

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD

DE

CIENCIAS

ESTRUCTURAS NO LINEALES EN ONDAS DE
LANGMUIR

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE FISICO
PRESENTA

ANDRES LARRAZA HERNANDEZ

MEXICO, D.F.

SEPTIEMBRE 1980



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas

Tesis Digitales

Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©

PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

INDICE

CAPITULO I	INTRODUCCIÓN	1
CAPITULO II	LAS ECUACIONES DE ZAKHAROV	9
2.I.	MODELO DE DOS FLUIDOS PARA EL PLASMA. APROXIMACIÓN LINEAL	9
2.II.	ONDAS DE LANGMUIR EN LA APROXIMACIÓN DE FRECUENCIAS CERCANAS A ω_{pe}	19
2.III.	MODULACIÓN DEL CAMPO ELECTRICO	36
2.IV.	CANTIDADES CONSERVADAS EN EL CASO UNIDIMENSIONAL	39
CAPITULO III	SOLUCIONES DE ONDA SOLITARIA Y LA ECUACIÓN NO LINEAL DE SCHRÖDINGER	43
3.I.	GENERALIDADES	45
3.II.	SOLUCIÓN DE ONDA VIAJERA A LA ECUACIÓN NO LINEAL DE SCHRÖDINGER	49

CAPITULO IV METODO DE DISPERSION INVERSA. ECUACION NO LINEAL DE SCHRÖDINGER

•		59
•		
4.I	INTRODUCCIÓN	58
4.II	SOLUCIÓN DEL PROBLEMA INVERSO DEL OPERADOR LINEAL L	69
4.III	EVOLUCIÓN EN EL TIEMPO DE LOS PARÁMETROS DE DISPERSIÓN	79
4.IV	LEYES DE CONSERVACIÓN	83
4.V	INTERACCIÓN DE DOS SOLITONES	86

CAPITULO V SOLUCIONES DE LAS ECUACIONES DE ZAKHAROV

5.I	SOLUCIÓN DE ONDA VIAJERA	94
5.II	LEYES DE CONSERVACIÓN PARA SOLITONES DE LAMMUR	96
5.III	INTERACCIONES	103
5.IV	SIMULACIONES NUMÉRICAS	109

CAPITULO VI	CONCLUSIONES Y PERSPECTIVAS	114
-------------	--------------------------------	-----

6.1.	CONCLUSIONES	114
------	--------------	-----

6.1	PERSPECTIVAS	116
-----	--------------	-----

APÉNDICES

APÉNDICE I	A-1
------------	-----

APÉNDICE II	A-3
-------------	-----

APÉNDICE III	A-5
--------------	-----

APÉNDICE IV	A-8
-------------	-----

CAPITULO I

INTRODUCCION

El desarrollo de la física frecuentemente presenta problemas que no pueden ser resueltos empleando la herramienta matemática conocida. Por lo tanto su avance impulsa el desarrollo paralelo de los métodos y los conceptos de la física matemática. Este trabajo presenta un ejemplo en el que se puede ver cómo algunos trabajos de matemáticas aplicadas, llevados a cabo durante la década pasada, permiten comprender ciertos fenómenos que se presentan en la física de plasmas.

En varias ramas de la física aparecen fenómenos que son no lineales por naturaleza. Para atacarlos, siempre es instructivo linearizar las ecuaciones que describen al sistema aprovechando la pequeñez de algún parámetro. De este modo, se puede emplear el principio de superposición para construir cualquier solución del problema como una combinación lineal de sus modos normales. Las condiciones a la frontera que se hayan especificado determinan los coeficientes de la combinación. Sin embargo, en algunos casos, esta aproximación no describe al sistema, excepto por ejemplo en la fase inicial de una inestabilidad. Cuanto más se lineariza al sistema se eliminan varias de sus propiedades más interesantes.

Aunque hoy a día se está lejos de contar con métodos generales para atacar problemas no lineales.

les, existen estudios muy completos sobre ciertos tipos de ecuaciones diferenciales que son de interés en física. Entre ellas se encuentran aquellas que presentan ondas solitarias como soluciones estables.

El propósito de este trabajo es exhibir un problema de física de plasmas, el de las oscilaciones de Langmuir, en el que aparece un sistema de ecuaciones diferenciales no lineales conocidas como ecuaciones de Zakharov (Capítulo II). Bajo el punto de vista matemático es un problema interesante de resolver y bastante instructivo, pues bajo ciertas aproximaciones se reduce a problemas que ya han sido resueltos, y sin embargo no se trata de un problema que se haya podido resolver en general. Un aspecto interesante que presenta este sistema es que da lugar a estructuras no lineales que pueden modificar notablemente las propiedades de un plasma. Dichas estructuras juegan un papel semejante a los remolinos en un fluido y por esta razón son relevantes a la llamada "teoría de turbulencia fuerte" [13]. Resolver este problema es fundamental para aplicarlo al calentamiento de plasmas mediante rayos láser o haces relativistas de electrones. También es de interés en otros problemas de astrofísica, como la formación de las llamadas solas. Además, en un contexto distinto al que se muestra aquí, se han derivado ecuaciones similares para el problema del calentamiento por radiopropulsión en plasmas confinados mediante campos magnéticos [27].

En el presente trabajo, se trata únicamente con la aproximación unidimensional de las ecuaciones de

Zakharov, en cuyo caso se reducen a una ecuación de Schrödinger para el campo eléctrico E

$$i\dot{E} + E_{xx} - nE = 0 \quad 1-3a$$

y una ecuación de onda forzada para la variación de la densidad de iones n

$$n_{tt} - n_{xx} = |E|^2_{xx} \quad 1-3b$$

Esta aproximación se aplica a el caso en el que un campo magnético fuerte limita la propagación de ondas longitudinales a una dimensión. El problema que describen estas ecuaciones se interpreta de la siguiente forma. El campo eléctrico ejerce una presión sobre los iones produciendo una depresión en su densidad. La depresión a su vez, se convierte en un potencial que atrapa oscilaciones eléctricas, y estas sostienen a su vez al potencial como se muestra en el capítulo IV, el sistema 1-1 tiene como soluciones ondas solitarias para la depresión de iones, y el campo eléctrico consiste en oscilaciones moduladas por otra onda solitaria montada sobre la depresión de iones (ver figura 1.1).

En este tipo de problemas interesa saber qué ocurre cuando interaccionan o "chocan" dos ondas solitarias. Para estudiar las interacciones existe un método muy poderoso conocido como método de dispersión inversa. Sin embargo no existe por ahora una forma de pasar en general cuando, como es posible aplicar

este método, y sólo ha sido aplicado a unos casos particulares uno de ellos es el de la ecuación cuántica de Schrödinger que corresponde al límite estático del sistema 1-1. En efecto, si se ignora el primer término en 1-1b, entonces $\hbar = -|\mathbf{E}|^2$ y la ecuación 1-1a queda

$$i\mathbf{E}_t + \mathbf{E}\mathbf{x} + |\mathbf{E}|^2\mathbf{E} = 0 \quad 1-2$$

esta es una ecuación que aparece en varias ramas de la física y ha sido estudiada ampliamente.

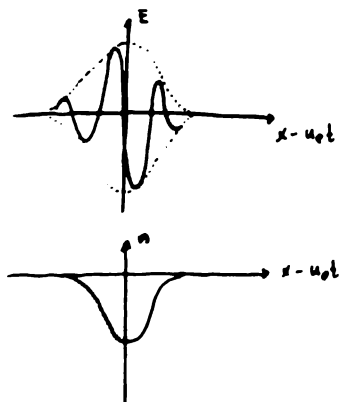


Fig 1: Se muestra la forma de una perturbación de onda solitaria con velocidad u_0 para las ecuaciones 1-1 la velocidad de fase de las oscilaciones en E es distinta de u_0 .

Por lo tanto, antes de analizar el sistema 1-1, se estudia el método de dispersión inversa para la ecuación 1-2, lo que resulta sumamente instructivo (ver Capítulo IV). El resultado que se obtiene es que después de la interacción, las ondas solitarias conservan sus formas y velocidades.

En cuanto a la interacción para ondas solitarias del sistema 1-1, es poco lo que se puede decir bajo el punto de vista analítico. Sin embargo, de las cantidades conservadas que se identifican como momento, energía, y número de plasmones, se puede determinar cuáles procesos pueden ocurrir, aunque no se obtiene información sobre cuándo ocurren. Existen simulaciones numéricas al respecto, que indican que dos ondas solitarias que se encuentran, por ejemplo, pueden fusionarse al tiempo que emiten ondas longitudinales en el medio de iones. El que se lleve a cabo la fusión depende de los parámetros de las ondas; es decir, su amplitud y su velocidad. La razón por la que procesos como este dependen de los parámetros no se trata en este trabajo, y es motivo de un estudio posterior.

La estructura de la tesis es la siguiente: En el capítulo II se definen los conceptos físicos que se emplean; se indican las aproximaciones del problema, se derivan las ecuaciones de Zakharov a partir de un desarrollo de escalas múltiples en el tiempo. En el capítulo III se definen los conceptos de onda solitaria y solitón y se encuentra la solución de una onda solitaria para la ecuación

ción 1-2. En el capítulo IV se describe el método de dispersión inversa y se aplica a la misma ecuación. En el capítulo V se encuentra la solución de una onda solitaria para las ecuaciones de Zakharov y se muestran los caminos que se han seguido para elucidar sus interacciones. Finalmente en el capítulo VI se resumen las conclusiones del trabajo y se señalan sus perspectivas.

•

CAPITULO II

LAS ECUACIONES DE ZAKHAROV

El propósito del capítulo es plantear el problema físico que interesa resolver en este trabajo, así como familiarizar al lector con la terminología que se empleará. Para plantear el problema, debe entenderse que existen distintos modelos para describir a un plasma. El enfoque que se escoja depende del tipo de fenómeno que se desee estudiar a particulares. Si se quieren estudiar fenómenos puramente colectivos, por ejemplo, será más apropiado emplear un modelo de fluido, mientras que, si lo que interesa es estudiar el comportamiento de las partículas ante interacciones individuales, deberá tomarse un modelo cinético.

Puesto que en este trabajo interesa estudiar la forma cómo se propagan distintos tipos de ondas, y la forma cómo se acoplan, se parte del llamado modelo de dos fluidos. Una vez propuesto el modelo, se estudia si existe en la aproximación lineal, y se muestra que para un plasma no magnetizado aparecen dos tipos de ondas longitudinales. Estas son las ondas de Alfvén, llamadas ondas de Langmuir, y las ondas de ionos, conocidas también como ondas sonoras. En esta aproximación, ambos tipos de ondas aparecen como entidades distintas que no están relacionadas entre sí. Más adelante, sin embargo, se muestra que existe un acoplamiento entre ellas debido a una

presión de radiación, que ejerce el campo eléctrico de las ondas de Langmuir sobre los iones. Así pues, bajo las aproximaciones apropiadas, se llega a un sistema de ecuaciones, conocido como ecuaciones de Zakharov que describen este acoplamiento []. Dicho sistema, consiste esencialmente en una ecuación de Schrödinger para el campo eléctrico cuyo potencial es la variación en la densidad de iones, y en una ecuación de onda para esta variación, que se encuentra ligada por la presión del campo eléctrico.

Para finalizar el capítulo, se encuentran las expresiones de algunas cantidades conservadas del sistema en una dimensión, que es el caso que se estudia en detalle en el resto del trabajo.

2.1. MODELO DE DOS FLUIDOS PARA EL PLASMA. APROXIMACIÓN LINDA.

A continuación se expone el problema físico que origina las ecuaciones que se estudian en este trabajo. El plasma que se considera tiene las siguientes características.

- Está completamente ionizado
- Está formado únicamente de hidrógeno
- La temperatura de los electrones (T_e) es mucho mayor que la de los iones (T_i)
- No hay campos magnéticos ni eléctricos externos
- Se toma la aproximación no relativista.

La primera condición, establece la naturaleza eléctrica del plasma. Por ello es necesario introducir las ecuaciones que describen a los campos eléctrico $\vec{E}$ y magnético $\vec{H}$ a partir de las densidades de carga ρ y de corriente $\vec{j}$.

i) Ecuaciones de Maxwell

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{E} &= 4\pi\rho & \nabla \times \vec{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{H} &= 0 & \nabla \times \vec{H} &= \frac{1}{c} 4\pi \vec{j} + \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{aligned} \quad 2-1$$

Las densidades de corriente $\vec{j}$ y carga ρ están determinadas por la carga del electrón e , las densidades de electrones e iones, n_e y n_i , y las velocidades de electrones e iones $\vec{v}_e$ y $\vec{v}_i$, de la siguiente forma

$$\vec{j} = -e(n_e \vec{v}_e - n_i \vec{v}_i)$$

2-2

$$\rho = -e(n_e - n_i)$$

En este trabajo, se sigue la aproximación de fluidos para el plasma. Puesto que se ha supuesto que el plasma está compuesto únicamente de hidrógeno, se puede proponer en particular que existe un fluido de electrones y otro de iones. El comportamiento de cada fluido está dado por dos ecuaciones: una de continuidad que expresa la conservación de la masa, y otra del balance de fuerzas.

ii) Ecuaciones de continuidad para electrones e iones

$$\frac{\partial n_\alpha}{\partial t} + \nabla \cdot (n_\alpha \vec{v}_\alpha) = 0 \quad ; \quad \alpha = i, e \quad (2-3)$$

iii) Ecuaciones de transferencia de momento

$$\frac{\partial \vec{v}_\alpha}{\partial t} + (\vec{v}_\alpha \cdot \nabla) \vec{v}_\alpha + \frac{q_\alpha}{m_\alpha} \vec{E} + \frac{q_\alpha}{m_\alpha c} \vec{v}_\alpha \times \vec{H} + \frac{1}{n_\alpha m_\alpha} \nabla p_\alpha = 0$$

2-4

$$\alpha = i, e \quad , \quad q_\alpha = \mp e$$

Con este conjunto de ecuaciones, se tienen dieciséis incógnitas: n_i , n_e , p_i , p_e , $\vec{v}_i$, $\vec{v}_e$, $\vec{E}$ y $\vec{H}$. Hay aparentemente dieciséis ecuaciones. Sin embargo, por las ecuaciones escalares de Maxwell no superfluas,

ya que pueden recobrase de la divergencia de las dos ecuaciones vectoriales. Para completar el sistema es necesario incluir la ecuación de estado para cada especie, es decir $P_\alpha = P_\alpha(n_\alpha)$. Es una buena aproximación tratar al plasma como un gas ideal [12], [15] con lo que

$$\frac{\nabla P_\alpha}{P_\alpha} = \gamma_\alpha \frac{\nabla n_\alpha}{n_\alpha}, \quad \alpha = i, e \quad 2-5$$

con $P_\alpha = n_\alpha T_\alpha$. Aquí T_α está dada en unidades de energía. Las ecuaciones de transferencia de momento quedan

$$\frac{\partial \bar{u}_\alpha}{\partial t} + (\bar{u}_\alpha \cdot \nabla) \bar{u}_\alpha + \frac{q_\alpha}{m_\alpha} \bar{E} + \frac{q_\alpha}{m_\alpha c} \bar{u}_\alpha \times \bar{H} + \frac{\gamma_\alpha T_\alpha}{n_\alpha m_\alpha} \nabla n_\alpha = 0 \quad 2-6a$$

Con el fin de atender el problema es conveniente solucionar la aproximación lineal del sistema de ecuaciones 2-1 a 2-4. La idea es aclarar algunos conceptos, y volver posteriormente al sistema original de ecuaciones haciendo entonces aproximaciones menores.

Si los electrones en un plasma son desplazados del campo uniforme de los iones, se creará un campo eléctrico tal que restaurará la neutralidad del plasma al impulsar a los electrones hacia sus posiciones originales. Debido a la inercia, los electrones quedarán oscilando alrededor de su posición de equilibrio con una frecuencia característica como

cida como frecuencia de plasma. Esta oscilación es tan rápida que los iones, que son más pesados, no tienen tiempo de responder al campo oscilante. Las oscilaciones de los iones son siempre de baja frecuencia si se les compara con la frecuencia de plasma.

A continuación se deriva este resultado. Para hacerlo se parte de las ecuaciones de movimiento y continuidad.

$$m_\alpha n_\alpha \left[\frac{\partial \bar{u}_\alpha}{\partial t} + (\bar{u}_\alpha \cdot \nabla) \bar{u}_\alpha \right] = q_\alpha n_\alpha \bar{E} - \nabla p_\alpha$$

2-6

$$\frac{\partial n_\alpha}{\partial t} + \nabla \cdot (n_\alpha \bar{u}_\alpha) = 0, \quad \alpha = i, e, \quad q_\alpha = \pm e$$

En este caso no hay campos magnéticos; los movimientos térmicos son nulos ($T_e = T_i = 0$); el plasma es infinito en extensión; y los movimientos ocurren sólo en la dirección de x . Como consecuencia de estas suposiciones, se tiene

$$\nabla = \hat{x} \frac{\partial}{\partial x}, \quad \bar{E} = E \hat{x}, \quad \nabla \times E = 0, \quad \bar{E} = -\nabla \phi$$

No hay, por lo tanto, campo magnético fluctuante; esta es una oscilación electrostática.

La única ecuación de Matsuwell que no requiere, es la ecuación que no contiene el campo magnético. La ecuación de Poisson. Esta es una oscilación de frecuencia alta; la masa del electrón es importante, y la derivación de la neutralidad es el principal efecto en este caso particular. Adicionalmente que

en general la ecuación de Poisson no debe ser usada para encontrar E , pero el caso arriba mencionado es una excepción. La razón por la que no debe ser usada es que un plasma tiene una fuerte tendencia a permanecer neutro. Si se mueven los iones, los electrones los seguirán. Esto es cierto, por supuesto, solo para movimientos de baja frecuencia en donde la inercia de los electrones no es un factor importante. Por lo tanto, a un plasma es posible usualmente, suponer $n_i = n_e$ y $\nabla \cdot E = 0$ al mismo tiempo, lo que se llama "aproximación de plasma". Para el caso particular que interesa, se tiene

$$\nabla \cdot E = \partial E / \partial x = 4\pi e (n_i - n_e) \quad 2-7$$

linealizando las ecuaciones 2-6 y 2-7 se resuelve el problema. Por esto se debe entender que la amplitud de la oscilación es pequeña y los términos que contengan potencias mayores de factores de amplitud pueden ser despreciados. Primero considero las variables separadas a dos partes: una parte de "equilibrio" denotada por el sufijo 0, y una parte de "perturbación" indicada por un sufijo 1. Esta descomposición es válida ya que se está pensando en un plasma inicialmente en reposo, neutro y uniforme, al que se le perturba por un pequeño desplazamiento de sus electrones.

$$\begin{aligned} n_e &= n_{e0} + n_{e1} & v_e &= v_{e0} + v_{e1} & E &= E_0 + E_1 & 2-8 \\ n_i &= n_{i0} + n_{i1} & v_i &= v_{i0} + v_{i1} \end{aligned}$$

Como se ha pensado en un plasma neutro y en reposo antes de haber desplazado los electrones, se tiene

$$\nabla n_{0e} = v_{0e} = E_0 = 0$$

2-9

$$\frac{\partial n_{0e}}{\partial t} = \frac{\partial v_0}{\partial t} = \frac{\partial E_0}{\partial x} = 0$$

Las ecuaciones 2-6 son ahora

$$m_e \left[\frac{\partial v_{1e}}{\partial t} + (v_{1e} \cdot \nabla) v_{1e} \right] = -e E_1 - \frac{\gamma_0 I_0}{n_{0e}} \nabla n_{1e}$$

2-10

$$m_i \left[\frac{\partial v_{1i}}{\partial t} + (v_{1i} \cdot \nabla) v_{1i} \right] = e E_1 - \frac{\gamma_0 I_0}{n_{0i}} \nabla n_{1i}$$

El término convectivo $(v_{1e} \cdot \nabla) v_{1e}$ es cuadrático en amplitud y será despreciado por la linealización. La teoría lineal es válida siempre que $|v_{1e}|$ sea lo suficientemente pequeña como para que los términos cuadráticos sean despreciables de manera análoga.

$$\frac{\partial n_{1e}}{\partial t} + \nabla \cdot (n_{0e} v_{1e} + \cancel{n_{1e} v_{0e}}) = 0$$

$$\frac{\partial n_{1e}}{\partial t} + n_{0e} \nabla \cdot v_{1e} = 0$$

2-11

En la ecuación de Poisson, se observa que $n_{0e} n_{0i}$

para el equilibrio, por lo que se tiene

$$\nabla \cdot E_1 = -4\pi e(n_{1e} - n_{1i}) \quad 2-12$$

Supóngase un comportamiento sinusoidal de la forma $\exp(i(kx - \omega t))$ de las cantidades oscilantes. La derivada temporal $\partial/\partial t$ puede entonces ser reemplazada por $-i\omega$ y el gradiente ∇ por ik . Las ecuaciones 2-10 a 2-12 se expresan ahora

$$\begin{aligned} -im_e \omega v_{1e} &= -eE_1 \\ -im_i \omega v_{1i} &= eE_1 \\ -i\omega n_{1e} &= -in_{0e} v_{1e} k \\ ikE_1 &= -4\pi(n_{1e} - n_{1i}) \end{aligned} \quad 2-13$$

Eliminando E_1 y n_{1e} se tiene

$$\omega^2(v_{1e} - v_{1i}) = \left(\frac{4\pi n_{0e} e^2}{m_e} + \frac{4\pi n_{0i} e^2}{m_i} \right) (v_{1e} - v_{1i})$$

Con lo que si $v_{1e} - v_{1i}$ no se anula

$$\omega^2 = \frac{4\pi n_{0e} e^2}{m_e} + \frac{4\pi n_{0i} e^2}{m_i} \quad 2-14$$

La frecuencia de plasma para cada especie es

$$\omega_{pe}^2 = \frac{4\pi n_{0e} e^2}{m_e} \quad 2-14a$$

Si la temperatura de los electrones no se anula,

se debe introducir el término $\frac{1}{m_0} \nabla \eta$ en la ecuación de movimiento para los electrones, de lo que resulta una relación de dispersión para oscilaciones de electrones

$$\omega^2 = \omega_{pe}^2 + \frac{3}{2} k^2 v_{te}^2$$

donde $v_{te}^2 = 2kT_e/m_e$. Estas oscilaciones se conocen con el nombre de ondas de Langmuir. La frecuencia depende de k y la velocidad de grupo es finita ($v_g = \frac{d\omega}{dk}$). Por lo tanto el medio es dispersivo porque la velocidad de fase es distinta de la velocidad de grupo. En la expresión 2-14 se ve que la mayor contribución a la frecuencia está dada por el término para ω_{pe}^2 .

Además de las ondas de Langmuir, en un plasma hay otros efectos. En el caso de un gas neutro, las ondas de presión que se propagan de una capa a otra por colisiones entre sus moléculas se denominan ondas sonoras. En el modelo que se ha planteado, se han ignorado las colisiones, pero cada especie en el plasma responde como un fluido en forma colectiva al campo eléctrico. En escalas de tiempo mayores o del orden del periodo de oscilación de los iones, estos responden a perturbaciones electrostáticas que se conocen como ondas sonoras de iones. Puesto que este tipo de ondas son de baja frecuencia se puede usar la aproximación de plasma. La ecuación de fluido de iones en ausencia de campo magnético es

$$m_i n_i \left[\frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial t} + (\mathbf{v}_i \cdot \nabla) \mathbf{v}_i \right] = enE - \nabla p = -en \nabla \phi - \nabla p_i$$

donde se ha supuesto $E = -\nabla\phi$. Linealizando y suponiendo ondas planas,

$$-i\omega m_i n_0 v_{ii} = -en_0 k \phi - i\gamma_i k T_i n_i$$

Dada la naturaleza del fenómeno (baja frecuencia) se puede suponer $m_e = 0$ y de la distribución de densidad de electrones, que corresponde al equilibrio, obtenemos

$$n_e = n = n_0 \exp\left(\frac{e\phi}{T_e}\right) = n_0 \left(1 + \frac{e\phi}{T_e} + \dots\right)$$

La perturbación en la densidad de electrones, y por lo tanto en la de iones (aproximación de plasma) es entonces

$$n_i = n_0 \frac{e\phi}{T_i}$$

En esta linealización se han despreciado los términos superiores al desarrollo de Taylor.

La otra ecuación necesaria es la ecuación linealizada de continuidad

$$i\omega n_i = n_0 k v_{ii},$$

substituyendo n_i y ϕ , se tiene

$$i\omega m_i n_0 v_{ii} = \left(e n_0 k \frac{T_0}{e n_0} + i\gamma_i T_i k\right) \frac{n_0 k v_{ii}}{i\omega}$$

$$\frac{\omega}{k} = \left(\frac{T_0 + \gamma_i T_i}{m_i}\right)^{1/2} \approx c_s$$

esta es la relación de dispersión para ondas acústicas de iones, c_s es la velocidad del sonido en un plasma. Los electrones se mueven tan rápido en relación a estas ondas que tienen tiempo de igualar su temperatura en cualquier parte; por lo tanto, los electrones son isotérmicos y $\gamma_e = 1$. De otra forma el factor γ_e aparecería frente a T_e .

Para ver que esta es en realidad una onda, basta con exhibir que se comporta de acuerdo a una ecuación de onda. Partiendo de las ecuaciones de fluidos para electrones e iones linealizadas y con $m_e = 0$

$$m_i \frac{\partial v_{i1}}{\partial t} = -e E_1 - \frac{\gamma_i T_i}{n_0} \nabla n_1$$

$$0 = -e E_1 - \frac{\gamma_e T_e}{n_0} \nabla n_1$$
2-17

Se ha utilizado la aproximación de plasma $n_e = n_i = n$. Suprimiendo las ecuaciones 2-17

$$m_i \frac{\partial v_{i1}}{\partial t} = - \left(\gamma_e T_e + \frac{\gamma_i T_i}{n_0} \right) \nabla n_1 ; \gamma_e = 1,$$

y combinándola con la ecuación de continuidad para iones ya linealizada

$$\frac{\partial (\gamma n_0)}{\partial t} + \nabla \cdot v_{i1} = 0$$

se obtiene

$$\frac{\partial^2 (\gamma n_0)}{\partial t^2} - c_s^2 \nabla^2 n_1 = 0$$
2-18

Las oscilaciones de plasma son básicamente ondas de frecuencia constante, con una corrección debida a los movimientos térmicos. Las ondas de iones son básicamente ondas de velocidad constante y existen sólo cuando hay movimiento térmico. Para ondas de iones, la velocidad de grupo es igual a la velocidad de fase. En las oscilaciones de plasma los iones permanecen esencialmente fijos. En las ondas sonoras de iones, los electrones se mueven de modo que mantienen una distribución de equilibrio. Los iones forman regiones de compresión y rarefacción, como en una onda acústica ordinaria. Las regiones de compresión tienden a expandirse en las regiones de rarefacción por el gradiente de presión y porque los paquetes de iones tienden a expandirse por el campo eléctrico que se forma.

2. II. ONDAS DE LANGMUIR EN LA APROXIMACIÓN DE FRECUENCIAS CERCANAS A ω_p

Todo lo que se hizo anteriormente fue bajo la aproximación lineal, con lo cual se pudieron estudiar por separado las ondas electrostáticas o de Langmuir y las ondas sonoras de iones. Ahora se verá cómo es que las ondas de Langmuir se acoplan con las ondas sonoras. El propósito es llegar a las ecuaciones que describan la interacción entre ambos tipos de ondas. En esta sección se estudiará el sistema

en la aproximación $w \sim w_0$, y más adelante se extenderán los resultados que se obtengan. Toda la información está contenida en el siguiente conjunto de ecuaciones:

i) Ecuaciones de Maxwell

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{E} &= 4\pi\rho & \nabla \times \vec{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{H} &= 0 & \nabla \times \vec{H} &= \frac{1}{c} \left(4\pi \vec{j} + \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \end{aligned} \quad 2-1$$

con

$$\begin{aligned} \vec{j} &= -e(n_e \vec{v}_e - n_i \vec{v}_i) \\ \rho &= -e(n_e - n_i) \end{aligned} \quad 2-2$$

ii) Ecuaciones de continuidad para electrones e iones

$$\frac{\partial n_a}{\partial t} + \nabla \cdot (n_a \vec{v}_a) = 0 \quad ; \quad a = i, e \quad 2-3$$

iii) Ecuaciones de transferencia de momento

$$\frac{\partial \vec{v}_a}{\partial t} + (\vec{v}_a \cdot \nabla) \vec{v}_a + \frac{q_a}{m_a} \vec{E} + \frac{q_a}{m_a} \vec{v}_a \times \vec{H} + \frac{\hbar^2 k_a}{m_a} \nabla n_a = 0 \quad 2-4$$

Para estudiar el fenómeno, es necesario que la ecuación de ruido de iones y la ecuación de propagación del campo eléctrico estén acopladas con algunos términos no lineales mantenidos hasta cierto

orden. Considérense además oscilaciones del plasma tales que $k r_D \ll 1$, donde r_D es el radio de Debye y k el número de onda típico de las oscilaciones de alta frecuencia. Por lo que se vio en la sección anterior, es claro que existen dos escalas para los movimientos en el plasma: las oscilaciones de Langmuir son de frecuencia alta $\omega \geq \omega_{pe}$, y además hay movimientos lentos caracterizados por una escala de tiempo $\tau \geq \omega_{pi}^{-1}$. Para describir el acoplamiento, entonces se tratará de buscar soluciones para el campo eléctrico, las densidades n_a , las velocidades $\vec{v}_a$ y las densidades de carga y corriente ρ y $\vec{j}$, que se reparten en una componente rápida y una lenta. Así pues,

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \vec{E}_L + \vec{E}_s, & \vec{j} &= \vec{j}_L + \vec{j}_s, \\ n_e &= n_0 + \delta n_e + \delta n_s, & \rho &= \rho_L + \rho_s,\end{aligned}\tag{2-19}$$

$$\vec{v}_e = \vec{v}_L + \vec{v}_s$$

Aquí n_0 es la densidad en equilibrio tanto para iones como para electrones. Supóngase que en los movimientos lentos, el plasma es cuasineutro. Esto es, que la gran movilidad de los electrones comparada con la de los iones asegure la neutralidad de carga en la escala de tiempo de los iones, o

$$\begin{aligned}n_i &= n_0 + \delta n_i, \\ v_i &\sim v_L \equiv v\end{aligned}\tag{2-19a}$$

con $\delta n_r \sim \delta n_i$. Sin embargo, la diferencia que existe entre ellos es importante para el acoplamiento que se quiere estudiar. El papel que juegan las componentes rápidas en el acoplamiento, se verá al tomar un promedio de estas, que varía de acuerdo con la escala lenta. En este caso, el promedio de un parámetro A en la escala rápida se define como

$$\langle A \rangle = \frac{1}{T_R} \int_0^{T_R} A dt.$$

En la escala lenta, el promedio de δn_r se anula

$$\langle \delta n_r \rangle = 0,$$

lo que asegura la suposición de cuasineutralidad en esta escala.

Cabe aclarar, que esta descomposición en parte lenta y rápida de las variables, es un método perturbativo de naturaleza distinta al que se hizo en la sección anterior. Este método se llama de "escalas múltiples", mientras que el utilizado en la sección anterior es el resultado de un desarrollo en serie de Taylor.

Para ilustrar el significado físico de este método de escalas múltiples, considérese la distribución de corriente

$$\begin{aligned}
 \dot{q} &= -e[(n_0 + \delta n_z + \delta n_r)(\bar{v}_z + \bar{v}_r) - (n_0 + \delta n_z) \bar{v}_z] \\
 &= -e[n_0 \bar{v}_z - n_0 \bar{v}_z + \delta n_z \bar{v}_z - \delta n_z \bar{v}_z + \delta n_r \bar{v}_z + \langle \delta n_r \bar{v}_z \rangle + \\
 &\quad + n_0 \bar{v}_r + \delta n_r \bar{v}_r + \delta n_r \bar{v}_r - \langle \delta n_r \bar{v}_r \rangle], \quad 2-20
 \end{aligned}$$

por lo cual

$$\begin{aligned}
 j_z &= -e[n_0 \bar{v}_z - n_0 \bar{v}_z + \delta n_z \bar{v}_z - \delta n_z \bar{v}_z + \delta n_r \bar{v}_z + \langle \delta n_r \bar{v}_z \rangle] \\
 j_r &= -e(n_0 + \delta n_z) \bar{v}_r - e[\delta n_r \bar{v}_r - \langle \delta n_r \bar{v}_r \rangle], \quad 2-21
 \end{aligned}$$

en donde se ha sumado y restado el promedio rápido $\langle \delta n_r \bar{v}_r \rangle$. De este modo, j_z tiene únicamente componentes lentas y j_r tiene componentes rápidas. El término en paréntesis cuadrado, representa fluctuaciones con respecto a un término suave, de acuerdo con la figura esquemática 2 I.



Fig 2. I

A pesar de que el término en paréntesis cuadrado de 2-21 y su variación en el tiempo es comparable con los dos términos de j_r , no es despreciado, lo que es

justificará más adelante (ver discusión después de 2-55). Se puede adelantar aquí, que las no linealidades de los iones, consideradas para obtener las ecuaciones de interés, son más importantes por un factor $(v_0/v_i)^2$ ($v_0 = v_e$) que aquellas no linealidades de los electrones despreciadas por el término de generación de armónicos.

Las ondas electrostáticas de Langmuir, reflejan el comportamiento del campo eléctrico debido a los movimientos rápidos de los electrones. Por ello es necesario considerar la ecuación de onda para la componente rápida del campo, obtenida de las ecuaciones de Maxwell,

$$\frac{\partial^2 \mathcal{E}_r}{\partial t^2} + c^2 [\nabla \times (\nabla \times \mathcal{E}_r)] = -4\pi \frac{\partial j_r}{\partial t} \quad 2-22$$

La densidad de corriente ha quedado determinada en la ecuación 2-21 de modo que

$$\frac{\partial j_r}{\partial t} = -e(n_0 + \delta n_e) \frac{\partial \phi_r}{\partial t}, \quad 2-23$$

donde se ha despreciado la variación en el tiempo de δn_e comparada con la de ϕ_r . También, siguiendo el argumento mencionado anteriormente, el término armónico no aparece en la ecuación 2-23.

De la ecuación de movimiento para electrones se obtiene el término $\partial \phi_r / \partial t$ de la siguiente forma

$$\frac{\partial \vec{v}_i}{\partial t} + (\vec{v}_i \cdot \nabla) \vec{v}_i + (\vec{v}_r \cdot \nabla) \vec{v}_i + [(\vec{v}_i \cdot \nabla) \vec{v}_i - \langle (\vec{v}_i \cdot \nabla) \vec{v}_i \rangle] + \\ + \frac{e}{m_e} \vec{E}_r - \frac{k_B T_e}{4\pi n_0 e} \nabla (\nabla \cdot \vec{E}_r) = 0 \quad 2-24$$

La fuerza debida al campo magnético ha sido despreciada, considerando que el plasma es no relativista. En el último término se ha hecho uso de la ecuación de Poisson para la escala rápida en la siguiente forma

$$\nabla \cdot (\vec{E}_r + \vec{E}_i) = -4\pi e (n_0 + \delta n_i + \delta n_r - n_0 + \delta n_i)$$

$$\nabla \cdot \vec{E}_r = -4\pi e \delta n_r$$

por lo tanto

$$\nabla \delta n_r = -\frac{1}{4\pi e} \nabla (\nabla \cdot \vec{E}_r)$$

Los términos convectivos en 2-24 se pueden despreciar como se muestra a continuación. En orden de magnitud, ∂_t se puede estimar a partir de

$$m_e \frac{v_i}{\tau_p} \sim e E_r, \quad v_i = \frac{e E_r}{m_e \omega_{pe}} \sim \sqrt{\frac{\psi}{n_0 m_e}} \quad 2-25$$

Aquí, ψ es la densidad de energía promedio, que para un plasma en equilibrio térmico está expresada en términos de la energía dividida entre la unidad de volumen dada por el ratio de Debye λ_D

$$W \sim \frac{T_e}{r_0^3} \quad 2-26$$

Así pues,

$$v_r \sqrt{\frac{T_e}{n_0 m_e r_0^3}} \sim v_{Te} \sqrt{\frac{1}{N_0}} \quad 2-27$$

Pero, $N_0 \gg 1$ (como se puede ver en la tabla 1, «(f)») De lo anterior, se encuentra que

$$\frac{|(\vec{v}_r \cdot \nabla) \vec{v}_r|}{|\partial \vec{v}_r / \partial t|} \sim \frac{v_r k}{v_{Te}} \sim \frac{k}{k_0 N_0} \ll 1, \quad 2-28$$

para la cual $k_0 = \frac{1}{r_0}$ y k es el número de onda típico de las oscilaciones de alta frecuencia. Por lo tanto, para números de onda de alta frecuencia que son mucho menores que k_0 , el término $(\vec{v}_r \cdot \nabla) \vec{v}_r$ puede ser despreciado. La razón de los otros términos convectivos con respecto a $\partial \vec{v}_r / \partial t$ es del orden de $(k/k_0)(v_r/v_{Te})$, y puesto que para el movimiento lento $v_r \ll v_{Te}$, se pueden despreciar todos los términos convectivos, obteniéndose

$$\frac{\partial \vec{v}_r}{\partial t} + \frac{e}{m_e} \vec{E}_r - \frac{\chi_e T_e}{4\pi n_0 m_e e} \nabla (\nabla \cdot \vec{E}_r) = 0 \quad 2-29a$$

Para frecuencias altas, la compresión que se produce en el plasma es adiabática [20], y a fin de tener acuerdo con la aproximación lineal en la que

se tienen ondas longitudinales, se propone $\gamma_e = 3$.

Por lo tanto, de las ecuaciones 2-22, 2-23 y 2-24 a, se obtiene

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{E}}}{\partial t} + u_{pe}^2 \bar{\mathbf{E}} + c^2 [\nabla \times (\nabla \times \bar{\mathbf{E}})] - 3u_{pe}^2 \nabla (\nabla \cdot \bar{\mathbf{E}}) = - \frac{\delta n_e}{n_0} u_{pe}^2 \bar{\mathbf{E}} \quad 2-29$$

La ecuación 2-29 exhibe el comportamiento del campo eléctrico rápido que se ha estado buscando. Aparece en ella el término de acoplamiento δn_e que relaciona los movimientos rápidos de frecuencia alta, y los movimientos lentos de baja frecuencia. Esta ecuación vectorial se descompone en tres ecuaciones con cuatro incógnitas: las tres componentes de $\bar{\mathbf{E}}$, y δn_e . Por lo tanto, es necesario encontrar aún una ecuación escalar para δn_e que cierre el sistema de ecuaciones y que exhiba de este modo el acoplamiento del sonido de iones con el campo rápido de los electrones. Para hacerlo, se debe emplear la componente lenta de la ecuación 2-4

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{J}}}{\partial t} \cdot (\bar{\mathbf{A}} \cdot \nabla) \bar{\mathbf{A}} + (\bar{\mathbf{A}} \cdot \nabla) \bar{\mathbf{J}} \cdot \bar{\mathbf{A}} + \frac{e}{m_e} \bar{\mathbf{E}} + \frac{e}{m_e} \langle (\bar{\mathbf{A}} \cdot \nabla) \bar{\mathbf{A}} \rangle + \frac{\gamma_e e}{n_0 m_e} \nabla \delta n_e = 0, \quad 2-30$$

en donde los términos promediados tienen el mismo orden de magnitud que los otros términos.

A menor orden en la escala rápida, se tiene

$$m_e \frac{\partial \bar{\mathbf{J}}}{\partial t} = -e \bar{\mathbf{E}} \quad 2-31$$

que combinada con la ecuación de Maxwell para $\partial \mathbf{E} / \partial t$

$$m_e \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \vec{v}_r = -e \nabla \times \vec{E}_r = \frac{e}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t},$$

de

$$\vec{H} = \frac{c}{e} m_e [\nabla \times \vec{v}_r] \quad 2-32$$

La ecuación 2-31 se puede escribir

$$m_e \vec{v}_r = -e \omega_{pe} \vec{E}_r, \quad 2-31a$$

debido a que se está trabajando en la aproximación $\omega \sim \omega_{pe}$.

Así, los dos términos promediados de la ecuación 2-30 se combinan a través de 2-32 para dar por medio de 2-31a

$$\langle [(\vec{v}_r \cdot \nabla) \vec{v}_r] + \frac{e}{mc} (\vec{v}_r \cdot \vec{H}) \rangle = \frac{1}{2} \langle \nabla (\vec{v}_r \cdot \vec{v}_r) \rangle = \frac{e^2}{2m_e^2 \omega_{pe}^2} \nabla \langle E_r^2 \rangle, \quad 2-33$$

y la ecuación 2-30 resulta

$$\frac{\partial \vec{v}_r}{\partial t} + (\vec{v}_r \cdot \nabla) \vec{v}_r + \frac{e}{m_e} \vec{E}_r + \frac{e E_r}{\omega_{pe}} \nabla n_e + \frac{1}{m_e} \frac{\nabla \langle E_r^2 \rangle}{8 \pi n_e} = 0 \quad 2-34$$

En esta ecuación se observan el efecto que tienen las oscilaciones rápidas sobre el movimiento lento de los electrones y se ve que este corresponde a una respuesta a un potencial efectivo ψ_q dado por

$$U_{el} = \langle \bar{\epsilon}_i^2 \rangle / 8\pi n_0 \quad 2-35$$

La fuerza que proviene de este potencial efectivo se conoce como fuerza de Millar o fuerza ponderomotriz y su forma muestra que se trata de una fuerza debida a presión de radiación.

Con la ecuación 2-34 todavía no se obtiene una ecuación escalar para δn_i , más aún, se tiene la componente lenta del campo $\bar{\epsilon}_i$. Para eliminarla, se debe hacer uso de la ecuación de momento para los iones

$$\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial t} + (\bar{v}_i \cdot \nabla) \bar{v}_i = \frac{e}{m_i} (\bar{\epsilon}_i + \bar{\epsilon}_r) + \frac{\gamma_i \bar{v}_i}{n_0 m_i} \nabla \delta n_i = 0 \quad 2-36$$

En la escala rápida, es posible encontrar una ecuación de movimiento para iones

$$0 = \frac{e}{m_i} \bar{\epsilon}_i + \frac{e}{m_i} \langle (\bar{v}_i \cdot \nabla) \bar{v}_i \rangle + \langle (\bar{v}_i \cdot \nabla) \bar{v}_i \rangle \quad 2-37$$

donde $\bar{v}_i$ tiene una estimación a primer orden

$$\bar{v}_i \sim \frac{e}{m_i \omega_{pi}} \bar{\epsilon}_i \quad 2-38$$

Las expresiones 2-37 y 2-38 conducen a

$$-\frac{e}{m_i} \bar{\epsilon}_i = \frac{e^2}{2m_i \omega_{pi}^2} \nabla \langle \bar{\epsilon}_i^2 \rangle = \frac{m_f}{2m_i n_0} \nabla \langle \bar{\epsilon}_i^2 \rangle \quad 2-39$$

apareciendo un potencial efectivo sobre iones $U_{\text{eff}} = \frac{m_0}{m_i} \frac{\langle E_i^2 \rangle}{8\pi n_0}$.
Si se substituye 2-34 en 2-36 se obtiene

$$\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial t} + (\bar{v}_i \cdot \nabla) \bar{v}_i - \frac{q}{m_i} \bar{E}_i + \frac{q_i \bar{v}_i}{n_0 m_i} \nabla \delta n_i + \frac{m_0}{m_i} \nabla \frac{\langle E_i^2 \rangle}{8\pi n_0} = 0. \quad 2-40$$

Eliminando E_i de 2-34 y 2-40 y usando la aproximación $v_i \approx v_i \equiv v$ así como la condición de cuasineutralidad $\delta n_i \approx \delta n_e \equiv \delta n$, se encuentra.

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + (\bar{v} \cdot \nabla) \bar{v} + \frac{q_0 \bar{v} + q_i \bar{v}_i}{m_0 + m_i} \nabla \frac{\delta n}{n_0} + \frac{1}{m_i} \nabla \frac{\langle E_i^2 \rangle}{8\pi n_0} = 0. \quad 2-41$$

Finalmente empleando la ecuación de continuidad para iones, a fin de eliminar los términos en la velocidad

$$\frac{\partial \delta n}{\partial t} + \nabla \cdot [(n_0 + \delta n) \bar{v}] = 0 \quad 2-42$$

combinándola con la ecuación 2-41 y linealizando (en el sentido de la sección 2-1) con respecto a δn y v , se obtiene una ecuación forzada de onda para las fluctuaciones en la densidad de iones

$$\frac{\partial^2 (\delta n / n_0)}{\partial t^2} - c_s^2 \nabla^2 \frac{\delta n}{n_0} = \nabla^2 \frac{\langle E_i^2 \rangle}{8\pi n_0 m_i}, \quad 2-43$$

en donde

$$C_s^2 = \frac{\gamma_e T_e + \gamma_i T_i}{m_e + m_i} \approx \frac{\gamma_e T_e}{m_i} \quad 2-44$$

es la velocidad del sonido

La ecuación 2-43 corresponde a ondas de frecuencia baja para las cuales la compresión es isotérmica y por lo tanto $\gamma_e = 1$. Estrictamente, el valor de γ_e debe obtenerse a partir de las ecuaciones cinéticas. Sin embargo, se puede imponer el siguiente argumento de plausibilidad.

Los electrones mantienen una distribución en equilibrio en el campo lento efectivo total $U_{eff} - e\phi_L$ donde ϕ_L es el potencial de E_L .

$$E_L = -\nabla \phi_L \quad 2-45$$

De la distribución de Boltzmann se sigue que

$$\frac{\delta n_e}{n_0} = \exp[-(U_{eff} - e\phi_L)/T_e] - 1 \doteq -\frac{U_{eff} - e\phi_L}{T_e}, \quad 2-46$$

y como se puede ver, este resultado está de acuerdo con la ecuación 2-34 en el caso estacionario (i.e. $\partial \phi_L / \partial t + (\vec{v}_L \cdot \nabla) \phi_L = 0$) y linealizado,

$$\begin{aligned} \frac{e}{m_e} \vec{E}_L &+ \frac{\gamma_e T_e}{n_0 m_e} \nabla \delta n_e + \frac{1}{m_e} \nabla \langle \hat{\epsilon}_i^2 \rangle = \\ &= -\frac{e}{m_e} \nabla \phi_L + \frac{\gamma_e T_e}{m_e} \nabla \left(\frac{\delta n_e}{n_0} \right) + \frac{1}{m_e} \nabla U_{eff} = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{m_e} \nabla (u_{ef} - e\phi) - \frac{\gamma_e}{m_e} \nabla (u_{ef} - e\phi) = 0$$

por lo tanto $\gamma_e = 1$

Q.E.D.

El sistema de ecuaciones

$$\frac{\partial^2 \epsilon_r}{\partial t^2} + u_{pe}^2 \epsilon_r + c^2 [\nabla \times (\nabla \times \vec{\epsilon}_r)] - 3v_{te}^2 \nabla (\nabla \cdot \vec{\epsilon}_r) = - \frac{\delta n}{n_0} u_{pe}^2 \epsilon_r \quad 2-29$$

$$\frac{\partial^2 (\delta n/n_0)}{\partial t^2} - c_s^2 \nabla^2 \frac{\delta n}{n_0} = \frac{\nabla^2 \langle \epsilon_r^2 \rangle}{8\pi n_0 m_i} \quad 2-43$$

representa el problema básico a resolver en este trabajo. Conviene enfatizar que estas dos ecuaciones describen la interacción que existe entre la componente rápida del campo eléctrico y la variación en la densidad de iones que ocurre a una escala lenta. En otras palabras, exhiben el efecto sobre el movimiento de los iones debido al campo de los electrones y viceversa. La pregunta que se anhela hacer es ¿hasta donde es válido haber usado el esquema de fluido? Para responder, considérese que la perturbación de la densidad de iones es de la forma $\exp[i(q \cdot r - i\omega t)]$. La velocidad de fase debe exceder fuertemente la velocidad térmica de los iones

$$\frac{\omega}{q} \gg v_{ti}$$

2-44

lo que se satisface automáticamente por las ondas no forzadas, ya que

$$\frac{c_s^2}{v_{ti}^2} = \frac{T_e}{T_i} \gg 1 \quad 2-48$$

Por otro lado

$$\frac{\Omega^2}{q} \ll v_{ti} \quad 2-49$$

es equivalente a la llamada aproximación estática, para la cual se puede despreciar el término $\partial^2(\delta n/n_0)/\partial t^2$ en la ecuación 2-43. Esto se puede ver a partir de la relación

$$\frac{\partial^2(\delta n/n_0)/\partial t^2}{c_s^2 \nabla^2(\delta n/n_0)} = \frac{\Omega^2}{c_s^2 q^2} \ll \frac{v_{ti}^2}{c_s^2} = \frac{T_i}{T_e} \ll 1 \quad 2-50$$

Esto supone que los iones tienen una distribución de Boltzmann en el campo electrostático de baja frecuencia, por lo que en 2-49 se cumple, los iones tienen tiempo de alcanzar una distribución de equilibrio se tiene pues

$$\frac{\delta n_i}{n_0} = \exp\left[-\left(\frac{m_e}{m_i} u_1 + e\phi_0\right)/T_i\right] - 1 \approx -\left(\frac{m_e}{m_i} u_1 + e\phi_0\right)/T_i \quad 2-51$$

Combinando las ecuaciones 2-46 y 2-51 y la condición de cuasineutralidad $\delta n_e = \delta n_i$, se obtiene

$$\frac{\delta n}{n_0} \approx - \frac{W_0}{T_e} = \frac{\langle \epsilon_i^2 \rangle}{2 B_{Te}} \quad 2-52$$

El término $\langle \epsilon_i^2 \rangle / 4\pi = W$, que es válido para $k \ll k_D$, es precisamente el doble de la energía electrostática de las ondas. En la expresión 2-52 se encuentra una mitad de ella; la otra mitad reside en el movimiento de los electrones oscilantes.

Debe observarse que este balance estático entre la fuerza de Miller y la depresión en la densidad de iones, significa que para valores pequeños de W , corresponden pequeñas depresiones de densidad. También debe observarse que la ecuación 2-43 se reduce a la 2-52 cuando $\Omega/q \ll v_{ti}$, lo cual por virtud de 2-48 puede ser satisfecha aún si $\Omega/q \gg v_{ti}$. De esta forma, 2-52 es válida para perturbaciones de la densidad de iones que sean mucho mayores o mucho menores que la velocidad térmica de los iones. Sin embargo 2-52 no será válida para la resonancia

$$\frac{\Omega}{q} = v_{ti}. \quad 2-53$$

Para este caso se tiene que la velocidad de fase de la onda sonora coincide con la velocidad térmica de los iones. Esto se puede comparar con un oscilador armónico al que se le perturba con una fuerza externa de frecuencia igual a la frecuencia natural de oscilación

Con esta resonancia, se debe incluir la interacción entre la onda y las partículas individuales, lo que es imposible a partir de las ecuaciones de fluido de las cuales se ha partido. Con esto se contesta la pregunta, y al mismo tiempo es posible justificar que en la ecuación 2-21 se hay despreciado el término armónico. Para esto, considérese la componente rápida de la ecuación de continuidad, estimada como

$$\frac{\delta n_e}{n_0} \sim \frac{k}{k_0} \frac{v_r}{v_{Te}}, \quad 2-54$$

que combinada con las ecuaciones 2-25 y 2-52 llevan a

$$\left(\frac{\delta n_i}{n_0}\right)^2 \sim \left(\frac{k}{k_0}\right)^2 \frac{\delta n_e}{n_0} \quad 2-55$$

La ecuación 2-55 implica, como ya se había adelantado, que las no linealidades de los iones, consideradas al obtener la ecuación 2-29, son más importantes por un factor $(k_0/k)^2$ que aquellas no linealidades de los electrones despreciadas durante la derivación.

2. III. MODULACIÓN DEL CAMPO ELÉCTRICO.

Las ecuaciones 2-29 y 2-49

$$\frac{\partial^2 \bar{E}_r}{\partial t^2} + \omega_{pe}^2 \bar{E}_r + c^2 [\nabla \times (\nabla \times \bar{E}_r)] - 3q_e^2 \nabla (\nabla \cdot \bar{E}_r) = - \frac{8n}{n_0} \omega_{pe}^2 \bar{E}_r$$

$$\frac{\partial^2 (\delta n/n_0)}{\partial t^2} - c_s^2 \nabla^2 \left(\frac{\delta n}{n_0} \right) = \nabla^2 \frac{\langle \bar{E}_r^2 \rangle}{8n n_0 m_i}$$

son no lineales. La no linealidad en la primera ecuación representa el corrimiento en la frecuencia de plasma debido a las fluctuaciones en la densidad de iones. En la segunda ecuación el miembro derecho describe una presión del campo eléctrico sobre la densidad de iones. Se puede adelantar que estas ecuaciones dan lugar al acoplamiento de dos oscilaciones de Langmuir l_1 y l_2 de frecuencia cercana a la frecuencia de plasma con una onda sonora de iones s (Capítulo V) si por el momento se consideran sólo las oscilaciones longitudinales, el proceso obtenido es

$$l_1 \rightleftharpoons l_2 + s$$

2-86

En vista del intervalo de frecuencia tan restringido para el campo E_r y del promedio temporal en la fuerza de Miller es necesario considerar una modulación compleja E' que varíe lentamente [14]. Además, las ecuaciones de campo en 2-29 son distintas

de las de 2-43. La introducción de la modulación da-
rá el acoplamiento en la misma escala de tiempo de
la ecuación 2-43.

Esta modulación E' está definida por

$$\bar{E} = \frac{1}{2} [\bar{E}' \exp(-i\omega_p t) + E'^* \exp(i\omega_p t)] \quad 2-57$$

De 2-57, se sigue que

$$\frac{\partial^2 \bar{E}}{\partial t^2} + \omega^2 \bar{E} = \text{Re} \{ [\bar{E}'_z - 2i\omega_p \bar{E}'_z + (\omega^2 - \omega_p^2) \bar{E}'] \exp(-i\omega_p t) \}, \quad 2-58$$

donde el sufijo t indica diferenciación parcial. En térmi-
nos de E' , la ecuación 2-29 se convierte en

$$\begin{aligned} \text{Re} \{ [\bar{E}'_z - 2i\omega_p \bar{E}'_z + c^2 [\nabla \times (\nabla \times \bar{E}')] - \\ - 3v_{Te}^2 \nabla(\nabla \cdot \bar{E}') + \frac{\partial n}{\partial n_0} \omega_p^2 \bar{E}'] \exp(-i\omega_p t) \} = 0 \end{aligned} \quad 2-59$$

y lo arbitrario en la definición de E' en 2-57 se puede
rectificar, pidiendo que también la parte imaginaria
se anule. Como E' varía lentamente $\bar{E}'_z$ puede ser
despreciado frente a $\omega_p \bar{E}'_z$. La versión linealizada
de 2-59 para ondas longitudinales de la relación
de dispersión

$$\omega^2 = \frac{3}{2} v_{Te}^2 k^2 \quad 2-60$$

que muestra que 2-59 ha extraído la frecuencia de
plasma de la variación del campo eléctrico de la

ecuación 2-51 se puede encontrar que

$$\langle E^2 \rangle = \frac{1}{2} |E'|^2 \quad 2-61$$

Las ecuaciones 2-29 y 2-43 pueden reescribirse entonces de la forma

$$-2i\omega_p^2 E'_e + c^2 [\nabla \times (\nabla \times E')] - 3\omega_{pe}^2 \nabla (\nabla \cdot E') + \frac{\partial n}{\partial t} \omega_{pe}^2 E' = 0 \quad 2-62a$$

$$\frac{\partial^2 (\partial n / \partial t)}{\partial t^2} - c_s^2 \nabla^2 \left(\frac{\partial n}{\partial t} \right) = \nabla^2 |E'|^2 / 16\pi n_0 m_i \quad 2-62b$$

Por medio de las substituciones

$$\frac{2}{3}\sqrt{\mu} \frac{z}{\omega} \rightarrow r, \quad \frac{2}{3}\omega \omega_{pe} t \rightarrow t, \quad \frac{3}{4} \frac{\partial n}{\mu n_0} \rightarrow n \quad 2-63$$

$$\alpha = \frac{c_s^2}{3\omega_{pe}^2}, \quad \frac{E'}{8(\pi n_0 \mu T_e / 3)^{1/2}} \rightarrow E,$$

las ecuaciones 2-62 se pueden escribir en la forma

$$iE_t - \alpha [\nabla \times (\nabla \times E)] + \nabla (\nabla \cdot E) - n E = 0 \quad 2-64a$$

$$n_{tt} - \nabla^2 n = \nabla^2 |E|^2 \quad 2-64b$$

En el nuevo sistema de coordenadas, la unidad de longitud es $\sim 65r_D$, y la unidad de tiempo es ~ 430 oscilaciones completas de plasma, mientras que

las velocidades están en unidades de velocidad acústica.
El balance de presión estática 2-52 en las nuevas
unidades está dado por

$$n = -|E|^2 \quad 2-65$$

En una dimensión, el sistema 2-64 toma
la forma

$$u E_t + E x_x = n E \quad 2-66a$$

$$n_{tt} - n_{xx} = (|E|^2)_{xx} \quad 2-66b$$

a cuyo estudio están dedicados los siguientes capítulos.

2 IV. CANTIDADES CONSERVADAS EN EL CASO UNIDIMENSIONAL.

Consideremos al sistema en términos de nuevas
variables. Para ello, al introducir una cantidad u
a través de la ecuación

$$u_t = n + |E|^2 \quad 2-67$$

se observa que de 2-64b

$$n_t = \nabla^2 u \quad 2-68$$

u es el potencial de flujo de iones, ya que al introducir el flujo V a través de la ecuación

$$V = -\nabla u \quad 2-69$$

V satisface la ecuación de continuidad

$$n_e + \nabla \cdot V = 0 \quad 2-70$$

Lo anterior, permite encontrar las cantidades conservadas a partir de las ecuaciones 2-66, de la forma siguiente. Considérese la ecuación 2-66 a y su compleja conjugada. Como se muestra en el apéndice I, de estas dos ecuaciones se obtienen tres ecuaciones de continuidad

$$\frac{1}{2} [i(E_z \dot{E}_z^* - \dot{E}_z E_z^*) + 2nV]_t + \frac{1}{2} [2|E_x|^2 + \dot{E}^* E_z - E E_z^* + n^2 V^2]_x = 0 \quad 2-71$$

$$[n|E|^2 + |E_x|^2 + \frac{1}{2} V^2 + \frac{1}{2} n^2]_t + [V|E|^2 - (E_z \dot{E}_z^* + \dot{E}_z E_z^*) + nV]_x = 0 \quad 2-72$$

$$[|E|^2]_t - i[E_z \dot{E}^* - \dot{E}_z^* E]_x = 0 \quad 2-73$$

que son leyes locales de conservación. Al integrar en la variable $-\infty < x < \infty$, el término derivado con respecto a x se anula ya que se suponen soluciones acotadas y que tienden a cero en $|x| \rightarrow \infty$. De 2-71 a 2-73 se obtienen

$$\frac{d}{dt} \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} [\epsilon (\vec{E} \cdot \vec{E} - E_x^2) + 2nV] dx = 0 \quad 2-74$$

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} [|\vec{E}|^2 + n|\vec{E}|^2 + \frac{1}{2}V^2 + \frac{1}{2}n^2] dx = 0 \quad 2-75$$

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} |\vec{E}|^2 dx = 0 \quad 2-76$$

Las expresiones 2-74 a 2-76 dan tres cantidades constantes bajo el signo de integración, que se identifican como la cantidad de movimiento, la energía y la acción o "número de plasmones" respectivamente. Para confirmar lo anterior, considere el integrando de la ecuación 2-75 con todas las dimensiones naturales

$$\frac{2}{3} \mu \int \left[\frac{1}{8\pi} \left(\frac{3}{n_0} |\vec{E}'|^2 + \frac{\partial n}{\partial n_0} |\vec{E}'|^2 \right) + n_0 \epsilon \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial n}{\partial n_0} \right)^2 + \frac{1}{2} u_x^2 \right] \right] dx \quad 2-75a$$

donde ahora

$$u_x = \frac{\partial n}{\partial n_0} + \frac{|\vec{E}'|^2}{8\pi n_0 \epsilon c^2} \quad 2-77$$

En el integrando, el primer término representa la densidad de energía de los movimientos de las partículas asociadas al campo como

$$\frac{1}{2} n_0 \epsilon \left(\frac{\partial n}{\partial n_0} \right)^2 = \frac{1}{2} n_0 m_e \left(\frac{v}{c} \right)^2 c^2 = \frac{1}{2} n_0 m_e v^2 \quad 2-78$$

se observa que el último término en la ecuación 2-75a es la densidad de energía debida a la onda de sonido de iones. La última igualdad de la ecuación 2-78 se sigue de la ecuación linealizada de continuidad para ondas sonoras de iones libres.

Con esto, se tienen tres cantidades conservadas

$$P = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} [i (E E_x^* - E^* E_x) + 2nV] dx \quad 2-79$$

$$H = \int_{-\infty}^{\infty} [|E_x|^2 + n|E|^2 + \frac{1}{2}V^2 + \frac{1}{2}n^2] dx \quad 2-80$$

$$N = \int_{-\infty}^{\infty} |E|^2 dx \quad 2-81$$

Sobre las ecuaciones 2-80 y 2-81, un comentario:

El hecho de que la energía de un campo electrostático en el vacío es proporcional a $\int E^2 d^3r$, sugiere que N pueda ser la energía a orden cero del sistema, es decir, la energía del campo, mientras que H es la energía a primer orden, resultante de los números de onda no nulos del campo eléctrico y de la perturbación en la densidad de iones.

CAPITULO III

SOLUCIONES DE ONDA SOLITARIA Y LA ECUACION NO LINEAL DE SCHRÖDINGER

En el capítulo anterior se ha mostrado que existe un acoplamiento entre las ondas de Langmuir y las ondas acústicas de iones debido a la fuerza ponderomotriz. Este fenómeno se ha descrito mediante las ecuaciones de Zakharov que constituyen un sistema no lineal para el campo eléctrico y la variación en la densidad de iones.

Ahora bien, resolver este sistema de ecuaciones en general es un sistema complejo, por lo que se debe empezar por estudiar casos particulares, que son de interés por sí mismos y que sirven de experiencia para atacar los casos más complicados. En este trabajo se estudian las ecuaciones de Zakharov en una dimensión (ecuaciones 2-66)

En el límite estático el sistema se reduce a una ecuación de Schrödinger para el campo eléctrico con un término cúbico. En la literatura esta ecuación se conoce como "la ecuación no lineal de Schrödinger" (NLSE) y ha sido estudiada ampliamente en relación con diversos problemas físicos [18]. La propiedad más interesante de esta ecuación, es que presenta soluciones estables de ondas solitarias que se propagan sin deformarse. Este tipo de ondas

conocidas con el nombre de solitones, se presenta en varias ecuaciones de evolución y han producido un gran interés durante la última década [18].

El propósito de este capítulo es presentar los ideas fundamentales de solitón y estudiar en particular el caso de la ecuación no lineal de Schrödinger, para la cual se encuentra la solución de una onda solitaria. Las soluciones de más de una onda solitaria son motivo de un estudio más completo, el que se deja para el siguiente capítulo.

3. I. GENERALIDADES.

En 1895 Korteweg y de Vries dedujeron una ecuación para olas en agua poco profunda que introduce efectos no lineales y dispersivos pero ignora la disipación. Para dicha ecuación que tiene la forma de

$$q_t + uq q_x + q_{xxx} = 0 \quad ; \quad x = kx',$$

y es conocida como ecuación de Korteweg de Vries (KdV) pueden obtenerse soluciones de onda viajera proponiendo

$$q(x, t) = q(x - ut),$$

es decir, soluciones en un sistema coordenado que se mueve con velocidad u para el cual la onda aparece estacionaria. Eso implica que dada $\xi = x - ut$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{d}{d\xi}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = -u \frac{d}{d\xi}$$

de tal forma que la ecuación diferencial parcial original se reduce a una ecuación ordinaria que puede ser resuelta por métodos analíticos o gráficos. La naturaleza cualitativa de tal solución se puede contrastar con la siguiente figura:

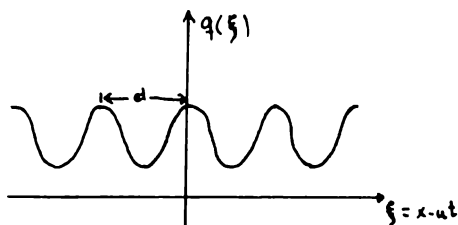


Fig 3-1

Aquí se muestra un tren infinito y periódico de crestas localizadas para el cual, la velocidad u del tren y el espacio d entre las crestas varía en forma continua. La onda solitaria se obtiene tomando el límite $d \rightarrow \infty$.

En lo sucesivo se emplearán términos que conviene definir ahora.

Dada una ecuación de onda, se entiende por onda viajera $q(\xi)$ una solución que depende de x y t a través de un solo argumento $\xi = x - ut$, donde u es una constante fija. Entre la clase de ondas viajeras, se tienen las ondas localizadas.

Una onda solitaria $q_s(\xi)$ es una onda viajera localizada si es distinta de cero en una región finita, o su derivada es distinta de cero solo en una región finita. En la figura siguiente se muestran dos tipos de ondas solitarias (La derivada de la segunda de la primera).

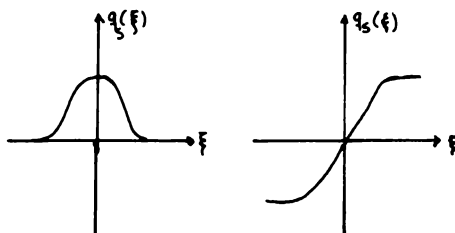


Fig 3-2

Originalmente se creyó que si dos ondas solitarias fueran puestas inicialmente en curso de colisión, la interacción no lineal de la colisión destruiría completamente su integridad e identidad. Sin embargo, los resultados obtenidos para la ecuación KdV por Zabusky y Kruskal [26] por métodos numéricos indicaron que las ondas solitarias que emergen de las colisiones tienen las mismas formas y velocidades con las que entraron. Zabusky y Kruskal llamaron a estas ondas solitarias, "solitones".

Aunque el término solitón fue aplicado originalmente solo a las ondas solitarias de la ecuación de KdV hoy ahora muchas ecuaciones de onda no lineales de las que se sabe que existen soluciones similares. Lo que formalmente se entiende por solitón es la siguiente definición operacional:

Un solitón $q_3(x-ut)$ es una onda solitaria, solución de una ecuación de onda que asintóticamente preserve su forma y velocidad por las colisiones con otras ondas solitarias. Es decir, dada cualquier solución $q(x,t)$ compuesto solo de ondas solitarias

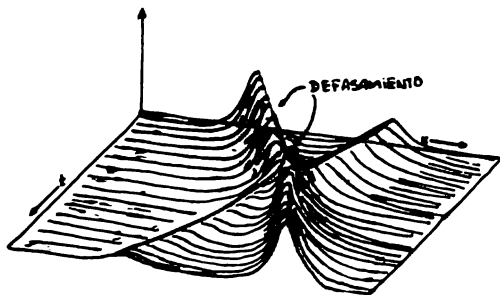
para tiempos negativos grandes

$$\phi(x,t) \sim \sum_{j=1}^N q_j(x-u_j, t) \quad , \quad t \rightarrow -\infty$$

tales ondas solitarias serán llamadas solitones si salen de la interacción con nada más que un corrimiento de fase, es decir

$$q(x,t) \sim \sum_{j=1}^N q_j(x-u_j, t + \delta_j) \quad ; \quad \delta_j = \text{cte} \quad , \quad t \rightarrow \infty.$$

La siguiente figura ilustra este concepto.



Bajo esta definición, el ejemplo más simple de solitón es una solución de onda viajera de pulso de la ecuación lineal de onda no dispersiva

$$q_{xx} - \frac{1}{c^2} q_{tt} = 0$$

Parece ser extraño que una ecuación de onda no lineal y dispersiva pueda exhibir una solución de onda solitaria y mucho menos, un solitón. El efecto de introducir dispersión sin no linealidad en la ecuación de onda $q_{xx} - \frac{1}{2}q_{tt} = 0$ es el de destruir la posibilidad de ondas solitarias debido a que los varios componentes de Fourier de cualquier condición inicial se propagarán a velocidades diferentes. Introducir no linealidad sin dispersión elimina la posibilidad de que existan ondas solitarias debido a que la energía es continuamente inyectada (a través de la generación de armónicos) hacia modos de frecuencia mayor [6]. En el dominio del tiempo esto a menudo aparece como ondas de choque. Pero con ambas, dispersión y no linealidad, las ondas solitarias pueden formarse. La onda solitaria puede ser entendida cualitativamente como la representación del balance entre el efecto de no linealidad y el de dispersión. Las ondas solitarias también aparecen en sistemas que están caracterizados por no linealidades y disipación. Otra vez se obtiene un balance, pero en este caso es entre el bombeo de energía de la no linealidad y su consumo por la perturbación disipativa.

3 II SOLUCIÓN DE ONDA VIAJERA A LA ECUACIÓN NO LINEAL DE SCHRÖDINGER

Considerense las ecuaciones de Zakharov en

una dimensión

$$i E_t + E_{xx} = n E \quad 3-1a$$

$$n_{tt} - n_{xx} = |E|^2_{xx} \quad 3-1b$$

Si se introduce la aproximación de límite estático se puede ignorar el primer término de la segunda ecuación (ver discusión de ecuación 2-50)

$$n = -|E|^2 \quad 3-2$$

Así pues, la primera ecuación toma la forma

$$i E_t + E_{xx} + |E|^2 E = 0 \quad 3-3$$

que se conoce como la ecuación no lineal de Schrödinger.

El estudio de esta ecuación es importante por si mismo, ya que se aplica en una variedad de problemas bastante amplia [18], y por supuesto a ondas de Langmuir en un plasma [8].

A continuación se obtienen, siguiendo el artículo de Scott et al [], soluciones de onda viajera de la ecuación 3-3 y se muestran algunas características de la solución que resulta.

El campo E puede ser expresado como

$$E = \phi(x,t) e^{i\theta(x,t)} \quad 3-4$$

donde ϕ y θ son funciones reales. Después de cancelar los factores exponenciales en 3-3 y descomponer en una parte real y una parte imaginaria, la ecuación, se obtiene

$$\begin{aligned}\phi_{xx} - \phi \theta_x^2 - \phi \theta_t + \phi^3 &= 0 & 3-5a \\ \phi \theta_{xx} + 2\phi_x \theta_x + \phi_t &= 0 & 3-5b\end{aligned}$$

Ahora, se busca una solución de onda viajera para (3-5), para la cual, el portador viaja con una velocidad u_r , o sea

$$\theta = \theta(x - u_r t), \quad 3-6a$$

y la envolvente viaja con una velocidad u_e

$$\phi = \phi(x - u_e t). \quad 3-6b$$

Después la transformación

$$\begin{aligned}\xi &= x - u_r t \\ \eta &= x - u_e t,\end{aligned} \quad 3-7$$

las ecuaciones 3-5 se convierten en ecuaciones ordinarias,

$$\phi'' - \phi \theta'^2 + u_r \phi \theta' + \phi^3 = 0 \quad 3-8a$$

$$\phi \theta'' + 2\phi' \theta' - u_e \phi' = 0 \quad 3-8b$$

en donde las primas indican derivación con respecto al argumento.

Si se multiplica por ϕ la ecuación 3-8b, se encuentra que esta se puede expresar como

$$\frac{d}{dx} [\phi^2 (2\theta'_x - u_e)] = 0, \quad 3-9$$

lo cual implica que

$$\phi^2 (2\theta'_x - u_e) = \text{cte.} \quad 3-10$$

La ecuación 3-10 puede ser resuelta para θ'_x y substituirse en la 3-8a. A fin de evitar términos exponenciales en esta segunda integración, es conveniente escoger a la constante en 3-10 como cero. La elección $\phi^2 = 0$ conduce a la solución trivial, que carece de interés físico. Por lo tanto, se hace la elección $2\theta'_x - u_e = 0$, con lo que $\theta'_x = u_e/2$. Entonces 3-8a queda

$$\phi'' - \frac{1}{4}(u_e^2 - 2u_e u_e)\phi + \phi^3 = 0 \quad 3-11$$

Multiplicando por $2\phi'$ a 3-11, esta ecuación se puede expresar en la forma

$$\frac{d}{dx} \left(\phi'^2 - \frac{1}{4}(u_e^2 - 2u_e u_e)\phi^2 + \frac{1}{2}\phi^4 \right) = 0, \quad 3-12$$

con lo que

$$\phi' = \sqrt{P(\phi)}, \quad 3-13$$

con

$$P(\phi) = -\frac{1}{2}\phi^4 + \frac{1}{4}(u_e^2 - 2u_e u_0)\phi^2 + c \quad 3-14$$

De la ecuación 3-13, se ve que la ecuación 3-11 integra a la forma elíptica

$$\int_{\phi(0,0)}^{\phi(x,t)} \frac{d\phi}{\sqrt{P(\phi)}} = x - u_e t = \eta \quad 3-15$$

La naturaleza cualitativa de la solución puede ser determinada de las consideraciones hechas sobre el polinomio $P(\phi)$. Considérese primero el caso para el cual la constante $c=0$ la forma del polinomio es como la mostrada en la figura 3-4 si $u_e^2 > 2u_e u_0$. Entonces las raíces simples en $\phi = \pm \phi_0$ requieren de un punto de retorno en la función $\eta(\phi)$ dado que $\int_0^{\phi} ds/\sqrt{s}$ converge. En $\phi=0$, por otro lado, $P(\phi)$ tiene una raíz doble, y dado que $\int_0^{\phi} ds/\sqrt{s}$ no converge, $\eta(\phi)$ no tiene punto de retorno.

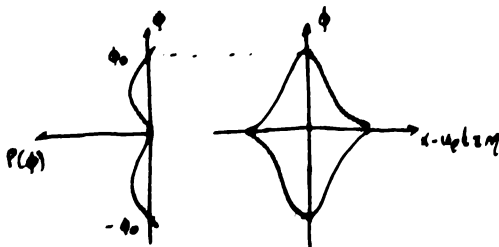


Fig 3-4 Envolvente de solución para $0 < u_0 < u_e$

La amplitud del pulso es por lo tanto

$$\phi_0 = \sqrt{\frac{u_e^2 - 2u_e u_p}{2}} \quad 3-16$$

Debe notarse que para u_e y u_p ambos positivos o negativos la condición

$$u_e(u_e - 2u_p) > 0 \quad 3-17$$

debe ser satisfecha o de lo contrario $P(\phi)$ será negativa en la vecindad del origen y por lo tanto el lado derecho de la ecuación 3-15 será imaginario. Entonces en el sentido estricto

$$\phi(x, t) = \phi(x - u_e t) \exp\left[i \frac{u_e}{2} (x - u_p t)\right]$$

no es una onda viajera sino una onda oscilante modulada por una envolvente cuya velocidad u_e es distinta de la velocidad de fase u_p .

Integrando la ecuación 3-15 de $\phi=0$ a $\phi=+\phi_0$ se encuentra la solución

$$\phi = \phi_0 \operatorname{sech}\left[\int_0^\phi \phi_0(x - u_e t)\right] \quad 3-18$$

Para $c \neq 0$, $P(\phi)$ aparece como en la figura 3-5 para $c = (-\frac{1}{2}(u_e^2 - u_e u_p)^2, 0)$ y las raíces simples de $P(\phi)$ en $\pm\phi_1$ y $\pm\phi_2$ requieren puntos de retorno en $\eta(\phi)$.

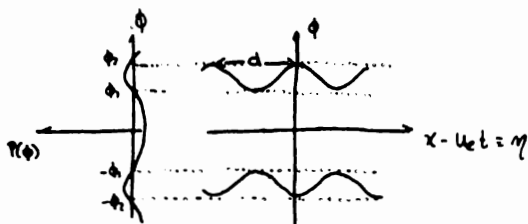


Fig 3-5. Envolvente periódica para la ec. NLS.

La integración de la ecuación 3-15 en términos de funciones elípticas da:

$$\phi = \phi_1 \left[1 - \lambda \left(1 - \frac{\phi_1^2}{\phi_2^2} \right) \cdot \operatorname{sn}^2 \left[\sqrt{\frac{\gamma}{2}} (x - ut) \right] \right]^{-1/2} \quad 3-19$$

donde sn^2 tiene módulo $\gamma = (1 - \phi_1^2/\phi_2^2)$. La ecuación 3-19 se reduce a la 3-18 cuando $c \rightarrow 0$ por la izquierda y $\phi_1 \rightarrow 0$, γ tiene el período espacial (longitud de onda)

$$d = \frac{4}{\phi_2} K(\gamma) \quad 3-20$$

donde K es la integral elíptica completa de primer especie [4]

Por otro lado, se tiene que

• $\operatorname{sn} z$ es la función elíptica de Jacobi "sinus amplitudinis" de z tiene un desarrollo en serie

$$\operatorname{sn} z = z - (1/k^2) \frac{z^3}{3!} + (1/k^2 + k^2) \frac{z^5}{5!} - \dots \quad \text{donde } k$$

es el módulo de $\operatorname{sn} z$

$$\Theta' = \frac{u_0}{2} \quad 3-21$$

donde la integración debe hacerse para $\xi = x - u_0 t$. Esto da el siguiente resultado

$$\Theta = \frac{u_0}{2} (x - u_0 t) \quad 3-22$$

Haciendo uso de la expresión 3-16

$$\Theta = \left(\frac{1}{2} \phi_0^2 - \frac{1}{4} u_0^2 \right) t + \frac{u_0}{2} x, \quad 3-23$$

con lo cual se tiene la expresión para E

$$E = \phi_0 \operatorname{sech} \left[\frac{\sqrt{2}}{2} \phi_0 (x - u_0 t) \right] \exp \left\{ i \left[\frac{1}{2} u_0 x - \left(\frac{1}{4} u_0^2 - \frac{1}{2} \phi_0^2 \right) t \right] \right\} \quad 3-24$$

Designando nuevas variables

$$\begin{aligned} \phi_0 &\rightarrow E_0 \\ u_0 &\rightarrow M, \end{aligned} \quad 3-25$$

se obtiene finalmente

$$E = E_0 \operatorname{sech} \left[\frac{\sqrt{2}}{2} E_0 (x - Mt) \right] \exp \left\{ i \left[\frac{1}{2} M x - \left(\frac{1}{4} M^2 - \frac{1}{2} E_0^2 \right) t \right] \right\} \quad 3-26$$

Esta onda solitaria se propaga con velocidad constante y sin cambios en forma. Como la ecuación NLS representa un medio dispersivo, las ondas solitarias se mantienen por el balance entre sus tendencias de dispersión lineal y sus tendencias no lineales atractivas. Son pues, por propia naturaleza antidisipativas, pues, por propia naturaleza no lineales.

CAPITULO IV

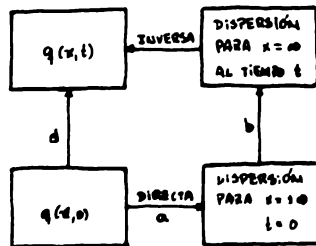
METODO DE DISPERSION INVERSA.

ECUACION NO LINEAL DE SCHRÖDINGER

El método de dispersión inversa constituye una herramienta para resolver ciertas ecuaciones de evolución

$$\psi_t = K(\psi)$$

donde K denota un operador no lineal. El método puede ser representado por el diagrama de la figura de abajo



La idea es evitar la trayectoria d , es decir, resolver la ecuación de evolución directamente, sino recorrer las trayectorias a , b , y c que involucran sólo problemas lineales. A lo largo del capítulo se describe detalladamente este cuadro y los problemas lineales conectados a cada trayectoria. El método se aplica a la ecuación no lineal de Schrödinger para finalmente exhibir la interacción de dos solitones.

4.1. INTRODUCCIÓN.

La contribución más importante hecha por Gardner, Greene, Kruskal y Miura a la teoría del solitón, fue el desarrollo del "método inverso", donde el problema con valores iniciales para la ecuación no lineal

$$q_t + 6qq_x + q_{xxx} = 0 \quad 4-1$$

$$q(x, 0) = f(x), \quad f(x) \text{ conocida}$$

de Korteweg-de Vries (KdV), puede ser resuelto a través de una serie de problemas lineales [9]. Este método fue expresado posteriormente en una forma general por P.D. Lax [13]. A continuación se verá cual es el problema lineal relacionado con la ecuación de KdV, y se apreciará el esquema de Lax.

Considérese el problema con valores iniciales descrito por 4-1. Las soluciones que se quieren buscar son soluciones $q(x, t)$ con un número infinito de derivadas espaciales x , todas tendiendo a cero cuando $|x| \rightarrow \infty$. Se puede demostrar que la ecuación de KdV tiene una solución única de este tipo dada $f(x)$ suficientemente suave y que se anula rápidamente cuando $|x| \rightarrow \infty$. Gracias por Gardner et al., se da una familia de operadores diferenciales $L(t)$ de segundo orden

$$L(t) = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} + q(x, t) \quad 4-2$$

Donde t indexa la familia y $q(x, t)$ es una solución de la ecuación de KdV.

El problema de eigenvalores para el operador L es

$$- \psi_{xx} + q(x, t) \psi = \lambda \psi, \quad 4-3$$

donde

$$\psi = \psi(x, \lambda(t), t) \quad 4-4$$

Debe notarse que para t fijo, se tiene la ecuación de Schrödinger para una partícula en el potencial $q(x, t)$. Dado que las soluciones $q(x, t)$ para la ecuación de KdV son suaves, acotadas y tienden a cero cuando $|x| \rightarrow \infty$, esta ecuación de Schrödinger tendrá al menos un número finito de estados ligados negativos y un espectro continuo para eigenvalores positivos. Para un t fijo, se definen las soluciones de dispersión de 4-3 por las condiciones de frontera.

$$\begin{aligned} \psi(x, \lambda, t) &\approx e^{-i\lambda x} + R(\lambda, t) e^{i\lambda x} & x \rightarrow \infty \\ &\approx T(\lambda, t) e^{i\lambda x} & x \rightarrow -\infty \end{aligned}$$

y las soluciones ligadas

$$\begin{aligned} \psi_n(x, \lambda_n(t), t) &\approx e^{i\lambda_n(t)x} & x \rightarrow \infty \\ &\approx c_n(\lambda_n(t), t) e^{i\lambda_n(t)x} & x \rightarrow -\infty \end{aligned}$$

El problema directo no puede establecerse como sigue. Dado q , encontrar los parámetros de dispersión.

sión $[l_n, c_n, R(\lambda), T(\lambda)]$ Para el operador de Schrödinger el problema inverso ha sido resuelto: Dado los datos de dispersión $[l_n, c_n, R(\lambda), T(\lambda)]$ encontrar $q(x, t)$ para toda x .

El problema de dispersión del operador de Schrödinger es bien conocido. La pregunta ahora es ¿qué clase de ecuaciones

$$q_t = K(q)$$

4-5

dejarán invariantes los eigenvalores del operador lineal de segundo orden de Schrödinger? Aquí, K denota un operador no lineal en algún espacio de funciones. Sea este espacio $\mathcal{D}$ y supóngase que a cada función q en $\mathcal{D}$ se le puede asociar un operador lineal L con la propiedad de que si u cambia con t de acuerdo con (4-5) el operador $L(t)$ que también cambia con t permanece unitariamente equivalente a un operador fijo $L(t_0)$. Que un operador sea unitariamente equivalente quiere decir que existe una familia paramétrica de operadores unitarios $U(t)$ (operadores de evolución en el tiempo) tales que

$$U(t)^{-1} L(t) U(t) = L(t_0)$$

4-6

es independiente del tiempo, es decir, la derivada con respecto al tiempo de 4-6 queda

$$-U^{-1} U_t U^{-1} L U + U^{-1} L_t U + U^{-1} L U_t = 0 \quad 4-6a$$

Cualquier grupo unitario de operadores que se escriba como

$$U(t) = e^{Bt}, \quad B \text{ antisimétrico},$$

satisface la ecuación

$$U_t = B U$$

Si se utiliza este resultado en (4-6a) se obtiene

$$-BL + L_t + LB = 0$$

lo cual implica

$$L_t = [B, L]$$

4-7

Entonces, si q satisface la ecuación $q_t = K(q)$ L_t puede expresarse en términos de q y todo lo que resta es verificar que la ecuación 4-7 tiene una solución antisimétrica B , y que el conmutador en 4-7 reproduce el operador no lineal K .

Para el operador de Schrödinger lineal, con ayuda de la ecuación 4-7 se pueden encontrar una clase de ecuaciones diferenciales bajo las cuales el operador

$$L = \sum_{j,k} p_j p_k + \frac{1}{2} q$$

sea unitariamente equivalente para toda t

Con la selección de este operador L_1 se reduce a una multiplicación por $\frac{1}{6}q_x$, de tal forma que debe buscarse un operador antisimétrico B cuyo conmutador con L_1 sea la multiplicación. El operador antisimétrico más simple es D

$$[D, D^2 + \frac{1}{6}q] = \frac{1}{6}q_x$$

Esto muestra que si q cambia de acuerdo con la ecuación

$$q_t = q_x \quad ; \quad q = q(x-t)$$

los eigenvalores de $D^2 + \frac{1}{6}q(x-t)$ son ciertamente los mismos que de $D^2 + \frac{1}{6}q(x)$

Considere ahora un operador antisimétrico de tercer orden

$$B = D^3 + bD + Db$$

con b un coeficiente a escoger. El conmutador con L_1

$$[B, L_1] = \frac{1}{2}q_x D^2 + \frac{1}{2}q_x D + \frac{1}{6}q_{xxx} - 4b_x D^2 - 4b_x D - b_{xxx} + \frac{1}{6}b q_x$$

Para eliminar todos los ordenes excepto el orden cero se debe escoger

$$b = \frac{1}{6}q$$

Con esta selección, $[B, L_1]$ conduce al resultado

$$\frac{1}{24} [u_{xxx} + u u_x]$$

Poniendo $B = 24 \theta$, se verifica que

$$[B, \mathbf{L}] = K(u)$$

donde $K(u) = u_x$ es la ecuación de KdV

Un resultado que debe enfatizarse es que si

$$L_t = [B, L]$$

entonces los eigenvalores de L son constantes. Además, no solo los eigenvalores de L son constantes, sino que también las eigenfunciones generalizadas de L cambian de acuerdo a una ecuación de evolución especial. Para ver estas dos afirmaciones, Considere la ecuación 4-6 la representación de L es entonces

$$L(t) = U(t) L(0) U^{-1}(t)$$

y la eigenfunción $\psi_n(x, l(0), 0)$ al tiempo $t=0$ con eigenvalor $\lambda(0)$ por definición resuelve el problema de eigenvalores

$$L(0) \psi_n(x, l(0), 0) = \lambda(0) \psi_n(x, l(0), 0)$$

Operando con $U(t)$

$$U(t) L(0) \psi_n(x, l(0), 0) = \lambda_n(0) U(t) \psi_n(l(0), 0)$$

lo que puede escribirse como

$$[U(t) L(t) U^\dagger(t)] [U(t) \psi_n(x, t(0), 0)] = L(t) [U(t) \psi_n(x, t(0), 0)]$$

pero, dado que $U(t)$ es un operador de evolución en el tiempo, se debe tener

$$U(t) \psi_n(x, t(0), 0) = \psi_n(x, t_n(t), t)$$

con lo que

$$L(t) [U(t) \psi_n(x, t(0), 0)] = \lambda_n(t) [U(t) \psi_n(x, t(0), 0)]$$

$$\text{y} \quad \lambda_n(t) = \lambda_n(0)$$

Esto no dice otra cosa que el número de estados ligados n y de eigenvalores de tales estados λ_n no cambia con el tiempo t cuando $q(x, t)$ evoluciona de acuerdo con 4-5. Estos estados están determinados por el valor inicial $q(x, 0) = f(x)$. Estos eigenvalores pueden ser considerados como funciones del valor inicial $f(x)$; como tales son constantes de movimiento.

La manera de encontrar la ecuación de evolución especial para las eigenfunciones generalizadas de L , parte del hecho de que L sea unitariamente equivalente y satisfaga la relación de conmutación 4-7, y de que ψ satisfaga el problema de eigenvalores

$$L\psi = \lambda\psi,$$

que derivando con respecto al tiempo da el resultado

$$\psi_t \lambda_1 + \lambda \psi_t = L\psi_t + L_t \psi.$$

Como L es tal que satisface 4-7

$$\psi_t \lambda_2 + \lambda \psi_t = L(\psi_t - B\psi) + B\lambda\psi$$

$$\begin{aligned}\psi_t \lambda_1 &= L(\psi_t - B\psi) - \lambda(\psi_t - B\psi) \\ &= (L - \lambda)(\psi_t - B\psi).\end{aligned}$$

Si $\lambda_2 = 0$, las eigenfunciones de L evolucionan en el tiempo de acuerdo con

$$\psi_t = B\psi \quad 4-8$$

ya que $B\psi - \lambda_1\psi$ está en el núcleo de $(L - \lambda)$.

Con este esquema, dados los datos iniciales $q(x, 0)$, se puede encontrar $q(x, t)$ a través del siguiente procedimiento

i) Problema directo: Calcular los parámetros de dispersión para $|x| = \infty$ y $t = 0$ del conocimiento de $q(x, 0)$.

ii) Evolución en el tiempo de los parámetros de dispersión

iii) Problema inverso: del conocimiento de los parámetros de dispersión de k como función del tiempo, construir $q(x, t)$.

Hay muchas dificultades asociadas a esta exposición: a) No hay un método general para encontrar L y B que satisfagan 4-7; (b) tampoco hay un método establecido convenientemente para resolver el problema inverso del operador L , de hecho solo se sabe resolver el problema inverso para algunos L 's; lo que se puede hacer es tomar un operador lineal L cuyo problema inverso se sepa resolver y a partir de ahí, con operadores B sencillos, generar ecuaciones K que puedan ser de algún interés. Sucede que varias ecuaciones de interés puedan generarse de esta manera.

Ablowitz et al, [2], siguiendo esta idea, y fuertemente motivados por el trabajo de Zakharov y Shabat [25] sobre la ecuación no lineal de Schrödinger, consideraron el problema lineal

$$L\psi = \lambda\psi \quad 4-9$$

donde

$$L \equiv \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & -q \\ r & -\frac{\partial}{\partial x} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \psi \equiv \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \quad 4-10$$

Con los "potenciales" arbitrarios $q(x, t)$ y $r(x, t)$

que se anulan en $|x| \rightarrow \infty$. Consideraron además que B tiene la forma general

$$B \equiv \begin{bmatrix} A(x, t; \xi) & B(x, t; \xi) \\ C(x, t; \xi) & -A(x, t; \xi) \end{bmatrix} \quad 4-11$$

donde los coeficientes A, B, C son arbitrarios. Con esta descripción 4-8 adquiere la forma

$$\frac{d\psi}{dt} = B\psi \quad 4-12$$

Tomando la derivada t de 4-9 y la derivada x de 4-12 y pidiendo que $\xi_t = 0$, se tienen tres condiciones para los coeficientes arbitrarios

$$Ax = qC - rB \quad 4-13a$$

$$Bx + 2i\xi B = q_t - 2Aq \quad 4-13b$$

$$Cx - 2i\xi C = r_t + 2Ar \quad 4-13c$$

En este punto, se desea resolver el conjunto de ecuaciones 4-13 para A, B, C . Haciendo esto, se asegura que 4-9 y 4-12 son compatibles. En general se encuentra que esto se puede hacer si se satisface otra condición. Esta es la de la ecuación de evolución 4-5! Dado que ξ es un parámetro libre, es natural estudiar el caso de soluciones en potencias de ξ . De hecho, el desarrollo más simple que genera una ecuación no lineal de

evolución es tomar $A = A_2 \xi^2 + A_1 \xi + A_0$, y lo mismo para B y C . Se sustituyen estos desarrollos en 4-13 y se igualan coeficientes de potencias iguales de ξ . Por lo pronto, de 4-13b y 4-13c se sigue que $B_2 = C_2 = 0$ y de 4-13a que $A_2 = a_2$ (independiente de x). Se usan 4-13b y 4-13c para resolver para B_1 y C_1 y 4-12a para resolver para A_1 . Repitiendo el proceso, se obtienen todos los coeficientes A_i, B_i, C_i . En particular, las ecuaciones de evolución están determinadas por el balance de ξ^0 a través de las dos últimas ecuaciones en 4-13

$$\begin{aligned} q_t &= 2A_0 q + B_0 \\ r_t &= -2A_0 r + C_0 \end{aligned}$$

Se obtienen entonces

$$A = a_2 \xi^2 + a_1 \xi + \left(\frac{1}{2} a_2 q r + a_0 \right)$$

$$B = i a_2 q \xi + (i a_1 q - \frac{1}{2} a_2 q r)$$

$$C = i a_2 r \xi + (i a_1 r + \frac{1}{2} a_2 r r),$$

junto con las ecuaciones de evolución

$$0 = q_t + \frac{1}{2} a_2 (q_{xx} - 2q^2 r) - i a_1 q_x - 2a_0 q$$

$$0 = r_t - \frac{1}{2} a_2 (r_{xx} - 2q^2 r) - i a_1 r_x + 2a_0 q$$

Por lo tanto, para $a_0 = -2i$ y $r = -q^2/2$, $q_0 = a_0 = 0$ se tiene la ecuación no lineal de Schrödinger que es la relación de consistencia a orden cero para que 4-9 y 4-12 sean compatibles:

$$q_t - i q_{xx} - i |q|^2 q = 0$$

4. II. SOLUCIÓN DEL PROBLEMA INVERSO DEL OPERADOR LINEAL L.

Considérese el caso $q, r \rightarrow 0$ cuando $|x| \rightarrow \infty$. Al tiempo $t=0$ se tienen los valores $q(x,0)$, $r(x,0)$ dados. De 4-9 se resuelve el problema de dispersión para los eigenvalores discretos (complejos) y la información apropiada para las eigenfunciones correspondientes a ξ real ($\xi = \text{Re } \xi$): las constantes de estados ligados y "el coeficiente de reflexión". Este es el parámetro de dispersión al tiempo $t=0$, denotado por D

$$D(\xi, 0) = \{ \{ \xi_n, C_n(0) \}_{n=1}^{\infty}, R(\xi, 0) \} \quad (a)$$

La ecuación 4-12 da la información de la evolución del parámetro de dispersión a cualquier tiempo $D(\xi, t)$

$$D(\xi, t) = \{ \{ \xi_n, C_n(t) \}_{n=1}^{\infty}, R(\xi, t) \} \quad (b)$$

Estos dos pasos son análogos a encontrar la trans-

formada de Fourier inicialmente y a cualquier tiempo t . El siguiente paso, es calcular la función

$$B(x; t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R(\xi, t) e^{i\xi x} d\xi = i \sum_{j=1}^N c_n(t) e^{i\xi_n x} \quad (c)$$

del parámetro de dispersión la inversión es completa cuando se resuelve la ecuación integral lineal

$$K(x, y) - \frac{1}{2} B(x+y) - \int_x^{\infty} \bar{K}(x, s) \bar{B}(s+y) ds = 0 \quad (d)$$

de donde $q(x, t)$ se construye de la fórmula

$$q(x, t) = -2 K_1(x, x; t) \quad (e)$$

Si $R(\xi, 0) = 0$ la ecuación integral es degenerada y puede resolverse en forma cerrada. Las soluciones especiales correspondientes a estas condiciones iniciales son solitones.

En esta sección se desarrollarán las ideas que dan lugar a las ecuaciones c, d, y e, es decir se resolverá el problema inverso del operador L .

Para ello, considérese la ecuación 4-9

$$\begin{aligned} v_{,x} + i \xi v &= q(x, t) v, \\ v_{,x} - i \xi v &= r(x, t) v, \end{aligned}$$

No se tiene hasta ahora la posibilidad de resolver el sistema, pero sí se puede investigar su com-

portamiento asintótico para $|x| \rightarrow \infty$ y para $|k| \rightarrow \infty$. Supóngase que $q(x,t), r(x,t) \rightarrow 0$, $|x| \rightarrow \infty$, entonces se pueden encontrar soluciones linealmente independientes con comportamientos asintóticos, de la misma forma que para el caso de la ecuación KdV, dados por

$$\begin{cases} \psi \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{i\xi x} & \xi \text{ real} \\ \psi \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{i\xi x} + O(1/\xi) & \text{Im } \xi > 0 \end{cases} \quad x \rightarrow \infty \quad 4-14$$

$$\begin{cases} \phi \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i\xi x} & \xi \text{ real} \\ \phi \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i\xi x} + O(1/\xi) & \text{Im } \xi > 0 \end{cases} \quad x \rightarrow -\infty \quad 4-15$$

$$\begin{cases} \bar{\psi} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i\xi x} & x \rightarrow \infty \\ \bar{\phi} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{i\xi x} & x \rightarrow -\infty \end{cases} \quad \text{Im } \xi < 0, \quad 4-16$$

donde se ha hecho la extensión analítica al semiplano superior e inferior de ξ . Además, de la misma forma que se hace en los problemas de dispersión para el operador lineal de Schrödinger, es posible relacionar estos dos conjuntos (ϕ y ψ) de soluciones linealmente independientes a través de los parámetros de dispersión $a(\xi, t)$, $b(\xi, t)$, $\bar{a}(\xi, t)$, $\bar{b}(\xi, t)$

$$\begin{aligned} \phi &= a \bar{\psi} + b \psi \rightarrow \begin{pmatrix} a e^{-i\xi x} \\ b e^{i\xi x} \end{pmatrix} & x \rightarrow \infty \\ \bar{\phi} &= \bar{b} \bar{\psi} - \bar{a} \psi \rightarrow \begin{pmatrix} \bar{b} e^{-i\xi x} \\ \bar{a} e^{i\xi x} \end{pmatrix} & x \rightarrow -\infty \end{aligned}$$

donde $a(\xi, t)$ puede ser extendido analíticamente en el semiplano superior $\text{Im } \xi > 0$ y $\bar{a}(\xi, t)$ puede extenderse en el semiplano inferior $\text{Im } \xi < 0$.

Por otro lado, el comportamiento asintótico de 4-9 para $|\xi| \rightarrow \infty$ se puede obtener de relaciones de consistencia entre la expansión en eigenfunciones. Esto es posible al expresar ψ en términos de una función $\tilde{\psi}$ que tenga un desarrollo de Laurent en ξ y que reproduzca el comportamiento asintótico 4-15. Esta representación es

$$\psi = e^{i\xi x} \tilde{\psi} = \begin{pmatrix} e^{i\xi x} \tilde{\psi}_1 \\ e^{i\xi x} \tilde{\psi}_2 \end{pmatrix}, \quad 4-17$$

donde

$$\tilde{\psi}_1 = \frac{1}{\xi} \tilde{\psi}_1^{(1)} + \frac{1}{\xi^2} \tilde{\psi}_1^{(2)} + \dots$$

4-18

$$\tilde{\psi}_2 = 1 + \frac{1}{\xi} \tilde{\psi}_2^{(1)} + \dots$$

Con 4-17 el problema de eigenvalores puede verse como

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & -q \\ 1 & -\frac{\partial}{\partial x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\xi x} \tilde{\psi}_1 \\ e^{i\xi x} \tilde{\psi}_2 \end{pmatrix} = -i\xi \begin{pmatrix} e^{i\xi x} \tilde{\psi}_1 \\ e^{i\xi x} \tilde{\psi}_2 \end{pmatrix}, \quad 4-19$$

con lo que

$$\begin{aligned} 2i\tilde{\psi}_1 \xi + \tilde{\psi}_{1,x} &= q\tilde{\psi}_2 \\ \tilde{\psi}_{2,x} &= i\tilde{\psi}_1 \end{aligned}$$

4-20

Con 4-18 y 4-20, para el mismo orden en ξ se tiene

$$2i \tilde{\psi}_1^{(0)} = q \Rightarrow \tilde{\psi}_1^{(0)} = \frac{q}{2i}$$

$$\tilde{\psi}_{2,1} = i \tilde{\psi}_1^{(0)} \Rightarrow \tilde{\psi}_2^{(0)} = -\frac{1}{2i} \int_{\infty}^0 q r dy$$

donde se ha hecho $\tilde{\psi}_2^{(0)}(\infty) = 0$ dado que su desarrollo de Laurent es convergente.

Para el punto en el infinito, es decir por $|\xi| \rightarrow \infty$, $\text{Im } \xi > 0$

$$\tilde{\psi}_1 \rightarrow \frac{1}{\xi^{1/2}} q(\infty) + O(1/\xi^2) \quad 4-21a$$

$$\tilde{\psi}_2 \rightarrow 1 - \frac{1}{2\xi} \int_{\infty}^0 q(y)r(y) dy + O(1/\xi^2) \quad 4-21b$$

con lo que para $|\xi| \rightarrow \infty$, $\text{Im } \xi > 0$

$$\begin{cases} e^{-i\xi x} \psi_1 \rightarrow \frac{1}{2i\xi} q(\infty) + O(1/\xi^2) \\ e^{-i\xi x} \psi_2 \rightarrow 1 - \frac{1}{2i\xi} \int_{\infty}^0 q(y)r(y) dy + O(1/\xi^2) \end{cases} \quad 4-22$$

y de la misma forma para $|\xi| \rightarrow \infty$, $\text{Im } \xi < 0$

$$\begin{cases} \phi_1 e^{i\xi x} \rightarrow 1 - \frac{1}{2i\xi} \int_{-\infty}^x r(y)q(y) dy + O(1/\xi^2) \\ \phi_2 e^{i\xi x} \rightarrow -\frac{1}{2i\xi} r(\infty) + O(1/\xi^2) \end{cases} \quad 4-23$$

Hasta ahora solo se conocen los comportamientos asintóticos del conjunto de soluciones linealmente independientes. Es necesario encontrar relaciones de consistencia que resuelvan el potencial $q(x, t)$. Para ello, supóngase que ψ y ϕ pueden ser representadas por (ver apéndice II)

$$\psi(\xi, x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{i\xi x} + \int_x^\infty \underline{L}(x, s) e^{i\xi s} ds \quad 4-24a$$

$$\phi(\xi, x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i\xi x} - \int_{-\infty}^x \underline{L}(x, s) e^{i\xi s} ds \quad 4-24b$$

las cuales dan el comportamiento asintótico para $|x| \rightarrow \infty$ de las funciones ψ y ϕ . Para ver el comportamiento en $|\xi| \rightarrow \infty$, supóngase que $\underline{K}(x, \infty) = 0$ y $\underline{L}(x, -\infty) = 0$, entonces al integrar por partes n veces con $u = \underline{K}(x, s)$ analítica y $dv/ds = e^{i\xi s}$ se obtiene para $|\xi| \rightarrow \infty$

$$\begin{cases} \psi(\xi, x) \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{i\xi x} - \frac{1}{i\xi} \underline{L}(x, x) e^{i\xi x} + O(1/\xi^2), & \text{Im } \xi > 0 \\ \phi(\xi, x) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i\xi x} - \frac{1}{i\xi} \underline{L}(x, x) e^{i\xi x} + O(1/\xi^2), & \text{Im } \xi < 0 \end{cases} \quad 4-25$$

Comparando con 4-22 y 4-23

$$\begin{cases} k_1 = -\frac{1}{2} q(x) \\ k_2 = \frac{1}{2} \int_x^\infty q(y) r(y) dy \end{cases} \quad 4-26$$

$$\begin{cases} L_1 = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} q(y) r(y) dy \\ L_2 = \frac{1}{2} r(x) \end{cases} \quad (4-27)$$

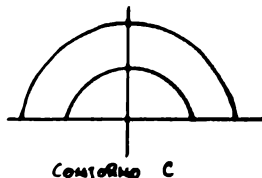
Basta entonces, para resolver el problema, encontrar una ecuación para L y k . Esta ecuación sale de la relación de consistencia para $\psi, \phi, \bar{\psi}, \bar{\phi}$ dada por

$$\begin{cases} \phi = a \bar{\psi} + b \psi \\ \bar{\phi} = \bar{b} \bar{\psi} - \bar{a} \psi, \end{cases} \quad 4-28$$

y de los comportamientos asintóticos que ya son conocidos por los párrafos anteriores

Consideres el contorno C en el plano complejo

$\xi = \xi + i\eta$, que parta de $\xi = -\infty + i0^+$, que pase sobre todos los ceros de $a(\xi)$ y que termine en $\xi = \infty + i0^+$. Supóngase por el momento que $a(\xi)$ tiene solo un número finito de ceros en el semiplano superior de ξ .



considerar la integral

$$\int_C \frac{d\xi'}{a(\xi')} \frac{\phi(\xi', z)}{\xi' - \xi} e^{i\xi'x} \quad 4-29$$

para ξ por debajo de C . Supóngase que $a(\xi) \rightarrow 1, |\xi| \rightarrow \infty$.
Para ξ grande, la integral 4-29 da

$$\int_C \frac{\phi(\xi', z)}{\xi' - \xi} e^{i\xi'x} d\xi' = -\pi i \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad 4-30$$

dado que $\phi(\xi', z) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i\xi'x}$, $\xi' \rightarrow \infty$

Partiendo de la ecuación 4-28 y usando el resultado 4-30, se tiene que para $\xi' \rightarrow \infty$

$$-\pi i \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \int_C \frac{b(\xi')}{a(\xi')} \frac{e^{i\xi'x} \psi(\xi', z)}{\xi' - \xi} + \int_C \frac{\bar{\psi}(\xi', z) e^{i\xi'x}}{\xi' - \xi} d\xi'$$

$$-\pi i \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \int_C \frac{b(\xi')}{a(\xi')} \frac{e^{i\xi'x} \psi(\xi', z)}{\xi' - \xi} d\xi' - 2\pi i \bar{\psi}(\xi, z) e^{i\xi x} + \pi i \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

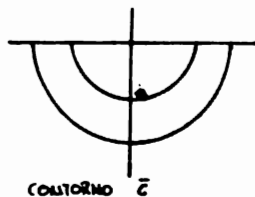
Con lo que finalmente se obtiene

$$\bar{\psi}(\xi, z) e^{i\xi x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{b(\xi')}{a(\xi')} \frac{e^{i\xi'x} \psi(\xi', z)}{\xi' - \xi} d\xi', \quad \text{Im } \xi > 0$$

4-31

de la misma manera, considerando la integral sobre
el contorno C' que coincide en $\xi' = -\infty + i0^-$ y que

para bajo todos los casos de $\bar{a}(\xi)$ terminando en $\xi = \infty + i0^-$



$$\int_{\bar{c}} \frac{d\xi'}{\xi' - \xi} \frac{\bar{\phi}(\xi', z)}{a(\xi')} e^{-i\xi'z} d\xi'$$

con lo que se obtiene para $\bar{\phi} = -\bar{a}\psi + \bar{b}\psi$, $\text{Im } \xi < 0$

$$\psi(\xi, z) e^{-i\xi z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2\pi i} \int_{\bar{c}} \frac{\bar{b}(\xi')}{\bar{a}(\xi')} e^{-i\xi'z} \frac{\bar{\psi}(\xi', z)}{\xi' - \xi} d\xi' \quad 4-32$$

De la condición de compatibilidad

$$\psi(\xi, z) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-i\xi z} + \int_0^\infty \bar{k}(z, s) e^{-i\xi s} ds \quad 4-33a$$

$$\bar{\psi}(\xi, z) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i\xi z} + \int_0^\infty \bar{k}(z, s) e^{-i\xi s} ds \quad 4-33b$$

substituida en 4-31, se obtiene

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \int_0^\infty \bar{k}(z, s) e^{-i\xi(z-s)} ds &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2\pi i} \int_{\bar{c}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{\bar{b}(\xi')}{a(\xi')} \frac{e^{-i\xi'(z+s)}}{\xi' - \xi} d\xi' \\ &+ \frac{1}{2\pi i} \int_0^\infty k(z, s) \int_{\bar{c}} \frac{\bar{b}(\xi')}{a(\xi')} \frac{e^{-i\xi'(z+s)}}{\xi' - \xi} d\xi' ds, \end{aligned}$$

multiplicando por $\frac{1}{2\pi} e^{i\eta z}$ e integrando sobre η (Transformada de Fourier)

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} k(x, s) e^{i\eta(x+z-s)} ds d\eta &= \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{2\pi i} (') \int_c \int_{-\infty}^{\infty} \frac{b(\eta')}{a(\eta')} \frac{e^{i\eta'(x+z)} e^{i\eta z}}{\eta' - \eta} d\eta' d\eta + \\ &+ \frac{1}{2\pi} \frac{1}{2\pi i} \int_c \int_{-\infty}^{\infty} k(x, s) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{b(\eta')}{a(\eta')} \frac{e^{i\eta'(x+s)} e^{i\eta z}}{\eta' - \eta} d\eta' ds d\eta, \quad 4-33 \end{aligned}$$

dado $\tau > 0$, en decir $x+z=y > x$, las integrales evolucionan a

$$\begin{aligned} \bar{k}(x, x+z) &= -\frac{1}{2\pi} (') \int_c \frac{b(\eta')}{a(\eta')} e^{i\eta'(x+z)} d\eta' - \\ &- \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} k(x, s) \int_c \frac{b(\eta')}{a(\eta')} e^{i\eta'(x+z+s)} ds d\eta' \quad 4-34 \end{aligned}$$

donde el lado izquierdo de 4-33 corresponde al propagador del lado izquierdo de 4-34 y se ha aprovechado el término $1/(\eta' - \eta)$ para la integración sobre η . Si ahora

$$B(x+y) = \frac{1}{2\pi} \int_c \frac{b(\eta')}{a(\eta')} e^{i\eta'(x+y)} d\eta', \quad 4-35$$

se obtiene la ecuación de Marchenko para $y > 0$

$$\bar{k}(x, y) + (') B(x+y) + \int_{-\infty}^{\infty} k(x, s) B(s+y) ds = 0 \quad 4-36$$

y de manera análoga para $y \geq 0$

$$K(x, y) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \bar{B}(x+y) = \int_x^\infty \bar{E}(x, s) \bar{B}(s+y) ds \quad 4-37$$

Las ecuaciones 4-36 y 4-37 determinan a K y de K se obtienen q y r , siempre y cuando estas ecuaciones integrales tengan solución.

4. III. EVOLUCIÓN EN EL TIEMPO DE LOS PARÁMETROS DE DISPERSIÓN.

Considérese de nueva cuenta el problema

$$\begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = a \bar{\psi} + b \psi \rightarrow \begin{pmatrix} a e^{-i k x} \\ b e^{i k x} \end{pmatrix}, \quad x \rightarrow \infty \quad 4-38$$

y las ecuaciones de evolución

$$v_{1t} = A(x, t; k) v_1 + B(x, t; k) v_2$$

4-39

$$v_{2t} = C(x, t; k) v_1 - A(x, t; k) v_2$$

Para el problema de la ecuación no lineal de Schrödinger, se tiene

$$\begin{aligned} A &= -2i k' - i q \rightarrow -2i k' \\ B &= 2q k + i q x \rightarrow 0 \quad |x| \rightarrow \infty \\ C &= 2q k - i q \rightarrow 0 \end{aligned} \quad 4-40$$

Las funciones de test ϕ , están relacionadas con las funciones del problema lineal por medio de una constante que en general depende del tiempo.

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = c(t) \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} \rightarrow c(t) \begin{pmatrix} a e^{-i\eta t} \\ b e^{i\eta t} \end{pmatrix}, \quad x \rightarrow \infty \quad 4-41$$

por otro lado

$$\begin{pmatrix} v_{1t} \\ v_{2t} \end{pmatrix} \rightarrow c(t) \begin{pmatrix} A a e^{-i\eta t} \\ -A b e^{i\eta t} \end{pmatrix} \quad x \rightarrow \infty \quad 4-42$$

Cuando $x \rightarrow -\infty$

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = c(t) \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} \rightarrow c(t) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i\eta x}, \quad x \rightarrow -\infty \quad 4-43$$

Por lo tanto

$$c'(t) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i\eta x} = -2i\eta^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} c(t) e^{-i\eta x} \quad x \rightarrow -\infty$$

$$c(t) = \alpha e^{-2i\eta^2 t} \quad 4-44$$

De 4-41, para $x \rightarrow \infty$

$$\begin{cases} v_{1t} = -2i\eta^2 \alpha e^{-2i\eta^2 t} e^{-i\eta x} + \alpha e^{-2i\eta^2 t} e^{-i\eta x} a_1 \\ v_{2t} = -2i\eta^2 \alpha e^{-2i\eta^2 t} e^{i\eta x} b + \alpha e^{-2i\eta^2 t} e^{i\eta x} b_1 \end{cases} \quad 4-45$$

y de 4-42, para $x \rightarrow \infty$

$$\begin{cases} v_{1t} = -2i k^2 a e^{-2i k^2 t} e^{-i k^2 x} a \\ v_{2t} = 2i k^2 a e^{-2i k^2 t} e^{-i k^2 x} b \end{cases} \quad 4-46$$

Por lo tanto de 4-45 y 4-46 se encuentra

$$\begin{aligned} -2i k^2 a + a_t &= -2i k^2 a \\ -2i k^2 b + b_t &= 2i k^2 b, \end{aligned}$$

con lo que

$$\begin{cases} a(x, t) = a(x, 0) \\ b(x, t) = b(x, 0) e^{4i k^2 t} \end{cases} \quad 4-47$$

De la misma manera, se encuentra que

$$\bar{a}(x, t) = \bar{a}(x, 0)$$

$$\bar{b}(x, t) = \bar{b}(x, 0) e^{-4i k^2 t}$$

Para finalizar esta sección, recordemos que el problema hecho hasta ahora es con q y r que se anulan fuera de un intervalo finito. Para el caso q y r arbitrarios, no se conocen las funciones espaciales. Sin embargo supongamos que $b(x) = \bar{b}(x) = 0$ para $|x|$ real. Para q y r arbitrarios, el potencial de ecuación 4-35 queda

$$\begin{aligned}
 B(x+y, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{C}} e^{i\xi(x+y)} \frac{b(\xi, 0)}{a(\xi, 0)} e^{4i\xi^2 t} d\xi = \\
 &= -i \sum_{k=1}^N \frac{b_k}{a_k} e^{i\xi_k(x+y)} e^{4i\xi_k^2 t} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{b(\xi)}{a(\xi)} e^{i\xi(x+y)} d\xi
 \end{aligned}$$

donde $(a_k)^{-1}$ es el residuo de $[a(\xi)]^{-1}$ en $\xi = \xi_k$. Si a tiene un cero en el eje real ($\eta=0$), entonces la suma de (4-36) reemplaza i por $i/2$ para estos polos, y la integral es reemplazada por su valor principal de Cauchy.

Cuando $t \rightarrow \pm\infty$, la expresión anterior da el resultado

$$B(x+y, t) \rightarrow \sum_{k=1}^N c_k(0) e^{i\xi_k(x+y)} e^{4i\xi_k^2 t} \quad 4-48$$

donde debe observarse que los términos individuales en la suma están determinados por los datos iniciales $q(x, 0)$.

De esta forma se han obtenido las ecuaciones de Marchenko con núcleos degenerados. Se obtienen soluciones cerradas y representan ondas solitarias. Con este desarrollo, se completa la demostración de la expresión 4-24, que por otro lado se demuestra en el apéndice II.

4. IV. LEYES DE CONSERVACIÓN.

Dado que el operador H_q asociado a la solución q de la ecuación

$$iq_t + q_{xx} + q|q|^2 = 0$$

$$q(x, 0) = f(x)$$

tiene eigenvalores constantes en el tiempo y tales eigenvalores son funcionales de $q(x, 0)$ y por lo tanto integrales de la ecuación no lineal de Schrödinger, se debe estar interesado en encontrar las leyes de conservación de esta ecuación. Estas leyes de conservación deben estar relacionadas con las soluciones $q(x, t)$, la cual a su vez está relacionada con el campo $E(x, t)$ a través de

$$q = i E / \sqrt{2}$$

para la ecuación no lineal de Schrödinger.

Considérese el problema de eigenvalores 4-9

$$v_{1,x} + i \mathcal{H} v_1 - q \phi_1 = 0$$

$$v_{2,x} - i \mathcal{H} \phi_2 + q^* \phi_1 = 0,$$

Eliminando ϕ_2 tendrá v_1 y sus derivadas la siguiente expresión

$$v_{1,xx} + i \mathcal{H} v_{1,x} - q \phi_1 - \phi_{2,x} y = v_{1,xx} + i \mathcal{H} v_{1,x} - q \phi_1 - i \mathcal{H} q \phi_1 + \mathcal{H}^2 v_1$$

$$v_{,xx} - \frac{q_x}{q} v_{,x} - \frac{q_x}{q} i \xi v_1 + \xi^2 v_1 + |q|^2 v_1 = 0 \quad 4-49$$

Considérese que v_1 se puede expresar como

$$v_1 = e^{\psi - i \xi x}, \quad 4-50$$

entonces

$$v_{1,x} = (\psi' - i \xi) e^{\psi - i \xi x}$$

$$v_{1,xx} = (\psi' - i \xi)^2 e^{\psi - i \xi x} + \psi'' e^{\psi - i \xi x}.$$

Con esto, 4-49 se puede escribir ahora

$$-2i \xi \psi' + \psi'^2 + \psi'' - \frac{q_x}{q} \psi' + |q|^2 = 0,$$

de donde

$$2i \xi \psi' = \psi'^2 + |q|^2 + q \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{q} \psi' \right) \quad 4-51$$

Conociendo el comportamiento asintótico de q se puede determinar de manera recurrente los coeficientes de la expansión asintótica de la función $\psi'(x, \xi)$ en potencias de $1/\xi$

$$v_1 \rightarrow e^{-i \xi x} \text{ cuando } x \rightarrow -\infty$$

por lo que

$$\psi \rightarrow 0, \text{ cuando } x \rightarrow -\infty$$

$$v_1 \rightarrow a(\xi) e^{-i \xi x} \text{ cuando } x \rightarrow \infty,$$

por lo que

$$\varphi \rightarrow \ln a(z) \text{ cuando } z \rightarrow \infty$$

Para z grandes e $\text{Im } z > 0$, la función $\ln a(z) \rightarrow 0$ y puede expresarse en un desarrollo asintótico en potencias de $1/z$

$$\varphi' \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n}{(z; z)^n} \quad 4-52$$

$$\ln a(z) \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{z^n} \quad 4-53$$

Hay que recordar que $a_0 = 0$ y esto es lo que da las leyes de conservación c_n . De 4-52 y 4-53 se encuentra la fórmula de recurrencia

$$f_{n+1} = q \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{q} f_n \right) + \sum_{j=1}^n p_j f_j, \quad p_j = |q|^j \quad 4-54$$

y de 4-53 y 4-52

$$(z; z)^n c_n = \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x) dx \quad 4-55$$

Por la ecuación 4-54, los integrandos f_n de las leyes de conservación 4-55 son polinomios de la función $q(x, t)$ y sus derivadas con respecto a x . A continuación se presentan las leyes de conservación primeras

$$2i C_1 = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |E(u, t)|^2 du$$

$$(2i)^* C_2 = -\frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} (\bar{E}^* E_u - E \bar{E}_u^*) du$$

$$(2i)^* C_3 = -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (|E_u|^2 - \frac{1}{2} |E|^4) du$$

$$(2i)^* C_4 = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (E \bar{E}_{u u} + \frac{3}{2} \bar{E}_u^* E |E|^2) du$$

Las primeras tres integrales coinciden, fuera de coeficientes, con el número de partículas, el momento, y la energía.

La presencia de un número infinito de leyes polinomiales de conservación es una propiedad característica de las ecuaciones para las cuales el método inverso es aplicable.

4.V. INTERACCIÓN DE DOS SOLITONES

Conviene antes de calcular la interacción de dos solitones, ver si el esquema descrito en las secciones anteriores puede reproducir la dispersión para un solo solitón.

Para el caso de la ecuación NLS, el problema de eigenvalores es discreto y se cumple

$$r = -\frac{1}{2} q^2$$

$$\bar{r} = c^2$$

$$\bar{q} = \bar{r}^2 = \frac{1}{4} q^4$$

por lo tanto se tiene para un coeficiente $b(\eta) = 0$

$$B(x+y, t) = c(0) e^{i\eta(x+y)} e^{4i\eta^2 t}$$

$$\bar{B}(x+y, t) = c^*(0) e^{-i\eta^*(x+y)} e^{-4i\eta^{*2} t}$$

$$K_1(x, y) = \bar{B}(x+y) + \int_x^\infty \bar{K}_1(x, s) \bar{B}(s+y) ds$$

$$\bar{K}_1(x, y) = - \int_x^\infty K_1(x, s) B(s+y) ds$$

Con lo cual se tiene

$$K_1(x, y) = c^*(0) e^{-i\eta^*(x+y)} e^{4i\eta^{*2} t} + c^*(0) e^{-4i\eta^{*2} t} e^{-i\eta^* y} \int_x^\infty \bar{K}_1(x, s) e^{i\eta^* s} ds \quad 4-56$$

$$\bar{K}_1(x, y) = - \int_x^\infty K_1(x, s) c(0) e^{i\eta(x+y)} e^{4i\eta^2 t}$$

Aproximando la dependencia explícita de y

$$\frac{\partial K_1}{\partial y} = -i\eta^* K_1 \quad ; \quad \frac{\partial \bar{K}_1}{\partial y} = i\eta^* \bar{K}_1$$

de donde

$$K_1 = e^{-i\eta^* y} u_1(x, t)$$

$$\bar{K}_1 = e^{i\eta^* y} \bar{u}_1(x, t)$$

4-57

Substituyendo 4-56 en 4-57, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones lineales.

$$\begin{aligned}
 u_1(x,t) &= c^0(\omega) e^{4i\eta^2 t} e^{-i\eta x} + c^0(\omega) e^{-4i\eta^2 t} \bar{u}_1 \int_a^b e^{i(\eta-\eta^2)s} ds \\
 \bar{u}_1(x,t) &= -c(\omega) e^{4i\eta^2 t} u_1 \int_a^b e^{i(\eta-\eta^2)s} ds
 \end{aligned}
 \tag{4-58}$$

para $\eta - \eta^2 = 2i\eta$, com o que (4-58) queda

$$\begin{aligned}
 u_1(x,t) &= c^0(\omega) e^{-4i\eta^2 t} e^{-i\eta x} + c^0(\omega) e^{-4i\eta^2 t} \bar{u}_1 \frac{e^{-2\eta x}}{2\eta} \\
 \bar{u}_1(x,t) &= -c(\omega) e^{4i\eta^2 t} u_1 \frac{e^{-2\eta x}}{2\eta}
 \end{aligned}
 \tag{4-59}$$

Resolvendo para u_1 ,

$$u_1(x,t) = c^0(\omega) e^{-4i\eta^2 t} e^{-i\eta x} - |c|^2 e^{4i(\eta^2 - \eta^2)t} \frac{e^{-4\eta x}}{4\eta^2} H(x,t)$$

ou, de fato

$$H_1(x,t) = \frac{c^0(\omega) e^{-4i\eta^2 t} e^{-i\eta x}}{1 + \frac{|c|^2}{4\eta^2} e^{4i(\eta^2 - \eta^2)t} e^{-4\eta x}}
 \tag{4-60}$$

pois $\eta^2 - \eta^2 = 4\eta^2$ e $\eta^2 = \eta^2 - 2i\eta^2 - \eta^2$

$$H_1(x,t) = \frac{-2\eta e^{-4i(\eta^2 - \eta^2)t - i\eta x} e^{\eta^2 t} e^{i\varphi}}{\cosh[2\eta(x-x_0) + 8\eta^2 t]}$$

onde $x_0 = 2\eta \frac{c}{2\eta}$ e $\varphi = -\arg(c(\omega))$

ahora bien,

$$k_1 = e^{-ik_1^0} u_1$$

$$y \quad q = -2k_1(x, z) = -2e^{-ik_1^0 x} u_1$$

con lo que se tiene

$$q = \frac{2\eta \exp[-4(\xi^2 - \eta^2)t - 2i\xi x + i\eta t]}{\cosh[2\eta(x-\infty) + 8\eta^2 t]}$$

que es un resultado familiar.

Para el caso de dos solitones

$$\begin{aligned} \bar{b}(x, y) &= c_1(0) e^{4i\xi_1^0 t} e^{i\xi_1(x+y)} + c_2(0) e^{4i\xi_2^0 t} e^{i\xi_2(x+y)} \\ \bar{b}(x, y) &= c_1^0(0) e^{4i\xi_1^0 t} e^{i\xi_1(x+y)} + c_2^0(0) e^{4i\xi_2^0 t} e^{i\xi_2(x+y)} \end{aligned} \quad 4-61$$

Con 4-61 se procede de manera similar y se obtiene un sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas u_1 , u_2 , $\bar{u}_1$ y $\bar{u}_2$. Para ver la interacción se suponen las velocidades ξ_1 y ξ_2 distintas, digamos $\xi_1 > \xi_2$. Consideramos el comportamiento asintótico de la solución para dos solitones en la línea $y_1 = x + 4\xi_1 t = \text{cte}$ cuando $t \rightarrow \infty$ y después en la línea $y_2 = x + 4\xi_2 t = \text{cte}$ cuando $t \rightarrow \infty$. Los cálculos detallados se dejan para el apéndice B. El desplazamiento del centro de coordenadas para el primer solitón es:

$$\Delta x_0 = \frac{1}{\eta_1} \left[\ln \left| \frac{x_2 - x_1}{x_1^0 - x_1} \right| \right]$$

y para el segundo

$$\Delta x_0 = \frac{1}{\eta_2} \ln \left| \frac{x_2 - x_1}{x_1 - x_1^0} \right|$$

y el cambio total a la fase para el primer sólido

$$\Delta \varphi_1 = -2 \arg \frac{x_1 - x_2}{x_1 - x_1^0}$$

y para el segundo

$$\Delta \varphi_2 = 2 \arg \frac{x_2 - x_1}{x_2 - x_1^0}$$

CAPITULO V

SOLUCIONES DE LAS ECUACIONES DE ZAKHAROV.

En este capítulo se estudian las soluciones a las ecuaciones de Zakharov, obtenidas en el capítulo II, desde el punto de vista de las leyes de conservación, siguiendo los trabajos de Gibbons et al [10] y Thornhill y Ter Haar [19].

Estudiar las soluciones a partir de las cantidades conservadas solo es hacer predicciones sobre el comportamiento de dichas soluciones; de ninguna manera se resuelve analíticamente las ecuaciones.

A lo largo del capítulo no se exhibe un método de solución analítica pues este no existe para el caso general hasta la fecha. Actualmente, solo se tiene resuelto el problema para el caso de límite estático como lo muestra el capítulo anterior y para el caso de velocidades cercanas a la del sonido [23].

En la primera sección se procede de la misma forma que en el capítulo III al resolver la ecuación NLS para onda viajera. En la segunda sección se emplea esta solución para analizar las cantidades conservadas y, a partir de esto, se estudia el posible comportamiento de las soluciones a las ecuaciones de Zakharov.

A menos que se indique lo contrario, la descripción del comportamiento de las soluciones está hecha para velocidades menores que la velocidad del sonido ($M < 1$, ver ecuación 5-8). Las ecuaciones de Zakharov fallan cuando $|M| \rightarrow 1$. Una razón de esta falla es que la ecuación de sonido de iones forzada no puede acoplarse con la formación de ondas de choque asociadas con los movimientos supersónicos. Makhankov [14] ha sugerido reemplazar la segunda de las ecuaciones de Zakharov ($n_b - n_s = |E|^2_x$) por una ecuación del tipo de Boussinesq

$$n_b - n_s = \frac{4}{9} \mu n_{xx} - \frac{4}{9} \mu (n^2)_{xx} = |E|^2_{xx}$$

Aunque estas modificaciones a velocidades comparables a la del sonido son de algún interés intrínseco, el estudio de los fenómenos fuera de la región sónica parece más aceptable a estructuras no lineales de ondas de Langmuir.

Otro resultado interesante en el estudio de formas sónicas fue obtenido por Karpman [15] quien restringió los sistemas a perturbaciones sónicas unidireccionales y fue capaz de aproximar la ecuación para las desviaciones en la densidad de iones a la forma

$$n_i + n_s = -\frac{1}{2} |E|^2_x$$

que junto con

$$iE_t + E_{xx} = nE$$

puede resolverse con el método de dispersión inversa si alguno de los términos despreciados durante el desarrollo de las dos ecuaciones anteriores es tomado en cuenta, las cantidades polinomiales de conservación serán finitas y las entidades del tipo de los solitones interactuarán mas fuertemente.

En la tercera sección se discute las posibles interacciones que permitan las leyes de conservación, para finalmente en una cuarta sección exhibir los resultados computacionales de simulación numérica.

5. I. SOLUCIÓN DE ONDA VIAJERA

Escribiendo E en la forma

$$E = \phi(x, t) e^{i\theta(x, t)},$$

con ϕ y θ reales, las ecuaciones de Zakharov

$$\begin{aligned} i E_t + E_{xx} &= n E \\ n_{tt} - n_{xx} &= |E|^2_{xx}, \end{aligned}$$

después de ser descompuestas en partes real e imaginaria, toman la forma

$$\phi_{xx} - \phi \theta_x^2 - \phi \theta_t = n \phi \quad 5-1a$$

$$\phi \theta_{xx} + 2 \phi_x \theta_x + \phi_t = 0 \quad 5-1b$$

$$n_{tt} - n_{xx} = |\bar{E}|^2_{xx} \quad 5-1c$$

Imponiendo la condición de onda viajera para 5-1, para la cual, el portador viaja a la velocidad u_p , o sea

$$\theta = \theta(x - u_p t),$$

y la envolvente viaja a la velocidad u_e ,

$$\phi = \phi(x - u_e t),$$

las ecuaciones 5-1 toman la forma

$$\phi'' - \phi \theta'^2 + u \rho \phi \theta' = n \phi \quad 5-2a$$

$$\phi \theta'' + 2 \phi' \theta' - u \rho \phi' = 0 \quad 5-2b$$

$$n_{tt} - n_{xx} = |E|^2_{xx} \quad 5-2c$$

De la ecuación 5-2b se obtiene la relación

$$\theta' = \frac{u \rho}{2} \quad 5-3$$

la ecuación 5-2c tiene una solución de onda viajera dada por

$$n = -\frac{\phi^2}{1-u \rho^2} \quad 5-4$$

Sustituyendo 5-3 y 5-4 en 5-2a se encuentra

$$\int_{\phi(0,0)}^{\phi(x,t)} \frac{d\phi}{\sqrt{P(\phi)}} = x - u \rho t \quad 5-5$$

donde

$$P(\phi) = -\frac{1}{2} \frac{\phi^4}{1-u \rho^2} + \frac{1}{4} (u \rho^2 - 2u \rho u \rho) \phi^2 + c \quad 5-6$$

Haciendo $c=0$, por consideraciones análogas a las hechas en el capítulo III, y bajo el cambio de variables $\phi_0 \rightarrow E_0$, $u \rho \rightarrow M$, se obtiene finalmente

$$E = E_0 \operatorname{sech} \frac{E_0(x-Mt)}{4(1-M^2)^{1/4}} \exp \left[\left(\frac{1}{2} M_0 - \left(\frac{1}{4} M^2 - \frac{E_0^2}{2(1-M^2)} \right) t \right) \right] \quad 5-7$$

$$n = - \frac{|E|^2}{1-M^2} \quad 5-8$$

Estas soluciones se conocen como solitones de Langmuir.

5.2. LEYES DE CONSERVACIÓN PARA SOLITONES DE LANGMUIR.

A continuación, las soluciones 5-7 y 5-8 se sustituyen en las cantidades conservadas 2-79 a 2-81 con el propósito de estudiar el comportamiento de las soluciones. El tratamiento aquí descrito sigue la exposición de Gibbons [10] y Thornhill [19].

Es conveniente introducir en vez de E_0 y M , nuevas variables m y θ a través de las ecuaciones

$$m = E_0 (2(1-M^2))^{1/4}, \quad \theta = M. \quad 5-9$$

En términos de estos parámetros, la solución de solitón 5-7 y 5-8 da los siguientes valores para las cantidades conservadas 2-79, 2-80 y 2-81

$$N = 2m \quad 5-10$$

$$P = m\theta + \frac{2m^3\theta}{3(1-\theta^2)^3} \quad 5-11$$

$$H = \frac{1}{2}m\theta^2 + \frac{m^2(5\theta^2-1)}{6(1-\theta^2)^3} \quad 5-12$$

Las expresiones para N , P y H dadas por 5-10 a 5-12 representan los mínimos valores a estas cantidades, ya que corresponden a las cantidades conservadas de la solución de un solitón.

Si en 5-7 se toma $\bar{E}_0 \rightarrow 0$, se obtiene

$$E \rightarrow \bar{E}_0 e^{ikx - \omega t} \quad ; \quad k = \frac{1}{2} M = \frac{1}{2} U$$

5-13

$$\omega = \frac{1}{2} M^2 = k^2 \quad ,$$

que corresponde al límite lineal. En este caso se ignoran los segundos términos de 5-11 y 5-12 y se obtienen simplemente: el número de plasmas N , el momento Nk y la energía $N\omega (= Nk^2)$ de la onda lineal. Como sin embargo, los solitones son esencialmente estructuras no lineales, no ve que los términos despreciados de P y H dominan usualmente en los casos de interés.

La correspondencia entre el límite de pequeña amplitud 5-13 de las cantidades conservadas de un solitón simple de Langmuir y la relación de dispersión lineal, sugiere que las relaciones 5-10 a 5-12 se puedan interpretar como una clase de "relación de dispersión no lineal". Sin embargo, ahora se tienen dos parámetros m y v incluidos, de tal forma que no hay una relación única entre H y P como la hay entre ω y k . Para un valor dado de m , pero v variable, H será una función de P , pero esta función será diferente para valores distintos de m .

Las soluciones 5-1 y 5-8 son soluciones

exactas de las ecuaciones básicas. Otro conjunto de soluciones exactas consiste en ondas de sonido puros, es decir $\bar{\epsilon} = 0$, en donde n satisface la ecuación de onda no forzada

$$n_{tt} - n_{xx} = 0 \quad 5-14$$

Las ondas no forzadas se descompondrán en pulsos separados $n_+(x-t)$ moviéndose en la dirección positiva de x y $n_-(x+t)$ viajando a lo largo de la dirección negativa de x , donde n_+ y n_- son funciones arbitrarias de sus argumentos. De la ecuación de continuidad $n_t + v_x = 0$, se sigue que los flujos v_+ y v_- correspondientes a estos trenes de ondas sonoras son

$$v_+ = n_+ \quad 5-15a$$

$$v_- = -n_- \quad 5-15b$$

Si hay un número igual de tales trenes de ondas sonoras viajando en la dirección positiva y negativa y bien separados unos de otros y de cualquier solitón u otras perturbaciones, estos trenes de onda hacen las siguientes contribuciones a las integrales de movimiento 2-79, 2-80 y 2-81

$$N = 0 \quad 5-16$$

$$P = p_+ - p_- \quad 5-17$$

$$H = p_+ + p_- \quad 5-18$$

donde

$$P_z = \int_{-\infty}^{\infty} n_z^2 dx \quad 5-19$$

es una cantidad positiva definida. Recuerdese que $E=0$ y que

$$n = n_+ + n_-$$

$$v = v_+ + v_- = n_+ - n_-$$

de donde se siguen 5-16 a 5-18.

Las leyes de conservación se pueden emplear de la forma usual para saber qué procesos físicos son posibles, si se supone que las relaciones de dispersión son las mismas para el estado inicial y el estado final. Entonces si se quieren usar las ecuaciones 5-10 a 5-12 y 5-16 a 5-19 para ubicar los límites en el comportamiento de solitones de Langmuir, se debe hacer la suposición de que el estado de una perturbación arbitraria de longitud finita gobernada por las ecuaciones de Zakharov, sea descrita, cuando $t \rightarrow \infty$, como una colección de solitones de Langmuir y trenes de ondas sonoras bien separados. A favor de esto están los siguientes argumentos.

(1) Un solitón de Langmuir es una entidad estable tal que cuando está aislada no decae como los trenes de onda de sonido tienen un número de plasma cero permanecen como ondas sonoras. Por lo tanto el estado a $t \rightarrow \infty$ de NLTS persistirá.

(2) Los solitones de Langmuir y las ondas sonoras parecen ser las únicas estructuras "estacio-

nares" poseídas por las ecuaciones de Zakharov, como lo muestran las simulaciones numéricas. Se espera que todos los otros campos estén evolucionando, y si en el curso de tal evolución alcanzan el estado postulado $nI + S$, entonces este persistirá.

(iii) Una condición necesaria para que la suposición sea cierta es que los valores de las cantidades conservadas N, P, H determinados por una perturbación arbitraria inicial puedan ser satisfechos por un estado $nI + S$. La prueba de esto se sigue del hecho de que los solitones de Langmuir dan un mínimo H para un P y N dados. Para demostrarlo es necesario probar que para un N y P dados el menor valor posible de H es aquel que corresponde a la intersección de la línea $P = \text{cte}$ con la curva de un solitón correspondiente a $n = \frac{1}{2} N$.

Se utilizan primeramente los multiplicadores reales de Lagrange V y Ω para demostrar que para un N y P dados, la solución de solitón correspondiente es el único punto estacionario de H . Esto requiere que $\delta(H - \Omega P + \Omega N)$ se anule 0,

$$\delta(H - \Omega P + \Omega N) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \left\{ |E_s|^2 + n |E|^2 + \frac{1}{2} V^2 + \frac{1}{2} n^2 - i \sum_i (E E_i^* - E^* E_i) - n \Omega V + \Omega |E|^2 \right\} = 0$$

Hay que notar que este es una funcional de E, E^*, n y V , por lo tanto la variación debe hacerse sobre estas variables

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \delta (H - v\vec{p} + \Omega N) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \{ \delta n [n + |\vec{E}|^2 - vV] + \delta V [V - vn] + \\ + \delta E [(nE^0 + \Omega E^0 - i v E_x^0 - E_{xx}^0) + \delta E^0 [nE + \Omega E + \\ + i v E_x - E_{xx}]] \} = 0 \end{aligned}$$

Reescribiendo

$$\begin{aligned} \int dx \{ \delta n [n + |\vec{E}|^2 - vV] + \delta V [V - vn] + \delta E [(n + \Omega)E^0 - i v E_x^0 - E_{xx}^0] + \\ + \delta E^0 [(n + \Omega)E + i v E_x - E_{xx}] \} = 0 \quad 5-20 \end{aligned}$$

donde las cuatro variaciones independientes δn , δV , δE y δE^0 tienden a cero cuando $|x| \rightarrow \infty$. Se acuerda entonces

$$v = m\phi, \quad n = -\frac{|\vec{E}|^2}{1-\phi^2}, \quad E_{xx} + \frac{|\vec{E}|^2 E}{1-\phi^2} - i v E_x - \Omega E = 0 \quad 5-21$$

y usando el hecho de que $E \rightarrow 0$ cuando $|x| \rightarrow \infty$

$$E = \bar{E}_0 \exp [i(x - \phi t) + \phi] e^{ikx}, \quad 5-22$$

con

$$k = \frac{1}{2}v, \quad \Omega = k^2 + a^2, \quad a^2 = \frac{|\vec{E}_0|^2}{2(1-\phi^2)} \quad 5-23$$

Estas ecuaciones corresponden al solitón $(m, 0)$ a

un tiempo dado. Este punto estacionario es un mínimo como se muestra en el Apéndice IV. Así pues, es necesario que el valor dado de H esté por encima de $H_{\min}(m, 0)$ fijado por los valores iniciales de P y N . En este caso, cantidades iguales pero opuestas de ondas sonoras se pueden agregar al solitón $(m, 0)$ para producir el valor inicial de H , dado que no cambian ni N ni P . Cualquier estado inicial puede evolucionar, dado H suficientemente grande, a un estado final L+S. Debe notarse aquí que se ha usado el hecho de que p_i y p_r son no negativos. Nótese que si H es menor que $H_{\min}(m, 0)$, de tal forma que un estado final L+S es imposible, los estados nL+S son a fortiori imposibles; esta es una consecuencia de la conservación de N así como del hecho de que el segundo término del lado derecho de la ecuación 5-12 es proporcional a m^3 (ver discusión en interacciones).

iv) Las simulaciones computacionales del comportamiento de las ecuaciones de Zakharov indican que los solitones de Langmuir y ondas sonoras de iones, si no son los únicos productos, son ciertamente los más importantes. [7, 8, 16].

v) En el caso de la ecuación NLS, el método de dispersión inversa dice que además de los solitones, hay pequeñas fluctuaciones dispersas que decaen. Aunque estas pequeñas fluctuaciones desaparecen debido a la dispersión, se llevan consigo cantidades finitas de leyes de conservación. Una comparación de las ecuaciones de Zakharov con la NLS y su comportamiento para tiempos grandes respecto a la posibilidad de un estado final nL+S.

5. III. INTERACCIONES

Considerense sistemas en los cuales el estado inicial, cuando $t \rightarrow -\infty$, consiste en una colección de solitones de Langmuir y ondas sonoras de iones bien separados. Considerense las limitaciones que imponen las leyes de conservación en el estado final las leyes de conservación pueden ser escritas como (ver ecuaciones 5-10 a 5-12 y 5-16 a 5-19)

$$N = 2 \sum_i m_i = 2 \sum_f m_f \quad 5-24$$

$$\begin{aligned} P &= \sum_i \left\{ m_i v_i + \frac{2m_i^2 v_i}{3(1-v_i^2)^3} \right\} + p_i^i - p_i^f = \\ &= \sum_f \left\{ m_f v_f + \frac{2m_f^2 v_f}{3(1-v_f^2)^3} \right\} + p_f^i - p_f^f \end{aligned} \quad 5-25$$

$$\begin{aligned} H &= \sum_i \left\{ \frac{1}{2} m_i v_i^2 + \frac{1}{6} m_i^3 (5v_i^2 - 1)/(1-v_i^2)^3 \right\} + p_i^i + p_i^f = \\ &= \sum_f \left\{ \frac{1}{2} m_f v_f^2 + \frac{1}{6} m_f^3 (5v_f^2 - 1)/(1-v_f^2)^3 \right\} + p_f^i + p_f^f \end{aligned} \quad 5-26$$

donde los subíndices "i" y "f" son subíndices solitones iniciales y finales respectivamente, mientras que p_i^i y p_i^f representan las ondas de sonido inicial y final

Se pueden usar las ecuaciones 5-24 a 5-26 para estudiar los varios procesos

i) El proceso

$$n1 \rightarrow S$$

$$5-27$$

está prohibido por la conservación del número de plasmones pues como se ve de 5-16, las ondas sonoras no contribuyen a N .

(i) El proceso

$$L \rightleftharpoons nL + S$$

5-28

está prohibido debido a que H es un mínimo para el solitón simple para valores de ρ y N dados.

(ii) El proceso

$$L + S \rightleftharpoons L' + S'$$

5-29

siempre es posible; de la conservación de N , no sigue que los puntos representativos de los estados inicial y final deben caer en la misma curva de solitón simple. El proceso que lleva a una desaceleración del solitón supone la presencia de una onda sonora moviéndose en la dirección opuesta al solitón; corresponde a una p_- absorción, seguida de una p_+ emisión. Si la onda interactuante con el solitón se mueve en su misma dirección, se obtiene el proceso que lleva a una aceleración del solitón. Si el solitón se mueve en un campo de sonido estocástico de fondo, con una velocidad cercana a la del sonido, será desacelerado. La razón de este comportamiento es la siguiente: aunque el solitón se encuentra con más sonido viajando

en dirección opuesta, interactúa con el por un tiempo corto y estos dos factores se deben cancelar parcialmente; sin embargo, la reducción en el momento del solitón debida a la absorción de sonido viajando en sentido opuesto es mayor que el aumento de cantidad de movimiento debida a la absorción de sonido moviéndose en la misma dirección.

iv) El proceso

$$nL \rightleftharpoons L + S \quad n > 1 \quad 5-30$$

sólo permitido. De interés particular es el caso con $n=2$ en el que se tiene que 5-30 es

$$L + L' \rightleftharpoons L'' + S \quad 5-31$$

Debe enfatizarse, que las leyes de conservación sólo dicen qué puede suceder, pero no qué sucederá. De hecho, los experimentos computacionales hechos por Degtyarev et al [7] indican que los solitones de Langmuir se fusionan para ciertos valores de sus parámetros, pero pasan uno a través del otro para otros valores de los mismos. Estos resultados pueden ser explicados por el análisis del mecanismo de la emisión de ondas sonoras. De las leyes de conservación, se puede ver que la cantidad de sonido que debe emitirse cuando se fusionan dos solitones va como $(\omega - \omega')^3$, es decir aumenta fuertemente con el aumento de la velocidad de los solitones en colisión. A fin de ser

capaces de hacer una comparación más cuantitativa con los resultados computacionales, considérese el caso especial de fusión de solitones de Langmuir iguales pero viajando direcciones opuestas:

$$L(m, v) + L(m, -v) = L(2m, 0) + S \quad 5-32$$

Las leyes de conservación se reducen a este caso a la siguiente expresión para la cantidad total de ondas de sonido generadas en el proceso 5-31

$$p = mv^2 + \frac{1}{3}m^3(5v^2-1)/(1-v^2)^3 + \frac{2}{3}m^3 \quad 5-33$$

donde $p = p_+ + p_- = 2p_+$. La pregunta ahora es si la cantidad de sonido 5-3 que debe ser generada para producir fusión, pueda ser generada durante el tiempo en que los solitones están interactuando fuertemente. Sea p_{gen} la máxima cantidad de sonido que puede ser generada durante la colisión. En tal caso, la fusión tendrá lugar si

$$p \leq p_{gen} \quad 5-34$$

pero no cuando

$$p > p_{gen} \quad 5-35$$

De 5-33 se ve que p aumenta gradualmente al aumentar v si p_{gen} aumenta menos, podrá haber una velocidad crítica para la cual, por encima de ella, la

desigualdad 5-35 es válida. Tal velocidad ha sido observada en experimentos computacionales [9,1] y se encuentra que es aproximadamente 0.6.

Para estimar P_{gen} se puede usar una aproximación simplista y escribir P_{gen} como el producto del "tiempo de colisión" τ_{col} y el promedio de la generación de sonido

$$P_{\text{gen}} \sim \tau_{\text{col}} \left\langle \frac{d}{dt} \right\rangle n^2 dx \quad 5-36$$

Una estimación de τ_{col} se obtiene al tomar dos solitones sin perturbas, al pasar uno a través del otro, de ancho $(1-v^2)^{1/2}/|E_0|$ (esta anchura se obtiene de la ecuación 5-7) a la velocidad relativa Δv

$$\tau_{\text{col}} \sim \frac{(1-v^2)^{1/2}}{|E_0| \Delta v} \quad 5-37$$

Para estimar $\left\langle \frac{d}{dt} \right\rangle n^2 dx$ se puede utilizar la siguiente expresión. De las ecuaciones 5-21, se tiene

$$V = v n,$$

al considerar

$$(n^2)_t = 2 n n_t = -2 n V_n = -2 n \partial n / \partial x$$

$$(n^2)_t \approx 2 \frac{|E|^2}{1-v^2} \left(\frac{|E|^2}{1-v^2} \right) \sim \left(\frac{|E|^4}{1-v^2} \right)_t \quad 5-38$$

Por lo tanto

$$P_{\text{gen}} \sim \frac{E^3}{(1-v^2)^{3/2} \Delta v} \quad 5-39$$

Entonces

$$P_{\text{gen}} \leq \alpha \frac{E^3}{(1-v^2)^{3/2} \Delta v} = \frac{4\alpha m^3}{\Delta v (1-v^2)^{3/2}}, \quad 5-40$$

con α una constante del orden de la unidad.

Se observa que a menos que los dos solitones tengan la misma velocidad (cuando τ_{col} es bastante grande), la energía máxima del sonido emitido aumenta con v más lentamente, de tal forma que si es posible esperar un límite superior a la velocidad que los solitones puedan fusionarse.

Si $m \gg 1$, se encuentra de una combinación de 5-40 y 5-33 que para que la fusión ocurra se debe tener $\theta < \theta_c$, donde θ_c depende del valor α . Para $\alpha = 0.5, 1$ y 2 respectivamente se encuentra $\theta_c \approx 0.5, 0.6$ y 0.7 . Ciertamente el mecanismo de emisión de sonido puede estar bien gobernado por el factor de fusión. Para m suficientemente grande, el término más de p no es apreciable comparado con los otros términos y la condición para la fusión

$$\frac{\Delta v (5v^2 - 1)}{12 \pi (1-v^2)} + \frac{4(1-v^2)^{3/2}}{12 \pi} \leq 1$$

es independiente de m , lo mismo que v_{cc} , de acuerdo con los resultados computacionales. Si embargo, en el límite cuando $m \rightarrow 0$ se encuentra v_{cc} proporcional a $m^{2/3}$, mientras que Abdulloev et al [1] encuentran $v_{cc} \propto m$.

5. IV. SIMULACIONES NUMÉRICAS

Finalmente, se expresan a continuación los resultados computacionales hechos por Degtyarev et al [3] acompañados de las figuras correspondientes.

Proceso 1. Colisión de dos solitones.

Las condiciones iniciales se dieron para $|E|^2 < 1$ so fueron variando la amplitud y velocidad de los solitones (variación de m) los solitones a este caso, pasan uno a través del otro, dispersándose con velocidad pequeña. Durante la colisión se pierde energía, que es causada por la emisión de sonido al momento de la interacción.

Proceso 2. Colisión de dos solitones.

En este caso, $|E|^2 \geq 1$ y durante el proceso se varían la amplitud y velocidad de los solitones. El proceso de fusión aumenta rápidamente tan pronto como los solitones se traslapan. La pérdida de energía en los solitones es emitida como sonido, y los trenes de onda de sonido que se apartan del solitón forman rumples frente a el una onda de

compensación. Este proceso se ilustra en la figura 1. En la figura 1a) como en todas las demás figuras + se corresponde a la curva para $|E|^2$ y x a la curva para δn .

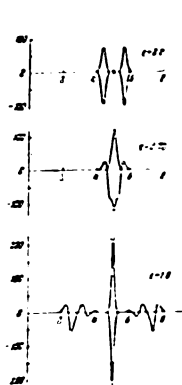


FIG. 1

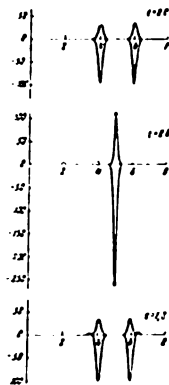


FIG. 2

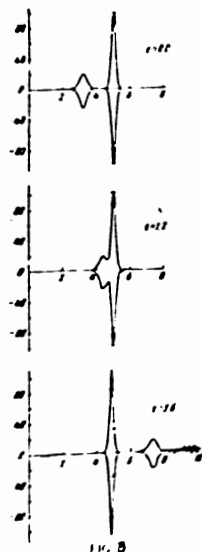
Proceso 3: Colisión de dos solitones

Para este proceso $\theta = 0.8$ y $|E|^2 \geq 1$. Para tales velocidades se tiene de hecho un pulso de sonido que es sólo ligeramente alterado por la influencia de la presión de alta frecuencia, y los pulsos de sonido deben pasar uno a través de otro como lo describe la ecuación

$$n_{st} - n_{sa} = |E|^2_{sa}$$

Este proceso está ilustrado en la figura 2.

Proceso 4



En la figura, se muestra la colisión de dos solitones, uno de los cuales está en reposo. De la figura se ve que el solitón en movimiento comienza a pasar a través del que se encuentra en reposo, debido a que sus amplitudes difieren por al menos un factor de dos. Si la amplitud del solitón en reposo es menor que la amplitud del solitón en movimiento, se fusionarán aún cuando sus amplitudes difieran bastante. Mientras mayor sea la diferencia en amplitud de los solitones interactivantes, será menor la longitud de onda del sonido emitido.

Proceso 5 Interacción de solitones con ruido.

Para este proceso se colocan los solitones en reposo

En la figura, para cualquier ancho y magnitud de un pulso de sonido de polaridad positiva, el solitón se contrae hasta que su potencial se hace mayor y más agudo que el del pulso dado. Después de eso, el pulso de sonido pasa libremente a través del solitón. A priori, sin embargo, es posible que un pulso de sonido agudo de polaridad positiva pueda romper el solitón a reposo, así como su pared de potencial, de tal forma que los dos solitones que se forman puedan dispersarse. Sin embargo, de la figura, se ve que el proceso ocurre de manera diferente.

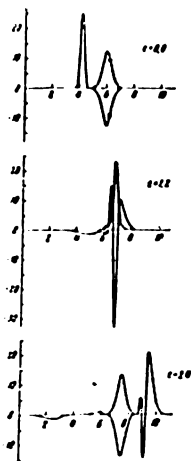
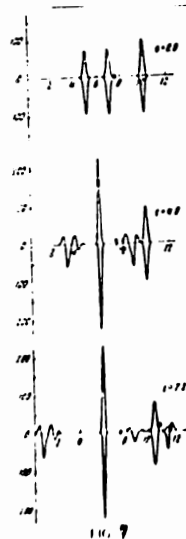
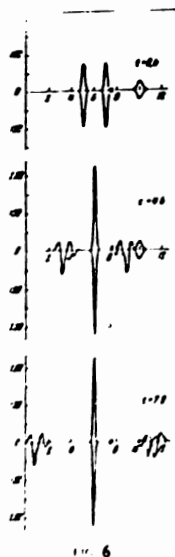
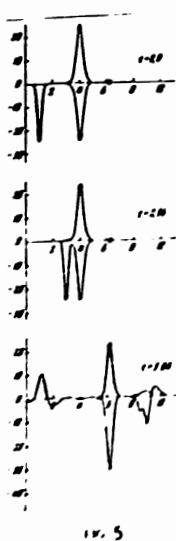


FIG 4

Proceso 6 En la figura 5 se muestra la interacción de un pulso de sonido de polaridad negativa con un solitón a reposo. Cuando el pulso se aproxima al solitón, el campo de Langmuir "fluye" hacia adentro de la densidad, y da lugar a un estado de dos solitones en colisión, uno de los cuales está a reposo. Los dos cuasipartículas se fusionan en uno solo en un momento, y el sonido es parcialmente reflejado y parcialmente transmitido atrapando parte de la energía del solitón de Langmuir.

En las figuras 6 y 7, se muestra la interacción de tres solitones cuando el tren de sonido se origina como resultado de la fusión de dos solitones idénticos e interactúa con el tercer solitón en reposo. En la figura 6, el tercer solitón se divide en dos debido a la interacción con el pulso de sonido. En la figura 7, la amplitud del tercer solitón es lo suficientemente grande que no se rompe. Numéricamente, se muestra que el rompimiento del tercer solitón ocurre cuando su amplitud es menor que la mitad de la amplitud de los solitones que producen el tren de sonido.



CAPITULO VI

CONCLUSIONES Y PERSPECTIVAS

Para terminar, se señalan las conclusiones más importantes que se siguen de la exposición anterior, así como algunas de las perspectivas abiertas que quedan alrededor de esta.

6.1 CONCLUSIONES

1) Se ha mostrado que manteniendo las aproximaciones apropiadas es posible describir el acoplamiento que existe entre las ondas de Langmuir y las ondas sonoras de iones. Tal acoplamiento es de naturaleza no lineal y ocurre a través de la llamada fuerza ponderomotriz.

2) Se sabe que a su aproximación unidimensional, las ecuaciones de Zakharov tienen soluciones de onda solitaria, pero determinar las propiedades de la interacción entre distintas ondas solitarias es un problema complejo. Para analizar este problema es útil estudiar las cantidades conservadas.

3) En la aproximación $M \ll 1$, que corresponde a la ecuación clásica de Schrödinger, es posible estudiar soluciones de n solitones empleando el método de dispersión inversa. Como resultado se encuentra que los solitones no se modifican en su forma ni en su velocidad al interactuar. Cabe mencionar que el mismo método se puede

aplicar a la aproximación en que $M \rightarrow 1$ para ondas solitarias que se mueven en una sola dirección [23]. En este caso, las ecuaciones de Zakharov se reducen a la forma (para ondas que se mueven sólo hacia la derecha)

$$\begin{aligned} i\tilde{E}_t + E_{xx} - nE &= 0 \\ n_t + n_x &= -\frac{1}{2}|E|^2_x \end{aligned} \quad 6-1$$

También en este caso, se encuentra que los solitones no se modifican en su forma ni su velocidad.

a) No existen actualmente criterios para saber en general cuándo es posible y cómo aplicar el método de dispersión inversa. No deja de ser interesante el hecho de que aquellos casos en que ha sido posible aplicarlo han mostrado siempre interacciones triviales entre solitones. En el caso de las ecuaciones de Zakharov se sabe por simulaciones numéricas que existen interacciones no triviales entre las ondas solitarias, tales como fusión, rompimiento, etc. Este es un caso típico en el que no ha sido posible aplicar el método de dispersión inversa. En su estado actual.

5) De lo anterior se sigue que a pesar de la apariencia familiar de las ecuaciones de Zakharov (una ecuación de Schrödinger acoplada a una ecuación logística de onda) no representan un problema sencillo.

6. II PERSPECTIVAS.

En este trabajo no se resolvieron todos los problemas que se plantearon y sólo se trataron algunos puntos alrededor del tema. El propósito de esta sección es dar una visión panorámica de las perspectivas que quedan abiertas.

1) Queda por encontrar en el caso de las interacciones no triviales entre ondas solitarias (Capítulo V) cuál es el mecanismo de emisión de sonido y así estudiar las condiciones que deben reunir los parámetros para que ocurran interacciones no triviales.

2) Aquí sólo se trató la aproximación unidimensional. El paso inmediato es extender los resultados expuestos anteriormente al de ondas solitarias planas en tres dimensiones y estudiar su estabilidad en el sentido transversal. Este problema ha sido atacado por el grupo de Oxford [20] y se ha encontrado que el término rotacional de las ecuaciones de Zakharov juega un papel importante. La estabilidad de los solitones depende de sus parámetros.

3) Al estudiar el problema tridimensional en general, aparecen estructuras no lineales que no siempre son estables y modifican notablemente las propiedades del plasma. Estas estructuras están siendo estudiadas tanto bajo el punto de vista teórico [3, 17] como experimental [21, 18].

4) Falta estudiar el problema que aquí se ha planteado para plasmas confinados mediante campos magnéticos.

5) Otro aspecto interesante es estudiar las interacciones entre las ondas y las partículas. Esto, por supuesto desde el punto de vista de una teoría cinética [17].

6) Finalmente, quedan por aplicarse los resultados obtenidos a los problemas de calentamiento de plasmas y de turbulencia fuerte.

APENDICE I Obtención de 2-71 a 2-73

Partiendo de

$$i \vec{E}_t + E_{zs} = n E \quad \text{AI-1}$$

$$-i \vec{E}_t^0 + E_{zs}^0 = n E^0 \quad \text{AI-2}$$

y de la ecuación

$$n_t + V_s = 0 \quad \text{AI-3}$$

Se hace, sumando:

$$\begin{aligned} i \vec{E}_t E_t^0 + E_{zs} E_z^0 &= n E E^0 \\ -i \vec{E}_t^0 E_t + E_{zs}^0 E_z &= n E^0 E_s \\ \hline (E_s E_t^0 + E_z E_z^0)_s &= (n |E|^2)_t + |\vec{E}_s|^2_t - n_t |E|^2 \end{aligned}$$

$$(E_s E_t^0 + E_z E_z^0)_s = (n |E|^2 + |E_s|^2)_t + (V |E|^2)_s - V |E_s|^2_s$$

$$[-(E_s E_t^0 + E_z E_z^0) + V |E|^2]_s + [n |E|^2 + |E_s|^2]_t + V (V_t + n_s) = 0$$

$$[-(E_s E_t^0 + E_z E_z^0) + V |E|^2]_s + [n |E|^2 + |E_s|^2 + \frac{1}{2} V^2]_t + V n_s + V_s n - V_s n = 0$$

Entonces

$$[n |E|^2 + |E_s|^2 + \frac{1}{2} V^2 + \frac{1}{2} A]_t + [V |E|^2 + V n - (E_s E_t^0 + E_z E_z^0)]_s = 0$$

Es la ecuación 2-77.

Para la ecuación 2-71, se procede de manera

análoga, solo que ahora se suman

$$\begin{aligned} i\bar{E}_t E_t^* + \bar{E}_{t0} E_t^* &= n \bar{E} E^* \\ \frac{-i\bar{E}_t^* E_t + \bar{E}_{t0}^* E_t}{i(\bar{E} E_t^* - E^* E_t)_t + |\bar{E}_t|^2 - \bar{E} E_{t0}^* + E^* E_{t0}} &= n \bar{E}^* E_t \\ i(\bar{E} E_t^* - E^* E_t)_t + |\bar{E}_t|^2 - \bar{E} E_{t0}^* + E^* E_{t0} &= -n(\eta_t + \eta_0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} i(\bar{E} E_t^* - E^* E_t)_t + [|\bar{E}_t|^2 + \frac{1}{2}(\bar{E} E_{t0} - E E_{t0}^*)]_t &= -n\eta_t - n\eta_0 - \\ &= -\eta_t V + \eta_t V \end{aligned}$$

Entonces

$$\frac{1}{2} [i(\bar{E} E_t^* - E^* E_t) + 2nV]_t + \frac{1}{2} [2|\bar{E}_t|^2 + \frac{1}{2}(\bar{E} E_{t0} - E E_{t0}^*) + \frac{1}{2} n^2 + \frac{1}{2} V^2]_t = 0$$

que es la ecuación 7-71

En la ecuación 7-73, el procedimiento es
así:

$$\begin{aligned} i\bar{E}_t E_t^* + \bar{E}_{t0} E_t^* &= n \bar{E} E^* \\ \frac{-i\bar{E}_t^* E_t + \bar{E}_{t0}^* E_t}{i(\bar{E}_t E_t^* + E_t^* E_t) + (\bar{E}_{t0} E_t^* - E_{t0}^* \bar{E})} &= n E^* E \\ i(\bar{E}_t E_t^* + E_t^* E_t) + (\bar{E}_{t0} E_t^* - E_{t0}^* \bar{E}) &= 0 \end{aligned}$$

de donde

$$[|\bar{E}|^2]_t - i(E_t E_{t0}^* - E_{t0}^* \bar{E})_t = 0$$

APENDICE II. Demostración de las expresiones A-II-1

La clave del problema inverso está en la transformación de Fourier

$$k(x, s) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{k}(x, \xi) e^{i\xi s} d\xi, \quad \text{AII-1}$$

donde

$$\hat{k}(x, \xi) \equiv \psi(x, \xi) - \left(\frac{0}{i}\right) e^{i\xi x} \quad \text{AII-2}$$

Esta transformación existe para toda $\text{Im } \xi \geq 0$ y pertenece a $L^2(-\infty < s < \infty)$. Para establecer esta existencia, considere la cota $|\hat{k}(x, \xi)| < c \exp(-x \text{Im } \xi) / (1 + |\xi|)$, $\text{Im } \xi \geq 0$. Esta cota, la analiticidad de $\hat{k}$ a ξ y el teorema de Paley-Wiener^a son suficientes para establecer $\hat{k}(x, s) = 0$ para $s < x$. Invertiendo A-II-1, se obtiene

$$\hat{k}(x, \xi) = \int_{-\infty}^0 k(x, s) e^{i\xi s} ds$$

^a Teorema de Paley-Wiener $\hat{f}(\xi)$ analítica de orden exponencial x y su restricción a el eje real pertenece a $L^2(-\infty, \infty)$, si y sólo si está dada por

$$f(x) = \int_{-\infty}^0 \hat{f}(t) e^{itx} dt$$

donde $\hat{f}(t)$ es una función de $L^2(-\infty, 0)$

De la definición AB-2 de $\hat{k}$, y del hecho de que $k(x, s)$ se anula para $s < x$, se obtiene la importante representación de $\psi(x, \xi)$

$$\psi(x, \xi) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{i\xi x} + \int_x^\infty k(x, s) e^{i\xi s} ds \quad \text{AB-3}$$

De una manera semejante, se puede derivar la representación de $\phi(\xi, x)$

$$\phi(\xi, x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i\xi x} - \int_{-\infty}^x L(x, s) e^{-i\xi s} ds \quad \text{AB-4}$$

$$L(x, s) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \hat{L}(x, \xi) e^{i\xi s} d\xi \quad \text{AB-5}$$

$$L(x, s) = 0 \quad \text{para } s > x \quad \text{AB-6}$$

$$\hat{L}(x, \xi) = e^{-i\xi x} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \phi(x, \xi) \quad \text{AB-7}$$

APENDICE III. Interacción de dos solitones

Para dos solitones ligados

$$\begin{aligned} \psi(x,y) &= c_1(0) e^{i k_1^0 x} e^{i k_1^0 y} + c_2(0) e^{i k_2^0 x} e^{i k_2^0 y} \\ \bar{\psi}(x,y) &= c_1^*(0) e^{-i k_1^0 x} e^{-i k_1^0 y} + c_2^*(0) e^{-i k_2^0 x} e^{-i k_2^0 y} \end{aligned}$$

Esto da una ecuación integral de la forma

$$\begin{aligned} k_1(x,y) &= c_1^*(0) e^{-i k_1^0 x} e^{-i k_1^0 y} + c_2^*(0) e^{-i k_2^0 x} e^{-i k_2^0 y} + \\ &+ c_1^*(0) e^{-i k_1^0 x} e^{-i k_1^0 y} \int_x^\infty \bar{k}_1 e^{-i k_1^0 s} ds + \\ &+ c_2^*(0) e^{-i k_2^0 x} e^{-i k_2^0 y} \int_x^\infty \bar{k}_2 e^{-i k_2^0 s} ds \end{aligned} \quad \text{AIII-1}$$

}

$$\begin{aligned} \bar{k}_1(x,y) &= -c_1(0) e^{i k_1^0 x} e^{i k_1^0 y} \int_x^\infty k_1 e^{i k_1^0 s} ds - \\ &- c_2(0) e^{i k_2^0 x} e^{i k_2^0 y} \int_x^\infty k_2 e^{i k_2^0 s} ds \end{aligned} \quad \text{AIII-2}$$

Aprovechando la dependencia explícita de y y el hecho de que las exponenciales son funciones linealmente independientes, se tiene que

$$\begin{aligned} k_1 &= e^{-i k_1^0 y} H_1(x,t) + e^{-i k_2^0 y} H_2(x,t) \\ \bar{k}_1 &= e^{i k_1^0 y} \bar{H}_1(x,t) + e^{i k_2^0 y} \bar{H}_2(x,t) \end{aligned} \quad \text{AIII-3}$$

con lo que se obtiene un sistema de cuatro ecuaciones

con cuatro incógnitas.

$$c_1^*(0) e^{i\frac{4\pi}{\lambda_1} x} e^{-i\frac{4\pi}{\lambda_1} x} = H_1(x, t) - c_1^*(0) \frac{e^{-2\pi i t}}{2\pi i} e^{-i\frac{4\pi}{\lambda_1} x} \bar{H}_1 - i c_1^*(0) e^{-i\frac{4\pi}{\lambda_1} x} \frac{e^{i(\frac{4\pi}{\lambda_1} - \frac{4\pi}{\lambda_2}) x}}{\frac{4\pi}{\lambda_1} - \frac{4\pi}{\lambda_2}} \bar{H}_2$$

$$c_2^*(0) e^{-i\frac{4\pi}{\lambda_2} x} e^{-i\frac{4\pi}{\lambda_2} x} = H_2(x, t) - i c_2^*(0) e^{-i\frac{4\pi}{\lambda_2} x} \frac{e^{i(\frac{4\pi}{\lambda_2} - \frac{4\pi}{\lambda_1}) x}}{\frac{4\pi}{\lambda_2} - \frac{4\pi}{\lambda_1}} \bar{H}_1 - c_2^*(0) e^{-i\frac{4\pi}{\lambda_2} x} \frac{e^{-2\pi i t}}{2\pi i} \bar{H}_2$$

$$0 = \bar{H}_1(x, t) + c_1(0) e^{i\frac{4\pi}{\lambda_1} x} \frac{e^{-2\pi i t}}{2\pi i} H_1 + i c_1(0) e^{i\frac{4\pi}{\lambda_1} x} \frac{e^{i(\frac{4\pi}{\lambda_1} - \frac{4\pi}{\lambda_2}) x}}{\frac{4\pi}{\lambda_1} - \frac{4\pi}{\lambda_2}} H_2(x, t) \quad \text{AIII-4}$$

$$0 = \bar{H}_2(x, t) + i c_2(0) e^{-i\frac{4\pi}{\lambda_2} x} \frac{e^{i(\frac{4\pi}{\lambda_2} - \frac{4\pi}{\lambda_1}) x}}{\frac{4\pi}{\lambda_2} - \frac{4\pi}{\lambda_1}} H_1(x, t) + c_2(0) e^{-i\frac{4\pi}{\lambda_2} x} \frac{e^{-2\pi i t}}{2\pi i} H_2(x, t).$$

Con la ecuación AIII-3 se observan dos soluciones aparentemente independientes. El sistema de arriba muestra el acoplamiento (notese que el sistema se puede reducir a uno con dos ecuación y dos incógnitas H_1 y H_2) de ambas soluciones. Como ya se mencionó en el capítulo IV, (sección 4.V.) para ver la interacción entre solitones, se toma el comportamiento asintótico para $t \rightarrow \pm \infty$ bajo las rectas $x + 4\frac{\pi}{\lambda_1} t = \text{cte}$ primero y $x + 4\frac{\pi}{\lambda_2} t = \text{cte}$ después. Para $x + 4\frac{\pi}{\lambda_1} t = \text{cte}$, la recta $x + 4\frac{\pi}{\lambda_2} t$ reduce el sistema a un sistema homogéneo para $t \rightarrow \pm \infty$ y la solución tiende a cero de manera asintótica. Entonces los dos solitones se rompen en solitones individuales el haber seleccionado las rectas $x + 4\frac{\pi}{\lambda_1} t = \text{cte}$ primero y $x + 4\frac{\pi}{\lambda_2} t$ después, significa haber escogido el sistema de referencia de cada solitón para ver el comportamiento del otro a medida que $t \rightarrow \pm \infty$, en cada caso. En cada caso, se tiene

que encontrar el centro coordenado del solitón, tal como se hizo con la solución para un solo estado ligado. Con $x + 4\xi_1 t = \text{cte}$, el corrimiento de fase y el del centro del solitón, salen de los términos que no aparecen en las exponenciales. Entonces, para $x + 4\xi_1 t = \text{cte}$ ($\xi_1 \gg \xi_2$) y $t \rightarrow \infty$

$$x_{01} - x_{01} = \frac{1}{\eta_1} \ln \left[\left| \frac{\xi_1 - \xi_2}{\xi_1 - \xi_1^0} \right| \right]$$

y

$$\varphi_1^0 - \varphi_{01} = -2 \arg \left(\frac{\xi_1 - \xi_2}{\xi_1 - \xi_1^0} \right)$$

mientras que para $t \rightarrow -\infty$, no hay corrimiento a ninguno de los dos (fase y centro) ya que todos los términos exponenciales en el sistema de AIII-A son igualmente compensables.

Para $x + 4\xi_2 t = \text{cte}$ y $t \rightarrow -\infty$

$$x_{02} - x_{01} = -\frac{1}{\eta_2} \ln \left[\left| \frac{\xi_2 - \xi_1}{\xi_2 - \xi_1^0} \right| \right]$$

y

$$\varphi_2^0 - \varphi_{12} = 2 \arg \left(\frac{\xi_2 - \xi_1}{\xi_2 - \xi_1^0} \right)$$

y no se encuentra corrimiento alguno para $t \rightarrow \infty$

APENDICE IV

En este apéndice se demuestra que las ecuaciones de Zakharov

$$\begin{aligned} iE_t + E_{xx} &= nE \\ n_{tt} - n_{xx} &= |E|^2_{xx} \end{aligned}$$

y en límite de aproximación estática, la ecuación no lineal de Schrödinger, dan un mínimo para H con ψ y n dados. Sin pérdida de generalidad, se puede hacer $\psi=0$, que corresponde a relajar la condición de $\psi=0$. Minimizando H con respecto a v y n , se obtiene

$$\begin{aligned} \delta H &= \delta \int_{-\infty}^{\infty} [|\tilde{E}|^2 + n|\tilde{E}|^2 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}v^2] dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} [\delta n (|\tilde{E}|^2 + \frac{1}{2}n) + \delta v (v)] dx \end{aligned}$$

con lo que $n = -|\tilde{E}|^2$ y $v=0$, entonces H se escribe como

$$H = \int_{-\infty}^{\infty} (|\tilde{E}|^2 - \frac{1}{2}|\tilde{E}|^4) dx \quad \text{AN-1}$$

A esta altura, los argumentos se aplican igualmente a la ecuación no lineal de Schrödinger. Al escribir $E = F e^{i\phi}$ y minimizar con respecto a ϕ , se encuentra que

$$F = (F_x^2 - \frac{1}{2}F^4) dx \quad \text{AN-2}$$

El problema se reduce, pues, a determinar la naturaleza

de cualesquiera puntos estacionarios poseídos por AIV-2,
y sujetos a la condición

$$N = \int_{-\infty}^{\infty} F^2 dx = \text{cte} \quad \text{AIV-3,}$$

y las condiciones de frontera

$$F \rightarrow 0, \quad |x| \rightarrow \infty \quad \text{AIV-4}$$

Como ya se vió en la sección 5-II, se puede usar el
multiplicador de Lagrange μ para realizar la minimiza-
ción, esto es, busca una solución de la forma

$$\delta(H + \mu N) = 0. \quad \text{AIV-5}$$

Sob de la ecuación

$$-F_{xx} - F^3 - \mu F = 0 \quad \text{AIV-6}$$

sujeta a AIV-4 y por lo tanto

$$F = F_0 \operatorname{sech}\left(\frac{1}{2} F_0 x / F_0\right) \quad \text{AIV-7}$$

$$\mu = \mu_0 = \frac{1}{2} F_0^2 \quad \text{AIV-8}$$

Para ver si esta solución corresponde o no a
un mínimo, se debe hacer la segunda variación y
encontrar el signo de esta para la solución encontrada.

En cualquier caso, el problema se lo puede dar la
vuelta enunciando una serie de resultados del cálculo

variacional.*

Definición: El punto $\tilde{a}$ se llama conjugado al punto a si la ecuación de Euler tiene una solución que se anula por $x=a$ y $x=\tilde{a}$ pero que no es idénticamente cero

Proposición 1: Los extremales de cualquier funcional de la forma

$$\int_a^b F(x, y, y') dx, \quad y(x) > 0$$

no tiene puntos conjugados (condición débil)

Teorema 1: Supóngase que para alguna curva $y=y(x)$ la funcional

$$J[y] = \int_a^b F(x, y, y') dx \quad y(a)=A, \quad y(b)=B$$

satisface las siguientes condiciones

- 1) la curva $y=y(x)$ es un extremo, es decir, satisface la ecuación de Euler
- 2) A lo largo de la curva $y=y(x)$

$$P(x) = \frac{1}{2} F_{y'y'} [x, y(x), y'(x)] > 0$$

3) El intervalo $[a, b]$ no contiene puntos conjugados al punto a

Entonces la funcional tiene un mínimo débil por $y=y(x)$

* Gelfand I M y Fomin S V, "Calculus of Variations"
Penguin-Hall 1963

la funcional en cuestión es

$$H + \mu N = \int_{-\infty}^{\infty} (\dot{r}_x^2 - \frac{1}{2} \dot{r}^4 + \mu \dot{r}^2) dx$$

que a virtud que AIV-6, satisface la primera condición del teorema. Como,

$$\frac{\partial^2 (\dot{r}_x^2 - \frac{1}{2} \dot{r}^4 + \mu \dot{r}^2)}{\partial \dot{r}_x^2} = 2 > 0$$

se satisface la segunda condición.

De la expresión AIV-7 se sigue la tercera condición, por lo tanto

$$H = \int (\dot{r}_x^2 - \frac{1}{2} \dot{r}^4) dx$$

mejor a

$$N = \int \dot{r}^2 dx = de$$

y las condiciones a la frontera

$$r \rightarrow 0 \quad \text{para } |x| \rightarrow \infty$$

se son mínimo para

$$r = r_0 \operatorname{sech} \left(\frac{1}{\epsilon} \sqrt{\frac{2}{\mu}} x \right)$$

REFERENCIAS

- [1] K.O. Abdurlov, I.L. Bogolyubskij y V.G. Makhankov, Nucl. Fusion 15 (1975) 21
- [2] M.J. Ablowitz, D.J. Kaup, A.C. Newell y H. Segur "The inverse scattering Transform - Fourier Analysis for Nonlinear Problems" Studies in Appl. Math. 53 (1974) 4.
- [3] B. Buti "The problem of collapse in plasmas". Theoretical and computational Plasma Physics" 1978 p 391
- [4] P.F. Byrd y M.D. Friedman. Handbook of Elliptic Integrals New York: Springer 1954
- [5] F.F. Chen. Introduction to Plasma Physics. Plenum
- [6] R. Courant y K.O. Friedrichs Supersonic Flow and Shock Waves Pure and Applied Mathematics Vol 2.
- [7] B.D. Fried y Y.H. Ichikawa. "On the nonlinear Schrödinger equation for Langmuir waves". J. Phys Soc Japan. 34 (1973) pp 1073-1082
- [8] L.M. Begiyarev, V.M. Makhankov y L.I. Rudakov. Sov. Phys. JETP. 40 (1975) 264
- [9] C.S. Gardner, J.M. Greene, M.D. Kruskal y R.M. Miura "Method for solving the Korteweg-de Vries equation" Phys Rev Lett 16 (1967) pp 1095-1097
- [10] J. Gibbons, S.G. Thornhill, M.J. Worshop y D ter Haar "On the decay of Langmuir Solitons." J. Plasma Phys. 17 (1977) pp 53-70
- [11] I.T. Keppman Phys Scripta 11 (1975) 263.

- [12] KRAV y Trivelpiece. Principles of Plasma Physics.
MacGraw-Hill
- [13] P. D. Lax "Integrals of nonlinear equations of evolution
and solitary waves" Commun. Pure Appl. Math. 21(1968)
pp 467-490.
- [14] V. G. Matkhanov. Dubna preprint ES B389 (1979)
- [15] R. W. Motley, W. M. Hooke y C. R. Gwinn. Reporte Técnico
PPN 1642 Marzo 1980
- [16] L. R. Pereira, Phys Fluids 20 (1977) 750
- [17] L. I. Rudakov y V. N. Tsytovich. Phys. Reports 40 (1978) 1
- [18] J. C. Scott, F. F. Chu, W. McLaughlin "The soliton:
A new concept in applied science" Proceeding of
the IEEE 61 (1973) 10
- [19] S. G. Thornhill y D. ter Haar "Langmuir Turbulence
and Modulational Instability" Phys. Reports 43 (1978) 3
- [20] M. J. Goodrop y D. ter Haar. Phys. Scripta 20 (1979) 413
- [21] A. Y. Wong. Comments on Plasma Physics. 5 (1979) 79
- [22] V. N. Tsytovich Non linear Plasma Kinetics. IAEA-SMR
31/104
- [23] Yagima y M. Oikawa Prog Theor Phys. 56 (1976) 1919
- [24] V. E. Zakharov Collapse of Langmuir Waves. Soviet
Physics JETP 35 (1972) 5.
- [25] V. E. Zakharov y A. B. Shabat. "Exact Theory of two
dimensional self-focusing and one dimensional
self-modulation of waves in nonlinear media"
Soviet Physics JETP 34 (1972) 1
- [26] N. J. Fuchs y M. J. Kauskal Phys Rev Letters
15 (1965) pp 240-247
- [27] A. A. Vedenov y V. N. Tsytovich, Phys Scripta 20 (1979) 346