{j}}{\delta x} \right| = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{|\Delta \hat{j}|}{\Delta x} \approx \frac{\delta \beta |\hat{j}_A|}{\Delta x} \quad (6.14)$$

pero del triángulo OAC

$$\tan \psi = \frac{a}{AC} = \frac{a}{\Delta x / \Delta \beta} \quad (6.15)$$

utilizando $\Delta = \delta$

$$\tan \psi = \frac{a \Delta \beta}{\Delta x}; \quad \Delta x = \frac{a \delta \beta}{\tan \psi} \quad (6.16)$$

por lo tanto:

$$\left| \frac{\delta \hat{j}}{\delta x} \right| = \frac{\delta \beta}{\delta \beta a / \tan \psi} = \frac{\tan \psi}{a} \quad (6.17)$$

sustituyendo esta última expresión en la ecuación (6.13)

$$\frac{\delta \hat{j}}{\delta x} = \frac{\tan \psi}{a} (-\hat{i}) = -\frac{\tan \psi}{a} \hat{i} \quad (6.18)$$

— Ahora obtendré la variación de \hat{j} respecto a "y", para lo cual utilizaré la figura 13.

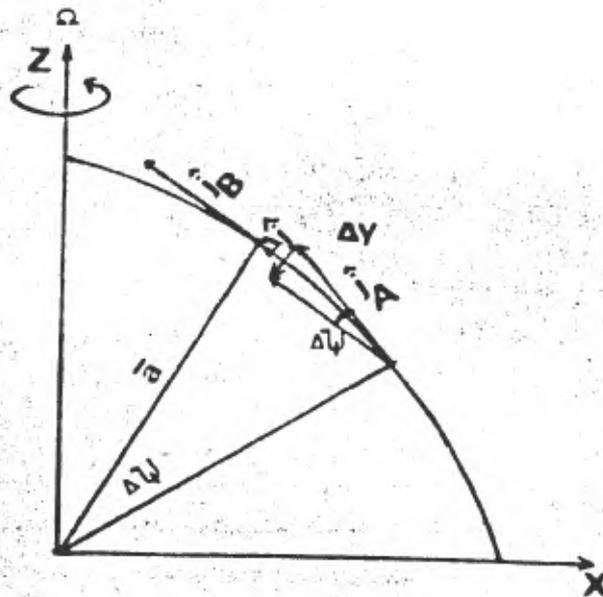


figura 13

De donde se observa que:

$$\left| \frac{\delta \hat{j}}{\delta y} \right| = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \left| \frac{\delta \hat{j}}{\Delta y} \right| \approx \left| \frac{\Delta \hat{j}}{\Delta y} \right| = \frac{\Delta \psi | \hat{j}_A |}{a \Delta \psi} = \frac{1}{a} \quad (6.19)$$

por lo tanto $\frac{\delta \hat{j}}{\delta y}$ estará dada por la siguiente expresión

$$\frac{\delta \hat{j}}{\delta y} = \left| \frac{\delta \hat{j}}{\delta y} \right| \cdot (\text{vector unitario}) \quad (6.20)$$

$$\frac{\delta \hat{j}}{\delta y} = \frac{1}{a} (-\hat{k}) \quad (6.21)$$

esto último porque el vector $\Delta \hat{j}$ queda en dirección de $-\hat{k}$

Finalmente analizaré las componentes de $\frac{d\hat{k}}{dt}$ utilizando la ecuación (6.2).

$$\frac{d\hat{k}}{dt} = \frac{\delta\hat{k}}{\delta t} + U \frac{\delta\hat{k}}{\delta x} + v \frac{\delta\hat{k}}{\delta y} + w \frac{\delta\hat{k}}{\delta z} \quad (6.22)$$

Nuevamente el vector unitario \hat{k} no depende del tiempo ; y de la figura 14 se observa que \hat{k} es función de "x" y "y" no existiendo dependencia de z, por lo que la ecuación (6.22) se reduce a:

$$\frac{d\hat{k}}{dt} = U \frac{\delta\hat{k}}{\delta x} + v \frac{\delta\hat{k}}{\delta y}$$

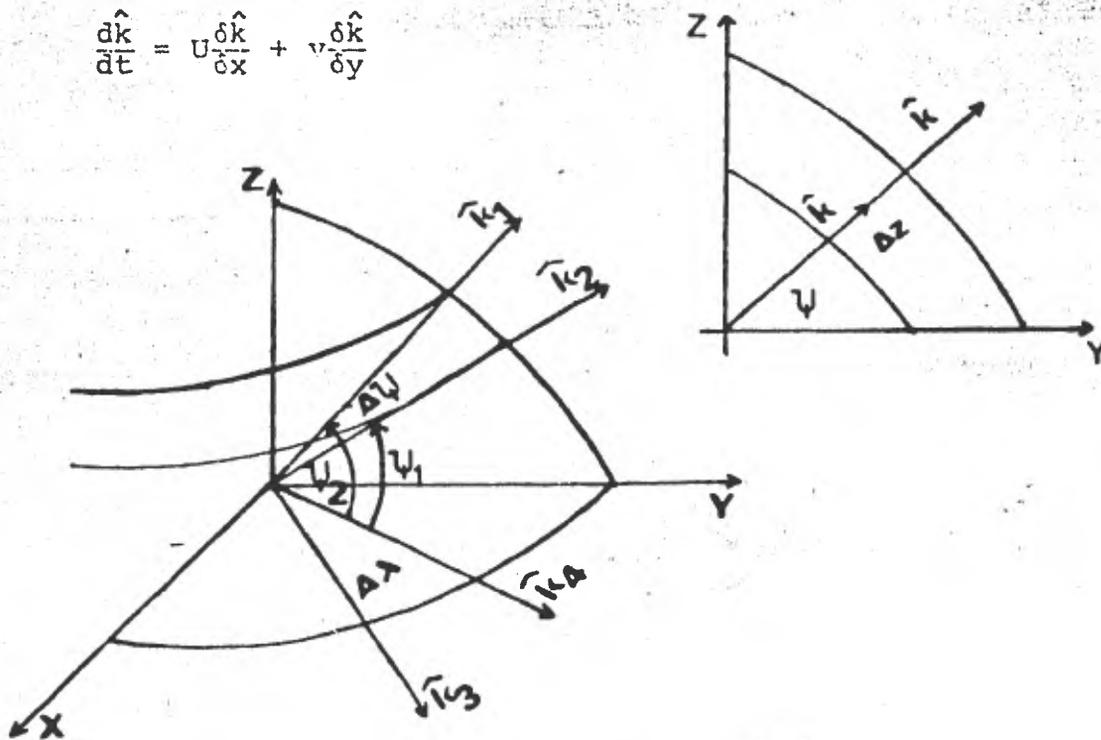


figura 14

Para obtener el término $\frac{\delta \hat{k}}{\delta x}$ me auxiliaré de la figura (15).

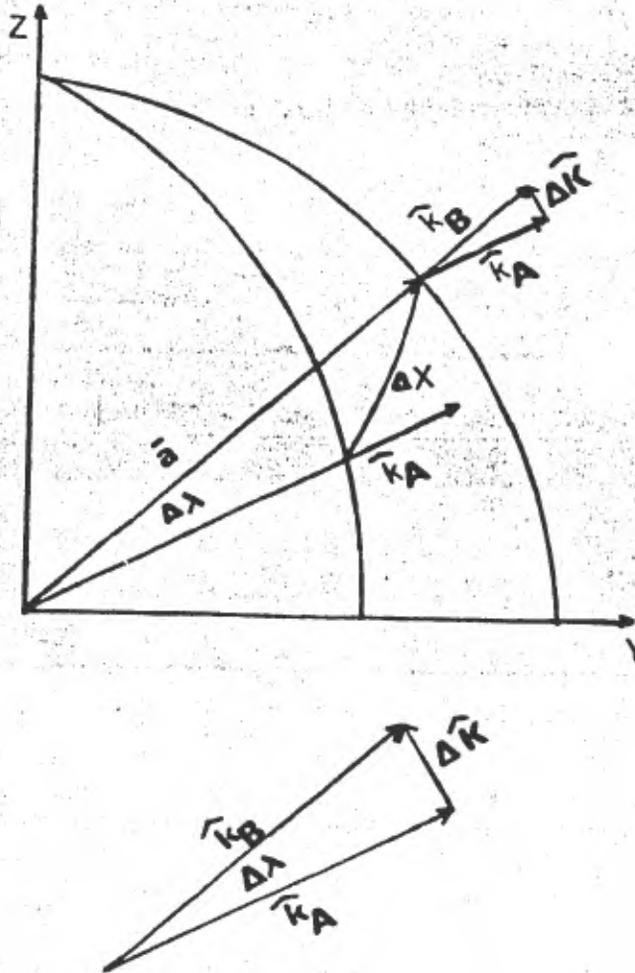


figura 15

Se observa que $\Delta \hat{k}$ corre paralelo a los paralelos, por lo que la dirección de $\Delta \hat{k}$ es la dirección del vector \hat{i} . De tal manera que:

$$\left| \frac{\delta \hat{k}}{\delta x} \right| = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{|\Delta \hat{k}|}{\Delta x} \approx \frac{|\Delta \hat{k}|}{\Delta x} = \frac{\Delta \lambda |\hat{k}_A|}{\Delta \lambda a} \quad (6.24)$$

por lo tanto

$$\frac{\delta \hat{k}}{\delta x} = \frac{1}{a} \hat{i} \quad (6.25)$$

Auxiliándome de la figura (16) analizaré el valor de $\frac{\delta \hat{k}}{\delta y}$.

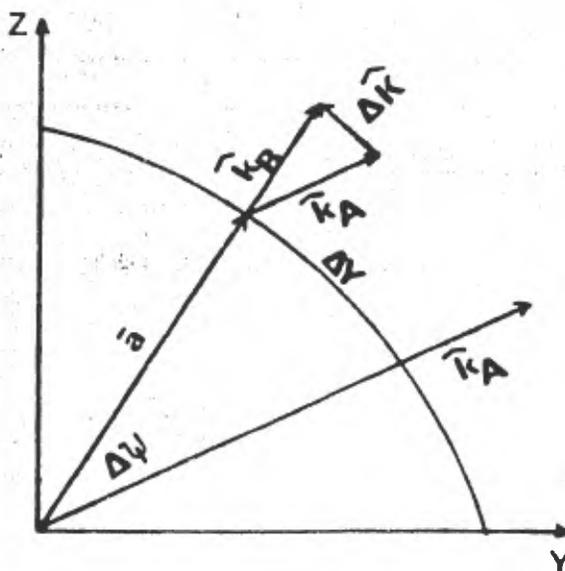


figura 16

$$\frac{\delta \hat{k}}{\delta y} = \left| \frac{\delta \hat{k}}{\delta y} \right| \cdot (\text{vector unitario}) \quad (6.26)$$

$$\left| \frac{\delta \hat{k}}{\delta y} \right| = \frac{|\delta \hat{k}|}{|\delta y|} = \frac{\Delta \psi |\hat{k}_A|}{a \Delta \psi} = \frac{1}{a} \quad (6.27)$$

Se observa que la dirección de $\Delta \hat{k}$ es ahora a lo largo de \hat{j} lo que implica que:

$$\frac{\delta \hat{k}}{\delta y} = \frac{\hat{j}}{a} \quad (6.28)$$

obteniéndose:

$$\frac{d\hat{k}}{dt} = \frac{U}{a} \hat{i} + \frac{U}{a} \hat{j} \quad (6.29)$$

Resumiendo a las derivadas totales de los vectores unitarios en las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{i}}{dt} &= u \frac{\tan \psi}{a} \hat{j} - \frac{U}{a} \hat{k} \\ \frac{d\hat{j}}{dt} &= - \frac{U \tan \psi}{a} \hat{i} - \frac{v}{a} \hat{k} \end{aligned} \quad (6.30)$$

$$\frac{d\hat{k}}{dt} = \frac{U}{a} \hat{i} + \frac{v}{a} \hat{j}$$

Sustituyendo estas expresiones (6.30) en la ecuación

(6.3) se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{v}}{dt} = & \frac{dU\hat{i}}{dt} + \frac{dv\hat{j}}{dt} + \frac{dw\hat{k}}{dt} + U\left(\frac{U\tan\psi}{a}\hat{j} - \frac{U\hat{k}}{a}\right) + v\left(\frac{-U\tan\psi}{a}\hat{i} - \frac{v\hat{k}}{a}\right) \\ & + w\left(\frac{U\hat{i}}{a} + \frac{v\hat{j}}{a}\right) \end{aligned} \quad (6.31)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{v}}{dt} = & \frac{dU\hat{i}}{dt} + \frac{dv\hat{j}}{dt} + \frac{dw\hat{k}}{dt} + \frac{U^2\tan\psi}{a}\hat{j} - \frac{U^2}{a}\hat{k} - \frac{Uv\tan\psi}{a}\hat{i} \\ & - \frac{v^2}{a}\hat{k} + \frac{Uw}{a}\hat{i} + \frac{vw}{a}\hat{j} \end{aligned} \quad (6.32)$$

Esta última ecuación (6.32) contiene la información sobre la contribución de la variación de los vectores unitarios a la aceleración en el nuevo sistema de coordenadas seleccionado.

La aceleración, debida a Coriolis se debe analizar también, con objeto de determinar la magnitud de sus componentes en este sistema tangente a la superficie terrestre y para ello me auxiliaré de la figura 17.

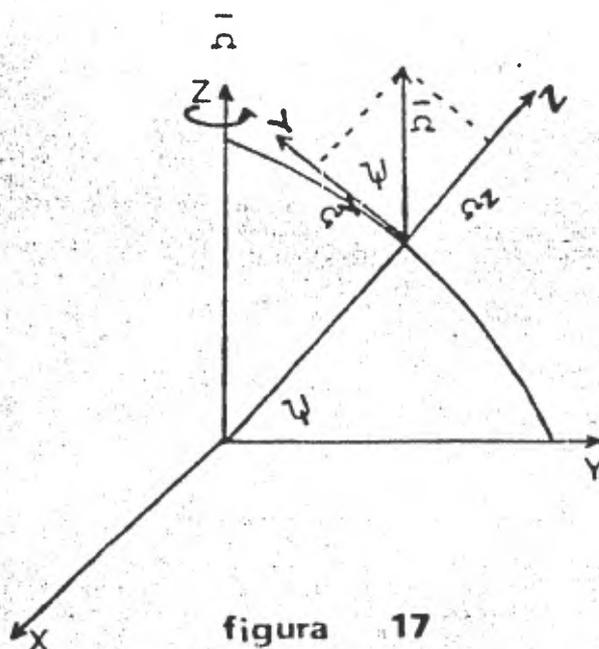


figura 17

De la anterior figura, se observa que la velocidad angular terrestre $\bar{\Omega}$ no tiene componente sobre el eje x por lo que las componentes de $\bar{\Omega}$ estarán dadas por las ecuaciones (6.33)

$$\Omega_x = 0$$

$$\Omega_y = \Omega \cos \psi$$

$$\Omega_z = \Omega \sin \psi$$

(6.33)

Sustituyendo ahora en la ecuación de movimiento (5.20), las contribuciones de las ecuaciones (6.30) y las componentes (6.33), se tendrá que para el eje x la ecuación de movimiento será:

$$\frac{dU}{dt} + 2(\Omega \times \mathbf{v}) \cdot \hat{i} - \left(\frac{Uv \tan \psi}{a} \right) \hat{i} + \frac{Uw}{a} \hat{i} =$$

$$\left\{ -\frac{1}{\rho} \nabla p + g + F \right\} \cdot \hat{i} \quad (6.34)$$

Desarrollando $\Omega \times \bar{v}$

$$\Omega \times \bar{v} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & \Omega \cos \psi & \Omega \sin \psi \\ U & v & w \end{vmatrix} = (w\Omega \cos \psi - v\Omega \sin \psi) \hat{i} + (U\Omega \sin \psi) \hat{j} + (-U\Omega \cos \psi) \hat{k}$$

por lo tanto la ecuación (6.34) se reduce a:

$$\frac{du}{dt} - \frac{U^2 \tan \psi}{a} + \frac{vw}{a} + 2(w\Omega \cos \psi - v\Omega \sin \psi) = -\frac{1}{\rho} \frac{\delta p}{\delta x} + F_x \quad (6.35)$$

para el eje y.

$$\frac{dv}{dt} + \frac{U^2 \tan \psi}{a} + \frac{vw}{a} + 2U\Omega \sin \psi = -\frac{1}{\rho} \frac{\delta p}{\delta y} + F_y \quad (6.36)$$

para el eje z se obtiene:

$$\frac{dw}{dt} - \frac{U^2 + v^2}{a} - 2U\Omega \cos \psi - g = -\frac{1}{\rho} \frac{\delta p}{\delta z} + F_z \quad (6.37)$$

De las anteriores ecuaciones se aprecia que la aceleración en este sistema, además del término relativo $d\bar{v}/dt$, y del de

Coriolis, tiene como contribución una aceleración más debida a la forma de la tierra, que está representado en todos los términos proporcionales a $(\frac{1}{a})$.

En los movimientos oceanográficos existen fenómenos que se encuentran parametrizados en las ecuaciones de movimiento, y el efecto real de algunos términos en estudios específicos son despreciables, por esta razón es conveniente eliminar desde un principio su efecto o contribución en las ecuaciones de movimiento, ya que, además de dificultar las ecuaciones en su solución, en ocasiones provocan perturbaciones en los primeros pasos de tiempo y llegan a desestabilizar el sistema lo que causa que la solución no converja.

Por lo tanto, antes de aplicar las ecuaciones a un problema específico, es necesario realizar un análisis sobre la magnitud de cada uno de los términos de las ecuaciones de movimiento, para ello consideraré el orden de magnitud de cada variable en las ecuaciones.

Para realizar este análisis dimensional, se utilizarán las siguientes órdenes de magnitud en el sistema M.K.S.

$$\begin{aligned} \psi &= 45^\circ \\ U, v, w &\sim 10^{-4} \text{ m/seg} \\ t &\sim 10^6 \text{ seg} \\ \rho &\sim 10^3 \text{ kg/m}^3 \\ L_x, L_y &\sim 10^6 \text{ m} \\ L_z &\sim 10^3 \text{ m} \\ p &\sim 10^6 \text{ kg/m}^2 \\ g &\sim 10 \text{ m/seg}^2 \\ \Omega &\sim 10^{-4} \text{ seg}^{-1} \end{aligned}$$

$A_x, A_y, A_z \sim \pm$ del tamaño de los términos no lineales, lo que implica que el cambio horizontal es mucho mayor que el vertical.

Sustituyendo estos valores en la ecuación de movimiento y recordando que:

$$\frac{dU}{dt} = \frac{\delta U}{\delta t} + U \frac{\delta U}{\delta x} + v \frac{\delta U}{\delta y} + w \frac{\delta U}{\delta z}$$

se tiene

$$\frac{\delta U}{\delta t} + U \frac{\delta U}{\delta x} + v \frac{\delta U}{\delta y} + w \frac{\delta U}{\delta z} + 2\Omega w \cos \psi - 2\Omega v \sin \psi - \frac{Uv \tan \psi}{a} + \frac{Uw}{a}$$

$$= -\frac{1}{\rho} \frac{\delta p}{\delta x} + F_x$$

$$\frac{U}{t} + U \frac{U}{L} + U \frac{U}{L} + w \frac{U}{H} = 10^{-4} \cdot 10 \cdot 1 + 10^{-4} \cdot 10^3 \cdot 1 + \frac{U \cdot U \cdot 1}{a} + \frac{Uw}{a}$$

$$= -\frac{1}{\rho} \frac{p}{L}$$

$$10^{-10} + 10^{-14} + 10^{-14} + 10^{-11} \cdot 10^{-3} + 10^{-1} + 10^{-14} \cdot 10^{-14} = 10^0$$

Utilizando la teoría de las aproximaciones a la expresión anterior, se observa que pueden despreciarse todos los términos de orden menores de 10^{-1} de tal forma que la ecuación de movimiento se transforma:

$$-2\Omega \text{sen}\psi v = -\frac{1}{\rho} \frac{\delta p}{\delta x} \quad (6.38)$$

o sea con

$$2\Omega \text{sen}\psi = f$$

$$-fv = -\frac{1}{\rho} \frac{\delta p}{\delta x} \quad (6.30)$$

De la misma manera el análisis de escala para la componente de la velocidad en "y" queda de la siguiente forma:

$$\frac{\delta v}{\delta t} + U \frac{\delta v}{\delta x} + v \frac{\delta v}{\delta y} + w \frac{\delta v}{\delta z} + \frac{U^2 \cdot \text{tang} \psi}{a} + \frac{vw}{a} + 2U\Omega \text{sen} \psi$$

$$= - \frac{1}{\rho} \frac{\delta p}{\delta y}$$

$$\frac{U}{L} + U \frac{U}{L} + U \frac{U}{L} + w \frac{U}{H} + \frac{U^2 \cdot 1}{a} + \frac{Uw}{a} + U \cdot 10^{-4} = - \frac{1}{\rho} \frac{\Delta p}{L}$$

$$10^{-10} + 10^{-14} + 10^{-14} + 10^{-11} + 10^{-14} + 10^{-14} + 10^{-8} = 10^0$$

Nuevamente utilizando la teoría de las aproximaciones conservamos los términos de orden mayor de tal forma que la ecuación de movimiento se transforma en:

$$2U\Omega \text{sen} \psi = - \frac{1}{\rho} \frac{\delta p}{\delta y} \tag{6.40}$$

o de otra manera:

$$fU = - \frac{1}{\rho} \frac{\delta p}{\delta y} \tag{6.41}$$

finalmente haciendo el mismo análisis en la componente de la ecuación de movimiento en el eje z, y despreciando los términos menores que 1, la ecuación se reduce a:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\delta p}{\delta z} = - g \tag{6.42}$$

Se aprecia que a latitudes medias existe en la horizon-

tal un balance de fuerzas, entre la fuerza de Coriolis y el gradiente de presión de acuerdo con (6.39) y (6.41).

$$-fv = -\frac{1}{\rho} \frac{\delta p}{\delta x} \quad (6.39)$$

$$fU = -\frac{1}{\rho} \frac{\delta p}{\delta y} \quad (6.41)$$

Al océano que satisface este balance se le llama océano geostrófico, generalmente a sus componentes se les denota:

$$U = U_g \quad v = v_g$$

por lo que las ecuaciones (6.39) (6.41) se conocen mejor como:

$$\begin{aligned} v_g &= \frac{1}{\rho f} \frac{\delta p}{\delta x} \\ U_g &= -\frac{1}{\rho f} \frac{\delta p}{\delta y} \end{aligned} \quad (6.42)$$

Es interesante observar además que cuando existe el océano geostrófico horizontal, se presenta un balance hidrostático en la vertical.

El modelo geostrófico para el océano se puede considerar como una primera aproximación al estudio de la dinámica de las masas de agua que lo constituyen.

Esta aseveración se desprende, si al observar las ecuaciones apreciamos que conocido el campo de presión es posible calcular el campo de velocidad y viceversa en un instante dado.

Dicho lo anterior se puede decir que las ecuaciones geostroóficas tienen carácter de diagnóstico y no de pronóstico.

La combinación del movimiento geostroífico junto con los términos no lineales, hacen de el estudio de la circulación oceánica uno de los temas más complicados de la geofísica.

Con el desarrollo de las computadoras ha sido posible dar solución a ecuaciones de movimiento de la forma:

$$\frac{du}{dt} - fv = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$$

$$\frac{dv}{dt} + fU = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}$$

Ecuaciones en las que se ha despreciado términos de fricción y contribuciones debidas a la forma de la tierra. Por medio de ellas ha sido posible realizar pronóstico del campo de velocidades y de presión.

CAPITULO VII

APLICACION DEL MODELO GEOSTROFICO A
DOS ESTACIONES DEL CRUCERO ALMEX III.

El proyecto ALMEX (Aleman-Mexicano) consiste en la investigación de los procesos hidrodinámicos y termodinámicos en las aguas cercanas a la costa, con aplicación a los procesos de mareas baroclínicas y de surgencias, en el Golfo de California.

En este proyecto se han realizado tres cruceros para la captación de datos. El tercero de ellos ALMEX III, sirvió para realizar transectos oceanográficos al norte de la Isla Tiburón para comprobar posibles procesos de surgencias (figura 18). El informe del crucero no se ha concluido todavía y como una primera aproximación y para los fines de este documento, se aplicará el modelo geostrofico a dos estaciones (6 y 7) para diagnosticar las velocidades que se generan en la columna de agua entre estas dos estaciones.

Las variables medidas del crucero son datos de temperatura y salinidad, como función de la profundidad.

El parámetro salinidad se detectó prácticamente constante con valor de 35.5 o/oo en ambas estaciones, no así los valores de temperatura, los cuales variaban con la profundidad (ver gráfica 1 y 2).

La Tabla I y la II muestran los valores registrados de salinidad y temperatura en función de la profundidad, dichos valores utilizados en la expresión de σ_t proporcionaron los valores de densidad que se muestran en las tablas III y IV. La tabla V proporciona la densidad promedio entre las estaciones, como función de la profundidad, así como la tabla VI nos indica las diferencias de presión como función también de la profundidad evaluada a partir del cálculo, de presión en la columna de agua con la ecuación hidrostática.

La velocidad angular de la tierra se consideró como:

$$\Omega = 7.29 \times 10^{-5} \text{ seg}^{-1}$$

Así como un promedio en las latitudes de ambas estaciones correspondientes a

$$\psi_1 = 28.95^\circ \quad \psi_2 = 28.88^\circ$$

El parámetro de Coriolis correspondiente se calculó en:

$$f = 7.0514 \times 10^{-5} \text{ seg}^{-1}$$

y la aceleración de la gravedad utilizada fue de:

$$g = 9.79 \text{ m seg}^{-2}$$

La distancia Δx se estimó en 10 millas, y con toda esta información, se resolvió la ecuación (6.39) del modelo geostrofico, obteniendo las velocidades mostradas en la tabla VII, y cuya distribución se muestra en la gráfica 3.

Una suposición adicional consistió en calcular la velocidad de la corriente a los 10 m de profundidad y considerar que el resultado corresponde también a la corriente superficial.

PROFUNDIDAD (m)	SALINIDAD (o/oo)	TEMPERATURA (°C)
10	35.5	17.25
25	35.5	16.25
50	35.5	15.50
75	35.5	15.25
100	35.5	14.50
125	35.5	14.25

TABLA I.
(ESTACION No. 6)

PROFUNDIDAD (m)	SALINIDAD (o/oo)	TEMPERATURA (°C)
10	35.5	17.00
25	35.5	16.75
50	35.5	16.00
75	35.5	15.75
100	35.5	15.40
125	35.5	13.00

TABLA II
(ESTACION No. 7)

PROFUNDIDAD	t gr/cm ³	DENSIDAD () gr/cm ³
10	329.42827	1.32942827
25	329.77087	1.32977097
50	329.87386	1.32987386
75	329.92457	1.32992457
100	330.06009	1.33006009
125	330.11099	1.33011099

TABLA III
(ESTACION No. 6)

PROFUNDIDAD	t gr/cm ³	DENSIDAD () gr/cm ³
10	329.50039	1.32950039
25	329.71524	1.32971524
50	329.802871	1.32980271
75	329.82696	1.32983696
100	329.88723	1.32988723
125	330.56574	1.33036574

TABLA IV
(ESTACION No. 7)

PROFUNDIDAD (m)	DENSIDAD PROMEDIO ρ (gr/cm ³)
10	1.3294642
25	1.32974
50	1.329835
75	1.329875
100	1.32997
125	1.330235

TABLA V

PROFUNDIDAD (m)	Δp (gr/cm seg ²)
10	-70.5
25	147
50	318.3
75	539
100	979
125	367

TABLA VI

PROFUNDIDAD (m)	VELOCIDADES (\bar{v}) (cm/seg).
10	-4.0536
25	8.45
50	18.29
75	30.98
100	56.269
125	21.08

TABLA VII.

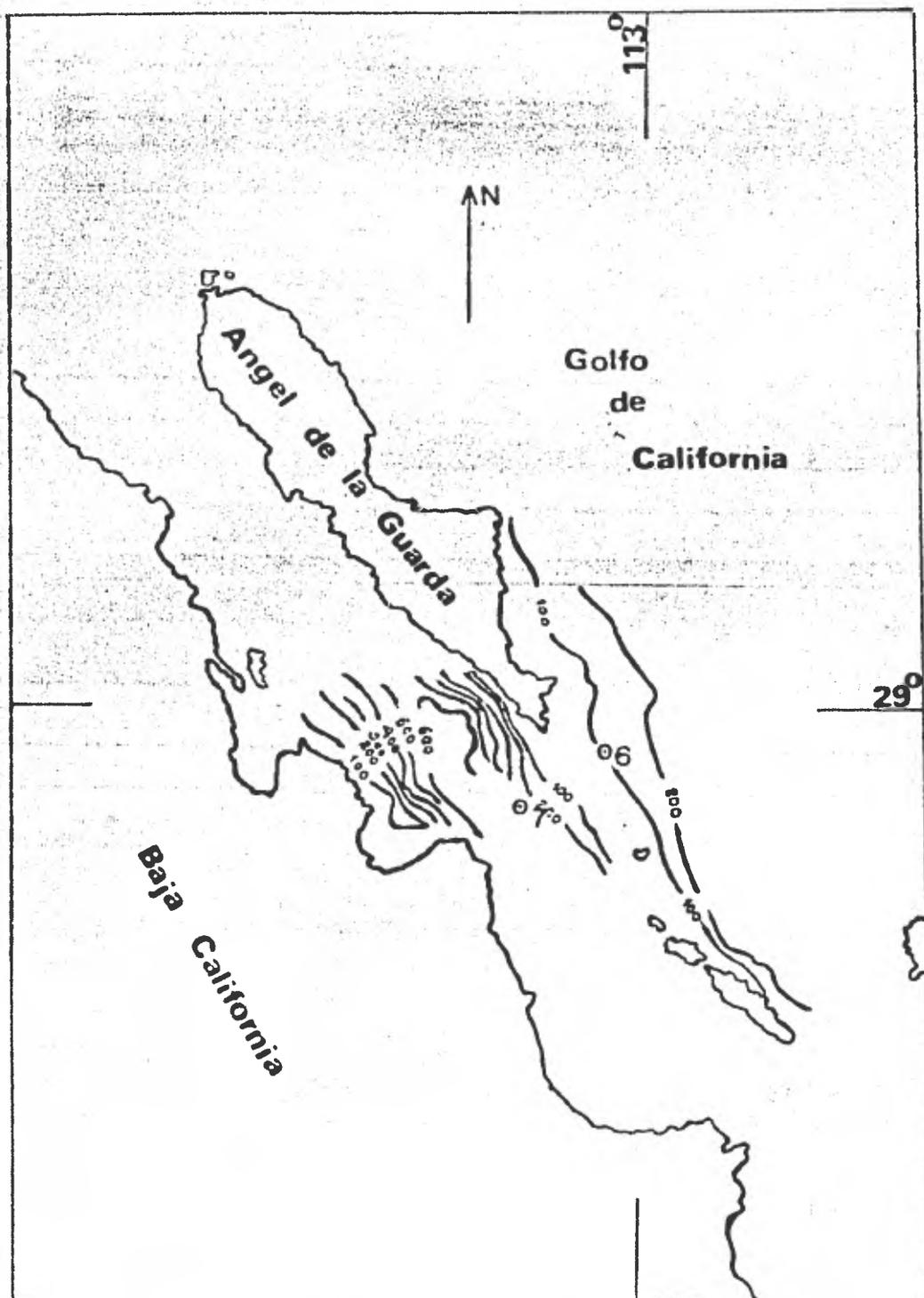


figura 18

temperatura (°C)

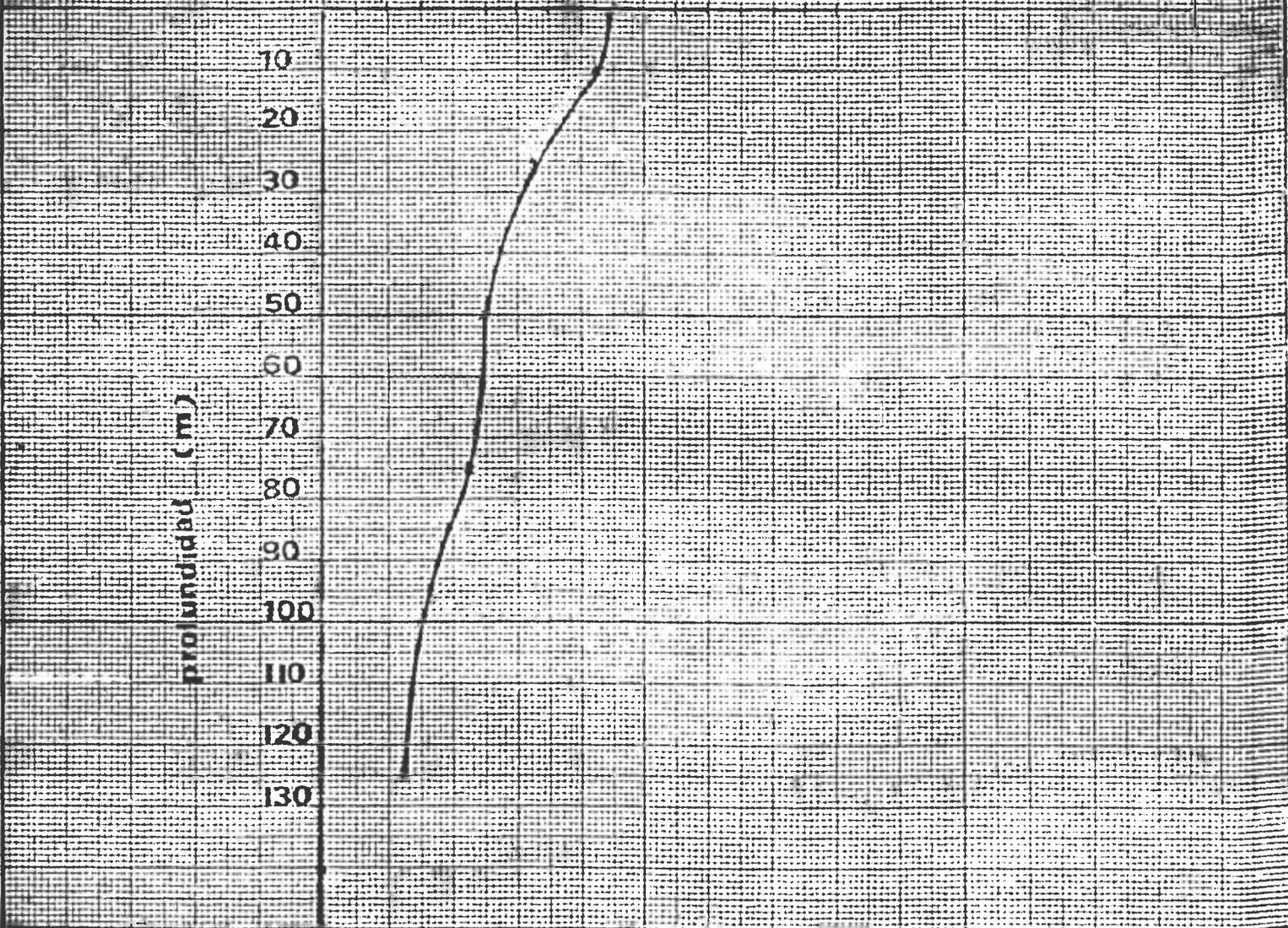
14 15 16 17 18 19

profundidad (m)

10
20
30
40
50
60
70
80
90
100
110
120
130

grafica 1

PROYECTO
INVESTIGACION
Y DESARROLLO



temperatura (°C)

14 15 16 17 18

profundidad (m)

10

20

30

40

50

60

70

80

90

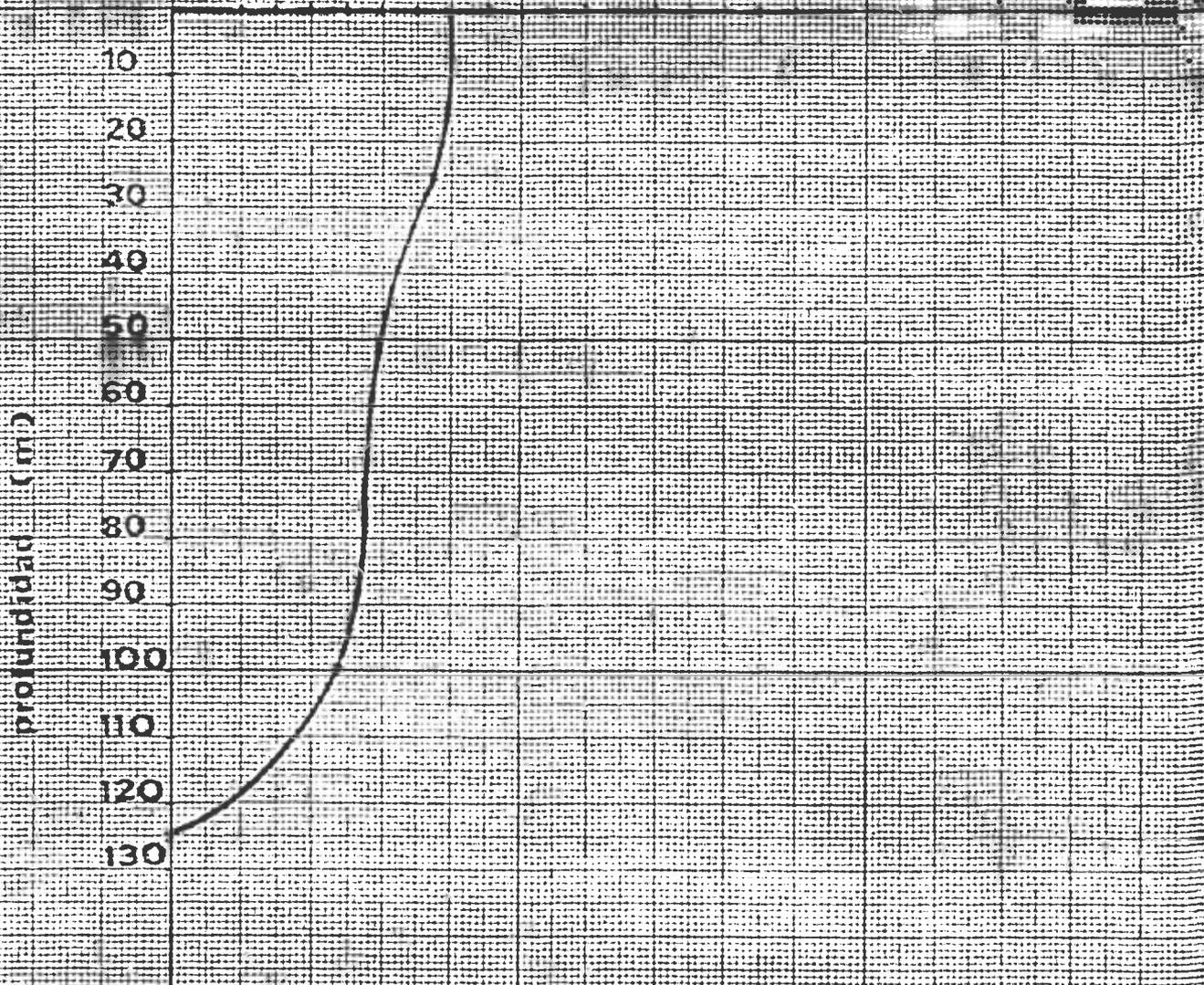
100

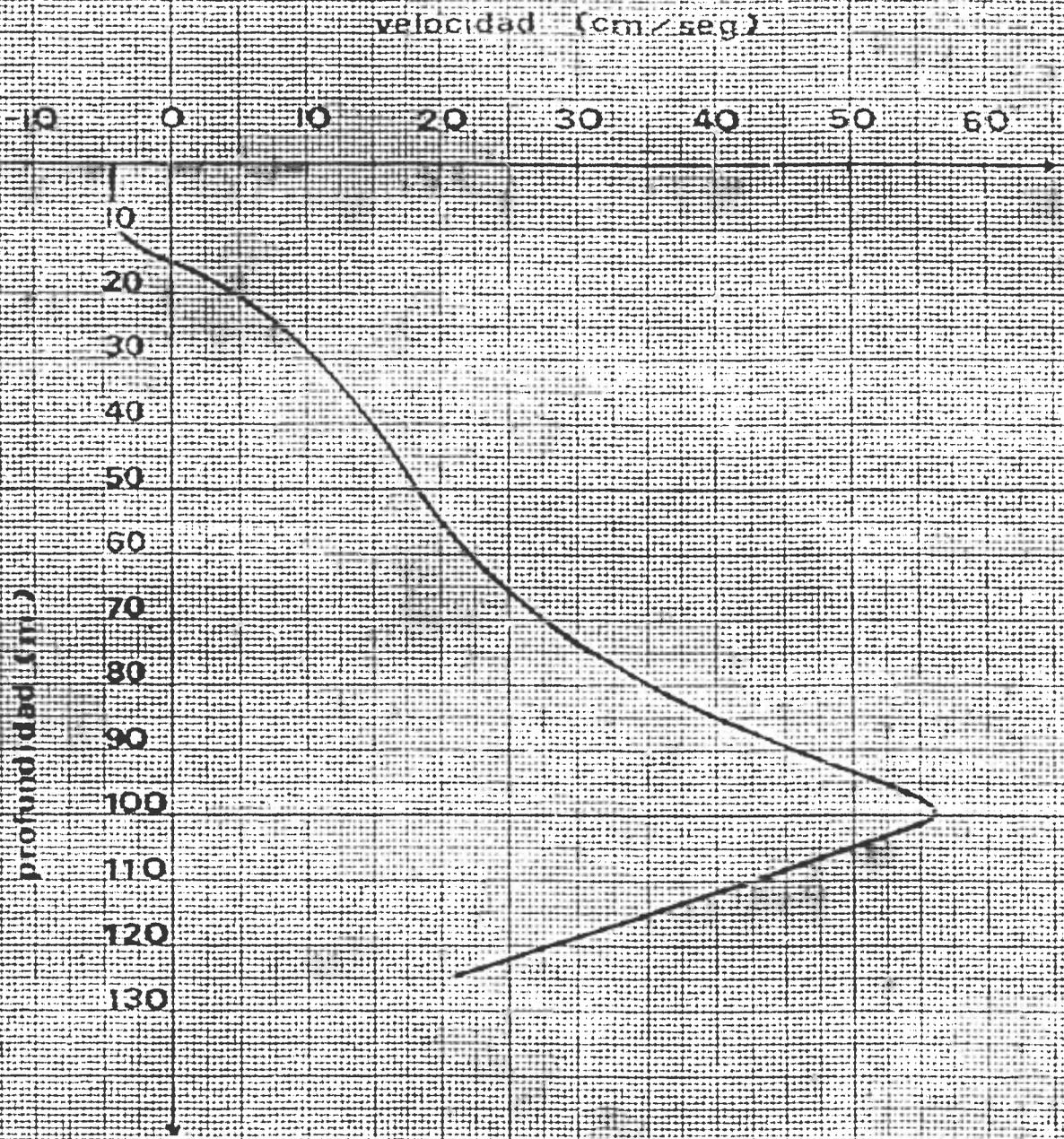
110

120

130

grafica 2





grafica 3

CONCLUSIONES.

Aún cuando se considera que el modelo geostrófico es una primera aproximación para conocer el comportamiento de ciertas masas de agua en el océano, resulta muy útil para diagnosticar el estado de movimiento que guardan dichas masas de agua.

Provee, además, en algunos casos información suficiente como para inferir hipótesis tendientes a satisfacer los objetivos que se proponen.

Y es precisamente el análisis de las estaciones seis y siete del Crucero ALMEX III uno de estos casos, ya que, a partir de los resultados obtenidos es posible plantear las siguientes conclusiones:

- 1.-La corriente superficial considerada como la misma que fue evaluada para la capa de 10 m de profundidad viaja en dirección SE, totalmente contraria a la dirección de la corriente en capas inferiores, siendo ésta hacia el NW.

2.-Se detectan corrientes internas cuyas velocidades crecen con la profundidad a excepción de la corriente en la capa de 125 m.

3.-La presencia de estas corrientes internas generan una zona de surgencias en donde grandes cantidades de nutrientes son llevadas hacia la zona fótica, dando lugar al incremento en el plancton y consecuentemente a una alta productividad piscícola.

Y es a la luz de estas conclusiones que se muestra el beneficio del modelo, quedando claro que el gradiente de presión y la aceleración de Coriolis influyen de manera determinante en la dinámica de esta zona, dando lugar a una circulación superficial y una circulación profunda (en el periodo de tiempo estudiado).

Asimismo, esta circulación profunda constituida por corrientes internas es generadora de surgencias, lo que haría finalmente recomendable a la zona estudiada como óptima de explotación pesquera.

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

- 1.- Van Mieghem.-Basic Fluid Mechanics
I.C.T.P. (Italia); 1975.
- 2.- Hasser B y Coautores.-Mathematical Analysis
Vol. I Blaisdell Publishing C.; 1959.
- 3.- Goldberg E.D. y Coautores. The Sea, Vol. I
John Wiley and Sons; 1977
- 4.- Newman G. y Coautor. Principles of Physical
Oceanography. Prentice-Hall Inc.; 1966,
- 5.- Dietrich G.-General Oceanography
John Wiley and Sons; 1967.
- 6.- Suedrup. J.F..-The Oceans.
Prentice-Hall, Inc.; 1942
- 7.- Mc. Lellan H.J.-Elements of Physical Oceanography
Pergamon Press; 1956.
- 8.- Hauser W.-Introduction to the Principles of
Mechanics. Addison-Wesley C.; 1966.
- 9.- Murray R.S.-Advanced Mathematics
Mc. Graw-Hill Book Company; 1971.
- 10.- Rosales H.M.T.L.-Manual de Laboratorio de Oceano-
grafía Química. Centro de Ciencias del Mar y Limno-
logía, UNAM; 1980.
- 11.- Manual de Instrucciones para la Obtención de Datos
Oceanográficos. Servicio Argentino de Hidrografía
Naval; 1972.
- 12.- Instruction Manual for obtaining oceanographic data
U.S. Navy Oceanographic Office; 1970.
- 13.- Barnes H.-Aparatus and Methods of Oceanography
Part Ones. George Allen and Unwin LTD; 1959.
- 14.- Buendía C. E.-Notas sobre Meteorología (sin publicar)