

**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO**  
**FACULTAD DE CIENCIAS**

**CONSIDERACIONES GENERALES SOBRE**  
**LA TEORIA DE LA INSTRUMENTACION**

**T E S I S**  
**QUE PARA OBTENER EL TITULO DE**  
**F I S I C O**  
**P R E S E N T A**

**ANIBAL RODRIGUEZ GOMEZ**

**MEXICO, D. F.**

**1966**



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

# TESIS CON FALLA DE ORIGEN

## CONTENIDO

|  |     |
|--|-----|
| CAPITULO 0.- INTRODUCCION  | 6   |
| CAPITULO I.- CONCEPTOS FUNDAMENTALES   | 12  |
| CAPITULO II.- PRINCIPIOS GENERALES DE OPERACION                              | 27  |
| CAPITULO III.- SEÑALES DE PRUEBA Y ALGUNAS CONSIDERACIONES<br>SOBRE EL RUIDO | 56  |
| CAPITULO IV.- ESPECIFICACIONES   | 88  |
| CAPITULO V.- CALIBRACION   | 125 |
| CAPITULO VI.- APLICACIONES   | 172 |
| APENDICE I. FISICA DE LOS EFECTOS TERMOELECTRICOS                            | 218 |
| APENDICE II. CALCULOS PARA PROPAGACION DE ERROR.                             | 224 |
| BIBLIOGRAFIA.  | 227 |

## I N T R O D U C C I O N

Las leyes de la física se expresan en base a cantidades obtenidas mediante mediciones (30), pues los sistemas -- y fenómenos que estudia en concreto tienen propiedades cuantitativas aunque no sea más que por existir en determinadas cantidades y en el espacio tiempo (6). El conocimiento solo es -- completo cuando avanzando más allá de la mera observación, se pasa a la cuantificación, es decir cuando se ha pasado a la observación cuantitativa o sea a la medición (32).

De ahí la importancia que para la física tiene la medición y por ende la instrumentación. Aunque en la actualidad -- lo anterior se da por entendido, esto ha sido una concepción -- ganada a través de la historia de la humanidad, durante la --- cual se ha podido observar como la<sup>2</sup> carencia de medios adecuados para medir variables físicas, así como el no tener claro -- el papel que la experiencia cuantitativa tiene para la cien -- cia, ha obstaculizado y detenido su progreso. También del análisis histórico puede apreciarse, en un momento dado, como la aparición de un instrumento ha abierto las puertas para entrar de lleno a campos del conocimiento, hasta ese momento no enten didos o insospechados.

**BREVE RESEÑA HISTORICA.** -- La ciencia se origina desde el momento en el cual el hombre toma conciencia de sí mismo y del mun-

do que lo rodea y empieza a interactuar con él (6). "Un hombre que ha fabricado un artefacto tiene en su mente y manos las leyes de comportamiento del material con el que trabaja, aunque no lo exprese por escrito ó en palabras. Cuando ciertos artefactos o instrumentos se estudian y sus métodos se registran por escrito , entonces ha empezado la ciencia escrita" (6). -- "La historia de la ciencia debe de empezar con la historia de los artefactos" (32), y aquí aparece de inmediato la relación entre la instrumentación y la física.

Al principiar la civilización la ciencia, era un aspecto del trabajo de magos, sacerdotes, y artesanos (33) y quizás las primeras variables físicas que se midieron fueron el tiempo y las dimensiones espaciales de los objetos y algunas características "gruesas" como masa y peso (35).

A las primeras civilizaciones que florecieron fundamentalmente en Egipto, la India, y la Mesopotamia, cabe el mérito de haber iniciado la tradición científica legándonos: medios instrumentales básicos, conocimientos que dieron origen a la astronomía y el inicio de las matemáticas (32).

El concepto de ciencia tal como la conocemos surge en Grecia, pues mientras que en Egipto y la Mesopotamia se estudiaban sólo los hechos de utilidad inmediata, los griegos -- introducen aquello que es todavía el motivo principal de la --

ciencia, ó sea el deseo de elaborar un modelo mental del funcionamiento total del universo<sup>(32)</sup>. En Grecia entre los años 600--400 A.C. surge la ciencia natural como algo ya diferenciado de la filosofía, y entre los años 200-400 D.C., se llevan a cabo grandes descubrimientos. Sin embargo el avance fué seriamente frenado por la repulsión de los griegos a la experimentación. Cabe mencionar a Arquímedes como uno de los pocos griegos que dieron importancia a este aspecto de la ciencia.

Resumiendo, al terminar la antigüedad existían tres causas que obstaculizaban en forma decisiva el avance de la física y eran:<sup>(35)</sup>

- 10.- La carencia de un método preciso y confiable para medir el tiempo.
- 20.- La falta de matemáticas apropiadas
- 30.- La carencia de métodos sistemáticos para la investigación así como de locales apropiados para el trabajo experimental.

Al caer el imperio Romano, Europa queda sumergida por espacio de varios siglos en la edad media, época durante la que gran parte del conocimiento de la antigüedad se pierde y la investigación se estanca en general, quedando el progreso científico en manos de los Arabes.

Los Arabes no fueron grandes innovadores<sup>(37)</sup>, pero-

habiendo heredado la tradición y conocimientos científicos de las naciones que integraron su vasto imperio, preservaron el conocimiento de la antigüedad clásica pues se ocuparon de traducir a su idioma las obras de Aristóteles, Thales de Mileto y demás sabios griegos, así como lo que pudieron recolectar de las civilizaciones Egipcia y de la Mesopotamia. Además actuaron de puente entre Europa y la India, trayendo nuestra actual notación aritmética, que facilitó los cálculos necesarios para la solución de problemas físicos, y al desarrollar la alquimia-que importaron de Egipto- iniciaron metodologías de Investigación experimental vitales y necesarias para el progreso de la ciencia.

En Europa, al estabilizarse la situación política y social, se reanudó la inquietud por el conocimiento, a través del redescubrimiento de los conocimientos de la antigüedad, usualmente mediante traducciones de textos árabes. También al reanimarse las actividades comerciales, se extendió el uso de la nueva notación numérica y se desarrolló la alquímia que desembocaría en el establecimiento de la Química.

Los Europeos terminaron de allanar el camino para el progreso de la física inventando el reloj mecánico, preparándose con esto el terreno para la revolución en la física.

Quién inicia el proceso es Copérnico, que desafía las creencias establecidas y propone una teoría cosmológica

que no sólo revolucionaría la física y la astronomía, sino también todo el pensamiento humano. A partir de entonces se sucede un continuo acontecer de trabajo científico que sienta el modelo a seguir para la ciencia moderna, que encuentra un momento cumbre en la publicación de los "Principia" de Newton en 1686.

Durante esta evolución, el papel de la medida es central para la ciencia, siendo vital en este aspecto el trabajo de Tycho Brahe y Galileo Galilei. De ahí en adelante se ve como la aparición constante de nuevos instrumentos, así como métodos de medición abren campos más amplios para la investigación, como es el caso a vía de ejemplo de: La Bomba de vacío, el termómetro, el telescopio, etc. Durante el siglo XIX, aparece un instrumento verdaderamente vital en la actualidad que es la cámara fotográfica, se integra la teoría electromagnética, y se inventa el galvanómetro que abre las puertas a las medidas eléctricas. Durante el presente siglo, las medidas electrónicas han ganado popularidad y confiabilidad debido entre otros factores, a la existencia de dispositivos que pueden traducir casi cualquier variable a señales eléctricas, ya que este tipo de señales pueden ser: amplificadas, moduladas, atenuadas, rectificadas, transmitirse con facilidad medirse con gran precisión, etc.

Debido a ello, y en general en cuanto sea posible, se prefiere traducir cualquier tipo de señales físicas en señales electrónicas, lo cual además lleva la ventaja de tener una gran variedad de instrumental para procesarla.

#### PROPOSITOS DEL TRABAJO.

Dado el desarrollo actual en la ciencia de la medición, manifestada en la abundancia de instrumentos y métodos, el investigador se ve limitado muchas veces únicamente por los recursos económicos, enfrentando además al problema de la selección, adaptación, evaluación y modificación de los instrumentos y sistemas de medición disponibles, así como los nuevos que constantemente aparecen en el mercado.

Todo ello implica que la solución integral de los problemas que son inherentes a dichas tareas sean sumamente amplios, y en este trabajo se abordará solamente, la determinación de criterios generales para la elección y evaluación de instrumentos de medición.

Se iniciará el trabajo con un resumen de consideraciones generales acerca de las características que definen a las variables físicas, continuación se describirá la teoría básica de la instrumentación, terminando con su aplicación a tres transductores típicos como ejemplo.

## C A P I T U L O I

### CONCEPTOS FUNDAMENTALES

#### I.1 FISICA TEORICA Y FISICA EXPERIMENTAL.

La Física, debe sus mayores avances, a la combinación sistemática de la observación empírica con la intuición puramente matemática<sup>(2)</sup>. Ello da origen a poder hablar de física teórica y física experimental, aunque ambos enfoques -- sean interdependientes, y en realidad constituyan las dos caras de una misma moneda, que es la investigación del universo físico.

#### I.2 CANTIDADES.

Al efectuar una medida, expresaremos el resultado con un número y las unidades asociadas al significado de dicho resultado, es decir, empleamos cantidades.

Podremos hablar de "cantidades" que en principio -- nunca cambiarán su valor, como es el caso de la constante de Planck, la carga del electrón, la constante de gravitación -- universal, etc., a las cuales se les llama constantes Universales<sup>(5)</sup>. Estas cantidades son reducidas en número, y han -- jugado papeles clave en la formulación de teorías físicas.

Por otro lado y con una frecuencia mayor, nos encontraremos con cantidades cuyo valor no es fijo, sino que cambia ó puede cambiar según el contexto del fenómeno bajo estu-

dio, llamandoseles a estas variables.

### 1.3 CLASIFICACION DE VARIABLES.

Toda expresión científica puede analizarse como una determinada relación entre variables. Para la física las variables que se emplean en la descripción de fenómenos tienen como característica principal el de ser cuantificables. Es más, -- siempre que una nueva rama de la física se abre, el primer paso es siempre, el de encontrar algún proceso para medir las -- nuevas propiedades que se investigan, y mientras este problema no se resuelva, no se puede avanzar significativamente en dicha rama<sup>(3)</sup>.

Dado lo anterior, las variables con las que tiene -- que ver la física caen dentro de la categoría lógica de variables cardinales<sup>(6)</sup>. Esto es necesario abordarlo con cierto -- criterio, pues en un momento dado, puede aparecer un rasgo --- nuevo de la naturaleza para el cual no exista medio de cuantificación conocido, y en tanto este no sea encontrado permanecerá como variable cualitativa.

No obstante la cantidad de variables físicas que pueden aparecer en un momento dado, es posible establecer clasificaciones de las mismas, proponiéndose dos criterios básicos. La primera clasificación se establece de acuerdo con la naturaleza propia de las variables, y la segunda de acuerdo con -

el empleo de la variable como señal de medición. Ambos criterios se complementan uno al otro y su empleo permite obtener una idea más completa del problema. Puede quizá encontrarse otra proposición sobre clasificación, pero las elegidas parecen las más directas y naturales.

### I.3a CLASIFICACION DE VARIABLES, DE ACUERDO CON SU NATURALEZA <sup>(4)</sup>.

A. Térmicas.- Se relacionan con fenómenos donde interviene el calor y la energía interna.

B. Variables de Radiación.- Se relacionan con la emisión, propagación y absorción de energía o de un material en forma de ondas a través del espacio, abarcan además la emisión, propagación y absorción corpuscular.

C. Variables de Fuerza.- Se relacionan con método -- agente físico que origine, altere o anule movimiento, o deforme los cuerpos.

D. Variables Correspondientes a Razones de Cambio.--- Se relacionan con la descripción de movimiento ya sea lineal o rotacional de una partícula, o de un conjunto de ellas (flujo).

E. Variables de Cantidad.- Son las relacionadas con la cantidad total de materia de un cuerpo, sin considerarla como medida de la inercia.

F. Variables de Tiempo.- En general se refiere a la duración temporal de los fenómenos bajo observación.

G. Variables Geométricas.- Son aquellas que describen la posición y dimensiones espaciales de los cuerpos o fenómenos.

H. Variables Acerca de las Propiedades Físicas de las Sustancias.- Se refieren a cuestiones como la densidad y peso específico, humedad, viscosidad, etc.

I. Variables Eléctricas.- Se refiere a la existencia, cantidad y desplazamiento de carga eléctrica, así como a la energía asociada con dichos fenómenos.

### I.3.b TRANSDUCCION.

Para llegar a la clasificación de variables de acuerdo con su empleo como señal de medición, es necesario, a fin de ampliar detalles y la comprensión del asunto, discutir previamente la transducción.

Al hablar de transductores se tiene que tratar un número muy amplio de dispositivos, cada uno de los cuales tiene diferentes propiedades y características, siendo su trabajo, el de aceptar la señal original que se desea medir, y dar una señal de salida proporcional a la original mas apropiada para su proceso en un sistema de medición.

Toda medida es en cierto sentido el acto de obtener información de un medio, esto implica extraer "algo", lo que en resumidas cuentas puede reducirse siempre a la extracción de energía. Un transductor extrae energía del medio alterándolo, lo que es inevitable en última instancia, debido al principio de incertidumbre de Heisenberg.

Para minimizar la alteración que el acto de medir -- produce, a menudo y en cuanto es posible, se prefiere el empleo de transductores activos, es decir, aquellos que tienen una fuente de poder interna que sirve para amplificar la señal, y por ello extraen menos energía del medio bajo observación. Ahora bien según sea el experimento, puede ser inevitable o incluso deseable emplear transductores que son accionados por energía extraída del medio, a los que se llama transductores pasivos.

Entre las características deseables que debe tener un transductor, independientemente de las particularidades de cada dispositivo en detalle <sup>(7)</sup> pueden señalarse las siguientes:

i) Linealidad.- Esta es una medida de la efectividad de un transductor para conservar la información original, <sup>(7)</sup> se desea que la relación entre excitación y respuesta del transductor, sea del tipo:

$$Y(x) = mx + b, \text{ donde } m, b \text{ son constantes.}$$

Los transductores reales no poseen en general tal característica, y al efectuar la calibración, la curva real divergirá de la ideal por un margen considerable. En el capítulo IV se detalla como expresar la alinealidad de un instrumento, lo que se aplica en este caso.

ii) **Histéresis.**- Esto indica que algunos transductores darán medidas diferentes según el sentido de aproximación para medir un valor determinado  $x_0$ , pues si la aproximación se efectúa gradualmente tomando valores  $x < x_0$ , la lectura será diferente, de la que se obtendría aproximándose con valores  $x > x_0$ .

Si  $x_0$  y  $x'_0$  representan dichas lecturas, la histéresis será  $|x_0 - x'_0|$ . Idealmente es deseable que la histéresis para un transductor sea cero.

iii) **Repetibilidad.**- Esto se refiere a la obtención de la misma lectura, al repetir una y otra vez, la misma medida, si esta se efectúa bajo las mismas condiciones. Usualmente al repetir medidas se obtiene una dispersión de valores, cuya cuantificación se emplea como una medida de la precisión pues este último concepto está ligado con esta situación.

iv) **Respuesta a la frecuencia.**- Se refiere a la velo

cidad de respuesta de un transductor, ante los cambios en el tiempo del estímulo aplicado.

Cualquier forma de onda periódica, puede describirse en serie de Fourier. La respuesta a la frecuencia de un transductor, que se emplee para medir una forma de onda, debe ser lo suficientemente alta como para registrar la frecuencia del mayor armónico significativo, en el desarrollo en serie de la onda.

Algunos conceptos relacionados con la respuesta a frecuencia son los siguientes:

a) Ancho de Banda.- Es el intervalo de frecuencia que el transductor mide o registra en forma adecuada. Este concepto se ampliará en el capítulo IV.

b) Tiempo de Respuesta.- Es el retardo entre la recepción de la señal, y el momento en que esta queda adecuadamente registrada por el instrumento. Usualmente se define en términos del tiempo en que se registra un porcentaje de la amplitud de la onda, y fija un límite superior, al intervalo de frecuencias detectable.

### I.3c CLASIFICACION DE VARIABLES SEGUN SU EMPLEO COMO SEÑAL DE MEDICION.

Aunque esto lleva directamente a considerar la gran cantidad de métodos particulares y generales de medición, al-

menos pueden definirse cuatro divisiones, aunque no se pretende que sean únicas ni exclusivas, siendo estas<sup>(4)</sup>.

A: Señales de Movimiento.- Muchos dispositivos de -- presentación de datos emplean alguna forma de movimiento. Asimismo el movimiento es una señal de entrada para muchos sistemas e instrumentos.

B: Señales de Fuerza.- Este es un tipo de señal muy común en la conversión, transmisión y empleo de datos, vital -- sobre todo en los instrumentos mecánicos.

C: Señales Eléctricas.- En la actualidad se puede -- afirmar que casi cualquier variable física puede traducirse -- en señal eléctrica, debido a la existencia de una gran cantidad siempre creciente, de transductores que efectúan dicha -- transformación. Existen además una gran cantidad de fenómenos -- como la radiación, reacciones químicas, etc., que generan señales eléctricas por sí mismos.

D: Señales Moduladas.- Son señales que se emplean -- usualmente para transmisión de información, a fin de optimizar el diseño y operación de los instrumentos.

#### I.4 DOMINIO DE DATOS.

Junto con la transducción, aparece el concepto de -- Dominio de Datos, entendiéndose por esto, cada una de las diferentes formas en las cuales puede codificarse una señal.<sup>(8)</sup>

Al emplear un transductor pasando la señal de una forma a otra de energía, de hecho se le está codificando, pues como resultado de la transducción lo que obtenemos es una señal en general diferente en naturaleza de la original, pero que conserva la información que interesa, sólo que en una forma más conveniente para su manejo, hecho en el que reside fundamentalmente la codificación. De esta forma a cada dominio de datos se le asocia una forma de energía y de acuerdo con la naturaleza de las señales ya sea originales o transducidas, puede hablarse de: - Dominio Eléctrico, Dominio Mecánico, etc.

#### 1.5 CARACTERISTICAS DE LAS SEÑALES ELECTRONICAS.

Dado que este trabajo centrará su atención en la instrumentación electrónica que se emplea o puede usarse en un laboratorio de física, es conveniente en este momento definir -- las características de dichas señales, que hacen deseable su -- empleo en cuanto es posible hacerlo. Todo esto desde el punto de vista del uso de la instrumentación, no de su diseño.

##### 1.5.a.- FLEXIBILIDAD.

Una señal eléctrica es una variable sumamente manipulable, ya que puede: amplificarse, atenuarse, almacenarse, -- rectificarse, transmitirse a grandes distancias por cable o -- en el espacio, medirse, controlarse o servir para fines de --

control con relativa facilidad, mediante métodos bastante accesibles, en continuo perfeccionamiento.

#### I.5.b.- ECONOMIA.

En el campo de la medición el material que se maneja es básicamente información, es decir, los problemas se centran alrededor de la adquisición y manejo de la información usualmente numérica, del valor de las variables que describen al fenómeno.

Esto es lo que distingue el problema del diseño de un instrumento de medición, del de otros tipos de instrumental, ya que como no importa que el instrumento proporcione energía sino información, el consumo es mínimo. En el caso del instrumento electrónico moderno, la disminución del gasto de energía se acentúa más, pues las partes activas que los constituyen funcionan con potencia mínima. Además es mucho más sencillo introducir energía eléctrica en un laboratorio, que otros tipos de energía.

#### I.5.c. SIMPLICIDAD INSTRUMENTAL.

Aunque el diseño de un instrumento electrónico no está exento de problemas de orden práctico, es concenso general que es menos problemático, que el caso de la instrumentación mecánica, ya que por ejemplo no existen intrincados mecani-

mos y cientos de partes móviles propensas a fallar en cualquier momento ni sujetas a desgaste continuo. Casi no existe inercia y las reacciones son más rápidas. El acoplamiento es mas simple pues sólo se requieren arreglos sencillos entre instrumentos, - todo ello desde luego, desde el punto de vista del empleo del - instrumental.

#### I.5.d. ABUNDANCIA DE DISPOSITIVOS.

Esto es una consecuencia lógica del desarrollo que ha -- seguido la electrónica, y en este sentido todavía está lejos de llegarse a límites prácticos, apareciendo constantemente nuevos aparatos y perfeccionándose los antiguos, agregando cada vez -- más funciones y eliminando problemas que aún se resistían al -- tratamiento por medios electrónicos.

#### I.5. e. FACILIDAD DE TRANSMISION Y APLICACION DE METODOS DE EVALUACION.

La transmisión de datos por medios electrónicos es una-- tecnología ya clásica, y en principio completamente dominada, - equipos para dicha tarea son de uso común y existen bastantes - diseños por lo que no presenta mucha dificultad, a menos que -- se llegue a casos especiales donde aún la tecnología existente- no satisface requerimientos particulares o exige soluciones costosas o no prácticas.

Por lo que se respecta a la evaluación de datos, la exis

la existencia de convertidores, analógico-digitales y de computadores electrónicos, permite el procesamiento inmediato, de la información pues puede procesarse en tiempo real, así como la obtención de datos confiables, por estar libres de error humano.

Aunque podrían encontrarse otras, las anteriores -- son suficientes para entender las ventajas del instrumental electrónico.

#### I.6 DESCRIPCIONES FUNCIONALES DE LOS INSTRUMENTOS ELECTRONICOS.

A pesar de la gran diversidad existente, en el campo de la instrumentación electrónica, pueden definirse algunas funciones básicas realizadas por circuitos especializados en el interior de los aparatos, en términos de las que es posible analizar y entender el funcionamiento de un dispositivo en particular, algunas de las cuales son:

I.6.1. La Rectificación.- Es la selección continua de la polaridad de la corriente alterna.

I.6.2. La Amplificación.- Que es el cambio en magnitud de la señal.

I.6.3. La Oscilación.- Es la producción de una señal cuya polaridad cambia continuamente.

I.6.4. El Filtrado.- Es la selección de una frecuencia determinada o de un intervalo dado de frecuencias, a partir de una señal dada.

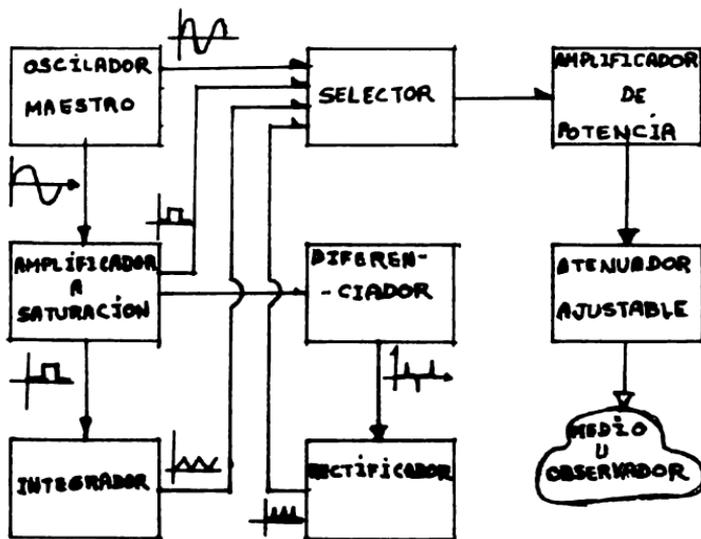
Puede seguirse buscando más funciones de entre la gran variedad de circuitos existentes, aunque las mencionadas arriba, se emplean como bloques constructivos básicos en una gran variedad de instrumentos. Es claro que se podrían mencionar otras funciones como básicas, como por ejemplo la mezcla, la modulación, etc. Sin embargo puede también argumentarse -- que dichas funciones se implementan físicamente con los circuitos que realizan las arriba mencionadas, mediante interconexiones adecuadas.

Otra forma para la descripción funcional de un instrumento o sistema de medida, consiste en emplear como bloques a circuitos más complejos, como son fuentes de poder reguladas, moduladores, mezcladores, osciladores sintonizables, etc., que estarían implementados con los circuitos tentativamente señalados como básicos, si es que la mencionada clasificación puede ser aceptable como tal.

Es evidente que si se enfocara la atención, sobre la implementación física de los circuitos que llevan a cabo las funciones antes mencionadas, se derivaría de inmediato -- un enfoque que no corresponde al de este trabajo, pues lo que

interesa aquí es la instrumentación desde el punto de vista - empleo, más que la construcción. Debido a lo anterior el enfoque centrado en funciones, por encima de los circuitos que las realizan será el adecuado.

Como ejemplo se analizará un generador de señal típico en base a su descripción funcional, <sup>(10)</sup> Fig. 1.1



DESCRIPCION FUNCIONAL DE UN INSTRUMENTO

FIG. 1.1

Los bloques que aparecen en la figura señalan las - funciones que se efectúan dentro del aparato, sin especificar su implementación física concreta. Se tiene un oscilador maestro que es la fuente básica de la señal, los demás circuitos la modifican. Por ejemplo, el amplificador de potencia le da energía a la señal sin importar de donde venga ésta, el selector permite al operador elegir la señal que le interesa, y es un circuito interconectado con los demás, etc.

Para terminar, el enfoque funcional, permite entender rápidamente el funcionamiento de un instrumento, sin perderse en el detalle de la operación circuital, aunque al integrar un sistema real, surgen problemas de orden práctico, como los acoplamientos, inestabilidades,<sup>(1)</sup> etc.

## C A P I T U L O   I I

### PRINCIPIOS GENERALES DE OPERACION

Una vez clasificadas las variables, el siguiente paso en el análisis, es el de considerar las formas generales en las cuales los instrumentos o sistemas actúan sobre ellas.

#### 2.1 ESTRUCTURA FUNCIONAL GENERALIZADA DE UN INSTRUMENTO O SISTEMA DE MEDICION.

Para empezar conviene aclarar el uso de los términos-instrumento y sistema de medición, pues en la discusión que sigue ambos se emplean indistintamente dentro de ciertos límites.

Desde el punto de vista funcional ambos términos significan lo mismo, cuando el empleo que se da a un instrumento o sistema, sea el de realizar todas las tareas necesarias para efectuar una medida; cuestión muy frecuente cuando se emplea un instrumento que realiza simultáneamente las varias funciones -- que constituyan una medición.

Desde el punto de vista de la implementación existen diferencias entre ambos términos, pues usualmente cuando se habla de un sistema, se sobreentiende la existencia de varios instrumentos debidamente acoplados, cuyo funcionamiento global tiene un objetivo común; en cambio cuando se habla de un instrumento, usualmente se entiende que es un solo aparato, máquina o -- dispositivo.

Como en este trabajo se analizan los sistemas de medición, el énfasis se orienta hacia los aspectos funcionales, por lo que se empleará como sinónimo instrumento o sistema de medición, aclarando por supuesto los casos en los cuales dichos términos se empleen en otro sentido.

En la práctica existen miles de instrumentos o sistemas de medición que en su implementación física difieren bastante unos de otros, no sólo en base a las diferencias entre fabricantes sino también por los diferentes propósitos para los cuales se diseñan. Por ello, para buscar principios generales es necesario enfocar la atención más que en estructuras particulares, en funciones que sea necesario realizar para efectuar una medida, no importa cual sea ésta.

De acuerdo con Doebelin<sup>(1)</sup>, los elementos funcionales que en general pueden integrar un sistema de medición, son los que se muestran en la figura 2.1.



ESTRUCTURA GENERALIZADA DE UN SISTEMA DE MEDICACION

FIG. 2.1

Por supuesto que dicha configuración, es una entre -- varias posibles, no es única de ninguna manera, de las funciones que aparecen en la figura algunas pueden no estar explícitamente en un aparato o sistema, y en cuanto al orden en el cual se presentan, también existe flexibilidad, pues puede haber variaciones según la aplicación. Asimismo, aunque las funciones se -- presentan como bloques separados, eso no significa que al lle-- gar a la implementación física sea necesario construir dispositi-- vos separados, pues es frecuente que un solo aparato realice-- simultáneamente varias funciones.

La descripción de cada una de las funciones es la si-- guiente<sup>(1)</sup>:

i) Elemento sensor primario.- Es el elemento que reci-- be directamente la energía desde el medio medido, y produce una salida que depende en alguna forma de la cantidad que se desea-- medir.

ii) Elemento de conversión de variable.- Si las ca--- racterísticas de la señal a la salida del elemento sensor primario, no son las mejores para el manejo de la información, es-- te elemento la transforma en otra señal más adecuada, usualmen-- te de naturaleza diferente a la original. Esta función la lle-- va a cabo usualmente un transductor.

iii) Elemento de manipulación de variable.- Su fun-- ción usual es la de cambiar las características de la señal pe--

ro sin alterar su naturaleza, por ejemplo, un amplificador un--  
modulador ó un mezclador. En general prepara a la señal para su  
uso posterior.

iv) Elemento de transmisión de datos.- Su función es-  
la de llevar la información de un bloque funcional a otro del -  
sistema, cuestión indispensable cuando los componentes están fi  
sicamente separados.

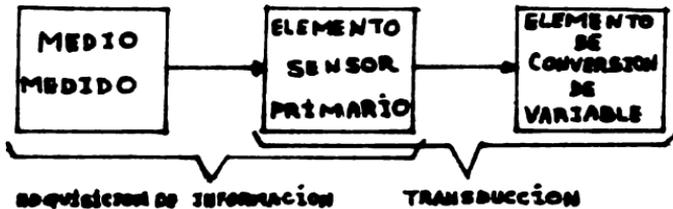
v) Elemento de presentación de datos.- Su función es-  
la de presentar la información en una forma reconocible por los  
sentidos humanos. Aún cuando la mayoría de los medios de presentación  
son visuales, también es concebible el uso de otros sen-  
tidos como el oído, el tacto etc., o bién, puede darse el caso-  
de la presentación de datos entre sistemas, donde el hombre es-  
ajeno a dicha presentación.

Después de analizar ésta estructura, puede concebirse  
al sistema de medición como un mecanismo de adquisición y trans  
misión de información, dentro de ciertas restricciones, pues el  
experimentador no forma una cadena completa de comunicación con  
la naturaleza<sup>(12)</sup>, ya que de ella no recibe señales ó símbolos que  
constituyan mensajes específicos, sino estímulos que sirven de-  
evidencia para la construcción de nuestros modelos personales -  
o impresiones de la realidad. Sin embargo no se puede negar que  
en el sistema se origina y maneja información, en tanto la se--  
ñal extraída y manejada, va a tener un cierto significado, y --

que con bastante frecuencia es manipulada y transmitida, por lo que algunas ideas de teoría de información pueden aplicarse al análisis.

## 2.2 METODOS GENERALES DE OPERACION.

Siguiendo con la discusión anterior, tenemos dos aspectos generales en el funcionamiento de un sistema de medición, - la adquisición directa de información ya sea en una forma conveniente o no, y su manejo, mediando entre ambos aspectos con frecuencia la transducción. Para aclarar mas esta cuestión y con--referencia a los tres primeros elementos presentados en la figura 2.1, y mostrados en la figura 2.2.



### ETAPA DE ADQUISICION DE INFORMACION

FIG. 2.2

En los tres primeros elementos se recoge la información que puede estar o no en una forma conveniente, es decir se adquiere "en bruto", después de esto, los siguientes elementos cumplen, tanto con la evaluación de la información, como con su procesamiento adecuado a fin de presentárnosla. Por ello vale -

especificar dos métodos generales de operación, de acuerdo a la adquisición de señal y con la manipulación de la información. - Se empezará por estos últimos.

#### 2.2.a. METODOS ANALOGICOS Y DIGITALES

Existen dos formas de procesar la señal, la primera - es un registro continuo en tiempo real de la información, conocido comunmente como procesamiento analógico, y la segunda que consiste en la división de la señal en periodos discretos de amplitud constante, donde la información no depende de la altura de los pulsos, pudiendo hacerse la división tan fina como se de see, conociéndose a este método de procesamiento como digi- - tal. (1) (15)

#### 2.2.b. MODO DE OPERACION POR DEFLEXION.

Pasando ahora a la forma específica de adquisición de información, conviene recordar que la medición es una compara-- ción<sup>(5)</sup>, entre la variable cuyo valor se desea saber, y una nor ma de la misma naturaleza, que se considera la unidad.

En un instrumento que opera por deflexión<sup>(8)</sup>, existe un mecanismo que produce un efecto opuesto a la cantidad por me dir, hasta alcanzar un estado de equilibrio. El desplazamiento que experimente un indicador asociado a este mecanismo, permite inferir el valor de la variable que se mide. Este tipo de apa-- rato depende de la calibración de los estados de equilibrio, así

como de la calidad de los patrones empleados para graduarlo, y de la invariabilidad del mecanismo.

### 2.2c. MODO DE OPERACION POR BALANCEO O AJUSTE DE NULOS.

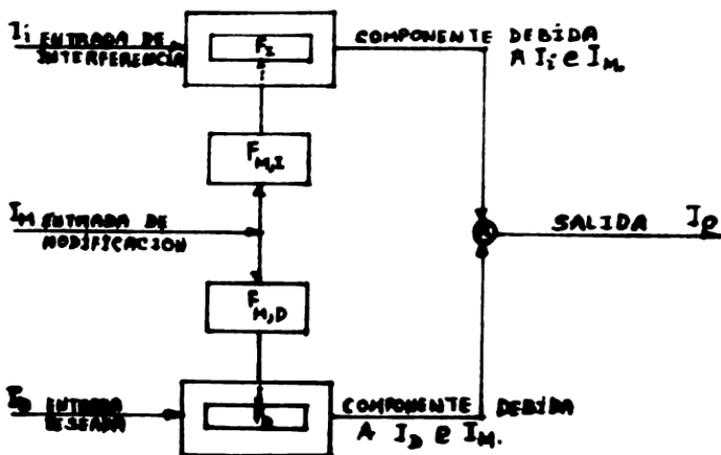
En estos instrumentos, <sup>(1)</sup> la comparación entre variables y norma se efectúa produciendo un efecto idéntico al de la entrada, de maneja que el indicador del instrumento no se mueva, es - decir la deflexión se mantiene en cero. De esta manera el valor de la variable se obtiene evaluando las normas que la equilibra ron, por lo que este método proporciona lecturas de mejor calidad, ya que la comparación entre variable y patrón es directa. - Como en estos instrumentos el indicador debe cubrir únicamente un intervalo pequeño alrededor del cero, el instrumento, resulta sumamente sensible y no necesita calibración, pues sólo debe detectar la presencia y dirección de desbalanceo.

La mayor desventaja de los métodos de balanceo, aparecen cuando es necesario efectuar medidas dinámicas pues su tiempo - de respuesta es bastante grande, en comparación con los instrumentos de deflexión.

### 2.3. CONFIGURACION DE ENTRADA Y SALIDA.

Habiendo analizado en forma muy general tanto la estructura como los modos de operación de los sistemas de medición, - corresponde ahora enfocar la atención en cuestiones más particu lares, empezando por análisis generalizado de las configuracio- nes de entrada y salida.

Según el esquema sugerido por Draper, Mc. Kay, y Lees (1), el cual se presenta en la siguiente figura, las cantidades de entrada pueden clasificarse en tres categorías: Entradas deseadas, entradas de interferencia y entradas de modificación.



CONFIGURACION GENERALIZADA DE ENTRADA Y SALIDA

FIG. 2.3

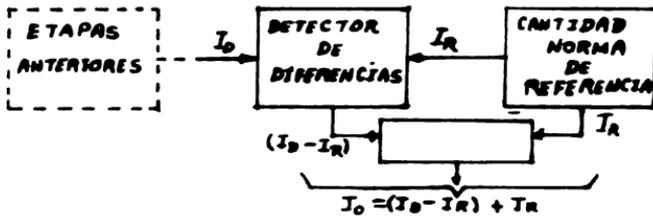
Las entradas deseadas representan las variables para las cuales se diseñó el instrumento. Las entradas de interferencia representan cantidades a las cuales el instrumento es sensible en forma no intencional.

Una entrada deseada produce una componente de salida, pudiendo expresarse la relación entrada-salida mediante una función  $F_D$  que indica las operaciones matemáticas necesarias para obtener la salida a partir de la entrada. Otro tanto puede decirse para la relación entrada-salida de la señal de interferencia llamándose a la función  $F_i$  <sup>(1)</sup>

Las entradas modificadoras son las que causan cambios en las relaciones de entrada-salida, es decir en  $F_D$  y  $F_i$ , pueden ser introducidas intencionalmente, como es el caso de la onda portadora de un transmisor o bien pueden entrar accidentalmente. Aunque este tipo de entradas pudiera parecer una variedad de interferencia, se requiere un enfoque particular, pues su acción inside sobre las relaciones entrada-salida. Los símbolos  $F_{M,I}$  y  $F_{M,D}$  representan la forma específica como  $I_m$  afecta tanto a  $F_i$ , como a  $F_D$ . <sup>(1)</sup> La entrada modificadora puede ser introducida intencionalmente. <sup>(1)</sup>

Partiendo del concepto de medición como la determinación de una característica particular de una muestra en términos de ciertas unidades norma de dicha característica <sup>(8)</sup>, la comparación de la cantidad ó propiedad que se medirá con las unidades

normas correspondiente es el proceso operacional de medir. Por ello todo instrumento o sistema de medición<sup>(8)</sup> envuelve tanto un detector de diferencias como una norma de referencia, lo cual se ilustra en la figura 2.4.



COMPARADOR GENERALIZADO

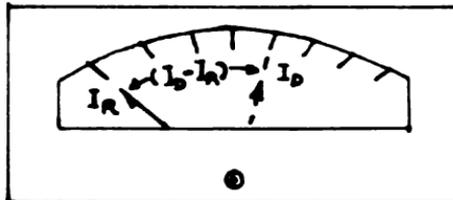
FIG. 2.4

Aún cuando por fundamento el papel principal le corresponde a la norma, en general, la señal que llega detector de diferencias ha experimentado cierta manipulación previa, como una conversión entre dominios de datos ó bien amplificación, atenuación, etc. La cantidad que se medirá es  $I_D$ , que se compara con una cantidad de referencia  $I_R$ . La diferencia  $(I_D - I_R)$  se translada a otro dominio. La cantidad medida  $I_0$  será entonces la suma de las unidades normas en la referencia  $I_R$  más la salida del detector  $(I_D - I_R)$  calibrada en las mismas unidades norma.<sup>(8)</sup>

A via de ejemplo, analizaremos dos casos generales en instrumentos que trabajan por el principio de balanceo e instrumentos que trabajan por deflexión.

En un instrumento que trabaja por balanceo, en el momento de llevar a cabo la medición, la cantidad norma de referencia  $I_R$  varía, hasta que equilibra la cantidad que se quiere medir  $I_D$ , de manera que diferencia  $(I_D - I_R) = 0$ , cuestión que señala el mecanismo indicador directamente, y la medida  $I_0 = (I_D - I_R) + I_R = I_R$  es igual a la cantidad norma de referencia. En este caso, el detector de diferencias no proporciona la lectura de la medida, cayendo entonces el papel principal en la cantidad norma de Referencia que da directamente el valor de la magnitud<sup>(8)</sup>, y la magnitud de la diferencia  $(I_D - I_R)$  nunca contribuye en la cantidad final. Esto por supuesto, sin tomar en cuenta el error.

En un instrumento que trabaja por deflexión a menudo se tiene una posición inicial de referencia  $I_R$  del indicador, y una final de  $I_D$  siendo la medida  $I_0 = (I_D - I_R)$  o sea la diferencia entre las posiciones (Fig. 2.5).



En este caso la calibración de la pantalla es empleada para dar la lectura, y la cantidad norma de referencia no -- contribuye significativamente en el resultado, su papel es el -- de indicar un punto de partida desde el cual se inicia la medida, y a menudo se fija  $I_R = 0$ , con lo que  $I_O = (I_D - I_R) + I_R = I_D$ . -- Recuérdese en este caso que  $I_D$  ya no será en general, la señal original, sino una análoga de otra naturaleza (movimiento, corriente, etc), calibrada según las magnitudes que deberá registrar el instrumento. (8)

#### 2.4. SEÑALES NO DESEADAS.

Cuando se lleva a cabo un experimento, se está seleccionando una señal de entre muchas posibles, tratando de mantener constantes aquellas que no son de interés. Tal y como se estableció al presentar la estructura general de entrada a salida, van a existir señales provenientes del medio medido que sin ser de interés, también se recogen por el sistema en forma no intencional, a las que se llamó interferencias.

No son estas las únicas señales no deseadas que pueden aparecer, pues si se analiza más a fondo este problema, existen señales que aparecen tanto en el medio ambiente como en el sistema de medición en sí, cuya permanencia es continua, y cuyos efectos es necesario tomar siempre en cuenta, constituyendo lo que genéricamente se identifica como ruido. (15) El ruido es ine

vitabile y va a aparecer siempre en todo tipo de medición, no importa que tan fino sea el instrumento o que tan bién esté integrado el sistema.

El ruido puede entrar junto con la señal, pués si se efectua su análisis espectral, tiene componentes en todos los rangos de frecuencia detectables y un filtro que usualmente trabaja sobre discriminación de frecuencias lo admite junto con la señal deseada.

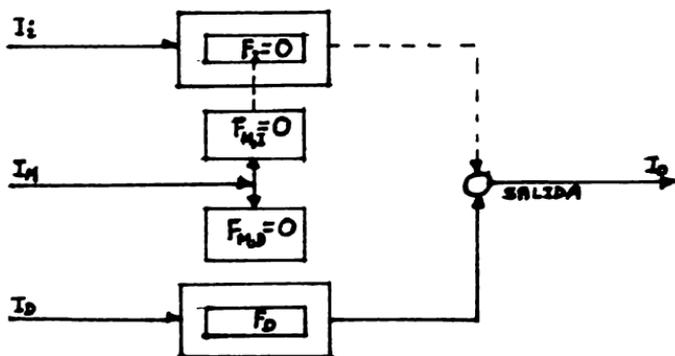
El ruido es esencialmente un fenómeno de azar y aunque podría confundirse con las interferencias, ambos son fenómenos diferentes<sup>(14)</sup>, ya que estas últimas son señales bién localizadas, (fig. 2.3) que bajo la amplificación del ancho de banda -- del instrumento aparecen más definidas, mientras que en las señales ruido, el efecto es el de incrementar la altura de la señal, sin alterar sus características generales.<sup>(14)</sup>

En el capítulo III se analizará más a fondo el problema del ruido, mientras que en este capítulo se continuará de -- acuerdo con el diagrama generalizado de los sistemas de medición, a analizar la eliminación de interferencias.

## 2.5 METODO DE SENSIBILIDAD INHERENTE.

El principio básico de este método, es el de diseñar al sistema de medición de manera que sea sensible únicamente a las entradas deseadas.

De acuerdo con la configuración general de entrada a-salida (Fig. 2.3), esta aproximación requiere que  $F_I$  y/o  $F_{M,D}$  se minimicen o se anulen por completo. Lo que se ilustra en la figura 2.6.



#### METODO DE SENSIBILIDAD INHERENTE

FIG. 2.6

Un ejemplo acerca del empleo de este método, aparece en el uso de bulbos en equipos que deben de disipar calor o manejar potencia, ya que dicho dispositivo es bastante resistente al calor, mientras que los semiconductores son bastante sensibles, por esto a pesar de que el empleo de estos últimos ha -- reemplazado a los bulbos, en una enorme cantidad de aplicaciones, estos se mantienen en equipos bajo las condiciones arriba-indicadas.

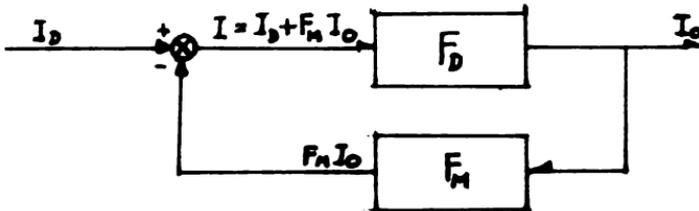
## 2.6 METODO DE RETROALIMENTACION NEGATIVA DE ALTA GANANCIA.

El principio detrás de este método, es el siguiente--

(22) Una fracción de la señal de salida regresa a la entrada, - donde se compara con la señal deseada  $I_D$ , empleándose la diferencia para reducir el error.

Siguiendo el diagrama de la figura 2.7 la salida  $I_O$ , - es llevada a un bloque donde se modifica, obteniéndose  $F_M I_O$ , se ñal que se suma algebraicamente con  $I_D$ , entrando al sistema una señal efectiva  $I = I_D + F_M I_O$ , entonces la salida será

$I_O = F_D I = F_D I_D + F_D F_M I_O$  de manera que:



RETROALIMENTACION

FIG. 2.7

$$I_O = \left[ \frac{F_D}{1 - F_M F_D} \right] I_D$$

$$S_1 \quad F_M F_D = -F_R \quad I_O = \left[ \frac{F_D}{1 + F_R} \right] I_D$$

de aquí vemos que si  $F_R \gg 1$  (alta ganancia), entonces

$I_O = \left[ \frac{I}{F_M} \right] I_D$  de manera que la salida dependerá esencialmente de la red de retroalimentación, eliminando las interferencias internas en la red original  $F_D$ . De manera que si  $F_m$  se implementa con elementos apropiados se mejora el desempeño general del sistema.

Para ilustrar este método considerese la retroalimentación de un amplificador electrónico<sup>(13)</sup> (Fig. 2.8a) y su circuito equivalente Norton (fig. 2.8b).

Para determinar la ganancia  $A_{if}$ , nótese que la impedancia de entrada a la red de retroalimentación está en paralelo con  $R_L$  y usualmente  $R_D \gg R_L$ , para no cargar a la salida.

Sea  $V_L^i$  El voltaje de entrada a la red de retroalimentación. Cuando se calcule la respuesta con la red conectada, se define  $V_i^1 = V_L^i$ .

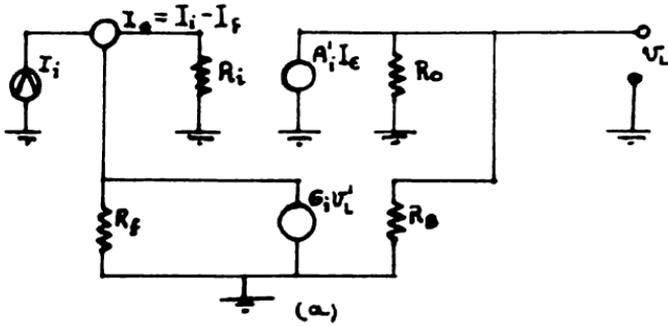
De acuerdo con el circuito equivalente, si la impedancia que ve la red de retroalimentación, es mucho menor que  $R_f$ , entonces la corriente de retroalimentación  $I_f$  es:

$$I_f = 6_i V_L^i \text{ ----- (2-1)}$$

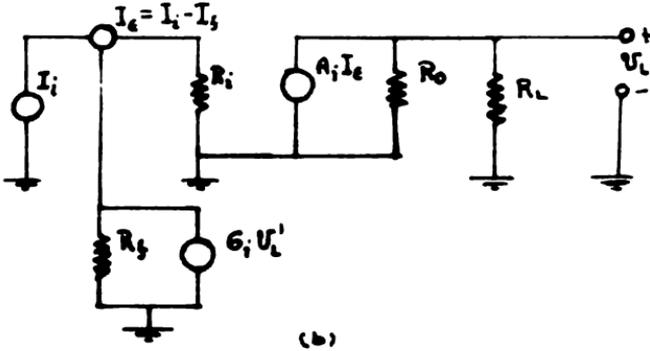
La corriente de error es (Para  $R_L \ll R_O$ ).

$$I_E = I_i - I_f = I_i - G_i V_L^i \text{ ----- (2-2)}$$

y la corriente en la carga es:



CIRCUITO REAL



CIRCUITO EQUIVALENTE NORTON

AMPLIFICADOR CON RETROALIMENTACION

FIG. 2.8

$$I_L = A_i^1 I_e = A_i^1 (I_i - G_i V_L^1) \quad \text{-----} \quad (2-3)$$

( $R_L < R_D$ ).

Haciendo  $V_L^1 = V_L$ , y para determinar la ganancia global de corriente.

$$V_L^1 = V_L = I_L R_L \quad \text{-----} \quad (2-4)$$

y entonces la ganancia total de corriente  $A_{if}$  se encuentra sustituyendo (2-4) en (2-3) obteniéndose:

$$A_{if} = \left( \frac{I_L}{I_i} \right) = \left( \frac{A_i^1}{1 + A_i^1 G_i R_L} \right) \quad \text{-----} \quad (2-5)$$

En este ejemplo la ganancia sin retroalimentación es:

$$A_i = A_{if} \quad \Big|_{G_i=0} = A_i^1$$

y entonces:

$$A_{if} = \frac{A_i}{(1 + A_i G_i R_L)} = \left( \frac{1}{G_i R_L} \right) \left( \frac{1}{1 + 1/A_i G_i R_L} \right) \quad \text{---} \quad (2-6)$$

De ésta forma la ganancia con retroalimentación es in dependiente de la ganancia simple  $A_i$  y de las variaciones en --

$$A_i. \text{ Pues } A_i G_i R_L \gg 1 \quad :$$

$$A_{if} = \frac{1}{G_i R_L} \quad \text{-----} \quad (2.7)$$

La ganancia depende en este caso únicamente de la red de retroalimentación, requiriéndose únicamente, que  $G_i$  y  $R_L$  --

mantengan su valor constante. En la práctica tanto  $G_L$  como  $R_L$  - se implementan con elementos sumamente estables y el resultado es que se obtiene una relación constante entre entrada y salida, sin importar interferencias originadas en otras partes del sistema.

Este método lleva a una gran exactitud, pues además - de la independencia con respecto a la estructura interna del sistema, existen las siguientes razones: (1)

i) Como el amplificador proporciona la mayor parte de la energía, la red de retroalimentación puede diseñarse con baja capacidad de manejo de potencia, lo en general lleva a obtener una mayor estabilidad en las características de la red.

ii) El ancho de banda se modifica, y aumenta la linealidad.

iii) La existencia de un buen diseño de la red de retroalimentación, combinado con alta amplificación, cancelan las interferencias generadas internamente.

Es necesario mencionar que también existen variantes - muy fuertes en la aplicación del principio de retroalimentación siendo el más importante el de inestabilidad dinámica, donde aparecen oscilaciones.

Para analizar ésta última situación (11) , considérese de nuevo el circuito equivalente de Norton. Se define la ganancia de lazo (Loop Gain)  $T$ , a la ganancia de voltaje medida alre

dedor de todo el circuito de retroalimentación desde  $V_L'$ , a través de la red de retroalimentación y luego a través del amplificador hasta  $V_L$ .

$$T = \frac{V_L}{V_L'} \Bigg|_{(I_i=0)} \quad \text{-----} \quad (2-8)$$

Con  $I_i = 0$  (Fig. 2.8) y suponiendo  $R_f \rightarrow \infty$

$$I_E = -I_f \approx -G_i V_L' \quad \text{-----} \quad (2-9)$$

y entonces

$$V_L = I_L R_L = A_i^1 I_E R_L = A_i^1 G_i R_L V_L' \quad \text{-----} \quad (2-10)$$

Por lo tanto

$$T = \frac{V_L}{V_L'} \Bigg|_{I_i = 0} = -A_i^1 G_i R_L = -A_i G_i R_L \quad (2-11)$$

Como la ganancia de corriente con retroalimentación es:

$$A_{if} = \frac{A_i}{1 - A_i G_i R_L} \quad \text{-----} \quad (2-12)$$

Entonces:

$$A_{if} = \frac{A_i}{1 - T} \quad \text{-----} \quad (2-13)$$

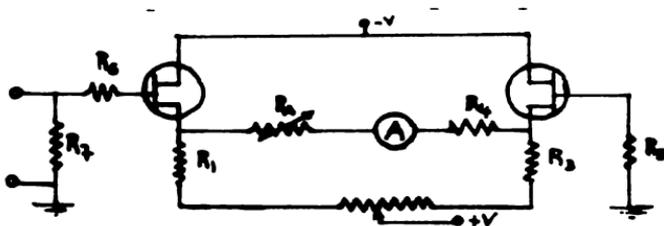
En el caso que  $T = 1$ , el amplificador es inestable y oscilará, abriendo la posibilidad de emplearlo como un oscila--

dor, cuyas características también serán independientes de las interferencias internas.

## 2.7 METODO DE COMPENSACION DE SALIDA.

Para aplicar este principio<sup>(1)</sup>, se requiere conocer anticipadamente el valor de las interferencias o su orden de magnitud. Con esta información pueden calcularse las correcciones que compensen a la salida obtenida, para que al final quede únicamente la componente de salida asociada con la entrada deseada.

Un ejemplo de este método<sup>(10)</sup> se tiene con el sistema de la figura (2.9), donde un amplificador diferencial sirve de entrada para un medidor, y entre sus terminales se conecta un medidor D'Arsonval.



AMPLIFICADOR DIFERENCIAL

FIG. 2.9

Idealmente el circuito estará balanceado en ausencia de señal, y la deflexión del indicador será nula.

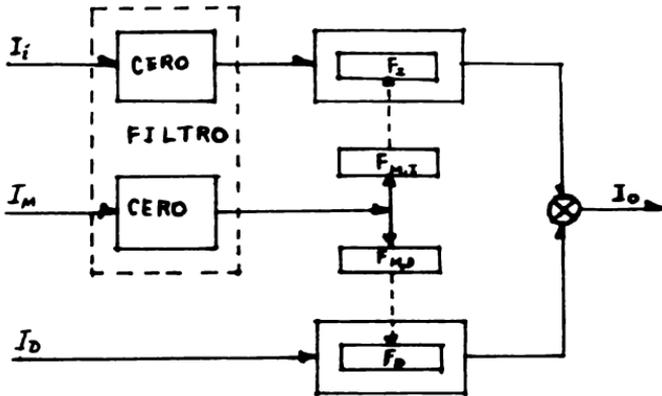
Cuando se aplica corriente directa en la entrada, se desbalancea el circuito, produciéndose una corriente en el indicador (A) produciendo deflexión. El D'Arsonval se calibra de -- acuerdo con el rango de valores que se medirá.

Sin embargo en ausencia de señal, y debido a las asimetrías entre las características de los transistores y a las imprecisiones de los demás componentes, existirá un voltaje entre las terminales de D'arsonval aún en ausencia de señal, cuyo orden de magnitud puede apreciarse antes de la calibración del instrumento. Este efecto se compensa usando la resistencia variable  $R_b$ , a fin de ajustar el aparato.

## 2.8 FILTRADO.

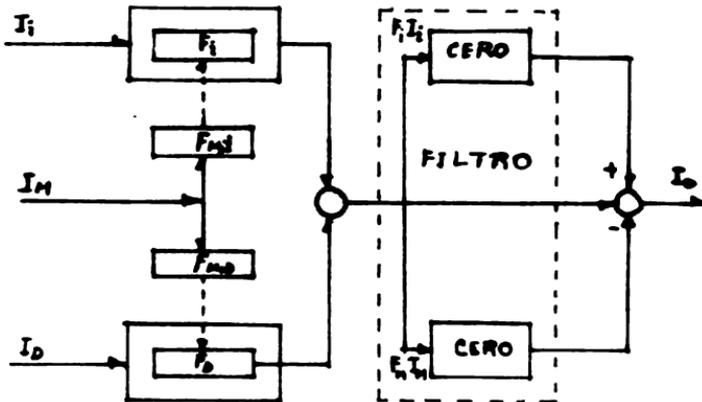
Funciona cuando las señales deseadas son periódicas, y podemos determinar las frecuencias de interés, de entre todas las que puede registrar el aparato. Claro que no es un sistema absoluto pues si una interferencia cae dentro de las frecuencias que registra el instrumento, también será detectada.

El filtro puede aplicarse tanto en la entrada como en la salida o en puntos intermedios del sistema. Los diagramas siguientes muestran en forma generalizada, la estructura de los sistemas de filtrado de entrada y de salida.



FILTRO DE ENTRADA

FIG. 2.10



FILTRO DE SALIDA

FIG. 2.11

En el filtrado de entrada las entradas  $I_i$  e  $I_M$  se hacen pasar por dispositivos<sup>(1)</sup> cuya relación de entrada a salida es cero, con lo que ambas señales se eliminan.

En el caso del filtro de salida<sup>(1)</sup>, la señal se plantea como una superposición de las salidas debidas a la interferencia  $F_i I_i$ , a la señal deseada  $F_D I_D$  y la señal modificadora ---  $F_M, D^I_M$ , entonces se construyen filtros que trabajando bajo el principio de selección de frecuencias, rechacen tanto a  $F_i I_i$  como a  $F_M, D^I_M$ , pero que dejen pasar enteramente a  $I_0 = F_D I_D$ .

En este trabajo se enfatiza la selectividad de frecuencia con circuitos electrónicos, aunque pueden señalarse ejemplos de filtros que trabajan bajo otros principios, como los filtros biológicos que trabajan por selección de tamaño, etc.

Como características generales de los filtros pueden señalarse la existencia de frecuencia de corte<sup>(10)</sup>, es decir, -- aquellas frecuencias que señalan la frontera entre el intervalo de atenuación de señales y el intervalo de señales que son transmitidas. Por supuesto que si bien idealmente debería existir -- una frecuencia específica de corte, tal que a partir de ella -- se definiera drásticamente la zona de transmisión de la de bloqueo, en la práctica esto no es posible, ya que en la realidad, lo que se tiene en lugar de un corte abrupto, en una frecuencia dada, es una zona de transición dada por un intervalo de frecuencia tales que la respuesta del filtro varía gradualmente -- (Figura 2.12), más o menos pronunciadamente.

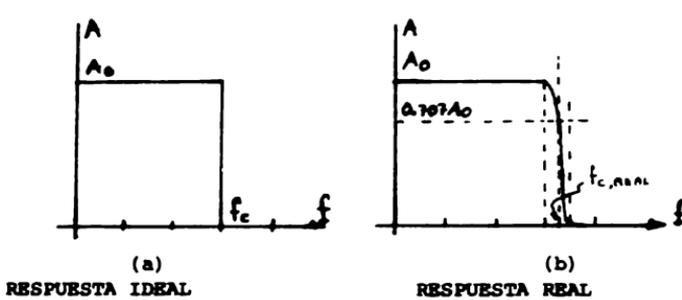


FIG. 2.12

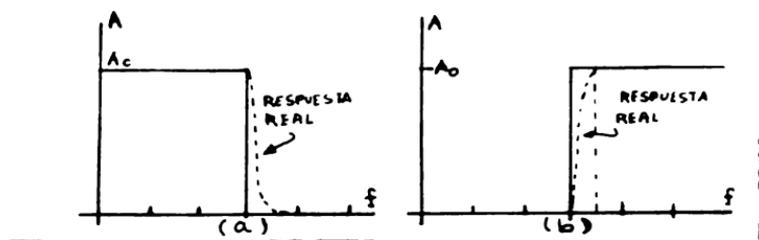
Si  $A_0$  es la amplitud de la salida del filtro la frecuencia de corte  $f_c$ , será aquella cuya amplitud de salida sea (13)  $0.707 A_0$ , o sea el 70.7% de  $A_0$ .

#### 2.8.a. FILTRO PASA BAJOS (10).

Es aquel que deja pasar, idealmente, únicamente señales de frecuencia desde 0. hasta una frecuencia de corte  $f_c$ , - bloqueando toda señal de frecuencia mayor, fig. 2.13a.

#### 2.8.b. FILTRO PASA ALTOS.

Es el que solo deja pasar frecuencias a partir de -- una frecuencia de corte  $f_c$  hasta infinito. (10) También esto -- es un planteo ideal, pues a altas frecuencias la ganancia se -- atenúa usualmente y no es posible obtener una amplitud constante. fig. 2.13b.



FILTRO PASA BAJOS

FILTRO PASA ALTOS

FIG. 2.13

## 2.8.c. FILTRO DE RECHAZO DE BANDA.

Es el que deja pasar todas las señales, cuya frecuencia no esté entre dos frecuencias de corte  $f_{c_1}$  y  $f_{c_2}$ , es decir si  $f < f_{c_1}$ , o bien  $f > f_{c_2}$  con  $f_{c_1} < f_{c_2}$ , la señal pasa, de otra forma es rechazada (10) (fig. 2.14.a).

## 2.8.d. FILTROS PASA BANDA

Es el que deja pasar las señales cuya frecuencia  $f$ , está entre dos frecuencias de corte (10)  $f_{c_1}$  y  $f_{c_2}$ , es decir - que  $f$  sea tal que  $f_{c_1} \leq f \leq f_{c_2}$  (fig. 2.14.b.).

Con respecto a estos dos últimos filtros, las señales de frecuencias muy altas, se atenúan con más énfasis que las bajas frecuencias, por lo que la amplitud de salida no es uniforme.

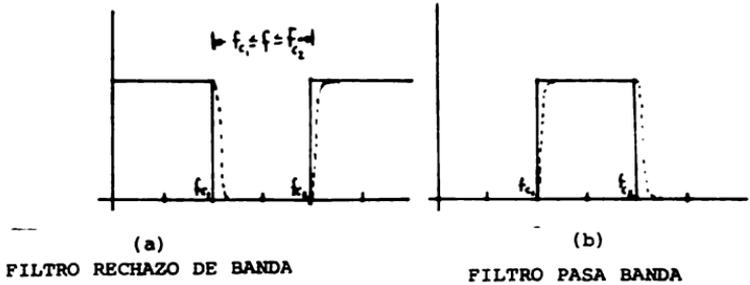


FIG. 2.14

## 2.9 METODO DE ENTRADAS OPUESTAS (11).

Consiste esencialmente en la introducción intencional de señales que neutralicen a las señales de interferencia, de manera que sus efectos se neutralicen mutuamente (fig. 2.15)

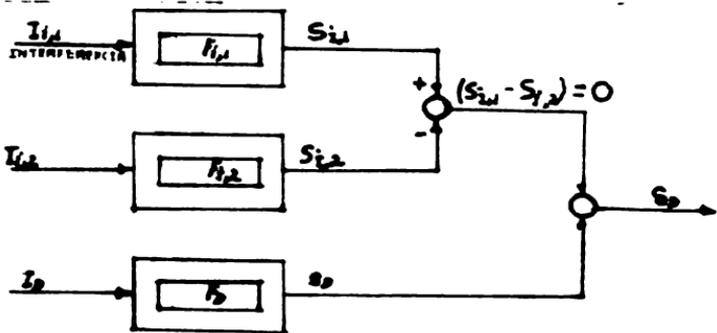
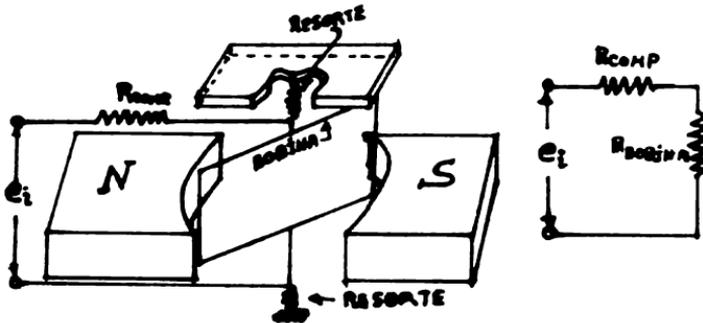


FIG. 2.15

La entrada intencional, se diseña de manera que las

señales  $S_{i1}$  y  $S_{i2}$ , sean esencialmente iguales, de manera que se cancelen mutuamente y su contribución neta,  $(S_{i,1} - S_{i,2})$  en la salida sea cero.

A vía de ejemplo, analicemos un D'Arsonval, (Fig. - 2.16). Este instrumento es de hecho un sensor de corriente, -- que puede calibrarse para medir voltaje.



SALIDA DEL MEDIDOR D'ARSONVAL

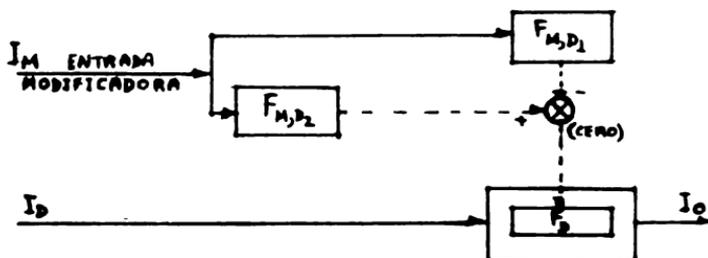
FIG. 2.16

En tanto la resistencia total del circuito se man -- tenga constante, la calibración original se conservará y las - lecturas serán confiables.

Una entrada modificadora, puede ser la temperatura, - que originará cambios en la resistencia de la bobina, con lo - cual se alterará la calibración.

Para corregir esto, se introduce una resistencia de compensación  $R_c$ , de manera tal que su coeficiente de temperatura sea opuesto al de resistencia de la bobina.

De esta manera, si cambia la temperatura, los cambios de resistencia en las partes internas se compensan mutuamente - y la resistencia total no es afectada, permaneciendo la calibración constante (Fig. 2.17).



ENTRADAS OPUESTAS PARA D'ARSONVAL

FIG. 2.17

En la literatura especializada sobre métodos de medición, (1), (4), (10) se encuentran descritos en detalle, dispositivos y arreglos en los cuales se aplican estos métodos en casos concretos de muy diversa índole.

### C A P I T U L O I I I

#### SEÑALES DE PRUEBA Y ALGUNAS CONSIDERACIONES SOBRE EL RUIDO.

Hasta este punto la discusión se ha centrado en las configuraciones generales de los instrumentos, haciendo solo referencias muy generales a las señales. Aunque en principio la señal que se obtiene desde un medio puede tener una infinidad de variaciones, la respuesta de un sistema se evalúa ante un reducido número de ellas.

Las señales pueden clasificarse a "grosso modo" en dos tipos: Señales Simples Determinísticas (15) que siguen un comportamiento dado por una función probabilística y señales de azar cuya descripción requiere técnicas estadísticas, y de las cuales el ruido es la más interesante.

#### 4.1 SEÑALES

Las señales determinísticas, se caracterizan especificando la frecuencia, amplitud y fase (13) de cada una de sus componentes armónicas. De esta forma la señal queda completamente descrita.

Si tomamos como ejemplo una señal cualquiera, obtenible a partir de un medio, su aspecto en general va a diferir de los modelos ideales, sin embargo, dentro de ciertas restricciones, casi cualquier señal puede descomponerse como una serie

de fourier, (13) (14) o sea que una señal cualquiera puede interpretarse como la suma de señales senoidales que difieren entre-si en fase, amplitud y frecuencia, es decir:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} c_n e^{i(\omega_n t + \phi)} \quad \text{---(3-1)}$$

Esta representación permite una descripción alterna de las señales en general, (13) pues en vez de especificar una función matemática dada, puede graficarse, la amplitud contra la frecuencia angular de cada uno de los senoides que aparecen en la serie, obteniéndose un espectro de amplitud (fig 3.1.a.)- o bien puede graficarse la fase contra la frecuencia angular de cada componente, llamándosele espectro de fase (fig 6.3.1.b.)

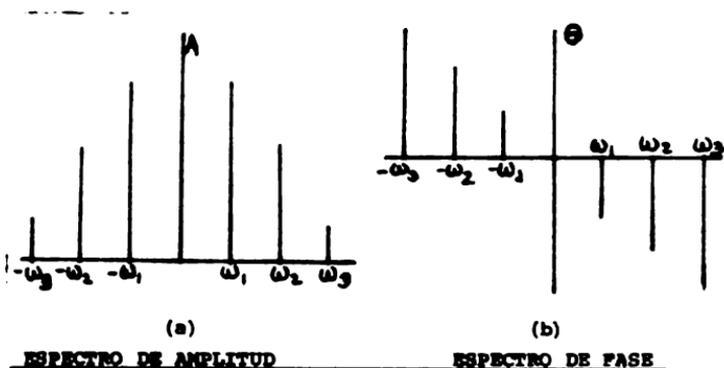


FIGURA 3.1

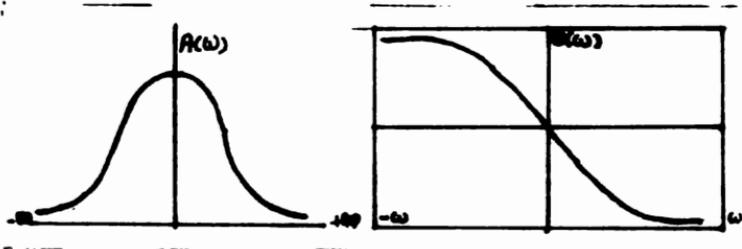
En los casos mostrados en ambas gráficas los espectros consisten en rectas perpendiculares bien diferenciadas, razón por lo cual se les llama en general espectros discretos.

Si se considera el caso donde la separación entre líneas espectrales es sumamente pequeña, o sea cuando  $|\omega_i - \omega_{i+1}| \rightarrow 0$  ya no existirá diferenciación entre líneas, y el espectro será ahora contiguo, empleándose la transformada de Fourier. (13).

$$A(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} a(t) e^{-i\omega t} dt \text{-----} (3-2).$$

para obtener el espectro de amplitud.

También debe tomarse en cuenta que en este caso  $\phi$  será también una función de la frecuencia  $\phi(\omega)$ . Ambos espectros se muestran en la figura (3.2.), y son continuos.



ESPECTROS CONTINUOS

FIG. 3.2

De hecho dada una señal  $S(t)$  continua siempre es posible definir su transformada de fourier  $f(\omega)$  (ec. 3-2), y también dada la transformada de fourier  $f(\omega)$ , la señal se recuperará con la inversa:  $S(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\omega) e^{i\omega t} d\omega$ , mediante el empleo de la transformada de fourier, puede ponerse la señal en el dominio de la frecuencia o del tiempo, siendo en principio ambas descripciones equivalentes (13). El empleo de una representación en particular dependerá de la aplicación, y del equipo disponible o de los gustos personales del experimentador. Para este trabajo se empleará básicamente el dominio del tiempo, ya que en dicha representación aparecerán resultados importantes para la discusión en forma más directa. No obstante esto no excluirá el empleo del dominio de frecuencia cuando sea necesario.

Por ultimo se clasificarán las señales en periódicas, si sus valores se repiten siempre que ha pasado un tiempo T -- llamado período, y no periódicas si no cumplen ésta regularidad. Es decir si  $S(t+nT) = S(t)$ ,  $n=1,2,\dots$ ;  $S(t)$  es periódica.

Con respecto a su simetría, una señal se llama par si:  $S(t) = S(-t)$  y se llama impar si:  $S(t) = -S(-t)$

### 3.2. CARACTERISTICAS GENERALES DE LAS SEÑALES.

Por características generales, se especificarán algunos criterios operativos de empleo frecuente, para la descrip--

ción de señales, y que son: Valor Medio Cuadrado (RMS)\*, Valor Corriente directa (CD). Ciclo útil y factor de cresta.

### 3.2.a. VALOR MEDIO CUADRADO (R.M.S)

Se define físicamente como la señal de corriente directa, que produciría una disipación de energía de Joule, idéntica a la que produce la señal alterna en un ciclo. Dada una forma de onda definida  $S(t)$  su valor R.M.S. se calcula como sigue:

$$S_{R.M.S.} = \left[ \frac{1}{T} \int_0^T S^2(t) dt \right]^{1/2} \text{-----(3-3)}$$

T = PERIODO

### 3.2.b. VALOR CORRIENTE DIRECTA (C.D)

Es el valor promedio de la señal durante un ciclo, si ésta es periódica, o durante un intervalo acotado de tiempo si no es periódica, se calcula como sigue:

$$S_{C.D.} = \frac{1}{T} \int_0^T S(t) dt \text{-----(3-4).}$$

---

(\*) RMS viene de la expresión inglesa "Root Mean Square" y las iniciales son de uso amplio en la literatura.

## 3.2.c. CICLO UTIL.

Dada una corriente alterna, a menudo únicamente se emplea una parte inferior o superior de ella, a partir de un nivel determinado. Si  $t_0$  es el tiempo que permanece la señal - con la polaridad empleada durante un ciclo de período  $T$ , el ciclo útil  $D$  se define:  $D = \left(\frac{t_0}{T}\right)$  ----- (3-5)

usualmente es importante en rectificación y en disipación de potencia.

## 3.2.e. FACTOR DE CRESTA.

Es una medida de la aproximación de una señal dada, a una señal constante, lo que sería la aproximación del valor RMS al valor C.D. de corriente alterna. Se define como sigue:

$$FC = \left[ \frac{S_{R.M.S.} - S_{C.D.}}{S_p} \right] \text{-----} (3-6)$$

donde  $S_p$  = valor pico de la señal.

## 3.2. SISTEMAS LINEALES.

La relación entre la respuesta y excitación de un sistema, está especificada matemáticamente mediante una relación - llamada función de transferencia. Con respecto a esta situación se puede clasificar a todo sistema como lineal o no lineal.

Si  $G_1(t)$  y  $G_2(t)$  son las respuestas ante entradas  $f_1(t)$  y  $f_2(t)$  respectivamente, un sistema lineal es aquel que cumple las condiciones siguientes:

1.- La respuesta ante la entrada:

$$a f_1(t) + b f_2(t) \text{ es } a g_1(t) + b g_2(t) \quad a, b = \text{Const.}$$

2.-  $g(t - t_0)$  es la respuesta correspondiente a  $f(t - t_0)$

A los sistemas que no cumplen con estos requisitos se les llama no lineales. Un sistema no lineal a menudo puede -- aproximarse mediante sistemas lineales. Ahora se procederá a -- especificar las señales que usualmente se emplean, para la evaluación de sistemas de medición.

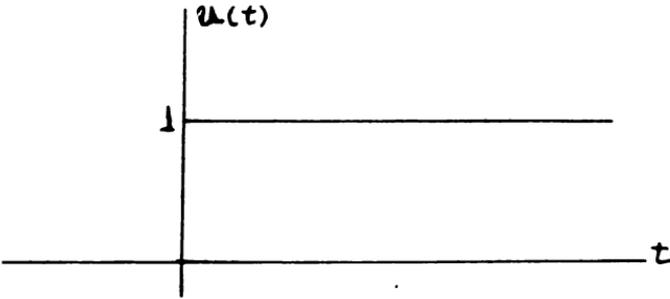
### 3.3. SEÑALES DE PRUEBA.

Idealmente para evaluar un sistema, debería de ser excitado por todos los tipos de señal que en un momento dado puede aceptar, sin embargo esto es imposible, por lo que tanto su evaluación teórica, como su evaluación experimental, deberá hacerse en base a un número finito de señales, tales que la respuesta ante ellas sea lo más significativa posible, estas son -- las señales de prueba que pueden servir como bloques constructivos -- para la generación de cualquier otra señal, y son (1) (13). La función escalón, la función impulso unitario y la función senoidal. Puede considerarse a la función rampa, pero esta se puede definir en términos de la función escalón.

## 3.3.1. FUNCION ESCALON.

Se define como:

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$



## SEÑAL ESCALON

FIG. 3.3.

empleando la función escalón, se pueden definir otras, que integran un conjunto de formas de onda asociadas como son:

i) Pulso cuadrado. Se define como:

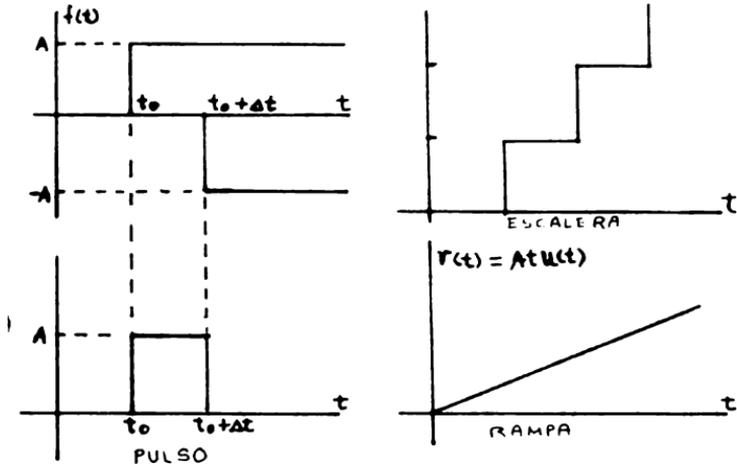
$$f(t) = A[u(t-t_0) - u(t-t_0+\Delta t)]$$

donde  $A$  es la amplitud. Esta combinación se muestra en las figuras 3.4.a. y 3.4.b.

ii) Función escalera.- Esta se define como:

$$f(t) = \sum_{k=0}^n A u(t-kT)$$

y se muestra en la figura 3.4.c.



### FUNCIONES ASOCIADAS A LA SEÑAL ESCALON

FIG. 3.4.

iii) Función rampa.- Será de particular interés como señal de prueba en discusiones posteriores.

Se define de la forma siguiente:

#### 3.3.2. PULSO UNITARIO.

Se define de la forma siguiente

$$\delta(t) = 0 \text{ si } t \neq 0 \text{ y } \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1$$

sus propiedades más importantes son las siguientes (13):

- i)  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \delta(t) dt = f(0)$
- ii)  $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = \lim_{-l \rightarrow 0} \left[ \lim_{l \rightarrow 0} \int_{-l}^{+l} \delta(t) dt \right] = 1$

iii) si  $s(t) = Au(t-d)$  entonces  $S'(t) = A\delta(t-d)$

donde  $u(t)$  es la función escalón.

iv)  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \delta^{(n)}(t-T) dt = f^{(n)}(T)$  donde  $f(t)$  es una señal continua cualquiera.

$$v) \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \delta^{(n)}(t-T) dt = (-1)^n f^{(n)}(T) ; f^{(n)}(T) = \left. \frac{d^n f}{dt^n} \right|_{t=T}$$

### 3.4. LA FUNCION SENOIDAL.

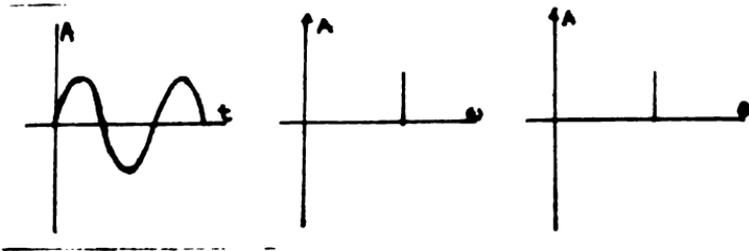
Mención aparte merece esta función, puesto que las medidas para evaluación de sistemas lineales de medición, se efectúan con esta señal, (15) Fig. 3.5.

La función senoidal tiene la propiedad de que su forma no es afectada por los sistemas lineales. (15) Únicamente su fase y su amplitud pueden alterarse pero la forma permanece idéntica, así como su frecuencia.

La respuesta del sistema lineal sobre la amplitud y la fase de una señal en todas las frecuencias, define por completo su respuesta ante excitaciones que no rebasen el intervalo de frecuencias de operación con amplitudes detectables.

Si un sistema es lineal su respuesta ante cualquiera - entrada puede calcularse mediante la transformación de fourier (15) (13)

Para probar esto, considérese que cualquier entrada  $f(t)$  al sistema, puede pensarse como una serie de impulsos, que ocurren durante un tiempo  $\Delta T$  con un área  $f(\tau)\Delta T$ . Entonces si se-



FORMA      ESPECTRO DE AMPLITUD      ESPECTRO DE FASE

FIG. 3.5.

calcula la respuesta ante un impulso de área unitaria  $u(t)$  que ocurre en  $T=0$ , integrando de  $-\infty$  a  $+\infty$ , se obtendrá la característica general de respuesta ante cualquier señal, cuestión esta última que se apoya en el principio de superposición. (15).

Sea  $k(t)$  la respuesta de un sistema lineal ante un impulso unitario cuando  $T=0$ . Como la respuesta es invariante ante una traslación en el tiempo si el impulso ocurre en  $(t-\gamma)$ , la respuesta será  $k(t-\gamma)$ . Si  $f(\gamma)$  es la entrada definida en el párrafo anterior, o sea descompuesta en una serie de pulsos, la respuesta del sistema lineal será (15):

$$g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\gamma) k(t-\gamma) d\gamma \quad \text{-----} (3-9)$$

tomando la transformada de fourier en ambos lados (15):

$$G(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} f(\gamma) k(t-\gamma) d\gamma \right] dt$$

intercambiando el orden de integración:

$$G(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} k(t-\tau) e^{-i\omega t} dt \right] d\tau$$

Sea  $t - \tau = v$

$$G(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) e^{-i\omega \tau} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} k(v) e^{-i\omega v} dv \right] d\tau$$

llámese:

$$K(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} k(v) e^{-i\omega v} dv \quad \text{----- (3-10)}$$

$$F(\omega) = \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) e^{-i\omega \tau} d\tau \right] \quad \text{----- (3-11)}$$

$K(\omega)$  es la transformada de fourier de  $k(t)$ , y no es función de  $\tau$  por lo que puede removerse de la integral. Queda  $F(\omega)$  la transformada de fourier de  $F(t)$ , con lo que (15)

$$G(\omega) = K(\omega) F(\omega) \quad \text{----- (3-12)}$$

El espectro de la entrada y una función filtrada del sistema  $K(\omega)$ , donde  $K(\omega)$  es la transformada de fourier de la respuesta ante impulso unitario  $\delta(t)$ .

Hasta aquí suponemos que  $f(t)$  es cualquier forma de onda. Ahora sea  $f(t)$  una senoidal de frecuencia  $\omega_0$ , entonces:

$$F(\omega) = \delta(\omega - \omega_0)$$

lo que se consecuencia de la propiedad:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \delta(t-\tau) dt = f(\tau)$$

entonces  $G(\omega) = K(\omega) \delta(\omega - \omega_0)$ , que es únicamente la entrada senoidal multiplicada por  $K(\omega_0)$ .

Dada cualquier entrada, cada componente senoidal produce su propia respuesta senoidal multiplicada por  $K(\omega)$ .

salida es la suma de todas ellas (15).

Un sistema libre de distorsión reproduce a la salida cualquier forma de onda que deba manejar, es decir, si  $f(t)$  es la entrada  $g(t) = af(t-t_0)$ , deberá ser la salida, donde  $a$  y  $t_0$  son constantes que representan un cambio de escala y un retardo.

De  $g(t) = af(t-t_0)$  y tomando la transformación de Fourier:  $G(\omega) = ae^{-i\omega t_0} F(\omega)$  con esto  $K(a) = ae^{-i\omega t_0}$  sobre todas las frecuencias  $(\omega)$ , tales que  $|F(\omega)| > 0$ . De aquí que un circuito sin distorsión es aquel cuya respuesta ante frecuencia tiene amplitud constante  $a$  y una fase lineal  $\theta = \omega t_0$ , sobre todo el rango de interés. Si esto no sucede, el circuito tiene distorsión. (15).

La señal senoidal tiene la virtud de poner de manifiesto en forma simple si un sistema presenta o no distorsión. Por supuesto que también es posible realizar un análisis empleando técnicas de pulso, lo que en última instancia, depende de los gustos del experimentador, el equipo y el tiempo disponible, o bien los propósitos de un trabajo en particular. Cabe mencionar que en sistemas no lineales la señal más importante es la forma de onda cuadrada.

### 3.5. R U I D O.

El ruido es una señal generalmente indeseable, en la evaluación de instrumentos, que enmascara a las señales desea-

das. Siempre estará presente en todo tipo de operación de cualquier sistema o aparato, y su estudio es un tema siempre actual, que continuamente presenta problemas nuevos de diferente complejidad, y cuyo estudio en si requeriría una atención especializada, que en su tratamiento a profundidad, sale del marco de este trabajo. Por esto solamente se mencionarán los aspectos que se han considerado indispensables sobre este problema.

Independientemente de su origen, puede diferenciarse entre dos tipos de ruido. (14) Ruido estacionario, que es aquel cuyo espectro de frecuencia depende del tiempo, y ruido aleatorio cuyo espectro es independiente del tiempo.

### 3.5.1. ORIGEN DEL RUIDO ALEATORIO.

Su origen es en última instancia, consecuencia directa y lógica de la naturaleza atómica de la materia, (13) (15) - y como característica principal, está la de ser completamente irregular en sus propiedades detalladas, siendo un fenómeno típico de azar.

El lugar donde se origina el ruido puede estar en cualquier parte del sistema de medición, en el medio ambiente e inclusive en el medio mismo que está bajo observación. El ruido no es anulado completamente por ningún tipo de filtrado, (1) (14) ya que contiene componentes de todas las frecuencias, por lo que en cualquier filtro no importa que tan selectivo sea el circui-

to, siempre habrá componentes de ruido que pasarán a través del mismo, aparte del ruido mismo que este circuito puede generar.- En cada instrumento mecánico óptico o de otra índole, siempre aparecerá el ruido como una señal acorde a las características del sistema. En el caso de los instrumentos electrónicos los tipos más comunes del ruido clasificados según su origen son:

a).- El efecto de Guíño (Flicker effect) (14) . Se origina en la actividad inducida en los cátodos de los tubos al va cio. Estos dispositivos experimentan procesos continuos de cam bio debidos a evaporación, difusión, acción química, rearrreglos estructurales y bombardeo de gas iónico, facilitados además por el hecho de estar siempre a temperaturas elevadas y al vacío. - Estos cambios no son uniformes, sino que varían de punto a punto sobre las superficies. Aquí se originan dos efectos, el - - efecto de disparo o ruido de disparo (Shot noise), que se discu tirá más adelante, y una fluctuación de la corriente total en - el espacio entre ánodo y cátodo notable sobre todo a bajas frecuencias. Este efecto se puede reducir tratando apropiadamente al cátodo a fin de estabilizarlo en las condiciones de operación y es el efecto de guíño.

b).- Ruido de contacto y ruptura. Este ruido se origina en rupturas del aislamiento, o la pérdida de contacto en trayectorias pequeñas de los circuitos, también por variaciones en las estructuras de los transistores, cortos circuitos en con-

por la presencia universal en todo tipo de circuitos de estos - elementos. Como es lógico el aumento de corriente o voltaje en un circuito acentúa éste efecto.

c).- Ruido Blanco. (14) (15). Es aquel que tiene la misma densidad de potencia en todas las frecuencias. El ruido blanco verdadero con una banda de interés infinita, y por lo -- tanto con potencia infinita nunca se encuentra físicamente, por lo que la definición de arriba se referirá al ruido con espec-- tro de densidad de potencia plana, sobre la banda de interés.

d).- Ruido térmico. En las resistencias y otros elementos de circuito, van a existir corrientes pequeñísimas causa das por el movimiento térmico de electrones. Este ruido se debe a la agitación térmica de los electrones, que dentro de cier tas restricciones se comportan en forma análoga a un gas de par tículas que fluctúan sobre la superficie de un conductor.

H. Nyquist (14) pudo demostrar que el voltaje de rui do térmico generado en una resistencia R, está dado por  $E^2 = 4kRT\Delta F$

Donde: E = Valor R.M.S. del voltaje de ruido térmico.

T = Temperatura absoluta ( °K ).

k = constante de Boltzmann

$\Delta F$  = ancho de banda del sistema de medición.

El efecto térmico es también la causa principal de rui do en semiconductores ya que modifica la población de electro-- nes en la banda de conducción, y la diferencia de potencial en-

tre esta y la banda de valencia, lo que modifica las características de dichos dispositivos.

e) → Efecto de disparo. (14). Tal como se discutió en el caso de guíño (flicker), la emisión del cátodo no es uniforme sino que experimenta fluctuación ya que es la resultante de un gran número de electrones emitidos en forma independiente.

Parte de esta fluctuación también se convierte en fluctuación de la corriente de placa, lo que ocasiona ruido en la salida final, el cual le recordó a schottky (14) el ruido causado por una munición al tocar un blanco. En última instancia este efecto se debe a la cuantización de la carga de la corriente de emisión.

En el caso de que el voltaje de placa sea tan grande que toda la corriente de emisión llegue a la placa, conocido como caso limitado por la temperatura, si  $I_n$  es el valor R.M.S. de la componente fluctuante de corriente de placa, entonces  $\bar{j} = \sqrt{2eI_n\Delta f}$  donde:  $e$  = carga del electrón  $\bar{I}$  = valor promedio de la corriente de placa,  $\Delta f$  = es el ancho de la banda en ciclos.

En el caso de empleo normal, sin llegar al limitado por temperatura que es una situación poco usual, no toda la corriente de emisión va a dar a la placa, y la corriente de placa-

es una función del voltaje de placa. La nube de electrónes que existe en la vecindad de la placa opera eliminando una gran parte del efecto de disparo siendo dada la componente fluctuante (14)

$I_n$  como:

$$I^2 = \Gamma^2 2eI\Delta F \quad \text{-----}(3-13)$$

donde  $\Gamma^2$  es una constante positiva menor que la unidad, llamado-factor de reducción de ruido de carga espacial. Como es un factor difícil de evaluar, se han desarrollado las fórmulas:

$$I_n^2 = (0.644) 4kT_c g \Delta F \quad \text{(para diodos)-----}(3-14)$$

y  $I_n^2 = \frac{0.644}{g} 4kT_g \Delta F$  para triodos de rejilla negativa, donde  $g$  = conductancia de placa y  $g_m$  = transconductancia  $\Gamma$  = parámetro de tubo.

f) Ruido de Fluctuación Magnética. (14). Así como el efecto de disparo, se debe a la naturaleza "de grano", o cuántica de la corriente, al momento de magnetizar un objeto se tiene que el proceso no se lleve a cabo en forma uniforme y continua, sino que consiste en la alineación de pequeñísimos granos magnéticos en la dirección del campo, lo que hace que el proceso se lleve a cabo en pasos discretos, esto ocasiona un ruido de fluctuación, dondequiera que se manejen elementos magnéticos como son transformadores e inductores. A este efecto se le llama Barkhausen.

g) Ruido sucio y ruido de finura de grano. (14) (15) -

Se debe a irregularidades pequeñas en la estructura de los componentes del equipo, ya sea de origen o bien ocasionadas por -- el uso.

h).- Ruido de fluctuación en semiconductores. Cuando el electrón pasa a través de una barrera de potencial, originada por ejemplo en una junta, habrá una reflexión parcial de la onda asociada a la partícula, lo que significa que una porción de los electrones incidentes serán reflejadas, e interferirán con el haz electrónico incidente. Esto da origen a fluctuaciones de la corriente.

Hasta este punto de la discusión, lo que se ha hecho es describir cualitativamente ruido aleatorio en general y los tipos más comunes de este fenómeno, de manera que en un momento dado puedan ser reconocidos. Ahora la etapa siguiente será su descripción formal.

### 3.6. DESCRIPCIÓN DEL RUIDO ALEATORIO.

Dadas las características de azar de este fenómeno, - la descripción del mismo debe ser probabilista, (1) (14) (15) - trabajando sobre promedios de los valores empleados para la descripción de ondas periódicas, como son: Amplitud, Frecuencia, - Fase y Espectros. Para esto es necesario definir o especificar cantidades apropiadas las cuales son:

## 3.6.a. PROMEDIO SOBRE UN ENSAMBLE.

Si  $X_1(t), X_2(t), \dots, X_n(t)$  representan conjuntos de señales al azar, registradas en forma simultánea, el valor promedio de todas estas formas en un tiempo  $t_1$  se llama promedio sobre el ensamble y se calcula mediante (15).

$$\langle X \rangle_{t_1} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N X_k(t_1) \quad (3-15)$$

si el ensamble es tal que  $\langle X \rangle_{t_1} = \langle X \rangle_{t_2}$  para  $t_1 \neq t_2$ , el promedio sobre el ensamble es llamado estacionario.

## 3.6.b. PROMEDIO SOBRE EL TIEMPO.

Es el valor promedio de una señal  $X_k(t)$ , durante un tiempo,  $T$ , y se calcula mediante la ecuación: (15).

$$\langle X_k \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T X_k(t) dt \quad (3-16)$$

## 3.6.c. HIPOTESIS ERGODICA.

Los promedios definidos en los incisos anteriores, proporcionan formas alternas para el cálculo de cantidades estadísticas, como es el caso del ruido aleatorio. Aunque en principio ambas formas de promediar son diferentes, en algunos casos puede suponerse que un promedio sobre ensamble, es igual a un promedio sobre el tiempo, para un mismo sistema. Dicha hipótesis se llama ergódica, y a los sistemas que los cumplen se les llama ergódicos, (15) nótese que para que

un sistema sea ergódico, es necesario que primero sea estacionario. El ruido aleatorio es un caso tratable con esta hipótesis, sería el caso del ruido generado por un conjunto de resistencias idénticas a la misma temperatura.

### 3.6.b. VALORES MEDIOS CUADRADOS.

Así como se emplea el promedio sobre el ensamble, y el promedio temporal para cualquier amplitudes promedio, también los valores medios cuadrados de amplitud se calculan de la forma siguiente (15).

$$\Psi_k^2(t_1) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N X_k^2(t) \text{-----} (3-17)$$

que corresponde a un promedio sobre el ensamble, y:

$$\Psi_x^2(k) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T X_k^2(t) dt \text{-----} (3-18)$$

es el valor medio cuadrado de una sola componente del ensamble.

### 3.6.e. ESPECTRO DE DENSIDAD DE POTENCIA.

Especifica como se distribuye la energía entre -- las frecuencias que componen la señal (1) (fig. 3.6.).



DENSIDAD DE POTENCIA

FIG. 3.6.

Este espectro es una curva continua para el ruido, pues esta señal contiene todos los valores posibles en mayor o menor grado. El area total bajo la curva, representa la potencia total de la señal.

#### 3.6.f. FUNCION DE DENSIDAD DE PROBABILIDAD.

Aunque la amplitud de una señal aleatoria es imposible de predecir, el problema puede atacarse, empleando funciones de densidad de probabilidad para proporcionar información acerca de la forma de onda. El área bajo una función de distribución para amplitud de señal, entre dos amplitudes  $X_1$  y  $X_2$ , será proporcional al tiempo que la señal tiene amplitud entre dichos valores. Estas funciones son independientes del espectro.

La función de distribución más usual es la Gaussiana, - que describe correctamente muchos procesos de azar naturales, tal y como es el caso del ruido aleatorio. Esta función se define:-

$$P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad \text{-----3-19}$$

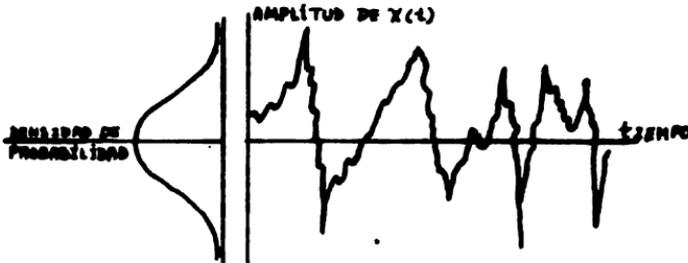
En esta función, pueden calcularse características de -- señales aleatorias como son: (15).

i) valor medio  $\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x P(x) dx \quad \text{-----3-20}$

ii) valor medio cuadrado:

$$\langle x^2 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 P(x) dx \quad \text{-----3-12}$$

En el caso de señales aleatorias, la amplitud sigue una distribución típica Gaussiana, tal y como se ilustra en la figura (3.7.)

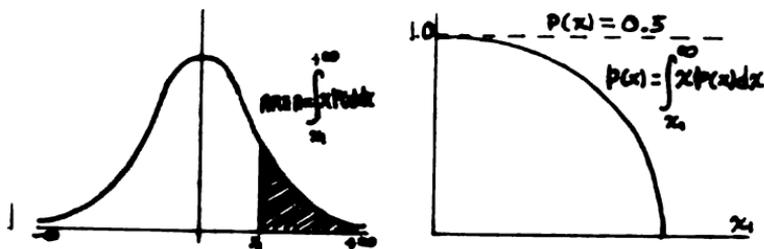


DESCRIPCION DE AMPLITUDES PARA SEÑAL DE AZAR

FIG. 3.7

Un ejemplo (15) del empleo de esta curva en problemas concernientes al ruido, es el de estimar la probabilidad de encontrar una señal de azar sobre un nivel especificado  $x_1$ .

Esa probabilidad es  $P(x \geq x_1) = \int_{x_1}^{\infty} x p(x) dx$ , si se considera a  $P(x \geq x_1) = f(x_1)$ , puede obtenerse una descripción útil del fenómeno, graficando  $f(x_1)$  contra  $X_1/\sigma$ . Si tomamos a  $x_1$  como un umbral, la gráfica (fig. 3.8.) mostrará como decrece la probabilidad de que exista error, ocasionado por la superación del umbral conforme este crece. Este problema es relevante en muchas aplicaciones.



PROBABILIDAD DE EXISTENCIA DE ERROR

FIG. 8

3.6.g. FUNCIONES DE CORRELACION.

Son estadísticas útiles que sirven entre otras aplicaciones, para relaciones de tiempo o fase entre dos señales (sean de-

de azar o no). Se define la correlación para dos señales  $X(t)$  y  $Y(t)$  como : (20) (15).

$$R_{xy} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T X(t) Y(t+\tau) dt \quad \text{----- (3-22)}$$

que puede interpretarse como promedio en el tiempo de dos señales, con una de ellas corridas en el tiempo por  $\tau$  sec.  $R_{yx}(\tau)$  será una función del corrimiento temporal relativo.

Para un sistema estacionario, la correlación es -- idéntica tanto en el adelanto como el retraso: (15).

$$R_{xy} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T X(t-\tau) Y(t) dt \quad \text{----- (3-23)}$$

si  $y(t) = x(t)$ , la correlación resulta en una autocorrelación.

$$R_{xx} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T X(t-\tau) X(t) dt \quad \text{----- (3-24)}$$

La función de autocorrelación se relaciona con el -- espectro de densidad de potencia, mediante la transformada de fourier, de la forma siguiente: (15).

$$S(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} R(\tau) \cos 2\pi f \tau d\tau \quad \text{----- (3-25)}$$

$$R(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S(f) \cos 2\pi f \tau df \quad \text{-----} (3-26)$$

Como en la práctica las frecuencias con signo negativo no tienen significado real, entonces es más conveniente definir en lugar de  $S(f)$ , un espectro real de densidad de potencia

$$G(f) = \begin{cases} 2S(f) ; f > 0 \\ 0 ; f < 0 \end{cases}$$

Con esta definición:

$$G(f) = 4 \int_0^{\infty} R(\tau) \cos 2\pi f \tau d\tau \quad \text{-----} (3-27)$$

$$R(\tau) = \int_0^{\infty} G(f) \cos 2\pi f \tau df \quad \text{-----} (3-28)$$

donde  $G(f)$  es un espectro de densidad de potencial realizable físicamente, de dimensiones (volts)<sup>2</sup> por Hertz, por ejemplo.

### 3.6.h. RELACION ENTRE LA FUNCION DE CORRELACION Y LA FUNCION DE DENSIDAD ESPECTRAL DE POTENCIA CORRELACIONADA.

En forma análoga al caso individual de una sola señal y su correlación, puede establecerse una relación entre densidades de espectro de potencia para dos señales correlacionadas, de la forma siguiente: (15).

$$S_{xy} = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{xy}(\tau) e^{-i2\pi f \tau} d\tau \quad \text{-----} (3-29)$$

$$R_{xy}(\gamma) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{xy}(f) e^{i2\pi f\gamma} df \quad \text{-----} (3-30)$$

y también puede definirse una función  $G_{xy}(f)$ , para frecuencias positivas únicamente. (15).

$$G_{xy}(f) = 2S_{xy}(f) ; f > 0 \quad \text{-----} (3-31)$$

Con esto se tiene en principio, la herramienta matemática necesaria para la descripción del ruido aleatorio, por lo que a continuación se empleará para definir algunos parámetros útiles en el análisis del ruido.

### 3.7. ALGUNOS PARAMETROS DESCRIPTIVOS DEL RUIDO ALEATORIO.

Como la señal que entrega un aparato, contiene además de la componente útil, la de ruido, de alguna forma debe de cuantificarse la relación entre ambas señales.

Los parámetros más comunes (14) son las llamadas razón de ruido y figura de ruido.

#### 3.7.a. RAZON DE RUIDO.

Se describe usualmente en términos de la razón señal-contra ruido, y puede definirse como (14).

$$\frac{\text{Valor RMS de la señal}}{\text{Valor RMS del ruido}} \quad \text{-----} (3-32)$$

$$\frac{\text{Valor pico de la señal}}{\text{Valor pico del ruido}} \quad \text{-----} (3-33)$$

$$\frac{\text{Potencia promedio de la señal}}{\text{Potencia promedio del ruido}} \text{-----} (3-33)$$

Otra forma alterna consiste en especificar el número de decibelios, por los cuales la señal excede al ruido, o sea:

$$\begin{array}{l} \text{Nivel en db} \\ \text{de la señal} \\ \text{encima del} \\ \text{ruido.} \end{array} = 10 \log \left[ \frac{\text{Potencia promedio de la señal}}{\text{Potencia promedio del ruido}} \right] \text{-----} (3-34)$$

Donde los promedios usualmente se calculan de acuerdo a la hipótesis ergódica.

### 3.7.b. FIGURA DE RUIDO.

Para describir este parámetro, se necesita definir -- previamente los siguientes términos:

i).- Potencia disponible de la señal.- Si un generador de señal tiene resistencia interna  $R_0$ , y genera  $V_0$  volts de salida, entonces la máxima potencia que puede proporcionar es:

$$P_{max} = \frac{V_0^2}{4R_0} \text{-----} (3-35)$$

Esta es la potencia proporcionada bajo condiciones de impedancia:  $R_1 = R_0$  y  $X_1 = -X_0$  y  $R_1$  es la componente resistiva y  $X$ , la reactiva de la impedancia de entrada de la red que recibe la señal.

ii).- Ganancia disponible de potencia. Si un genera

donde se conecta a otro circuito, podrá verse todo el sistema, como una sola red, con resistencia interna  $R$ , (Fig. 3.9). - y que generará una salida  $V$ . Entonces la potencia disponible en la salida es:

$$P = \frac{V_o^2}{4R} \text{ -----(3-36)}$$

se define ahora la ganancia de potencia disponible como:

$$G = \frac{P}{P_{\text{max.}}} \text{ -----(3-37)}$$

$G$  será en general una función de la frecuencia.

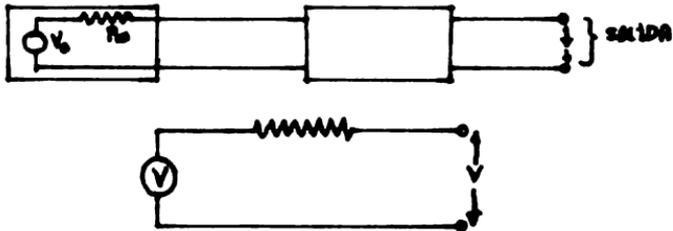


FIG. 3.9

iii).- Ancho de banda efectiva.- Se define como:

$$B = \frac{1}{G} \int G_f df$$

donde  $G_f$  = ganancia de potencia disponible para la frecuencia  $f$

$G$  = ganancia disponible de potencia.

iv) Potencia disponible de ruido. Como un generador de señal ideal, únicamente tendrá fuente de ruido térmico de su resistencia interna  $R_o$ , entonces la potencia de ruido -- disponible de dicho generador, para el intervalo de frecuencia  $df$  será:

$$\frac{V_n^2}{4R_o} = \frac{4kTR_o}{4R_o} df = kTdf \quad \text{----- (3-39)}$$

de la ec (3-38)  $\int G_f df = GB$ , y si la red a la que está -- conectado el generador, tiene ganancia de potencia pero no genera ruido  $G_f = 1$ , y la potencia total disponible de ruido, para todas las frecuencias será:  $kTB$  - - - - - (3-40) con esto se definirá:

$$N = kTB \quad \text{----- (3-41)}$$

Como la potencia ideal de ruido disponible, de una red que tenga la misma característica de ganancia que tiene -- una red ideal.

Y con los conceptos anteriores, se define ahora la

figura de ruido  $F$ , para una red de la forma siguiente:

$$F = \frac{\left[ \begin{array}{c} \text{POTENCIA DISPONIBLE DE SEÑAL} \\ \text{DE ENTRADA} \end{array} \right]}{\left[ \begin{array}{c} \text{POTENCIA DISPONIBLE DE SEÑAL} \\ \text{DE SALIDA} \end{array} \right]} = \frac{\left[ \begin{array}{c} \text{POTENCIA DE RUIDO DE ENTRADA} \\ \text{IDEAL DISPONIBLE} \end{array} \right]}{\left[ \begin{array}{c} \text{POTENCIA DISPONIBLE DE} \\ \text{RUIDO DE SALIDA} \end{array} \right]}$$

$$= \frac{P_{max}/RTB}{P/N} = \frac{N}{6RTB} \quad \text{----- (3-42)}$$

La figura de ruido es entonces la razón de la potencia real del ruido a la salida, entre la potencia de ruido de salida de una red ideal con las mismas características de la red real.

Si  $F = 1$  la red es ideal,  $(F - 1)$  será la porción de la figura de ruido de cualquier red, debida a ruido generado internamente.

### 3.8. RUIDO NO ALEATORIO.

Para terminar se describirán brevemente algunas manifestaciones de ruido cuya forma de onda no es de azar, y -- que puede ser eliminado, si se toman las precauciones debidas.

#### 3.8.a. RUIDO DE LINEA ("HUM").

Es el ruido proveniente de la frecuencia de la línea de corriente alterna, y que puede colarse al interior del sistema.

#### 3.8.b. RUIDO DEBIDO A RETROALIMENTACION.

Ya sea dentro del equipo o a través del interconexiones. Una parte de la señal, puede retroalimentarse a la entrada, causando oscilaciones, distorsión, etc.

3.8.c. Ruido debido a interferencias mecánicas, como vibraciones, irregularidades periódicas en el funcionamiento de servomotores, etc.

Concluyendo este capítulo, solo se mencionará que - -  
siendo este tema sumamente amplio, es imposible tratarlo a fon-  
do, en un trabajo no especializado en el tema, aunque es indis-  
pensable tomarlo en cuenta siempre que se trabaja instrumenta--  
ción.

## C A P I T U L O   I V

### ESPECIFICACIONES

Antes de emplear un equipo, construirlo o de implementar un sistema de medición, es necesario realizar una caracterización completa del mismo, de acuerdo a las necesidades de una aplicación concreta.

Lo anterior se expresa mediante un conjunto de cantidades llamadas especificaciones, que está integrado por las llamadas características estáticas, dinámicas y por la calibración.

Las características estáticas indican el desempeño del sistema, ante señales que permanecen constantes durante el tiempo que se les mide, o que pudiendo experimentar cambios, el interés se centra en valores iniciales y final de la señal, y no en el proceso de cambio.

Las características dinámica indican el desempeño de un sistema, ante señales que varían con el tiempo.

Por calibración se entenderá la comparación con una norma, y en cierta forma la reproducción de la misma. Dado que esta última característica requiere un tratamiento un tanto extenso, se le tratará en el siguiente capítulo.

#### 4.1 CARACTERISTICAS ESTATICAS.

Como las principales características de un instrumento ante señales estáticas, pueden mencionarse las siguientes: la sen

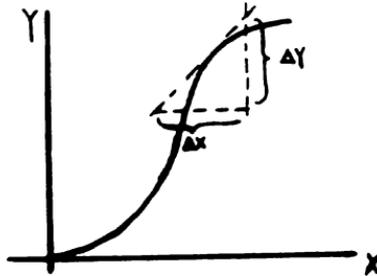
sibilidad estática, linealidad umbral, resolución, histéresis y espacios muertos, finesa de escala, intervalo de entrada e impedancia, agregado a estas, la propensión, pero esta es la manifestación resultantes de un error sistemático, cuestión que puede -- eliminarse con una calibración correcta.

4.1.a. SENSIBILIDAD ESTÁTICA, LINEALIDAD, UMBRAL, RESOLUCION, - -  
HISTERESIS, ESPACIOS MUERTOS (1), FINESA DE ESCALA.

Se toman estas características como un grupo, ya que se relacionan entre si:

i) Sensibilidad Estática.- Es la pendiente de la curva de la función de transferencia ( $\Delta Y_0 / \Delta X_0$ ), tomando a la salida y como la señal real, no como su interpretación, es decir- si el aparato es un D'Arsnoval, y la entrada es voltaje,  $\Delta Y = \varphi$  = ángulo de deflexión y  $\Delta X =$  cambio en el voltaje. Las unidades- serán entonces (grados / volts ) Este criterio puede servir para comparar diversos aparatos entre si en cuanto a su habilidad para detectar cambios.

ii) Deriva.- Pueden existir alteraciones debido a factores no previstos, o bien que excedan las especificaciones, causando con ello ya sea un desplazamiento del punto que usualmente indica el cero, o que la curva de la función de transferencia se modifique, con lo que se alterarán los espaciamentos entre divisiones. En estos casos se tiene deriva del cero, deriva de sensibi-



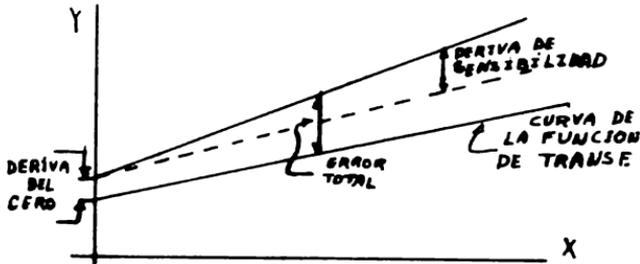
SENSIBILIDAD ESTÁTICA

FIG. 4.1.

bilidad y deriva del factor de escala, la figura 4.2 indica estos conceptos.

En el caso de que existe deriva, puede compensarse, verificando al sistema bajo diferentes condiciones de operación, especificando cantidades que cuantifiquen este efecto. Por ejemplo si la causa de la deriva es la temperatura, puede procederse bajo diferentes valores de temperatura e indicar la deriva por grado - kelvin o Celcius.

iii) **Linealidad** Se define como (1) la medida de la - desviación máxima de los puntos obtenidos con respecto a la curva



DERIVA

FIG. 4.2.

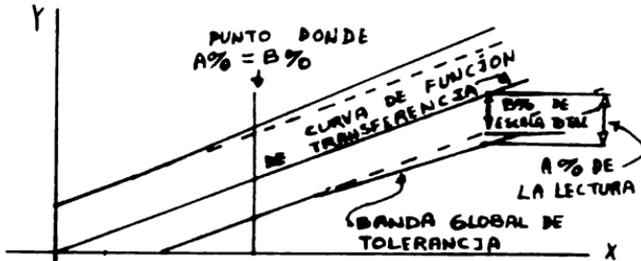
ajustada. Se expresa ya sea como un porcentaje de la lectura --- real, un porcentaje de una lectura que abarque toda la escala, o una combinación de ambas. El último método es el más realizata - y lleva al tipo de especificación siguiente:

no linealidad  
independiente  $\pm A$  (Por ciento de lectura)

☉  $\pm B$  (Por ciento de escala completa de lectura)

iv) Umbral. Es el valor mínimo  $X_a$  a partir de cero, que produce un cambio en la salida del aparato, es decir el primer -- cambio medible. También puede llamarse entrada mínima detectable.

tomando la cantidad más grande de ambas.



### LINEABILIDAD

FIG. 4.3.

v) Resolución. Es el incremento mínimo en la entrada, - que ocasiona un cambio en la salida, pequeño pero bien definido - fuera de los límites de error, a partir de cualquier entrada arbitraria, es decir, el cambio más pequeño detectable.

vi) Zona Muerta. Dada una entrada, la salida que entrega un sistema, no es exactamente la misma cada vez que se repite la lectura, pues habrá de hecho un intervalo acotado de valores - de salida posibles. Este intervalo alrededor de un valor dado se llama zona muerta.

vii) Finura de Escala. Indica cuantas cifras significativas puede distinguir un observador. Puede depender también

del usuario (1).

viii) Histéresis. Cuando se lleva a cabo una media, al sistema cambia desde un valor inicial a uno final, siguiendo una trayectoria que no necesariamente coincide, con la trayectoria -- por la cual regresa del valor final al inicial. (1) (7). A esto se le llama histéresis. Es una consecuencia de la inexistencia -- en la naturaleza de procesos completamente reversible.

#### 4.1.b. INTERVALO DE ENTRADA.

Este es el conjunto de valores de entrada que el sistema puede medir, (1) Asociados con este concepto tenemos los de límite superior e inferior de operación, que serían el valor máximo y mínimo que el aparato medirá, o para el cual está calibrado. -- Usualmente el límite inferior coincide con el umbral.

Otro término relacionado con el intervalo de entrada, -- es la razón entre la entrada más grande y más pequeña que puede -- medir el sistema, usualmente especificados en decibeles. (10). --

Hasta aquí todo lo que se ha establecido es aplicable -- a cualquier tipo de instrumento. En el caso de instrumento electrónico aparecen otras cantidades de uso amplio e indiscutible -- utilidad en su empleo y evaluación, y son la impedancia de entrada y salida, así como las admitancias asociadas; aún cuando estas están perfectamente definidas en un contexto tan amplio, que no -- existe razón para limitarlos al caso electrónico exclusivamente, --

y así se tratarán.

#### 4.1.c. IMPEDANCIA.

Se define impedancia como una relación entre una variable de esfuerzo y una variable de flujo (1), de manera que entre ambas el producto sea igual a la transferencia de energía del medio al sistema o viceversa.

$$Z = \frac{\text{Variable de Esfuerzo}}{\text{Variable de Flujo}} = \frac{I_P}{I_F}$$

En el caso eléctrico la variable de esfuerzo es el voltaje y la de flujo la corriente, con ello la impedancia  $Z = \left( \frac{V}{I} \right)$  con  $P = VI$ .

#### 4.1.d. ADMITANCIA.

Se define admitancia de entrada generalizada, como el inverso de la impedancia (1) es decir:

$$Y = \frac{\text{Variable de flujo}}{\text{Variable de esfuerzo}} = \frac{1}{Z}$$

Con las definiciones anteriores es posible obtener una expresión, para el cálculo de la extracción de energía desde el medio medido. Si la señal extraída es una variable de flujo, entonces la potencia extraída será:

$$P = I_F I_G \text{ donde } I_G \text{ será una variable de esfuerzo, } - - -$$

$$Y = (I_F / I_G)$$

Y entonces:

$$P = \left( \frac{I_F^2}{Y} \right)$$

De aquí se puede ver que se necesita un valor muy grande, de la admitancia de entrada, para minimizar la extracción de energía del medio.

Análogamente, puede probarse que si el interés está en medir una variable de esfuerzo,  $I_E$ , extrayendo energía del medio mediante una variable de flujo  $I_F$ :

$$P = I_E I_F = \frac{I_E^2}{Z}$$

Lo que implica la necesidad de tener una impedancia de entrada grande, para minimizar la extracción de energía.

Una generalización en la definición de características estáticas, parte de considerar directamente la extracción de energía del medio medido. Esto es conveniente cuando la extracción de energía es cero en estado estacionario, como por ejemplo, cuando un resorte está estirado y en reposo, pero se ha intercambiado energía para llevar al sistema del estado inicial al final.

En estos casos las características apropiadas son: la rigidez estática, y la "complacencia" estática, que se define como sigue, (1) para instrumentos mecánicos:

$$\left[ \begin{array}{l} \text{Rigidez estática} \\ \text{mecánica.} \end{array} \right] = \frac{\text{Fuerza}}{\text{Desplazamiento}}$$

$$\left[ \begin{array}{l} \text{"Complacencia" es} \\ \text{tática mecánica.} \end{array} \right] = \frac{\text{Desplazamiento}}{\text{Fuerza}}$$

De la observación que el desplazamiento es  $\int (\text{velocidad}) dt = \int (\text{variable de flujo}) dt$  pueden generalizarse aún más las definiciones anteriores de la forma siguiente:

$$S_g = \text{Rigidez estática generalizada} = \frac{\text{variable de esfuerzo}}{\int (\text{variable de flujo}) dt}$$

$$C_g = \text{Complacencia estática generalizada} = \frac{(\text{variable de flujo})}{\int (\text{variable de esfuerzo}) dt}$$

Como un último punto en esta discusión, nótese que podemos obtener una clasificación adicional, de las variables de medición, o sea, variables de flujo, relacionadas con la extensión del sistema que toma parte en un intercambio de energía, y variable de esfuerzo, independientes de la cantidad de material que participa en un intercambio de energía.

Estas definiciones trascienden al caso eléctrico, y se aplican también, a medidas dinámicas en algunos casos.

#### 4.2. CARACTERISTICAS DINAMICAS.

Para definirlos se partirá de un modelo matemático ge-

neralizado, que describa el comportamiento de un sistema o instrumento, ante entradas dinámicas.

Todo sistema físico puede en principio, representarse mediante una ecuación diferencial que se obtiene a partir de las leyes que rigen a sus componentes (1) (22) (23).

Suponemos que la relación entre cualquier señal de entrada al sistema  $q_1$ , y la correspondiente de salida  $q_0$ , puede ponerse en la forma siguiente:

$$\sum_{i=1}^n a_i \frac{d^i q_1}{dt^i} = \sum_{i=1}^m b_i \frac{d^i q_0}{dt^i} \text{-----} (4-1)$$

donde las  $a_i$  y  $b_i$  son constantes que caracterizan al instrumento, de acuerdo a parámetros físicos del mismo, y de esta forma se define al instrumento de orden  $n$ . (1) (22) (23).

Cuando se contruye un instrumento, o se implementa un sistema de medición, se parte de consideraciones acerca del tipo de señales que deberá detectar, y usualmente se emplean características generalizadas, comunes a toda señal dinámica, como la frecuencia y la amplitud. Al construirse el sistema o instrumento, va a existir una función de transferencia que describe su comportamiento general, y en particular, ante las señales que se pretenden registrar cuestionque permite definir, banda pasante y conceptos asociados, comunes a todo instrumento.

i) Banda Pasante. Es el intervalo de frecuencia, para el cual ha sido calibrado el instrumento, y es una generalización del concepto de ancho banda.

ii) Ganancia. Es una generalización de la sensibilidad estática, y proporciona la relación entre la amplitud de salida y de entrada. Será función de la frecuencia, y en particular el interese se centra sobre la banda pasante, obteniéndose en este caso la ganancia de banda pasante.

iii) Frecuencia de Corte. Son frecuencias que señalan el límite inferior y superior de la banda pasante. Como es lógico inferior denominan frecuencias de corte inferior y superior. Para determinarlas se toma generalmente como criterio, que en ellas la ganancia sea el 70.7% de la ganancia de banda pasante, lo que no incluye que en casos particulares se emplean valores diferentes. Estos conceptos se ilustran con la figura 4-4.



**BANDA PASANTE**

**FIG. 4.4.**

Cuando se conectan varios aparatos en cascada, la banda resultante será una combinación de las de cada una de las etapas. Si el número de etapas  $N$ , no es muy grande, se tendrá que para  $N$  etapas con banda idéntica, la frecuencia de corte inferior es:

$$f_i = 1.1\sqrt{N} f_{ci} \text{ ----- (4-2)}$$

y la frecuencia superior <sup>(13)</sup>.

$$f_s = \frac{f_{cs}}{1.1\sqrt{N}} \text{ ----- (4-3)}$$

De donde se aprecia que la banda pasante resultante, es menor que las individuales. Cuando las bandas de cada una de las etapas, son diferente entre sí, aunque muy semejantes, pueden emplearse las ecuaciones 4.2 y 4.3 como aproximación. Si las etapas difieren se tendrá que en general, la frecuencia de corte superior más pequeña, y la frecuencia de corte inferior más grande predominarán, acercándose a ellas los límites de banda pasante resultante.

#### 4.2.a. FUNCIONES DE TRANSFERENCIA.

La ecuación 4.1 permite obtener expresiones generalizadas para las funciones de transferencia, de todo instrumento:

La función de transferencia operacional generalizada<sup>(1)</sup>

será:

$$\frac{q_0}{q_i}(D) = \frac{\sum_{i=0}^m b_i D^i}{\sum_{i=0}^n a_i D^i} \text{----- (4-4)}$$

$$\frac{d^n}{dt^n} = D^n$$

tomando la transformada de Laplace de 4-4, con condiciones iniciales iguales a cero, se obtiene la función de transferencia de Laplace, o simplemente función de transferencia<sup>(1)</sup>.

$$F(s) = \frac{q_0}{q_i}(s) = \frac{\sum_{i=0}^m b_i s^i}{\sum_{i=0}^n a_i s^i} \text{----- (4-5)}$$

Una señal que permite apreciar la respuesta ante variación de frecuencias, o respuestas a frecuencia, es la senoidal. Si un sistema lineal recibe una entrada  $q_i(t) = A \text{SEN } \omega t$ , la salida será  $q_0 = B \text{sen}(\omega t + \phi)$ , es decir de forma idéntica a la entrada y con la misma frecuencia. Las diferencias serán en amplitud y en fase. Al término  $M(\omega) = (B/A)$  se le llama relación de magnitud y será función de la frecuencia.

Para determinar la información sobre respuesta a frecuencia, en la ecuación 4-5, si se toma para  $s = \sigma + i\omega$ ,  $\sigma = 0$ ,  $F(s)$  podrá escribirse en la forma:

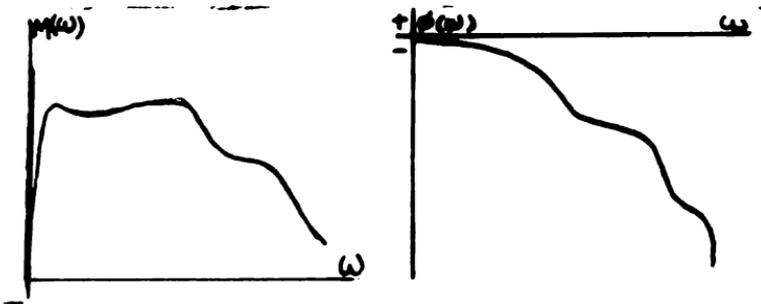
$$F(s) = F(i\omega) = A(\omega) + iB(\omega) \text{----- (4-6)}$$

Con esta expresión:

$$M(\omega) = [A^2(\omega) + B^2(\omega)]^{\frac{1}{2}}; \phi(\omega) = \tan^{-1} [B(\omega)/A(\omega)] \text{-----4.6b}$$

y graficando estas expresiones en coordenadas polares o rectangulares, que son medios convenientes para presentar datos de respuesta a frecuencia. En la literatura (1) (22) (24) a veces se define una "función senoidal a de transferencia", siendo esta:

$$F(i\omega) = \frac{a_0}{q_i}(i\omega) = \frac{\sum_{j=0}^m b_j (i\omega)^j}{\sum_{j=0}^n a_j (i\omega)^j}$$



GRAFICAS DE RESPUESTA A FRECUENCIA

FIG. 4.5.

El principio las ecuaciones anteriores definen la respuesta de un instrumento cualquiera, ante una señal dada. Ahora se particularizará el análisis para casos especiales de la expresión 4-1, que corresponde a los modelos siguientes:

1.- El instrumento de orden cero, definido por la expresión:

$$a_0 q_0 = b_0 q_i \quad \text{-----} (4-7)$$

2.- El instrumento de primer orden definido por la expresión:

$$a_1 \frac{dq_0}{dt} + a_0 q_0 = b_0 q_i \quad \text{-----} (4-8)$$

3.- El instrumento de segundo orden definido por la expresión:

$$a_2 \frac{d^2 q_0}{dt^2} + a_1 \frac{dq_0}{dt} + a_0 q_0 = b_0 q_i \quad \text{-----} (4-9)$$

Estos casos corresponden a una gran cantidad de instrumentos básicos de laboratorio los que además, se emplean como bloques constructivos de sistemas más complejos, por lo que estos pueden examinarse combinando las funciones de transferencia de cada uno. Este análisis permitirá definir características dinámicas generalizables también a otros instrumentos de orden superior.

#### 4.3 EL INSTRUMENTO DE ORDEN CERO:

De la ecuación: (4-7)

$$q_0 = \left[ \frac{b_0}{a_0} \right] q_i \quad \text{-----} (4-10)$$

La forma de la salida es idéntica a la entrada, y la magnitud de salida es un múltiplo de la señal de entrada, por lo que-

$M(\omega) = \left(\frac{b_0}{a_0}\right) = \text{Const.} = \text{sensibilidad estática.}$

La entrada y salida están en fase por lo que  $\phi(\omega) = 0$

En principio lo anterior basta para describir el funcionamiento de un instrumento de este tipo, sin embargo en la realidad existen problemas que hacen diferir la respuesta real, del modelo matemático, debido a los detalles de construcción de los elementos que integran un instrumento (1).

#### 4.4 EL INSTRUMENTO DE PRIMER ORDEN:

La ecuación 4-8 se divide entre  $a_0$  y obtenemos.

$$\frac{a_1}{a_0} \frac{dq_0}{dt} + q_0 = \left[\frac{b_0}{a_0}\right] q_i \text{ -----4-11}$$

El coeficiente  $b_0/a_0$  se identifica de inmediato como la sensibilidad estática, y al coeficiente  $(a_1/a_0)$  como una constante de tiempo T. Con esto (4-11) pueden reescribirse como (1) (22)

$$T \frac{dq_0}{dt} + q_0 = K q_i \text{ -----4-12}$$

y la función operacional de transferencia será:

$$\frac{q_0}{q_i}(D) = \frac{K}{TD + L} \text{ ----- (4-13).}$$

ahora se analizará la respuesta ante diferentes condiciones:

##### 4.4.a RESPUESTA TRANSITORIA:

Esta se obtiene con la solución Homogénea de 4-12, que es (1).

$$q_{ot} = Ae^{-(t/T)} \quad \text{-----(4-14).}$$

Esta solución indica como aparece el efecto transitorio, antes de establecerse la respuesta estacionaria ante una entrada cualquiera. Como se puede ver directamente, una  $T$  pequeña acelera este proceso<sup>(1)</sup>.

#### 4.4.b. RESPUESTA ANTE ENTRADA ESCALON.

En (4-12) se coloca  $q_i=B$ , y se resuelve la ecuación, con las condiciones iniciales siguientes: En  $T=0$ ,  $q_i = 0$ ,  $q_o=0$  - La solución es: (22)

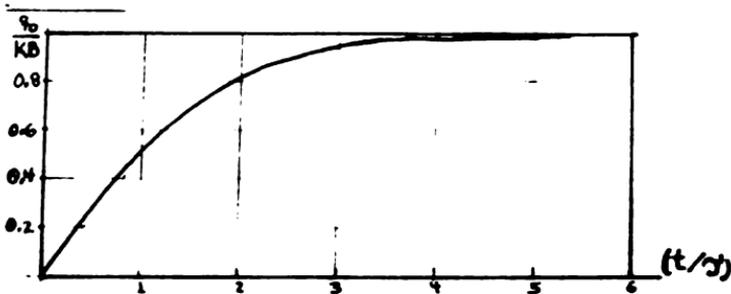
$$q_o = KB[1 - e^{-t/T}] \quad \text{-----(4-15)}$$

$T$ ,  $K$  y  $B$  dependen del sistema en particular, por lo que para analizar la respuesta, se reescribe (4-15) de la forma siguiente:

$$\frac{q_o}{KB} = [1 - e^{-t/T}] \quad \text{-----(4-16)}$$

Cuya gráfica se muestra en la figura 4-6. Si  $t=T$ , de 4-16 se obtiene  $q_o = 0.632 KB$ , es decir después de un tiempo  $T$  a partir de cero, el sistema alcanza el 63.2% del valor de estado estacionario<sup>(1)</sup>.

Pueden emplearse múltiplos de  $T$ , a fin de fijar un criterio para determinar si ya se ha registrado adecuadamente la señal de entrada. Por ejemplo si  $T = 4 T$ ,  $q_o = 0.982 KB$  es decir se ha llegado al 98.2% de valor de estado estacionario.



RESUESTA A ENTRADA ESCALON

FIG. 4.6.

De (4-15) tenemos que  $q_0 = KB$  es decir la respuesta a estado estacionario.

Se puede determinar un efecto de retardo del sistema, con  $q_i = B$   $\frac{q_0}{K} = B[1 - e^{-t/\tau}]$  que será

$$I = q_i - \frac{q_0}{K}$$

$$I = e^{-(t/\tau)} \text{-----}(4-17)$$

Lo que indica que la respuesta no es instantanea - - sino que existe un retardo en la reproducción fiel de la señal. <sup>(1)</sup>

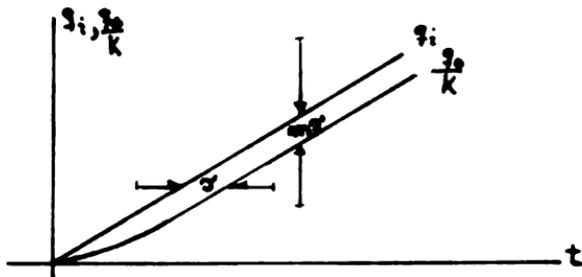
#### 4.4.c. RESPUESTA ANTE RAMPA.

"Ahora se resuelve 4-12 con  $q_i(t) = Mt$  y con las condiciones iniciales siguientes:  $q_1 = q_0 = 0$  en  $t=0$ , siendo la solución: (22)

$$q_0 = KM (te^{-t/\tau} + t - \tau) \text{-----}(4-18).$$

en la figura (4-7) se grafica: (1).

$$q_i \text{ Junto con. } \frac{q_o}{K} = q_i - M\gamma(1 - e^{-t/\gamma}) \text{ ----- (4-19)}$$



#### RESPUESTA A RAMPA

FIG. 4.7

de 4-19 puede verse que  $\frac{q_o}{K} = q_i - M\gamma$  si  $t \rightarrow \infty$  es decir habrá un efecto de retardo estacionario, cuestión que es manifestación del retardo permanente entre la entrada de la señal, y su registro por el aparato. De hecho en este caso, es el retardo.

#### 4.4.b. RESPUESTA A LA FRECUENCIA.

La función de transferencia se escribe en este caso

como:

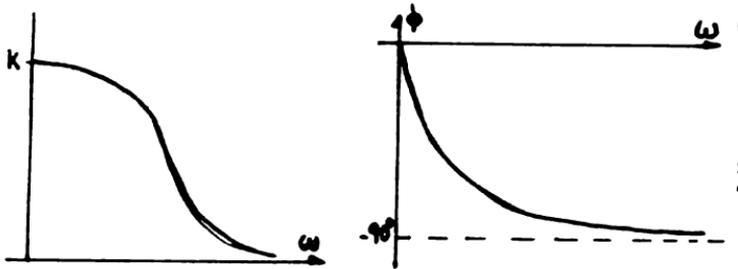
$$\frac{q_o}{q_i} = \frac{K}{i\omega\gamma + 1} \text{ ----- (4-20)}$$

con el ángulo de fase dado por  $\tan^{-1} [-(\omega\gamma)]$  con esto la ecuación se puede escribir: (1) (22).

$$\frac{q_o}{q_i}(i\omega) = \frac{K}{1 + i\omega\gamma} \text{ o sea } \tan^{-1} \omega\gamma \text{ ----- (4-21)}$$

La relación de magnitud es  $M(\omega) = K/\sqrt{\omega^2 T^2 + 1}$ . La respuesta ideal sería  $q_0(i\omega) = K \angle 0^\circ$  es decir si  $\omega T \rightarrow 0$  entonces tanto la relación de magnitud como la fase tenderán a la respuesta ideal.

Las gráficas de respuesta a frecuencia se muestran en la figura 4-8, tanto para  $M(\omega)$ , como para  $\phi(\omega)$ .



RESPUESTA A FRECUENCIA 1er. ORDEN

FIG. 4.8.

De la ecuación (4-21), puede obtenerse una expresión para analizar la respuesta del sistema ante cualquier entrada de rampa, escribiendo:

$$\left[ \frac{q_0/K}{T_i} \right] = \frac{1}{\sqrt{\omega^2 T^2 + 1}} \arctan(-\omega T)$$

4.4.c. RESPUESTA A PULSO.

Para este caso se empieza considerando una señal de entrada, definida como un pulso de altura  $(A/T)$  y anchura  $T$ , -- las condiciones iniciales serán entonces  $q_0=0$  para  $T=0$  y la ecuación diferencial será (1).

$$\gamma \frac{dq_0}{dt} + q_0 = \frac{KA}{T} \quad \text{----- (4-22)}$$

para  $0 < t < T$  y la solución será

$$q_0(t) = \frac{KA}{T} \left[ 1 - e^{-(t/\gamma)} \right] \quad \text{----- (4-23)}$$

para la ecuación diferencial será:

$$\gamma \frac{dq_0}{dt} + q_0 = 0 \quad \text{----- (4-24)}$$

siendo la solución  $q_0 = C e^{-t/\gamma}$ . Para esta ecuación las condiciones iniciales son las siguientes, en  $t=T$ .

$$q_0(T) = \frac{KA}{T} \left[ 1 - e^{-(T/\gamma)} \right]$$

y con la solución de (4-24).

$$\frac{KA}{T} \left[ 1 - e^{-(t/\gamma)} \right] = C e^{-(t/\gamma)}$$

de donde se despeja C y la solución para  $t > T$  queda como

$$q_0(t) = \frac{KA \left[ 1 - e^{-(T/\gamma)} \right]}{T e^{-(T/\gamma)}} e^{-(t/\gamma)} \quad \text{----- (4-25)}$$

Ahora solo resta tomar límites conforme  $T \rightarrow 0$  a fin de obtener la respuesta ante impulsos. La ecuación 4-23 tenderá a cero muy rápidamente y la respuesta se obtiene del límite con la ecuación 4-25. Con la regla de L'Hospital se tiene (1)

$$q_0 = \frac{KA}{T} e^{-(t/\gamma)}$$

En la figura (4-9) se muestra la función solución -- arriba obtenida. De la gráfica puede apreciarse que matemáticamente la respuesta iría inicialmente en forma instantánea desde

cero hasta un valor dado, lo que implicaría una transferencia de energía y una reacción, instantánea en el instrumento, lo cual es imposible de alcanzar en la realidad. La razón de transferencia de energía tendría que ser infinita, lo que implicaría un pulso de altura también infinita, cuestión imposible de lograr. Sin embargo un impulso suficientemente grande y de duración adecuadamente corta, haría que el sistema respondiera en forma muy aproximada al caso ideal lo que se examinará en el siguiente capítulo. Otra cuestión en contra de la obtención de una respuesta ideal es el hecho ya mencionado, de la existencia de un tiempo de respuesta del aparato que impide la subida instantánea que se requeriría para la respuesta ideal.



RESPUESTA A PULSO

FIG. 4-9

## 4.5 EL INSTRUMENTO DE 2o. ORDEN.

La ecuación 4-9 puede reescribirse (1) (22)

$$\frac{1}{\omega_n^2} \frac{d^2 q_o}{dt^2} + \frac{2\xi}{\omega_n} \frac{dq_o}{dt} + q_o = K q_i \quad \text{----- (4-27)}$$

la ecuación de transferencia operacional es:

$$\frac{q_o}{q_i}(D) = \frac{K}{(D^2/\omega_n^2) + (2\xi D/\omega_n) + 1} \quad \text{----- (4-28)}$$

donde: .  $\omega_n = \sqrt{a_o/a_2} \quad \text{----- (4-29)}$

es la frecuencia natural no amortiguada, y  $\xi = \frac{a_1}{2\sqrt{a_o a_2}} \quad \text{---- (4-30)}$

es el coeficiente de amortiguamiento.

Ambos coeficientes  $\omega_n$ ,  $\xi$  se justifican como sigue:

Si se considera el caso particular de la ecuación 4-9- con  $a_1 = 0$  se obtiene la ecuación.

$$a_2 \frac{d^2 q_o}{dt^2} + a_o q_o = b_o q_i \quad \text{----- (4-31)}$$

La solución transitoria para esta ecuación es:

$$q_o = C_1 \text{sen} \omega t + C_2 \text{cos} \omega t \quad \text{donde, } \omega_n = \sqrt{a_o/a_2} \text{ es la frecuencia -}$$

en el caso donde existe amortiguamiento.

Ahora para la ecuación Homogenea asociada a 4-9 :

$$a_2 \frac{d^2 q_o}{dt^2} + a_1 \frac{dq_o}{dt} + a_o q_o = 0 \quad \text{----- (4-23)}$$

la solución será:

$$q_{ct} = e^{-(a_1/2a_2)t} [C_1 \text{SEN } \omega_d t + C_2 \text{COS } \omega_d t] \quad \text{---(4-33)}$$

donde  $\omega_d = (\sqrt{a_1^2 - 4a_2 a_0})/2a_2$  es la frecuencia natural - -  
amortiguada. Si  $\omega_d = 0$  la solución transitoria no será oscilatoria

ria, sino que decaerá exponencialmente. Esto implica que  $a_1 = \sqrt{2a_2 a_0}$   
de aquí se define la razón de amortiguamiento como:

$$\zeta = \frac{a_1}{a_1 c} = \frac{a_1}{2\sqrt{a_2 a_0}}$$

#### 4.5. RESPUESTA ANTE SEÑAL ESCALON.

La ecuación diferencial es:

$$\frac{1}{\omega_n} \frac{d^2 q_0}{dt^2} + \frac{2\zeta}{\omega_n} \frac{dq_0}{dt} + q_0 = KA \quad \text{-----(4-34)}$$

y las condiciones iniciales serán:

$$q_0 = 0; \quad \frac{dq_0}{dt} = 0 \quad \text{EN } t=0$$

La solución total será entonces:

$$q_0(t) = B e^{(-\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n t} + D e^{(-\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n t} + \frac{KA}{\omega_n} \quad \text{---(4-35)}$$

La solución se analizará por partes, de acuerdo con -  
los valores de término  $(-\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 1})$ .

Aplicando condiciones iniciales los tres casos que resultan son

los siguientes:

$$i) \quad q_0(t) = -\frac{\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} e^{(-\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n t} + \frac{\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} e^{(-\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n t} + \frac{KA}{\omega_n} \quad \text{---(4-36)}$$

para el caso sobre amortiguado.

$$ii) \quad \frac{q_0}{KA} = -(1 + \omega_n t) e^{-\omega_n t} + 1 \quad \text{-----(4-37)}$$

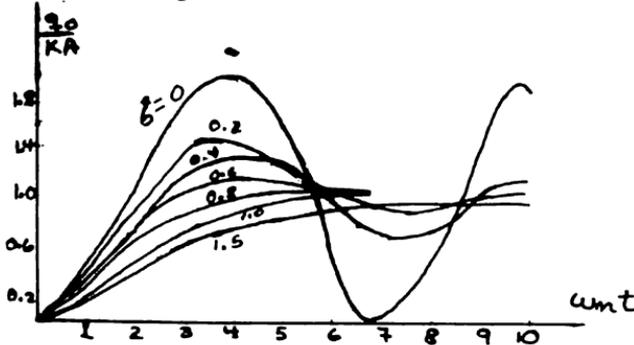
para el caso críticamente amortiguado.

$$\text{iii) } \frac{q_0}{KA} = \frac{e^{-\zeta \omega_n t}}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \text{SEN}(\sqrt{1 - \zeta^2} \omega_n t + \phi) + 1 \quad (4-38)$$

$$\phi = \text{SEN}^{-1}(\sqrt{1 - \zeta^2}) \quad (4-39)$$

para el caso ligeramente amortiguado.

Nótese que  $\omega_d$  aparece tanto en los términos exponenciales, como en el senoidal. El efecto  $\omega_d$  en los términos exponenciales será el de acelerar la desaparición de la respuesta transitoria y por consiguiente, se obtiene la rápida estabilización de la respuesta. De hecho el coeficiente de amortiguamiento, no necesariamente debe ser muy grande para asegurar una respuesta rápida del sistema, pues si la frecuencia natural es suficientemente grande, la pronta estabilización de la respuesta estacionaria está asegurada. En la fig. 4-10 se muestran curvas de respuesta para este caso con diferentes valores de  $\zeta$ . (1) (22) .



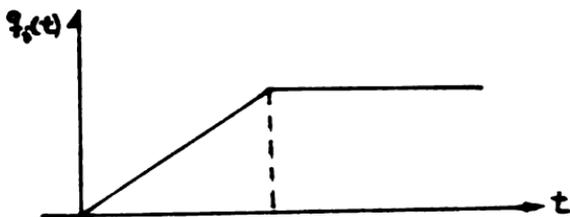
RESPUESTA A ENTRADA ESCALON PARA 2o. ORDEN  
FIG. 4-10

## 4.5.b. RESPUESTA ANTE LA ENTRADA DE RAMPA.

Dado que no existen rampas reales que crezcan en forma indefinida sin interrupción, es pertinente contemplar el caso de la respuesta a rampa troncada, además de la existente ante una rampa ideal.

Respuesta ante rampa troncada. La señal se representa en la figura 4.11 y se define de la forma siguiente:

$$f_i(t) = \begin{cases} \frac{t}{T} & \text{si } 0 \leq t \leq T \\ 1.0 & \text{si } T \leq t \leq \infty \end{cases}$$



RAMPA TRONCADA

FIG. 4.11

Donde la rampa se trunca al alcanzar la altura unitaria a fin de simplificar las expresiones, aunque las conclusiones no pierden generalidad. Las condiciones iniciales serán para -

este caso:

$$q_0 = 0; \frac{dq_0}{dt} = 0 \text{ en } t=0$$

Las funciones de transferencia serán entonces:

$$\frac{1}{\omega_n^2} \frac{d^2 q_0}{dt^2} + \frac{2\zeta}{\omega_n} \frac{dq_0}{dt} + q_0 = K q_i \quad \text{----- (4-40)}$$

$$\left( \frac{D^2}{\omega_n^2} + \frac{2\zeta D}{\omega_n} + 1 \right) q_0 = K q_i \quad \text{----- (4-41)}$$

Aunque podría volverse a tratar con los tres casos de amortiguamiento, se va a considerar aquí el caso ligeramente -- amortiguado ya que se obtendrá una conclusión interesante -- acerca del desempeño del sistema. La solución será entonces (1).

$$\frac{q_0}{K} = \frac{t}{T} - \frac{2\zeta}{\omega_n T} + \frac{1}{\omega_n T \sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta \omega_n t} \left( \sqrt{1-\zeta^2} \omega_n t + \phi \right) \quad \text{----- (4-42)}$$

PARA  $0 \leq t \leq T$

$$\frac{q_0}{K} = \left[ \frac{t}{T} - \frac{2\zeta}{\omega_n T} + \frac{1}{\omega_n T \sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta \omega_n t} \text{SEN}(\sqrt{1-\zeta^2} \omega_n t + \phi) \right] - \left[ \frac{t}{T} - 1 - \frac{2\zeta}{\omega_n T} + \frac{1}{\omega_n T \sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta \omega_n (t-T)} \text{SEN}(\sqrt{1-\zeta^2} \omega_n (t-T) + \phi) \right] \quad \text{----- (4-43)}$$

para:  $T < t < \infty$

$$\text{CON } \phi = 2 \text{TAN}^{-1} \left( \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta} \right) \quad \text{----- (4-44)}$$

este caso:

$$q_0 = 0; \frac{dq_0}{dt} = 0 \text{ en } t=0$$

Las funciones de transferencia serán entonces:

$$\frac{1}{\omega_n^2} \frac{d^2 q_0}{dt^2} + \frac{2\zeta}{\omega_n} \frac{dq_0}{dt} + q_0 = K q_i \quad \text{----- (4-40)}$$

$$\left( \frac{D^2}{\omega_n^2} + \frac{2\zeta D}{\omega_n} + 1 \right) q_0 = K q_i \quad \text{----- (4-41)}$$

Aunque podría volverse a tratar con los tres casos de amortiguamiento, se va a considerar aquí el caso ligeramente -- amortiguado ya que se obtendrá una conclusión interesante -- acerca del desempeño del sistema. La solución será entonces (1).

$$\frac{q_0}{K} = \frac{t}{T} - \frac{2\zeta}{\omega_n T} + \frac{1}{\omega_n T \sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta \omega_n t} \sin(\sqrt{1-\zeta^2} \omega_n t + \phi) \quad \text{----- (4-42)}$$

PARA  $0 \leq t \leq T$

$$\frac{q_0}{K} = \left[ \frac{t}{T} - \frac{2\zeta}{\omega_n T} + \frac{1}{\omega_n T \sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta \omega_n t} \sin(\sqrt{1-\zeta^2} \omega_n t + \phi) \right] - \left[ \frac{t}{T} - 1 - \frac{2\zeta}{\omega_n T} + \frac{1}{\omega_n T \sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta \omega_n (t-T)} \sin(\sqrt{1-\zeta^2} \omega_n (t-T) + \phi) \right] \quad \text{----- (4-43)}$$

para:  $T < t < \infty$

$$\text{CON } \phi = 2 \text{ TAN}^{-1} \left( \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta} \right) \quad \text{----- (4-44)}$$

De la ecuación (4-42) puede verse de inmediato que va a existir un efecto de retardo de estado estacionario, de magnitud  $(2\xi/\omega_n T)$ , para  $0 \leq t \leq T$ . El efecto de retardo transitorio no será mayor que  $(1/\omega_n T \sqrt{1-\xi^2})$  para el mismo intervalo.

Si  $\xi=0$  el efecto de retardo estacionario desaparece - y el efecto de retardo transitorio, se convierte en una onda senoidal de amplitud  $(1/\omega_n T)$ . De esto si  $\omega_n$  es suficientemente grande en relación con  $(1/T)$ , Los efectos transitorios pueden hacerse sumamente pequeños, aún cuando el amortiguamiento sea inexistente. De hecho observando las ecuaciones 4-42, 4-43 y 4-44 como  $\omega_n$  aparece en los exponentes de las expresiones para términos transitorios estos desaparecerán rápidamente aún cuando  $\xi$  sea pequeño, si  $\omega_n$  es suficientemente grande respecto a  $\xi$ . Otros casos son similares.

ii) Respuesta ante rampa ideal. Nuevamente las condiciones iniciales son:  $q_0 = 0$  ( $dq_0/dt = 0$ ) en  $t=0$ , y las funciones de transferencia son:

$$\left( \frac{1}{\omega_n^2} \frac{d^2 q_0}{dt^2} + \frac{2\xi}{\omega_n} \frac{dq_0}{dt} + q_0 \right) = KAt \quad \text{----- (4-45)}$$

$$\left( \frac{1}{\omega_n^2} + \frac{2\xi}{\omega_n} + 1 \right) q_0 = KAt \quad \text{----- (4-46)}$$

Ahora conviene considerar en detalle cada uno de los casos de amortiguamiento, siendo las soluciones: (1)

1) Para el caso sobre amortiguado:

$$\frac{q_0}{K} = At - \frac{2\delta A}{\omega_n} \left[ 1 + \frac{2\delta^2 - 1 - 2\delta\sqrt{\delta^2 - 1}}{4\delta\sqrt{\delta^2 - 1}} e^{(-\delta + \sqrt{\delta^2 - 1})\omega_n t} \right. \\ \left. + \frac{-2\delta^2 + 1 - 2\delta\sqrt{\delta^2 - 1}}{4\delta\sqrt{\delta^2 - 1}} e^{(-\delta - \sqrt{\delta^2 - 1})\omega_n t} \right] \text{----- (4-47)}$$

2) Para el caso críticamente amortiguado:

$$\frac{q_0}{K} = At - \frac{2A}{\omega_n} \left[ 1 - e^{-\omega_n t} \left( 1 + \frac{\omega_n t}{2} \right) \right] \text{----- (4-48)}$$

3) Y para el caso ligeramente amortiguado:

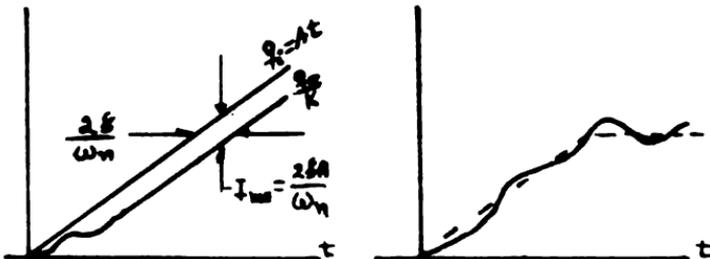
$$\frac{q_0}{K} = At - \frac{2A}{\omega_n} \left[ 1 - \frac{e^{-\delta\omega_n t}}{2\delta\sqrt{1-\delta^2}} \text{SEN}(\sqrt{1-\delta^2}\omega_n t + \phi) \right] \text{----- (4-49)}$$

$$\text{con } \tan \phi = -\frac{2\delta\sqrt{1-\delta^2}}{2\delta^2 - 1} \text{----- (4-50)}$$

aplicando  $I_m = q_0 - \left(\frac{q_0}{K}\right)$  se pueden ver que existirá un efecto de -  
retardo estacionario:

$$I_{ms} = \frac{2\delta A}{\omega_n} \text{----- (4-51)}$$

La respuesta del instrumento y la señal de rampa ideal se muestran en la figura (4-11a), donde también se puede apreciar tanto el efecto del término transitorio, y el retardo de estado estacionario. (1).



RESPUESTA A RAMPA PARA INSTRUMENTO DE 2o. ORDEN

FIG. 4-12

En general se tiene que la respuesta (fig. 4-12), es válida para todos los casos de amortiguamiento, modificándose -- tanto la parte transitoria, como el efecto de retardo estacionario según el caso.

#### 4.5.c. RESPUESTA A FRECUENCIA.

La función senoidal de transferencia se puede escribir de la forma siguiente: (1) (22).

$$\left(\frac{q_o/k}{q_i}\right)(i\omega) = \frac{1}{\sqrt{[1 - (\omega/\omega_n)^2]^2 + 4\zeta^2\omega^2/\omega_n^2}} \angle\phi \quad (4-52)$$

donde

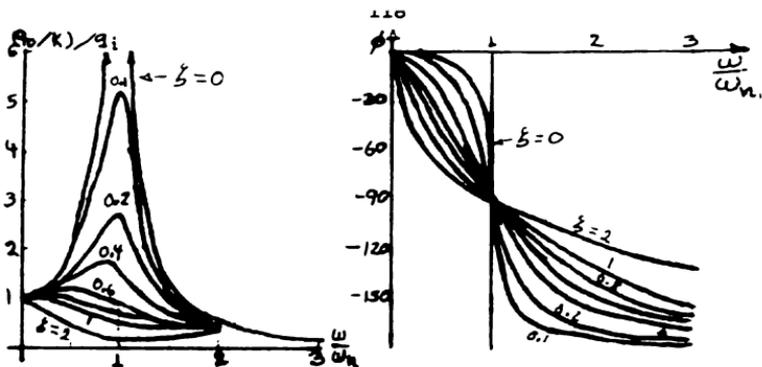
$$\phi = \tan^{-1} \left\{ \frac{1}{(\omega/\omega_n) - (\omega_n/\omega)} \right\} \quad (4-53)$$

$$\left(\frac{q_o/k}{q_i}\right)(i\omega) \approx \frac{1}{\sqrt{1 + 4\zeta^2}} \quad (4-54)$$

y la respuesta es casi plana, lo cual es una ventaja cuando se tiene un instrumento de frecuencia natural grande. Como lo que se busca es una reproducción instantánea de la señal de entrada -- lo más fiel posible, es importante que  $\phi$  sea pequeña, lo cual se logrará si  $\zeta$  es pequeña, de manera que en este caso puede ocurrir una situación favorable en un instrumento de segundo orden si se combina un coeficiente de amortiguamiento pequeño, con una frecuencia natural grande. (1) (22).

A partir de la ecuación (4-52), cuando:  $\omega = \omega_n$

$$\left(\frac{q_o/k}{q_i}\right) = \frac{1}{2\zeta} \quad (4-55)$$



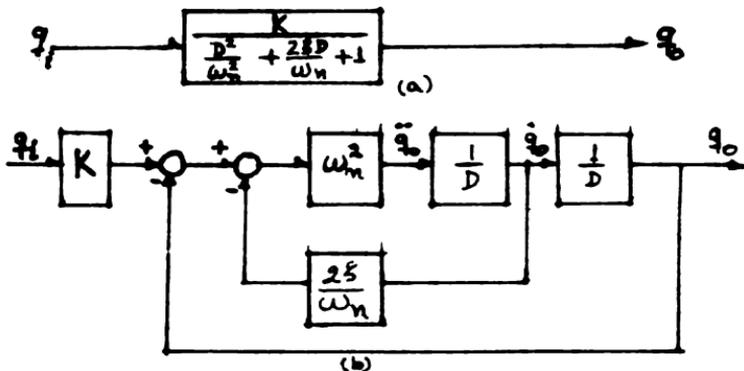
**RESPUESTA A FRECUENCIA: 2o. ORDEN**

**FIG. 4-13.**

En este caso y su  $\zeta=0$ , la respuesta tenderá a infinito siendo esta una situación bastante inestable.

En la figura 4-13 se muestran las gráficas de respuesta senoidal para un sistema de segundo orden, en la región de resonancia, para varios valores  $\zeta$ .

Al incrementarse  $\omega_w$ , crecerá el rango de frecuencias, para los que la curva permanece constante, de aquí que se necesitan valores grandes  $\omega_w$ , para medir altas frecuencias en for-



**FIG. 4.14**

## 4.5d. RESPUESTA ANTE PULSOS.

Para analizar este caso considerese nuevamente la respuesta ante pulsos del instrumento de primer orden. (1). De esta reconsideración saldrán algunos resultados importantes para esta discusión. De la ecuación 4-29 reescrita a continuación para comodidad:

$$\gamma \frac{dq_0}{dt} + q_0 = \frac{KA}{T} \text{ ----- (4-56)}$$

integrando los términos de la ecuación diferencial, se verá que la forma del pulso no tiene importancia si su duración es suficientemente corta, y que únicamente importa su área. Los límites de integración irán desde cero hasta un valor  $\ell \neq 0$  por lo que:

$$\int_0^{\ell} dq_0 + \int_0^{\ell} q_0 dt = \int_0^{\ell} \frac{KA}{T} dt$$

y efectuando los cálculos de las integrales, y tomando al límite cuando  $\ell \rightarrow 0$  obtenemos:

$$\lim_{\ell \rightarrow 0} (q_0|_{\ell} - q_0|_0) + 0 = \lim_{\ell \rightarrow 0} K \int_0^{\ell} \frac{A}{T} dt = \lim_{\ell \rightarrow 0} K[A] = KA$$

de donde:

$$\gamma \lim_{\ell \rightarrow 0} (q_0|_{\ell} - q_0|_0) + 0 = K \left[ \begin{array}{l} \text{AREA BAJO EL PULSO} \\ \text{DESDE } t=0 \text{ HASTA } T = \lim_{\ell \rightarrow 0} \ell \end{array} \right]$$

y finalmente despejando de la ecuación anterior:

$$\lim_{\ell \rightarrow 0} q_0|_{\ell} = \frac{K}{\gamma} [\text{AREA DEL PULSO}] \text{ ----- (4-56B)}$$

De hecho pudo haberse reemplazado la entrada para la solución de (4-22), por cualquier otra, y como solo importa el área del pulso, pudo haberse tomado al lado derecho de 4-22 -- una entrada  $\xi$  tal que  $\xi \rightarrow 0$ , y el problema se convertiría en el de la solución de la ecuación (3D4)  $q_0 = 0$  con  $q_0 = (K/\gamma)$  cuando  $t \rightarrow 0$  y la solución será la misma.

Regresando al caso del instrumento de segundo orden, en forma análoga al caso de primer orden se tomará en cuenta -- la equivalencia mencionada al final del párrafo anterior, debiéndose encontrar la equivalencia correspondiente para instrumentos de segundo orden. Para esto considérese el diagrama de bloque mostrando en la fig. (4-14a) que muestra a este instrumento, y desglócese tal y como se muestra en la figura (4-14b) analizando el progreso de un pulso a través del diagrama, -- puede demostrarse que la condiciones iniciales son:

$$q_0 = 0 \quad \frac{dq_0}{dt} = K\omega_n^2 \quad \text{en} \quad t = \lim_{\xi \rightarrow 0} \xi$$

Ahora con esto se busca la solución de la ecuación -- homogénea de segundo orden en esas condiciones iniciales dando como resultado, las funciones: (1)

$$\frac{q_0}{K\omega_n} = \frac{1}{2\sqrt{\xi^2 - 1}} \left[ e^{(-\xi + \sqrt{\xi^2 - 1})\omega_n t} - e^{(-\xi - \sqrt{\xi^2 - 1})\omega_n t} \right] \quad \text{---(4-57)}$$

para el caso sobre-frendo.

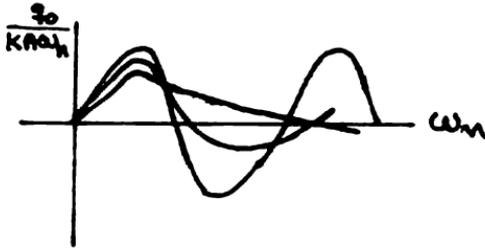
$$\frac{q_0}{K\omega_n} = \omega_n t e^{-\omega_n t} \quad \text{---(4-58)}$$

para el caso críticamente amortiguado y finalmente:

$$\frac{q_0}{K\omega_n} = \frac{1}{\sqrt{1 - \xi^2}} e^{-\xi\omega_n t} \text{SEN}(\sqrt{1 - \xi^2}\omega_n t) \quad \text{---(4-59)}$$

para el caso ligeramente amortiguado.

Nuevamente los resultados se muestran gráficamente en la figura 4-15 para varios valores de  $\zeta$  pues de las ecuaciones de solución es claro que, descontando  $\omega_n$ ,  $\zeta$  es el único parámetro que permanece. (1).



RESPUESTA A PULSO UNITARIO (2o. ORDEN)

FIG. 4-15

#### 4.5 ALGUNAS CARACTERÍSTICAS GENERALES DE INSTRUMENTOS DE CUALQUIER ORDEN.

A partir de lo discutido para los instrumentos ya examinados, pueden extraerse algunas conclusiones generales, acerca de cualquier otro instrumento. Dichas características dinámicas generales son: El tiempo de respuesta, el tiempo de relajamiento la ganancia, la frecuencia natural no amortiguada, el ángulo de

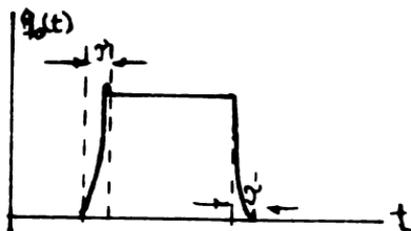
fase, y el coeficiente de amortiguamiento. (1) (22) (24).

#### 4.5.a. TIEMPO DE RESPUESTA.

En la ecuación diferencial generalizada (4-1), el coeficiente ( $a_1/a_0$ ) será la constante de tiempo del sistema, - lo cual se justifica físicamente, porque para que un instrumento señale la existencia del fenómeno que se observa, requiere de - un estímulo, lo cual es en resumidas cuentas energía proveniente del medio medido, que siempre requerirá de un tiempo de transmisión por mínimo que este sea.

#### 4.5.b. TIEMPO DE RELAJACION.

En el momento que el medio deja de proporcionar señal a un sistema, o cuando la señal es tal que existen desapariciones bruscas o descensos pronunciados del nivel, el instrumento tarda un cierto tiempo de responder, de manera que la señal siempre presentará una forma que indica un descenso continuo, y de ninguna forma idéntico al de la señal en el medio, fig. 4-16.



TIEMPOS DE RESPUESTA Y RELAJACION

FIG. 4-16

#### 4.5.C. GANANCIA.

Sobre esta característica ya se habló anteriormente, - al definir las características estáticas, y solo es necesario - señalar aquí que en el caso dinámico, va a ser una función de - la frecuencia.

#### 4.5.d. FRECUENCIA NATURAL NO AMORTIGUADA.

Esta será una característica en general, para todo instrumento de orden mayor que uno, y provendrá de la estructura física del sistema. En todo sistema de este tipo aparece esta característica como algo inherente.

Desde el punto de vista del modelo matemático, la frecuencia natural no amortiguada, aparece siempre a partir de la solución de la ecuación homogénea asociada con el sistema, y se manifiesta en el término oscilatorio transitorio.

#### 4.5.e. COEFICIENTE DE AMORTIGUAMIENTO.

Esta característica aparece en forma natural dado que expresa la inercia existente de todo sistema, cuestión que se manifiesta aún a nivel de instrumental electrónico. En instrumentación mecánica es fácil ver que la inercia mecánica, la fricción etc., dan origen a esta característica. Algo similar se puede definir en el caso de instrumentos electrónicos, pues al menos - debido a la dispersión por calentamiento de Joule en los circuitos, se pierde energía y se amortigua la señal.

**4.5.f. DEFASAMIENTO.**

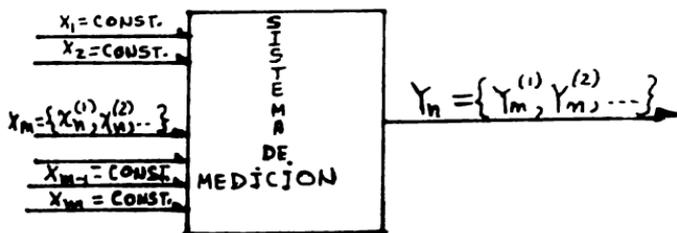
Aunque el instrumento debe de reproducir fielmente las características importantes de la señal, en el momento de tener respuesta a la frecuencia, se presenta un defasamiento entre la señal de salida y la de entrada.

Lo anterior son características directamente inducidas a partir del estudio de los sistemas estudiados con anterioridad. Puede además ser posible la existencia, de otros parámetros, para instrumentos de orden mayor, sin embargo es de esperarse que si pudiese ser posible analizarlos, tal y como se hizo con los casos mas sencillos, se podrían definir otras características según convenga.

## C A P I T U L O V

### CALIBRACION

El proceso de calibración, consiste básicamente - en mantener todas las entradas significativas al siste - ma (1) (15) (10), con valores constantes, exceptuando aque - lla que es objeto de exploración para la respuesta del -- sistema (Fig. 5-1)



PROCESO DE CALIBRACION

FIG. 5-1

Esta entrada se varía sobre un intervalo de valo - res (1) (4) (5), y la relación entrada-salida así desarro - llada es válida bajo las condiciones establecidas por los -

valores de las demás entradas. En las especificaciones de equipo comercial, aparecen datos que establecen las condiciones dentro de las cuales es válida la calibración, por ejemplo: Intervalo de temperatura del medio, humedad ambiente, altitud, vibración mecánica tolerable, etc. Estas son algunas de las entradas que se mantienen controladas durante la calibración.

### 5.1 NORMAS.

Los valores que se producen en la entrada bajo exploración, deben ser normas confiables con una incertidumbre por lo menos 10 veces menor, que la esperada en la salida del sistema bajo calibración. Esto plantea además el problema de la confiabilidad de las normas, cuestión relacionada también al tipo de norma.

Las normas pueden clasificarse como sigue: Normas Fundamentales y Derivadas. Las primeras se relacionan con las magnitudes consideradas básicas por la física, y son<sup>(15)</sup>: Longitud, Masa, Tiempo y Carga Eléctrica, agregándose también la Temperatura y la Intensidad Luminosa. La inclusión de las dos últimas es un tanto arbitraria, pues es posible definir otras cambiando el criterio. Puede llegarse a definir otras magnitudes fundamentales, si se descubren aspectos nuevos de la naturaleza.

Las normas derivadas, corresponden a magnitudes de-

finidas en términos de las fundamentales, por ejemplo: Fuerza, velocidad, etc. Aunque en el sistema inglés, por razones históricas, la fuerza se ha considerado fundamental en la definición de magnitud básica

A su vez las normas fundamentales, se pueden clasificar como normas prototipo<sup>(15)</sup> y normas atómicas. Las primeras son en general objetos físicos que definen la unidad deseada como una de sus propiedades físicas, por ejemplo: Kilo--gramo patrón, metro patrón, etc. Estas normas tienen varios -- defectos pues están sujetas a cambios ocasionados por el me -- dio, como la oxidación de metales, expansión térmica etc.

Las normas atómicas<sup>(15)</sup> recurren al hecho de que los isótopos de un elemento son considerados invariables en sus -- propiedades e idénticos entre sí, y en base a esto es como se ha redefinido el metro y el segundo.

En el laboratorio es frecuente disponer de normas -- tales como pesas, pilas, etc. Cuando se va a calibrar la res-- puesta del sistema con respecto a cantidades derivadas de las fundamentales, será necesario obtener las normas correspondien-- tes mediante algún "método ejemplar"<sup>(1)</sup>, o sea un proceso so -- bre el cual existe un acuerdo entre los expertos como el más -- apropiado, y que se encuentra a menudo en manuales de instru -- mentación.

Como criterio operativo en un laboratorio, a menudo se debe establecer un compromiso entre el material disponible y las necesidades en cuanto a exactitud de un sistema o bien en la evaluación de un aparato nuevo. Bajo estas condiciones es válido acudir a instrumentos cuyas características se conocen, como son: osciladores, fuentes de poder, osciloscopios, etc.

Como último punto solo resta aclarar, que al planear el mantenimiento de todas las entradas excepto una, con valores fijos, se habla tanto de las deseadas como de las no deseadas dentro de los límites prácticos, desechando aquellas cuyos efectos sean despreciables, bajo caracterización previa.

## 5.2 CALIBRACION Y CONTROL ESTADISTICO.

Al realizar una medida, es indispensable establecer el error involucrado en dicho acto. El método clásico sería el de repetir una y otra vez la medición y aplicar las técnicas estadísticas conocidas. Sin embargo este no es el caso de cada una de las situaciones experimentales de la física, pues con frecuencia, una vez que se domina la técnica experimental (21), y conociendo la precisión del equipo, se pueden realizar las medidas, sin necesidad de un tratamiento estadístico severo. De esta manera la estimación de los errores de -

pendará de las características del instrumental, pues se trabaja bajo la suposición de que los elementos del sistema han sido previamente calibrados bajo las condiciones de operación. La metodología para lograr lo anterior existe y por ello, en los aparatos de buena calidad, se da la información-necesaria para la determinación de las incertidumbres en las medidas. También se da el caso de tener equipo disponible, pero sin la información que los caracteriza, y en este caso es necesario calibrar, de acuerdo a las condiciones y criterios que se reseñan a continuación.;

Quando se calibra un sistema o instrumento, debe de existir un control absoluto sobre las entradas significativas, así como sobre las condiciones de operación, a fin de tener la certeza de que las contribuciones de otras entradas que pudiesen influir, aunque no en forma decisiva como para tomar medidas especiales para su control, no afecten mayormente a las lecturas obtenidas. De esta forma se podría lograr, que los datos de salida correspondientes a cada entrada, formarán una sucesión al azar<sup>(1)</sup>, llamándose a esta situación; calibración bajo control estadístico.

Si existe control estadístico, es posible aplicar métodos de evaluación a cerca de los cuales, existe un consenso general sobre su efectividad, y que permiten definir de antemano las incertidumbres de cada medida que se efectúe con

el sistema.

### 5.3 PROCESOS GENERALIZADOS DE CALIBRACION.

Para efectuar la calibración se pueden tomar en general dos aproximaciones; calibrar por punto o emplear una -- curva de calibración. En ambos casos el proceso requiere de -- la repetición de lecturas de salida con respecto a valores -- estrictamente controlados en la entrada.

En el caso de la calibración por puntos ejemplares, se seleccionan valores representativos de la variable de entrada que se está analizando y en cada uno de ellos se repite una y otra vez la lectura a fin de obtener la información necesaria para la aplicación del análisis estadístico.

Cuando se emplea la curva de calibración usualmente se barre el intervalo de valores de entrada, para de esa forma obtener una muestra de las salidas correspondientes, de manera que también estén sujetas al análisis estadístico.

En ambos casos se parte del principio que los valores de entrada al sistema son exactos o verdaderos, y que el error se deposita únicamente en los valores de salida.

Por supuesto que es necesario también tomar en cuenta las características generales de los instrumentos, en cuanto a las formas de registro de datos, cuestión que va a influir sobre todo en la propagación de errores.

Es necesario guardar en mente que la aparición global de errores es la resultante de cada una de las imprecisiones, que aparecen en las etapas del procedimiento experimental por la señal desde el medio medido, hasta su presentación ante el observador.

A vía de ejemplo considerese lo que sucede en un multímetro con indicador D'Arsonval. La salida de este aparato solo registra corriente<sup>(9), (10)</sup>, dentro de un intervalo fijo de valores que puede ser entre  $0 \mu\text{A}$  y  $50 \mu\text{A}$

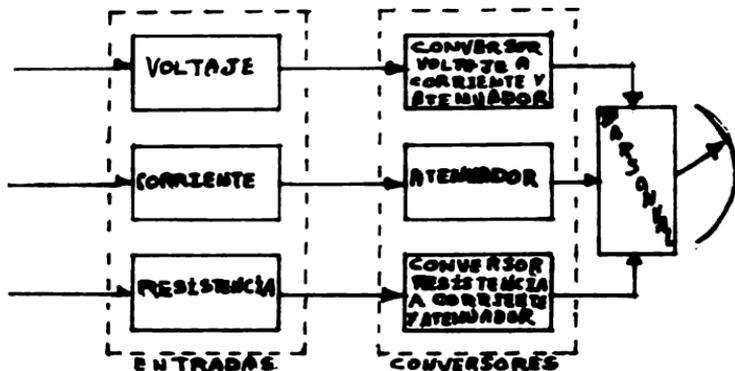


DIAGRAMA DE BLOQUE PARA UN MULTIMETRO CON INDICADOR D'ARSONVAL FIG. 6.5.2.

En la figura (5-2) se muestra un diagrama de bloque funcional, que muestra la trayectoria que siguen las señales que puede aceptar el aparato. Todo valor de entrada debe de prepararse para que el indicador las acepte sin experimentar daño alguno. Los pasos intermedios en si no miden la señal, pues esto se efectúa en la última etapa, sólo la preparan para su aceptación en el comparador que es de hecho el indicador D'Arsonval, mediante la deflexión angular que experimenta su indicador frente a una pantalla. En este ejemplo el error va a inducirse tanto en las entradas como en los conversores, pues estos últimos son usualmente divisores, con una cierta precisión. Por otro lado, aún cuando la impedancia de entrada sea muy grande, siempre habrá consumo de corriente que induce al error, Por último en la salida se tiene la inercia del sistema mecánico, así como la fricción que disipan energía. En general la salida real (el ángulo de deflexión) va a ser función tanto de la señal a medir, como de un conjunto de variables que aparecen en el interior del sistema, y que pueden ligarse en un relación excitación-respuesta, mediante una función de transferencia.

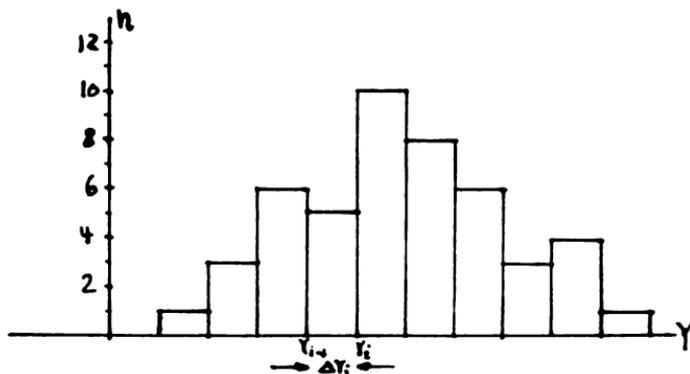
Cada etapa del proceso contribuye al error resultante, y representa una fuente evaluable de indeterminación. Para definir criterios generales de evaluación, se analizarán -

a continuación los tipos de calibración antes mencionados, dándose por conocidos los procesos estadísticos normales, enfocándose la atención sobre el significado de los resultados.

#### 5.4 CALIBRACION POR PUNTO.

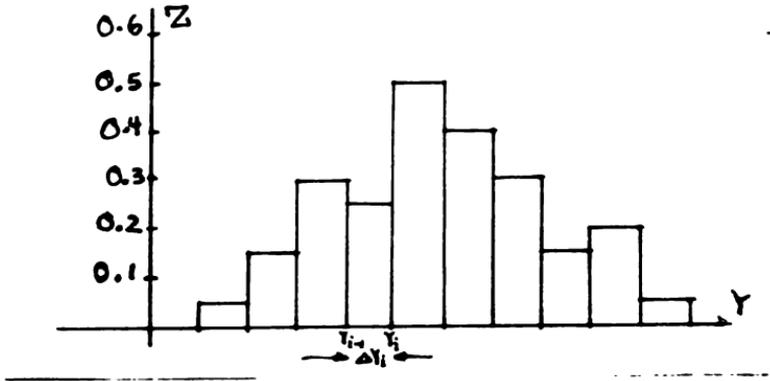
Consistirá en seleccionar valores ejemplares dentro del intervalo de entradas permitidas del instrumento, y en cada uno de ellos repetir las lecturas a fin de obtener datos para el análisis, graduando el resto de la escala mediante la interpolación, de los puntos bajo examen.

Sea  $X_0$  un valor seleccionado por la entrada,  $Y_0$  la salida correspondiente. En este caso el valor de entrada  $X_0$  se repetirá  $N$  veces obteniéndose una distribución al azar  $Y_0^{(1)}$  -  $Y_0^{(2)}$ ; ...  $Y_0^{(N)}$  de valores de salida, cuyo análisis se inicia dibujando el histograma correspondiente <sup>(1)</sup> (fig. 5-3).



HISTOGRAMA TIPICO

FIG. 5.3



HISTOGRAMA NORMALIZADO

FIG. 5.4

Sea ahora  $n_i$  = número de lecturas en el subintervalo  $i$ -ésimo del histograma y  $Y_i$  la anchura correspondiente. Entonces puede definirse una función  $Z = \left(\frac{1}{N}\right) \frac{N_i}{\Delta Y_i}$  cuya gráfica es muy similar al histograma original<sup>(1)</sup> (Fig. 5.4).

En ambos casos la gráfica es una medida cualitativa de la dispersión de valores  $Y_0^{(i)}$  alrededor de un valor central - elegido de entre todo el conjunto, a fin de minimizar las desviaciones de cada lectura  $Y_0^{(i)}$ , a partir del valor más cercano al verdadero. En el caso de un proceso bajo control estadístico, el valor que minimizar el error<sup>(18)</sup> es la media aritmética.

La función Z tiene las propiedades siguientes:

i) El área bajo una de las barras, (fig. 5.4) correspondiente a un intervalo  $\Delta Y^{(i)}$ , con  $N_i$  lecturas, será:  $A_i = Z \Delta Y^{(i)} -$   
 $= \frac{1}{N} \left[ \frac{N_i}{Y^{(i)}} \right] \Delta Y^{(i)} \quad A_i = \frac{N_i}{N}$ , o sea la probabilidad de que una lectura  $Y_0^{(i)}$  esté en ese subintervalo en especial.

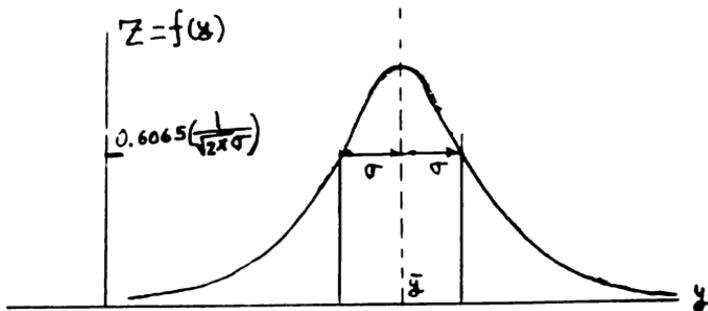
ii) Si se suman las áreas en cada barra, se obtendrá:

$$A = \frac{(\sum_{N_i=N} N)}{N} = 1 \quad (5-1b)$$

Es decir, el área total que cubre el histograma es igual a 1, lo que significa que cualquier valor  $Y_0^{(i)}$  tiene - 100% de probabilidad de quedar dentro del área. Dado lo anterior la función Z asume las características de una función de densidad de probabilidad<sup>(7), (18), (1)</sup>.

Por supuesto no puede afirmarse que Z así definida sea una función de distribución verdadera, pues para ello se necesitaría aumentar el número de lecturas, haciendo que tendiera a infinito. Como esto es imposible, podría tomarse un gran número de lecturas y volver a trazar el histograma de Z, con lo que si los errores son de azar se generará una figura cada vez más fina, y más aproximada a una Gaussiana o curva de distribución normal. Dada por la expresión.

$$F(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{y-\bar{y}}{\sigma} \right)^2} \quad \text{-----} \quad (5-2)$$



FUNCION DE DISTRIBUCION NORMAL

FIG. 5.4

Donde  $\bar{y}$  = Promedio de las  $\{Y^{(i)}\}$  y  $\sigma$  = Desviación normal de las  $\{Y^{(i)}\}$  se puede emplear como medida del error, pues por ejemplo dada una  $Y^{(i)}$  existe el 99.7% de probabilidad que este en el intervalo  $[\bar{y}-3\sigma, \bar{y}+3\sigma]$ . Se define también, la función de distribución acumulativa dada por:  $F(y_1) = \int_{-\infty}^{y_1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(y-\bar{y})^2}{2\sigma^2}} dy$  que indica la probabilidad de que un valor  $y_1$  se menor que y

#### 5.4.A. AJUSTE A GAUSSIANA DE PUNTOS DE CALIBRACION

Dados los n puntos  $\{Y_0^{(i)} | i=1, \dots, N\}$  para una entrada --  $X_0$ . Puede de terminarse si se ajustan a una gaussiana, mediante la prueba  $\chi^2$  de la que solo se presentarán los resultados principales.

Para empezar, se toma al intervalo sobre el que se dispersan los valores  $\{Y_0^{(1)}, Y_0^{(2)}, \dots, Y_0^{(N)}\}$  y se subdivide en subintervalos idénticos de manera que en cada uno, que den no menos de cuatro elementos del conjunto  $\{Y_0^{(i)} \mid i = 1, \dots, N\}$  ordenándose estos de menor a mayor. De acuerdo con esto --- supondremos que en  $\{Y_0^{(i)} \mid i = 1, \dots, N\}$  los índices superiores indicarán dicho orden.

Para que la prueba sea significativa se necesitan -- al menos cuatro subconjuntos, por lo que combinando esto con -- el número mínimo de datos por subintervalo, es claro que se -- necesitarán al menos 16 lecturas con lo que se tiene un criterio para el mínimo número de lecturas necesarias.

La idea subyacente en la prueba es la que sigue: --- Cualquier distribución real que se tenga será finita y por tanto solo aproximada a una gaussiana ideal, los valores  $\bar{Y}_0$  y  $\sigma$  son a su vez aproximaciones a los valores ideales, cuestion comprobable, pues al tomar más lecturas tanto  $\bar{Y}_0$  como  $\sigma$  exhiben variaciones, por lo que si se encuentra que la diferencia entre la distribución real y la ideal es mínima, puede extrapolarse que los datos se están ajustando y puede aceptarse en un momento dado su normalidad.

Se define:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^K \frac{(N_o - N_e)^2}{N_e} \text{ ----- (5-4)}$$

Donde  $N_o$  = número de lecturas en un intervalo dado.

$N_e$  = número de lecturas que existiría en dicho intervalo si la distribución fuese ideal.

$K$  = número de intervalos.

Para determinar  $N_e$ , se procede de la forma siguiente: Existen tablas de valores, para la función de distribución acumulativa  $F(w)$ , dada por la ec. 5-3, donde los valores indican la probabilidad de que una lectura esté en el intervalo  $\langle -\infty, w \rangle$ ;  $w = \frac{Y - \bar{Y}}{\sigma}$  con  $\bar{Y}$  dada por la ec. 5-1a, y  $\sigma$  igual a la desviación normal para el conjunto  $Y_o^{(i)}$ . Por la simetría de la gaussiana  $F(w) = 1 - F(-w)$ . Si  $N$  es el número total de datos, en el intervalo  $\langle w, \infty \rangle$  habrá idealmente  $[1 - F(w)]N$  Lecturas.

En un subintervalo  $K$ , al valor menor  $Y_{o,K,m}^{(i)}$  le corresponde  $w_1^{(K)} = (Y_{o,K,m}^{(i)} - \bar{Y})/\sigma$  y al mayor  $Y_{o,K,M}^{(i)}$  le corresponde  $w_2^{(K)} = (Y_{o,K,M}^{(i)} - \bar{Y})/\sigma$  y se calcula el número de lecturas en los intervalos  $\langle w_1^{(K)}, \infty \rangle$  y  $\langle w_2^{(K)}, \infty \rangle$ , siendo la diferencia entre ellas  $N_e$ . Con esto se calcula  $\chi_K^2$  para cada subintervalo y:

$$\chi_{\text{total}}^2 = \sum_K \chi_K^2 \text{ --- (5-6)}$$

En papel de prueba, Fig. 5.6, se grafica el resultado, representandose sobre el eje X el número de grados de libertad, - igual al número de subintervalos menos uno y sobre el eje Y, el valor  $\chi^2$  total. Si el punto cae en la zona sombreada, es altamente improbable que la distribución sea normal, si no es así, puede decirse que no existe evidencia decisiva de que la distribución no sea gaussiana (1). En la literatura (16) (17) (19) puede encontrarse otra forma de hacer esta prueba.

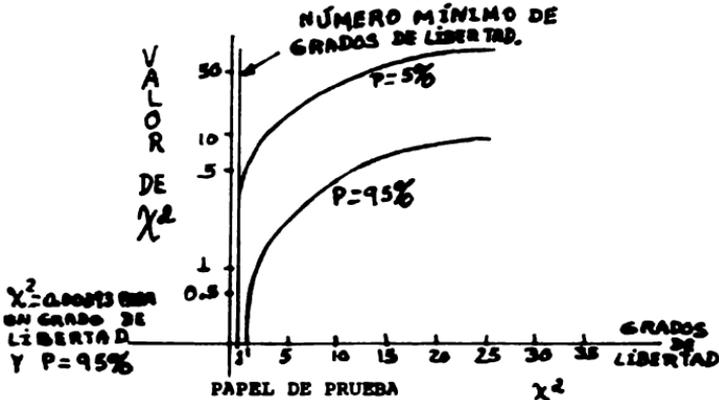
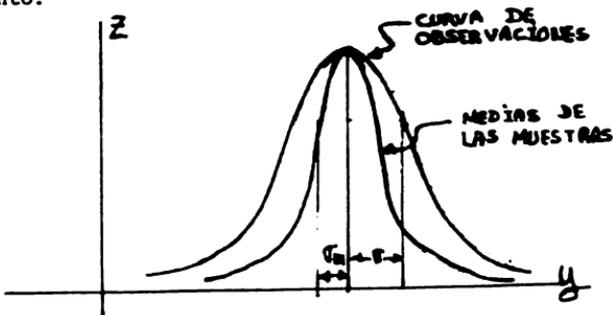


FIG. 5-6

#### 5.4.b. OPTIMIZACION DE LA CURVA DE DISTRIBUCION NORMAL.

Una vez que se tiene evidencia de que una distribución experimental se ajusta a la Gaussiana, de que el proceso de medición se ha dominado y de que se han eliminado problemas de implementación en el sistema, cada nueva lectura del valor  $X_0$  dará salidas muy cercanas a  $\bar{Y}_0$ , y a fin de evitar más repeticiones, - se puede optimizar la curva mediante muestreo. (5)

Este proceso consiste en dividir los datos en conjuntos de igual número de miembros, obtener el valor medio de cada uno y construir una nueva gráfica, obteniendo la desviación standard de las nuevas medidas. En este caso si  $\sigma_m$  es la nueva desviación y  $\sigma$  la calculada para los puntos originales, entonces:  $\sigma_m = (\sigma/\sqrt{N})$  Donde N es el número de lecturas en cada subconjunto.



OPTIMIZACION POR MUESTREO

FIG. 5-7

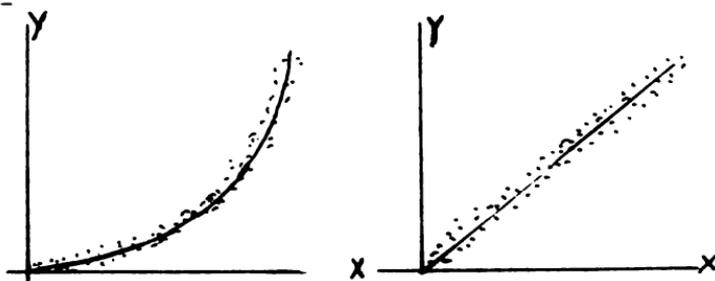
Si se dibuja la nueva curva simultáneamente con la original, (fig. 5.7), se verá centrada en el mismo valor medio  $\bar{y}_0$ , y que es más angosta. De esta manera se mejora la precisión sin necesidad de repetir más lecturas.

Cabe mencionar que en la calibración de un sistema, es necesario poner atención especial en la aparición de lecturas ocasionales que defieran fuertemente del promedio, pues pueden indicar la existencia de defectos en la construcción --

o implementación del sistema, o la susceptibilidad de este a influencias exteriores transitorias, como la temperatura, variaciones en la corriente, etc. y a partir de su análisis, -- mejorar el diseño, o bien la existencia de un fenómeno extra- además del que se está analizando, o las equivocaciones del - operador.

#### 5.5. CURVA DE CALIBRACION.

En este caso, no se tiene un gran número de lectu - ras alrededor de un punto sino un gran número de lecturas so - bre el intervalo de valores de entrada generandose un diagra - ma de dispersión.<sup>(18) (20)</sup>



DIAGRAMAS DE DISPERSION  
FIG. 5-8

Es particularmente interesante la dispersión lineal, puesto que siempre se trata de diseñar los instrumentos para que respondan de esa forma, o bien se puede aproximar dispersiones no lineales tanto como se quiera a la lineal, empleando funciones auxiliares.

Suponiendo una dispersión de calibración que se ajusta al caso lineal, los problemas son los siguientes:

1o.- Definir la relación matemática óptima, de acuerdo a los datos experimentales.

2o.- Definir la incertidumbre de los valores obtenidos en lecturas reales, sobre cualquier valor permitido del intervalo.

#### 5.5.a. AJUSTE DE LA RECTA DE CALIBRACION.

Si  $\{(X_i, Y_i) \mid i=1, 2, \dots, N\}$  representan los valores que permiten inducir la existencia de una relación lineal, la expresión que los relaciona será del tipo  $Y=mx+b$  donde:

$$m = \frac{N \sum_{i=1}^N X_i Y_i - \sum_{i=1}^N X_i \sum_{i=1}^N Y_i}{N \sum_{i=1}^N X_i^2 - \left( \sum_{i=1}^N X_i \right)^2} \quad \text{-----} \quad (5-7)$$

$$b = \frac{\sum_{i=1}^N X_i^2 \sum_{i=1}^N Y_i - \sum_{i=1}^N X_i \sum_{i=1}^N (X_i Y_i)}{N \sum_{i=1}^N X_i^2 - \left( \sum_{i=1}^N X_i \right)^2} \quad \text{-----} \quad (5-8)$$

La justificación de estas cantidades, está en el proceso llamado de mínimos cuadrados, que se encuentra en cualquier libro de análisis de datos experimentales. <sup>(18)</sup> Este proceso define una recta tal que las desviaciones entre ella y los valores obtenidos están minimizadas.

Las desviaciones standard de  $m, b, y$ , estarán dadas por (18):

$$\sigma_m = \left[ \frac{N}{N \sum_{i=1}^N x_i^2 - \left( \sum_{i=1}^N x_i \right)^2} \right]^{1/2} \sigma_y \quad \text{----- (5-9)}$$

$$\sigma_b = \left[ \frac{\sum_{i=1}^N x_i^2}{N \sum_{i=1}^N x_i^2 - \left( \sum_{i=1}^N x_i \right)^2} \right]^{1/2} \sigma_y \quad \text{----- (5-10)}$$

$$\sigma_y = \left[ \frac{1}{(N-2)} \sum (mx_i + b - y_i)^2 \right]^{1/2} \quad \text{----- (5-11)}$$

#### 5.5.b. EMPLEO DE LA RECTA AJUSTADA.

En el caso de un valor  $Y_0(x_0) = mx_0 + b$ , el valor  $\sigma_y$ , se emplea en el sentido que se le da a  $\sigma$  en una distribución --

Gaussiana, es como decir como si fuese una desviación standard resultante de efectuar un conjunto de medidas repetidas en el valor  $X_0$ . Tal y como se estableció, puede usarse  $3\sigma_y$  como límite de incertidumbre de una lectura, y así, esta será:

$$Y_0 \pm 3\sigma_y.$$

### 5.6 PROPAGACION DEL ERROR.

Un sistema, estará integrado por varios elementos, teniendo cada uno, una Imprecisión individual, de manera que la imprecisión resultante será una combinación de las individuales.

La respuesta total del instrumento, será una función de todos los valores de salida  $X_i$  de cada subsistema, entonces la salida total será:  $f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ . A cada salida  $X_i$  le corresponde una imprecisión  $\delta x_i$ , por lo que la imprecisión total  $df$  será, si  $\delta x_i$  es pequeño, y las  $X_i$  son independientes: (5)

$$E_o = df = \sum \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| \delta x_i \quad \text{-----} \quad (5-12)$$

llamado también error-absoluto del sistema.

Puede también definirse una desviación standard<sup>(18)</sup>, que estará dada por:

$$S_v = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 \sigma_{x_i}} \quad \text{-----} \quad (5-13)$$

donde  $\sigma_{x_i}$  es la desviación standard de  $x_i$ , según su calibración.

Quando las cantidades  $x_i$  están relacionadas entre sí, el asunto es más complicado, y se requiere emplear los -- coeficientes de correlación, definidos por<sup>(18)</sup>:

$$\rho_{x_i x_j} = \frac{1}{(n-1)\sigma_{x_i}\sigma_{x_j}} \sum (\delta x_{i,k} \delta x_{j,k}) \quad \text{----- (5-14)}$$

donde  $n$  = número de lecturas efectuadas para la calibración, --

o bien:

$$\rho_{x_i x_j} = \frac{1}{(n-1)\sigma_{x_i}\sigma_{x_j}} \left[ \sum_{k=1}^n (x_{i,k}x_{j,k}) - n\bar{x}_i\bar{x}_j \right] \quad \text{--(5-15)}$$

donde  $\bar{x}_i$ ,  $\bar{x}_j$ ; son los valores medios de  $x_i$  y  $x_j$ . En este caso la desviación standard total del sistema será:

$$S_v = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 \sigma_{x_i}^2 + \sum_{i,j=1}^n \rho_{x_i x_j} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} \sigma_{x_i} \sigma_{x_j}} \quad \text{----(5-16)}$$

que puede emplearse en forma análoga, a la desviación standard para un punto de calibración.

## 5.7. CALIBRACION DINAMICA.

A partir de lo discutido en el capítulo IV, pueden -- señalarse como los parámetros que deberán determinarse, a los -- siguientes: la sensibilidad estática, la frecuencia natural -- no amortiguada, la constante de tiempo, el coeficiente de amor -- tiguamiento y la fase. Además es necesario obtener criterios --

para determinar el tipo de instrumento que se pueda tener, por lo que se discutirán, algunas pruebas para caracterizar sistemas de orden cero, orden uno y orden dos.

Para implementar estas pruebas se emplean usualmente, la señal senoidal, y la señal de onda cuadrada. Por lo que primero se verán aspectos generales acerca de las pruebas con estas señales.

#### 5.8.a. MEDIDA DE GANANCIA Y PERDIDA.

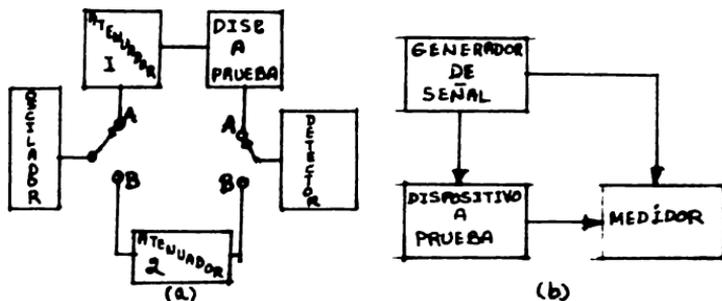
Usualmente se encuentra que en instrumentos diseñados con el fin específico de amplificar, la relación entre -- amplitudes, va a ser sumamente grande, lo que se acentúa, si el sistema de medición está interconectado en cascada, pues la amplificación total será el producto de las amplificaciones de cada etapa. Esto hace conveniente expresar la amplificación y también la atenuación en unidades logarítmicas, siendo la forma más conveniente el empleo de decibeles.<sup>(10)</sup>

$$\text{Ganancia} = G = 10 \log \left( \frac{\text{Potencia de salida}}{\text{Potencia de entrada}} \right) \dots\dots 5-17$$

y la pérdida:

$$\text{Pérdida} = P = - G = 10 \log \left( \frac{\text{Potencia de entrada}}{\text{Potencia de salida}} \right) \dots 5-18$$

En la figura (5-9) se muestran dos dispositivos-- experimentales clásicos (15) (22), para la medida de ganancia. Del oscilador se toma la señal senoidal, que es enviada a través de un atenuador calibrado y el dispositivo de prueba, siendo registrada en un detector. La impedancia del detector debe de acoplarse con la de salida del dispositivo, a fin de minimizar efectos de acoplamiento, asimismo se debe de acoplar al atenuador I con el dispositivo, y al atenuador I con el dispositivo, y al atenuador 2 con el detector (15).



METODO CLASICO

METODO DIRECTO

FIG. 5-9

El atenuador I se ajusta para que de una lectura-- conveniente en el detector con los interruptores en posición A. Entonces el atenuador 2 se ajusta de manera que se tenga la misma lectura en el detector. La ganancia será entonces:

$$G = \alpha_1 - \alpha_2 \dots\dots\dots 5-19$$

donde  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  son los valores de fijación de los atenuadores más las pérdidas de acoplamiento. El proceso se repite con cada nueva frecuencia hasta barrer toda la banda pasante. En este caso las lecturas no dependen del conocimiento del nivel absoluto de la señal de prueba o de la salida. La exactitud de la medición dependen únicamente de<sup>(15)</sup>:

1.- La precisión de los atenuadores, que en general será muy alta por ser dispositivos pasivos.

2.- La exactitud con la que ambas lecturas pueden hacerse coincidir en el detector.

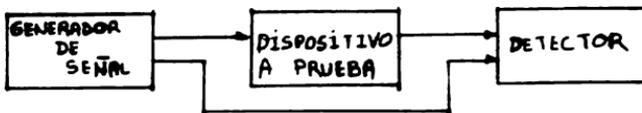
3.- La ausencia de armónicos; en la fuente, y de alinealidades en el dispositivo.

4.- La sensibilidad del detector ante los armónicos.

5.- La ausencia de señales extrañas (hum, ruido, etc.)

Con la instrumentación actual, es posible tener fuentes que proporcionan una señal de nivel constante, y -- detectores sumamente precisos, con lo que se ha simplificado

el proceso clásico, tal y como se muestra en la fig. 5-9b. Una variante de este último proceso se muestra en la figura 5-10, y consiste en emplear el detector, tanto para medir la salida, como para verificar la señal de entrada. Lo anterior se puede llevar a cabo empleando un osciloscopio de dos canales, por ejemplo, como detector.



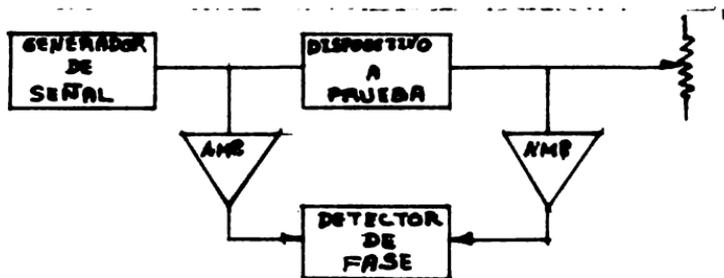
MEDIDA DE GANANCIA Y PERDIDA

FIG. 5.10

Si se espera un intervalo grande de amplitudes de salida, o si se necesita una lectura directa en decibelios, la señal de salida del dispositivo se pasa a través de un amplificador logarítmico. La salida de este amplificador se emplea para manejar el eje Y de un graficador X - Y, mientras que el eje X se alimenta con una señal proporcional a la frecuencia o al logaritmo de la frecuencia. Este método es la base de los sistemas automáticos incluyendo a los controlados por computadora.

## 5.8.b. MEDIDA DE FASE.

La medida de fase lleva implícita en si la comparación de dos señales, por lo que no tiene sentido medirla con una sola señal. El arreglo experimental típico para la medida de fase se muestra en la figura(5.11) Las señales se aplican a un comparador, que puede ser un osciloscopio, y es obvio que una será la señal de entrada al dispositivo y otra la de salida, medidas con la entrada X-Y del osciloscopio<sup>(15)</sup>(10).



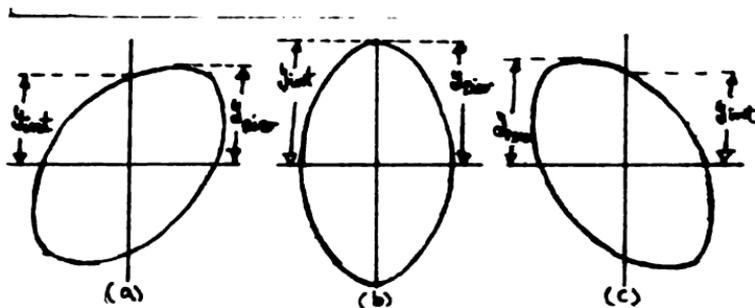
MEDIDA DE FASE

FIG. 5.11

La señal de referencia y la defasada se alimentan en canales X-Y respectivamente, debiendo ser estos idénticos. Para la medida, se coloca al osciloscopio en el modo donde presenta ambas señales sumadas con lo que se obtendrá en general una elipse. Se centra la elipse en la graduación del aparato, de manera que su centro coincida con el origen de un sistema de coordenadas X-Y, tal y como se muestra en la figura 5-13a, midiéndose ya sea con la escala del osciloscopio, o con una regla superpuesta por el observador sobre la pantalla, las cantidades  $Y_{int}$ ,  $Y_{pico}$ , determinándose la fase con:

$$\text{sen } \phi = (Y_{int} / Y_{pico}) \text{ ----- 5-20}$$

en las figuras 5-12b, 5-12c, se muestran dos casos típicos de las figuras obtenidas.



MEDIDA DE FASE

FIG. 5.12

No termina aquí el campo de acción de prueba senoidal ya que, es posible encontrar un número de aplicaciones ma yor que las descritas en detalle, que son las más comunes, a tal grado que se han diseñado sistemas automatizados que llevan a cabo no nada más las pruebas descritas, sino también -- otras como son: distorción, ganancia de circuito de retroalimentación, no linealidad, etc. En particular las referencias - (1), (4), (10), (11), (15), (8), contienen una gran variedad de do cumentación acerca de técnicas así como instrumentos y sistemas de medición, para una gran variedad de aplicaciones. Por último queda considerar ciertas precauciones que se deben de tomar al efectuar medidas senoidales.

i) Es necesario asegurarse que las lecturas obtenidas en una prueba dada, correspondan únicamente a la señal deseada. Esto se debe a que la señal sale de un dispositivo sujeto también a perturbaciones como son ruido, modulaciones, etc., que requieren de un tratamiento individual según cada caso particular, por otro lado la pureza espectral es sumamente importante.

ii) El sistema debe de operarse dentro de su rango lineal. -- Fuera de su banda pasante la respuesta puede variar muy radicalmente, y en caso de que sea necesario operar fuera de dicha banda, el conocimiento de la función de transferencia pue

de llegar a ser útil para interpretar la respuesta.

Algunas "recetas" útiles son:

1.- Observar la salida constante en un osciloscopio a fin de detectar cualquier irregularidad que se presente.

2.- Asegurarse que no existe salida sin señal de en trada, cuestión que puede suceder si existen efectos de re-- troalimentación positiva, ruido, interferencia, etc.

3.- Asegurarse que al incrementarse la entrada en - amplitud, también se incrementa proporcionalmente la salida.

#### 5.9 PRUEBAS CON SEÑAL CUADRADA Y PULSOS.

Aunque las pruebas con señal senoidal, son adecua - das para investigar las características de respuesta de un -- sistema, ante señales continuas, a menudo lo que importa es - medir señales transitorias, como pueden ser pulsos, o cambios súbitos de nivel en una señal dada. Para hacerlo directamente se emplea la señal de onda cuadrada o los pulsos. Por supues to que también podría hacerse esto mediante el empleo del anál lisis de Fourier, sin embargo la prueba directa puede ser más interesante sobre todo cuando se tiene un fenómeno, ante el - cual no existe mucha familiaridad.

## 5.9.a. RELACIONES ENTRE RESPUESTA TRANSITORIA Y SENOIDAL.

Primero se analizará la respuesta a impulso de un sistema lineal. Sea esta respuesta en  $t=0$  igual a  $h(t)$ . Como el sistema es lineal, si el impulso ocurre en un tiempo  $(t-\tau)$ , la respuesta será  $h(t-\tau)$ .

Cualquier otra entrada  $f(t)$  puede pensarse como una serie de pulsos, de manera que el correspondiente al tiempo  $\tau$  tiene un área  $f(\tau)d\tau$ . La respuesta a este impulso será  $f(\tau)h(t-\tau)d\tau$ . Entonces por el principio de superposición la respuesta a  $f(t)$  será:

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) h(t-\tau) d\tau \quad \text{----- 5-21}$$

tomando la transformada de fourier a ambos lados:

$$G(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) h(t-\tau) d\tau \right] dt \quad \text{-- 5-22}$$

de donde cambiando el orden de integración y haciendo  $(t-\tau) = u$  se obtiene:

$$G(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) e^{-i\omega\tau} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} h(u) e^{-i\omega u} du \right] d\tau \quad \text{5-23}$$

La cantidad entre paréntesis es la transformada de fourier de  $h(u)$ , como no es función de  $\tau$ , puede salir, y la integral restante es la transformada de fourier de  $f(t)$ . De-

aquí, un sistema lineal, el espectro de la salida es el producto del espectro de la señal de entrada, por una función filtrante  $H(\omega)$  que es la transformada de fourier de la respuesta a impulso: <sup>(15)</sup>

$$G(\omega) = H(\omega) F(\omega) \text{-----} \quad (5-24)$$

$G(\omega)$  = transf. de fourier de la salida.

$F(\omega)$  = transf. de fourier de la entrada.

La salida  $g(t)$  es la transformada inversa de  $G(\omega)$ .

Con 5-24, la respuesta a impulso  $h(t)$ , será una constante (El área  $A$  del impulso) por la transformada inversa de fourier de la respuesta a frecuencia  $H(\omega)$ .

$$h(t) = \frac{A}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) e^{i\omega t} d\omega \text{-----} \quad 5-25$$

pues el espectro de un pulso  $h(t)$  es una constante. Entonces  $h(t)$  será un pulso cuyo espectro contiene la amplitud y característica de fase del sistema.

Un escalón unitario, puede considerarse como la integral hasta el tiempo  $t$  de un pulso de área unitario:

$$u(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\lambda) d\lambda \text{-----} \quad 5-26$$

y a su vez el pulso de área unitaria puede considerarse como la derivada del escalón unitario.

La integración en el dominio del tiempo corresponde a una multiplicación por  $(1/p)$  en el dominio de la frecuencia, por lo que el espectro de un escalón unitario es  $1/p$ . -- De aquí la respuesta es la transformada inversa de fournier - de  $H(\omega)/i\omega$ , o sea:

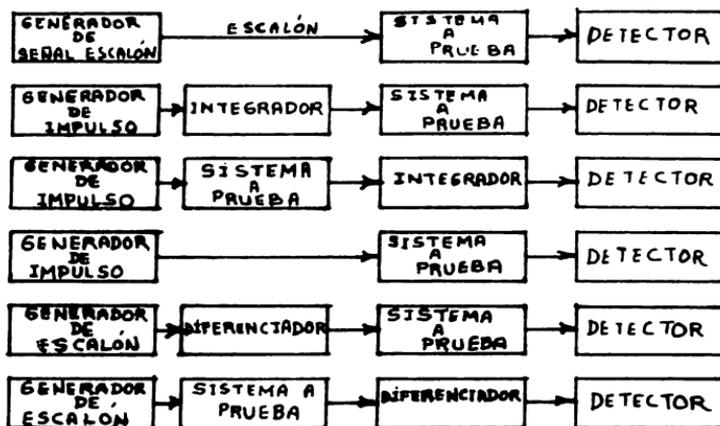
$$S(t) = \frac{A}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{H(\omega)}{i\omega} e^{i\omega t} d\omega \quad \text{----- 5-27}$$

la integración y diferenciación, pueden implementarse mediante filtros lineares.

#### 5.9.b ALGUNAS CONFIGURACIONES EXPERIMENTALES.

Con lo anterior se diseñan los sistemas que se muestran en las figuras 5-13b y 5-13c, para obtener la respuesta a entrada escalón de un sistema, empleando un circuito integrador.

De la misma forma en la figura 5-13c/ 5-13e 5-13a/ se muestran sistemas para obtener la respuesta a entrada de impulso.



SISTEMAS EXPERIMENTALES PARA OBTENER RESPUESTAS A PULSO  
 FIG. 5.13

Es necesario indicar una vez más que la investigación de un sistema con respuesta a pulsos y a señales escalón, es tan completa como la que se efectúa empleando señal senoidal, por lo que es una alternativa que con frecuencia es incluso más conveniente. (15) Existe ya un gran número de respuestas pre-establecidas para diversos sistemas, entre estas entradas, en particular en la referencia 15 se puede encontrar un resumen de esta respuesta ante redes típicas.

La prueba de la respuesta ante entradas transitorias también presenta detalles problemáticos, y requiere de precauciones al aplicarla, señalándose algunos a continuación:

1) Es difícil detectar sobrecarga, pues como la forma de onda-

es transitoria, puede no haber indicación de deformación que es la forma usual de observar sobrecarga en prueba senoidal.

ii) El empleo de pulsos, escalones y señales cuadradas, lleva al sistema muy rápidamente a través de una porción muy amplia de la función de transferencia, lo que puede hacer que no se detecten algunos efectos.

iii) Las señales reales que se emplean serán trenes de impulsos, u ondas cuadradas, que no contienen un espectro continuo de frecuencias, sino armónicos de la frecuencia de repetición por lo que no se detectarán anomalías localizadas entre los armónicos.

#### 5-9c RESPUESTA ANTE ENTRADAS GENERALIZADAS.

Las pruebas descritas, proporcionarán una caracterización idéntica de un sistema de medición, a pesar de los detalles que ya han sido señaladas como complicaciones posibles del método que se elija, sin embargo puede afirmarse que ya sea de una prueba u otra podría calcularse en principio la respuesta del sistema ante cualquier entrada, pues dado que la respuesta ante impulso y la respuesta ante frecuencia, son un par de transformadas de fourier, ambas contienen la misma información por lo que serán equivalentes.

Si se conocen las características de respuesta a frecuencia de un sistema lineal, el método clásico para calcular la respuesta ante una entrada particular es determinar el espectro de la entrada (su transformada de fourier), multiplicarlo -

por la característica de frecuencia del sistema, y tomar finalmente la transformada inversa del producto, en este caso el sistema se piensa como si fuera un filtro que altera las amplitudes y fases relativas de las componentes del espectro de entrada. En la figura 5-14 se muestra un diagrama, que indica los dos caminos que permiten calcular la respuesta de un sistema lineal ante una entrada arbitraria, por supuesto que la forma mencionada en los incisos 5-9 y 5-9b, es una ruta indirecta y como tal se identifica en el diagrama, la ruta directa sería la prueba de respuesta ante señal senoidal (15).

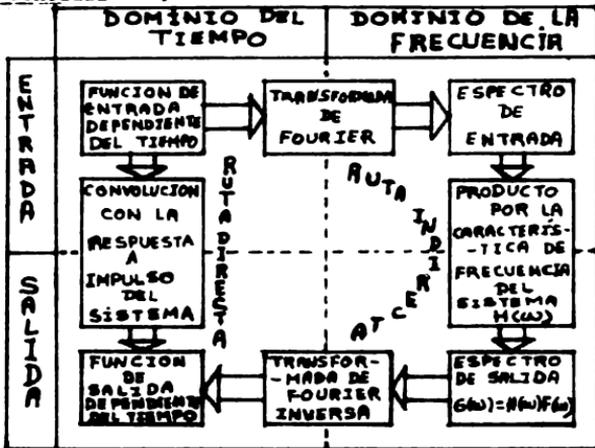
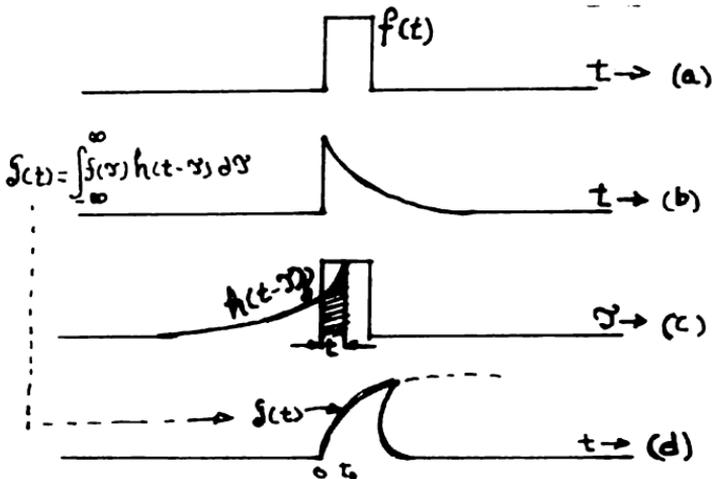


FIG. 5.14

Cuando el espectro de la entrada consiste de unas cuantas componentes discretas o puede expresarse en una forma analítica simple, y cuando la respuesta a frecuencia del sistema es también simple en forma analítica, la ruta indirecta puede ser la más corta y la mejor. por otro lado si la respuesta a impulso

del sistema y la onda de entrada se expresan en forma simple como funciones del tiempo, mas que como funciones de la frecuencia, puede ser más sencillo ir de la entrada a la salida directamente mediante la integral de convolucion:



## CONVOLUCION

FIG. 5.15

Al entrar dos funciones en convolucion, una de ellas, en este caso seria  $h(\tau)$  se revierte en el tiempo ( $\tau \rightarrow -\tau$ ) y es desplazada ( $-\tau \rightarrow t-\tau$ ), la integral de su producto se encuentra entonces como función del desplazamiento. El proceso -- se muestra en la figura(5.15) donde la función  $f(t)$  se muestra en (a) como un pulso rectangular y  $h(t)$  se muestra en (b) como-

una exponencial en decaimiento. En (c)  $h(t - \tau)$  se muestra junto con  $f(\tau)$  examinada conforme  $t$  varía. Como  $f(\tau)$  es constante para  $0 < \tau < t$ , y cero en cualquier otro lado, la integral del producto es proporcional al área sombreada en (c). La onda de salida se muestra en (d).

La convolución puede pensarse como una operación generalizada de exámen de la forma siguiente. En el dominio de la frecuencia una red "filtra" al espectro de entrada para producir el espectro de salida, en el dominio del tiempo la misma red examina la onda de entrada con la respuesta a impulso del filtro, revertida en el tiempo.

Con esto se concluye la discusión de los métodos básicos empleados en la determinación experimental de características de sistemas de medición, el empleo preferente de un método u otro, va depender tanto del equipo disponible como de las necesidades particulares del experimentador.

Usualmente al recibir un equipo nuevo en un laboratorio o el diseñar un sistema para realizar un experimento, gran parte del tiempo inicial de trabajo, empleando dicho equipo, será el de evaluarlo. Sin evaluación previa es imposible llevar a cabo un trabajo significativo, o al menos obtener todo el provecho posible. Inclusive con el equipo que se tiene a mano en un laboratorio, a menudo cuando surge un problema --

nuevo es necesario realizar evaluaciones particulares y los criterios y métodos expuestos en este capítulo, son los de norma o sea procesos standard.

Ahora se verá el problema particular de la determinación de los parámetros indicados al principio de este capítulo.

#### 5-10 DETERMINACION DEL TIEMPO DE RESPUESTA Y VERIFICACION PARA INSTRUMENTO DE PRIMER ORDEN.

El método más común consiste en emplear una entrada escalón y medir directamente el tiempo de respuesta, como el necesario para alcanzar el 63.2% del valor final de la respuesta. Este método se ve afectado por la imprecisión al determinar el 63.2% mencionado.

Otra forma empleada para determinar el valor de emplea los datos de una prueba con una función escalón tal y como se reseñó en el párrafo anterior, graficados en papel semilogarítmico, lo que permite obtener un valor más adecuado para la constante de tiempo, y comprobar si el instrumento es de orden uno. (1) (13)

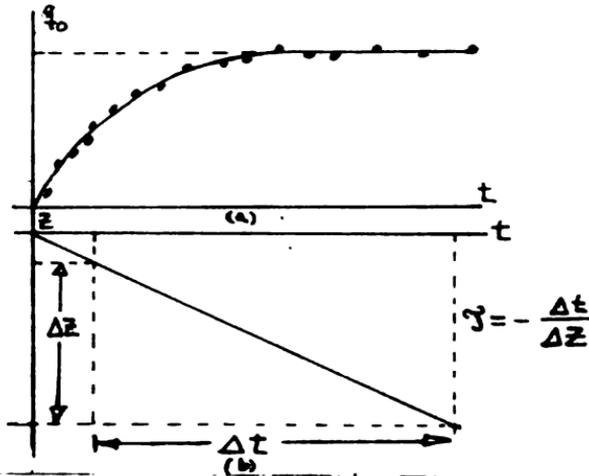
$$\text{De } e^{-t/\tau} = 1 - (q_0/K_A) \quad \text{----- (5-29)}$$

se define:

$$Z = \log_e [1 - (q_0/K_A)] \quad \text{----- (5-30)}$$

de donde:  $z = -\frac{t}{\tau}$  ;  $\frac{dz}{dt} = -\frac{1}{\tau}$  ----- (5-31)

Si se grafica  $Z$  contra  $t$ , se obtendrá una línea recta la que tendrá una pendiente igual a  $-1/\tau$ . Esta pendiente puede medirse directamente desde la gráfica tal y como se muestra en la figura 5-16b. En la figura 5-16a, se muestra una gráfica típica de un registro experimental directo de una prueba de respuesta ante una entrada escalón. El método es el más adecuado pues en lugar de confiar en una sola lectura, se tiene la mejor línea recta a través de todos los puntos de datos.



DETERMINACION DE  $\tau$  PARA PRIMER ORDEN

FIG. 5.16

Si los datos caen muy cercanos a la recta se puede asegurar que el sistema se ajusta a uno de primer orden.

Otro método consiste en someter al sistema a una entrada senoidal, barriendo el intervalo de frecuencias de interés, registrando tanto los valores de entrada y salida, como el ángulo de fase, graficando la razón de magnitudes, y el ángulo de fase contra el logaritmo de la frecuencia, (fig.5-17). Si el sistema es de primer orden la razón de magnitudes sigue asíntotas típicas de baja y alta frecuencia. (Pendiente 0 y 20 db-década) y el ángulo de fase se aproxima al valor de  $-90^\circ$  -- asintóticamente. (1) (22) Si dichas condiciones se cumplen, el valor de  $\gamma$ , se determina encontrando  $\omega$  en el punto de -- intersección, (fig. 5-17a), de las asíntotas, empleando la --- fórmula  $\gamma = (1/\sqrt{1+\omega^2})$ . Si las gráficas se desvían de las mostradas, el instrumento no será de primer orden. (1)

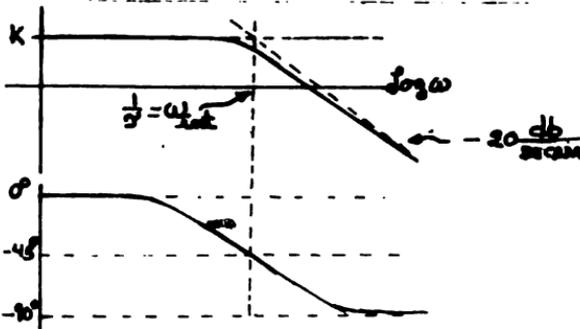


FIG. 5.17

### 5-11 VERIFICACION Y DETERMINACION DE PARAMETROS PARA SISTEMAS DE SEGUNDO ORDEN.

Para sistemas de segundo orden,  $K$  se obtiene a partir de la calibración estática, o bien mediante una prueba de respuesta a frecuencia, ya que esta última permite observar si es que existe una variación notable con  $(\omega)$ , mientras que la frecuencia natural no amortiguada  $\omega_n$  y el coeficiente de amortiguamiento  $\xi$  se obtienen a partir de pruebas de respuesta ante entrada escalón, y ante frecuencia.

En la figura (5.18) se muestra una respuesta típica, ante una entrada escalón para un instrumento de segundo orden - pobremente amortiguado. En esta figura se muestran explícitamente las cantidades que será necesario medir, a fin de determinar los coeficientes  $\omega_n$  y  $\xi$ . De la figura 5.18a, se miden  $A$  y  $a$  calculándose entonces el coeficiente de amortiguamiento con:

$$\xi = \frac{1}{\sqrt{\left[\frac{2\pi}{\log_e(A/a)}\right]^2 + 1}} \quad \text{-----} \quad 5-32$$

y la frecuencia natural no amortiguada con:

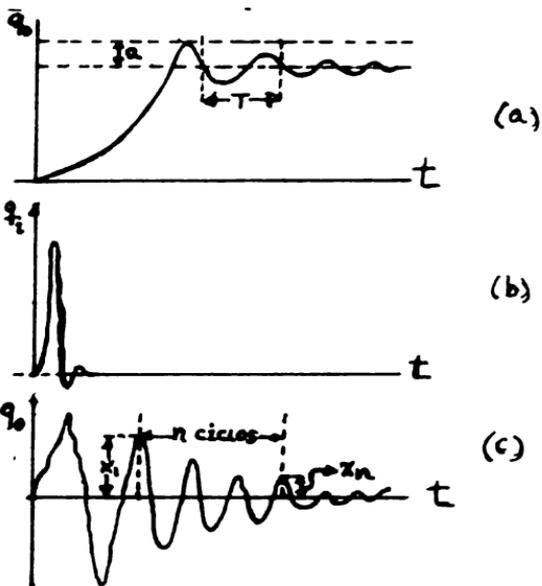
$$\omega_n = \frac{2\pi}{T\sqrt{1 - \xi^2}} \quad \text{-----} \quad 5-33$$

Si un sistema es ligeramente frenado, una entrada transitoria (fig. 5.18b), producirá una respuesta como la de la fig. 5.18c, de donde en  $n$  ciclos, se miden las cantidades  $X_1$  y  $X_n$  - ahí mostradas, con lo que el coeficiente de amortiguamiento - será:

$$\xi = \frac{\log_e(X_1/X_n)}{2n\pi} \quad \text{-----} \quad 5-34$$

en esta aproximación se está suponiendo  $\sqrt{1 - \xi^2} \approx 1.0$

lo que es válido si  $\xi < 0.1$ . Con este dato  $\omega_a$  puede encontrarse empleando nuevamente la ecuación 5-33. Al emplear la ecuación 5-32 es recomendable medir  $T$ , como el promedio de tantos ciclos como se pueda.



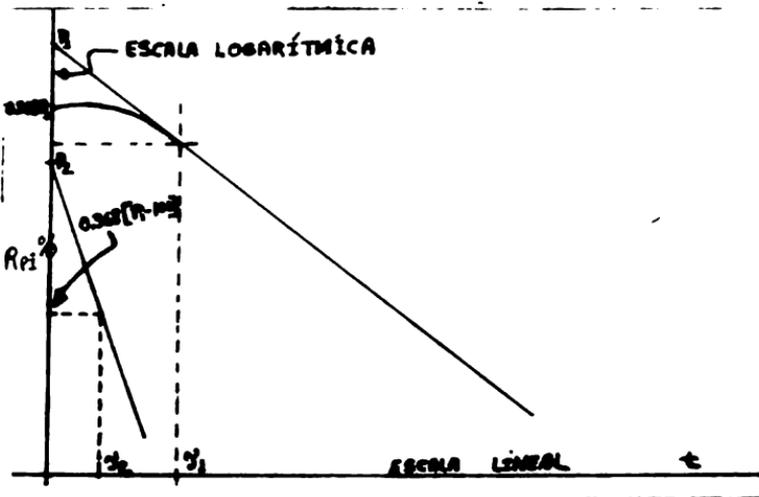
DETERMINACION DE  $\omega_n$  Y  $\xi$  SEGUNDO ORDEN

FIG. 5.18

tir de una curva de respuesta ante impulso, se procede como sigue:

1.- Se define el "porcentaje de respuesta incompleta" --  
como:

$$A_{pi} = \left[ 1 - \frac{q_0}{KA} \right] (100) \quad \text{-----} \quad 5-38$$



PRUEBA ESCALON PARA SISTEMA  
SOBREAMORTIGUADO 2ª ORDEN

FIG. 5.19

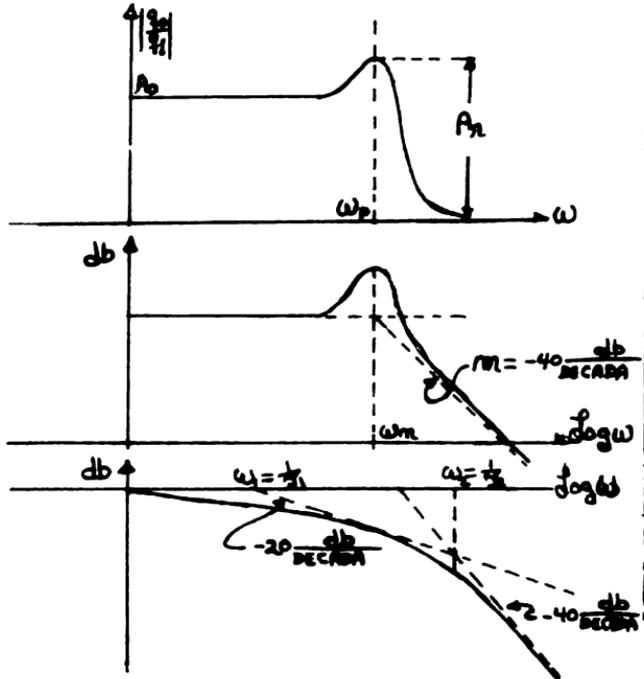
2.- Se gráfica  $R_{pi}$  en una escala logarítmica, contra  $t$  en una escala lineal. Esta curva se debe aproximar a una línea recta para  $t$ 's grandes, si el sistema es de segundo orden. Se extiende esta recta hasta  $t=0$  y se anota el valor  $P_1$  donde esta recta interseca a la escala  $R_{pi}$ ,  $\mathcal{T}_1$  es el tiempo en el cual la asíntota de la recta vale  $0.368P_1$ .

3.- Se traza una nueva curva sobre la misma gráfica, que será la diferencia entre la asíntota de la recta y  $R_{pi}$ . -- Si esta nueva curva no es una línea recta, el tiempo en el cual la recta tiene un valor  $0.368 (P_1-100)$  es numéricamente igual a  $\mathcal{T}_2$ . En la figura 5-19 se ilustra este procedimiento. Una vez determinados  $\mathcal{T}_1$  y  $\mathcal{T}_2$ ,  $\xi$  y  $\omega_n$  se podrán determinar empleando las ecuaciones 5-36 y 5-37.

#### 5.11b. DETERMINACION DE PARAMETROS PARA SISTEMAS DE SEGUNDO -- ORDEN EMPLEANDO METODO DE RESPUESTA A LA FRECUENCIA.

Se incluye este caso porque la respuesta a frecuencia es un proceso sumamente útil y común.

Usualmente se corre tal y como se indicó en 5.8 a -- una prueba de respuesta a la frecuencia, sobre un intervalo de frecuencias lo más amplio posible. Curvas típicas de este proceso son las que se muestran en las figuras 5-20a y 5-20b.



DETERMINACION DE PARAMETROS POR PRUEBA  
A FRECUENCIA 2<sup>a</sup> ORDEN

FIG. 5.20

La diferencia entre ambas figuras está únicamente en las escalas empleadas para graficar aunque podrían haber sido -- obtenidas con el mismo conjunto de datos.

Midiendo  $A_0$  y  $A_r$  de la figura 5.21a el coeficiente de -- amortiguamiento se obtiene mediante:

$$\left(\frac{A_{pc}}{A_0}\right) = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}} \quad \text{-----} \quad 5-39$$

y una vez obtenida  $\zeta$ , la frecuencia natural se determina midiendo  $\omega_p$  de la figura, (a) y empleando:

$$\omega_p = \omega_n \sqrt{1-2\zeta^2} \quad \text{-----} \quad (5-40)$$

este proceso es bueno para el caso ligeramente amortiguado.

Para el caso sobreamortiguado y también el ligeramente -- amortiguado,  $\omega_n$  y  $\zeta$  se determinan gráficamente, de una figura como la 5-19b, en forma directa contra la lectura de la escala, y con las ecuaciones 5-40, 5-36 y 5-37.

## C A P I T U L O V I

### APLICACIONES

A continuación, se mostrará la aplicación de diversos aspectos de la teoría, en algunos casos concretos. El interés se centrará en instrumentos de orden cero, uno y dos.

#### 6.1 ANALISIS DE UN INSTRUMENTO DE ORDEN CERO: EL POTENCIOMETRO.

Un divisor variable de voltaje o corriente, es un --- transductor que tiene un gran número de aplicaciones, entre las que destaca la conversión de señales de movimiento, en señales eléctricas (4). Es en este sentido en el que se plantea al potenciómetro como instrumento.

##### 6.1.a. FENOMENOLOGIA BASICA.

Puede verificarse experimentalmente, que la densidad de corriente  $J$ , se relaciona con un campo eléctrico externo sobre un conductor, mediante la ecuación siguiente:

$$\underline{J} = \sigma \underline{E} \text{ ----- (6-1)}$$

Donde  $\sigma$  es una función del campo, llamada conductividad. Se define la resistividad  $\eta$ , como el inverso de la conductividad

$$\eta = \frac{1}{\sigma} \text{ ----- (6-2)}$$

Si se considera un alambre con sección transversal --- uniforme, de un material cuyo comportamiento puede describirse mediante la ecuación 6-1, entre cuyos extremos se establece una diferencia de potencial  $\Delta U$ , el campo eléctrico que existirá en

el alambre, se relacionará con  $\Delta U$ , mediante la ecuación:

$$\Delta U = \int \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad \text{-----} \quad (6-3)$$

Si el material es homogéneo, y con conductividad uniforme, el campo eléctrico es puramente longitudinal, y es el mismo en todos los puntos, por lo que la ecuación 6-3 quedará como sigue:

$$\Delta U = EL \quad \text{-----} \quad (6-4)$$

La corriente será en este caso:

$$I = \int_A \vec{J} \cdot \vec{n} dA = JA \quad \text{-----} \quad (6-5)$$

Y combinando las ecuaciones (6-4), (6-5), (6-1) y (6-2), obtenemos:

$$\Delta U = \frac{L}{\sigma A} I = \frac{\eta L}{A} I \quad \text{-----} \quad (6-6)$$

Y en esta ecuación se define a la resistencia como:

$$R = \frac{\eta L}{A} \quad \text{-----} \quad (6-7)$$

Las ecuaciones anteriores, proporcionan el fundamento físico, para la construcción de potenciómetros .

#### 6.1.b. CIRCUITO EQUIVALENTE Y FUNCION DE TRANSFERENCIA.

El circuito equivalente, para un potenciómetro empleado como transductor, es el que se muestra en la figura 6.1.b. - En la fig. 6.1.a se muestra el circuito real, donde  $L_0$  es la longitud total del alambre, y  $L$  es el desplazamiento del cursor, a partir de un extremo del alambre.

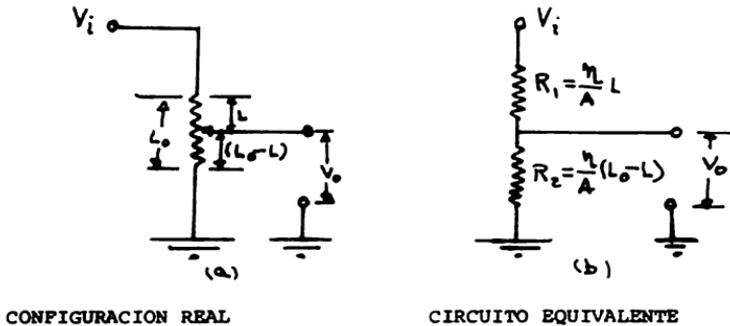


FIG. 6.1

Del circuito equivalente, se obtiene, para la salida:

$$V_o = \frac{R_2}{R_1 + R_2} V_i \quad \text{-----} \quad (6-8)$$

Y sustituyendo  $R_1 = (\eta/A)L$  y  $R_2 = (\eta/A)(L_0 - L)$

$$V_o = \left(\frac{L}{L_0}\right) V_i \quad \text{-----} \quad (6-9)$$

Si se compara la ecuación 6-9 con la ecuación (4-7), - se ve de inmediato considerarse al potenciómetro como instrumento de orden cero con  $(L/L_0)$  como, la sensibilidad estática  $K$ , y la función de transferencia operacional es:

$$\frac{V_o}{V_i} = \frac{L}{L_0} \quad \text{-----} \quad (6-10)$$

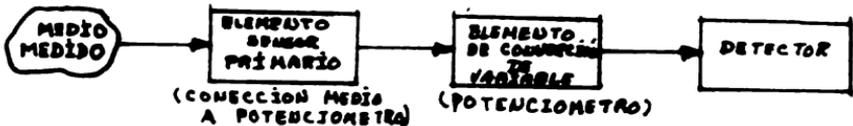
No aparecen términos complejos, ni derivadas. No habrá en principio defasamiento, y la salida será una reproducción fiel, de la forma de la señal de entrada.

#### 6.2.b. CARACTERISTICAS ESTATICAS

Para alguna aplicación específica, la sensibilidad estática, puede definirse mediante calibración.

El umbral se debe definir tomando en consideración, -

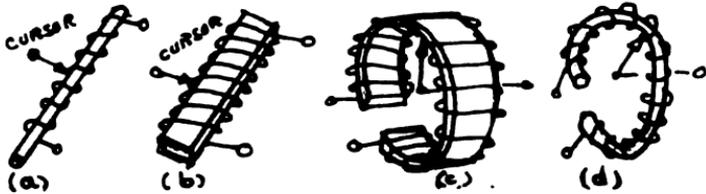
que el potenciómetro es un elemento pasivo, por lo que dependerá también del detector empleado, además de la construcción en si del dispositivo. La figura 6.2 muestra una configuración típica para el empleo de este transductor.



CONFIGURACION TIPICA PARA TRANSDUCTOR  
DE POTENCIOMETRO  
FIG. 6.2

También la zona muerta y la resolución, deben considerarse en forma idéntica al umbral, pues la salida del dispositivo, debe ir a algún otro instrumento, para formar el sistema. (4)

Para definir umbral, zona muerta y resolución, considerando al potenciómetro en si, debe tomarse en cuenta, la construcción del mismo. El obtener valores cambiantes de resistencia, dependiendo directamente de la variación del desplazamiento longitudinal de un cursor, a lo largo de un cable, no sería ni práctico ni suficiente para todas las aplicaciones seguidas por lo que se emplean potenciómetros de alambre enrollado (figura 6.3).



POTENCIOMETROS TÍPICOS

FIG. 6.3

De aquí puede verse que la variación en resistencia, no va a ser continua, sino da forma más complicada, pues el cursor no resbala sobre una superficie lisa, sino sobre el enrollado de cable. En la figura 6.4 a. se muestra un arreglo típico de cursor deslizándose sobre el devanado. Por ello la salida - procederá en pasos pequeños, tal y como se muestra en la figura 6.4 b.

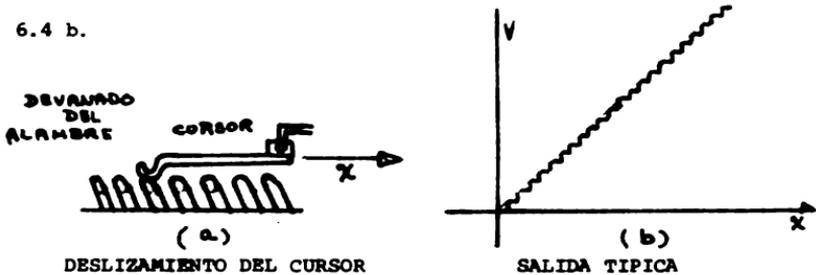


FIG. 6.4

Considerando que la originada en el potenciómetro, es <sup>(1)</sup> la resolución "original", el mejor valor para ella será:

$$\frac{\text{Distancia recorrida por el cursor}}{\text{Número de vueltas de alambre en dicha distancia.}} \text{----- (6-11)}$$

para dispositivos, como los de las figuras 6.3 a y --

6.3 b.

Arco barrido por el cursor - - - - - (6-12)  
 Número de vueltas del alambre en  
 dicho arco

para dispositivos como los de las figuras 6.3 c y 6.3 d

Existen potenciómetros que se desplazan tanto angularmente, como longitudinalmente, para los que puede definirse una resolución en forma análoga a las ecuaciones 6-11 y 6-12.

Para la derivada , debe hacerse también la consideración sobre el detector, si es necesario. En cuanto al potenciómetro, la conductividad, varía en general conforme a la temperatura, lo que puede ocasionar, alteraciones en los valores de -- corriente y voltaje del divisor, en comparación a los valores - a temperatura de calibración.

6.2.b.1. RUIDO.

Puede señalarse como fuente de ruido, además del efecto térmico en la resistencia, las fluctuaciones de voltaje que ocurren al moverse el cursor sobre el devanado del alambre.

A alta velocidad, si la frecuencia de saltos del cursor sobre el devanado se acerca a su frecuencia natural, aparecerán oscilaciones bastante pronunciadas, lo que agrava la intermitencia de los contactos eléctricos entre cursor y devanado. - La suciedad y el desgaste entre cursor y alambre, ocasiona varia ciones en la resistencia de contacto, lo que da origen a fluc--

(8)

tuaciones de voltaje.

## 6.2.c. CARACTERISTICAS DINAMICAS

Estas son esencialmente las señaladas como típicas del instrumento de orden cero, pues en principio a bajas frecuencias, la impedancia es puramente resistiva.

Sin embargo va a existir carga mecánica sobre el movimiento, a causa de la inercia y fricción del potenciómetro. La fricción es proporcionada usualmente por el fabricante. Como la variable medida en el cursor es desplazamiento, (variable de flujo) la cantidad pertinente para medir la carga, es la admitancia de entrada generalizada o "complacencia".

$$C_g = \frac{\text{variable de flujo}}{\int \text{variable de esfuerzos} dt} = \frac{\text{desplazamiento}}{\text{fuerza}}$$

Para una masa pura:

$$C_{g1}(D) = \frac{x}{f} \text{ con } f = M\ddot{x} \quad MD^2x$$

$$C_{g1}(D) = \frac{1}{MD^2} \text{ ----- (6-13)}$$

o, en términos de respuesta a frecuencia:

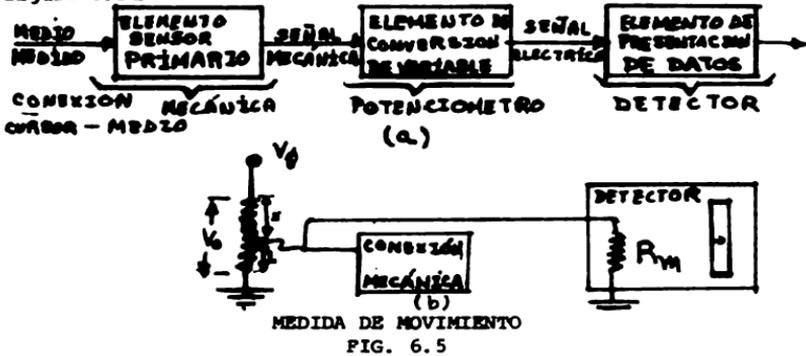
$$C_{g1}(\omega) = \frac{1}{(i\omega)^2 M} \text{ ----- (6-14)}$$

Para efectos despreciables de carga del sistema medido, si  $C_{g0}$  es su "complacencia" de salida,  $(C_{g0}/C_{g1}) < 1.0$ , entonces como  $C_{g1}(i\omega)$  se aproxima a infinito a bajas frecuencias, los efectos que implica la ecuación (6-14) no aparecerán.

Sin embargo la ecuación 6-14, predice la aparición de defasamientos, típicos de la existencia de características no específicas del instrumento de orden cero, en algunos casos.

## 6.2.d. MEDIDA DE MOVIMIENTO.

Para concluir la discusión acerca de este instrumento, se presentará el análisis de una aplicación típica, la medida de movimiento. El diagrama generalizado, para esta aplicación, se muestra en la figura 6.5 a y el esquema experimental en la figura 6.5 b

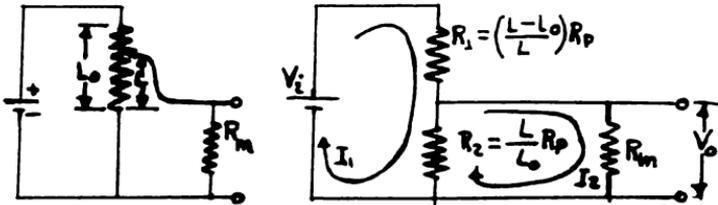


El objeto cuyo, movimiento se va a estudiar, se conecta mecánicamente al cursor del potenciómetro, de manera que no se excedan los límites de desplazamiento permitidos por dicho elemento. (4)

En el momento que se conecta el medidor en forma directa, la situación difiere del modelo ideal, ya que en paralelo con el divisor de voltaje, aparece la resistencia de entrada al detector  $R_m$ , lo que se muestra en la figura 6.6 a. Empleando el circuito equivalente al sistema, fig. 6.6 b, se obtiene el sistema de ecuaciones:

$$V_i = I_1 R_1 + (I_1 - I_2) R_2$$

$$0 = R_m I_2 + (I_2 - I_1) R_2 \quad (6-15)$$



ACOPLAMIENTO POTENCIÓMETRO-MEDIDOR  
FIG. 6.6

Como la salida del potenciómetro es  $V_o = I_2 R_m$ , e interesa la relación  $(V_o/v_i)$ , solucionando 6-15 se obtiene  $I_2$ , y sustituyendo  $R_1 = \left(\frac{L_0 - L}{L_0}\right) R_p$  y  $R_2 = \left(\frac{L}{L_0}\right) R_p$ , se obtiene:

$$\frac{V_o}{V_i} = \frac{1}{\left(\frac{L_0 - L}{L}\right) + \left(1 - \frac{L}{L_0}\right) \left(\frac{R_p}{R_m}\right)} \quad (6-16)$$

En circuito abierto  $R_m \rightarrow \infty$  y 6-16 se reduce el caso ideal, ec. (6-9). La relación  $(R_p/R_m)$ , determina el acercamiento del sistema real, al modelo de orden cero. La figura (6.7) --- muestra en detalle, la desviación de la respuesta real, con respecto a la ideal.

De la ecuación 6-16 se tiene que un buen acoplamiento entre potenciómetro y detector, exige que  $R_p \ll R_m$ .

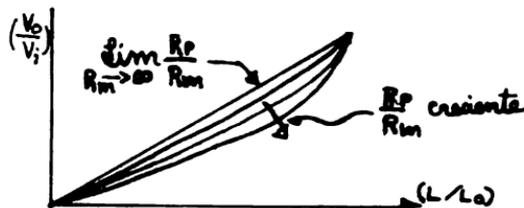
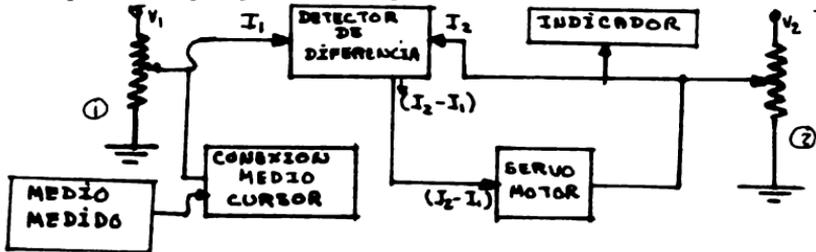


FIG. 6.7

Una forma de evitar los efectos del acoplamiento directo entre potenciómetro, y el detector, se obtiene empleando (4) acoplamiento por puente . (fig. 6-8).



ACOPLAMIENTO POR PUENTE  
FIG. 6-8

Aquí se emplean dos potenciómetros, uno el transductor, y otro que tiene el papel de proporcionar corriente  $I_2$ , a fin de comparar con la que sale del transductor  $I_1$ . Ambas corrientes se llevan hacia un detector de diferencias, si las corrientes son iguales, no habrá salida del detector, pero si existe diferencia, esta excita a un servomotor que mueve el cursor del segundo potenciómetro, hasta que  $I_2$ , iguala nuevamente a  $I_1$ .

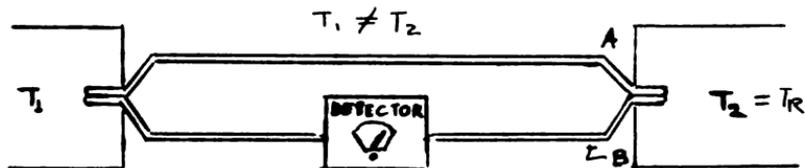
De esta forma conforme el transductor vaya proporcionando señal, el sistema la equilibra de manera que la corriente neta que en un momento dado proporciona el transductor es cero, lo que equivale a tener un acoplamiento con  $R_m$  infinita. La medida se toma directamente del segundo potenciómetro, mediante un Indicador.

## 6.2. ANALISIS DE UN INSTRUMENTO DE PRIMER ORDEN: EL TERMOPAR.

Este es un instrumento de empleo sumamente extendido, y sus aplicaciones están extensamente reseñadas en manuales de (1), (4), (8), (9) instrumentación. La fenomenología, básica, que en este caso es más compleja que aquella que correspondió al potenciómetro, por lo que se orientará la discusión con más énfasis sobre este punto.

## 6.2.a. FENOMENOLOGIA BASICA.

Experimentalmente, cuando dos alambres de materiales diferentes A y B, se conectan, y las uniones se mantienen a diferentes temperaturas, se manifestará, entre otros fenómenos, - (25) la existencia de una diferencia de potencial, en el circuito (fig. 6.9). Al conjunto de fenómenos, se les denomina efectos termoeléctricos, y tienen que ver con flujo de Energía y Electricidad, así como con gradientes de temperatura, e intensidad de campo eléctrico como causas. (28), (38)



CIRCUITO PARA EFECTO TERMOELECTRICO  
FIG. 6.9

## 1.-) EFECTO SEEBECK.

Es la aparición de la F.E.M en el circuito mostrado -

en la fig. 6.9 . Esto se debe a que la densidad de portadores - de carga disponibles para conducción, difiere entre distintos ma teriales, y es función de la temperatura, por lo que al unir dos conductores, en las condiciones descritas, la difusión de portadores, tiene lugar a razones diferentes, generándose una diferen-- cia de potencial.

Una de las temperaturas, se mantiene fija y se llama temperatura de referencia  $T_r$ . La F.E.M. va a ser función de  $T$ , si  $T_r$  cambia la relación entre la F.E.M. y  $T$  es la misma, con -- excepción de una constante aditiva, por lo que  $d(\text{F.E.M.})/dT$  es in dependiente de  $T_r$ , y depende únicamente de la naturaleza de los conductores y la temperatura. La derivada  $d(\text{F.E.M.})/dT \Big|_{T=T_r}$  se conoce como poder termoeléctrico del termopar.

## 2.-) EFECTO JOULE

Si la F.E.M. no se balancea, se establecerá una corriente  $I$ , y habrá una cantidad de energía  $I^2R$  dispersada en el cir-- cuito, a lo que se llama efecto Joule.

## 3.-) EFECTO FOURIER.

Si el circuito de la figura 6.9 se rompe en un punto - intermedio, sin afectar a las juntas, y los puntos de ruptura, - se mantienen separados, a una temperatura intermedia  $T$  entre las de las uniones, no habrá corriente eléctrica, pero si existirá - un flujo de calor entre las fuentes donde están colocadas las --

uniones, sin ganancia neta o pérdida de calor en las puntas de la ruptura. A esto se le llama efecto Fourier.

#### 4.-) EFECTO PELTIER.

Si las uniones de un termopar, se mantienen a la misma temperatura, y mediante una batería se produce una corriente en el circuito, las temperaturas de las uniones cambiarán por una cantidad, que no se debe por completo a efecto Joule. Este cambio adicional de temperatura es el efecto Peltier. Si se extrae el calentamiento por efecto Joule, el calor que debe proporcionarse o extraerse para restaurar la temperatura inicial de la unión, es el calor de Peltier.

#### 5.-) EFECTO THOMSON.

Si los alambres de un termopar conducen calor, sin existencia de corriente, puede establecerse una distribución uniforme de temperatura en cada cable. Cuando se establece -- una corriente, la distribución de temperatura mencionada se altera por una cantidad que no se debe por completo, al efecto Joule. Este cambio adicional de temperatura se llama efecto Thomson. Extrayendo el efecto Joule, el calor necesario para restaurar la distribución de temperatura inicial, se llama calor de Thomson.

El análisis de estos fenómenos, ha demostrado que -- los efectos Seebeck, Peltier y Thomson están ligados con efecto

(28)  
 tos irreversibles. En el apéndice 1, se detalla un proceso -  
 que permite justificar la existencia de estos fenómenos, a par-  
 tir de suposiciones fundamentales acerca de la termodinámica del  
 fenómeno.

#### 6.2.b. RELACIONES CUANTITATIVAS PARA LOS EFECTOS TERMOELECTRI- COS.

En condiciones de operación, van a existir a través de  
 los cables, tanto una diferencia de potencial  $\Delta\mathcal{E}$ , como una de -  
 temperatura  $\Delta T$ , y asociada a ambas una corriente de entropía ,  
 que se puede pensar compuesta de la corriente que va de la tempe-  
 ratura más alta a la más baja existentes en las uniones (fig. --  
 6.9), más una corriente que se origina en los cables, lo que se  
 justifica si se reflexiona un poco en los efectos Peltier y Thom-  
 son. Entonces en los cables se producirá entropía a razón de: (28) (38)

$$\frac{d\mathcal{E}}{dT} = I_s \frac{\Delta T}{T} + I \frac{\Delta\mathcal{E}}{T} \quad \text{----- (6-17)}$$

donde  $I_s = (Iq/T)$  o sea la corriente de entropía debi-  
 da a una "corriente",  $Iq$  de calor en el alambre. El segundo tér-  
 mino a la izquierda da cuenta de la corriente de entropía, debi-  
 da a la corriente eléctrica.

Si las condiciones no se apartan mucho de las de ---  
 equilibrio, los flujos de entropía y electricidad se acoplan en  
 forma sencilla de la forma siguiente. (28) (38)

$$\begin{aligned} I_s &= L_{11} \frac{\Delta T}{T} + L_{12} \frac{\Delta\mathcal{E}}{T} \\ I &= L_{21} \frac{\Delta T}{T} + L_{22} \frac{\Delta\mathcal{E}}{T} \end{aligned} \quad \text{----- (6-18)}$$

(28)

Onsager pudo demostrar que  $L_{12} = L_{21}$  y con esto, y de las ecuaciones 6-18, se obtiene las siguientes expresiones:

$$\text{para } \Delta T = 0 : \quad \left(\frac{I_s}{I}\right)_{\Delta T=0} = \frac{L_{12}}{L_{22}} \quad \text{-----} \quad (6-19)$$

$$\text{para } I = 0 \quad -\left(\frac{\Delta \mathcal{E}}{\Delta T}\right)_{I=0} = \frac{L_{21}}{L_{22}} \quad \text{-----} \quad (6-20)$$

$$\text{y de la relación de Onsager} \quad \epsilon = \frac{L_{12}}{L_{22}} = \frac{L_{21}}{L_{22}} \quad \text{-----} \quad (6-21)$$

$$\text{por lo que:} \quad \epsilon = \begin{cases} \left(\frac{I_s}{I}\right)_{\Delta T=0} = \left(\frac{I_0/I}{I}\right)_{\Delta T=0} \\ -\left(\frac{\Delta \mathcal{E}}{\Delta T}\right)_{I=0} = -\left(\frac{d\mathcal{E}}{dT}\right)_{I=0} \end{cases} \quad \text{-----} \quad (6-22)$$

Por lo que el coeficiente  $\epsilon$ , puede considerarse como la corriente de entropía por unidad de corriente eléctrica, o como el cambio de diferencia de potencial por cambio unitario de temperatura. A  $\epsilon$  se le llama coeficiente Seebeck.

Ahora considérese el circuito de la figura 6.10.

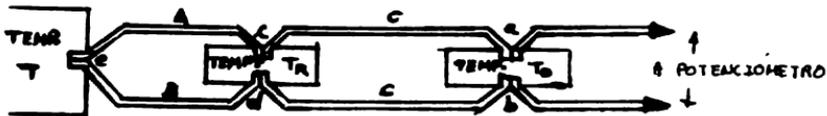


FIG. 6.10

La unión de prueba,  $\ominus$ , se mantiene a temperatura  $T$ , y las uniones  $c$  y  $d$  ambas de cobre, se mantienen a la temperatura  $T_r$  de referencia. Los dos alambres de cobre señalados con la letra  $c$ , están conectados a las terminales de un potenciómetro. Esta conexión corresponde, a un arreglo experimental típico

(25)

co como el mostrado en la figura 6.11

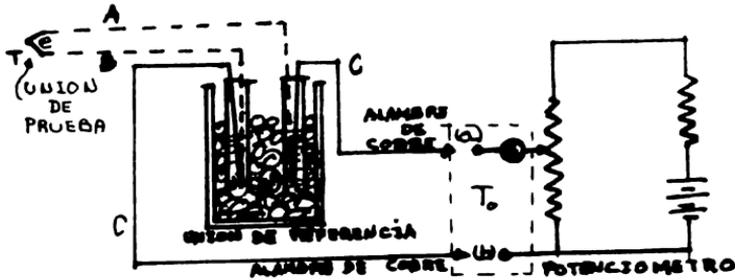


FIG. 6.11

El potenciómetro se mueve hasta que se equilibra la corriente generada por el termopar, es decir  $I=0$  y puede medirse desde las terminales (a) y (b),  $\mathcal{E}_{ab}$  = FEM de Seebeck, con la segunda de las ecuaciones 6-22, se tendrá:

$$\left(\frac{d\mathcal{E}}{dT}\right)_{I=0} = -\mathcal{E} \quad \text{-----} \quad (6-23)$$

Que puede aplicarse a cada uno de los conductores A, B y C ( $\mathcal{E}_A$ ,  $\mathcal{E}_B$ ,  $\mathcal{E}_C$  serán los coeficientes correspondientes), e integrando entre los extremos de los alambres se obtiene :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_A - \mathcal{E}_C &= \int_{T_0}^{T_R} \mathcal{E}_C dT \\ \mathcal{E}_C - \mathcal{E}_B &= \int_{T_R}^T \mathcal{E}_A dT \\ \mathcal{E}_B - \mathcal{E}_D &= \int_T^{T_R} \mathcal{E}_B dT \\ \mathcal{E}_D - \mathcal{E}_B &= \int_{T_R}^{T_0} \mathcal{E}_C dT \end{aligned}$$

y al sumar las ecuaciones:

$$FEM_{AB} = \mathcal{E}_{AB} = \int_{T_R}^T (\mathcal{E}_A - \mathcal{E}_B) dT \quad \text{-----} \quad (6-24)$$

si se conocen  $\mathcal{E}_A$  y  $\mathcal{E}_B$  como funciones de T, puede calcularse la F.E.M. del termopar formado por la unión de los --

metales A y B con las uniones a temperaturas T y Tr. En forma similar, pueden encontrarse las relaciones siguientes:

Para el efecto Peltier:

$$\pi_{AB} = T(\epsilon_A - \epsilon_B) \quad \text{-----} \quad (6-25)$$

Donde  $\pi$  es el coeficiente Peltier, el que permite -- calcular la razón a la cual se transfiere el calor de Peltier, o sea  $\pi I$ .

Para el efecto Thomson:

$$\sigma_A - \sigma_B = -T \frac{d}{dT} (\epsilon_A - \epsilon_B) \quad \text{-----} \quad (6-26)$$

Donde los coeficientes  $\sigma$ , permiten calcular el calor de Thomson en cada alambre A y B, mediante la ecuación --  $\int \sigma \Delta T$ . Si se diferencia 6-24 con respecto a T, con Tr constante, y comparando el resultado con la ecuación 6-25, puede verse que:

$$\frac{\pi_{AB}}{T} = \frac{d(FEM)_{AB}}{dT} \quad \text{-----} \quad (6-27)$$

Relación conocida como la primera ec. de Kelvin y sustituyendo  $d(FEM_{AB})/dT$  por  $\epsilon_A - \epsilon_B$  en 6-26.

$$\frac{\sigma_A - \sigma_B}{T} = - \frac{d^2 \epsilon_{AB}}{dT^2} \quad \text{-----} \quad (6-28)$$

Relación conocida como segunda ec. de Kelvin.

### 6.2.c. PROPIEDADES DEL TERMOPAR.

En las aplicaciones más comunes del termopar, la ecuación usualmente empleada para el cálculo de la F.E.M. es la siguiente:

$$E = C(T_1 - T_2) \quad \text{-----} \quad (6-29)$$

versión simplificada de la ecuación, 6-24, sin embargo, de la ecuación 6-28, es posible darse cuenta que la F.E.M.

total estará constituida por la suma de la producida por los -- efectos Peltier y Thomson, por lo que una ecuación más aproximada será:

$$E = C_1 (T_1 - T_2) + C_2 (T_1^2 - T_2^2) \text{ ---- (6-30)}$$

Donde los valores de E son del orden de  $\mu V$ .

Ambas ecuaciones 6-29 y 6-30, son aproximaciones a partir de las ecuaciones 6-24 y 6-28, por lo que en la práctica, no pueden emplearse para predecir en forma precisa temperaturas, por lo que lo usual es calibrar un termopar dado sobre el (39) interválo de temperaturas, en el que se usará. Usualmente la contribución del efecto Thomson en la ec. 6-30 es mucho más para consideraciones teóricas de aplicación, la ecuación 6-29 es la - que se emplea con más frecuencia. Dado lo anterior puede carac- (1) terizarse al dispositivo, con la ec. 6-29, o bien mediante:

$$\frac{dE_{AB}}{dT} = E_A - E_B \text{ ----- (6-31)}$$

Que lo clasifica como instrumento de orden uno. Anali (28) (1) zando en detalle la fenomenología. pueden señalarse a las pro- (28) (39) piedades siguientes como "leyes" del termopar:

1.-) La P.E.M. térmica de un termopar con uniones a -- temperaturas  $T_1$  y  $T_2$ , no es afectada por la temperatura en cual- quier otra parte del circuito.

2.-) Si un tercer metal homogéneo C se intercala en el circuito ya sea sobre el cable A o el B, en tanto las nuevas --- uniones (AC, CA o BC, CB) estén a la misma temperatura, la P.E.M.

total del circuito no se altera, sin importar la temperatura de C fuera de las uniones.

3.-) Si un metal C, se intercala entre A y B en una de las uniones, la temperatura de C fuera de la existente en las -- uniones AC y BC no importa. En tanto las uniones AC y BC estén ambas a la misma temperatura  $T_1$ , la F.E.M. es la misma que habría si C no estuviese ahí.

4.-) Si la F.E.M. de los metales A y C es  $E_{AC}$  y la de los metales B y C es  $E_{CB}$ , la F.E.M. térmica de los metales A y B en  $E_{AC} + E_{CB}$ .

5.-) Si un termopar produce una F.E.M.,  $E_1$ , cuando sus uniones están a temperaturas  $T_1$  y  $T_2$ , y una F.E.M.  $E_2$ , si las -- uniones están a  $T_2$  y  $T_3$ , entonces cuando las uniones están a  $T_1$  y  $T_3$ , producirá una F.E.M.  $E_1 + E_2$ .

#### 6.2.d. CARACTERISTICAS ESTATICAS.

No es posible generalizar con amplitud datos acerca de los termopares, pues existe una gran variedad de dispositivos en el mercado, por lo que se especificarán algunas características típicas, de las uniones más comunes.

Las juntas más usuales son: Platino/Rhodium; Chromel/Alumel; Cobre/vonstantan; Acero/Constantan; y Platino-Rhodio/Platino. Como ya se vió, el efecto no es estrictamente lineal, por lo que la sensibilidad variará con la temperatura. En la litera

(1)(39)(4)  
 tura se señala la sensibilidad máxima de  $60 \mu\text{V}/^\circ\text{C}$  para cobre/  
 constantan a  $350^\circ\text{C}$ , y a la unión Platino/Platino-Rhodium como -  
 la menos sensible con  $6 \mu\text{V}/^\circ\text{C}$  entre  $0^\circ\text{C}$  t  $100^\circ\text{C}$ .

La exactitud puede establecerse en dos formas: Si se requiere un trabajo fino y de mucha precisión, es indispensable calibrar. En otras aplicaciones, que no exijan mucha finura, - puede confiarse en las tablas de los fabricantes. El alambre - de termopar de norma, no está calibrado individualmente, por lo que al tomar datos de las tablas se está confiando en el control de calidad de la fábrica. La literatura señala a la junta Platino/Platino-Rhodium como la más exacta, con un error del orden de  $\pm 0.25 \%$  de la lectura. Para cobre/constantan se señala un error de  $\pm 0.5 \%$  o  $\pm 0.833^\circ\text{C}$  ( $\pm 1.5^\circ\text{F}$ ) (el más grande de ambos), entre  $-59.44^\circ\text{C}$  y  $93.333^\circ\text{C}$  ( $-75^\circ\text{F}$  y  $200^\circ\text{F}$ ), y  $\pm 0.75 \%$  entre ---  $93.333^\circ\text{C}$  y  $371.11^\circ\text{C}$  ( $200^\circ\text{F}$  y  $700^\circ\text{F}$ ). Para las demás juntas, se pueden determinar cifras similares.

Otras características particulares que pueden señalar se son las siguientes: Para la junta Platino/Platino-Rhodium, el interválo de empleo está entre  $0^\circ\text{C}$  y  $1500^\circ\text{C}$ . Tiene gran estabi- lidad química a altas temperaturas con atmósferas oxidantes. -- Para caliomel/Alumel entre  $700^\circ\text{C}$  y  $1200^\circ\text{C}$  la relación tempera- tura voltaje es bastante lineal. La unión cobre/constantan, -- puede usarse desde  $-200^\circ\text{C}$ . y su límite superior es de  $350^\circ\text{C}$ . -- La unión acero/constantan es la más empleada en la industria, y

(39) (1) (4)

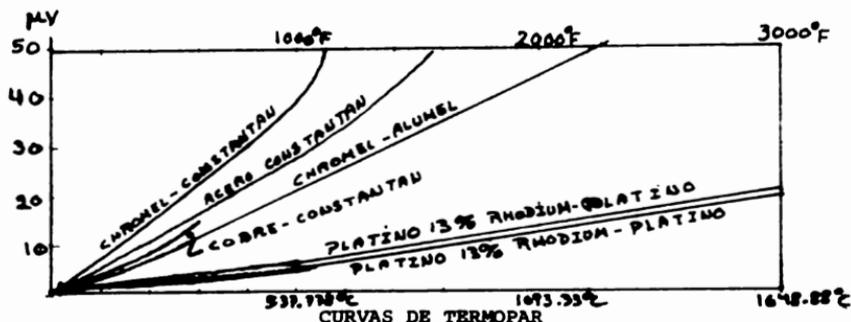
cubre un intervalo desde  $-150^{\circ}\text{C}$  hasta  $1000^{\circ}\text{C}$ ,

FIG. 6-12

En la figura 6-12 se muestran algunas curvas típicas para termopares comunes. Puede apreciarse que la relación voltaje temperatura no es exactamente lineal, pero que es posible considerarla así, en intervalos específicos de temperatura.

La temperatura fija  $T_r$  puede implementarse mediante algún sistema que mantenga estable su temperatura o sea fácil de controlar dentro de límites conocidos, como es el agua en punto triple, o un Horno.

De la figura 6-12, puede apreciarse también, que la salida obtenida es de nivel muy bajo, pues por ejemplo la junta Platino 13 % Rhodium/Platino, cambia apenas 20 Mv entre  $0^{\circ}\text{C}$  y  $1648.88^{\circ}\text{C}$ . Debido a esto se requiere emplear un amplificador sumamente sensible, cuidando que el ruido mismo del detector no "apantalle" la señal. Otra alternativa, cuando el sistema medido lo permite, es emplear una conexión en serie como

la mostrada en la figura 6.13.

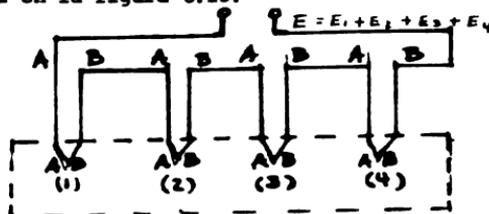


FIG. 6.13

Por la 5a. ley, la salida total será la suma de -- individuales, siempre y cuando la temperatura de referencia sea la misma, para todas las juntas de la serie. Debe tenerse cuidado con esta conexión, ya que si la temperatura del sistema no está -- uniformemente distribuida, puede haber fluctuaciones. Esta conexión se emplea para medir temperaturas promedio. También pueden -- conectarse los termopares en paralelo, y la salida sigue sien--  
(39)  
do la suma de las individuales.

#### 6.2.e. CARACTERISTICAS DINAMICAS.

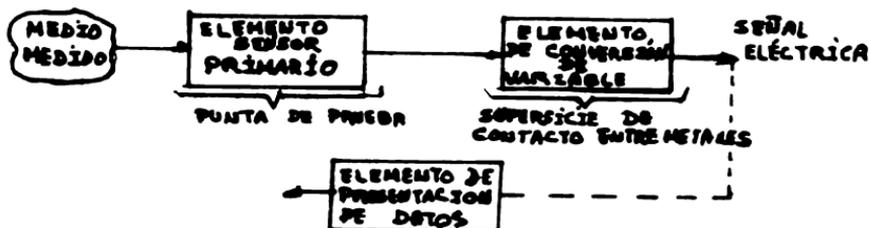
Del análisis en el capítulo IV, se vió que la caracte--  
rística dinámica asociada al instrumento de primer orden, es el tiempo de respuesta  $\tau$ . En este caso se tiene un fenómeno electrónico cuyo tiempo de respuesta es sumamente pequeño, y un fenómeno térmico, la conducción de calor, al que se asocian tiempos mucho más grandes que los asociados a fenómenos pura--  
mente electrónicos. La conductividad térmica, domina al fenó--

meno en lo que corresponde a tiempo de respuesta. En los manuales de aplicación es difícil encontrar consideraciones acerca del tiempo, pues se da por garantizado que la respuesta puramente electrónica del dispositivo, es mucho menos significativa que la asociada a conductividad térmica.

Sin embargo, puede ser necesario medir cambios rápidos como por ejemplo temperaturas internas o de superficie en sólidos. Para esto, se necesita que la unión sea de tamaño mínimo, con propiedades térmicas idénticas o similares a las del sistema bajo observación. Una técnica para obtener uniones pequeñas, es lijar la punta de la unión, de manera que un metal se mezcle dispersándose sobre el otro. Esto formará muchas termouniones microscópicas con constantes de tiempo, tan pequeñas como  $10^{-5}$  seg., y pueden formarse materiales útiles hasta temperaturas de 2760°C (5000°F).

#### 6.2.d CONFIGURACION FUNCIONAL

El empleo más común del termopar, según los manuales de aplicación, es el de elemento sensor, y elemento de conversión de variable para medidas de temperatura y flujo de calor. El diagrama generalizado es el que se muestra en la figura 6-14, y puede corresponder al esquema experimental de la figura 6.11.



CONFIGURACION FUNCIONAL DEL TERMOVAR  
FIG. 6.14

La punta de prueba es el elemento sensor primario, y la superficie de contacto entre los metales de la junta es lo que constituye en si, el elemento de conversión de variable.

Solo resta especificar que el comportamiento dinámico, sigue en términos generales el comportamiento según se analizó, en el capítulo 4. Existen en la literatura, descripciones detalladas para obtener entradas, para analizar las respuestas de termopares especiales, pues para analizar el caso dinámico es necesario considerar cada termopar en particular.

### 6.3 ANALISIS DE UN INSTRUMENTO DE 2o. ORDEN: EL CRISTAL PIEZOELECTRICO.

Ahora se aplicará un método experimental, para la -- evaluación de un cristal piezoeléctrico.

#### 6.3.a. GENERALIDADES.

(28) (29) (1)

Se reconoce como efecto fotoeléctrico, a los cambios de polarización adiabáticos o isotérmicos que experimenta un sistema, cuando la tensión a la que está sujeto cambia, o bien

si el sistema experimenta cambios de tensión, isotérmicos o -- adiabáticos, si cambia la intensidad eléctrica a que está suje to.

Entre las sustancias que exhiben esta propiedad, pueden mencionarse: El cuarzo, la turmalina, la cerámica, la sal de Rochelle, etc. Estos materiales tienen en común el no poseer un centro de simetría en su estructura cristalina, pues - si existiera este, no habría una combinación de esfuerzos uniformes, que produjera, una separación de los "centros de gravedad" de las cargas positiva y negativa, y no habría polarización.

Puede emplearse un cristal piezoeléctrico para convertir energía mecánica en eléctrica y viceversa, o bien para almacenar energía.

### 6.3. b DESCRIPCION TEORICA.

Se presentará un análisis simplificado del fenómeno, presentando sus rasgos fundamentales. Para un tratamiento más a fondo, así como aplicaciones en detalle, se sugiere consultar la referencia 29.

En el fenómeno Piezoeléctrico, se tiene deformaciones elásticas, y variaciones del campo eléctrico. Las variables termodinámicas que describen un sistema integrado por una sustancia elástica son: la tensión  $\bar{\epsilon}$ , la longitud L, (considerando una sola dimensión) y la temperatura T, y para piezoe-

lécricidad, se consideran también el campo eléctrico  $E$  y la polarización  $P$ . Considerando el tipo de esfuerzo más sencillo, o sea una tensión pura en un solo sentido, se obtiene:

$$dU = dQ - PdU = dQ - dW \text{ con } dQ = TdS \text{ y } dW = \bar{\epsilon} dL + EdP.$$

Considerando negativo al trabajo que se hace sobre el sistema, de las ecuaciones anteriores, se obtendrá:

$$TdS = dU - \bar{\epsilon} dL - EdP \text{ ----- (6-32)}$$

La entropía  $S$ , puede considerarse como función de cualquiera de los conjuntos siguientes:  $(T, \bar{\epsilon}, E)$ ;  $(t, \bar{\epsilon}, P)$ ;  $(T, L, E)$  ó  $(T, L, P)$ . considerando a  $S = S(T, \bar{\epsilon}, E)$

$$TdS = T \left( \frac{\partial S}{\partial T} \right)_{\bar{\epsilon}, E} dT + T \left( \frac{\partial S}{\partial \bar{\epsilon}} \right)_{T, E} d\bar{\epsilon} + T \left( \frac{\partial S}{\partial E} \right)_{T, \bar{\epsilon}} dE \text{ ----- (6-33)}$$

Empleando una función piezoeléctrica de Gibbs:

$$G' = U - TS - \bar{\epsilon} L - EP \text{ ----- (6-34)}$$

$$dG' = dU - TdS - SdT - \bar{\epsilon} dL - Ld\bar{\epsilon} - EdP - PdE$$

sustituyendo aquí 6-32 se obtiene:

$$dG' = SdT - Ld\bar{\epsilon} - PdE \text{ ----- (6-35)}$$

y como  $G'$  es diferencial exacta, se tendrán las relaciones siguientes:

$$\left( \frac{\partial S}{\partial E} \right)_{T, \bar{\epsilon}} = \left( \frac{\partial P}{\partial T} \right)_{E, \bar{\epsilon}} \text{ ----- (6-36)}$$

$$\left( \frac{\partial S}{\partial \bar{\epsilon}} \right)_{T, E} = \left( \frac{\partial L}{\partial T} \right)_{\bar{\epsilon}, E} \text{ ----- (6-37)}$$

$$\left( \frac{\partial L}{\partial E} \right)_{T, \bar{\epsilon}} = \left( \frac{\partial P}{\partial \bar{\epsilon}} \right)_{T, E} \text{ ----- (6-38)}$$

y de 6-33, del primer término de la derecha se obtiene:

$$T \left( \frac{\partial S}{\partial T} \right)_{\bar{\epsilon}, E} = C_{\bar{\epsilon}, E} \text{ ----- (6-39)}$$

que es la capacidad calorífica a tensión y campo cons

tantes. Introduciendo las ecuaciones 6-36, 6-37 y 6-39 en la ecuación 6-33 esta puede expresarse de la forma siguiente:

$$TdS = \mathcal{L}_{S,E} dT + T \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial T} \right)_{S,E} d\mathcal{E} + T \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial T} \right)_{S,E} dE \quad \text{----- (6-40)}$$

Expresión que sirve para calcular cambios de entropía isotérmicos, o cambios de temperatura adiabáticos, al cambiar  $\mathcal{L}$  o  $E$  o ambos.

La ecuación 6-38, es una relación entre los que son conocidos como coeficientes piezoeléctricos, indica el efecto de un cambio en el campo eléctrico sobre la longitud, y el lado derecho, el efecto de un cambio en la tensión sobre la polarización.

En forma análoga, a como se encontro 6-38, se pueden determinar otros coeficientes, que mostrarán diversos aspectos de este fenómeno y que se reseñan a continuación:

Si  $S = S(T, \mathcal{E}, P)$  y con  $\mathcal{L} = U - TS - \mathcal{E}L$  se obtiene:

$$TdS = \mathcal{L}_{S,P} dT + T \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial T} \right)_{S,P} d\mathcal{E} + T \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial T} \right)_{S,P} dP \quad \text{---- (6-41)}$$

y el coeficiente:  $-\left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial P} \right)_{T,P} = \left( \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial S} \right)_{T,P}$  ---- (6-42)

con  $S = S(T, L, E)$  y  $\mathcal{L} = U - TS - EP$

$$TdS = \mathcal{L}_{L,E} dT + T \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial T} \right)_{L,E} dL + T \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial T} \right)_{L,E} dE \quad \text{---- (6-43)}$$

y el coeficiente  $-\left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial L} \right)_{T,E} = \left( \frac{\partial E}{\partial S} \right)_{T,L}$  ----- (6-44)

y finalmente considerando  $S = S(T, L, P)$  junto con la función de Helmholtz  $A = U - TS$

$$TdS = \mathcal{L}_{L,P} dT + T \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial T} \right)_{L,P} dL + T \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial T} \right)_{L,P} dP \quad \text{---- (6-45)}$$

y el coeficiente:

$$\left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial P} \right)_{T,L} = \left( \frac{\partial E}{\partial L} \right)_{T,P} \quad \text{----- (6-46)}$$

Todas estas expresiones son útiles para el análisis del fenómeno, y en principio justifican y predicen su existencia. Por ejemplo la relación 6-44, predice que si se invierte el campo,  $E \rightarrow (-E)$ , el sentido de la polarización se invertirá cuestión que distingue a este fenómeno, de la electroconstricción, en la cual también aparece una diferencia de potencial en un material sujeto a esfuerzo, pero cuyo signo no cambia si el esfuerzo se invierte.

### 6.3.c. DETERMINACION EXPERIMENTAL DE PARAMETROS.

Se empleará una prueba con función senoidal. Aunque sobre un cristal piezoeléctrico se pueden hacer muchos experimentos, y pueden determinarse bastantes características, de acuerdo a intereses o aplicaciones particulares, el interés se centra aquí, de acuerdo a lo discutido en este trabajo, en la determinación experimental de: El orden al que pertenece el transductor, y los parámetros que permitan establecer una función de transferencia "empírica" de acuerdo a los modelos examinados.

#### 6.3.c.1. ESQUEMA EXPERIMENTAL.

La configuración básica empleada, es la que se muestra en la figura 5-10. La elección se hizo tomando en cuenta el equipo disponible, que fué el siguiente:

Generador de señal marca PHILIPS, Mod. PM 324HF con -

salida desde 100 KHZ, hasta 110 MHz, con selector de frecuencias en los intervalos:

0.1 a 0.3 MHz; 0.3 a 1.0 MHz; 1 a 3 MHz ; 3 a 10 MHz; 10 a 30 MHz; 30 a 80 MHz y 75 a 110 MHz.

Como detector, un osciloscopio Hewlett-Packard Mod. 1740 A, con las especificaciones siguientes:

Tiempo de subida:  $t \leq 3.5 \text{ ns}$

Banda Pasante: Desde CD hasta 100 MHz, factor de Deflexión de 5 mV/div. hasta 20V/div en 12 posiciones calibradas. Se especifica que en medidas de voltaje el margen de error es de 3 %, lo que se interpreta tal y como se indicó en el capítulo V sección 5.5.b.

Impedancia de entrada:  $1 \text{ M}\Omega \pm 2 \%$ , con capacidad asociada de 20 PF. El 2 % se interpreta como se indicó en el capítulo V, sección 5.4.

Voltaje máximo de entrada: Para CA y CD 250 V (CD + Voltaje pico C.A.) o 500 V pico a pico para C.A. a 1KHZ o menos.

El Barrido del osciloscopio tiene las características siguientes:

Intervalo de entrada: Desde 50 ns/div hasta 2 s/div - (dividido en 24 subintervalos)

Exactitud:

|                     |   |                               |
|---------------------|---|-------------------------------|
| de 50 ns a<br>29 ms | } | $\pm 3 \%$ entre 0°C y 15°C   |
|                     |   | $\pm 2 \%$ entre 15°C y 35°C  |
|                     |   | $\pm 3 \%$ entre 35°C y 55° C |

Además el instrumento puede amplificar el intervalo de tiempo por un factor de 10, siendo en este caso, la exactitud como sigue:

$$\begin{array}{l} \text{de } 50 \text{ ns a} \\ 20 \text{ ms} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \pm 4 \% \text{ entre } 0^{\circ}\text{C y } 15^{\circ}\text{C} \\ \pm 3 \% \text{ entre } 15^{\circ}\text{C y } 35^{\circ}\text{C} \\ \pm 4 \% \text{ entre } 35^{\circ}\text{C y } 55^{\circ}\text{C} \end{array} \right.$$

Para el intervalo entre 50 ms y 2s, se especifica - aumentar 1 % a las cifras de error.

Nótese que dichas especificaciones, llevan incluida la corrección por deriva debida a la temperatura ambiente, -- siendo deriva de escala.

Disparo interno: Desde C D hasta 25 MHz sobre señales que provoquen deflexión vertical de al menos 3 décimas de división. Este requerimiento sube hasta 1 división de deflexión vertical a 100 MHz. Por supuesto existen otras características del aparato, sin embargo para el empleo que se le -- dió, las anteriores fueron las más significativas.

El esquema particular para esta prueba se muestra - con la figura 6.15(a)

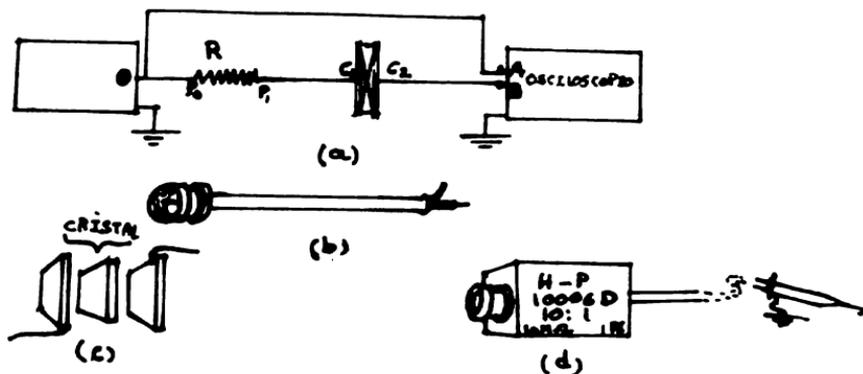


FIG. 6.15

Para obtener señal de la fuente, se empleó un conector BNC y cable coaxial. Para acoplar el cristal se empleó -- una resistencia  $R = 1.77 \pm 0.006 \text{ K}$  medida con un puente de impedancia GENERAL RADIO Mod. 1862-C.

El cristal se montó entre dos placas, desde las cuales se hicieron las conexiones directas a la fuente y al osciloscopio (fig. 6.15 c)

La salida de la fuente de señal, se alimentó directamente al canal A del osciloscopio, y la del cristal al B, ambas mediante puntas de prueba Hewlett Packard Mod. 10006 D con atenuación de 10:1 y capacidad de  $1 \text{ Pf}$  según el manual, y con impedancia de entrada de  $10 \text{ M}\Omega$ . (Fig. 6.15 d)

La conexión P.C. (fig. 6.15 a) se hizo también con cable coaxial.

Dado que en este dispositivo interesa también su respuesta cuando está sujeto a esfuerzo, se realizó una prueba más,

sujetando al cristal a la acción de presión, mediante el recurso de montar a los cristales entre dos platinos para colocar pesas sobre estas, y someterlos a esfuerzo (fig. 6.16). Se procedió a explorar la respuesta del cristal, de la misma forma que en el caso anterior, para observar la aparición de alguna modificación en su comportamiento.



Durante todas las pruebas de respuesta a frecuencia la amplitud pico a pico de la señal. se mantuvo en :  $V_i = 0.2 \pm 0.006$  V.

Para determinar imprecisiones se empleó la calibración del osciloscopio, pues con este se vigiló tanto la señal de entrada al cristal, como la salida.

Para determinar la imprecisión en la frecuencia se empleó la ecuación 5-12. En este caso, según la calibración del osciloscopio, el error en la lectura de período T es de 3%, como  $f = 1/T$ , entonces la imprecisión para frecuencia será:

$$df = \left| -\frac{dT}{T^2} \right| = \frac{dT}{T^2} \quad \text{-----(6-47)}$$

### 6.3.c.2. RESULTADOS.

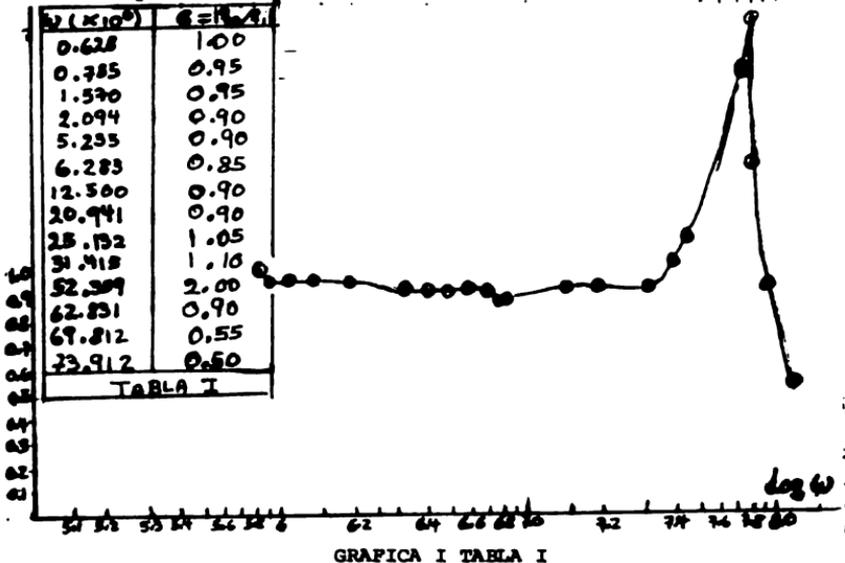
Para empezar se corrió una prueba dirigida a determinar, en términos generales, las características del cristal.

Sus resultados se indican en la Tabla I, y los rasgos más sobresalientes son:

1°) Frecuencia de resonancia

$$fr = (8.333 \pm 0.250) \text{ MHz}$$

De la Tabla, puede apreciarse que entre 0.1 MHz y -- 4 MHz, la salida es constante con variaciones pequeñas, alrededor de 0.2 V. La forma de la curva (gráfica I) responde a la forma típica de respuesta a frecuencia.



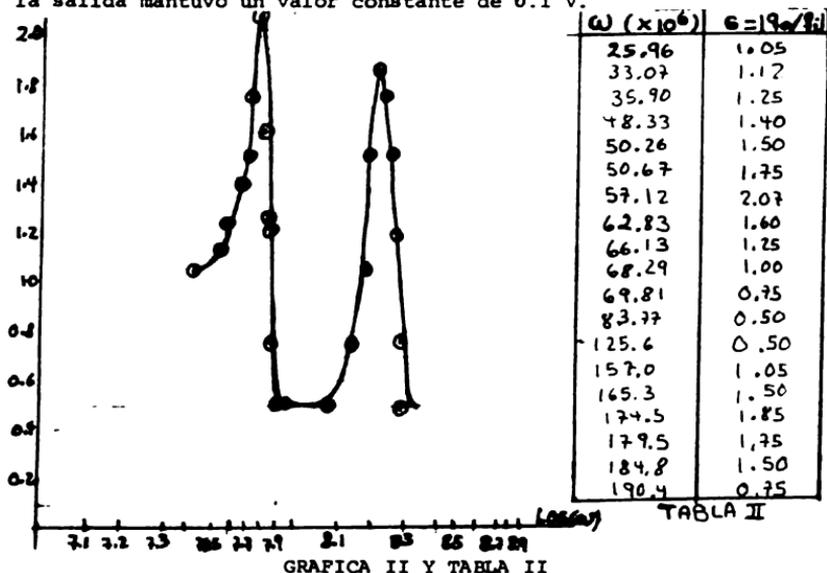
Fué durante estas pruebas que un cristal se partió, - por lo que al llevar a cabo las pruebas formales van a tenerse diferencias respecto a estos valores no así con el comportamiento cualitativo. De aquí en adelante se señalarán, a un cristal,

el rectangular de 1.9 X 1.9 cms. como cristal (1) y al triángulo como cristal (2).

Cristal (1).

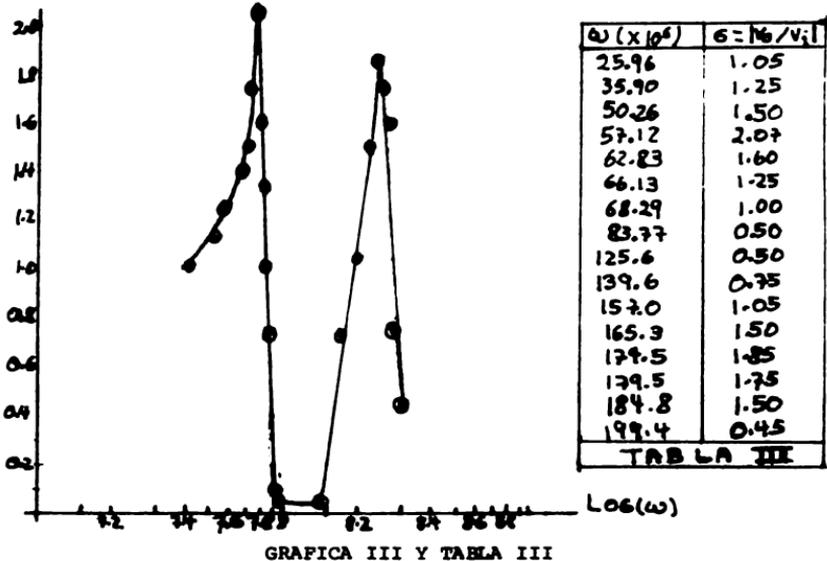
Al llevarse a cabo las pruebas con todo detalle, el interés se centró en la frecuencia de resonancia.

En las Tablas II y III, se reportan los resultados, que se obtuvieron al repetir dos veces la prueba. Sobre estos datos, se aclara que en el intervalo entre 14.286 y 20.000 MHz la salida mantuvo un valor constante de 0.1 V.



En las gráficas II y III, se muestran las curvas de  $\frac{q_0}{q_1}$  contra  $\log \omega$ . En ambas aparecen dos picos, que corresponde a la primera frecuencia resonante del sistema y al primer

armónico. En frecuencias anteriores a  $(4.1322 \pm 0.123)$  MHz, la respuesta coincide con la obtenida en el caso anterior. Como la zona de más interés es la de resonancia sobre está se centro el interés.



1a. frecuencia resonante  $fr_1 = (9.0909 \pm 0.272)$  MHz

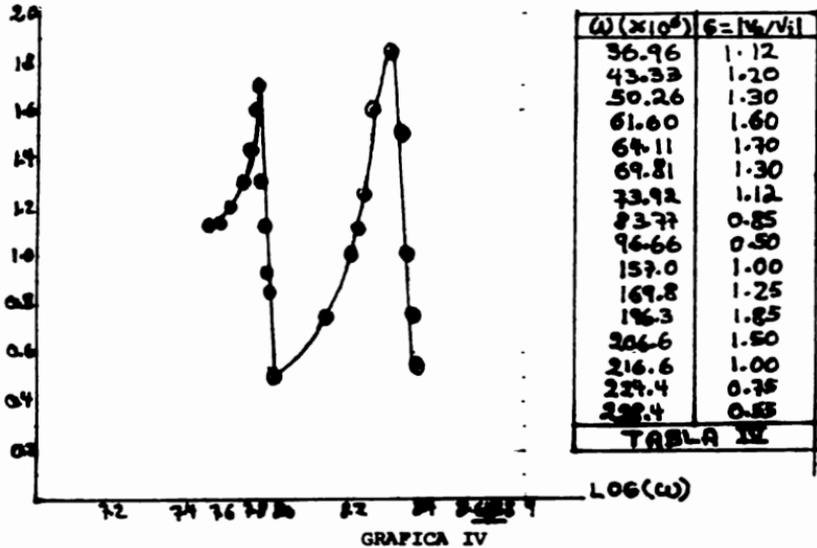
2a. frecuencia resonante  $fr_2 = (27.778 \pm 0.833)$  MHz

Como la respuesta antes de la zona de interés responde al caso de la prueba anterior, combinando ambos hechos, se obtiene una figura similar a la 5.21 b, lo que tipifica al cristal, como elemento de segundo orden.

Cristal (2).

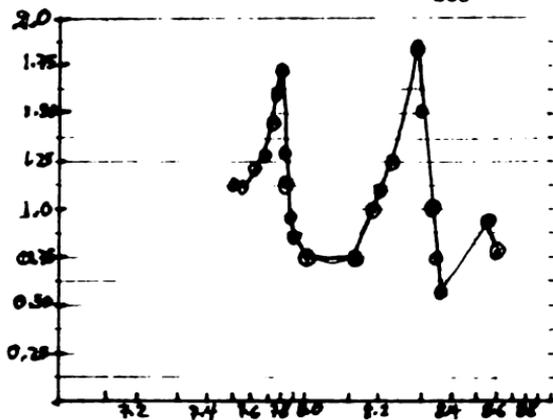
Las lecturas experimentales se reportan en la Tabla IV

En la gráfica IV, se grafica  $6 = \left| \frac{q_0}{q_1} \right|$  contra  $\log(\omega)$  y puede verse que es cualitativamente igual a las gráficas del cristal (1). Nuevamente se tipifica al cristal como elemento de segunda orden.



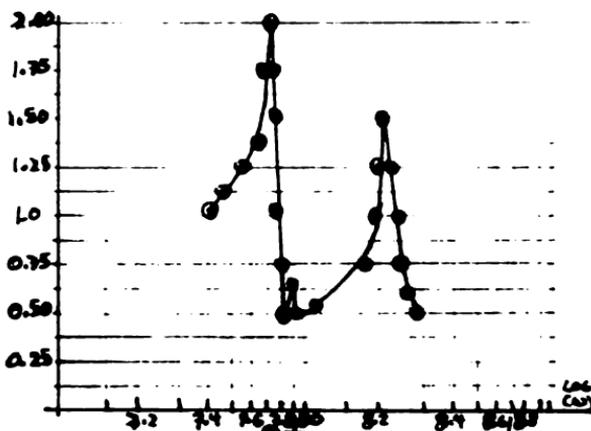
Las Tablas de valores V, VI y VII muestran los resultados para la prueba del cristal 1, cuando se le sujeta a diferentes presiones. Las gráficas V, VI y VII muestran el comportamiento de las frecuencias de resonancia. Puede apreciarse de ellas, que los picos se hacen más agudos, y que el primer pico crece más que el segundo.

Estas son apreciaciones cualitativas, que muestran en términos generales, los resultados obtenidos, ahora se procederá a extraer resultados cuantitativos.



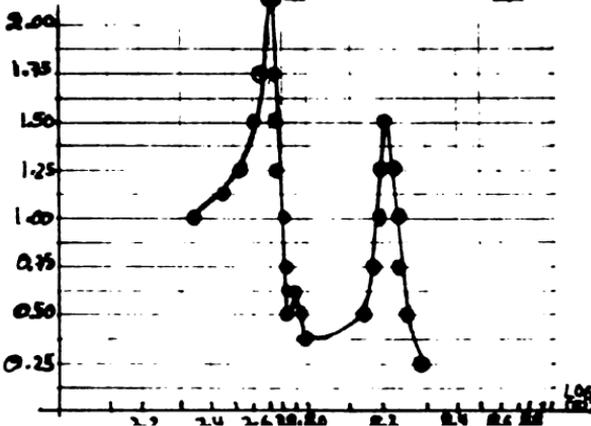
| $\omega$ ( $\times 10^6$ ) | $G = N_0/V_i$ |
|----------------------------|---------------|
| 36.96                      | 1.12          |
| 43.33                      | 1.20          |
| 57.12                      | 1.45          |
| 64.11                      | 1.70          |
| 73.92                      | 1.12          |
| 82.77                      | 0.85          |
| 133.6                      | 0.75          |
| 157.0                      | 1.00          |
| 169.8                      | 1.25          |
| 196.3                      | 1.85          |
| 202.68                     | 1.50          |
| 216.66                     | 1.00          |

TABLE V  
LOG(w)



| $\omega$ ( $\times 10^6$ ) | $G = N_0/V_i$ |
|----------------------------|---------------|
| 25.64                      | 1.05          |
| 35.90                      | 1.25          |
| 48.33                      | 1.75          |
| 54.16                      | 2.00          |
| 57.12                      | 1.75          |
| 62.83                      | 1.05          |
| 73.92                      | 0.50          |
| 78.54                      | 0.65          |
| 83.77                      | 0.50          |
| 108.3                      | 0.55          |
| 165.3                      | 1.50          |
| 172.1                      | 1.25          |
| 174.5                      | 1.00          |

TABLE VI



| $\omega$ ( $\times 10^6$ ) | $G = N_0/V_i$ |
|----------------------------|---------------|
| 22.84                      | 1.00          |
| 34.90                      | 1.25          |
| 46.54                      | 1.75          |
| 52.36                      | 2.15          |
| 57.12                      | 1.75          |
| 65.45                      | 1.00          |
| 69.81                      | 0.50          |
| 78.54                      | 0.65          |
| 87.26                      | 0.50          |
| 136.5                      | 0.50          |
| 157.0                      | 1.00          |
| 165.3                      | 1.50          |
| 172.1                      | 1.00          |

TABLE VII

## 6.3.d.1. EVALUACION DE DATOS

## 1°) Cristal 1.

De este cristal se tiene, además de la prueba para los parámetros, la prueba de respuesta a frecuencia bajo presión.

2°) Determinación de  $\xi$  y  $\omega_n$ 

De acuerdo a la sección 5-11b, y a partir de la gráfica 5-21 b, se determinarán  $\xi$  y  $\omega_n$  con las ecuaciones:

$$(A_r/A_o) = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}} \text{ ----- (5-39)}$$

$$\omega_p = \omega_n \sqrt{1-2\xi^2} \text{ ----- (5-40)}$$

En 5-39,  $A_r = |q_o/q_i|$  para la frecuencia de resonancia del sistema y  $A_o = |q_o/q_i|$  para la zona no resonante.

$A_o$  se obtiene con los datos de la Tabla I, promediando, los valores de  $V_o$  desde

$$\omega_i = 6.28 \times 10^5 \text{ (1/s)} \text{ hasta } \omega_c = 20.941 \times 10^6 \text{ (1/s)}$$

$$q_o = V_o = (0.18 \pm 0.008) \text{ V}$$

$$q_i = V_i = (0.20 \pm 0.004) \text{ V}$$

$$A_o = \left| \frac{q_o}{q_i} \right| \pm dA_o = 0.9 \pm 0.02 \text{ ----- (6-48)}$$

$$\text{CON } dA_o = \left| \frac{q_i dq_o - q_o dq_i}{q_i^2} \right| \text{ ----- (6-49)}$$

De las tablas II y III, se tiene para la primera resonancia

$$q_{or} = V_{or} = (0.41 \pm 0.0123) \text{ V}$$

$$q_i = V_i = (0.20 \pm 0.004) \text{ V}$$

donde la imprecisión para  $q_{Or}$  se calcula mediante las características del osciloscopio.

Empleando nuevamente 6-49.

$$Ar = 2.0 \pm 0.02 \quad (6-50)$$

De 5-39:

$$\xi = \pm \left[ \frac{1 \pm \sqrt{1 - (A_0/A_n)^2}}{2} \right]^{1/2}$$

es función de  $A_0$  y  $A_n$ , entonces: el error en la determinación de  $\xi$  se calcula con la ecuación 5.12, que para este caso será.

$$E_{\xi} = d\xi = \left| \left( \frac{\partial \xi}{\partial A_n} \right) dA_n \right| + \left| \left( \frac{\partial \xi}{\partial A_0} \right) dA_0 \right| \quad (6-51)$$

El cálculo detallado de las derivadas está en el apéndice 2, de manera que para  $\xi$  se obtiene:

$$\xi_1 = 0.9729$$

$$\xi_2 = -0.9729$$

$$\xi_3 = 0.2313$$

$$\xi_4 = -0.2313$$

para  $\left| \frac{\partial \xi}{\partial A_n} \right|$ , sustituyendo en las ecuaciones A.2.6. - del apéndice 2.

$$\left| \frac{\partial \xi}{\partial A_n} \right| = \begin{cases} 0.0291 \text{ PARA } \left[ \frac{1 + \sqrt{1 - (A_0/A_n)^2}}{2} \right]^{1/2} & (6-52 \text{ a}) \\ 0.0224 \text{ PARA } \left[ \frac{1 - \sqrt{1 - (A_0/A_n)^2}}{2} \right]^{1/2} & (6-52 \text{ b}) \end{cases}$$

y para  $\partial \xi / \partial A_0$

$$\left| \frac{\partial \xi}{\partial A_0} \right| = \begin{cases} 0.0647 \text{ PARA } \left[ \frac{1 + \sqrt{1 - (A_0/A_n)^2}}{2} \right]^{1/2} & (6-53 \text{ a}) \\ 0.2723 \text{ PARA } \left[ \frac{1 - \sqrt{1 - (A_0/A_n)^2}}{2} \right]^{1/2} & (6-53 \text{ b}) \end{cases}$$

Combinando las ecuaciones 6-51, 6-52 y 6-53 pueden te

nerse bastantes posibilidades para  $E_{\xi}$ , además de las 4 posibilidades de la  $\xi$  misma. Para señalar con precisión cual es la  $\xi$  adecuada será necesario también, el cálculo de  $\omega_n$ .

De 5-40:

$$\omega_n = \frac{\omega_p}{\sqrt{1 - 2\xi^2}}$$

De aquí se ve de inmediato que  $\xi_1, \xi_2$  deberán rechazarse, ambas corresponden a:

$$\left[ \frac{1 + \sqrt{1 - (A_0/A_2)^2}}{2} \right]^{\frac{1}{2}}$$

También pueden desecharse los parámetros asociados a la última expresión, quedando como únicas posibilidades las expresiones  $\xi_3, \xi_4$  6.52 by 6.53 b.

Como un coeficiente de amortiguamiento negativo no -- parece tener sentido, puede afirmarse que para este cristal

$$\xi = 0.2313 \pm 0.0079$$

Por lo que, cortando las 2 últimas cifras del valor - medio de  $\xi$ :

$$\xi = 0.23 \pm 0.0079 \quad (6-54)$$

Ahora para el cálculo de  $\omega_n$ ,  $\omega_p = 57.12 \times 10^6$  y corresponde a  $T = (0.11 \pm 0.002) \times 10^{-6}$  s . de aquí

$$d\omega_p = 2\pi (dT/T^2)^*$$

$$\text{Con lo que } \omega_p = (57 \pm 1.14) \times 10^6 \quad (6-55)$$

Ahora ya puede calcularse  $\omega_n$  y su imprecisión, siendo esta última.\*

$$E_{\omega_n} = \frac{d\omega_p}{\omega_p} + \frac{2\xi\omega_p d\xi}{(1 - 2\xi^2)^{3/2}} \quad (6-56)$$

\* ver apéndice 2.

Sustituyendo valores se obtiene

$$\omega_n = (60.4 \pm 1.21) \times 10^6 \text{-----} \quad (6-57)$$

$$\text{o sea } f_n = (9.61 \pm 1.9) \times 10^6 \text{-----} \quad (6-58)$$

La Q del sistema se calcula empleando<sup>(13)</sup>

$$Q = \frac{f_0}{f - f_0} \text{-----} \quad (6-59)$$

Donde f es la frecuencia donde si Vo es la salida de fo, entonces para f la salida es 0.707 Vo. Para este caso Vo= 0.41, por lo que V = 0.2899

Para calcular f, se emplea la "caída" desde fo=9.09 x 10<sup>6</sup> HZ en adelante, ya que es casi recta, por lo que haciendo la regresión:

$$V_o = -7.3996 \times 10^{-8} f + 1.0399$$

con coeficiente de correlación r = -0.9148 y para Vo = 0.29 V

$$f = 10.135 \times 10^6 \text{ y sustituyendo f y fo en Q:}$$

$$Q = 8.6986 \text{-----} \quad (6-60)$$

Ahora se empleará el mismo procedimiento para explorar lo que sucede, cuando el cristal está sujeto a tensión, para lo cual se emplearán los datos de las Tablas V, VI y VII .

Para el cristal sujeto a una tensión de 2717.45 N/m<sup>2</sup> o sea 0.2717 N/cm<sup>2</sup>.

$$\xi = 0.2313 \pm 0.0079$$

$$\omega_n = (57.3 \pm 1.08) \times 10^6 \text{ (1/\xi)}$$

$$Q = 9.35$$

$$f_n = (9.1 \pm 0.172) \times 10^6 \text{ HZ}$$

Para el cristal sujeto a una tensión de  $0.5435 \text{ N/cm}^2$   
o sea  $5434.9 \text{ N/m}^2$

$$\zeta = 0.2142 \pm 0.0055$$

$$W_n = (57.64 \pm 0.143) \times 10^6 \text{ (1/ )}$$

$$Q = 7.57$$

$$f_n = (9.17 \pm 0.022) \times 10^6$$

para el cristal sujeto a una tensión de  $0.8153 \text{ N/cm}^2$   
o sea  $8153.35 \text{ N/m}^2$ .

$$\zeta = 0.2143 \pm 0.005$$

$$W_n = (54.95 \pm 0.117) \times 10^6$$

$$Q = 8.28$$

$$f_n = (8.7456 \pm 0.018) \times 10^6$$

La razón entre la 1a. frecuencia y la 2a. frecuencia  
resonante, son las siguientes cristal libre  $(\omega_2/\omega_1) = 3.0555$

Cristal sujeto a

tensión  $0.2717 \text{ N/cm}^2$   $\frac{\omega_2}{\omega_1} = 3.0527$

Cristal sujeto a

tensión  $0.5435 \text{ N/cm}^2$   $\frac{\omega_2}{\omega_1} = 3.1579$

Cristal sujeto a

tensión  $0.8153 \text{ N/cm}^2$   $\frac{\omega_2}{\omega_1} = 3.1579$

(29)

La literatura indica que entre ambas frecuencias, la

razón debe ser de 3.

Las Q's de los segundos picos del cristal, son los siguientes:

Cristal libre  $Q_0 = 16.72$

Cristal sujeto a  $Q_1 = 17.133$

Tensión:  $0.2719 \text{ N/cm}^2$

Cristal sujeto a  $Q_2 = 21.89$

Tensión:  $9.5435 \text{ N/cm}^2$

Cristal sujeto a  $Q_3 = 28.481$

Tensión:  $0.8152 \text{ N/cm}^2$

De estos datos es evidente que, conforme sube la tensión a la que esta sujeto el cristal, la Q mejora notablemente, y que los mejores valores de Q no corresponden al primer pico sino al segundo. En la literatura, se sugiere trabajar con el 2o. pico para la construcción de osciladores.

Por lo que respecta al cristal 2, los datos se han trabajado en forma idéntica a este, y los resultados son los siguientes:

|                  |   |
|------------------|---|
| 1era. resonancia | $\omega_1 = 64.113 \times 10^6 \pm 1.282 \times 10^6$ |
|                  | $f_1 = 10.204 \times 10^6 \pm 0.204 \times 10^6$      |
| 2a. resonancia   | $\omega_2 = 196.34 \times 10^6 \pm 3.927 \times 10^6$ |
|                  | $f_2 = 31.250 \times 10^6 \pm 0.625 \times 10^6$      |

Frecuencia natural no

amortiguada  $\omega_n = (69.605 \pm 1.597) \times 10^6$   
 $f_n = (11.077 \pm 0.254) \times 10^6$

Coefficiente de

amortiguamiento  $\zeta = 0.2753 \pm 0.005$

Relación entre

frecuencias  $\frac{\omega_2}{\omega_1} = 3.06$

Q para el primer

pico  $Q_1 = 6.54$

Q para el segundo

pico.  $Q_2 = 15.37$

Nuevamente aparece un mejoramiento sustancial de  $\omega$ , en el segundo pico resonante.

#### 6.4 RESUMEN

El Piezoeléctrico, puede clasificarse como instrumento de segundo orden en vista del comportamiento analizado.

(1) Corresponde al caso pobremente amortiguado. En la literatura, se habla a menudo como una característica de estos dispositivos. Las altas Q exhibidas, han sido aprovechadas, para la construcción de osciladores altamente estables. Con los coeficientes determinados en estas pruebas, podría ya escribirse expli

citamente, la ecuación 4-27, para estos cristales en particular. La K de la ec. 4-27 podría obtenerse mediante ajustes de datos, aproximándolos a rectas. En las bajadas y subidas de los picos, con los datos aquí presentados, los coeficientes de regresión estuvieron muy cercanos a  $\pm 1$ , por lo que una aproximación de este modo podría funcionar.

Es evidente que sobre piezoeléctricos podría extenderse el tema, todo cuanto se quiera, sin embargo, con lo hecho hasta aquí, se logró el objetivo de mostrar la aplicación de la teoría, y ejemplificar como se manejan los métodos indicados anteriormente.

#### 6.5 TEORIA GENERAL DE INSTRUMENTACION: PERSPECTIVAS.

Quizá la instrumentación abarque una de las más grandes colecciones de técnicas y aplicaciones, lo que ha hecho un tanto difícil la ordenación del material que se ha desarrollado, para obtener un marco generalizado, a partir del cual se enfoquen los problemas. Sin embargo la renovación continua en diseños de instrumentos, la continua obsolescencia de dispositivos y el mejoramiento continuo de la tecnología, están llevando a la necesidad de formar un marco de ideas, que permitan enfocar problemas de aplicación y diseño de sistemas de medición, un tanto independientemente de las particularidades del instrumento o los instrumentos, que en un momento dado estén disponibles.

De ahí el interés de los diagramas y configuraciones funcionales, de los dos primeros capítulos, y la idea de analizar características muy generalizadas de los sistemas, aunque - como se vió en este capítulo, al atacar problemas en concreto - se lleguen a manejar particularidades muy especiales de cada dispositivo.

Termina este trabajo con un comentario que parece muy atinado, de un profesor de la facultad de ciencias, "A los físicos no se les debe enseñar al principio de su carrera, aplicaciones particulares o específicas de la física, pues es casi seguro que al terminar su carrera ya sean obsoletas, lo mejor es darles fundamentos generales bien cimentados, y las aplicaciones al final, cuando tengan la flexibilidad mental, para aprender continuamente, sin estar fijados en conocimientos de rápida obsolescencia".

## APENDICE I.

## FISICA DE LOS EFECTOS TERMOELECTRICOS

## 1.A.1. Termodinámica de procesos cercanos al equilibrio.

En todo proceso irreversible, se tiene siempre un incremento de la Entropía (38). Considerando la conducción de calor a través de un sólido y Isotrópico y homogéneo, despreciando la expansión térmica, si la temperatura varía de punto a punto, la energía interna por unidad de masa dependerá de las coordenadas espaciales y el tiempo,  $u(\vec{r}, t)$ , y lo mismo sucederá para el flujo de calor  $\vec{w}$ . El principio de conservación de energía puede escribirse en estas condiciones como:

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{w} = 0 \text{ ----- 1.A.1.}$$

(  $\rho$  = densidad)

La energía interna y la entropía están conectadas por

$$du = Tds \text{ ----- 1.A.2.}$$

entonces despreciando los cambios en volumen con 1.A.1.

y 1.A.2 se obtiene

$$\rho \frac{\partial s}{\partial t} = - \frac{1}{T} \nabla \cdot \vec{w} \text{ ----- 1.A.3.}$$

que puede reescribirse

$$\rho \frac{\partial s}{\partial t} + \nabla \cdot \left( \frac{\vec{w}}{T} \right) = - \frac{1}{T^2} (\vec{w} \cdot \nabla T) \text{ ----- 1.A.4.}$$

Esta expresión, indicará un principio de conservación si el lado derecho se anula.

La entropía no satisface un principio de conservación, mucho menos en un proceso irreversible, por lo que deberá estar relacionada con el lado derecho de la ec. 1.A.4., expresando un

incremento de entropía. Integrando la ec. 1.A.4. se obtiene:

$$\rho \frac{\partial}{\partial t} \int S dV + \oint \frac{\vec{W}_n}{T} dA = - \int \frac{1}{T^2} (\vec{W} \cdot \nabla T) dV \text{ ----- 1.A.5.}$$

Si se supone que la superficie del objeto conductor está adiabáticamente aislada  $\vec{W}_n$  desaparece, y el término restante del lado izquierdo será el cambio en entropía por unidad de tiempo. Por el teorema de Clausius  $\vec{W} \cdot \nabla T$  debe ser negativo. De 1.A.5 puede entonces definirse, al incremento local de entropía como:

$$\Theta = - \frac{1}{T^2} (\vec{W} \cdot \nabla T) \text{ ----- 1.A.6.}$$

Considerando ahora que la frontera del objeto no es adiabática,  $\vec{W}_n$  señalará el calor transferido a la fuente de calor respectiva, por unidad de área de la frontera, por unidad de tiempo, y  $\vec{W}_n/T$  será la entropía transferida del cuerpo a la fuente.

Por ello puede definirse a  $\vec{W}_n/T$  como flujo de entropía.

$$\vec{S} = \frac{\vec{W}}{T}$$

Con esto 1.A.1 se convierte en:  $\rho \frac{\partial S}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{S} = \Theta$

e integrando

$$\rho \frac{\partial}{\partial t} \int S dV + \oint \vec{S}_n dA = \int \Theta dV \text{ ----- 1.A.7}$$

o sea la cantidad de entropía generada dentro del volumen de integración, es en parte llevada hacia fuera de el, y en parte contribuye al cambio de entropía del volumen.

2.A. 1 Conducción de Calor en un cuerpo anisotrópico y las relaciones recíprocas de Onsager.

Considerando ahora la conducción en un cuerpo anisotrópico,  $\vec{W}$ , que según la hipótesis de Fourier, para la relación entre el flujo de calor y el  $\nabla T$ , esta dado por:

$$\vec{W} = -K \nabla T \quad \text{-----} \quad \text{1.A.8}$$

Debe expresarse mediante una relación tensorial entre las componentes del  $\nabla T$  y del flujo de calor.

$$\begin{aligned} W_1 &= -K_{11} \frac{\partial T}{\partial x_1} - K_{12} \frac{\partial T}{\partial x_2} - K_{13} \frac{\partial T}{\partial x_3} \\ W_2 &= -K_{21} \frac{\partial T}{\partial x_1} - K_{22} \frac{\partial T}{\partial x_2} - K_{23} \frac{\partial T}{\partial x_3} \\ W_3 &= -K_{31} \frac{\partial T}{\partial x_1} - K_{32} \frac{\partial T}{\partial x_2} - K_{33} \frac{\partial T}{\partial x_3} \end{aligned} \quad \text{1.A.9}$$

Comparando con la expresión 1.A.5, reescrita como:

$$\Theta = -\frac{1}{T^2} (W_1 \frac{\partial T}{\partial x_1} + W_2 \frac{\partial T}{\partial x_2} + W_3 \frac{\partial T}{\partial x_3}) \quad \text{1.A.10}$$

en 1.A.9 se expresan las  $W_{i=1,2,3}$  en términos de las

$\partial T / \partial x_i$  como funciones lineales homogéneas. La relación

1.A.9 debe satisfacer que  $\Theta \geq 0$ , para cualquier  $\nabla T$ , es decir

$$\sum_i \sum_k K_{ik} \frac{\partial T}{\partial x_i} \frac{\partial T}{\partial x_k} \geq 0 \quad \text{-----} \quad \text{1.A.11}$$

lo que implica que  $K_{ik}$  sea no negativo definido y que

$K_{ik} = K_{ki}$ , es decir simétrico y es un caso particular de las relaciones de Onsager.

### 1.A.3 Fenómenos Termoeléctricos

Considérese un metal que lleva una corriente eléctrica, y a través del cual existe un gradiente de temperatura.

Supóngase que la energía, interna específica  $n$ , y la entropía específica  $S$ , son independientes de la densidad de corriente  $\vec{j}$ .

El metal recibe una cantidad  $\vec{j} \cdot \vec{E}$ , de energía eléctrica por unidad de tiempo y volumen, y debido a que se carga

a razón  $-\nabla \vec{J}$  por unidad de tiempo, habrá un incremento en energía potencial por una cantidad  $-\Phi \nabla \vec{J}$ , donde  $\Phi$  es el potencial eléctrico y  $E = -\nabla \Phi$ . El principio de conservación de energía establecerá que:

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = -\nabla \vec{W} + (\vec{J} \cdot \vec{E}) \quad \text{-----1.A.12}$$

La diferencial de entropía específica toma la forma

$$T ds = du - (\mu - F\Phi) dn \quad \text{1.A.13}$$

$v \cdot N_0 n$  = número de portadores de carga

$N_0$  = número de avogadro.

$\mu$  = Potencial Químico.

$\mu - F\Phi$  = Potencial electroquímico de los portadores. ( $F = N_0 e$ )

Como  $-F N_0 n e$  representa la carga por unidad de --

volúmen se tendrá:

$$\rho F \frac{\partial n}{\partial t} = -\rho \frac{\partial (-Ln e)}{\partial t} = \nabla \vec{J} \quad \text{----- 1.A.14}$$

y de 1.A.13:

$$T \rho \frac{\partial s}{\partial t} = \rho \frac{\partial u}{\partial t} + (\Phi - \xi/e) \nabla \cdot \vec{J} \quad \text{---- 1.A.15}$$

donde  $(\mu/F) = (\xi/e)$  i.e.  $\xi = \mu/L$

Eliminando  $\partial u / \partial t$  entre 1.A.12 y 1.A.15

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial s}{\partial t} + \nabla \cdot \frac{1}{T} (\vec{W} + \frac{\xi}{e} \vec{J}) &= \frac{1}{T} [\vec{W} \cdot (-\frac{1}{T}) \nabla \cdot T] \\ &+ \frac{1}{T} (\vec{J} \cdot \vec{E} + T \nabla \cdot \frac{\xi}{e} \vec{J}) \quad \text{----- 1.A.16} \end{aligned}$$

Esta ecuación equivale a la ec. 1.A.4. aquí se consi

dera como flujo de entropía al término  $\frac{1}{T} (\vec{W} + \frac{\xi}{e} \vec{J})$ , y el la-

do derecho representa la cantidad de entropía generada local--

mente,  $\theta$ . De la ecuación 1.A.16,  $\theta$  es función lineal de  $W$  y -

$J$ , y los expresa como funciones lineales de sus coeficientes -

$$\vec{E} + T \nabla (\xi/eT); (-1/T) \nabla T$$

, es decir:

$$\begin{aligned} \vec{W} &= -\frac{\alpha}{T} \nabla T + \beta (\vec{E} + T \nabla \frac{\xi}{eT}) \\ \vec{J} &= -\frac{\gamma}{T} \nabla T + \delta (\vec{E} + T \nabla \frac{\xi}{eT}) \quad \text{1.A.17} \end{aligned}$$

Solucionando para E y W se tendrá

$$\vec{W} = -\kappa \nabla T - \left( \pi + \frac{\xi}{e} \right) \vec{J} \quad \text{----- 1.A.18a}$$

$$\vec{E} = \frac{\pi}{q} \vec{J} - \varepsilon \nabla T - \nabla \frac{\xi}{e} \quad \text{----- 1.A.18b}$$

La relación de los coeficientes  $\kappa, \pi, \varepsilon, 1/T$  con

$\beta$  y  $\gamma$  es:

$$\beta = -\sigma \left( \pi + \frac{\xi}{e} \right) \quad \gamma = -\sigma \left( \varepsilon T + \frac{\xi}{e} \right) \quad \text{1.A.19}$$

La ecuación 1.A.18.b conecta el salto en potencial,

a través de una frontera entre dos metales, con el salto en .

Si se integra sobre una trayectoria que cruce la frontera entre dos metales A y B obtenemos:

$$\Phi_B - \Phi_A = \frac{1}{e} (\xi_B - \xi_A) \quad \text{----- 1.A.20}$$

$\Phi_B - \Phi_A$  es el potencial de contacto entre los meta-

les. En equilibrio  $\vec{J} = 0$ ,  $\vec{W} = 0$  y  $\nabla T = 0$ , de aquí  $E = -\nabla(\xi/e)$

Entonces de 1.A.18.b, se tiene que en equilibrio, las intensidades de campo estarán presentes únicamente en regiones donde

$\xi$  varía, o sea donde el material no es homogéneo, y en parti-

cular a través de la frontera de dos materiales homogéneos diferentes.

Si  $\vec{J} = 0$ , de 1.A.18.a  $\vec{W} = -\kappa \nabla T$  y en esta situación

de 1.A.18.b, puede verse que existe donde quiera una intensi-

dad de campo  $E = -\varepsilon \nabla T - \nabla \xi / e$ .  $\varepsilon$  se conoce como fuerza térmica absoluta.

Sustituyendo 1.A.18.b en 1.A.13, aparece el efecto -

Thomson.

El coeficiente  $\pi$ , se conoce como coeficiente Peltier.

Y finalmente puede calcularse, la F.E.M. de dos metales diferentes a temperatura no constante.

$$\oint (\vec{E}^{\circ} \cdot d\vec{n}) = \oint \mathcal{E} (\nabla T \cdot d\vec{n}) + \oint (\nabla \mathcal{E} \cdot d\vec{n}) = \oint \mathcal{E} dT$$

Es conveniente expresar esta integral con ayuda de integrales de dos partes, cada una sobre un metal. Si  $T_1$  y  $T_2$  señalan temperaturas de las uniones, y  $\mathcal{E}_1$  y  $\mathcal{E}_2$  señalan los valores absolutos de la F.E.M. de ambos metales.

$$\oint (\vec{E}^{\circ} \cdot d\vec{n}) = \int_{T_1}^{T_2} \mathcal{E}_2 dT + \int_{T_2}^{T_1} \mathcal{E}_1 dT = \int_{T_1}^{T_2} (\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1) dT$$

En el trabajo se empleó una versión simplificada, pero aquí están expresadas las ideas fundamentales.

## APENDICE 2.

Para calcular el error total si  $f = f(T)$  se emplea la ecuación 5-12. En las pruebas que se emplearon, el osciloscopio de su calibración, proporciona el criterio para las indeterminaciones de las lecturas. Al leer se empleó el siguiente criterio. La pantalla del osciloscopio está calibrada en divisiones, cuya graticula más fina, debe de tomarse como el mínimo incremento que el fabricante garantiza que proporciona una lectura distinguible, de las divisiones vecinas. Las especificaciones indican que al leer voltajes habrá una imprecisión de 3%, y al leer tiempos, la imprecisión será del 2 % para el rango de 15°C a 35 °C, de temperatura ambiente, el cual fué el que se tenía en el laboratorio al realizarse las medidas. Entonces al medir frecuencias, la imprecisión no se toma directamente de las especificaciones, sino empleando la relación 5-12. Lo mismo sucede con las demás relaciones.

Entonces para medir los parámetros que se tomarón en cuenta tenemos:

1° ) Frecuencia

$$f = \frac{1}{T} \quad |df| = \frac{1}{T^2} dT \quad \text{A.2.1}$$

2° ) Frecuencia Angular

$$\omega = 2\pi f \quad |d\omega| = 2\pi |df| = \frac{2\pi}{T^2} dT \quad \text{A.2.2}$$

3° ) Ganancia  $\left| \frac{q_0}{q_i} \right| = G$

$$dG = \left| \frac{q_i dq_0 - q_0 dq_i}{q_i^2} \right|$$

4°) Para la relación 3-39, empleada para determinar

$$\frac{A_r}{A_o} = (1 / 2\xi \sqrt{1 - \xi^2}) \quad \text{de donde:}$$

$$\xi = \pm \left[ \frac{1 \pm \sqrt{1 - (A_o/A_r)^2}}{2} \right]^{1/2} \quad \text{A.2.4}$$

las imprecisiones para  $A_o$  y  $A_r$ , son casos particulares de la ecuación A.2.3., entonces para calcular el error en se

necesita:

$$d\xi = \left| \left( \frac{\partial \xi}{\partial A_r} \right) dA_r \right| + \left| \left( \frac{\partial \xi}{\partial A_o} \right) dA_o \right| \quad \text{A.2.5}$$

Calculando las derivadas se obtiene:

$$\left| \frac{\partial \xi}{\partial A_r} \right| = \left\{ \frac{A_o^2}{4A_r^3 \sqrt{1 - (A_o/A_r)^2} \left[ \frac{1 + \sqrt{1 - (A_o/A_r)^2}}{2} \right]^{1/2}} \right. \quad \text{A.2.6.a}$$

$$\left. \frac{A_o^2}{4A_r^3 \sqrt{1 - (A_o/A_r)^2} \left[ \frac{1 - \sqrt{1 - (A_o/A_r)^2}}{2} \right]^{1/2}} \right\} \quad \text{A.2.6.b}$$

$$\left| \frac{\partial \xi}{\partial A_o} \right| = \left\{ \frac{A_o}{4A_r^2 \sqrt{1 - (A_o/A_r)^2} \left[ \frac{1 + \sqrt{1 - (A_o/A_r)^2}}{2} \right]^{1/2}} \right. \quad \text{A.2.7.a}$$

$$\left. \frac{A_o}{4A_r^2 \sqrt{1 - (A_o/A_r)^2} \left[ \frac{1 - \sqrt{1 - (A_o/A_r)^2}}{2} \right]^{1/2}} \right\} \quad \text{A.2.7.b}$$

Para la frecuencia se empleó la ecuación 5-40,  $\omega_p = -$   
 $= \omega_n \sqrt{1 - 2\xi^2}$  donde  $\omega_p$  es la frecuencia del sistema, global  
 que se emplea para la medida y  $\omega_n$ , la frecuencia natural no am-  
 ortiguada.  $\omega_p$  se obtiene directamente de los datos experimentales  
 y su imprecisión  $d\omega_p$ , viene del osciloscopio a través de la ecua-  
 ción A.2.2., de donde:

$$\omega_n = \frac{\omega_p}{\sqrt{1 - 2\xi^2}} \quad (5-40)$$

El error en el cálculo de  $\omega_n$ , empleando los datos del  
 experimento, se obtienen con:

$$E_{\omega_n} = d\omega_n = \left| \frac{\partial \omega_n}{\partial \omega_p} d\omega_p \right| + \left| \frac{\partial \omega_n}{\partial \xi} d\xi \right| \quad A.2.8$$

De la ecuación 5-40.

$$\frac{\partial \omega_n}{\partial \omega_p} = \frac{1}{\sqrt{1 - 2\xi^2}} \quad A.2.9$$

$$\frac{\partial \omega_n}{\partial \xi} = \frac{2\xi \omega_p}{(1 - 2\xi^2)^{3/2}} \quad A.2.10$$

con las que se puede evaluar la ec. A.2.8 para deter-

minar  $Q$ , se emplea la fórmula:

$$Q = \frac{f_0}{f - f_0} = Q(f, f_0)$$

donde  $f$  es la frecuencia correspondiente

$$dQ = \left| \left( \frac{\partial Q}{\partial f} \right)_{(f, f_0)} df \right| + \left| \left( \frac{\partial Q}{\partial f_0} \right)_{(f, f_0)} df_0 \right| \quad A.2.11$$

$$\left| \frac{\partial Q}{\partial f} \right| = \frac{f_0}{(f - f_0)^2} \quad \text{y} \quad \left| \frac{\partial Q}{\partial f_0} \right| = \frac{-f_0}{(f - f_0)^2}$$

$$dQ = \left| \frac{f_0}{(f - f_0)^2} \right| df_0 + \left| \frac{-f_0}{(f - f_0)^2} \right| df \quad A.2.12$$

## BIBLIOGRAFIA

- 1.-) Ernest o. Doebelin  
Measurement Systems  
Revised Ed.  
Mc Graw Hill Kogakusha  
1975.
- 2.-) Readings from Scientific American  
Mathematics in the The modern World  
First Ed.  
N.H. Freemann & Co 1963  
1968.
- 3.-) Campbell Norman  
¿What is Science?  
First Edition  
Ed. Dover  
1963
- 4.-) Coincidine & Ross  
Handbook of applied Instrumentation  
First Ed.  
Mc Graw Hill  
1964.
- 5.-) D.C. Baird  
Experimentation  
First ed.  
Prentice Hall  
1962.
- 6.-) Bunge Mario  
La investigación Científica  
Cuarta Edición  
Ariel  
1975

- 7.-) Joseph J. Carr  
Digital Interfacing With an analog world  
1st Ed.  
Tab Books  
1978.
  
- 8.-) Malmstadt Enke & Crouch  
Electronic Analog measurements and Transducers  
First Ed.  
W.A. Benjamin  
1973
  
- 9.-) Malmstad Enke & Foren  
Electronics for Scientists  
Int. Student Ed.  
Mc Graw Hill  
1976.
  
- 10.-) Malvino Albert Paul  
Electronic Instrumentation Fundamentals  
Int. Student Ed.  
Mc Graw Hill  
1967.
  
- 11.-) Schilling & Belove  
Electronic Circuits Discrete & Integrated  
Int. Student Edition  
Mc Graw Hill  
1968.
  
- 12.-) Colin Cherry  
On Human Communication  
Second Edition  
The M.I.T. Press  
1977.
  
- 13.-) Franklin F. Kuo  
Network Analysis And Synthesis  
Second Edition  
Wiley Toppan  
1966.

- 14.-) **Stanford Goldmann**  
**Frequency Analysis Modulation&Noise**  
**First Ed.**  
**Dover**  
**1967**
- 15.-) **Oliver Cage**  
**Electronic Measurements And Instrumentation**  
**Int. Student Ed.**  
**Mc Graw Hill Kigakusha**  
**1971**
- 16.-) **Forman S. Acton**  
**Analysis of Straigth Line Data**  
**Firsth Ed.**  
**Dover**
- 17.-) **Parzen Emanuel**  
**Modern Probability Theory and its Aplications**  
**Firsth Ed.**  
**Willey**
- 18.-) **Yardley Beers**  
**Introduction to the Theory of error**  
**Second edition**  
**Addison Wesley**  
**1962**
- 19.-) **Russell Langley**  
**Practical Statistics**  
**Firsth Ed.**  
**Dover**
- 20.-) **Antonio Olivera S. Sergio Zúñiga B.**  
**Regresión y Correlación**  
**Primera Edición**  
**I.M.P.O.S.**  
**1977**

- 21.-) D.R. Cox  
Planning of Experiments  
First Ed.  
John Wiley & Sons  
1958.
- 22.-) Howard I. Harrison John G. Bollinger  
Controles Automáticos  
Segunda Edición  
Trillas  
1976
- 23.-) Ludwig Von Bertalanffy  
General System Theory  
Revised Edition  
Ed. George Braziller  
1968
- 24.-) Richard C. Dorf  
Sistemas Automáticos de Control  
I<sup>a</sup> Ed.  
Fondo educativo Interamericano
- 25.-) C.D. Daish D.H. Fender  
Experimental Physics  
Second Ed.  
Hudder and Stughton  
1976.
- 26.-) A.J. Dekker  
Solid State Physics  
Novena Reimpresión  
Mc Millan  
1975
- 27.-) John P. Mc Kelvey  
Solid State and Semiconductor Physics  
Int. Ed. Harper  
1969

- 28.-) Zemansky Mark W.  
Heat and Thermodynamics  
Mc Graw Hill  
5<sup>a</sup> Ed.  
1968.
- 29.-) Walter Guyton Cady  
Piezoelectricity  
Voll y II  
Dover  
1964
- 30.-) Halliday & Resnick  
Physics Voll  
Third Ed.  
Mc Graw Hill  
1978
- 31.-) Halliday Resnick  
Physics Vol. 2  
Third Ed.  
Mc Graw Hill  
1978
- 32.-) F. Sherwood  
Science And Scientific  
First Ed.  
Norton
- 33.-) J.D. Bernal  
Science in History Vol. 1  
3<sup>a</sup> Ed.  
M.I.T. Press
- 34.-) J.D. Bernal  
Historia de la Física Clasica  
1<sup>a</sup> Ed.  
Siglo XXI