

10 Z. y. 2011.

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

Facultad de Ciencias

DIVERSOS USOS DEL CONCEPTO DE RESONANCIA
PARA TRAZAR ANALOGIAS FISICAS

TESIS

que para obtener el título de

FISICO

presenta

BALDOMERO CARRERA SANTACRUZ



EXAMENES
PROFESIONALES

México, D. F.
1981



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

C O N T E N I D O

	Pág.
INTRODUCCION	i
CAPITULO 1. ANALOGIAS	1
1.1 Algunos Ejemplos Clásicos de Analogías Físicas	2
1.2 Las Analogías Mecánicas de Landau-Lifshitz	7
1.3 Analogía Trazada por Hamiton Entre la Optica Geométrica y la Mecánica Newtoniana Así Como sus Relaciones con la Mecánica Cuántica	11
1.4 La Analogía	17
CAPITULO 2. RESONANCIAS EN FISICA CLASICA	20
2.1 El Oscilador Armónico	20
2.1.1 Oscilador Armónico Libre	20
2.1.2 Oscilador Forzado	25
2.1.3 Oscilador Amortiguado	29
2.1.4 Oscilador Amortiguado Forzado	35
2.2 Péndulos Acoplados	44
2.3 Cuerda Vibrante	50
2.3.1 Ecuación de Movimiento para Cuerda Vibrante	50
2.3.2 Cuerda Vibrante con Extremos Fijos	53

	Pág.	
2.3.3	Cuerda Vibrante Amortiguada Forzada	55
2.4	Acoplamiento Entre un Oscilador y una Cuerda Vibrante	59
2.5	Membrana Vibrante	66
2.6	Circuitos Eléctricos	69
2.6.1	R L C en Serie	69
2.6.2	Circuitos R L C Acoplados	79
2.7	Índice de Refracción	82
2.8	Cavidades Resonantes	88
CAPITULO 3.	RESONANCIAS EN FISICA CUANTICA	95
3.1	Ecuación de Schrödinger	95
3.2	Colisiones Cuántica	101
3.3	Amplitud de Difusión	112
3.4	Fuerzas, Tiempos y Reacción de Leyes de Conservación	119
3.5	Resonancias en Física de Altas Energías	125
3.6	Resonancias en Física Nuclear	135
3.6.1	Resonancia en una Reacción Nuclear	136
3.6.2	Resonancia Magnética Nuclear	143
3.7	Resonancias en Física Atómica y Molecular	149
CAPITULO 4.	PRINCIPIO DE INCERTIDUMBRE. TIEMPO DE RETARDO. RELACIONES DE DISPERSION Y TEOREMA OPTICO	174
4.1	Principio de Incertidumbre	174
4.2	Tiempo de Retardo	179
4.3	Relaciones de Dispersión y Teorema Optico	183

	Pág.	
4.4	Otras Propiedades Generales Conectadas con las Relaciones de Dispersión	189
4.4.1	Causalidad	189
4.4.2	Linealidad	190
4.4.3	Simetría Temporal	191
4.4.4	Altas Frecuencias	193
4.4.5	Relaciones de Cruce	204
CAPITULO 5.	FISICA CLASICA Y FISICA CUANTICA	206
5.1	Analogías entre Fenómenos de Física Clásica	206
5.2	Analogías entre Guías de Ondas, Cavidades Resonantes y Física Cuántica	218
5.2.1	Guías de Ondas	218
5.2.2	Ondas EMT, MT, ET	221
5.3	Tunelamiento y Guías de Ondas	231
5.4	Cavidades Resonantes y Guías de Ondas Acopladas y Partículas Elementales	241
5.4.1	Ecuación de Klein-Gordon	246
5.4.2	Analogías entre Física de Partículas Elementales y Electromagnetismo	249
C O N C L U S I O N		258
	APENDICE A	260
	APENDICE B	268
	NOTAS	274
	REFERENCIAS	277

INTRODUCCION

Ante la necesidad de encontrar solución a nuevos problemas a los que el hombre de ciencia* se enfrenta, lo mismo al docente que al divulgador cuando se trata de transmitir conocimientos nuevos, poco comunes o difíciles de entender, e incluso, como formas de recreación intelectual, se ha recurrido frecuentemente a formular dichos problemas en términos de problemas ya conocidos y suficientemente trabajados o bien a problemas más sencillos, suprimiendo o agregando hipótesis al problema original. Para ello, se ha tenido que romper con métodos tradicionales u ortodoxos para encontrar soluciones, cuando esto es posible. Lo anterior ha llevado al estudio de la ANALOGIA y la HEURISTICA; estudios estos antiguos ya, pero poco explotados explícitamente hoy en día.

Uno de los propósitos de este trabajo es el de aclarar, hasta donde sea posible, el uso de la ANALOGIA en FISICA, para lo cual estudiaremos en el primer capítulo una serie de analogías que nos aclaren lo que se entiende por *analogías físicas* sin llegar a definiciones finales.

*Lo mismo sucede en otras áreas del conocimiento humano.

Dentro de los fenómenos que aparecen en la física y que han despertado un gran interés para su estudio se encuentra el fenómeno de *resonancia*. Este fenómeno se encuentra, prácticamente en todos los ámbitos de la física.

El fenómeno de resonancia constituye actualmente un momento de crisis en la historia de la física y que se presenta agudamente con el descubrimiento de las llamadas *partículas resonantes* en Física de Altas Energías. Así mismo, tanto en Física Nuclear como en Física Atómica y Molecular se tienen problemas que vienen atacándose de manera muy importante desde la década de los 60's.

Un segundo propósito que nos hemos fijado es el de tratar de entender el uso que se le ha dado al *Concepto de Resonancia* tanto en FISICA CLASICA como en FISICA CUANTICA, para ello, desarrollaremos en los capítulos 2 y 3 algunos problemas que nos parecen fundamentales para el entendimiento de dicho concepto. Así, en el capítulo 2 analizamos cómo se presenta el *fenómeno de resonancia* en Mecánica, Circuitos Eléctricos, Óptica y Electromagnetismo, haciendo notar la manera en que se pueden trazar algunas analogías para su comprensión. En el capítulo 3 se estudiarán — sin profundizar demasiado — el tipo de resonancias que aparecen en Física Atómica y Molecular, Física Nuclear y Física de Altas Energías.

En el capítulo 4 trataremos el concepto de tiempo de retardo, un principio estadístico clásico de incertidumbre, el teorema óptico y relaciones de dispersión, observándose una conexión muy estrecha entre estos temas y el de resonancia.

El tercero y último de nuestros propósitos es el de trazar y establecer otras analogías física que se derivan del material desarrollado en los primeros cuatro capítulos. Este propósito se lleva a cabo cuando en el capítulo 5 se desarrollan las analogías entre cuerdas, líneas de transmisión y barreras de potencial cuánticas, las analogías entre diversos fenómenos cuánticos y clásicos como por ejemplo la colisión de partículas elementales y cavidades resonantes y guía de ondas acopladas.

...

"Precisamente", contestó Alicia

"Entonces", continuó la Liebre, "debieras decir lo que piensas"

"Pero ¡sí es lo que estoy haciendo!", se apresuró a replicar Alicia.

"Al menos..., al menos pienso lo que digo..., que después de todo viene a ser la misma cosa ¿no?"

"¿La misma cosa" ¡De ninguna manera!", negó enfáticamente el sombrero.

"¡Hala! Si fuera así, entonces también daría igual decir

'veo cuanto como' que 'como cuanto veo'".

"¡Qué barbaridad!", coreó la Liebre de Marzo.

"Sería como decir que da lo mismo afirmar que 'me gusta cuanto tengo' que 'tengo cuanto me gusta'".

"Valdría tanto como querer afirmar", añadió el Lirón, que parecía hablar en sueños, "que da igual decir 'respiro cuando duermo' que 'duermo cuando respiro'".

LEWIS CARROLL

"Alicia en el País de las Maravillas" cap. 7

CAPITULO 1
A N A L O G I A S

El uso de las *analogías* ha sido de gran importancia para las ciencias, no obstante hay quienes ven en ella sólo un valor heurístico y quienes consideran que le corresponde nada menos que una función rectora en la investigación científica, basta con hacer las siguientes citas para darnos cuenta de lo anterior:

[..] es una ayuda muy valiosa para el estudiante en el desarrollo de un entendimiento intuitivo digno de confianza y productivo [..] — PAULING-WILSON⁽¹⁾.

Y yo estimo las *analogías* más que nada, son mis guías más dignas de confianza. Ellas conocen todos los secretos de la Naturaleza y deberían ser menos descuidadas en geometría — KEPLER⁽²⁾.

Aun en las ciencias matemáticas nuestros instrumentos principales para descubrir la verdad son la inducción y la *analogía* — LAPLACE⁽³⁾.

La interpretación que se le ha dado al término *analogía* es muy variada y hasta el momento no se tiene una idea clara y precisa que unifique los criterios que expresen sus alcances y limitaciones. En este capítulo ofreceremos algunas ideas y ejemplos relacionados con los diversos usos de la *analogía en física*

1.1 ALGUNOS EJEMPLOS CLASICOS DE ANALOGIAS FISICAS

Se da, a continuación, una lista de *analogías físicas*, que sin ser exhaustiva; dado que no es nuestra intención, sino más bien explicativa, es generadora de algunas acepciones que se le han dado al término *analogía* y más restringidamente a aquellas que se le han dado en física.

- (i) La analogía trazada por Huygens entre ondas de luz, sonido y agua.
- (ii) La analogía trazada por Maxwell⁽⁴⁾ entre el campo eléctrico y un fluido incompresible imaginario cuyo flujo se establece a través de tubos de sección transversal variable.
- (iii) La analogía notada por Kelvin entre la atracción electrostática y la conducción de calor.
- (iv) La analogía trazada entre el campo de fuerzas nucleares y el campo electromagnético.
- (v) La analogía entre la fisión nuclear y la división de una gota en dos gotas más pequeñas.
- (vi) La analogía entre un gas y un recipiente de bolas de billar.

- (vii) La analogía entre un átomo y un sistema solar.
- (viii) La analogía entre el spin isotópico y el spin ordinario.
- (ix) La analogía entre el flujo de una corriente eléctrica en un alambre y el flujo de un fluido en un tubo.

Aclaremos a continuación algunos de estos ejemplos con más detalle.

Veamos, por ejemplo, en qué consiste la analogía entre la conducción del calor y la atracción electrostática.

El flujo calorífico o rapidez de transferencia de calor Q a través de una superficie A localizada en r , está dado por la ley de Fourier

$$Q = -kA \frac{dT}{dr} \quad 1.1$$

donde k es el coeficiente de conductividad térmica y T la temperatura. Si en el centro de una esfera uniforme y homogénea se tiene una fuente de calor, entonces, el gradiente de temperaturas viene dado por

$$\frac{dT}{dr} = - \frac{Q}{4\pi k} \frac{1}{r^2} \quad 1.2$$

y por lo tanto

$$T = \frac{Q}{4\pi k} \frac{1}{r} \quad 1.3$$

o bien

$$\Gamma = \frac{1}{4\pi k} \int \frac{q dA}{r} \quad 1.4$$

refiriéndonos a q como la intensidad de flujo calorífico, es decir, la cantidad de flujo calorífico por unidad de área.

En electrostática sabemos que:

$$F = - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \quad 1.5$$

$$\psi(r) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \quad 1.6$$

o bien

$$\psi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho dA}{r} \quad 1.7$$

Además, como F es un campo de fuerzas conservativo,

$$\frac{d\psi(r)}{dr} = - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \quad 1.8$$

Aquí, e es la cantidad de carga, ψ es el potencial electrostático y ρ es la cantidad de carga por unidad de área.

Por medio de (1.2) - (1.4) y de (1.5) - (1.8) observamos que la similitud que existe entre la temperatura en un fenómeno de transferencia de calor por conducción y el potencial electrostático, proveniente también, de la similitud entre la intensidad del flujo calorífico y la densidad de carga electrostática, es muy estrecha. Así,

$$T \longleftrightarrow \psi$$

1.9

$$q \longleftrightarrow \rho$$

Consideremos, ahora, la analogía entre el flujo de la corriente eléctrica en un alambre conductor y el flujo de un fluido en un tubo.

Poiseville investigando el flujo de la sangre en las arterias, venas y capilares, encontró que en un tubo de longitud L y de radio interior r por el que circulaba un fluido de viscosidad η , la rapidez volumétrica del flujo Φ estaba dado por

$$\Phi = \frac{\pi r^4}{8\eta} \frac{p_1 - p_2}{L} \quad 1.10$$

en donde $(p_1 - p_2)$ es la diferencia de presiones entre los extremos del tubo.

En el caso del flujo de corriente eléctrica en un alambre conductor de longitud L y de sección transversal A , la densidad de corriente J se expresa mediante la siguiente ecuación,

$$J = \sigma \frac{\psi_1 - \psi_2}{L} \quad 1.11$$

o bien

$$\psi_1 - \psi_2 = RI \quad 1.12$$

Las ecuaciones 1.11 y 1.12 son la bien conocida ley de Ohm, en las

cuales $(\psi_1 - \psi_2)$ significa la diferencia de potencial entre los extremos, I la corriente eléctrica y R la resistencia; esta última definida por

$$R = \frac{1}{\sigma A} . \quad 1.13$$

Nuevamente, la similitud entre 1.10 y 1.11 resulta evidente para estos dos fenómenos.

Ahora bien, el papel de k en 1.1 y de la σ en 1.13, es el mismo, de tal manera que si sustituimos k por σ en 1.13, obtenemos

$$R_k = \frac{L}{kA} . \quad 1.14$$

es decir, la resistencia al flujo calorífico.

Por lo anterior es fácil ver, entonces, que podemos trazar una ley de Ohm para el fenómeno de conducción de calor análoga a 1.12, dando por resultado,

$$T_1 - T_2 = R_k Q, \quad 1.15$$

esto es, la diferencia de temperaturas entre dos puntos es igual a la resistencia al flujo calorífico por el flujo calorífico.

1.2 LAS ANALOGIAS MECANICAS DE LANDAU Y LIFSHITZ⁽⁵⁾.

Las ecuaciones de movimiento de un sistema con S grados de libertad son

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad ; \quad i = 1, 2, \dots, s. \quad 1.16$$

Estas ecuaciones, más conocidas como ecuaciones de Lagrange, quedan inalteradas al multiplicar la función de Lagrange L por una constante, lo cual posibilita *inferir algunas conclusiones sobre las propiedades del movimiento, sin necesidad de integrar las ecuaciones.*

A continuación desarrollamos dos casos que dan lugar a muchos casos importantes de analogías:

1er. caso

La función de Lagrange L está definida por

$$L = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 - U(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n), \quad 1.17$$

entonces, si U es una *función homogénea*⁽⁶⁾ de grado k de las coordenadas, es decir,

$$U(\alpha \vec{r}_i) = \alpha^k U(\vec{r}_i) \quad 1.18$$

y además $t \rightarrow \beta t$, se debe de cumplir

$$\alpha^k = \frac{\alpha^2}{\beta^2} \quad 1.19$$

o bien

$$\beta = \alpha \left(1 - \frac{1}{2} k\right) \quad 1.20$$

Así, tenemos que, cuando $\ell' = \alpha \ell^{(7)}$ y $t' = \beta t$,

$$\frac{t'}{t} = \left(\frac{\ell'}{\ell}\right)^{1 - \frac{1}{2} k} \quad 1.21$$

$$\frac{v'}{v} = \left(\frac{\ell'}{\ell}\right)^{\frac{1}{2} k} \quad 1.22$$

$$\frac{E'}{E} = \left(\frac{\ell'}{\ell}\right)^k \quad 1.23$$

$$\frac{M'}{M} = \left(\frac{\ell'}{\ell}\right)^{1 + \frac{1}{2} k} \quad 1.24$$

De esta manera, llegamos a la siguiente conclusión: si la energía potencial es una función homogénea de grado k , entonces, las ecuaciones de movimiento admiten trayectorias geoméricamente semejantes.

2do. caso

Dado que la energía cinética es una función homogénea de grado dos, entonces, por el teorema de Euler,

$$\sum_i \vec{v}_i \cdot \frac{\partial T}{\partial \vec{v}_i} = 2T. \quad 1.25$$

La ecuación anterior se puede reescribir como

$$2T = \frac{d}{dt} \left(\sum_i \vec{p}_i \cdot \vec{r}_i \right) - \sum_i \vec{r}_i \cdot \dot{\vec{p}}_i \quad 1.26$$

recordando que,

$$\vec{p}_i = \frac{\partial T}{\partial \vec{v}_i} \quad 1.27$$

Si las cantidades físicas del sistema son finitas se tiene, de 1.26, lo siguiente,

$$\langle 2T \rangle = \langle \sum_i \vec{r}_i \cdot \frac{\partial U}{\partial \vec{r}_i} \rangle \quad (8) \quad 1.28$$

ya que

$$\left\langle \frac{d}{dt} \left(\sum_i \vec{p}_i \cdot \vec{r}_i \right) \right\rangle = 0 \quad 1.29$$

y

$$\dot{\vec{p}}_i = - \frac{\partial U}{\partial \vec{r}_i} \quad 1.30$$

A la cantidad $\langle \sum_i \vec{r}_i \cdot \frac{\partial U}{\partial \vec{r}_i} \rangle$ con frecuencia se le llama el *virial del sistema*.

Cuando en un sistema U es una función homogénea de grado k de las \vec{r}_i , entonces, aplicando el teorema de Euler, una vez más,

en 1.28, obtenemos

$$\langle 2T \rangle = \langle kU \rangle, \quad 1.31$$

resultado conocido con el nombre *teorema del virial*.

$$\text{Como,} \quad \langle T \rangle + \langle U \rangle = E, \quad 1.32$$

se tiene por tanto

$$\langle U \rangle = \frac{2E}{k+2} \quad 1.33$$

$$\langle T \rangle = \frac{kE}{k+2} \quad 1.34$$

Para ilustrar en casos concretos, tomemos:

(a) pequeñas oscilaciones

En este caso, $k = 2$ y por tanto

$$\frac{t'}{t} = 1 \quad (9) \quad 1.35$$

$$\frac{v'}{v} = \frac{\ell'}{\ell} \quad 1.36$$

$$\frac{E'}{E} = \left(\frac{\ell'}{\ell} \right)^2 \quad 1.37$$

$$\frac{M'}{M} = \left(\frac{\ell'}{\ell} \right)^2 \quad 1.38$$

$$y \quad \langle T \rangle = \langle U \rangle \quad (10) \quad 1.39$$

(b) atracción Newtoniana e interacción Coulombiana:

En ambos casos, $k = -1$, así que

$$\frac{t'}{t} = \left(\frac{\ell'}{\ell} \right)^{3/2} \quad (11) \quad 1.40$$

$$\frac{v'}{v} = \left(\frac{\ell'}{\ell} \right)^{-1/2} \quad 1.41$$

$$\frac{E'}{E} = \left(\frac{\ell'}{\ell} \right)^{-1} \quad 1.42$$

$$\frac{M'}{M} = \left(\frac{\ell'}{\ell} \right)^{1/2} \quad 1.43$$

$$y \quad \langle U \rangle = -2\langle T \rangle. \quad 1.44$$

1.3 ANALOGIA TRAZADA POR HAMILTON ENTRE LA OPTICA GEOMETRICA Y LA MECANICA NEWTONIANA ASI COMO SUS RELACIONES CON LA MECANICA CUANTICA.

En Optica Geométrica el principio fundamental que la rige es el *Principio de Fermat*, que en su versión más moderna se establece como sigue:

Un *rayo* de luz al viajar entre dos puntos en un medio óptico cualquiera, sigue un camino que corresponde a un valor estacionario de los caminos ópticos.

Usando la notación del cálculo variacional el P. de Fermat se escribe como

$$\delta \int n(\vec{r}_i, v) ds = 0 \quad \text{con } v = \text{const.} \quad 1.45$$

Por otra parte, la *trayectoria* de una partícula en un campo de fuerzas, para el cual las leyes de Newton sean válidas, es decir, las leyes de la Mecánica Clásica, se puede deducir de un principio muy general como lo es el *Principio de Hamilton*⁽¹²⁾, esto es,

$$\delta \int p(\vec{r}, E) ds = 0 \quad \text{con } E = \text{const.} \quad 1.46$$

Lo anterior se puede escribir como sigue:

$$\delta \int p(\vec{r}, E) ds = 0 \quad \Rightarrow \quad m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -\nabla U(\vec{r}) \quad 1.47$$

Así, planteadas las cosas de esta manera, podemos observar una similitud muy estrecha entre la Óptica Geométrica y la Mecánica Newtoniana, de tal forma que si identificamos al índice de refracción con la cantidad de movimiento o momentum de una partícula, entonces, los conceptos de *rayo* y *trayectoria* son equivalentes⁽¹³⁾.

Debido a que la Óptica Geométrica era insuficiente para resolver ciertos problemas, como por ejemplo, los de *difracción*, *interferencia*, *dispersión*, fundamentalmente, hubo la necesidad de construir la óptica de ondas, misma que fue iniciada por Huygens en 1690

y cuya base está dada por el llamado *Principio de Huygens*:

Cada punto sobre un frente de ondas puede ser considerado como una nueva fuente de ondas.

Este principio, cuya aplicación correcta fue hecha más de un siglo después por Fresnel, está contenido esencialmente en la ecuación de la eikonal⁽¹⁴⁾ — expresión esta última introducida por H. Bruns —, como caso límite de la Óptica de Ondas, es decir, cuando $\lambda \rightarrow 0$.

Establecida la unidad entre la Óptica y Electromagnetismo por Maxwell, tenemos que la luz como onda electromagnética cumple con la ecuación de onda escalar

$$\nabla^2 \psi + k^2 = 0, \quad k = \omega \sqrt{\epsilon \mu} = \frac{2\pi}{\lambda} \quad 1.48$$

Cuando $\lambda \rightarrow 0$, y de aquí $k \rightarrow \infty$, la ec. diferencial anterior degenera. Con el fin de obtener conclusiones cuantitativas en este caso hagamos las siguientes suposiciones:

$$\psi = Ae^{ik_0 S}, \quad k_0 = \omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} = \frac{2\pi}{\lambda_0} \quad 1.49$$

S es la *eikonal* y describe a un sistema de rayos en un medio óptico de índice n . A y S son funciones de las coordenadas que varían lentamente de tal manera que no se van a infinito con k_0 .

Derivando (1.49) obtenemos

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = ik_0 \psi \frac{\partial S}{\partial x} + \psi \frac{\partial \log A}{\partial x} \quad 1.50$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = -k_0^2 \psi \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 + 2ik_0 \psi \left(\frac{1}{2} \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \frac{\partial \log A}{\partial x} \frac{\partial S}{\partial x} \right) + \dots \quad 1.51$$

por tanto

$$\nabla^2 \psi + k^2 \psi = -k_0^2 \psi \left[\left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z} \right)^2 - \frac{k^2}{k_0^2} \right] + 2ki_0 \psi \left[\frac{1}{2} \nabla^2 S + \vec{\nabla} \log A \cdot \vec{\nabla} S \right] + \dots \quad 1.52$$

Para que (1.52) satisfaga aproximadamente a (1.48) se requiere que A y S satisfagan

$$(a) \quad |\vec{\nabla} S| = n \quad \text{o bien} \quad (\vec{\nabla} S)^2 = n^2 \quad 1.53$$

$$(b) \quad \vec{\nabla} \log A \cdot \vec{\nabla} S = -\frac{1}{2} \nabla^2 S. \quad 1.54$$

En la Mecánica Ondulatoria se tienen dos resultados importantes

$$p = \frac{h}{\lambda} \quad 1.55$$

$$y \quad E = h\nu \quad 1.56$$

A la relación (1.55) se le conoce como ecuación de Broglie y λ , longitud de onda de Broglie.

Dado que la ecuación (1.45) se puede reescribir de la siguiente manera:

$$\delta \int \lambda^{-1}(\vec{r}, v) dS = 0 \quad \text{con } v = \text{const.} \quad 1.57$$

la similitud entre (1.46) y (1.57) es nuevamente muy estrecha y su poniendo⁽¹⁵⁾ que la ecuación (1.48) vale también para sistemas Mecánico-cuánticos, entonces

$$\nabla^2 \psi + \frac{2m}{h} (E - U) \psi = 0. \quad 1.58$$

ya que
$$p = \sqrt{2m(E - U)} \quad 1.59$$

y por tanto
$$k^2 = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 = \frac{2m}{h^2} (E - U) \quad 1.60$$

La ecuación (1.58) es la ecuación de Schrödinger, misma que ha ce cerrar una serie de analogías de gran importancia para toda la física.

Arnold Sommerfeld⁽¹⁶⁾ hace mención a lo anterior diciendo:

La Optica Física está relacionada a la Optica de rayos en la misma forma en que la Mecánica Ondulatoria está relacionada a la Mecánica Clásica. Este hecho fue reconocido por Schrödinger sobre la base del profundo trabajo de Hamilton.

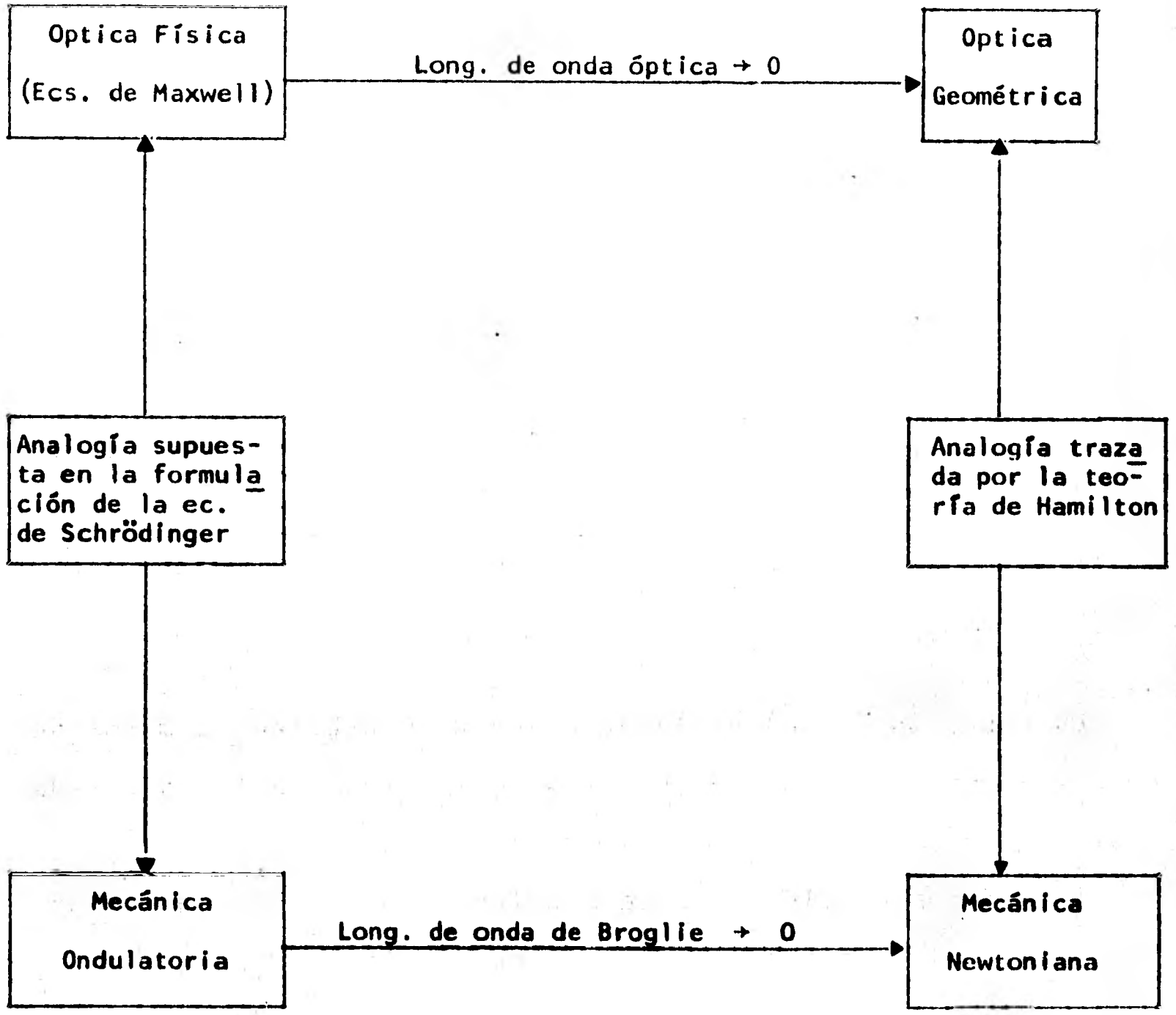


Fig. 1

1.4 LA ANALOGIA

Iniciamos nuestro estudio con un fragmento de Alicia en el País de las Maravillas, en el que de una manera *lógico-literaria* se nos muestra el uso de *la analogía*. "*La analogía* ocupa todo nuestro modo de pensar, tanto nuestras cotidianas conversaciones y nuestras más banales conclusiones como medios de expresión artística y las más altas realizaciones científicas. Así, pues, se emplea en los más diferentes niveles⁽¹⁷⁾". Sin embargo, el uso que se hace con frecuencia de *la analogía* es vago y superficial, sin atender a sus alcances y limitaciones.

Para poder establecer lo que significa *la analogía en física* hemos destacado una cierta variedad de ejemplos en donde el uso de la analogía se haga notar lo más explícitamente posible y así de esta manera ofrecer algunas ideas que clarifiquen el uso y sentido de *la analogía*.

Es claro de las secciones anteriores que: *la analogía es una especie de semejanza, de similitud*. Podemos distinguir aún más y decir entonces que hay analogía entre α y β cuando se sugiere la existencia de ciertas similaridades entre:

- (1) Objetos físicos (moléculas y bolas de billar)
- (2) Materiales (fluido de Maxwell y campo eléctrico)
- (3) Fenómenos (fisión nuclear y división de una gota de líquido en dos gotas más pequeñas).

Las similaridades, también, a su vez, pueden ser de varias clases, señalemos aquellas que se dan en los ejemplos que hemos manejado:

- (a) A y B pueden ser similares en virtud de satisfacer los mismos principios (o bien los principios pueden ser similares pero no idénticos).
- (b) Similaridad entre configuraciones geométricas
- (c) Similaridad en el papel que desempeñan.

Las analogías pueden ser formales debido a la similaridad de las ecuaciones y no implica que haya alguna similaridad física entre cantidades que ocupen la misma posición en sus respectivas ecuaciones.

Al trazar la analogía uno considera no sólo la estructura formal de las ecuaciones sino también similaridades en la designata de los símbolos contenidos en ellas.

La analogía puede alcanzar el nivel de la precisión matemática⁽¹⁸⁾.

(i) Dos sistemas de elementos matemáticos S y S' tienen entre sí una dependencia tal que ciertas relaciones entre los elementos de S están regidas por las mismas leyes que rigen las relaciones correspondientes entre los elementos de S' .

(ii) Los elementos de dos sistemas S y S' se corresponden biunívocamente bajo ciertas relaciones. Es decir, que si existe una relación entre los elementos de uno de los sistemas la misma relación debe existir entre los elementos correspondientes del otro sistema. Este tipo de relación entre dos sistemas es un género muy particular de analogía, recibe el nombre de *isomorfismo* o *isomorfismo holoedro*.

(iii) Los elementos de dos sistemas S y S'' se corresponden entre sí de tal modo que un elemento de S corresponde a varios elementos de S'' bajo ciertas relaciones. Este género de relación (importante en diversas ramas de la matemática avanzada, en particular para la *teoría de grupos*) recibe el nombre de *isomorfismo meroedro* u *homomorfismo* o mejor dicho *homeomorfismo*. Se puede considerar el *isomorfismo meroedro* como otro tipo muy preciso de analogía.

CAPITULO 2

RESONANCIAS EN FISICA CLASICA

A continuación nos vamos a referir a una serie de fenómenos físicos que dan lugar al *Concepto de Resonancia en Física Clásica*, para ello, estudiaremos algunos sistemas oscilatorios fundamentales en *Mecánica, Electricidad, Óptica y Electromagnetismo*.

Comenzaremos con el estudio de las oscilaciones mecánicas, que aparte de ser el más sencillo, parece ser — tal vez por su sencillez — el más fundamental, no sólo en la Física Clásica, sino también en la Física Cuántica. Además, las oscilaciones mecánicas son un fenómeno que nos resulta muy familiar.

2.1 EL OSCILADOR ARMONICO

2.1.1 OSCILADOR ARMONICO LIBRE

El caso más simple de oscilaciones se presenta cuando una partícula está separada de su posición de equilibrio estable, en un campo de fuerzas conservativo. Este caso queda muy bien representado por un sistema (ver figura) regido por la Ley de Hooke.

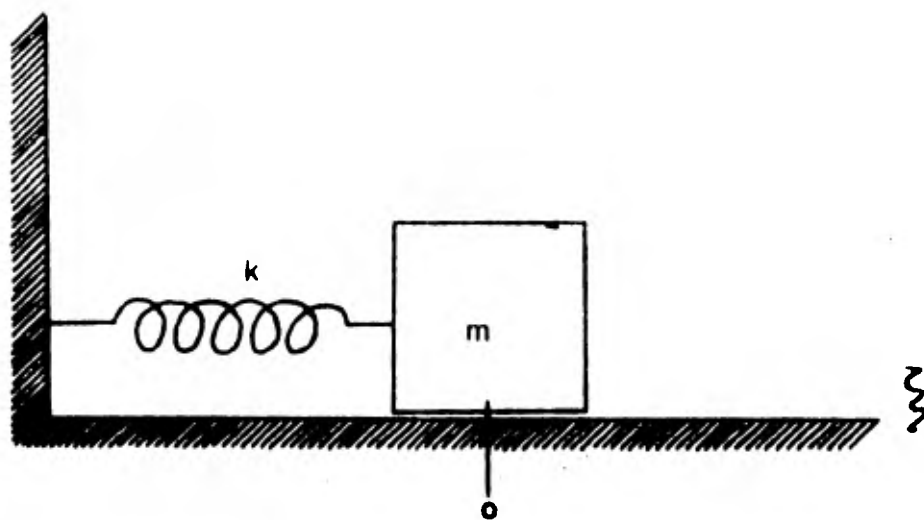


Fig. 2

Cuando la masa del cuerpo en la Fig. 2 se separa a una distancia A a partir de su posición de equilibrio 0 , entonces el movimiento que efectuará dicha masa estará dado por la ecuación diferencial

$$m\ddot{\xi} + k\xi = 0 \quad 2.1$$

O bien
$$\ddot{\xi} + \omega_0^2 \xi = 0 \quad 2.2$$

donde
$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} \quad 2.3$$

Matemáticamente hay dos situaciones por analizar al resolver la ecuación (2.1):

(i) Si $\omega_0^2 < 0$, la solución es

$$\xi_0(t) = a_1 e^{+\omega_0 t} + a_2 e^{-\omega_0 t} \quad 2.4$$

(ii) Si $\omega_0^2 > 0$, entonces

$$\xi_0(t) = a_1 e^{+i\omega_0 t} + a_2 e^{-i\omega_0 t} \quad 2.5$$

Como $\xi(t)$ es un número real, debemos tener $\xi(t) = \xi^*(t)$ para cualquier t y así, $a_1 = a_2^*$ y $a_1^* = a_2$, por tanto a_1 y a_2 son de la forma $be^{\pm i\phi}$. Eligiendo $a_1 = \frac{1}{2} ae^{i\phi}$, la ecuación (2.5) se transforma en

$$\xi_0(t) = a \cos(\omega_0 t + \phi) \quad 2.6$$

En la situación física presente k y m son positivas, por lo que la descripción del movimiento de m está expresada por medio de (2.5) ó (2.6). El significado de (2.6) es: m está oscilando entre $\pm a$ con una frecuencia ω_0 y un origen en los tiempos dado por ϕ ; "a" recibe el nombre de *amplitud* de las oscilaciones, ω_0 el de *frecuencia angular* o simplemente *frecuencia* y ϕ el de *fase*.

La energía mecánica total E del oscilador armónico es

$$E = \frac{1}{2} m \left[\dot{\xi}_0(t) \right]^2 + \frac{1}{2} k \omega_0(t), \quad 2.7$$

O bien,
$$E = \frac{1}{2} m \left(\dot{\xi}_0^2 + \omega_0^2 \xi_0^2 \right) \quad 2.8$$

y por tanto
$$E = \frac{1}{2} m \omega_0^2 a^2 \quad 2.9$$

Usando (2.9), la ecuación (2.8) la podemos reescribir como

$$\frac{\dot{\xi}_0^2}{a^2 \omega_0^2} + \frac{\xi_0^2}{a^2} = 1 \quad 2.10$$

ó,
$$\dot{\xi}_0^2 + (\omega_0 \xi_0)^2 = a^2 \omega_0^2 \quad 2.11$$

Por lo anterior, el espacio fase para el oscilador armónico se da en las figuras 3 y 4.

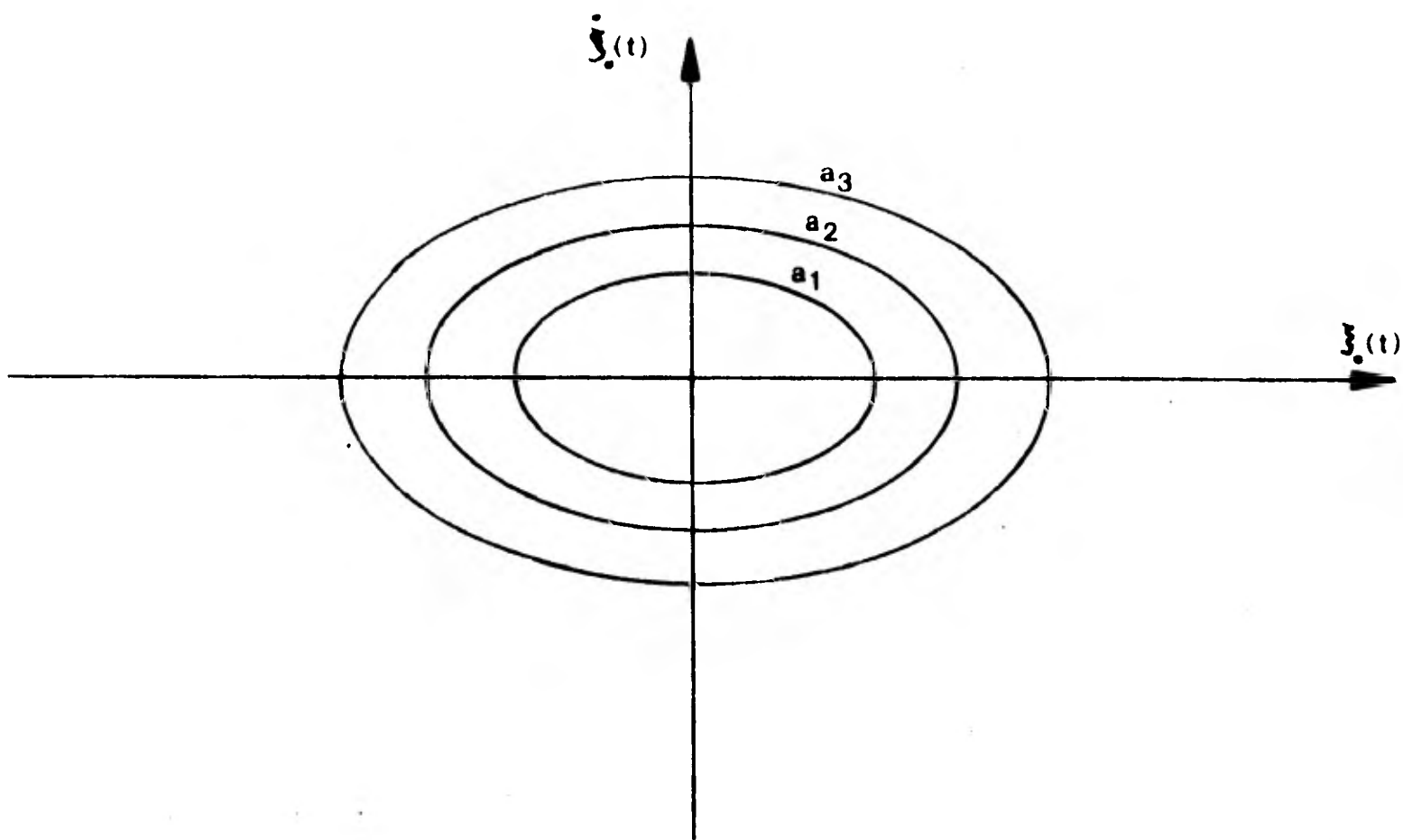


Fig. 3

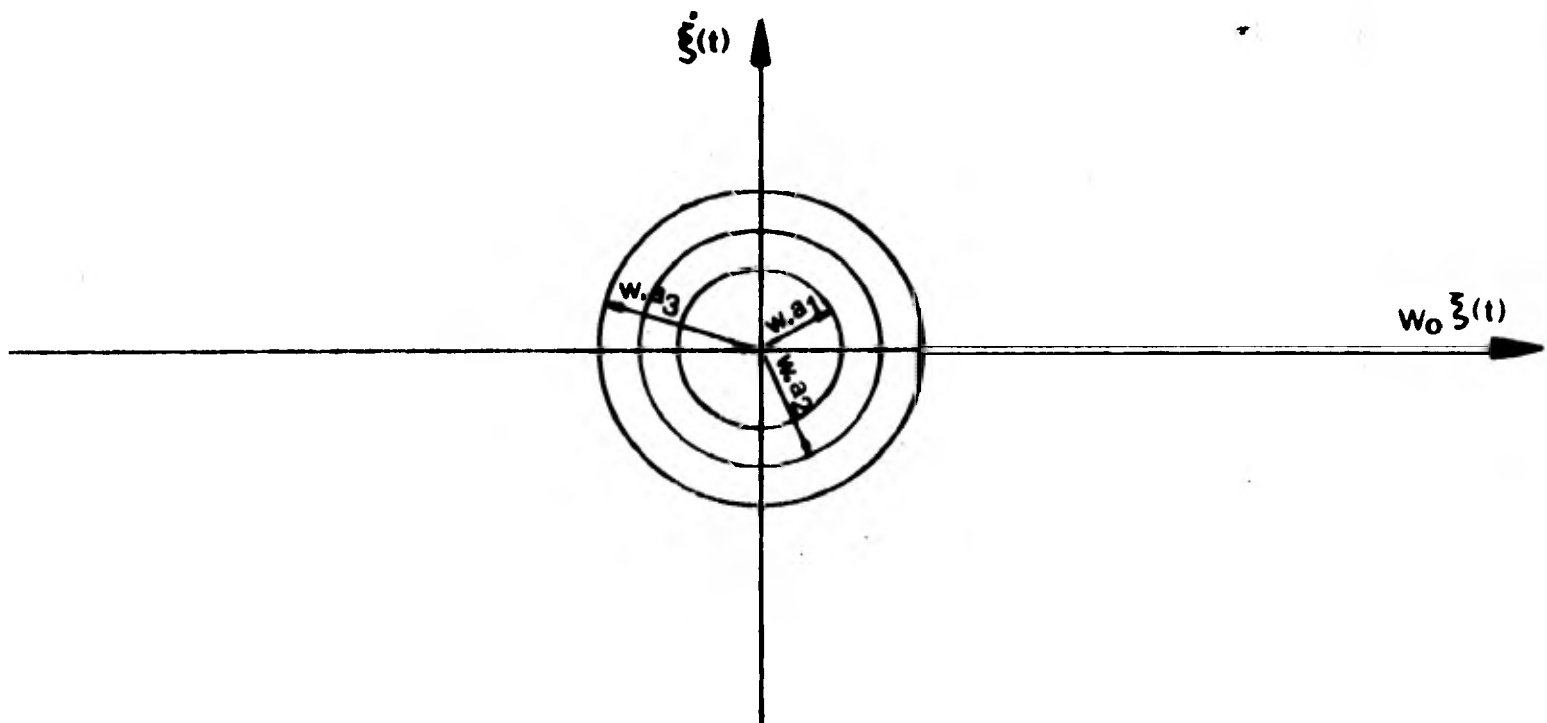


Fig. 4

Geométricamente lo que hemos hecho con (2.10) y (2.11) es pasar de ciertas trayectorias en el espacio fase a otras similares en el mismo espacio fase, las cuales preservan la rapidez de recorrido de la trayectoria, este hecho ya ha quedado establecido en (1.35). Aquí, tanto el período como la frecuencia son independientes de la amplitud, es decir, de la energía y de la longitud de la trayectoria. Cuando la frecuencia no depende de la amplitud se dice que hay *isocronía* del oscilador armónico simple, y se dice que hay un movimiento *tautocrónico* cuando el período o la frecuencia no depende de la longitud de la trayectoria.

2.1.2 OSCILADOR FORZADO

El oscilador forzado corresponde a una situación en donde hay una fuerza externa al sistema masa-resorte que depende del tiempo y que podemos esquematizarlo por medio de la figura 5.

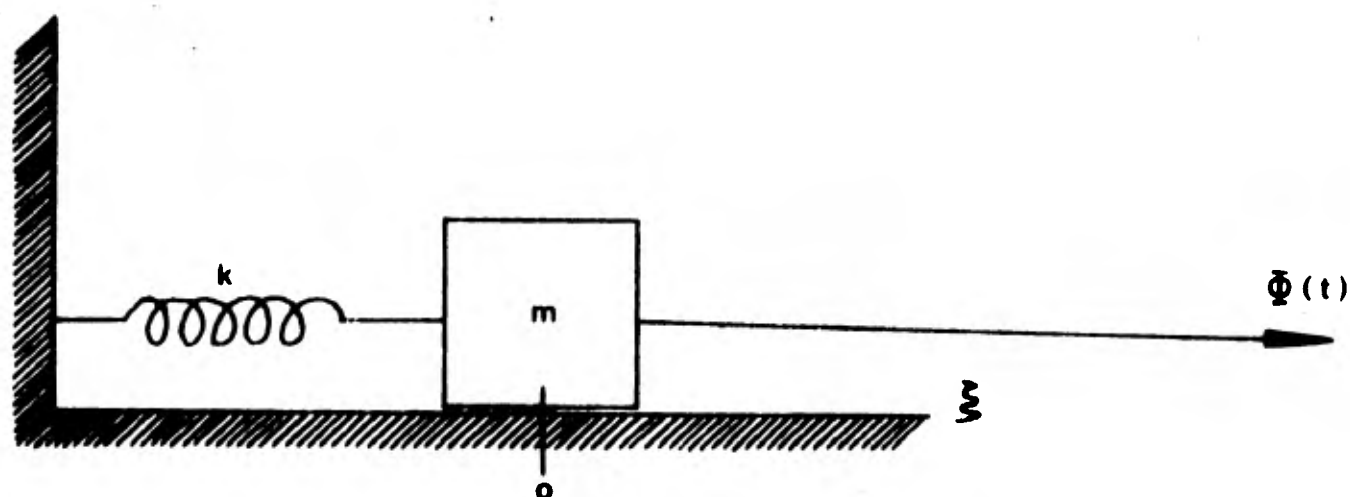


Fig. 5

La ecuación de movimiento para este problema es

$$m\ddot{\xi}(t) + k\xi(t) = \phi(t) \quad 2.12$$

o bien,
$$\ddot{\xi}(t) + \omega_0^2 \xi(t) = \psi(t) \quad 2.13$$

en donde $\psi(t) = \phi(t)/m$ y ω_0^2 lo mismo que (2.3)

Nuevamente hay dos casos al analizar la solución de (2.13):

(i) Si $\omega_0^2 > 0$, se tiene que

Multiplicando ambos miembros de (2.13) por $e^{i\omega_0 t}$, obtenemos lo siguiente, una vez que el primer miembro se ha escrito como una derivada y se haya efectuado la primera integración

$$\dot{\xi}_p(t) - i\omega_0 \xi_p(t) = e^{-i\omega_0 t} \left(\int \psi(t) e^{i\omega_0 t} dt + C_1 \right) \quad 2.14$$

Multiplicando ahora (2.13) por $e^{-i\omega_0 t}$ y haciendo los mismos pasos anteriormente marcados obtenemos

$$\dot{\xi}_p(t) + i\omega_0 \xi_p(t) = e^{+i\omega_0 t} \left(\int \psi(t) e^{-i\omega_0 t} dt + C_2 \right) \quad 2.15$$

Como, (2.14) y (2.15) forman un sistema simultáneo de dos ecuaciones con dos incógnitas ($\dot{\xi}$ y ξ) es fácil ver que

$$\dot{\xi}_p(t) = \frac{1}{2} [\eta_1(t) + \eta_2(t)] \quad 2.16$$

$$y \quad \xi_p(t) = \frac{1}{2i\omega_0} [\eta_1(t) - \eta_2(t)] \quad 2.17$$

$$\text{donde } \eta_i(t) = e^{\mp i\omega_0 t} \left[\int \psi(t) e^{\pm i\omega_0 t} dt + C_i \right], \quad i = 1 \text{ y } 2 \quad 2.18$$

Cuando se tiene una fuerza externa al sistema de tipo periódica, como por ejemplo

$$\psi(t) = B e^{i\mu t} \quad 2.19$$

entonces la solución particular de (2.13), $\xi_p(t)$, dada por (2.17) es

$$\xi_p(t) = \frac{B e^{i\mu t}}{\omega_0^2 - \mu^2} + \frac{i}{2\omega_0} \left[C_1 e^{-i\omega_0 t} - C_2 e^{+i\omega_0 t} \right] \quad 2.20$$

En el momento en que $\mu = \omega_0$, el primer término de (2.20) queda indeterminado. Para resolver la indeterminación apliquemos la regla de L'Hôpital quedando finalmente

$$\xi_p(t) = -\frac{i}{2\omega_0} \left[Bte^{i\omega_0 t} + \left(C_2 e^{+i\omega_0 t} - C_1 e^{-i\omega_0 t} \right) \right] \quad 2.21$$

Debemos notar ahora lo siguiente:

(a) La solución general de (2.13) viene dada por

$$\xi(t) = \xi_0(t) + \xi_p(t) \quad 2.22$$

donde $\xi(t)$ es (2.5) y $\xi_p(t)$ es (2.17)

(b) Si $\mu \rightarrow \omega_0$, es decir, cuando la frecuencia de la fuerza externa es igual a la frecuencia natural de oscilación del sistema, se habla de que el sistema entra en *resonancia* y por tanto (2.20) no es aplicable para este caso sino (2.21).

(c) La energía del sistema no se conserva, dado que éste la recibe continuamente del exterior.

(ii) Si $\omega_0^2 < 0$, entonces

$$\dot{\xi}_p(t) = \frac{1}{2} \left[\eta_1(t) + \eta_2(t) \right] \quad 2.23$$

$$\xi_p(t) = -\frac{1}{2\omega_0} \left[\eta_1(t) - \eta_2(t) \right] \quad 2.24$$

$$y \quad \eta_i(t) = e^{\pm\omega_0 t} \left[\int \psi(t) e^{\mp\omega_0 t} dt + C_i \right], \quad i = 1, 2 \quad 2.25$$

2.1.3 OSCILADOR AMORTIGUADO

El tipo de oscilador que ahora vamos a resolver es el mismo de la figura 2 sólo que añadiremos al sistema una fuerza de fricción proporcional a la velocidad de m . Así, la ecuación de movimiento es

$$m\ddot{\xi}(t) + \beta\dot{\xi}(t) + k\xi(t) = 0 \quad 2.26$$

o bien
$$\ddot{\xi}(t) + 2\Gamma\dot{\xi}(t) + \omega_0^2\xi(t) = 0 \quad 2.27$$

donde
$$2\Gamma = \frac{\beta}{m} \text{ y } \omega_0^2 = \frac{k}{m} \quad 2.28$$

La solución para (2.27) es de la forma

$$\xi(t) = a e^{-i\omega t} \quad 2.29$$

y su ecuación característica está dada por

$$\omega^2 + 2i\Gamma\omega - \omega_0^2 = 0 \quad 2.30$$

cuyas raíces son

$$\omega_i = -i\Gamma \pm \sqrt{\omega_0^2 - \Gamma^2}, \quad i = 1, 2 \quad 2.31$$

Si variamos a Γ desde 0 hasta ∞ , se nos presentan tres situaciones por analizar, que son:

$$(a) \quad 0 \leq \Gamma < \omega_0 \quad \text{o bien,} \quad \omega_0^2 - \Gamma^2 > 0 \quad 2.32$$

cuando $\Gamma \rightarrow 0$, entonces

$$\operatorname{Re}\omega_1 \rightarrow +\omega_0, \quad \operatorname{Im}\omega_1 \rightarrow 0 \quad 2.33$$

$$\operatorname{Re}\omega_2 \rightarrow -\omega_0, \quad \operatorname{Im}\omega_2 \rightarrow 0$$

$$(b) \quad \Gamma = \omega_0, \quad \text{o bien,} \quad \omega_0^2 - \Gamma^2 = 0 \quad 2.34$$

cuando esto pasa,

$$\operatorname{Re}\omega_1 \rightarrow 0, \quad \operatorname{Im}\omega_1 \rightarrow -\omega_0 \quad 2.35$$

$$\operatorname{Re}\omega_2 \rightarrow 0, \quad \operatorname{Im}\omega_2 \rightarrow -\omega_0$$

$$(c) \quad \omega_0 < \Gamma < \infty, \quad \text{o bien} \quad \omega_0^2 - \Gamma^2 < 0 \quad 2.36$$

cuando $\Gamma \rightarrow \infty$, entonces

$$\operatorname{Re}\omega_1 \rightarrow 0, \quad \operatorname{Im}\omega_1 \rightarrow 0 \quad 2.37$$

$$\operatorname{Re}\omega_2 \rightarrow 0, \quad \operatorname{Im}\omega_2 \rightarrow -\infty$$

Por lo anterior se observa que en el plano complejo de las frecuencias, los ceros de (2.30) para $\Gamma \ll \omega_0$ están muy pegados al eje real por debajo de $\pm \omega_0$. Cuando Γ crece de cero a ω_0 , los ceros se aproximan al eje imaginario negativo, moviéndose a lo largo de una semicircunferencia de radio ω_0 centrada en el origen. En $\Gamma = \omega_0$ los ceros llegan al punto $-i\omega_0$ y finalmente, cuando $\Gamma > \omega_0$, los ceros se mueven en sentidos opuestos a lo largo del eje imaginario negativo, unos aproximándose al origen, mientras que los otros (los que vienen por la izquierda) tienden a $-i\infty$ si $\Gamma \rightarrow \infty$. Esta descripción queda más clara en la gráfica de la figura 6.

A las situaciones (a), (b) y (c) se les conoce con los nombres de oscilador: *bajo-amortiguado*, *críticamente amortiguado* y *sobre amortiguado*, respectivamente.

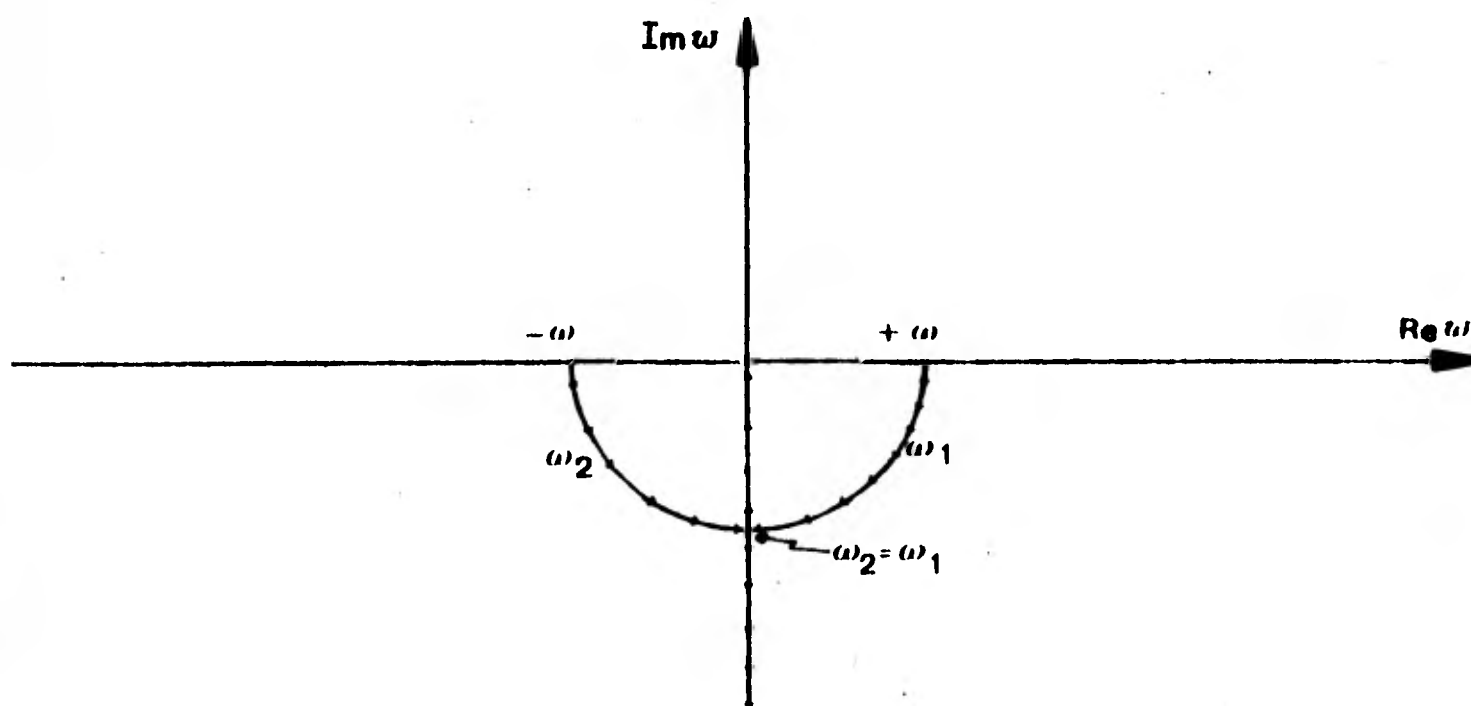


Fig. 6

veamos como son las soluciones (2.29) de (2.27) para (a), (b) y (c):

(a) Para el oscilador bajo-amortiguado

$$\xi_p(t) = e^{-\Gamma t} \left(a_1 e^{-ibt} + a_2 e^{+ibt} \right) \quad 2.38$$

o bien
$$\xi_p(t) = e^{-\Gamma t} c \cos(bt - \beta) \quad 2.39$$

donde
$$b^2 = \omega_0^2 - \Gamma^2 \quad 2.40$$

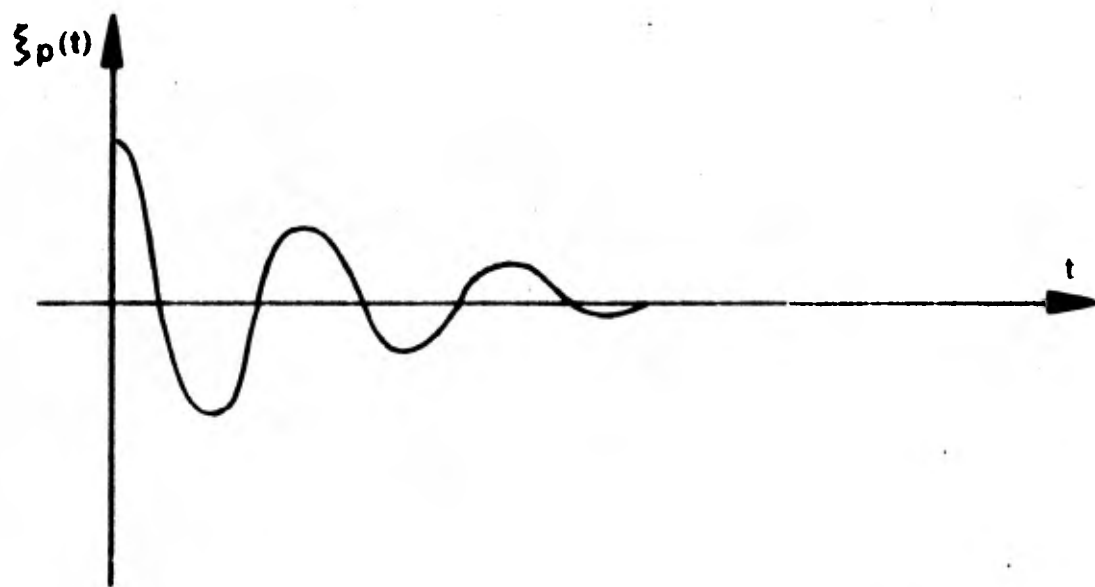


Fig. 7

(b) Para el oscilador críticamente amortiguado

Como $\Gamma = \omega_0$, entonces la ecuación (2.27) se puede reescribir de la siguiente manera

$$\left(\frac{d}{dt} + \Gamma\right) \left(\frac{d}{dt} + \Gamma\right) \xi(t) = 0 \quad 2.41$$

de tal forma que si

$$u(t) = \left(\frac{d}{dt} + \Gamma\right) \xi(t) \quad 2.42$$

(2.41) toma la escritura

$$\dot{u}(t) + \Gamma u(t) = 0 \quad 2.43$$

la cual nos da

$$u(t) = A e^{-\Gamma t} \quad 2.44$$

que sustituyéndola en (2.42), obtenemos

$$\dot{\xi}(t) + \Gamma \xi(t) = A e^{-\Gamma t} \quad 2.45$$

y cuya solución es, finalmente

$$\xi_p(t) = (At + B)e^{-\Gamma t} \quad 2.46$$

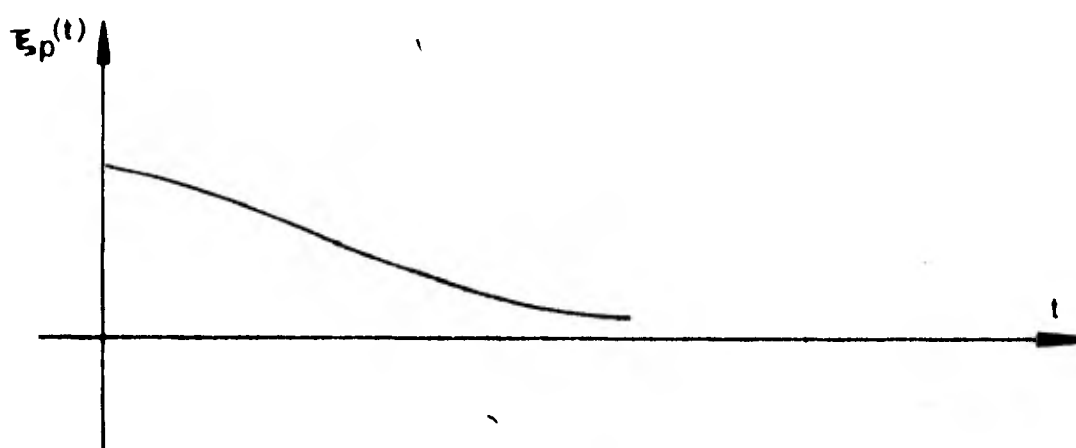


Fig. 8

(c) Para el oscilador sobre-amortiguado

$$\xi(t) = e^{-\Gamma t} \left(a_1 e^{-bt} + a_2 e^{+bt} \right) \quad 2.47$$

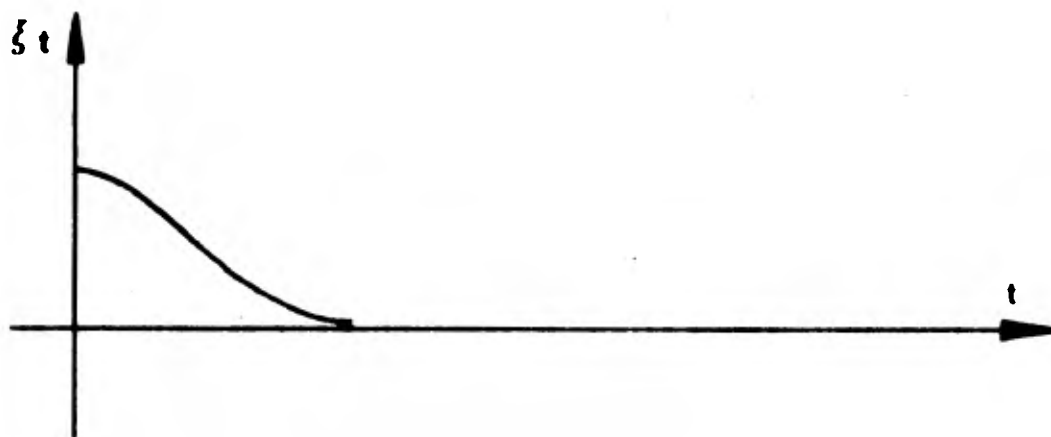


Fig. 9

2.1.4 OSCILADOR AMORTIGUADO FORZADO

La ecuación de movimiento para el oscilador amortiguado forzado está expresada por

$$\ddot{\xi}(t) + 2\Gamma\dot{\xi}(t) + \omega_0^2 \xi(t) = \psi(t) \quad 2.48$$

donde 2Γ y ω_0^2 están dadas por (2.28) y $\psi(t)$ es el forzamiento por unidad de masa.

Para encontrar la solución particular de (2.48) seguiremos el método de variación de parámetros. Supongamos que la solución de (2.48) es de la forma

$$\xi_p(t) = C_1(t)\xi_1(t) + C_2(t)\xi_2(t) \quad 2.49$$

Si (2.49) se sustituye en (2.48) y sabiendo que $\xi_1(t)$ y $\xi_2(t)$ son soluciones de la homogénea, entonces

$$\dot{C}_1(t)\xi_1(t) + \dot{C}_2(t)\xi_2(t) = 0 \quad 2.50$$

$$\dot{C}_1(t)\dot{\xi}_1(t) + \dot{C}_2(t)\dot{\xi}_2(t) = \psi(t) \quad 2.51$$

Como las ecuaciones (2.50) y (2.51) forman un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, $\dot{c}_1(t)$ y $\dot{c}_2(t)$, entonces

$$\dot{c}_1(t) = - \frac{\xi_2(t)\psi(t)}{W[\xi_1(t), \xi_2(t)]} , \quad 2.52$$

$$\dot{c}_2(t) = \frac{\xi_1(t)\psi(t)}{W[\xi_1(t), \xi_2(t)]} .$$

Así

$$c_1(t) = \int \frac{\xi_2(x)\psi(x)}{W[\xi_1(x), \xi_2(x)]} dx ,$$

$$c_2(t) = \int \frac{\xi_1(x)\psi(x)}{W[\xi_1(x), \xi_2(x)]} dx . \quad 2.53$$

y sustituyendo lo anterior en (2.49) obtenemos finalmente que

$$\xi_p(t) = \int \frac{[\xi_1(t)\xi_2(t) - \xi_1(t)\xi_2(x)]}{W[\xi_1(x), \xi_2(x)]} \psi(x) dx . \quad 2.54$$

dado que

$$\xi_1(x)\xi_2(t) - \xi_1(t)\xi_2(x) = e^{-i\omega_1 x} e^{-i\omega_2 t} - e^{-i\omega_1 t} e^{-i\omega_2 x}$$

2.55

y

$$W[\xi_1(x), \xi_2(x)] = i(\omega_1 - \omega_2) e^{-i(\omega_1 + \omega_2)x}$$

2.56

entonces (2.54) se transforma a

$$\xi_p(t) = \frac{1}{i(\omega_2 - \omega_1)} \int_0^t \left[e^{-i\omega_1(x-t)} - e^{-i\omega_2(x-t)} \right] \psi(x) dx$$

2.57

donde ω_j es (2.31)

Cuando $\psi(t)$ es periódica, es decir, de la forma

$$\psi(t) = B e^{i\omega t}$$

2.58

que sustituida en (2.57) da

$$\xi_p(t) = \frac{1}{(\omega - \omega_1)(\omega - \omega_2)} B e^{i\omega t}$$

2.59

Esta ecuación quiere decir que el sistema del oscilador amortiguado forzado es lineal una vez más.

Reescribiendo (2.59) tenemos por (2.30)

$$\xi_p(t) = \frac{1}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 2i\Gamma\omega} B e^{i\omega t} \quad 2.60$$

o bien

$$\xi_p(t) = \frac{B e^{i(\omega t - \theta)}}{[(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\Gamma^2\omega^2]^{1/2}} \quad 2.61$$

con

$$\theta = \text{ang tan } \frac{2\Gamma\omega}{\omega^2 - \omega_0^2} \quad 2.62$$

La ecuación (2.61) en términos de los parámetros propios del sistema físico se transforma en

$$\xi_p(t) = \frac{mB e^{i(\omega t - \theta)}}{[m\omega^2 - k]^2 + \beta^2\omega^2]^{1/2}} \quad 2.63$$

y

$$\theta = \text{ang tan } \frac{\beta\omega}{m\omega^2 - k} \quad 2.64$$

Como se podrá observar de (2.61), la señal de respuesta del sistema físico es máxima en amplitud cuando la frecuencia de forzamiento se iguala a la frecuencia natural de oscilación de dicho sistema, este fenómeno recibe el nombre de *Resonancia* y su amplitud *Amplitud Resonante*.

A la forma matemática que tiene la amplitud en (2.61), la llamaremos *forma de Breit-Wigner*.

Ahora bien, tanto la señal de entrada como la de salida poseen una fase, ésta última en nuestro problema está expresada por (2.62). La diferencia de fase para frecuencias alrededor de la *frecuencia de resonancia* está entre 0 y π (ver figura 11).

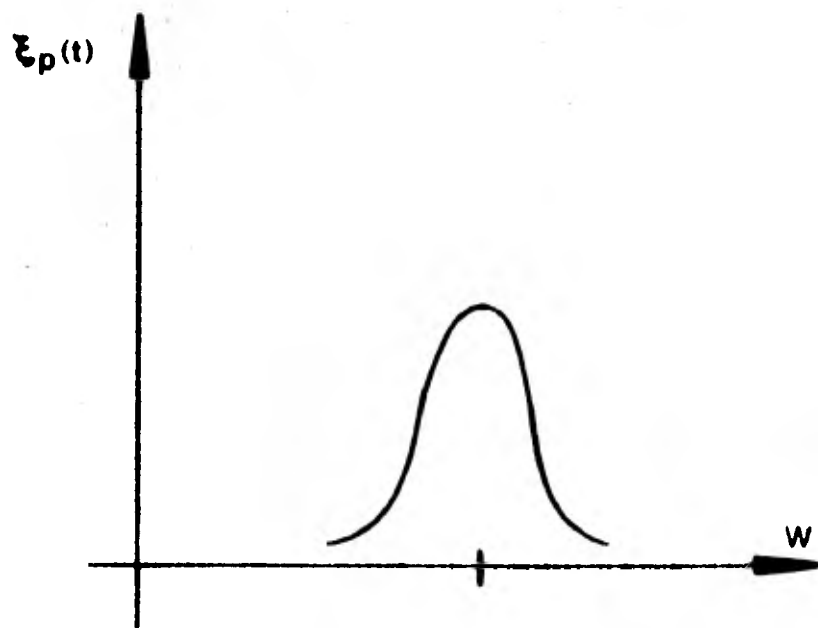


Fig. 10

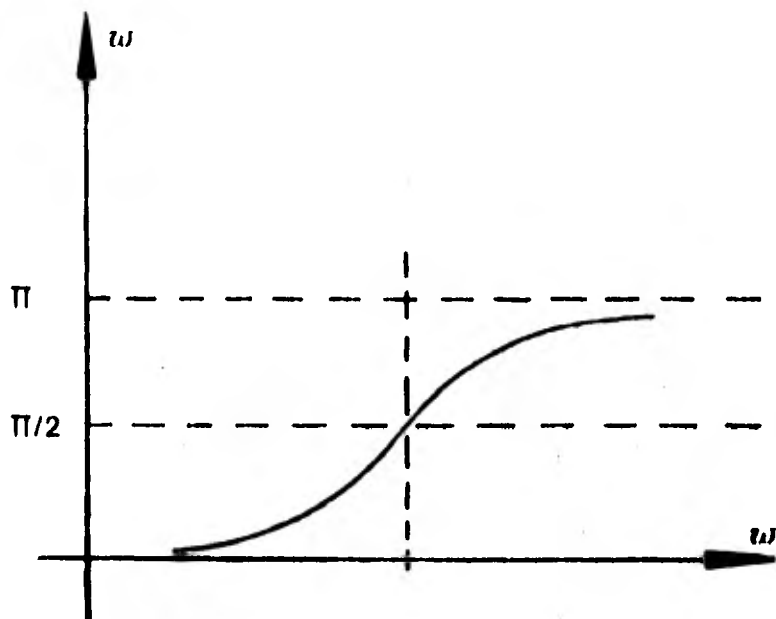


Fig. 11

Hasta el momento el único parámetro que hemos variado es la frecuencia de la fuerza excitadora, sin embargo los otros parámetros pueden ser variados, así, en la tabla I se dan los valores de los distintos parámetros para los cuales la amplitud en $\xi_p(t)$, $\dot{\xi}_p(t)$ y $\ddot{\xi}_p(t)$ es un valor extremo

TABLA I

	m	β	k	ω
$\xi_p(t)$	$\frac{k}{\omega^2} + \frac{\beta^2}{k}$	0	$m\omega^2$	$\left(\frac{k}{m} - \frac{\beta^2}{2m^2}\right)^{1/2}$
$\dot{\xi}_p(t)$	$\frac{k}{\omega^2} + \frac{\beta^2}{k}$	0	$m\omega^2$	$\left(\frac{k}{m}\right)^{1/2}$
$\ddot{\xi}_p(t)$	$\frac{k}{\omega^2} + \frac{\beta^2}{k}$	0	$m\omega^2$	$\left(\frac{m}{k} - \frac{\beta^2}{4k^2}\right)^{-1/2}$

En el caso general de poder representar a $\psi(t)$ en términos de una integral de Fourier, entonces, la solución de (2.48) se puede trabajar como sigue:

Por la linealidad del problema,

$$Z(\omega) = G(\omega)\phi(\omega)$$

2.65

donde
$$g(t - t') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} G(\omega) e^{-i\omega(t-t')} d\omega \quad 2.73$$

Para el caso particular en que

$$\psi(t) = \delta(t) \quad 2.74$$

entonces $g(t)$ es la solución de (2.48), sustituyendo (2.26) en (2.73) obtenemos

$$g(t - t') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\omega(t-t')}}{\omega^2 + 2i\Gamma\omega - \omega_0^2} d\omega \quad 2.75$$

esta integral se puede calcular por medio del teorema del residuo, así que

$$g(t - t') = 2\pi i \left[\text{Res.} \left[\frac{1}{2\pi} G(\omega) e^{-i\omega(t-t')} \right] \right] \quad 2.76$$

dando finalmente

$$g(t - t') = \frac{e^{-\Gamma(t-t')} \sin \left[(\omega_0^2 - \Gamma^2)^{1/2} (t - t') \right]}{(\omega_0^2 - \Gamma^2)^{1/2}}, \quad (t - t') > 0$$

$$= 0, \quad (t - t') < 0 \quad 2.77$$

Otro sistema oscilatorio muy importante — por el tipo de resultados que se obtienen — es el de los péndulos acoplados por medio de un resorte y que da lugar para trazar analogías con la molécula de amoníaco, NH_3 y los mesones K neutros (Cfr. ref. 8)

2.2 PENDULOS ACOPLADOS

A continuación consideramos el sistema de dos péndulos iguales por medio de un resorte de constante k como se puede apreciar en la figura 12

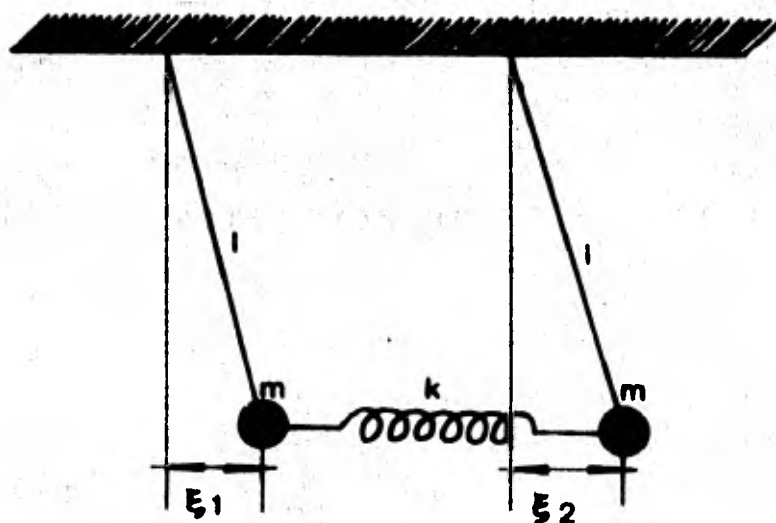


Fig. 12

Las ecuaciones de movimiento para cada uno de estos péndulos son:

$$m\ddot{\xi}_1(t) = -\frac{mg}{\ell} \xi_1(t) - k(\xi_1 - \xi_2) \quad 2.79$$

$$m\ddot{\xi}_2(t) = -\frac{mg}{\ell} \xi_2(t) + k(\xi_1 - \xi_2) \quad 2.80$$

en donde $mg\xi_i(t)/\ell$ es aproximadamente la fuerza de tensión de la cuerda proyectada sobre la dirección en la que actúa el resorte. La aproximación anterior está dada para ángulos pequeños, es decir, para cuando $\sin \theta \simeq \theta$ y $\cos \theta \simeq 1$.

Sumando miembro a miembro (2.79) y (2.80) primero y luego restando (2.80) de (2.79) obtenemos:

$$m(\ddot{\xi}_1 + \ddot{\xi}_2) = -\frac{mg}{\ell} (\xi_1 + \xi_2) \quad 2.81$$

$$m(\ddot{\xi}_1 - \ddot{\xi}_2) = -\frac{mg}{\ell} (\xi_1 - \xi_2) - 2k(\xi_1 - \xi_2) \quad 2.82$$

Las ecuaciones anteriores nos sugieren el siguiente cambio de variables

$$x_1 = \xi_1 + \xi_2 \quad 2.83$$

$$x_2 = \xi_1 - \xi_2$$

por tanto

$$\ddot{x}_1 + \omega_{01}^2 x_1 = 0 \quad 2.84$$

$$\ddot{x}_2 + \omega_{02}^2 x_2 = 0 \quad 2.85$$

donde

$$\omega_{01}^2 = \frac{g}{\ell} \quad 2.86$$

$$\omega_{02}^2 = \frac{g}{\ell} + \frac{2k}{m} \quad 2.87$$

La solución tanto de (2.84) como de (2.85) la hemos estudiado ya en 2.1., así

$$x_{01}(t) = a_1 \cos(\omega_{01}t + \beta_1) \quad 2.88$$

$$x_{02}(t) = a_2 \cos(\omega_{01}t + \beta_2) \quad 2.89$$

En las coordenadas originales, tenemos que

$$\xi_1(t) = \frac{1}{2} a_1 \cos(\omega_{01}t + \beta_1) + \frac{1}{2} a_2 \cos(\omega_{02}t + \beta_2) \quad 2.90$$

$$\xi_2(t) = \frac{1}{2} a_1 \cos(\omega_{01}t + \beta_2) - \frac{1}{2} a_2 \cos(\omega_{02}t + \beta_2) \quad 2.91$$

o bien

$$\xi_1(t) = \frac{1}{2} a_1 \cos \omega_{01}t + \frac{1}{2} a_2 \cos \omega_{02}t \quad 2.92$$

$$\xi_2(t) = \frac{1}{2} a_1 \cos \omega_{01}t - \frac{1}{2} a_2 \cos \omega_{02}t \quad 2.93$$

ya que podemos elegir $\beta_1 = \beta_2 = 0$ para $t = 0$.

Si definimos

$$\omega_{01} = \omega_p + \omega_M \quad 2.94$$

$$\omega_{02} = \omega_p - \omega_M \quad 2.95$$

así

$$\omega_p = \frac{1}{2} (\omega_{01} + \omega_{02}) \quad 2.96$$

$$\omega_M = \frac{1}{2} (\omega_{01} - \omega_{02})$$

por tanto (2.92) y (2.93) las podemos reescribir en términos de las nuevas frecuencias ω_p y ω_M , obteniendo

$$\xi_1(t) = \left[\frac{1}{2}(a_1+a_2)\cos\omega_M t \right] \cos\omega_p t - \left[\frac{1}{2}(a_1-a_2)\sin\omega_M t \right] \sin\omega_p t \quad 2.97$$

$$\xi_2(t) = \left[\frac{1}{2}(a_1-a_2)\cos\omega_M t \right] \cos\omega_p t - \left[\frac{1}{2}(a_1+a_2)\sin\omega_M t \right] \sin\omega_p t \quad 2.98$$

cuando se tiene un acoplamiento débil,

$$a_1 \approx a_2 = a \quad 2.99$$

$$y \quad \omega_{01} = \omega_{02} + \delta, \quad \delta \ll \omega_{02} \quad 2.100$$

de lo anterior se sigue

$$\xi_1(t) = [a \cos \omega_M t] \cos \omega_p t \quad 2.101$$

$$\xi_2(t) = [-a \sin \omega_M t] \sin \omega_p t \quad 2.102$$

$$\omega_{01} \approx \omega_{02} \quad 2.103$$

$$\text{y } \omega_M \ll \omega_p \quad 2.104$$

La energía cinética promedio por ciclo en cada péndulo está dada por

$$\langle T_1 \rangle = \frac{1}{4} m a^2 \omega_p^2 \cos \omega_M t \quad 2.105$$

$$\langle T_2 \rangle = \frac{1}{4} m a^2 \omega_p^2 \sin \omega_M t \quad 2.106$$

Para este cálculo, tanto $\cos \omega_M t$ como $\sin \omega_M t$ son aproximadamente constantes en virtud de (2.104). Sumando (2.105) y (2.106) vemos que la energía de los dos péndulos acoplados es constante.

$$\langle T_1 \rangle + \langle T_2 \rangle = \frac{1}{4} m a^2 \omega_p^2 \quad 2.107$$

$$\langle T_1 \rangle - \langle T_2 \rangle = \frac{1}{4} m a^2 \omega_p^2 \cos 2\omega_M t \quad 2.108$$

Denotando por E la energía total del sistema, entonces $\langle T_1 \rangle$ y $\langle T_2 \rangle$ se pueden expresar en términos de esta energía total dando

$$\langle T_1 \rangle = \frac{1}{2} E [1 + \cos (\omega_{01} - \omega_{02}) t] \quad 2.109$$

$$\langle T_2 \rangle = \frac{1}{2} E [1 - \cos (\omega_{01} - \omega_{02}) t] \quad 2.110$$

Las ecuaciones (2.109) y (2.110) muestran que la energía total E es constante y fluye hacia adelante y hacia atrás entre los dos péndulos.

A continuación se dan las gráficas $\epsilon_1(t)$, $\epsilon_2(t)$, $\langle T_1(t) \rangle$ y $\langle T_2(t) \rangle$.

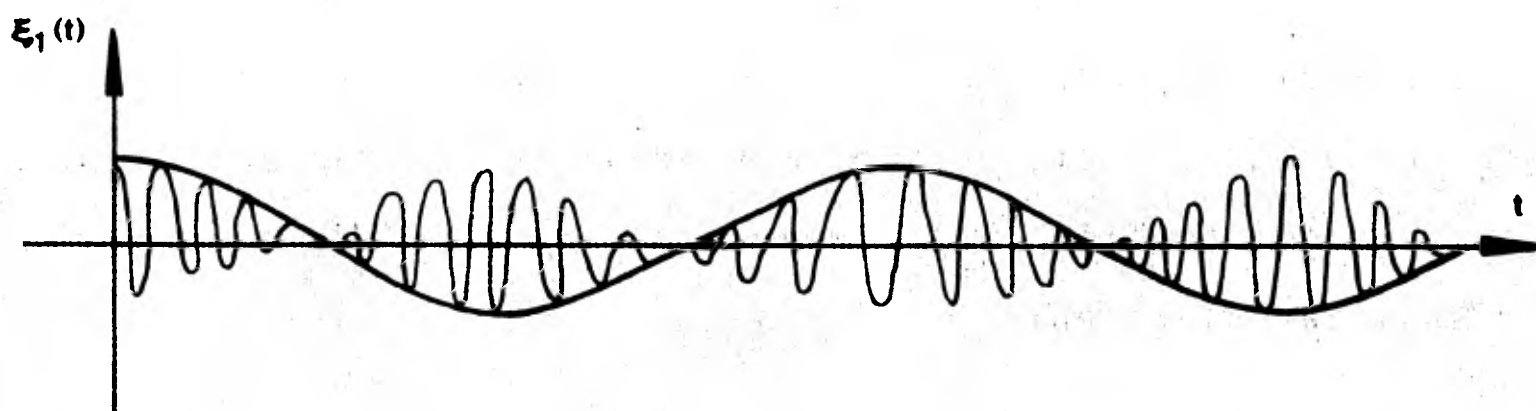


Fig. 13

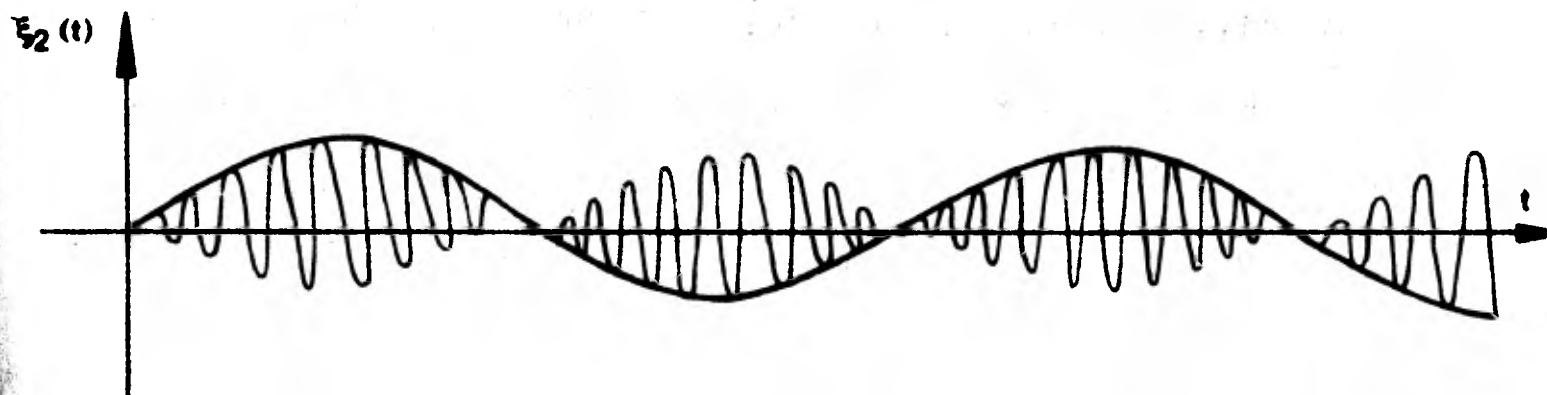


Fig. 14

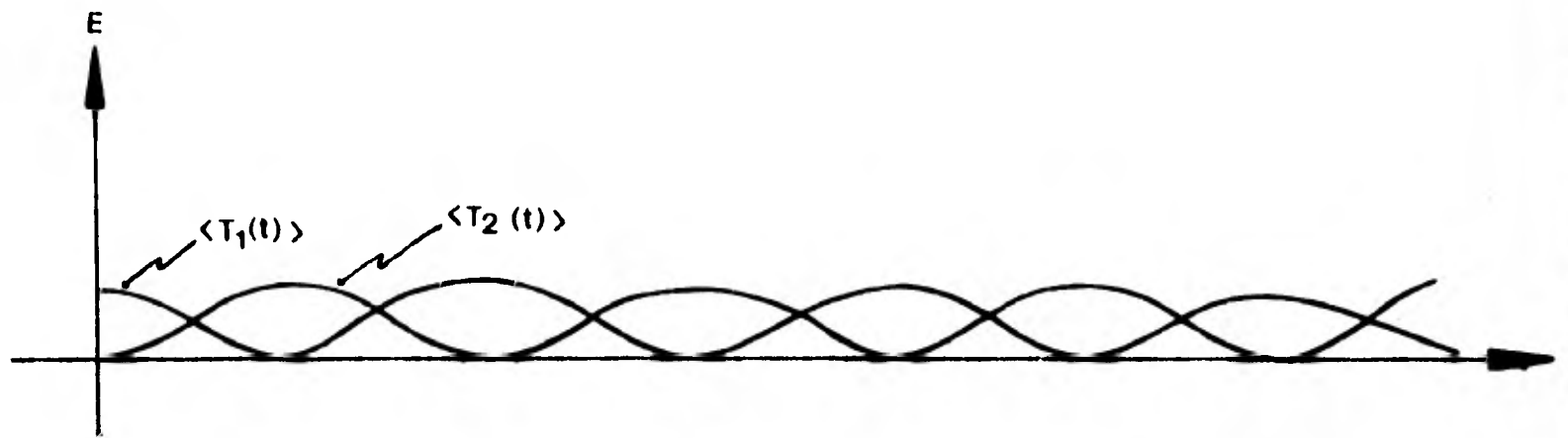


Fig. 15

2.3 CUERDA VIBRANTE

Hay otros sistemas físicos vibrantes, como es el caso de una cuerda vibrante, que nos llevan a otra forma del concepto de resonancia. Como veremos más adelante, la cuerda vibrante nos exhibe, también, *modos normales de vibración*, que podemos visualizar claramente.

2.3.1 ECUACION DE MOVIMIENTO PARA UNA CUERDA VIBRANTE

Consideremos dos puntos vecinos de una cuerda de densidad lineal de masa, ρ , en un instante dado, toda vez que se le ha producido una pequeña perturbación, cuando dicha cuerda se encuentra sujeta a una tensión T .

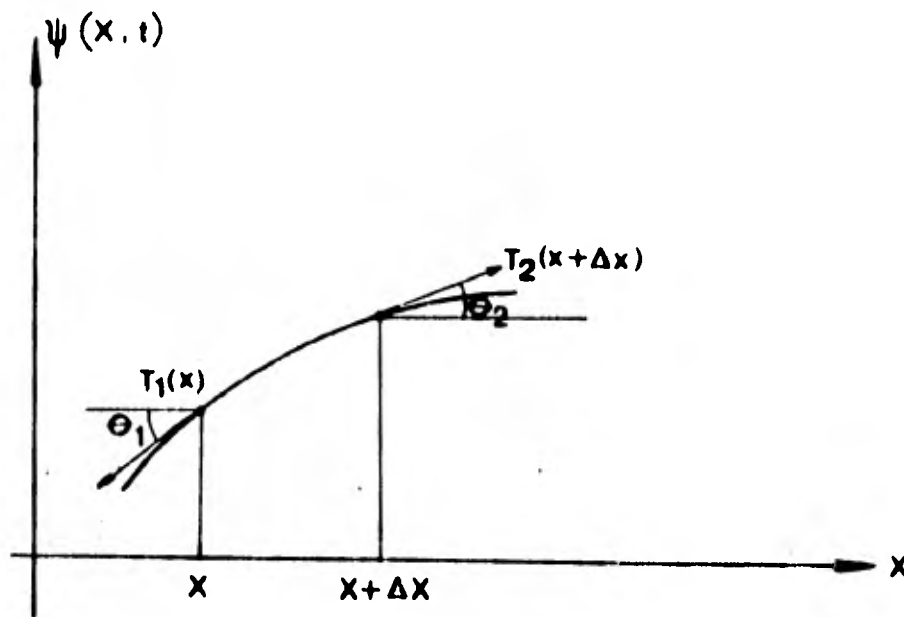


Fig. 16

Según la figura 16 las componentes horizontal y vertical de T_1 y T_2 son

$$T_{1h} = T(x) \cos \theta_1, \quad T_{1v} = T(x) \sin \theta_1 \quad 2.111$$

$$T_{2h} = T(x+\Delta x) \cos \theta_2, \quad T_{2v} = T(x+\Delta x) \sin \theta_2 \quad 2.112$$

$$\text{Para pequeñas vibraciones: } \theta_1 \text{ y } \theta_2 \ll 1 \quad 2.113$$

$$\text{luego } T_h = T(x+\Delta x) \cos \theta_2 - T(x) \cos \theta_1 \approx 0 \quad 2.114$$

$$\text{ya que } \cos \theta_1 \approx \cos \theta_2 \approx 1 \text{ y } T(x+\Delta x) \approx T(x) = T \quad 2.115$$

$$\text{y } T_v = T(\tan \theta_2 - \tan \theta_1) \quad 2.116$$

como
$$\tan \theta_2 = \left. \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial x} \right|_{x+\Delta x}, \quad \tan \theta_1 = \left. \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial x} \right|_x$$

2.117

entonces, por Newton

$$T \left[\left. \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial x} \right|_{x+\Delta x} - \left. \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial x} \right|_x \right] = \rho \Delta x \left. \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial t^2} \right|_{x + \frac{1}{2} \Delta x}$$

2.118

si $\Delta x \rightarrow 0$, obtenemos la ecuación de movimiento de la cuerda, esto es,

$$\frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial t^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial x^2}$$

2.119

donde
$$v^2 = \frac{T}{\rho}$$

2.120

La ecuación (2.119) recibe el nombre de *Ecuación de onda*.

Para resolver la ecuación de onda seguiremos el método de separación de variables, así:

$$\psi(x, t) = X(x)Q(t)$$

2.121

sustituyendo (2.121) en (2.119) obtenemos

$$\frac{d^2 X(x)}{dx^2} = -k^2 X(x) \quad 2.122$$

$$\frac{d^2 Q(t)}{dt^2} = -\omega^2 Q(t) \quad 2.123$$

donde $\omega = kv \quad 2.124$

por tanto $X(x) \sim e^{\pm ikx} \quad 2.125$

$$Q(t) \sim e^{\pm i\omega t} \quad 2.126$$

Finalmente $\psi(x, t) = Ae^{\pm i(kx \pm \omega t)}$

2.3.2 CUERDA VIBRANTE CON EXTREMOS FIJOS

Consideremos ahora el problema de una cuerda cuyos extremos están fijos y en la cual se ha producido un patrón de ondas estacionario; no hay amortiguamiento ni forzamiento.

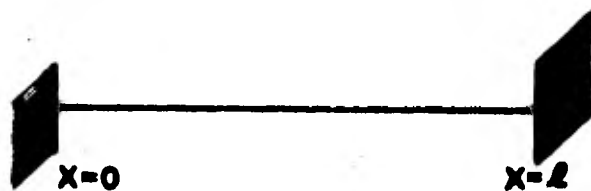


Fig. 17

Como en los extremos, $x = 0$ y $x = \ell$, las ondas se reflejan con sentidos opuestos, entonces la elongación en cualquier punto está dada por el principio de superposición, es decir,

$$\psi(x, t) = \psi_+(x, t) + \psi_-(x, t) \quad 2.128$$

donde

$$\psi_+(x, t) = Ae^{-i(kx - \omega t)} \quad 2.129$$

$$\psi_-(x, t) = Ae^{+i(kx - \omega t)} \quad 2.130$$

Así,
$$\psi(x, t) = 2A \sin kx \sin \omega t . \quad 2.131$$

Las condiciones en la frontera son $\psi(0, t) = \psi(\ell, t) = 0$, por tanto (2.131) implica que

$$k_n \ell = n \quad , \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad 2.132$$

de donde
$$\lambda_n = \frac{2\ell}{n} \quad 2.133$$

y
$$\omega_n = \frac{n\pi}{\ell} \left(\frac{T}{\rho}\right)^{1/2} \quad , \quad v_n = \frac{n}{2\ell} \left(\frac{T}{\rho}\right)^{1/2} \quad 2.134$$

ya que
$$v = \lambda\nu \quad y \quad \omega = 2\pi\nu.$$

En este problema a la ecuación (2.133) reescrita como

$$l = n \left(\frac{\lambda_n}{2} \right)$$

se le conoce como la *condición de resonancia* y a la ecuación (2.134) como *frecuencias de resonancia* o también *eigenfrecuencias del sistema*.

Con los valores de k_n y ω_n dados por (2.132) y (2.134)

$$\psi_n(x, t) = 2A \sin \left[\frac{n\pi}{l} x \right] \sin \left[\frac{n\pi}{l} (\tau/\rho)^{1/2} t \right] \quad 2.135$$

A las $\psi_n(x, t)$ se les llama *modos normales de vibración* y forman un *conjunto completo de funciones ortogonales*, de tal manera que cualquier movimiento de la cuerda, por complicado que sea éste, siempre se va a poder expresar como una combinación lineal de dichos modos normales, así,

$$\psi(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \psi_n(x, t) \quad 2.136$$

2.3.3 CUERDA VIBRANTE AMORTIGUADA FORZADA

Utilicemos los resultados de la sección anterior para resolver el problema de una cuerda con extremos fijos (ver figura 17), con amortiguamiento y forzamiento.

En un instante dado la fuerza de amortiguamiento va a producir una reacción en cada punto de la cuerda, una vez que se ha puesto a vibrar ésta. La reacción de la cuerda en un punto cualquiera podemos representarla por una tensión T' como se muestra en la figura 18

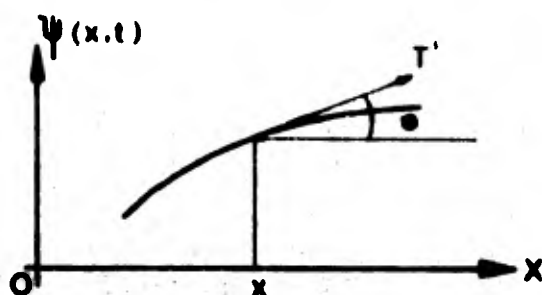


Fig. 18

De esta figura

$$F_{\psi} = T' \sin \theta \quad 2.137$$

o bien
$$F_{\psi} = (T' \cos \theta) \tan \theta \quad 2.138$$

La ecuación anterior la podemos reescribir en términos de la tensión original de la cuerda, T , para pequeñas vibraciones como sigue:

$$F_{\psi} = \beta T \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial x} \quad 2.139$$

De la ecuación (2.137) se puede obtener

$$\frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} = -v \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial x} \quad 2.140$$

Despejando $\frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t}$ en (2.140) y sustituyendo en (2.139) se tiene la fuerza de reacción al amortiguamiento:

$$F_{\psi} = -\beta \frac{T}{v} \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} \quad 2.141$$

Por lo tanto, la fuerza de amortiguamiento F_A , es proporcional a la velocidad, es decir

$$F_A = \beta \frac{T}{v} \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} \quad 2.142$$

Para un Δx de cuerda (ver figura 18) con amortiguamiento y forzamiento armónico, se tiene por la Segunda Ley de Newton:

$$T \left[\frac{\partial \psi(x, t)}{\partial x} \Big|_{x+\Delta x} - \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial x} \Big|_x \right] + T f(x) \Delta x e^{i\omega t} - \frac{T}{v} \beta \Delta x \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} \Big|_{x+\frac{1}{2}\Delta x} = \rho \Delta x \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial t^2} \Big|_{x+\frac{1}{2}\Delta x}$$

dividiendo entre $\rho \Delta x$ la ecuación (2.143) y pasando al límite $\Delta x \rightarrow 0$ encontramos que

$$\frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial t^2} + \frac{\beta}{v} \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} - f(x) e^{i\omega t} \quad 2.144$$

Para resolver esta ecuación, se propone como solución a

$$\psi(x, t) = u(x)e^{i\omega t} \quad 2.145$$

que sustituida en la ecuación de movimiento nos da

$$\frac{d^2 u(x)}{dx^2} + \left(\frac{\omega^2}{v^2} - \frac{i\omega}{v} \beta \right) u(x) = -f(x) \quad 2.146$$

Desarrollando las funciones $u(x)$ y $f(x)$ en términos de funciones ortogonales de tal manera que,

$$u(0) = u(\ell) = 0 \quad 2.147$$

es decir

$$u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \sin k_n x \quad 2.148$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \sin k_n x \quad 2.149$$

$$f_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(s) \sin k_n s ds \quad 2.150$$

De (2.146), (2.148) y (2.149) se deduce que las u_n y f_n están relacionadas por

$$u_n = \frac{f_n}{k_n^2 - k^2 + 2i\Gamma k} \quad 2.151$$

donde $k_n = \frac{n\pi}{\ell}$, $k = \frac{\omega}{v}$ y β se ha redefinido por $2\Gamma = \beta$.

Finalmente

$$\psi(x, t) = e^{i\omega t} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n \sin k_n x}{k_n^2 - k^2 + 2i\Gamma k} \quad 2.152$$

o bien

$$\psi(x, t) = e^{i(\omega t - \phi)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin k_n x}{[(k_n^2 - k^2)^2 + 4\Gamma^2 k^2]^{1/2}} \cdot \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(s) \sin k_n s ds \quad 2.153$$

$$\text{con } \phi = \text{ang tan } \frac{2\Gamma k}{k_n^2 - k^2} \quad 2.154$$

En estas ecuaciones (2.153) y (2.154) podemos observar ya las formas de resonancia tipo Breit-Wigner.

2.4 ACOPLAMIENTO ENTRE UN OSCILADOR ARMONICO Y UNA CURVA VIBRANTE.

Consideremos el acoplamiento entre un oscilador y una cuerda como se muestra en la figura 19

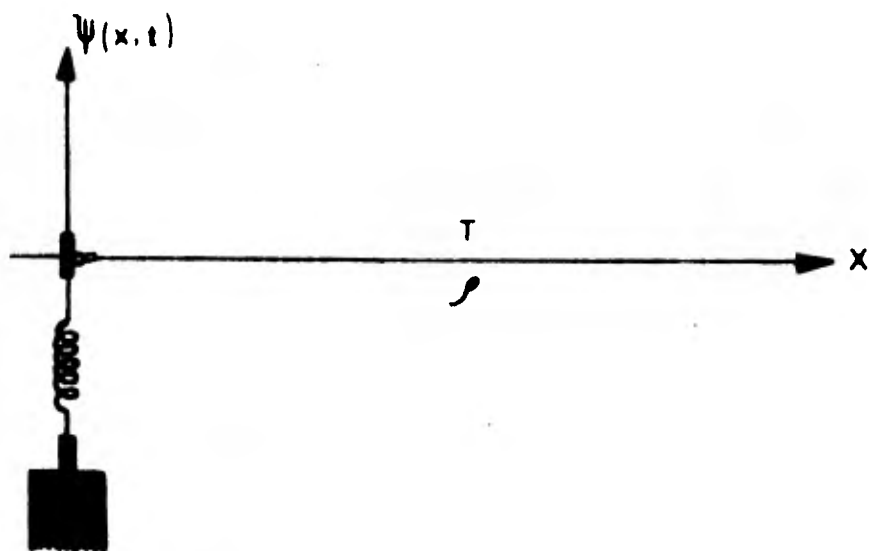


Fig. 19

Para el oscilador armónico la ecuación de movimiento es

$$\left. \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial t^2} \right|_{x=0} + \omega_0^2 \psi(x, t) \Big|_{x=0} = \frac{T}{m} \left. \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial x} \right|_{x=0} \quad 2.155$$

o bien

$$\left. \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial t^2} \right|_{x=0} + \omega_0^2 \psi(x, t) \Big|_{x=0} = 2\Gamma \left. \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial x} \right|_{x=0} \quad 2.156$$

donde

$$2\Gamma = T/m \quad 2.157$$

Y la ecuación de onda para la cuerda está dada por

$$\frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial t^2} \quad 2.158$$

La condición de frontera para (2.158) es (2.156) y las condiciones iniciales son

$$\psi(x, 0) = \eta(x) \quad , \quad \left. \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t^2} \right|_{t=0} = v(x) \quad 2.159$$

La solución de (2.158) es de la forma

$$\psi(x, t) = Ae^{-i(kx + \omega t)} + Be^{i(kx - \omega t)} \quad 2.160$$

Aplicando ahora las condiciones de frontera (2.158) a (2.160). obtenemos

$$-\frac{B}{A} = S(\omega) \quad 2.161$$

donde

$$S(\omega) = \frac{\omega^2 - \omega_0^2 - 2i\Gamma k}{\omega^2 - \omega_0^2 - 2i\Gamma k} \quad 2.162$$

ya que

$$\left. \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t^2} \right|_{x=0} = -ik(A - B)e^{-i\omega t} \quad 2.163$$

$$\left. \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial t^2} \right|_{x=0} = -\omega^2(A+B)e^{-i\omega t} \quad 2.164$$

$$\psi(x, t)|_{x=0} = (A + B)e^{-i\omega t} \quad 2.165$$

Por lo tanto

$$\psi(x, t) = A \left[e^{-ikx} - S(\omega) e^{ikx} \right] e^{-i\omega t} \quad 2.166$$

Por lo visto en la sección 2.1.3, los polos de $S(\omega)$ están localizados en el semiplano inferior del plano complejo para las ω 's.

Por otra parte, la solución general de la ecuación (2.158) es:

$$\psi(x, t) = f(x - vt) + g(x + vt) \quad 2.167$$

donde f y g representan ondas salientes y entrantes. Las condiciones iniciales las podemos escribir como sigue:

$$\psi(x, t) = \eta(x), \quad \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} = v(x) \quad \text{para } t=0 \text{ y } x \geq 0. \quad 2.168$$

por lo tanto

$$\eta(x) = f(x) + g(x); \quad v(x) = vf'(x) - g'(x); \quad f(x) - g(x) = \frac{1}{v} \int_b^x v(\xi) d\xi$$

$$f(x) = \frac{1}{2} \eta(x) + \frac{1}{2v} \int_b^x v(\xi) d\xi \quad 2.169$$

$$g(x) = \frac{1}{2} \eta(x) - \frac{1}{2v} \int_b^x v(\xi) d\xi$$

finalmente obtenemos la solución de d'Alembert

$$\psi(x, t) = \frac{1}{2} [\eta(x + vt) + \eta(x - vt)] + \frac{1}{2v} \int_{x-vt}^{x+vt} v(\xi) d\xi \quad 2.170$$

Para $x < vt$, la solución requiere la continuación de f a valores negativos de su argumento; entonces lo que representa $f(x - vt)$ es una "onda dispersada", es decir, la posición de la onda saliente como resultado de la interacción con el oscilador. Para poder hacer lo anterior necesitamos hacer uso de la ecuación (2.156) como condición de frontera de la cuerda y con la notación

$$\bar{f}(t) = f(-t) \quad 2.171$$

determinamos que

$$\bar{f}''(t) + \frac{2\Gamma}{v} \bar{f}'(t) + \frac{\omega_0^2}{v^2} \bar{f}(t) = -g''(t) + \frac{2\Gamma}{v} g'(t) - \frac{\omega_0^2}{v^2} g(t) \quad t > 0$$

2.172

El significado de la ecuación anterior lo podemos conseguir en una forma más clara si traducimos la ecuación en términos del desplazamiento del oscilador, así:

$$\psi(0, t) = \psi_0(t) = \bar{f}(t) + g(t) \quad 2.173$$

entonces

$$\ddot{\psi}_0(t) + \frac{2\Gamma}{v} \dot{\psi}_0(t) + \frac{\omega_0^2}{v^2} \psi_0(t) = \frac{4\Gamma}{v^3} g(t) \quad t > 0 \quad 2.174$$

Esta ecuación es la de un oscilador armónico amortiguado en donde la fuerza excitadora está dada por $4\Gamma mg(t)/v^3$; por lo que el efecto de acoplamiento de la cuerda sobre el movimiento del oscilador es equivalente a un término de amortiguamiento y una fuerza externa, debido a las ondas entrantes.

Las condiciones iniciales para la solución de (2.172) son, de acuerdo a (2.168)

$$\bar{f}(0) = \frac{1}{2} n_0, \quad \bar{f}'(0) = \frac{1}{2} [v_0 - n'(0)] \quad 2.175$$

donde $n_0 = n(0)$ y $v_0 = v(0)$ son, respectivamente, el desplazamiento y la velocidad iniciales del oscilador.

La solución (ver sección 2.1.4) está dada por

$$\begin{aligned} \bar{f}(t) = & -g(t) + \sum_{j=1}^2 a_j \int_0^t \exp[-i\omega_j(t-t')] g(t') dt' \\ & - [i/2(\omega_1 + \omega_2)] \sum_{j=1}^2 [n_0 + (iv_0/\omega_j)] a_j \exp(-i\omega_j t), \end{aligned} \quad 2.176$$

donde ω_1 y ω_2 son los polos de $S(\omega)$ y

$$a_j = i \operatorname{Res.} S(\omega) \Big|_{\omega = \omega_j} \quad 2.177$$

De acuerdo a (2.167), (2.169) y (2.176) se sigue que:

$$\begin{aligned} \psi(x, t) = & \frac{1}{2} [\eta(vt + x) - \eta(vt - x)] + \frac{1}{2} \int_{vt-x}^{vt-x} v(x') dx' \\ & + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^2 a_j \exp[-i\omega_j(vt - x)] \\ & \times \left[\int_0^{vt-x} \exp(i\omega_j x') \{ \eta(x') + i[v(x')|_{\omega_j}] \} dx' \right. \\ & \left. - [i(\omega_1 + \omega_2)] [\eta_0 + i(v_0/\omega_j)] \right], \quad (0 \leq x < vt) \quad 2.178 \end{aligned}$$

Junto con (2.170), esto completa la solución general del sistema.

2.5 MEMBRANA VIBRANTE

En este caso, nuestro interés radica en ver cómo es la condición de resonancia para una membrana delgada.

Consideremos una membrana rectangular formada por dos líneas $x = 0$, $x = a$, $y = 0$, $y = b$ (ver figura)

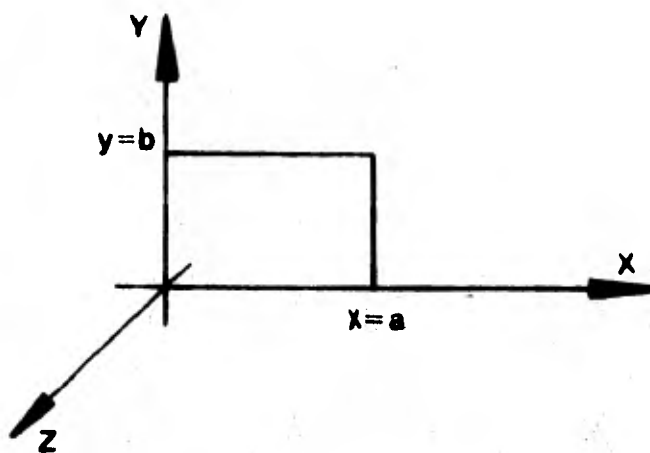


Fig. 20

Las vibraciones transversales de esta membrana delgada serán descritas por la función $\psi(x, y, t)$ que satisface la ecuación de onda

$$\nabla^2 \psi = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \quad 2.179$$

y sujeta a las condiciones siguientes:

- (i) $\psi(x, y, t) = 0$ sobre la frontera para todo tiempo
- (ii) $\psi = f(x, y)$, $\frac{\partial \psi}{\partial t} = 0$ en $t = 0$.

Por separación de variables se puede resolver la ecuación (2.179) como sigue:

$$\psi(x, y, t) = X(x)Y(y)e^{\pm ikvt} \quad 2.180$$

sustituyendo (2.180) en (2.179) obtenemos que

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} + k^2 = 0 \quad 2.181$$

lo cual nos conduce a establecer

$$\frac{d^2 X}{dx^2} + k_1^2 X = 0 \quad 2.182$$

$$\frac{d^2 Y}{dy^2} + k_2^2 Y = 0 \quad 2.183$$

tal que $k_1^2 + k_2^2 = k^2 \quad 2.184$

Dado que las soluciones, tanto de (2.182) como de (2.183) son exponenciales complejas, se tiene por lo tanto

$$\psi(x, y, t) = A_{k_1 k_2} e^{\pm i(k_1 x + k_2 y + kvt)} \quad 2.185$$

Como ψ se debe anular cuando $x = 0, x = a, y = 0, y = b$, entonces

$$\psi(x, y, t) = \sum_{m,n} A_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{\pm i\omega_{mn}t} \quad 2.186$$

donde

$$\omega_{mn}^2 = \pi^2 v^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right); \quad m, n = 1, 2, \dots \quad 2.187$$

Teniendo en cuenta la segunda condición, la solución apropiada de la ecuación de onda es

$$\psi(x, y, t) = \sum_{m,n} A_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \cos \omega_{mn}t \quad 2.188$$

en donde los coeficientes A_{mn} se eligen de tal manera que

$$f(x, y) = \sum_{m,n} A_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right), \quad 0 \leq x \leq a, \quad 0 \leq y \leq b \quad 2.189$$

es decir, que

$$A_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b f(x, y) \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) dx dy \quad 2.190$$

La solución completa está dada por las ecuaciones (2.188), (2.189) y (2.190).

Nuevamente a la ecuación (2.187) se le conoce con el nombre de *frecuencias de resonancia* para el caso de dos dimensiones.

2.6 CIRCUITOS ELECTRICOS

Otro sistema físico que es capaz de oscilar libremente lo encontramos en un circuito RLC, ya sea en serie o en paralelo. Las leyes fundamentales con las que se trabaja este problema son las *Leyes de Kirchhoff* y que serían el análogo del *Principio de D'Alembert* o el *Principio de Mínima Acción* o *Principio de Hamilton*. El sistema eléctrico RLC como veremos a continuación exhibe una serie de analogías con los sistemas mecánicos muy interesantes, ya que dichas analogías en algunos casos las sugiere o bien el circuito RLC o bien el sistema mecánico.

2.6.1 R L C EN SERIE

El circuito RLC que estudiaremos se muestra en la figura 21.

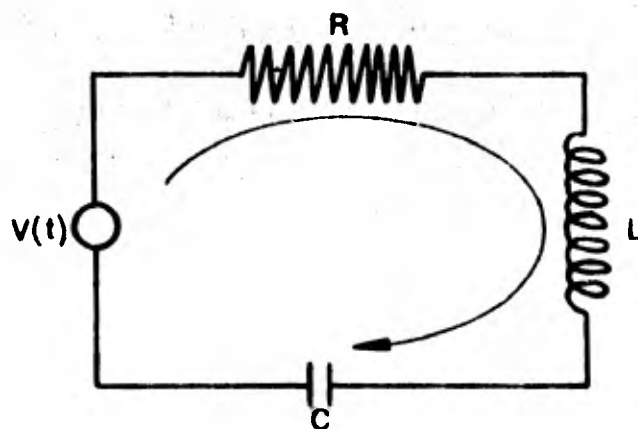


Fig. 21

Aplicando la Ley de los Voltajes de Kirchhoff al circuito anterior obtenemos que

$$L \frac{d^2 q(t)}{dt^2} + R \frac{dq(t)}{dt} + \frac{1}{c} q(t) = V(t) \quad 2.191$$

Si $V(t)$ es una función armónica en t , el tiempo, entonces, la solución de (2.191) es inmediata, en el momento en que observamos la similitud tan estrecha entre las ecuaciones diferenciales (2.48) y (2.191). Más aún, estas dos situaciones son idénticas si establecemos la siguiente correspondencia entre los elementos que los constituyen:

$q(t)$ [Carga]	————	$\xi(t)$ [Desplazamiento]
L [Inductancia]	————	m [Masa]
R [Resistencia]	————	β [Const. de Amortiguamiento]
c^{-1} [Capacitancia ⁻¹]	————	k [Const. de Resorte]
$V(t)$ [Voltaje]	————	$\phi(t)$ [Fuerza externa]

La analogía anterior no es gratuita, ni puramente formal, sino más bien es una analogía física profunda, así:

(a) El primer término de (2.191), que es la caída de potencial a través del inductor,

$$\begin{aligned} V_L &= L \frac{d^2 q(t)}{dt^2} \\ &= L \frac{di(t)}{dt} \\ &= \frac{d}{dt} (Li) \end{aligned} \quad 2.192$$

donde $i(t)$ es la intensidad de corriente, viene a ser la analogía de la Segunda Ley de Newton para la electricidad, y el producto $Li(t)$ es el análogo de la cantidad de movimiento. El significado de todo esto proviene de la *Ley de Faraday* por un lado y por otro del hecho de que el flujo magnético es proporcional a la intensidad de corriente; aquí L hace las veces de m en el caso de la cantidad de movimiento.

(b) El segundo término nos da la caída de potencial a través de la resistencia,

$$V_R = R \frac{dq(t)}{dt} \quad 2.193$$

Esta expresión es la bien conocida *Ley de Ohm* y es el análogo a la fuerza de fricción (proporcional a la velocidad) del oscilador mecánico amortiguado.

(c) El tercer término es el análogo a la *Ley de Hook*, es decir, el trabajo necesario para llevar una carga unitaria de una placa a otra en un condensador es proporcional a la cantidad de carga sobre las placas de dicho condensador; la constante de proporcionalidad se ha simbolizado usualmente por $1/C$, donde C recibe el nombre de capacitancia.

Si en la ecuación (2.191) tenemos $V(t) = A \cos \omega t$, entonces

observamos que el denominador de (2.195) es el módulo de la impedancia del circuito, en donde el primer término de (2.198) recibe el nombre de *parte resistiva* y el segundo término el de *parte reactiva*. A ωL se le llama *reactancia inductiva* y a $1/\omega C$ *reactancia capacitiva*.

De la ecuación (2.195) vemos que q_0 es la carga pico sobre el capacitor y ω_0 es la frecuencia angular que hace cero la parte reactiva de la impedancia y hace cero también a la fase ϕ .

La corriente que fluye por el circuito está dada por

$$\frac{dq}{dt} = \frac{A \cos(\omega t + \phi)}{\left[R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2 \right]^{1/2}} \quad 2.199$$

Los parámetros del sistema se pueden hacer variar independientemente y por lo tanto es posible determinar el valor de cada variable que nos da un máximo o mínimo para q_0 . A esto se le puede llamar con toda propiedad *amplitud resonante* y en el caso de este circuito corresponde a un voltaje de salida máximo a través del capacitor.

Es posible también hacer a dq/dt un máximo (o un mínimo en algunos casos) variando nuevamente los parámetros del sistema y entonces obtenemos lo que podemos llamar *velocidad resonante*,

término que aparece en un contexto donde q es un desplazamiento espacial y por tanto dq/dt es una velocidad. Análogamente es posible definir *aceleración resonante* cuando d^2q/dt^2 es un máximo (o mínimo), aunque este término no es usual en la literatura.

La *velocidad resonante* y la *aceleración resonante* en un circuito RLC en serie corresponden, respectivamente, a un voltaje máximo a través de R , ya que $V_R = R \frac{dq}{dt}$ y un voltaje máximo a través de L , ya que $V_L = L \frac{d^2q}{dt^2}$.

La definición de *resonancia* en circuitos eléctricos frecuentemente se da en una forma algo diferente. Se dice que la resonancia toma lugar cuando la corriente suministrada por el generador está en fase con el voltaje suministrado, es decir, $\phi = 0$ en la solución (2.195) y de aquí $\omega = \omega_0 = (1/LC)^{1/2}$. Esto es descrito algunas veces, como la condición para el "factor de potencia unitaria" o "reactancia cero a la entrada". Cuando se usa la notación compleja para la obtención de la impedancia de entrada, esta definición frecuentemente conduce a derivaciones particularmente simples de la condición por lo que algunas veces se le llama *resonancia eléctrica*, pero es referida más propia y generalmente como *fase resonante*.

Estas cuatro definiciones aplicadas a los circuitos RLC en serie implican *voltaje máximo*, *corriente máxima* (asociado con voltaje máximo a través de R , excepto cuando q es la variable), y *corrimiento de fase mínimo*.

Otras definiciones de resonancia se pueden encontrar en la literatura. Cuando la frecuencia de entrada o los parámetros del sistema están ajustados de tal manera que se disipa la máxima potencia en el sistema, se dice que toma lugar la *potencia resonante*. Es claro que la condición para potencia resonante depende de la impedancia de salida del generador, pero para los casos simples, indicados por la ecuación (2.64) es evidente de la misma que se supone que se aplica al sistema un voltaje pico constante, es decir, el generador tiene impedancia cero a la salida.

Todavía otra definición de resonancia se puede encontrar en alguno de los tratamientos de los circuitos eléctricos oscilantes y sistemas mecánicos. Se dice que la resonancia tiene lugar (como ya lo hemos visto) cuando la frecuencia del voltaje aplicado es igual a la frecuencia de oscilaciones libres del sistema. Para los circuitos RLC en serie las oscilaciones toman lugar cuando $R^2 < 4L C$, es decir, $Q > 1/2$, donde $Q = \left[L/C^{1/2} \right] / R$ y la frecuencia de oscilaciones libres está dada por

$$\omega^2 = \frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}$$

2.200

$$= \frac{1}{LC} \left(1 - \frac{1}{4Q^2} \right)$$

Este valor de la frecuencia no corresponde exactamente con alguna de las cinco definiciones dadas anteriormente y no conducen a un valor máximo o mínimo de alguno de los tipos más obvios de salidas. Es importante enfatizar que, a diferencia de las otras condiciones de resonancia, esta condición no puede ser detectada en principio mientras el circuito esté sujeto a un forzamiento. La frecuencia estaría determinada en el estado de oscilaciones libres. No obstante, como veremos más adelante, para el caso cuando R es la variable, hay peligro en omitir una referencia a la respuesta, pero esta definición en términos de la frecuencia de oscilaciones libres puede conducir a una salida despreciable.

Los resultados de variar los parámetros del sistema se encuentran en la siguiente tabla.

TABLA II

Tipo de Resonancia	varía ω	varía L	varía C	varía R
Amplitud V_C máx.	$\omega^2 = \omega_0^2 \left(1 - \frac{1}{2Q^2}\right)$ para $Q^2 = L/R^2C$	$L_0 = 1/C\omega^2$	$C = C_0 \left(1 + \frac{1}{Q^2}\right)^{-1}$	$R \rightarrow 0$
Velocidad V_R máx	$\omega_0^2 = 1/LC$ da Z mín.	$L_0 = 1/C\omega^2$ da Z mín.	$C_0 = 1/L\omega^2$ da Z mín	$R \rightarrow \infty$
Aceleración V_L máx.	$\omega^2 = \omega_0^2 \left(1 - \frac{1}{2Q^2}\right)^{-1}$ para $Q^2 = L/R^2C$	$L = L_0 \left(1 + \frac{1}{Q^2}\right)$ para $Q = 1/\omega CR$	$C_0 = \frac{1}{L\omega^2}$	$R \rightarrow 0$
Fase o Reactancia cero	$\omega_0^2 = 1/LC$	$L_0 = 1/C\omega^2$	$C_0 = 1/L\omega^2$	Indipendiente
Potencia	$\omega_0^2 = 1/LC$	$L_0 = 1/C\omega^2$	$C_0 = 1/L\omega^2$	$R = L - \frac{1}{C\omega}$
Frecuencia de Oscilaciones Libres	$\omega_0^2 = \omega_0^2 \left(1 - \frac{1}{4Q^2}\right)$ para $Q^2 = \frac{1}{R^2C}$	$L = \frac{L_0}{2} \left[1 + \left(1 - \frac{1}{Q^2}\right)^{1/2}\right]$ para $Q = \frac{1}{CR}$	$C = C_0 \left(1 - \frac{1}{4Q^2}\right)^{-1}$ para $Q = \frac{\omega L}{R}$	$R = 2L \left(\omega_0^2 - 2\right)^{1/2}$ para $\omega^2 < \omega_0^2$

Resonancias en Circuitos RLC en serie

Ningún par de las definiciones generales conduce completamente a condiciones idénticas para las cuatro variables. Variando R no siempre se producirá resonancia, y si esta variable es despreciada, se puede ver que tres de las definiciones conducen a condiciones idénticas para las otras tres variables. Esas tres definiciones son aquellas para las cuales V_R es máxima (equivalente a corriente máxima o Z mínima), la potencia es máxima y la reactancia es cero.

Una consideración más importante y práctica es la magnitud de las diferencias entre las condiciones derivadas de las distintas definiciones. Estas diferencias se expresan en forma usual como función del factor de calidad Q , que está definido en términos de los tres parámetros fijados del sistema como se muestra en la Tabla II. Cuando Q es más grande que 10, la dispersión total de los valores de ω , L o C para todas las definiciones es menor que 1% del valor promedio. Para los máximos y mínimos en la salida normalmente no es lo suficientemente nítida para permitir la detección de variaciones tan pequeñas. Cuando Q se hace menor que 10 las variaciones son más grandes, pero la curva de resonancia tiene un pico ancho y la posición del máximo es igualmente impreciso. Por tanto parece que para todos los propósitos prácticos todas las definiciones conducen a las mismas condiciones cuando ω , L o C es la variable. Cuando se tiene a R

como variable, los resultados son más diversos. La fase resonante no se puede alcanzar cuando se varía R , pero la potencia disipada en circuito está dada por

$$W = \frac{1}{2} A^2 R / \left[R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{\omega C} \right)^2 \right] \quad 2.201$$

y es un máximo para

$$R = L\omega - \frac{1}{\omega C} \quad 2.202$$

y se va a cero cuando $R \rightarrow 0$ y cuando $R \rightarrow \infty$.

La resonancia de oscilaciones ocurre para $\omega^2 = \frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}$

y esta condición se puede alcanzar variando R hasta

$$R^2 = 4L^2(\omega_0^2 - \omega^2).$$

CIRCUITOS R L C ACOPLADOS

La forma más simple de circuitos RLC acoplados es la que se presenta en la siguiente figura.

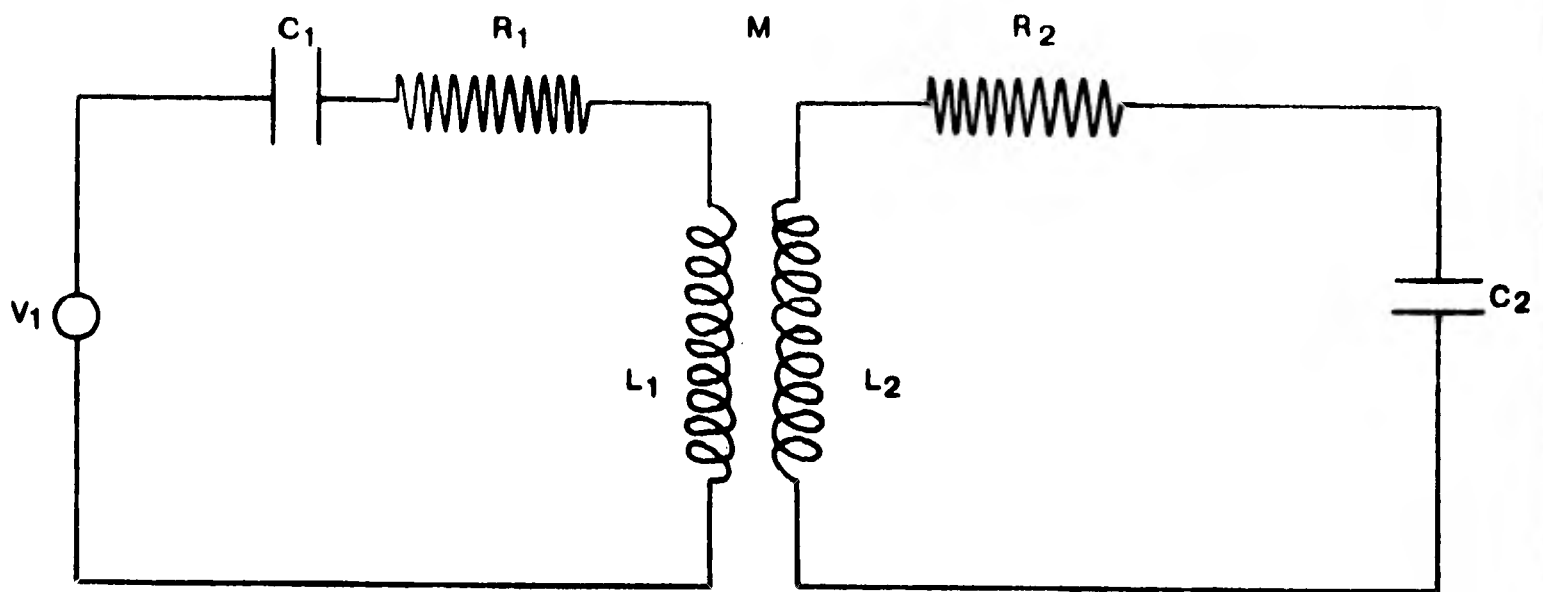


Fig. 22

Un generador de impedancia despreciable (o con una impedancia que puede quedar incluida en R_1 y C_1) produce un voltaje de magnitud V_1 y frecuencia ω . Inmediatamente podemos ver que

$$V_1 = I_1 Z_1 + i\omega M I_2 \quad 2.203$$

$$0 = I_1 Z_2 + i\omega M I_1 \quad 2.204$$

donde $Z_1 = R_1 + iX_1 = R_1 + i\left(\omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1}\right) \quad 2.205$

$$Z_2 = R_2 + iX_2 = R_2 + i\left(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2}\right) \quad 2.206$$

y $M = k(L_1 L_2)^{1/2}, \quad 2.207$

con K como la constante de acoplamiento.

La impedancia efectiva del primario, dada por $Z_1' = V_1/I_1$, o bien

$$Z_1' = R_1 + \frac{\omega^2 M^2 R_2}{R_2^2 + X_2^2} + i \left(X_1 - \frac{\omega^2 M^2 X_2}{R_2^2 + X_2^2} \right) \quad 2.208$$

es decir, la resistencia primaria está incrementada por una "resistencia reflejada" $\omega^2 M^2 R_2 / (R_2^2 + X_2^2)$, y la reactancia primaria queda modificada por la siguiente cantidad $-\omega^2 M^2 X_2 / (R_2^2 + X_2^2)$, que puede ser negativa o positiva según sea el signo de X_2 . La definición de *fase resonante* requiere que la corriente primaria esté en fase con el voltaje aplicado y esto se obtiene haciendo la reactancia efectiva primaria cero; por lo tanto

$$X_1 = \omega^2 M^2 X_2 / (R_2^2 + X_2^2) \quad 2.209$$

Una solución de la ecuación es simplemente

$$X_1 = X_2 = 0,$$

y para $L_1 = L_2 = L$, $C_1 = C_2 = C$, se sigue que

$$\omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C} \quad \text{ó} \quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC} \quad 2.210$$

que coincide con el valor de ω^2 para fase resonante en el primario o secundario tomado sólo como un circuito RLC en serie.

2.8 INDICE DE REFRACCION

Consideremos la situación siguiente: entre una fuente de ondas eléctricas y un punto de observación se encuentra una placa de vidrio y lo que se pretende es saber cómo es el campo eléctrico en el punto de observación cuando la fuente está emitiendo dichas ondas eléctricas y por supuesto están atravesando la placa de vidrio.

De acuerdo con el *principio de superposición* se tiene que para el campo en el punto de observación P

$$\vec{E}_p = \vec{E}_f + \vec{E}_{pv} \quad 2.211$$

en donde \vec{E}_f significa el campo debido exclusivamente a la fuente y \vec{E}_{pv} representa el campo producido en P debido a todas las cargas que están oscilando en la placa de vidrio.

El campo de una onda que se propaga en la dirección x, debido a la fuente, sin tener en cuenta a la placa de vidrio es

$$E_f = E_0 e^{i\omega(t - \frac{x}{c})} \quad 2.212$$

Debido a que la onda al penetrar en la placa viaja con una velocidad menor que c (la velocidad de la luz), es decir, con una velocidad $v = c/n$, con n simbolizando el índice de refracción, entonces la onda sufrirá un retraso en el tiempo al atravesar la placa de vidrio de Δx dado por

$$\Delta t = (n - 1) \Delta x / c \quad 2.213$$

por lo que la onda, después de atravesar la placa es como sigue:

$$E' = e^{-i\omega(n-1)\Delta x/c} E_0 e^{i\omega(t - \frac{x}{c})} \quad 2.214$$

Este resultado se puede interpretar como un cambio de fase que ha sufrido la onda en una cantidad

$$\Delta\theta = \omega(n - 1)\Delta x / c \quad 2.215$$

Si Δx es pequeño, entonces podemos escribir

$$e^{-i\omega(n-1)\Delta x/c} \approx 1 - [i\omega(n - 1)\Delta x/c] \quad 2.216$$

que sustituyendo en (2.84) nos da

$$E' = E_0 e^{i\omega(t - \frac{x}{c})} - [i\omega(n - 1)\Delta x/c] E_0 e^{i\omega(t - \frac{x}{c})} \quad 2.217$$

Comparando esta ecuación con la (2.81) es fácil ver que $E' = E_p$.

Analicemos ahora, exclusivamente el campo producido en P debido a todas las cargas que están oscilando en la placa de vidrio:

Si la fuente está lo suficientemente lejos para que el campo E_f tenga la misma fase en toda la placa, entonces, en la vecindad de ella podemos escribir a E_f como (2.212) y justo en $x =$ se tiene

$$E_f = E_0 e^{i\omega t} \quad 2.218$$

Suponiendo que los electrones están unidos elásticamente a los átomos, tendremos pequeños osciladores, cuya ecuación de movimiento estará dada por

$$m\ddot{x} + m\omega_0^2 x = eE_0 e^{i\omega t} \quad 2.219$$

La solución de (2.89) es

$$x = x_0 e^{i\omega t} \quad 2.220$$

con $x_0 = eE_0 / m(\omega_0^2 - \omega^2) \quad 2.221$

esto, claro está, para cada electrón, con la diferencia de que la posición media (posición de equilibrio) es diferente para cada uno de ellos.

Lo que tenemos ahora, es un plano de cargas oscilantes, que como tales están sujetas a las ecuaciones de campo de la electrodinámica dadas por

$$\vec{E} = \frac{-e}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{\hat{e}_{r'}}{r'^2} + \frac{r'}{c} \frac{d}{dt} \left(\frac{\hat{e}_{r'}}{r'^2} \right) + \frac{1}{c^2} \frac{d^2 \hat{e}_{r'}}{dt^2} \right]$$

$$\text{y } \vec{B} = - \hat{e}_{r'} \times \vec{E}/c \quad 2.223$$

en las que r es la distancia de P a e (carga del electrón) — ver figura — r' la distancia retardada y $\hat{e}_{r'}$ el versor en la dirección desde la posición retardada

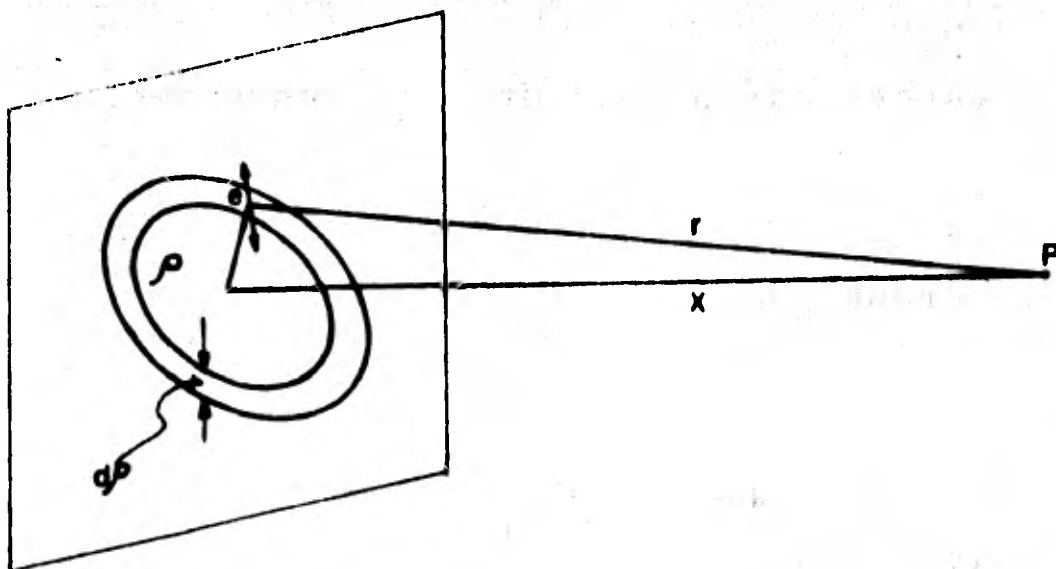


Fig. 23

Los dos primeros términos de (2.222) varían inversamente con el cuadrado de la distancia (Ley de Coulomb más una corrección debida al retardo), mientras que en el tercero varía inversamente con la distancia, por lo que a grandes distancias el término dominante de (2.222) es el tercero.

Así,

$$\vec{E} = \frac{-e}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{d^2 \hat{e}_r}{dt^2} \quad 2.224$$

lo cual nos permite conseguir

$$E_x(t) = \frac{-e}{4\pi\epsilon_0 c^2 r} a_x(t - \frac{r}{c}) \quad 2.225$$

De (2.220) y (2.225) obtenemos que para una carga

$$E_{epv} \sim \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\omega^2 x_0 e^{i\omega(t - \frac{r}{c})}}{r} \quad 2.226$$

Si hay n cargas por unidad de área, entonces,

$$\begin{aligned} E_{pv} &= \int_0^\infty 2\pi\rho n E_{ep} d\rho \\ &= \frac{\eta}{2\epsilon_0 c} \left[i\omega x_0 e^{i\omega(t - \frac{x}{c})} \right] \quad 2.227 \end{aligned}$$

y finalmente

$$E_{pv} = - \frac{i\omega\eta e^2 E_0 e^{i\omega(t - \frac{x}{c})}}{2m\epsilon_0 c(\omega_0^2 - \omega^2)} \quad 2.228$$

Representando por N el número de átomos por unidad de volumen de la placa, entonces $\eta = N\Delta x$ y utilizando (2.207) y (2.228) obtenemos

$$(n - 1) = \frac{N_e^2}{2\epsilon_0 m(\omega_0^2 - \omega^2)} \quad 2.229$$

Para precisar más a la ecuación anterior, supongamos que tenemos N_k electrones por unidad de volumen con frecuencia característica ω_k y cuyo factor de amortiguamiento es Γ_k , entonces, podemos reescribir a (2.209) como

$$\ddot{x} + 2\Gamma_k \dot{x} + \omega_k^2 x = \frac{e}{m} E_0 e^{i\omega t} \quad 2.230$$

y por lo tanto (2.229) quedará de la siguiente manera:

$$n(\omega) - 1 = \frac{e^2}{2\epsilon_0 m} \sum_k \frac{N_k}{(\omega_k^2 - \omega^2) + 2i\Gamma_k \omega} \quad 2.231$$

De esta última ecuación se desprende que el índice de refracción es un número complejo, es decir, que

$$n(\omega) = n_r(\omega) - in_i(\omega) \quad 2.232$$

con $n_i(\omega) < 0$.

El significado físico de (2.232) lo podemos ver de la ecuación (2.204) que podemos reescribir como

$$E' = e^{-\omega n_i \Delta x / c} e^{-i\omega(n_r - 1)\Delta x / c} E_0 e^{i\omega(t - \frac{x}{c})} \quad 2.233$$

La exponencial que contiene a n_i nos da una disminución del módulo del campo y a medida que la onda pasa a través del material se debilita, esto significa que el material está absorbiendo parte de la onda lo que proviene del hecho de que en el modelo introdujimos una fuerza de amortiguamiento para los osciladores misma que probaría sin duda pérdida de energía. De aquí que la parte imaginaria de un índice de refracción complejo representa una absorción o atenuación de la onda entrante.

La otra parte de la ecuación (2.233) nos describe una onda cuya fase se ha retrasado en un ángulo $\omega(n_r - 1)\Delta x / c$ al atravesar el material.

2.9 CAVIDADES RESONANTES

Lo que haremos a continuación será un desarrollo en series de funciones ortogonales de todas las cantidades que intervienen

en las ecuaciones de Maxwell, para poder así estar en condiciones de resolverlas para una *cavidad resonante*.

Las expresiones para \vec{E} , \vec{H} , $\nabla \times \vec{E}$, $\nabla \times \vec{H}$, \vec{J} , $\nabla \cdot \vec{D}$ y ρ , en términos de las \vec{E}_a 's, \vec{H}_a 's, \vec{F}_a 's y ψ_a 's (ver Apéndice A) quedan como sigue:

$$\vec{E} = \sum_a \left[\vec{E}_a \int_V \vec{E} \cdot \vec{E}_a dv + \vec{F}_a \int_V \vec{E} \cdot \vec{F}_a dv \right] \quad 2.234$$

$$\vec{H} = \sum_a H_a \int_V \vec{H} \cdot \vec{H}_a dv \quad 2.235$$

$$\nabla \times \vec{E} = \sum_a \vec{H}_a \left[k_a \int_V \vec{E} \cdot \vec{E}_a dv + \int_S (\vec{n} \times \vec{E}) \cdot \vec{H}_a da \right] \quad 2.236$$

$$\nabla \times \vec{H} = \sum_a \vec{E}_a \left[k_a \int_V \vec{E} \cdot \vec{E}_a dv + \int_{S'} (\vec{n} \times \vec{H}) \cdot \vec{E}_a da \right] \quad 2.237$$

$$\vec{J} = \sum_a \left[\vec{E}_a \int_V \vec{J} \cdot \vec{E}_a dv + \vec{F}_a \int_V \vec{J} \cdot \vec{F}_a dv \right] \quad 2.238$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \sum_a \psi_a \left[-k_a \int_V \vec{D} \cdot \vec{F}_a dv \right] \quad 2.239$$

$$\rho = \sum_a \psi_a \int_V \rho \psi_a dv \quad 2.240$$

Las expresiones para \vec{E} , \vec{H} , \vec{J} y ρ se ven inmediatas, mientras que las (2.236), (2.237) y (2.239) no lo son tanto, por lo que las demostraremos, tomando en cuenta la otras.

Tomando el rotacional de (2.234) obtenemos de inmediato que

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \sum_a k_a \vec{H}_a \int_V \vec{E} \cdot \vec{E}_a dv \quad 2.241$$

ahora expandiendo $\vec{\nabla} \times \vec{E}$ directamente en términos de las \vec{H}_a 's, tenemos

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \sum_a \vec{H}_a \int_V \vec{\nabla} \times \vec{E} \cdot \vec{H}_a dv \quad 2.242$$

para evaluar la integral anterior, escribamos

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{\nabla} \times \vec{E}_a) = \vec{\nabla} \times \vec{E} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{E}_a - \vec{E} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{E}_a = k_a \vec{H}_a \cdot \vec{\nabla} \times \vec{E} - k_a^2 \vec{E} \cdot \vec{E}_a \quad 2.243$$

integrando esta última ecuación sobre V y transformando el miembro izquierdo en una integral de superficie obtenemos

$$\int_{S, S'} \vec{n} \cdot (\vec{E} \times \vec{H}_a) da = \int_V \vec{\nabla} \times \vec{E} \cdot \vec{H}_a dv - k_a \int_V \vec{E} \cdot \vec{E}_a dv \quad 2.244$$

Escribiendo el integrando del miembro izquierdo de (2.244) en la forma $\vec{H}_a \cdot (\vec{n} \times \vec{E})$ o $\vec{E} \cdot (\vec{H}_a \times \vec{n})$, vemos que ésta última forma se anula sobre S' . Luego (2.244) queda como

$$\int_S (\vec{n} \times \vec{E}) \cdot \vec{H}_a da = \int_V \vec{\nabla} \times \vec{E} \cdot \vec{H}_a dv - k_a \int_V \vec{E} \cdot \vec{E}_a dv$$

y sustituyendo en (2.242) obtenemos directamente (2.236), que es un resultado más general que (2.241) ya que éste queda como un caso particular de (2.236).

El desarrollo de (2.237) se obtiene en forma similar a lo anterior y para $\vec{\nabla} \cdot \vec{D}$, consideremos la relación

$$\vec{\nabla} \cdot (\psi_a \vec{D}) = \psi_a \vec{\nabla} \cdot \vec{D} + \vec{D} \cdot \vec{\nabla} \psi_a = \psi_a \vec{\nabla} \cdot \vec{D} + k_a \vec{D} \cdot \vec{F}_a \quad 2.245$$

integrando esta ecuación sobre V y transformando el miembro izquierdo en una integral de superficie, obtenemos

$$\int_V \psi_a \vec{\nabla} \cdot \vec{D} dv = -k_a \int_V \vec{D} \cdot \vec{F}_a dv + \int_{S, S'} (\vec{D} \cdot \vec{n}) \psi_a da \quad 2.246$$

y debido a las condiciones de frontera para las ψ_a 's sobre S y S' el segundo término del miembro derecho de (2.246) se anula, por lo que (2.239) queda demostrada.

Con todo esto estamos ya en condiciones de analizar qué tipo de ecuaciones diferenciales satisfacen los diversos coeficientes de las expansiones en serie, como una forma muy particular de resolver las ecuaciones de Maxwell en una cavidad hueca.

La ecuación $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ se satisface inmediatamente y la ecuación $\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho$ nos da

$$-k_a \epsilon_0 \int_V \vec{E} \cdot \vec{F}_a dv = \int_V \rho \psi_a dv \quad 2.247$$

De $\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$ y $\vec{\nabla} \times \vec{H} = \dot{\vec{D}} + \vec{J}$ nos da

$$k_a \int_V \vec{E} \cdot \vec{E}_a dv + \mu_0 \frac{d}{dt} \int_V \vec{H} \cdot \vec{H}_a dv = - \int_S (\vec{n} \times \vec{E}) \cdot \vec{H}_a da \quad 2.248$$

$$k_a \int_V \vec{H} \cdot \vec{H}_a dv - \epsilon_0 \frac{d}{dt} \int_V \vec{E} \cdot \vec{E}_a dv = \int_V \vec{J} \cdot \vec{E}_a dv - \int_S (\vec{n} \times \vec{H}) \cdot \vec{E}_a da \quad 2.249$$

$$- \epsilon_0 \frac{d}{dt} \int_V \vec{E} \cdot \vec{F}_a dv = \int_V \vec{J} \cdot \vec{F}_a dv \quad 2.250$$

Las ecuaciones (2.247) y (2.250) son equivalentes, veamos:

Tomando la derivada con respecto a t de (2.247) obtenemos

$$- k_a \epsilon_0 \frac{d}{dt} \int_V \vec{E} \cdot \vec{F}_a dv = \frac{d}{dt} \int_V \rho \psi_a dv \quad 2.251$$

y multiplicando (2.250) por k_a e igualando miembros resulta que

$$k_a \int_V \vec{J} \cdot \vec{F}_a dv = \frac{d}{dt} \int_V \rho \psi_a dv \quad 2.252$$

para evaluar la integral de la izquierda de (2.252) usamos la identidad siguiente

$$\vec{\nabla} \cdot (\psi_a \vec{J}) = \psi_a \vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \vec{J} \cdot \vec{\nabla} \psi_a \quad 2.253$$

ahora integrando sobre V y transformando la integral izquierda en una de superficie, aplicando condiciones de frontera y la ecuación (9) del apéndice A, obtenemos

$$\int_V \psi_a \vec{\nabla} \cdot \vec{J} dv = -k_a \int_V \vec{J} \cdot \vec{F}_a dv \quad 2.254$$

Sustituyendo (2.254) en (2.252) obtenemos finalmente que

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \frac{d\rho}{dt} = 0 \quad 2.255$$

lo que demuestra que ambas ecuaciones (2.247) y (2.250) conducen a la ecuación de continuidad (2.255), por lo tanto usaremos sólo una cualquiera de ellas.

Si combinamos (2.248) y (2.249) para conseguir ecuaciones separadas para $\int \vec{E} \cdot \vec{E}_a dv$ y $\int \vec{H} \cdot \vec{H}_a dv$ obtenemos fácilmente

$$\epsilon_0 \mu_0 \frac{d^2}{dt^2} \int \vec{E} \cdot \vec{E}_a dv + k_a^2 \int \vec{E} \cdot \vec{E}_a dv = -\mu_0 \frac{d}{dt} \left(\int \vec{J} \cdot \vec{E}_a dv - \int_{S'} (\vec{n} \times \vec{H}) \cdot \vec{E}_a da \right) - k_a \int_S (\vec{n} \times \vec{E}) \cdot \vec{H}_a da$$

$$2.256$$

$$\epsilon_0 \mu_0 \frac{d^2}{dt^2} \int \vec{H} \cdot \vec{H}_a dv + k_a^2 \int \vec{H} \cdot \vec{H}_a dv = k_a \left\{ \int \vec{J} \cdot \vec{E}_a dv - \int_{S'} (\vec{n} \times \vec{H}) \cdot \vec{E}_a da \right\} - \epsilon_0 \frac{d}{dt} \int_S (\vec{n} \times \vec{E}) \cdot \vec{H}_a da$$

2.257

Ahora bien, Si:

$$(i) \text{ no hay ventanas} \Rightarrow \int_{S'} (\vec{n} \times \vec{H}) \cdot \vec{E}_a da = 0$$

$$(ii) \text{ se tiene conductividad finita} \Rightarrow \vec{J} = \sigma \vec{E}$$

por lo tanto, las ecuaciones (2.256) y (2.257) se transforman en las siguientes

$$\epsilon_0 \mu_0 \frac{d^2}{dt^2} \int \vec{E} \cdot \vec{E}_a dv + k_a^2 \int \vec{E} \cdot \vec{E}_a dv = -\mu_0 \sigma \frac{d}{dt} \int \vec{E} \cdot \vec{E}_a dv - k_a \int_S (\vec{n} \times \vec{E}) \cdot \vec{H}_a da \quad 2.258$$

$$\epsilon_0 \mu_0 \frac{d^2}{dt^2} \int \vec{H} \cdot \vec{H}_a dv + k_a^2 \int \vec{H} \cdot \vec{H}_a dv = k_a \sigma \int \vec{E} \cdot \vec{E}_a dv - \epsilon_0 \frac{d}{dt} \int_S (\vec{n} \times \vec{E}) \cdot \vec{H}_a da \quad 2.259$$

Finalmente por (1) del Apéndice A : $\vec{H}_a = \frac{1}{k_a} \nabla \times \vec{E}_a$ obtenemos

$$\frac{d^2}{dt^2} \int \vec{E} \cdot \vec{E}_a dv + \frac{\sigma}{\epsilon_0} \frac{d}{dt} \int \vec{E} \cdot \vec{E}_a dv + \frac{k_a^2}{\epsilon_0 \mu_0} \int \vec{E} \cdot \vec{E}_a dv = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} \int_S (\vec{n} \times \vec{E}) \cdot (\nabla \times \vec{E}_a) da$$

2.260

¡Oh! ¡Sorpresa! esta ecuación tiene la forma de un oscilador armónico amortiguado forzado.

CAPITULO 3

RESONANCIAS EN FISICA CUANTICA

El fenómeno de resonancia en física cuántica se presenta con gran frecuencia en problemas de *difusión y dispersión* de partículas cuánticas, tanto en los campos *molecular, atómico, nuclear*, como de *física de altas energías*. Comenzaremos, pues, con una revisión general de algunos conceptos de la *Mecánica Cuántica* para luego pasar a la revisión particular del *concepto de resonancia* que fundamentalmente se exhibe en las *secciones eficaces*.

3.1 ECUACION DE SCHRÖDINGER

Como todo mundo sabe, la física cuántica estudia los fenómenos a escala microscópica, entendiendo esta escala como aquella en la que se producen los *fenómenos atómicos y subatómicos* en los cuales las longitudes de onda que intervienen son de algunos angstroms como máximo ($1 \text{ \AA} = 10^{-8} \text{ cm}$). Para contrastar la escala microscópica con la macroscópica definimos esta última como la de aquellos fenómenos observables a simple vista o con un microscopio ordinario, o sea con una precisión del orden de la micra como máximo (10^{-4} cm).

Para fijar ideas consideremos una partícula con movimiento Browniano (observable con un microscopio ordinario). Las partículas más pequeñas de este tipo tienen un diámetro del orden de 1μ y una masa $M \approx 10^{-12}$ gr. En equilibrio térmico a temperatura ordinaria, su energía cinética media $\frac{3}{2} kT$ es alrededor de 0.4×10^{-13} erg, de donde una longitud de onda media

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{3MkT}} \approx 5 \times 10^{-6} \text{ \AA}$$

Para una misma energía, un átomo de helio tiene una longitud de onda $\lambda \approx 0.9 \text{ \AA}$, un neutrón $\lambda \approx 1.8 \text{ \AA}$, un electrón $\lambda \approx 77 \text{ \AA}$.

La ecuación fundamental que rige a la Mecánica Cuántica es la Ecuación de Schrödinger

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x) \right] \psi(x, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x, t) \quad 3.1$$

Para el caso en que E sea la energía del estado estacionario, entonces

$$\psi(x, T) = \psi(x) e^{-i \frac{E}{\hbar} t} \quad 3.2$$

y por consiguiente la ecuación (3.1) se transforma en

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V(x) \right] \psi(x) = E\psi(x) \quad 3.3$$

Redefiniendo $V(x)$ y E como

$$V(x) = \frac{\hbar^2}{2m} U(x), \quad E = \frac{\hbar^2}{2m} \epsilon \quad 3.4$$

obtenemos finalmente que la ecuación (3.3) se escribe

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + [\epsilon - U(x)] \psi(x) = 0 \quad 3.5$$

La ecuación (3.5) es una ecuación diferencial del tipo Sturm-Liouville.

Si observamos con cuidado la ecuación (3.5) vemos que ella es real ya que $V(x)$ es una función real de x . Si ψ es función propia, su parte real y su parte imaginaria lo son también y necesariamente son múltiplos la una de la otra si la función propia no es degenerada. Por lo tanto, es suficiente conocer

las funciones propias reales para construir todas las funciones propias relativas a un valor propio dado.

Con el fin de ilustrar el tipo de soluciones que nos proporciona la ecuación (3.5) analicemos el problema en donde $V(x)$ sea un *potencial cuadrado* cuya característica principal es que presenta discontinuidades de primera especie; es decir, saltos bruscos de una cantidad finita, en ciertos puntos y que permanezca constante fuera de ellos. Se requiere también que para que aparezcan efectos típicamente cuánticos es necesario que el potencial $V(x)$ presente una variación relativa notable en un desplazamiento del orden de una longitud de onda.

De la ecuación (2.5) se sigue inmediatamente que $\frac{d\psi}{dx}$ es continua en todo el espacio y a fortiori $\psi(x)$ también.

Si U_i representa el valor constante de $U(x)$ en la i -ésima región, entonces tenemos dos casos por trabajar:

1^{ro} Si $\epsilon > U_i$, se tienen soluciones cuyos comportamientos son oscilatorios, es decir, son funciones del tipo $e^{ik_i x}$, $e^{-ik_i x}$ donde $k_i = \sqrt{\epsilon - U_i}$.

2^{do} Si $\epsilon < U_i$, se tienen soluciones cuyos comportamientos son exponenciales, es decir, son funciones del tipo

$$e^{\kappa_i x}, e^{-\kappa_i x} \text{ donde } \kappa_i = \sqrt{U_i - \epsilon}.$$

Para el caso más específico de tener un potencial (ver Figura).

$$U(x) = \begin{cases} U_1 & \text{si } x > 0 \\ U_2 & \text{si } x < 0 \end{cases} \quad 3.6$$

donde $U_2 > U_1$ encontramos los siguientes resultados

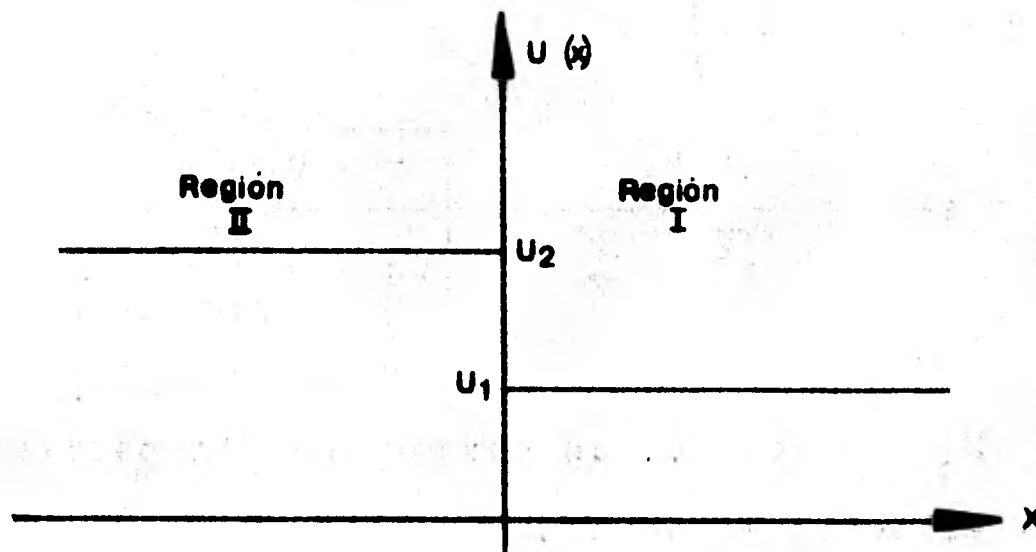


Fig. 24

- (a) Cuando $U_1 < \epsilon < U_2$ tenemos un comportamiento oscilatorio para la región I y un comportamiento exponencial para la región II, es decir,

$$\psi(x) = \begin{cases} A_1 \operatorname{sen}(k_1 x + \theta) & x > 0 \\ A_2 e^{k_2 x} & x < 0 \end{cases} \quad 3.7$$

Las condiciones de frontera (continuidad de la función y de su derivada, en este caso en $x = 0$; o bien formular la continuidad de la función y de su derivada logarítmica) nos determinan que

$$\theta = \operatorname{ang} \tan \frac{k_1}{K_1} ; \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right) \quad 3.8$$

$$\frac{A_2}{A_1} = \operatorname{sen} \theta = \frac{k_1}{\sqrt{k_1^2 + K_1^2}} = \sqrt{\frac{\epsilon - U_1}{U_2 - U_1}} \quad 3.9$$

(b) Cuando $U_2 < \epsilon$ tenemos un comportamiento oscilatorio en todo el espacio, es decir,

$$\psi(x) = \begin{cases} e^{-ik_1 x} + A e^{ik_1 x} & x > 0 \\ B e^{-ik_2 x} & x < 0 \end{cases} \quad 3.10$$

Nuevamente las condiciones de frontera nos determinan que

$$A = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \quad 3.11$$

$$B = 1 + A = \frac{2k_1}{k_1 + k_2} \quad 3.12$$

En este caso $\psi^*(x)$ [compleja conjugada de $\psi(x)$] es una función propia linealmente independiente de $\psi(x)$. Todas las funciones propias que corresponden al valor propio ϵ se pueden, pues, poner en forma de una combinación de ψ y ψ^* .

3.2 COLISIONES CUANTICAS

Consideremos la colisión de una *partícula clásica* en un campo de fuerzas centrales. Fijada la energía de la partícula incidente, $E = p^2/2m$, cada trayectoria se puede caracterizar por su parámetro de impacto, b , definido como la distancia del centro de fuerzas C a la recta sobre la que está el vector inicial \vec{p}_0 (ver Figura 25).

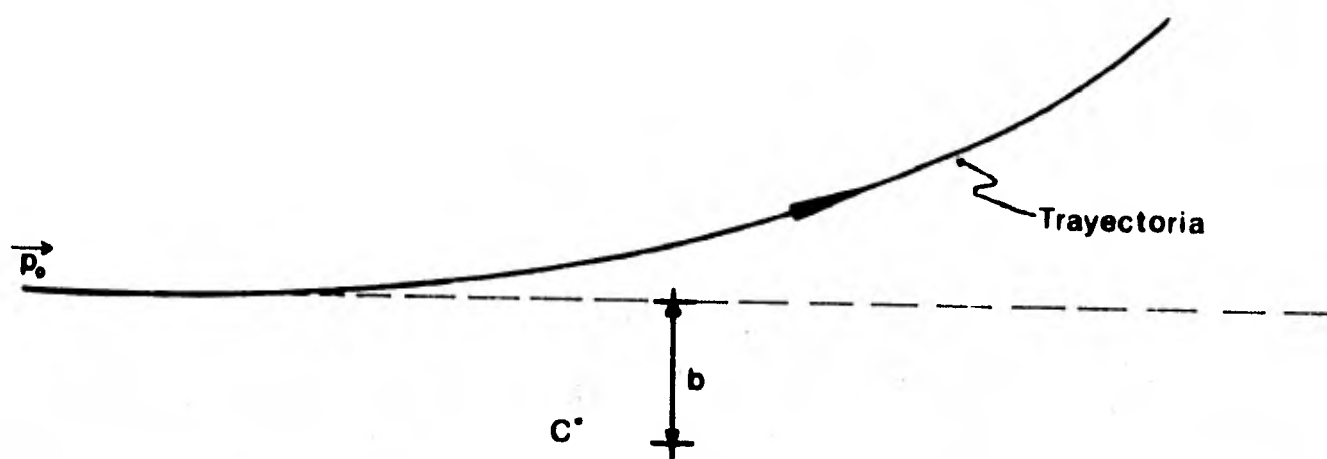


Fig. 25

En una colisión de este tipo, el momento angular L es una constante del movimiento, b es directamente proporcional a L :

$$L = bp \quad 3.13$$

Si el campo de fuerzas tiene un radio limitado r_0 ,

$$V(r) = 0 \quad \text{para } r > r_0, \quad 3.14$$

la partícula incidente sufre o no una desviación según que $b < r_0$ ó $b > r_0$. La desviación está limitada a las partículas cuyo momento angular sea suficientemente pequeño.

En *Física Cuántica* una colisión es un fenómeno muy distinto del de una colisión clásica: es esencialmente un fenómeno de di fusión de ondas. Sin embargo, cuando el potencial difusor $V(r)$ es despreciable — sin ser necesariamente nulo — más allá de una determinada distancia r_0 , el fenómeno presenta ciertas *analogías* con la difusión de un haz de partículas clásicas por un potencial de radio limitado r_0 .

No obstante lo anterior, debemos ser conscientes de que en Mecánica Cuántica deja de tener sentido el concepto de trayectoria y el de parámetro de impacto. El objeto de la física cuántica es ahora tan sólo calcular la probabilidad de que como resultado de la colisión, las partículas se separen (o, como suele decirse, se dispersen) formando tal o cual ángulo.

A continuación ofrecemos una serie de definiciones muy importantes relacionadas con secciones eficaces, amplitudes de di fusión y órdenes de magnitud.

1. J : magnitud del flujo incidente: número de partículas incidentes que atraviesan en la unidad de tiempo una superficie unidad colocada perpendicularmente a la dirección de propagación e inmóvil con respecto al blanco.

2. P : número de partículas por unidad de volumen en el haz incidente.
3. \vec{v} : velocidad de las partículas incidentes con respecto al blanco.
4. N : número de partículas difundidas por unidad de tiempo en el ángulo sólido $d\Omega$ situado en la dirección $\Omega(\theta, \psi)$.
5. $\sigma(\Omega)$: sección eficaz de difusión de la partícula por el centro difusor en la dirección Ω_0 ; más brevemente, *sección eficaz de difusión diferencial*.
6. \underline{N} : número de difusores (blanco)
7. \bar{N} : número total de partículas difundidas en la unidad de tiempo.

Considerando las definiciones anteriores y en donde además la separación entre difusores $\gg \lambda$ de las partículas incidentes y que los difusores son elásticos, es decir, que el estado cuántico del difusor no se modifica y donde, *a fortiori*, no hay transferencias de energía a los grados de libertad internos del difusor, podemos escribir

$$N = J \underline{N} \sigma(\Omega) d\Omega \quad 3.15$$

donde $J = Pv \quad 3.16$

y $\sigma_{\text{tot}} = \int \sigma(\Omega) d\Omega \quad 3.17$

por tanto $\bar{N} = J \underline{N} \sigma_{\text{tot}} \quad 3.18$

Para darnos una idea de la extensión de la zona de difusión, a, los órdenes de magnitud son:

$a \approx 10^{-8}$ cm ; si el difusor es un átomo

$a \approx 10^{-13}, 10^{-12}$ cm ; si el difusor es un núcleo de átomo

Las unidades típicas con que se miden las secciones eficaces son el barn y el milibarn, donde

$$1 \text{ barn} = 10^{-24} \text{ cm}^2 \quad \text{y} \quad 1 \text{ mb} = 10^{-27} \text{ cm}^2.$$

Ahora bien, en lugar de estudiar el difusor átomo, molécula, núcleo, etc., con toda su complejidad, lo representaremos mediante un potencial estático $V(\vec{r})$.

Consideremos el caso de una partícula incidente de masa m y un dispersor $V(\vec{r})$ tal que $V(\vec{r}) \rightarrow 0$ más rápido que $\frac{1}{r}$ cuando $r \rightarrow \infty$.

Si E y $\vec{p} = \hbar\vec{k}$ son la energía y el impulso inicial de la partícula, entonces el problema es ligar $\sigma(\Omega)$ a la solución de la ecuación de Schrödinger

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\vec{r}) \right] \psi_{\vec{k}}(\vec{r}) = E \psi_{\vec{k}}(\vec{r}) \quad 3.19$$

cuya forma asintótica viene dada por

$$\psi_{\vec{k}}(\vec{r}) \sim e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} + f(\Omega) \frac{e^{ikr}}{r} \quad 3.20$$

y se le conoce con el nombre de *onda estacionaria de difusión* con vector de onda \vec{k} .

La interpretación de los dos términos de la forma asintótica (3.20) la podemos hacer si definimos el vector densidad de corriente como:

$$\vec{J}(r) = \frac{\hbar}{2m} \left\{ \psi^*(\vec{r}) [\vec{\nabla} \psi(\vec{r})] - [\vec{\nabla} \psi(\vec{r})]^* \psi(r) \right\} \quad 3.21$$

Así las cosas

$e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$: representa una onda de densidad uno y de densidad de corriente $\hbar\vec{k}/m$

$f(\Omega) \frac{e^{ikr}}{r}$: se interpreta como un haz de partículas emitidas radialmente a partir del centro difusor y representa el haz de partículas difundidas.

De acuerdo con esta interpretación; el número de partículas emitidas por unidad de tiempo en el ángulo sólido $d\Omega$ situado en la dirección Ω es igual al flujo de las partículas difundidas a través de un casquete esférico de radio muy grande y visto bajo un ángulo sólido $(\Omega, \Omega + d\Omega)$ o sea $(\hbar k/m) |f(\Omega)|^2 d\Omega$. Ahora si dividimos por el flujo incidente $J = \hbar k/m$, obtenemos la sección eficaz de difusión

$$\sigma(\Omega) = |f(\Omega)|^2 \quad 3.22$$

donde $f(\Omega)$ recibe el nombre de *amplitud de difusión*.

Los razonamientos que hemos hecho anteriormente no son del todo correctos ya que hemos trazado una analogía cuyos analogados no se identifican en forma total y esto lo podemos ver diciendo:

1^{ro} El vector densidad de corriente no es simplemente la suma de la corriente de la onda plana incidente y de la corriente de la onda difundida. A estos dos sumandos hay que añadir el término de interferencia entre $\exp(i\vec{k}_0 \cdot \vec{r})$ y $f(\Omega) [\exp(ikr)/r]$.

2^{do} La representación de la situación física mediante la onda estacionaria de difusión $\psi_{\vec{k}}(\vec{r})e^{iEt/\hbar}$ es una idealización. En realidad, cada partícula que interviene mediante un paquete de ondas formado por superposición de ondas relacionadas del tipo anterior, correspondientes a vectores de onda de magnitud y dirección ligeramente distintas de \vec{k} . Este paquete está constituido de tal manera que se cumplen correctamente las condiciones iniciales.

Analicemos un poco más de cerca un experimento de difusión y las longitudes características que intervienen en este fenómeno (ver Figura 26)

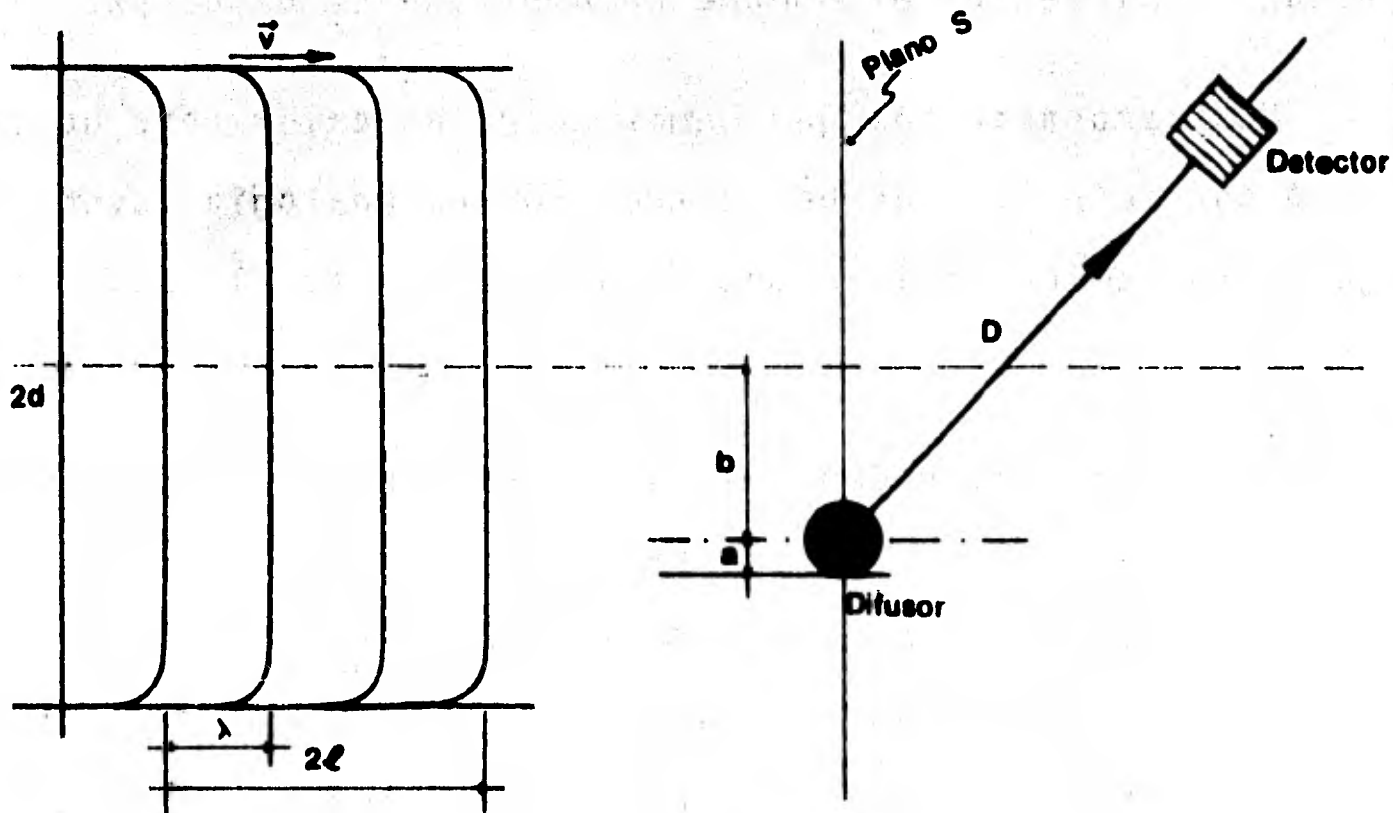


Fig. 26

$f(\Omega) \frac{e^{ikr}}{r}$: se interpreta como un haz de partículas emitidas radialmente a partir del centro difusor y representa el haz de partículas difundidas.

De acuerdo con esta interpretación; el número de partículas emitidas por unidad de tiempo en el ángulo sólido $d\Omega$ situado en la dirección Ω es igual al flujo de las partículas difundidas a través de un casquete esférico de radio muy grande y visto bajo un ángulo sólido $(\Omega, \Omega + d\Omega)$ o sea $(\hbar k/m) |f(\Omega)|^2 d\Omega$. Ahora si dividimos por el flujo incidente $J = \hbar k/m$, obtenemos la sección eficaz de difusión

$$\sigma(\Omega) = |f(\Omega)|^2 \quad 3.22$$

donde $f(\Omega)$ recibe el nombre de *amplitud de difusión*.

Los razonamientos que hemos hecho anteriormente no son del todo correctos ya que hemos trazado una analogía cuyos análogos no se identifican en forma total y esto lo podemos ver diciendo:

1^{ro} El vector densidad de corriente no es simplemente la suma de la corriente de la onda plana incidente y de la corriente de la onda difundida. A estos dos sumandos hay que añadir el término de interferencia entre $\exp(i\vec{k}_0 \cdot \vec{r})$ y $f(\Omega)[\exp(ikr)/r]$.

- $\lambda = \frac{\hbar}{mv}$: longitud de onda media del paquete incidente
 d y l : dimensiones transversal y longitudinal del paquete incidente
 a : extensión de la zona de difusión
 D : distancia entre los aparatos contadores y la zona de difusión.

$$\vec{v} = \hbar \vec{k} / m$$

Sea t_0 el instante en que el centro del paquete atravesaría el plano S. Si el movimiento del paquete no estuviera afectado por la presencia del potencial, el movimiento del centro del paquete antes de la colisión sigue la ecuación

$$\langle \vec{r} \rangle = \vec{b} + \vec{v}(t - t_0) \quad 3.23$$

Si suponemos que tanto la dirección de propagación como la energía del paquete incidente están perfectamente definidas, entonces

$$\lambda \ll d, l \quad 3.24$$

además para que el fenómeno de colisión no dependa de modo crítico de la forma particular del paquete de ondas, es necesario que

$$a \ll d, l \quad 3.25$$

Para que se produzca la difusión necesitamos también que $b < d$ y por tanto, el paquete de ondas incidente alcanza la zona de difusión en un determinado tiempo $t_0 \approx t_0 - (l/v)$. La colisión comienza propiamente en dicho tiempo. Después de un tiempo suficientemente largo, el paquete de ondas se encuentra de nuevo íntegramente fuera de la zona de difusión; en general, se compone, entonces, de dos términos adicionales, un paquete de onda transmitido cuya forma y ley de propagación son sensiblemente las mismas que las del paquete de ondas incidente, y un paquete de ondas difundidas en direcciones distintas de la dirección incidente. El fenómeno es análogo a los fenómenos de reflexión y de transmisión de ondas tratados en el capítulo 2 y al comienzo de este.

La detección de las partículas difundidas se hace disponiendo un sistema apropiado (contadores, placas fotográficas, etc.) en una dirección dada $\Omega = (\theta, \psi)$ a una distancia del centro difusor del orden de D . Esta distancia no debe ser demasiado grande si se quiere que el despliegue del paquete de ondas permanezca despreciable durante todo el experimento, para ello se requiere que:

$$\sqrt{\lambda D} \ll d, \ell$$

3.26

Además, para que la propagación de la onda que se detecta no esté afectada por la presencia del centro difusor necesitamos que

$$a, \lambda \ll D \quad 3.27$$

y que el detector no se pueda poner en marcha en ningún caso por la onda transmitida.

$$d \ll D \sin \theta \quad 3.28$$

Resumiendo, podemos decir que

$$a, \sqrt{\lambda D} \ll \ell \quad 3.29$$

$$a, \sqrt{\lambda D} \ll d \ll D$$

Para que $\sigma(\Omega)$ cumpla con la ecuación (3.22) es necesario que el dispositivo de medida de esta magnitud responda a las condiciones (3.29).

En física atómica o nuclear, d es, como máximo, igual a la anchura del diafragma de entrada de las partículas incidentes, $d \approx 1$ mm; ℓ puede ser notablemente mayor; D es del orden de 1 m. Con $a \approx 10^{-8}$ cm y $\lambda \approx 10^{-8}$ cm, lo cual es máximo, se tiene $\sqrt{\lambda D} \approx 10^{-3}$ cm y $\frac{\ell}{a} \sim \frac{d}{a} \sim 10^7$, $\ell/\sqrt{\lambda D} \approx d/\sqrt{\lambda D} \approx 10^2$, $\frac{d}{D} \approx 10^{-3}$. Las condiciones (3.29) quedan, pues, ampliamente satisfechas.

3.3 AMPLITUD DE DIFUSION

Estudiaremos ahora con más detalle la *amplitud de la difusión* o *amplitud de dispersión*:

Consideremos un haz de partículas representada por una onda plana e incide sobre una partícula blanco sin spin o centro dispersor, tal que

$$\psi_{inc} = e^{ikz} \quad 3.30$$

donde $k = 1/\lambda$ y $2\pi\lambda$ es la longitud de onda de De Broglie. Una onda plana se puede representar como una superposición de ondas esféricas, entrante y saliente. Así, la expansión de ψ_{inc} para $kr \gg 1$ es

$$\psi_{inc} = e^{ikz} = \frac{1}{2kr} \sum_{\ell} (2\ell+1) \left[(-1)^{\ell} e^{-ikr} - e^{+ikr} \right] P_{\ell}(\cos \theta) \quad 3.31$$

donde $P_{\ell}(\cos \theta)$ son los polinomios de Legendre y donde el primer término dentro del paréntesis cuadrado representa la onda entrante y el segundo la onda saliente (ver Figura 27)

Como el centro dispersor puede alterar en general tanto a la fase como a la amplitud de la onda saliente, el cambio de fase de la ℓ -ésima onda parcial lo expresamos por $2\delta_{\ell}$ y su amplitud por η_{ℓ} , donde $0 < \eta_{\ell} < 1$.

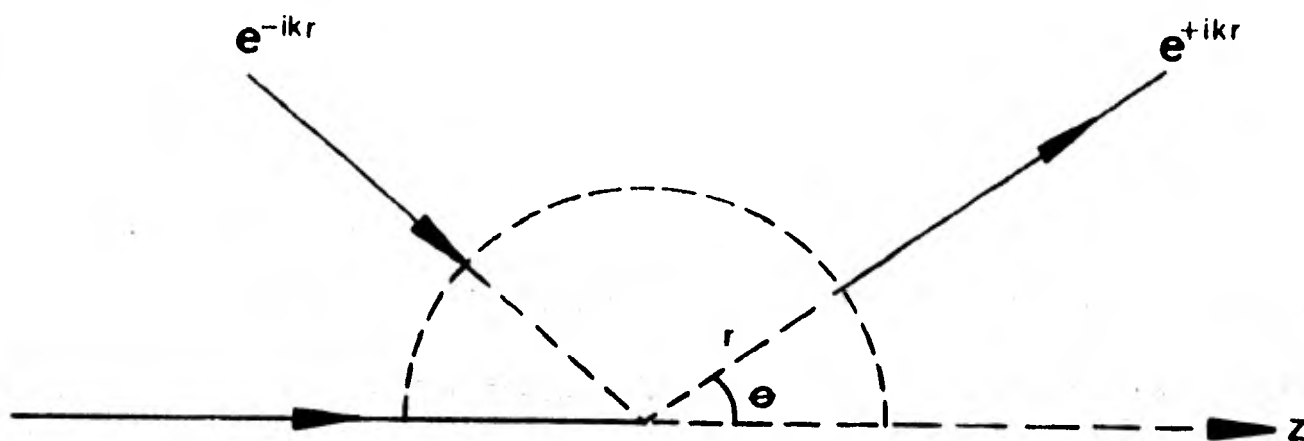


Fig. 27

La onda total tiene ahora, la forma asintótica

$$\psi_{\text{tot}} = \frac{i}{2kr} \sum_{\ell} (2\ell + 1) \left[(-1)^{\ell} e^{-ikr} - \eta_{\ell} e^{2i\delta_{\ell}} e^{ikr} \right] P_{\ell}(\cos \theta) \quad 3.32$$

Así, la onda dispersada o difundida, viene representada, por

$$\begin{aligned} \psi_{\text{disp}} &= \psi_{\text{tot}} - \psi_{\text{inc}} = \frac{e^{ikr}}{kr} \sum_{\ell} (2\ell + 1) \left(\frac{\eta_{\ell} e^{2i\delta_{\ell}} - 1}{2i} \right) P_{\ell}(\cos \theta) \quad 3.33 \\ &= \frac{e^{ikr}}{r} F(\theta) \end{aligned}$$

donde la amplitud de dispersión

$$F(\theta) = \frac{1}{k} \sum_{\ell} (2\ell + 1) \left(\frac{\eta_{\ell} e^{2i\delta_{\ell}} - 1}{2i} \right) P_{\ell}(\cos \theta) \quad 3.34$$

La amplitud de dispersión (3.34), como podemos observar, corresponde a una onda dispersada elásticamente, ya que el número de onda k viene a ser el mismo antes y después de la dispersión. Lo anterior puede ser cierto en el sistema de laboratorio sólo si el centro dispersor es infinitamente masivo. En general, la partícula blanco adquiere a la vez momento y energía; así las cantidades k y λ se refieren estrictamente a las propiedades de las ondas en el sistema centro de masas de las partículas incidente y blanco, de tal modo que no cambian en una colisión elástica.

El flujo dispersado dentro de un ángulo sólido $d\Omega$, a través de una esfera de radio r , es

$$v_0 \psi_{\text{disp}} \psi_{\text{disp}}^* r^2 d\Omega = v_0 |F(\theta)|^2 d\Omega \quad 3.35$$

donde v_0 es la velocidad de las partículas salientes (relativas al centro dispersor). Pero (3.35) es, por definición, el producto de la sección eficaz de dispersión y el flujo incidente, es decir, igual a $v_{\text{inc}} \psi_{\text{inc}} \psi_{\text{inc}}^* = v_{\text{inc}}$ como $v_{\text{inc}} = v_0$ para dispersión elástica,

$$v_0 d\sigma = v_0 |F(\theta)|^2 d\Omega \quad 3.36$$

$$\delta \left(\frac{d\sigma}{d} \right)_{\text{elástico}} = |F(\theta)|^2 \quad 3.37$$

Los polinomios de Legendre P_ℓ obedecen a la siguiente condición de ortogonalidad

$$\int P_\ell P_{\ell'} d\Omega = \frac{4\pi}{2\ell + 1} \delta_{\ell, \ell'} \quad 3.38$$

donde

$$\delta_{\ell, \ell'} = \begin{cases} 1 & \text{si } \ell = \ell' \\ 0 & \text{si } \ell \neq \ell' \end{cases} \quad 3.39$$

Luego, la sección eficaz de dispersión total, integrada sobre el ángulo, es de (3.34) y (3.37),

$$\sigma_{e1} = 4\pi\lambda^2 \sum_{\ell} (2\ell + 1) \left| \frac{\eta_{\ell} e^{2i\delta_{\ell}} - 1}{2i} \right|^2 \quad 3.40$$

Cuando $\eta = 1$, se tiene el caso de no absorción y por tan to

$$\sigma_{e1} = 4\pi\lambda^2 \sum_{\ell} (2\ell + 1) \text{sen}^2 \delta_{\ell} \quad 3.41$$

Obviamente, σ_{e1} es cero cuando $\delta_{\ell} = 0$, que corresponde al caso sin dispersión.

Si $\eta < 1$, la sección eficaz de reacción, σ_r , se obtiene de la conservación de la probabilidad:

$$\sigma_r = \int \left(|\psi_{inc}|^2 - |\psi_{sol}|^2 \right) r^2 d\Omega \quad 3.42$$

donde ψ_{inc} es el primer término de (3.31) y ψ_{sol} es el segundo término de (3.32). El resultado final es

$$\sigma_r = \pi \lambda^2 \sum_{\ell} (2\ell + 1) (1 - |\eta_{\ell}|^2) \quad 3.43$$

La sección eficaz total será entonces

$$\sigma_T = \sigma_r + \sigma_{el} = \pi \lambda^2 \sum_{\ell} (2\ell + 1) 2 (1 - \eta_{\ell} \cos 2\delta_{\ell}) \quad 3.44$$

Dado que $P_{\ell}(1) = 1$ para toda ℓ , (3.34) para la *dirección hacia adelante* $\cos \theta = 1$, $\theta = 0$:

$$\text{Im } F(0) = \frac{1}{2k} \sum_{\ell} (2\ell + 1) (1 - \eta_{\ell} \cos 2\delta_{\ell}) \quad 3.45$$

Comparando las dos últimas ecuaciones, encontramos el *teorema óptico*

$$\text{Im } F(0) = \frac{k}{4\pi} \sigma_T \quad 3.46$$

que nos relaciona la sección eficaz total con la parte imaginaria de la amplitud de dispersión hacia adelante.

Las secciones eficaces, σ_{el} , σ_r , y σ_T están expresadas en términos de los parámetros η y δ . Estos parámetros establecen cotas para dichas secciones eficaces impuestas por la conservación de la probabilidad (condición de unitaridad, ver capítulo 4). Por ejemplo:

$$\sigma_{el}^{m\acute{a}x} = 4\pi\lambda^2(2\ell + 1) \quad \text{para} \quad \delta_\ell = \frac{\pi}{2} \quad 3.47$$

$$\sigma_r^{m\acute{a}x} = \pi\lambda^2(2\ell + 1) \quad \text{para} \quad \eta_\ell = \ell \quad 3.48$$

La cantidad

$$f(\ell) = \frac{\eta_\ell e^{2i\delta_\ell} - 1}{2i} = \frac{i}{2} - \frac{i\eta_\ell}{2} e^{2i\delta_\ell} \quad 3.49$$

de (3.34) es la amplitud de dispersión elástica para la ℓ -ésima onda parcial. Es una cantidad compleja y en la Figura 28 f se encuentra graficada como un vector en el plano complejo.

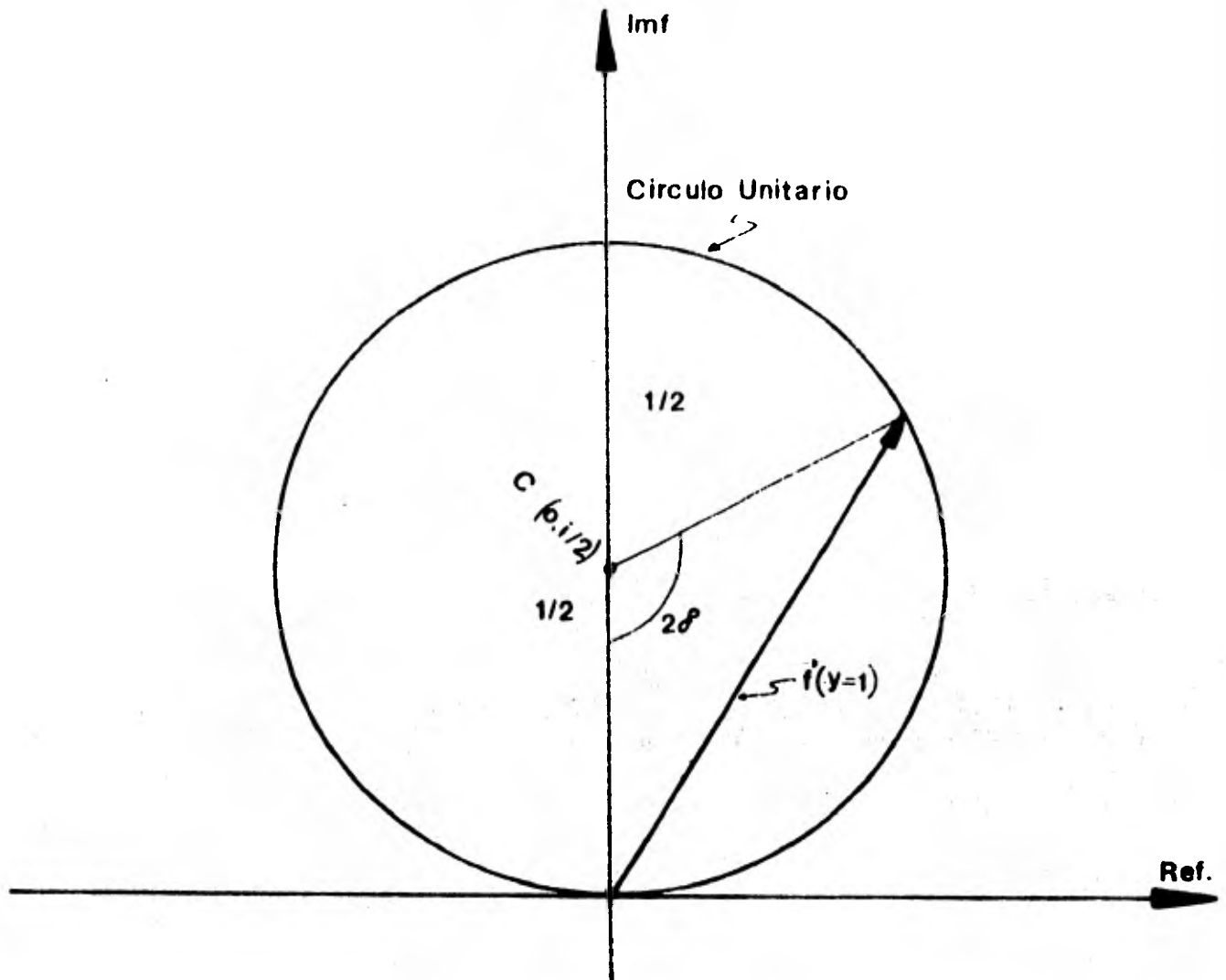


Fig. 28

El significado de este círculo unitario es que, dada la conservación de la probabilidad o condición de unitaridad, la intensidad de una onda parcial particular saliente no puede exceder a la de la onda entrante correspondiente.

3.4 FUERZAS, TIEMPO DE REACCION Y LEYES DE CONSERVACION

Actualmente, los conceptos de *fuerza* e *interacción* se usan de manera intercambiable. La *fuerza nuclear* o "fuente" es la más poderosa de las cuatro interacciones básicas y que junto con la cosmología dan cuenta a todos los fenómenos naturales.

La *interacción fuerte* está limitada a un *corto rango*: al rededor de 10^{-13} cm, que es aproximadamente el diámetro de una partícula que interactúa fuertemente.

La siguiente fuerza en orden de intensidad, es la *fuerza electromagnética*, que es aproximadamente el 1% de la *interacción fuerte*. Su intensidad decrece como el cuadrado de la distancia entre partículas interactuando y su rango en principio es ilimitado. Esta fuerza actúa sobre todas las partículas con carga eléctrica e incluye al fotón sin carga, que es el portador del campo de fuerzas electromagnético. La fuerza electromagnética liga a los electrones con los núcleos cargados positivamente para formar átomos, liga a los átomos para formar moléculas y así en diversas variedades es responsable de toda la química y biología.

La siguiente en orden, con sólo un ciento de trillones en uno (10^{-14}) de la *interacción fuerte*, es la *interacción débil*. Esta *interacción* es también, de *corto rango* y no puede, hasta donde uno quisiera, ligar cualquier cosa, sin embargo es capaz

de gobernar el decaimiento de muchas partículas que interactúan fuertemente y es además responsable del decaimiento de ciertos núcleos radioactivos. Su estudio es más fácil en el comportamiento de los cuatro leptones que no responden a la interacción fuerte.

La cuarta y más débil fuerza, es la gravedad, su intensidad de aproximadamente 10^{-39} veces la de la fuerte. Esta fuerza produce efectos a gran escala en virtud de que es atractiva y opera en rangos grandes. Sobre la escala del núcleo atómico sus efectos son indetectables.

Muchas partículas están "acopladas" con las cuatro interacciones conjuntamente, por ejemplo, el protón. El protón es una partícula que interactúa fuertemente y como está eléctricamente cargada, también "siente" la fuerza electromagnética. Esta partícula se puede crear por el decaimiento beta de un neutrón, un decaimiento en el que el neutrón emite un electrón negativo y un antineutrino por un proceso de interacción débil; de aquí que debe ser incluida en interacción débil. El protón, como el resto de la materia, es atraído por gravedad. La última partícula reactiva es el neutrino, que está directamente acoplada sólo a la interacción débil y gravitacional. El neutrino comparte, con los otros leptones, una indiferencia total a la interacción fuerte.

Una idea importante, nada evidente con lo anterior, es que las interacciones básicas pueden ir más allá de tan sólo ligar partículas. Por ejemplo, cuando dos partículas chocan y salen en diferentes direcciones, necesariamente se da una intracción. Si una partícula se está moviendo con suficiente energía antes de golpear a una partícula en reposo, se puede crear una nueva partícula en la colisión. La colisión de un protón y un neutrón puede conducir a un protón, un neutrón y un pión neutro o también puede conducir a dos neutrones y a un pión positivo. El choque entre dos partículas, que interactúan fuertemente, puede conducir también a productos más masivos. Este es, en efecto, el proceso por el que los grandes aceleradores de partículas, han creado nuevas partículas más pesadas que los protones y los neutrones. Así, las fuerzas básicas son interacciones que pueden dispersar, crear, aniquilar o transformar partículas.

Las interacciones de interés principal en física de altas energías toman lugar cuando una de las partículas en la interacción tiene una velocidad cercana a la de la luz. Como el tamaño de una partícula es típicamente del orden de 10^{-3} cm el tiempo mínimo de reacción es menor que 10^{-23} segundos, para partículas que se mueven a la velocidad de la luz. Cuando se habla de una interacción fuerte, el término "fuerte" se usa para significar a la par con el breve tiempo, la interacción fuerte es suficientemente poderosa como para que lleve a cabo una reacción.

Las reacciones electromagnéticas, 10^2 veces más débiles que las fuertes, se toman tiempos del orden de 10^2 veces más grandes, es decir, 10^{-21} segundos típicamente.

Los procesos que incluyen la interacción débil, que es 10^{-14} veces más débil que la interacción fuerte, comúnmente se toman 10^{-9} segundos, aproximadamente.

Pasando al último punto de esta sección, se da por un hecho que la naturaleza conserva muchas cantidades — además de la conservación de la energía y la cantidad de movimiento — y nos exhibe varias simetrías — como la que se da entre izquierda y derecha —. Existe una relación muy estrecha entre *simetrías y leyes de conservación* de tal manera que en un caso particular uno se puede referir o bien a una simetría o bien a la ley de conservación asociada, según lo que sea más conveniente.

Algunas leyes de conservación parecen ser universales: son obedecidas por las cuatro interacciones básicas. Este grupo inviolable lo constituyen: la conservación de la energía, de la cantidad de movimiento, de la cantidad de movimiento angular y de la carga eléctrica.

Las cantidades que se conservan en mecánica cuántica aparecen como un número cuántico. A continuación se tiene una tabla en la que se dan a conocer siete cantidades que son con-

TABLA III

CANTIDAD CONSERVADA	SIMBOLO	VALORES CONSERVADOS	DESCRIPCION	EJEMPLOS	
				Protón	Pión(-)
CARGA ELECTRICA	Q	0, 1, 2, 3,...	Representa el número de unidades de carga eléctrica que son portadas por una partícula, o núcleos atómicos, en unidades de la carga positiva sobre el protón. A los multiples de carga, tales como el doblete neutrón-protón o el triplete pion, se les puede asignar una carga promedio, \bar{Q} .	Q=+1 $\bar{Q}=+\frac{1}{2}$	Q=-1 $\bar{Q}=0$
NUMERO DE MASA ATOMICO 0 NUMERO BARIONICO	A	0, 1, 2, 3,...	Representa el familiar número de masa atómica frecuentemente usado para núcleos. Para uranio 235, A=235. Para bariones, A=+1; para antibariones, A=-1; para mesones, A=0.	A=+1	A=0
HIPERCARGA (Relacionado a la carga promedio \bar{Q} , y a la extrañeza, S).	Y	-2,-1,0,+1	Definida como dos veces la carga promedio, \bar{Q} , de un multiplete. La extrañeza, S, es la hipercarga menos el número de masa atómica ($S = Y-A$).	Y=+1 S=0	Y=0 S=0
SPIN ISOTOPICO	I	0, $\frac{1}{2}$, 1, $\frac{3}{2}$	Grupos de estados nucleares en multipletes cuyo número difiere sólo en carga eléctrica. El número de estados cargados, o multiplicidad, M, está relacionado a I por la ecuación $M=2I+1$.	I = $\frac{1}{2}$ M = 2	I=1 M=3

TABLA III (CONTINUACION)

CANTIDAD CONSERVADA	SIMBOLO	VALORES CONSERVADOS	DESCRIPCION	EJEMPLOS	
				Protón	Pion(-)
SPIN DE LA CANTIDAD DE MOV. ANGULAR	J	$\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots$	Indica que tan rápido gira una partícula respecto a su eje, expresada en unidades de la constante de Planck, h.	$J = \frac{1}{2}$	J=0
PARIDAD	P	-1, +1	Una propiedad intrínseca relacionada a la simetría izquierda - derecha.	P = +1	P=-1
G	G	-1, +1	Una paridad intrínseca encontrada sólo en mesones con hipercarga cero	No definida	G=-1

servadas por la interacción fuerte pero no necesariamente por las interacciones electromagnética y débil.

3.5 RESONANCIAS EN FISICA DE ALTAS ENERGIAS

Hagamos ahora la conexión entre la discusión de la sección 3.3 y la dispersión de dos partículas elementales — una correspondiente a la onda incidente y la otra a el centro dispersor —. Para simplificar las cosas las dos partículas carecen de *spin*.

Si la amplitud de dispersión elástica $f(\ell)$ pasa a través de un máximo para un valor particular de ℓ y para una longitud de onda λ particular del sistema centro de masa, se dice luego que las dos partículas *resuenan* o son *resonantes*. El estado resonante, por tanto, está caracterizado por un momento angular único o *spin* $J = \ell$, una paridad o *isospin* únicos y una masa correspondiente a la energía total del sistema centro de masa de las dos partículas.

Un *criterio de resonancia*, visto en el capítulo 2, es que el corrimiento de fase δ_ℓ de la ℓ -ésima onda parcial pasa a través de $\pi/2$.

La sección eficaz, también, se puede describir en términos de la anchura Γ o el tiempo de vida τ del estado resonante, como sigue:

Suprimiendo el subíndice ρ en (3.49) y haciendo $\eta = 1$ podemos escribir a f como

$$f = \frac{e^{i\delta} (e^{i\delta} - e^{-i\delta})}{2i} = e^{i\delta} \operatorname{sen} \delta = \frac{1}{\cos \delta - i} \quad 3.50$$

Cerca de la resonancia $\delta \simeq \pi/2$, así que $\cot \delta \simeq 0$.

Si E es la energía total del estado de las dos partículas en el SCM y E_R es el valor de E en resonancia ($\delta = \pi/2$), entonces, haciendo una expresión en serie de Taylor

$$\begin{aligned} \cot \delta(E) &= \cot \delta(E_R) + (E - E_R) \left[\frac{d}{dE} \cot \delta(E) \right]_{E=E_R} + \dots \\ &\simeq - (E - E_R) \frac{2}{\Gamma} \end{aligned} \quad 3.51$$

donde $\cot \delta(E_R) = 0$ y por tanto $\frac{2}{\Gamma} = - \left[\frac{d}{dE} \cot \delta(E) \right]_{E=E_R}$. Despreciando términos más distantes en la serie, está justificado tener en cuenta que $|E - E_R| \simeq \Gamma \ll E_R$. Luego de la ecuación (3.50)

$$f(E) = \frac{1}{\cot \delta - i} = \frac{\frac{1}{2} \Gamma}{\left[(E_R - E) - i \frac{1}{2} \Gamma \right]} \quad 3.52$$

De (3.40) y (3.43), obtenemos para la sección eficaz de dispersión elástica

$$\sigma_{el}(E) = 4\pi\lambda^2(2\ell + 1) \frac{\frac{1}{4}\Gamma^2}{(E - E_R)^2 + \frac{1}{4}\Gamma^2}$$

Esta expresión es la ya bien conocida fórmula de Breit-Wigner.

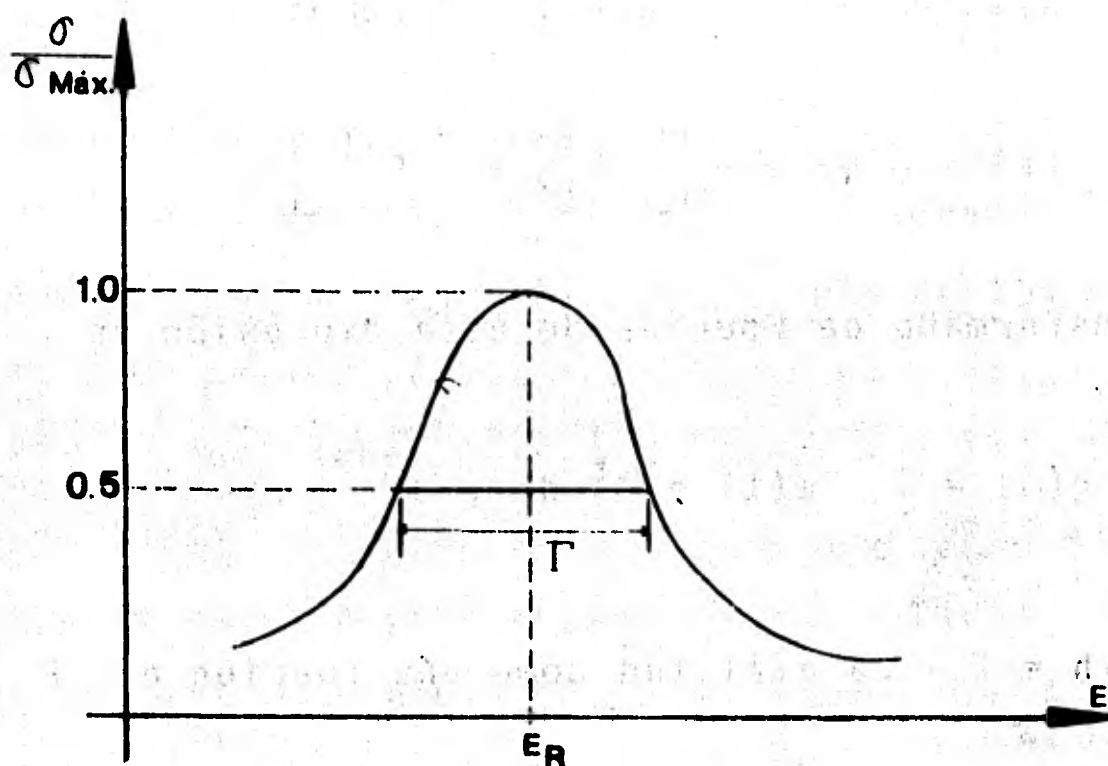


Fig. 29

La gráfica anterior muestra la curva de resonancia de $\sigma(E)$. La anchura Γ está definida de tal manera que la sección eficaz elástica σ_{el} decae por un factor de 2 del valor pico, donde $|E - E_R| = \pm \Gamma/2$.

La anchura Γ y el tiempo de vida τ del estado resonante están relacionados por $\tau = h/\Gamma$. La energía dependiente de la amplitud (3.53) es simplemente la transformada de Fourier de un pulso exponencial en el tiempo, correspondiendo al decaimiento radioactivo de la resonancia. Esto se puede ver como sigue:

Si denotamos la función de onda del estado resonante por ψ , luego, considerando $h = C = 1$, tenemos

$$\psi(t) = \psi(0) \exp \left[-t \left(\frac{\Gamma}{2} + i E_R \right) \right] \quad 3.54$$

La transformada de Fourier de esta expresión es

$$g(\omega) = \int_0^{+\infty} \psi(t) e^{i\omega t} dt, \quad 3.55$$

con $\omega = E/h = E$. La amplitud como una función de E está dada por

$$\begin{aligned} \chi(E) &= \int \psi(t) e^{iEt} dt = \psi(0) \int e^{-t \left[(\Gamma/2) + i E_R - i E \right]} \\ &= \frac{K}{\left[(E_R - E) - i \frac{\Gamma}{2} \right]} \end{aligned} \quad 3.56$$

donde K es alguna constante.

El paso final consiste en hacer la conexión entre la pro babilidad, integrada en el tiempo, con que el estado resonante decaerá con la energía total E y la sección eficaz $\sigma_{el}(E)$. Si la resonancia es puramente elástica, es claro que de la conservación de la probabilidad la sección eficaz — que mide la probabilidad de formación del estado resonante — debe ser proporcional a la probabilidad de decaimiento. Así, debemos escribir

$$\sigma(\ell, E) \propto \chi^* \chi \quad 3.57$$

donde $\chi = \chi_\ell(E)$ y ℓ es el valor del momento angular or bital involucrado en la formación del estado resonante en cuestión. Ambas cantidades tienen un máximo cuando $E = E_R$ y $\delta_\ell = \pi/2$, finalmente

$$(\sigma_{el})_{\max} = 4\pi\lambda^2(2\ell + 1) \quad \text{y} \quad (\chi^* \chi)_{\max} = \frac{4K^2}{\Gamma^2} \quad 4.58$$

Así, en términos de Γ , que nos mide la anchura de un proce so de decaimiento en lugar de δ , que nos mide el corrimiento de fase de un proceso de dispersión, tenemos

$$\sigma_{el} = 4\pi\lambda^2(2\ell + 1) \frac{\frac{1}{4} \Gamma^2}{\left[(E - E_R)^2 + \frac{1}{4} \Gamma^2 \right]} \quad 4.59$$

como en (3.53).

Para una partícula de spin despreciable que incide sobre un blanco de spin despreciable, $\ell = J$, el momento angular del estado resonante. Por lo tanto $(2\ell + 1) \rightarrow (2J + 1)$. Para partículas de spin 0 (por ejemplo, piones, kaones) que inciden sobre nucleones (spin 1/2), el factor $(2J + 1)$ prevalece, excepto que ahora sólo la mitad del spin del estado del blanco puede contribuir. El punto es que tanto el spin como la paridad (J^P) de la resonancia se fijen, de tal modo que sólo un valor de ℓ puede contribuir y luego sólo si la partícula blanco tiene la orientación derecha del spin. Por ejemplo, la resonancia $N^*(1238)\pi - p$ tiene $J^P = \frac{3}{2}^+$ y resulta de una onda $p(\ell = 1)$ en la interacción pión-nucleón. Así la combinación $J = \ell + \frac{1}{2}$ forma este estado, no $J = \ell - \frac{1}{2}$ que tiene $J^P = \frac{1}{2}^+$ (para $\ell = 1$). Una interacción de ondas $d(\ell = 2)$ con $J = \ell - \frac{1}{2}$ dará el spin de la resonancia derecha pero equivocada la paridad $(J^P = \frac{3}{2}^-)$. Así, para una resonancia de momento angular J formada a partir de un nucleón blanco y una partícula incidente de spin despreciable, (3.57) viene a ser

$$\sigma_{el}(E) = \frac{\pi\lambda^2}{2} \frac{(2J + 1) \Gamma^2}{\left[(E - E_R)^2 + \Gamma^2/4 \right]} \quad 3.60$$

En ambas ecuaciones (3.53) y (3.60) se supone que la resonan

cia puede decaer únicamente elásticamente, es decir,
 $\pi + n \rightarrow N^* \rightarrow \pi + n$, pero $N^* \rightarrow 2\pi + n$. En general,

$$\Gamma = \Gamma_{el} + \Gamma_r, \quad 3.61$$

donde Γ_{el} y Γ_r son las anchuras parciales para decaimiento en el canal elástico y canal inelástico. Luego para $\sigma_{el}(E)$, el numerador Γ^2 en (3.60) deberá ser reemplazado por Γ_{el}^2 . La sección eficaz inelástica $\sigma_r(E)$ es la misma que (7.60), con el numerador Γ^2 reemplazado por $\Gamma_{el}\Gamma_r$.

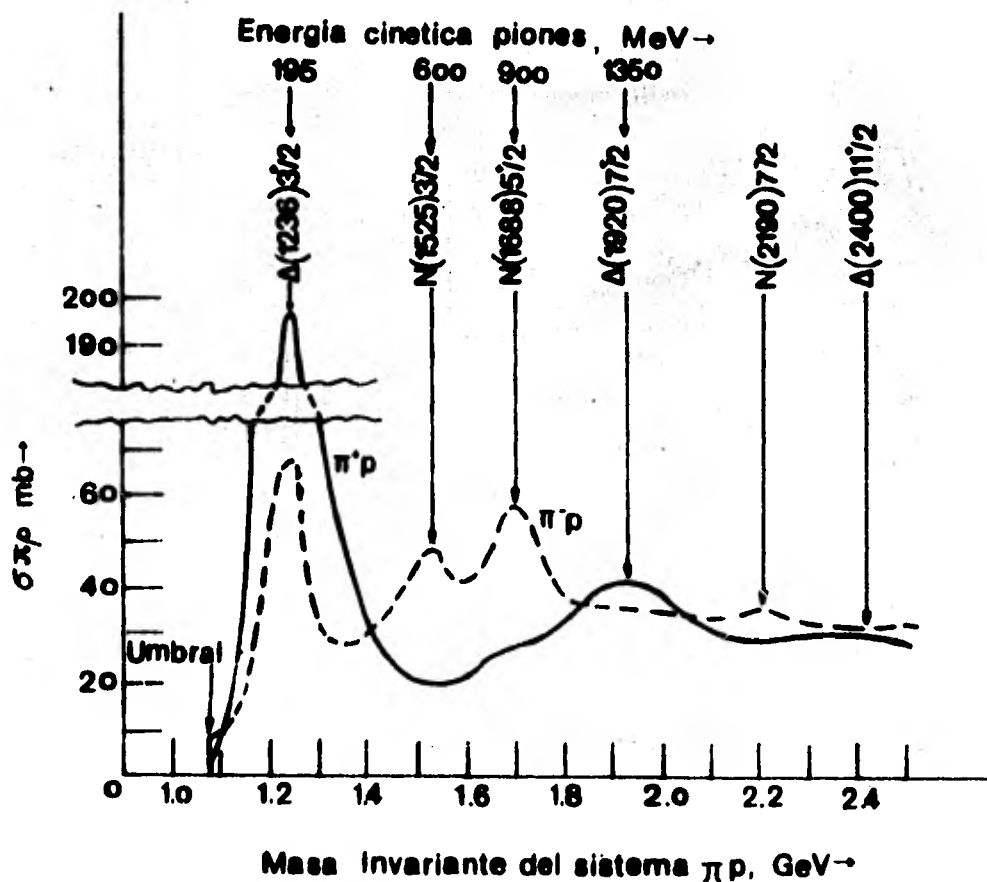


Fig. 30

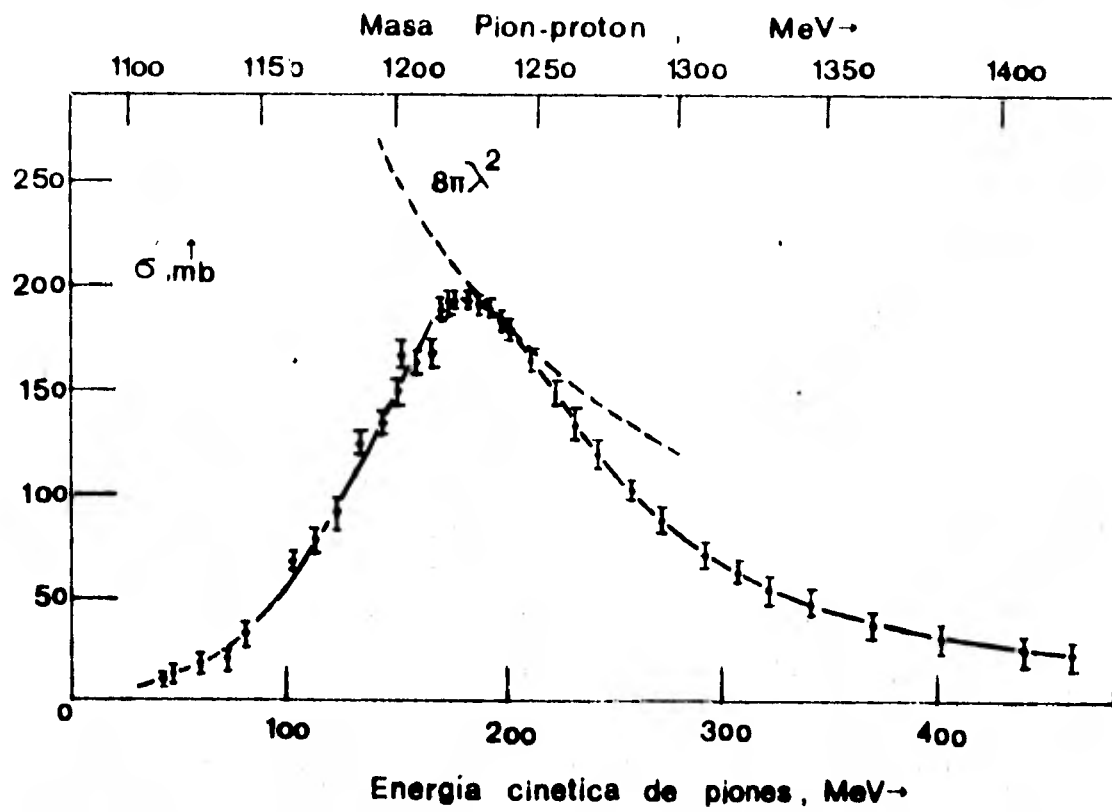


Fig. 31

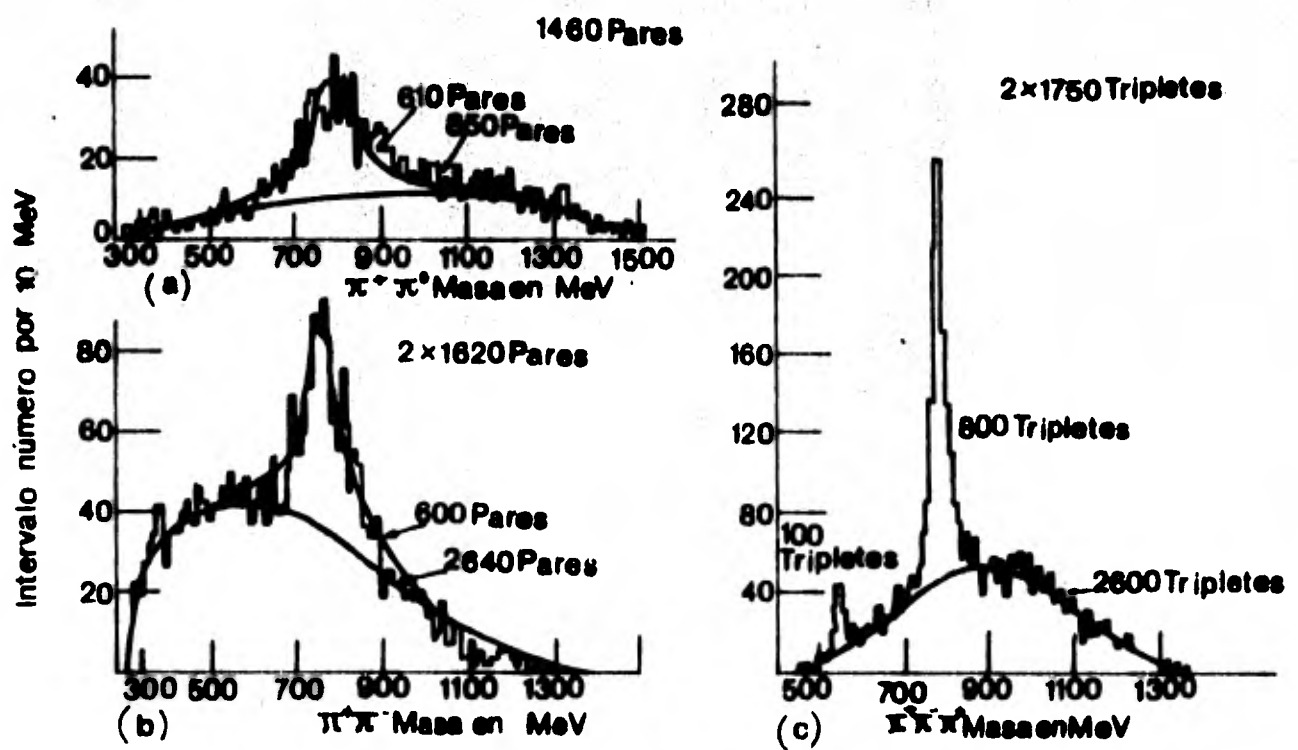
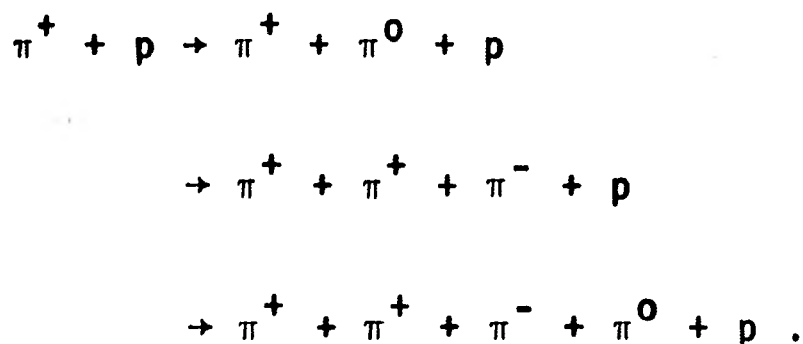


Fig. 32

La Figura 30 nos ofrece la variación de la sección eficaz total para mesones π^+ y π^- sobre protones, con energías de piones incidentes. El símbolo " Δ " nos da la resonancia con $I = \frac{3}{2}$; "N" se refiere a $I = \frac{1}{2}$. Se dan a conocer también los números spin-paridad.

La Figura 31 nos da la sección eficaz total π^+p como una función de la energía cinética del pion incidente o la masa π^+p en la región de la resonancia de los 1236 MeV, $I = \frac{3}{2}$, $J^P = \frac{3}{2}^+$. Se muestra también la sección eficaz máxima, $8\pi\lambda^2$, obtenida a partir de la conservación de la probabilidad y que se indica en la forma punteada.

La Figura 32 da los resultados de un estudio de una cámara de burbujas de hidrógeno de las siguientes reacciones, usando piones incidentes de momento 1.6 a 1.9 GeV/c:

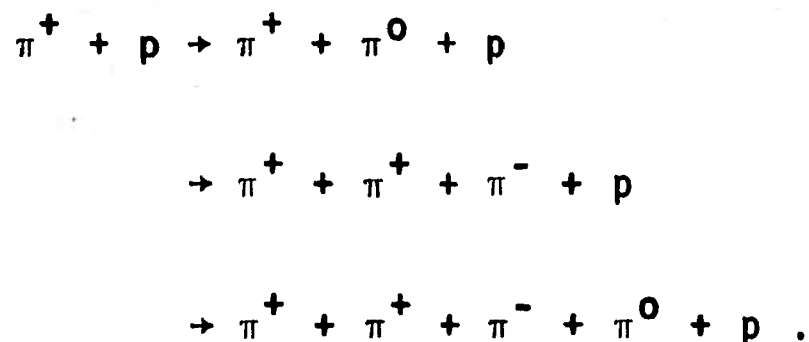


La curva lisa indica la distribución expresada en el espacio fase.

La Figura 30 nos ofrece la variación de la sección eficaz total para mesones π^+ y π^- sobre protones, con energías de piones incidentes. El símbolo " Δ " nos da la resonancia con $I = \frac{3}{2}$; "N" se refiere a $I = \frac{1}{2}$. Se dan a conocer también los números spin-paridad.

La Figura 31 nos da la sección eficaz total π^+p como una función de la energía cinética del pion incidente o la masa π^+p en la región de la resonancia de los 1236 MeV, $I = \frac{3}{2}$, $J^P = \frac{3}{2}^+$. Se muestra también la sección eficaz máxima, $8\pi\lambda^2$, obtenida a partir de la conservación de la probabilidad y que se indica en la forma punteada.

La Figura 32 da los resultados de un estudio de una cámara de burbujas de hidrógeno de las siguientes reacciones, usando piones incidentes de momento 1.6 a 1.9 GeV/c:



La curva lisa indica la distribución expresada en el espacio fase.

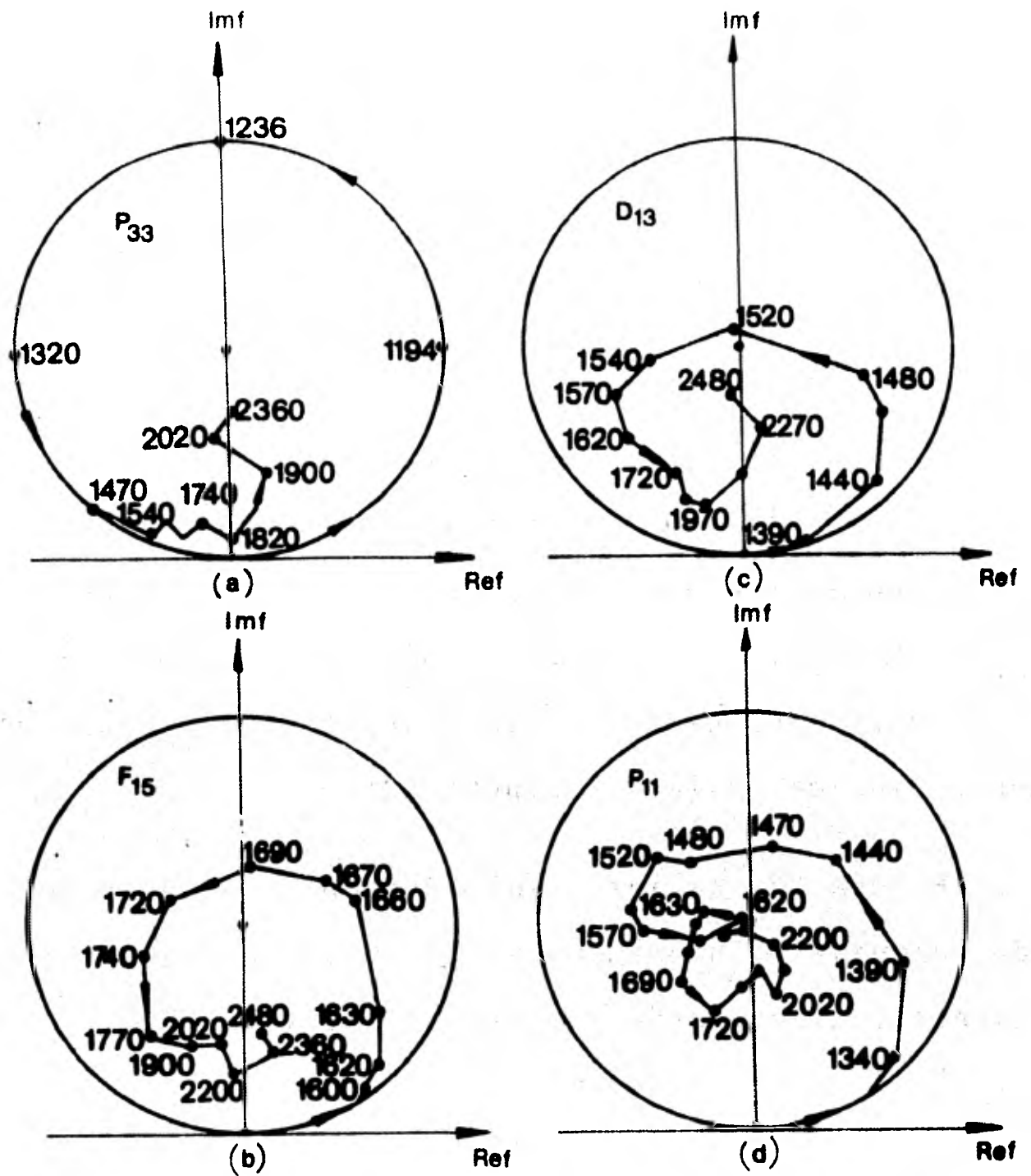


Fig. 33

La Figura 33 nos ofrece ejemplos del comportamiento de las amplitudes de ondas parciales en la dispersión pión-núcleo respecto al análisis del corrimiento de fase en Saclay (Parfitt *et al.* (1970). Los números se refieren a la energía del sistema centro de masa en MeV. (a) La amplitud de la

onda-p de $I = \frac{3}{2}$, $J^P = \frac{3}{2}^+$, designada aquí por P_{33} . El hecho dominante es que como la energía crece, la punta del vector f de la Figura 28 se mueve a lo largo del círculo unitario. El corrimiento de fase para 90° en 1236 MeV, correspondiente a la masa central de la resonancia. Con referencia a la ecuación (3.52) se muestra que la anchura Γ (~ 120 MeV) está dada por la diferencia en energía de los extremos opuestos del diámetro paralelo al eje real. Por encima de 1500 MeV, $\eta < 1$, corresponde al proceso inelástico $N^* \rightarrow N + 2\pi$ así como también $N + \pi$. (b) y (c) Las amplitudes de F_{15} y D_{13} , donde la primera indica una resonancia con $J^P = \frac{5}{2}^+$, $I = \frac{1}{2}$, de masa central 1690 MeV, y la última una de $J^P = \frac{3}{2}^-$, $I = \frac{1}{2}$, y de masa de 1520 MeV. (d) La amplitud P_{11} ($I = \frac{1}{2}$, $J^P = \frac{1}{2}^+$) muestra una resonancia con esos números cuánticos de masa central 1470 MeV. Nótese que esto no es aparentemente una joroba en la sección eficaz en la Figura 30 y sólo al análisis de corrimiento de fase es posible revelar su existencia.

3.6 RESONANCIAS EN FISICA NUCLEAR

En esta parte del trabajo estudiaremos el concepto de *resonancia en una reacción nuclear* y el de *resonancia magnética nuclear*, en donde se pueden exhibir claramente ecuaciones diferenciales ordinarias del tipo de ecuaciones que se dan para el oscilador mecánico-clásico.

3.6.1 RESONANCIA EN UNA REACCION NUCLEAR

El fenómeno de resonancia que vamos a estudiar es muy sensible a la energía. Esto se puede atribuir a la existencia de un estado nuclear compuesto C , que se relaciona con los estados inicial y final por los elementos de matriz H_{ac} y H_{bc} que en forma esquemática expresamos como sigue:

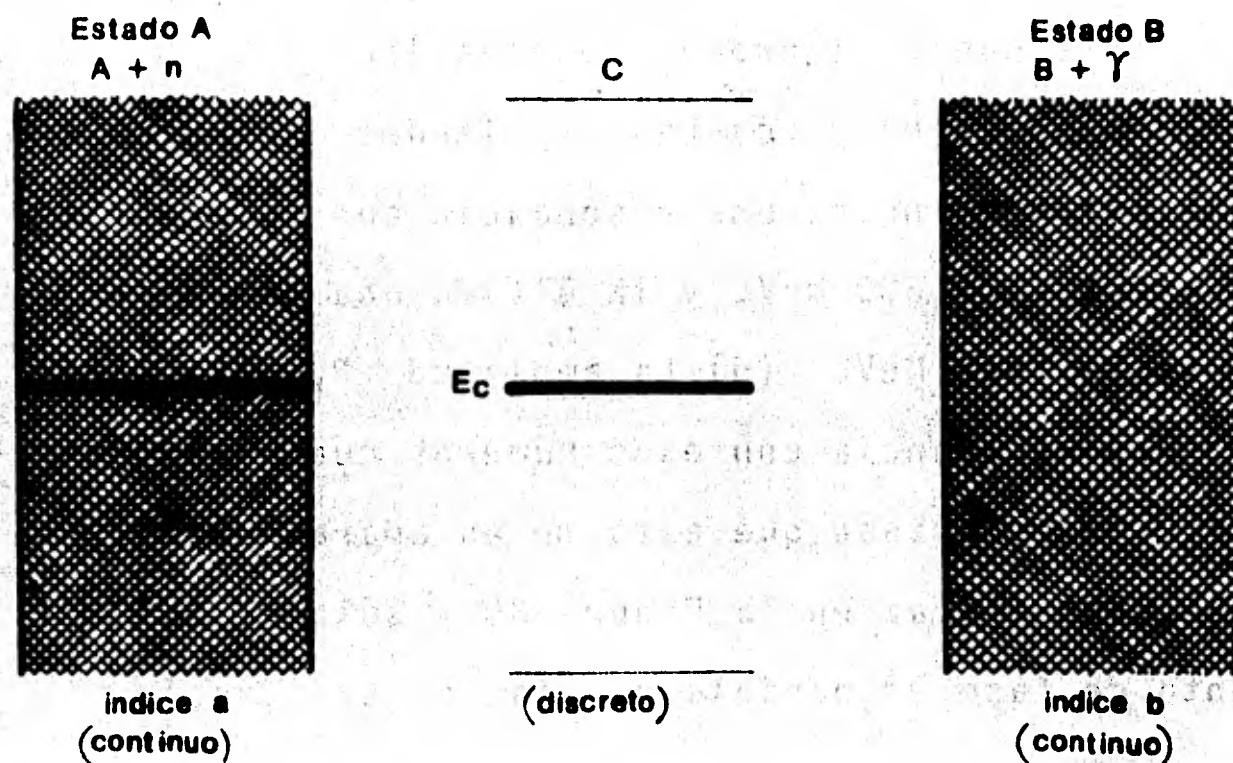


Fig. 34

La reacción que estamos utilizando es (n, γ) , es decir, la captura radioactiva de neutrones, que es una reacción importante.

Despreciamos aquí los elementos de matriz $H_{aa'}$, $H_{bb'}$ y H_{ab} , que relacionan el estado inicial con él mismo, el estado final con él mismo y el estado inicial con estado final sin el estado intermedio C, es decir, sin ninguna transición directa de A a B.

Para resolver el problema de calcular las probabilidades de transición usaremos la teoría de perturbaciones dependiente del tiempo. Así, si U_i son las eigenfunciones independientes del tiempo de los estados no perturbados con energías E_i , la eigenfunción para el estado perturbado es

$$\psi = \sum a_i U_i e^{-\frac{i}{\hbar} E_i t} \quad 3.62$$

donde a_i representan las amplitudes de los estados no perturbados en esta expansión. Para que el método sea útil se requiere que la eigenfunción no difiera grandemente de alguna de las eigenfunciones no perturbada.

Si no hay perturbación, entonces, $\dot{a}_n = 0$ para toda n . Cuando la perturbación existe, H , las a 's cambian de acuerdo con la ecuación

$$\dot{a}_n = \frac{i}{\hbar} \sum_m H_{nm} a_m e^{\frac{i}{\hbar} (E_n - E_m)t} \quad 3.63$$

$$H_{nm} = \int U_n^* H U_m d\tau \quad 3.64$$

Si el sistema está en un estado U_k , justo antes de que se aplique la perturbación, es decir, $a_i = \delta_{ik}$, entonces algún tiempo después, existe alguna probabilidad de determinar el sistema en otros estados diferentes al k -ésimo.

Para los estados que difieren grandemente en energía del estado k , la exponencial en la ecuación (3.63) oscila rápidamente y el cambio en a_n tiende en promedio a 0. Las ecuaciones diferenciales para las amplitudes son:

$$\dot{a}_a = -\frac{i}{\hbar} H_{ac} e^{\frac{i}{\hbar} (E_a - E_c)t} a_c \quad 3.64$$

$$\dot{a}_b = -\frac{i}{\hbar} H_{bc} e^{\frac{i}{\hbar} (E_b - E_c)t} a_c \quad 3.65$$

$$\dot{a}_c = -\frac{i}{\hbar} \left[H_{ca} e^{\frac{i}{\hbar} (E_c - E_a)t} a_a + \sum_b H_{cb} e^{\frac{i}{\hbar} (E_c - E_b)t} a_b \right] \quad 3.66$$

El estado inicial A , digamos a_{a0} , se elige experimen-

talmente. En $t = 0$, $a_{a_0} = 1$, $a_a = 0$ para $a \neq a_0$, $a_c = a_b = 0$.
 En $t = 0$, $\dot{a}_a = \dot{a}_b = 0$, para $\dot{a}_c \neq 0$

El camino riguroso para resolver este problema es a través de la solución del sistema de ecuaciones diferenciales. Sin embargo seguiremos un camino más práctico dado por Fermi:

La base del argumento es que alguna forma el estado intermedio, el núcleo compuesto, se puede construir sobre la idea de que $a_c = 1$, ya que dicho estado puede desintegrarse en cualquiera de los dos estados A o B. Las probabilidades de transición están dadas por la "regla de oro número 2".

Ignorando spin y denotando por τ el tiempo de vida del estado sujeto a un cierto modo de decaimiento, entonces:

$$\begin{aligned} \text{Prob. de transición a B} &= \frac{1}{\tau_\gamma} = \frac{2\pi}{h} |H_{bc}|^2 \frac{4\pi p_\gamma^2}{\gamma \pi^3 h^3 v_\gamma} \text{ seg}^{-1} \\ &= \frac{1}{\pi h^4} |H_{bc}|^2 \frac{h^2 \omega^2}{c^3} \end{aligned} \quad 3.67$$

donde hemos puesto $h\omega/c = p_\gamma$, $v = c$.

$$\text{Prob. de transición a A} = \frac{1}{\tau_n} = \frac{M^2}{\pi h^4} |H_{ac}|^2 v_n \quad 3.68$$

El decaimiento desde el estado C seguiría la ecuación

$$\text{Prob. de ocupación del estado C} = e^{-t\left(\frac{1}{\tau_n} + \frac{1}{\tau_\gamma}\right)} \quad 3.69$$

$$\text{Prob. de ocupación de un estado} = |\text{amplitud}|^2 \quad 3.70$$

Si ignoramos el factor de fase, entonces podemos escribir

$$\text{amplitud} = \sqrt{\text{probabilidad}} \quad 3.71$$

$$a_c = e^{-\frac{t}{2}\left(\frac{1}{\tau_n} + \frac{1}{\tau_\gamma}\right)} \quad 3.72$$

$$\dot{a}_c = -\left(\frac{1}{2\tau_n} + \frac{1}{2\tau_\gamma}\right) a_c \quad 3.73$$

Ahora a_c necesariamente no es igual a uno.

Definiendo

$$\frac{\Gamma_n}{\hbar} = \frac{1}{2\tau_n}, \quad \frac{\Gamma_\gamma}{\hbar} = \frac{1}{2\tau_\gamma} \quad 3.74$$

$\Gamma = \Gamma_n + \Gamma_\gamma = \left(\frac{\hbar}{2}\right)$ veces la probabilidad de destrucción del estado intermedio por unidad de tiempo.

Ahora la ecuación (3.73) se puede escribir como sigue:

$$\dot{a}_c = -\frac{\Gamma}{\hbar} a_c \quad 3.75$$

Como el estado C se alcanza a partir del estado A de acuerdo al término de aproximación de la teoría de perturbaciones expresado en la ecuación (3.66), particularmente

$$-\frac{i}{\hbar} H_{ca_0} \exp\left[\frac{i}{\hbar} (E_c - E_{a_0})t\right]$$

Por lo tanto

$$\dot{a}_c = -\frac{\Gamma}{\hbar} a_c - \frac{i}{\hbar} H_{ca_0} e^{\frac{i}{\hbar} (E_c - E_{a_0})t} \quad 3.76$$

La solución de esta ecuación diferencial que satisface las condiciones iniciales $a_c = 0$ en $t = 0$ es

$$a_c = \frac{-\frac{i}{\hbar} H_{ca_0} \left[e^{\frac{i}{\hbar} (E_c - E_{a_0})t} - e^{-\frac{\Gamma}{\hbar} t} \right]}{\frac{i}{\hbar} (E_c - E_{a_0}) + \frac{\Gamma}{\hbar}} \quad 3.77$$

Usando el principio de incertidumbre y nuestro conocimiento experimental de la anchura de energía, el tiempo de disper

sión para el estado compuesto C, \hbar/Γ , de un estado a otro viene a ser usualmente menor que 10^{-14} seg. Después de 10^{-13} seg. el término $\exp(-\Gamma t/\hbar)$ es cercano a cero. Por lo tanto

$$|a_c|^2 = \frac{|H_{ca_0}|^2}{(E_c - E_{a_0})^2 + \Gamma^2} \quad 3.78$$

Como el estado C se construye sobre el valor de $|a_c|^2$, entonces

$$\begin{aligned} \text{Núm. de reacciones a la derecha/seg} &= |a_c|^2 \frac{1}{\tau_\gamma} \\ & (A + n \rightarrow C \rightarrow B + \gamma) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Núm. de reacciones a la izquierda/seg} &= |a_c|^2 \frac{1}{\tau_n} \\ & (A + n \rightarrow C \rightarrow A + n') \end{aligned}$$

claramente, la ecuación (3.78) tiene la forma de una curva de resonancia

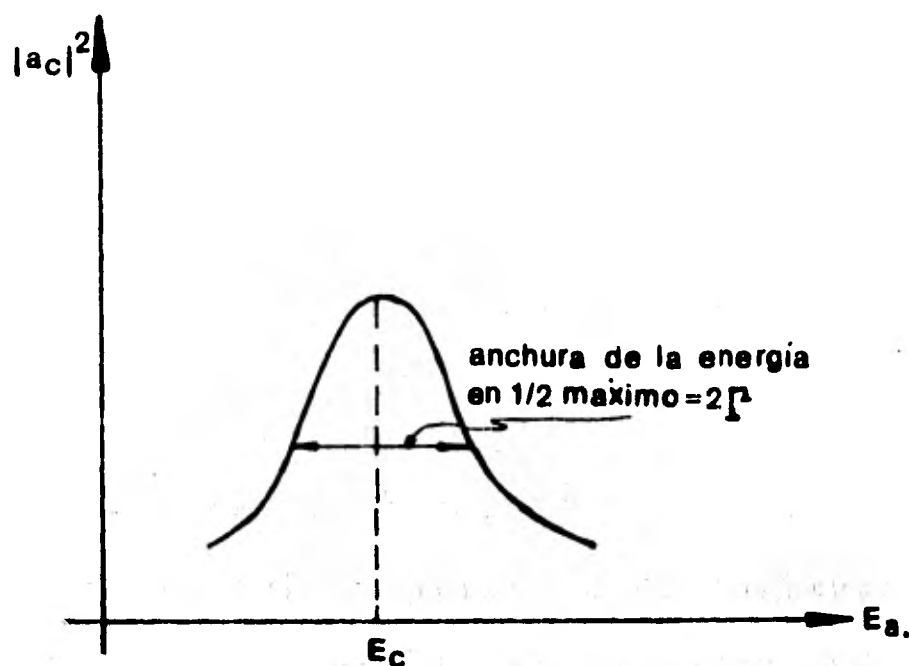


Fig. 35

3.6.2 RESONANCIA MAGNÉTICA NUCLEAR

Electrones no apareados en especies atómicas o moleculares dan lugar a nucleones no apareados (Z impar - A impar, Z par - A impar y Z impar - A par) y por tanto a momentos dipolares magnéticos. Esos momentos magnéticos están asociados con el momento angular de spin. La *Resonancia Magnética* conlleva las propiedades macroscópicas colectivas de esos sistemas e implica correspondencia de una frecuencia externa con una frecuencia natural del sistema.

Cuando un sistema tiene electrones no-apareados (o nucleones) está puesto en un campo magnético estático, un determina

do número de niveles de energía es diferenciado por rompimiento Zeeman de los estados cuánticos del momento magnético. Las transiciones del momento magnético entre esos niveles son inducidos por medio de una radiación aplicada a la frecuencia resonante. Tales transiciones son identificadas por una absorción o emisión de energía.

Se requiere de una descripción mecánico-cuántica de la *resonancia magnética* para explicar sistemas de spines acoplados nada fáciles para teoría clásica.

En este análisis se tratarán sólo spines nucleares de 1/2. Comenzaremos con la ecuación de Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = H \psi \quad 3.79$$

donde ψ es la función de onda y H es un operador que representa a la energía del sistema. Si H es independiente del sistema, luego

$$\psi(t) = U \exp \left(- \frac{iEt}{\hbar} \right) \quad 3.80$$

donde las funciones de onda U son independientes del tiempo, y $H_0 U = EU$ donde E es la energía del sistema y H_0 representa el hamiltoniano independiente del tiempo.

El hamiltoniano de un núcleo con $I = 1/2$ localizado en un campo magnético H es

$$H_0 = - \gamma \hbar \vec{I} \cdot \vec{H} \quad 3.81$$

y si $H_0 \parallel z$, luego $H_0 = - \gamma \hbar H_z I_z$. La energía E_m , en un campo magnético está dada por

$$E_m = - \gamma \hbar H_z m \quad 3.82$$

donde $m = \pm 1/2$. Los dos estados corresponden a spin paralelo a H_0 . La condición de Bohr de la frecuencia natural del sistema

$$\frac{E_{-1/2} - E_{+1/2}}{\hbar} = \gamma H = \omega_0 \quad 3.83$$

La aplicación de un campo oscilante requiere que la solución a la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo que puede ser tratada como la suma de un hamiltoniano independiente del tiempo H_0 y un hamiltoniano dependiente del tiempo H_1 . La solución independiente del tiempo es $H_0 U_n = E_n U_n$.

La función de onda $\psi(t)$ se puede expandir usando coeficientes dependientes del tiempo $a_n(t)$ en conjunción con la función de onda estacionaria, U_n ,

$$\psi(t) = \sum_n a_n(t) U_n \exp\left(-\frac{iE_n t}{\hbar}\right), \quad 3.84$$

luego la ecuación de Schrodinger dependiente del tiempo viene a ser:

$$i\hbar \sum_n \frac{\partial a_n}{\partial t} U_n \exp\left(-\frac{iE_n t}{\hbar}\right) = \sum_n a_n H_1 U_n \exp\left(-\frac{iE_n t}{\hbar}\right) \quad 3.85$$

multiplicando la ecuación anterior por U_m e integrando da

$$\frac{\partial a_m}{\partial t} = \frac{1}{i\hbar} \sum_n a_n H_{mn} \exp(i\omega_{mnt}) \quad 3.86$$

donde
$$\omega_{mn} = \frac{E_m - E_n}{\hbar}$$

y
$$H_{mn} = (U_m^* | H_1 | U_n) \quad 3.87$$

La parte dependiente del tiempo del hamiltoniano está dada por

$$\begin{aligned} H_1 &= -\gamma\hbar H_1 (I_x \cos\omega t + I_y \sin\omega t) \\ &= \frac{1}{2} \gamma\hbar H_1 [I_+ \exp i\omega t + I_- \exp(-i\omega t)] \end{aligned} \quad 3.88$$

donde I_{\pm} , los operadores de ascenso y descenso, son $I_x \pm iI_y$. Esta ecuación corresponde al campo magnético oscilando de magnitud H_1 y girando con la frecuencia ω en el plano xy .

Luego

$$\frac{\partial a_{1/2}}{\partial t} = \frac{1}{2} i\gamma H_1 a_{-1/2} \exp[i(\omega_0 - \omega)t] \quad 3.89$$

$$y \quad \frac{\partial a_{-1/2}}{\partial t} = \frac{1}{2} i\gamma H_1 a_{1/2} \exp[-i(\omega_0 - \omega)t] \quad 3.90$$

tomando la segunda derivada, la ecuación diferencial para $a_{-1/2}$ es:

$$\frac{\partial^2 a_{-1/2}}{\partial t^2} + i(\omega_0 - \omega) \frac{\partial a_{-1/2}}{\partial t} + \frac{1}{4} \gamma^2 H_1^2 a_{-1/2} = 0 \quad 3.91$$

La solución de esta ecuación es

$$a_{-1/2} = A \exp(iP_1 t) + B \exp(iP_2 t) \quad 3.92$$

donde P_1 y P_2 se determinan por medio de

$$-P^2 - (\omega_0 - \omega)P + \frac{1}{4} \gamma^2 H_1^2 = 0 \quad 3.93$$

dando

$$P_1 = -\frac{1}{2} (\omega_0 - \omega) + \frac{1}{2} [(\omega_0 - \omega)^2 + \gamma^2 H_1^2]^{1/2} \quad 3.94$$

$$y \quad P_2 = -\frac{1}{2} (\omega_0 - \omega) - \frac{1}{2} [(\omega_0 - \omega)^2 + \gamma^2 H_1^2]^{1/2} \quad 3.95$$

Para la condición $t = 0$ y $a_{-1/2} = 0$, $B = -A$; de aquí que

$$a_{-1/2} = A \exp \left[-\frac{i(\omega_0 - \omega)t}{2} \right] \operatorname{sen} \left(\gamma H_{ef} \frac{t}{2} \right) \quad 3.96$$

donde

$$\gamma H_{ef} = [(\omega_0 - \omega)^2 + \gamma^2 H_1^2]^{1/2} \quad 3.97$$

La condición normalización

$$|a_{1/2}|^2 + |a_{-1/2}|^2 = 1 \quad 3.98$$

determina a A ya que

$$|a_{1/2}|^2 = a_{1/2} a_{1/2}^* = \frac{|A|^2}{\gamma^2 H_1^2} \left[(\omega_0 - \omega)^2 + \gamma^2 H_1^2 - \gamma^2 H_1^2 \operatorname{sen}^2 \left(\gamma H_{ef} \frac{t}{2} \right) \right] \quad 3.99$$

luego
$$A = \frac{\gamma H_1^2}{\left[(\omega_0 - \omega)^2 + \gamma^2 H_1^2 \right]^{1/2}} \quad 3.100$$

y
$$a_{-1/2} = \frac{\gamma H_1^2 \exp\left[-i(\omega_0 - \omega) \frac{t}{2}\right] \text{sen}\left(\gamma H_{ef} \frac{t}{2}\right)}{\left[(\omega_0 - \omega)^2 + \gamma^2 H_1^2 \right]^{1/2}} \quad 3.101$$

Ahora la probabilidad total $P_{-1/2}$ de encontrar al núcleo en el nivel $-1/2$ es $|a_{-1/2}|^2 = a_{-1/2} a_{-1/2}^*$.

$$P_{-1/2} = \frac{\gamma^2 H_1^2 \text{sen}^2\left(\gamma H_{ef} \frac{t}{2}\right)}{(\omega_0 - \omega)^2 + \gamma^2 H_1^2} \quad 3.102$$

Esta ecuación es idéntica a la solución clásica.

3.7 RESONANCIAS EN FISICA ATOMICA Y MOLECULAR

El fenómeno que estudiaremos ahora es el *bombardeo de electrones sobre átomos y moléculas*.

Kuyatt, Simpson y Nielazarek (1965), estudiando la transmisión de electrones a través de gases raros y vapor de mercurio, encontraron muchas anomalías en la energía, cuando fue examinada la transmisión de dichos electreones como una

función de la energía. Para ser más específicos, ellos encontraron un total de 11 en el helio, 6 en el neón, 2 en argón, 2 en kriptón, 5 en xenón y 13 en mercurio. George J. Schulz (1963) fue quien observó la primera de tales anomalías en la dispersión elástica de los electrones provenientes del helio a 72° . La anomalía apareció como una disminución bien marcada en la dispersión de los electrones cercana a los 19.3 eV, con una anchura en la energía mucho más estrecha que la energía de resolución del aparato. En analogía directa con las resonancias observadas en la dispersión de neutrones por núcleos, tales anomalías nos sugieren que existe un estado compuesto cuya vida media es relativamente corta cuando este decae en los componentes originales. En el caso de dispersión de electrones provenientes del helio, el estado compuesto es un ión negativo de helio en un estado altamente excitado, 19.3 eV sobre el estado base del átomo de helio, debido a que el campo electrostático del átomo de helio en su estado base es demasiado débil para ligar a un tercer electrón; el ión negativo de helio no tiene estados estables.

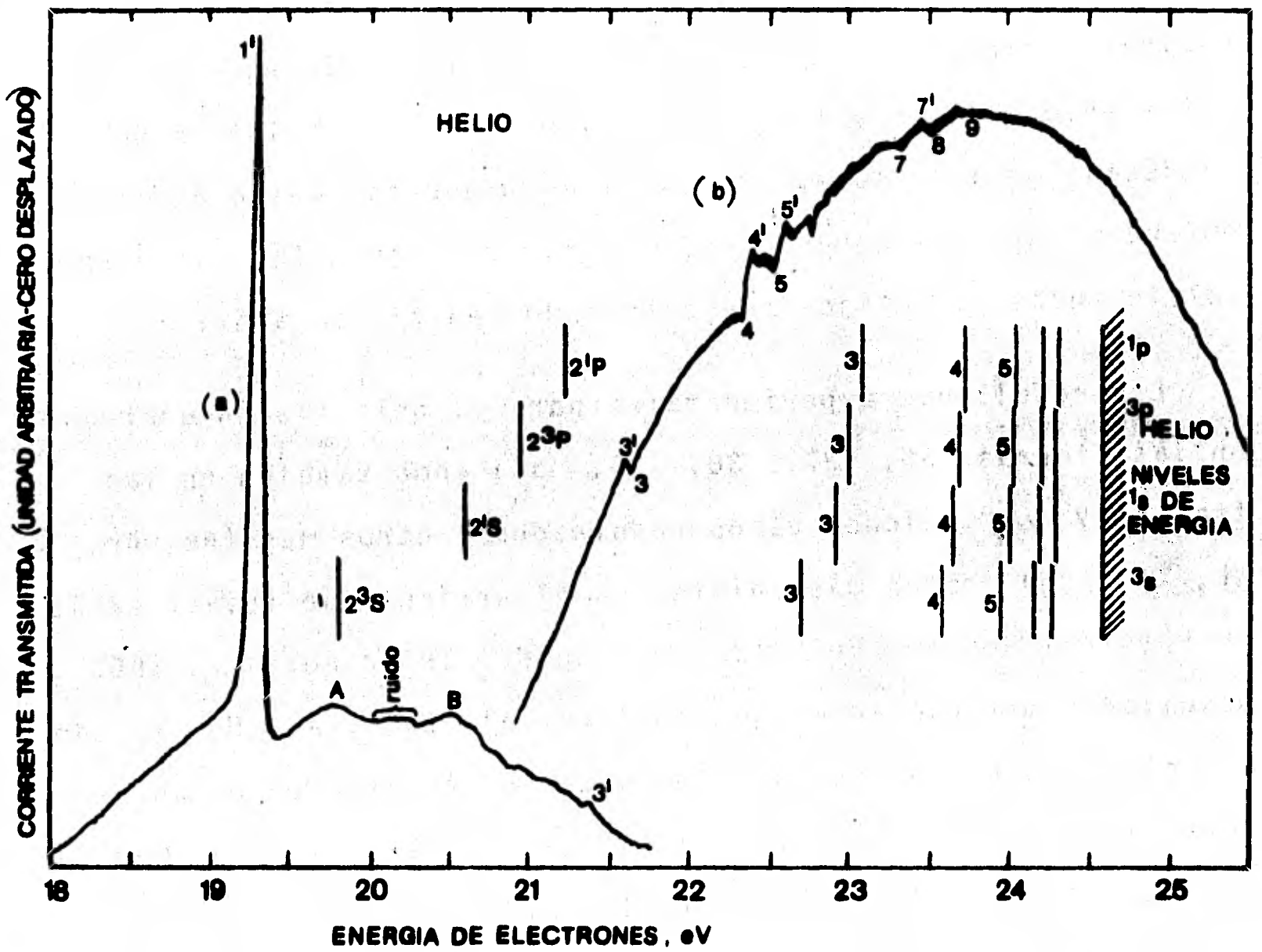
En el caso de las moléculas, la primera referencia a la posibilidad de que un estado compuesto pudiera existir se puede señalar a la publicación de un artículo de Franck y Grotrian (1921). La evidencia experimental para la estructura de la sección eficaz total (por ejemplo en N_2) vino a ser

disponible tan pronto como fue posible, pero un modelo de resonancias no fue aplicada a esas observaciones en ese tiempo. Aunque fue una necesidad de entender tal estructura en la sección eficaz y también en la gran sección eficaz vibracional observada experimentalmente (por ejemplo H_2) el modelo de resonancias permaneció confinado por largo tiempo a la física nuclear, solamente. La aplicación del modelo de resonancias a las moléculas — y también a los átomos — al inicio de la década de los 60's, condujo a un progreso rápido en el entendimiento del impacto de electrones sobre moléculas y resolvió muchos acertijos muy estancados en física atómica.

Los resultados experimentales para el helio se encuentran en las Figuras 36, 37, 38, 39, así como también en las tablas IV y V. Todos estos resultados y otros más (Ne, Ar, Kr, Xe y Hg) están disponibles en el artículo de Kuyatt *et al* en Physical Review, Vol. 138, No. 2A del 19 de abril de 1965. Resultados más recientes que incluyen al Li y al Na — además de los mencionados anteriormente — se ofrecen en un extensísimo artículo de George J. Schulz en el Reviews of Modern Physics, Vol. 45 No. 3 de julio de 1973.

La Figura 36 nos muestra la corriente transmitida como una función de la energía de los electrones para el helio. Las curvas (a) y (b) se obtuvieron con diferentes afoca-

mientos del voltaje en el aparato. La resonancia 3 se observa a distintas energías entre los dos extremos marcados, mientras que las otras no muestran ninguna variación más allá de 0.01 eV.



Fia. 36

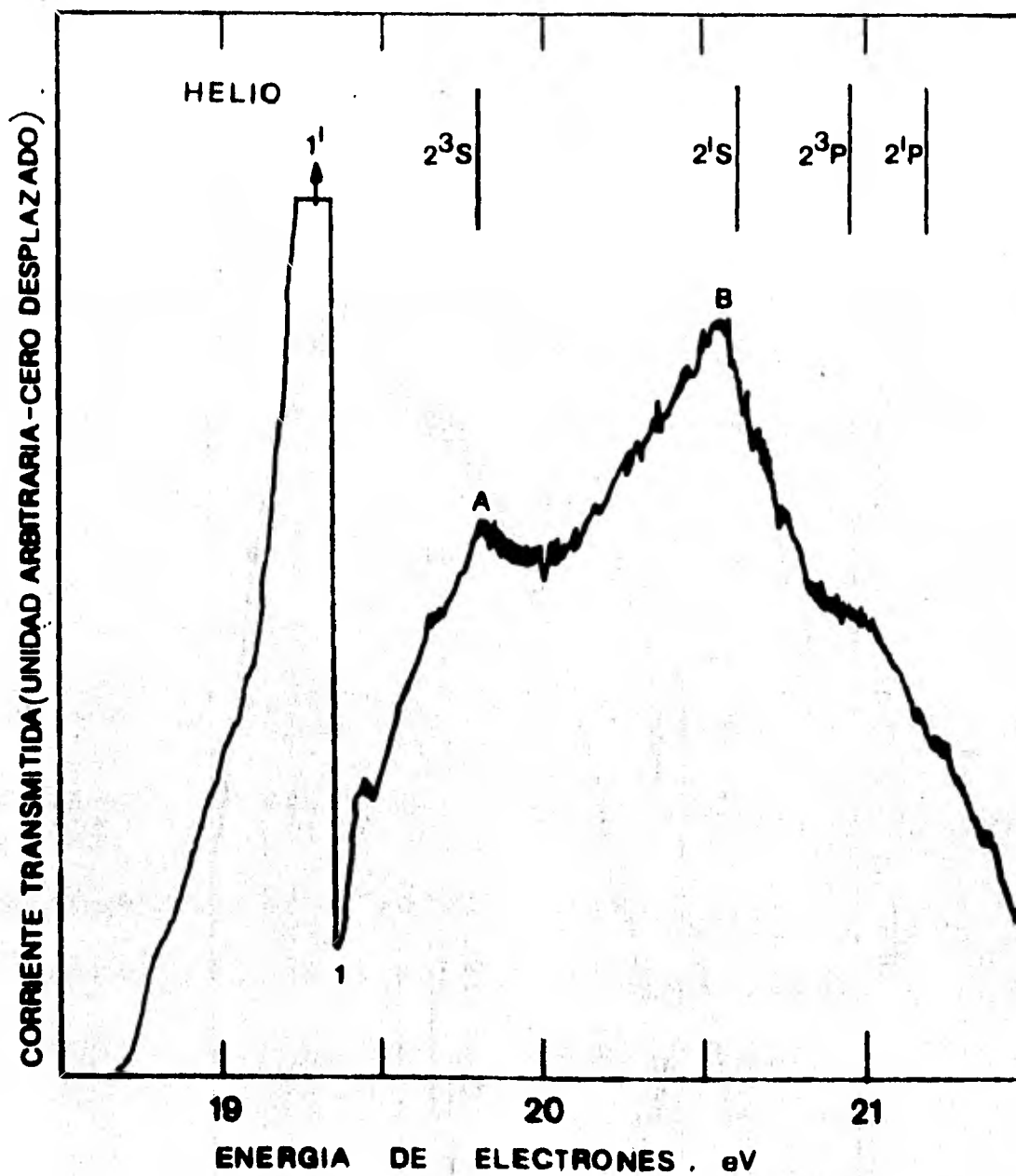


Fig. 37

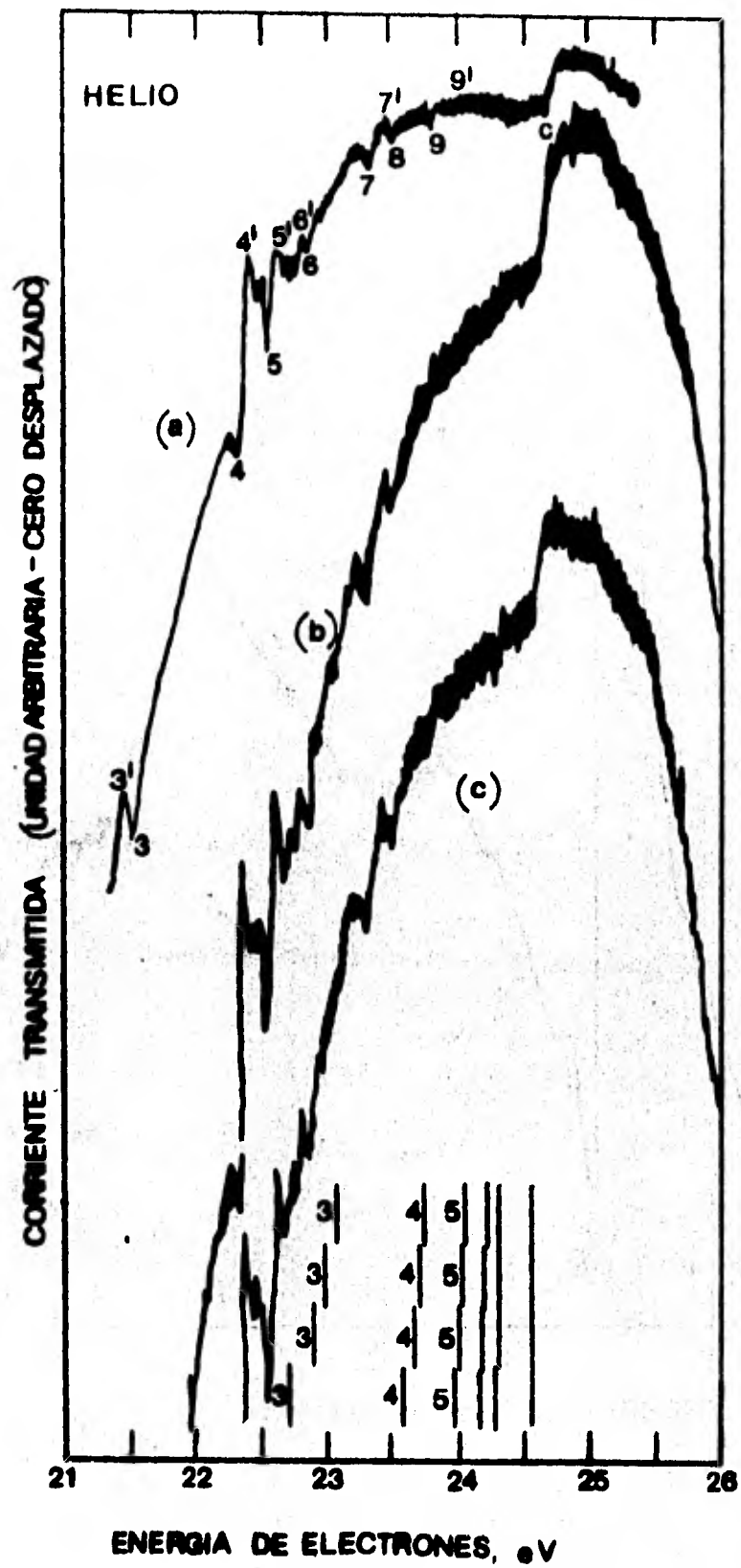


Fig. 38

La Figura 37, nos da la transmisión de los electrones por el helio a energías cercanas a los estados excitados más bajos de helio. Se muestran también los primeros cuatro niveles de energía del helio.

La Figura 38, da la transmisión de electrones por helio, mostrando varias resonancias. La escala vertical ha sido extendida debido al aumento en la ganancia del detector. Las curvas (a), (c) y (b) fueron registradas con ganancias sucesivamente más grandes.

La resonancia en 19.3 eV, marcada con 1' en la Figura curva (a), aparece con un notable incremento en la transmisión. El aumento en la sensibilidad y el nivel de señal a ruido de los aparatos permitió detectar varias resonancias más pequeñas, marcadas del 2 al 9 en las figuras 36, 37, 38, y un brinco en la transmisión por C. Las cimas en la transmisión están marcadas con números primados y corresponden a depresiones en la sección eficaz total de dispersión. Las depresiones en la transmisión están marcadas con números no primados y corresponden a cimas en la sección eficaz total de dispersión. La energía de resonancia se encuentra idealizada entre la cima y la depresión.

Las marcas A y B indicadas en la Figura 36, están asociadas con los umbrales para excitar los estados $(1s2s)^3S_1$

y $(1s2s)'s_0$ del helio en 19.818 y 20.6 eV, respectivamente. La Figura , muestra estos umbrales inelásticos con una amplificación más grande.

La resonancia 2 es pequeña y cercana a la gran resonancia 1 y se observa sólo sobre corridas con energías de resolución muy altas. La resonancia 3 se observa en todas las corridas pero su comportamiento es un tanto curioso: sus posiciones varían de 21.4 a 21.6 eV, dependiendo para ello de la forma en como se ajuste el aparato. Las resonancias 4 y 5 se observan también sobre todas las corridas, mientras que las resonancias 6 a 9 y el brinco C sólo se observan con energías de resolución muy altas y una mayor razón de señal de ruido.

Las curvas (b) y (c) de la Figura 38, fueron obtenidas con aproximadamente dos veces la ganancias de la curva (a). Estas tres corridas demuestran que esos pequeños rasgos distintos (resonancias) no son debidas a ruido.

La tabla IV nos ofrece la lista de las cimas, depresiones y otros rasgos sobresalientes, que fueron obtenidos de los promedios de varias corridas.

Simpson y Fono interpretan la gran resonancia 1 como causada por la interferencia entre la formación del estado $1s2s^2(^2S_{1/2})$ del He^- y el potencial usual de dispersión. Se puede pensar que los estados excitados $1s2s$ del helio tienen

una energía de amarre positiva para un tercer electrón en la capa no saturada $n = 2$. La resonancia ocurre en el canal de dispersión para ondas S.

TABLA IV

Estructura en la transmisión de electrones a través de helio

Marca	Tipo ^a			
1'	Cima	19.31	± 0.01	He ⁻ (1s2s ²) ² S _{1/2}
1	Depresión	19.37	± 0.01	
2'	Cima	19.43	± 0.01	He ⁻ (1s2s2p) ² P ^o
2	Depresión	19.47	± 0.01	
A	Pausa	19.818 ^c		He(1s2s) ³ S ₁
B	Pausa	20.59	± 0.01	He(1s2s) ¹ S ₀ (20.614 eV)
3'	Cima	20.50	± 0.1	
3	Depresión	20.55	± 0.1	
4	Depresión	22.34	± 0.02	
4'	Cima	22.39	± 0.02	
5	Depresión	22.54	± 0.02	
5'	Cima	22.60	± 0.02	
6'	Cima	22.81	± 0.02	
6	Depresión	22.85	± 0.02	
7	Depresión	23.30	± 0.02	
7'	Cima	23.44	± 0.02	
8	Depresión	23.49	± 0.02	
9	Depresión	23.75	± 0.05	
9'	Cima	23.82	± 0.05	
C	Alto	24.64	± 0.1	Arranque de He ⁺ (24.585 eV)

a Tipo sobresaliente en la transmisión

b Error cotizado referido a la precisión de localización relativa al ser asumido el umbral 2³S₁.

c Punto de calibración.

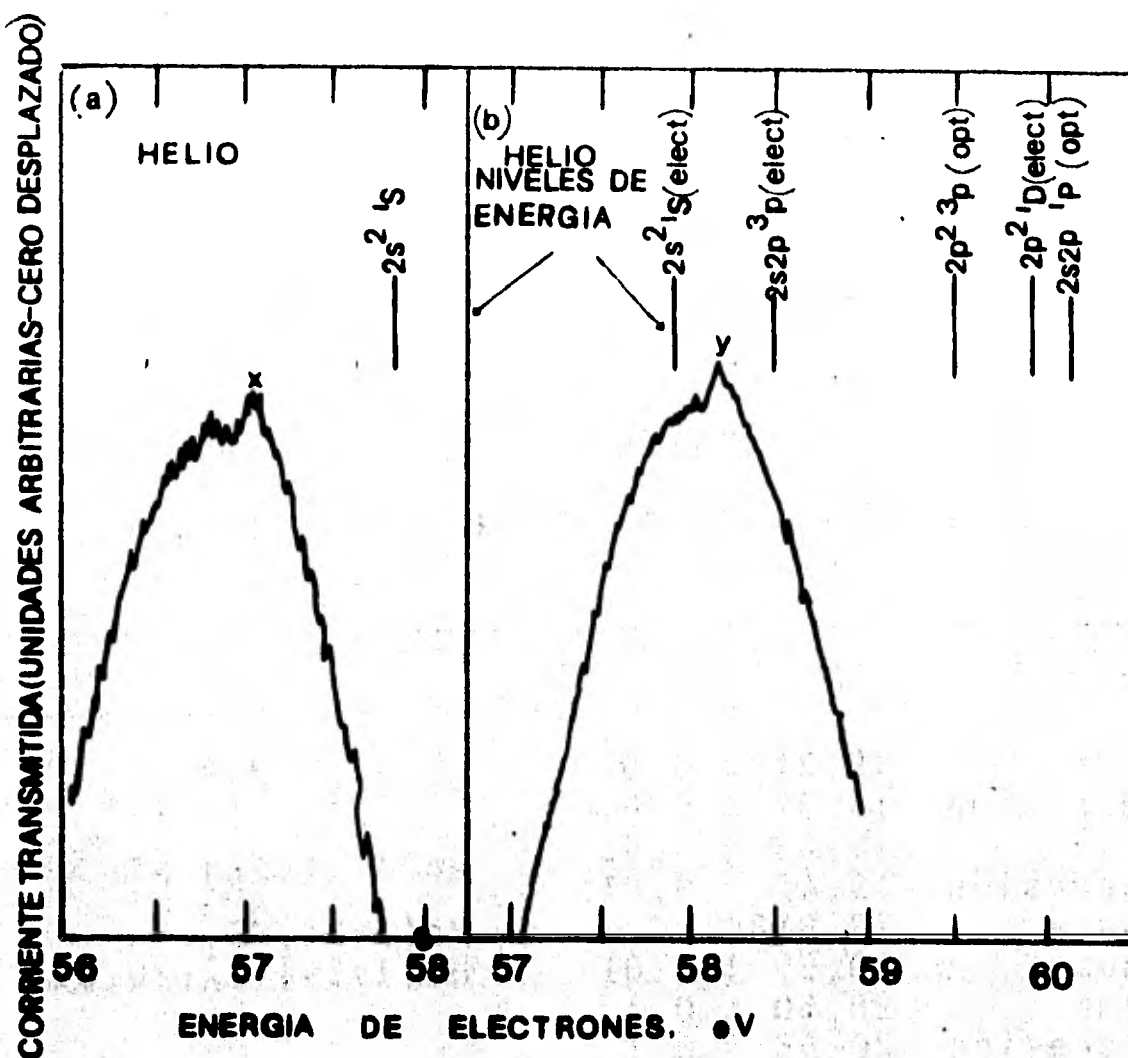


Fig. 39

La Figura 39 muestra la transmisión de electrones por helio y exhibe dos resonancias en 57.1 ± 0.1 y 28.2 ± 0.1 eV. También se grafican los pocos estados doblemente excitados del helio.

Una estimación burda de la energía para los estados de He^- se puede hacer a partir del conocimiento de las energías de los estados doblemente excitados del helio. Los dos electrones excitados en el helio se están moviendo en un campo

con $z = 1$ de He^{++} y dividido por $z^2 = 4$ para conseguir las energías correspondientes de los estados de He^- relativos a He^+ . La tabla V nos da los resultados de tal extrapolación.

Las energías extrapoladas son razonables debido a que todas ellas se encuentran dentro de 1eV por debajo de los niveles apropiados del He; la diferencia representa la energía de amarre del tercer electrón. Los dos primeros estados extrapolados de He^- coinciden con las resonancias observadas 1 y 2. El tercer estado extrapolado de He^- ha sido eliminado ya. Los siguientes 3 estados extrapolados de He^- se encuentran en la región de los umbrales 2^3s y 2^1s ; estos no han sido observados. Las energías de los otros estados de He^- han sido calculados por Wu y Shen, y por Propin, pero esos resultados no son suficientemente exactos para nuestros propósitos de identificación.

TABLA V

Correspondencia entre helio doblemente excitado y He⁻ excitado

Estado del Helio	Energía (eV)	Diferencia desde el límite (eV)	Dividido por z ² = 4 (eV)	Estado estimado He ⁻ (eV)	
(2s ²) ¹ S	57.9 ^a	21.09	5.27	19.31	(1s2s ²) ² S
(2s2p) ³ P	58.5 ^a	20.49	5.12	19.46	(1s2s2p) ² P ⁰
(2p ²) ³ P	59.66 ^b	19.37	4.83	19.75	(1s2p ²) ² P
(2p ²) ¹ D	60.0 ^a	18.99	4.75	19.83	(1s2p ²) ² D
(2s2p) ¹ P	60.12 ^c	18.87	4.72	19.86	(1s2s2p) ² P ⁰
(2p ²) ¹ S	62.77 ^d	16.22	4.05	20.53	(1s2p ²) ² S
(sp23+) ¹ P	63.65 ^c	15.34	3.83	20.75	
(sp24+) ¹ P	64.46 ^c	14.53	3.63	20.95	
(3s3p) ¹ P	69.95 ^c	9.04	2.26	22.32	
(sp34+) ¹ P	71.66 ^c	7.33	1.83	22.75	
(4s4p) ¹ P	73.77 ^c	5.22	1.30	23.78	
Límite He ⁺⁺	78.99 ^b			24.58	
He ⁺ 2s(02p)	65.39 ^b	13.60	3.40	21.18	[He(1s2p) ¹ P = 21.22]
He ⁺ 3s(03p)	72.95 ^b	6.04	1.51	23.07	[He(1s3p) ¹ P = 23.08]

Las letras a, b y c indican las fuentes donde se obtuvieron los datos y se encuentran señaladas en artículo de Kuyatt *et al.*

Para calcular las *energías y anchuras de las resonancias* que ocurren en experimentos de dispersión (scattering) de electrones por átomos y moléculas se han desarrollado teorías *cuasi-estacionarias*:

1. Técnica *cuasi-variacional* de Taylor y Williams
2. Método *equivalente* de O'Malley y Geltman
3. El método de Karpur-Peierls
4. El desarrollado por Mandl y Herzenberg
5. La técnica de *configuración-interacción* de Holþien
6. El esquema *perturbación hidrogénico* usado por Midtdal y Holþien
7. La técnica *configuración-interacción-truncada* de Lipsky y Russek.

Hay teorías de dispersión más exactas tales como:

- (a) La *aproximación close-coupling* de Burke y Schey
- (b) La *teoría de Fano*.

Todas la teorías *cuasi-estacionarias* y los métodos de las teorías de dispersión son consistentes y equivalentes si se llevan a su terminación o realización. Ellos dan resultados numéricos esenciales idénticos y se puede demostrar que son formas especiales de la *teoría general de la dispersión resonantes de Feshbach*.

Las ventajas de las teorías cuasi-estacionarias son matemáticamente más fáciles de aplicar que la teoría close-coupling por ejemplo, que es intratable para átomos con más de dos electrones y para moléculas.

Se ha demostrado también que todas las técnicas cuasi-estacionarias son muy similares a los métodos usados en el cálculo de estados ligados altamente excitados de átomos y moléculas.

Las técnicas cuasi-estacionarias son en principio técnicas aproximadas y deben ser consideradas como métodos para refinar "buenas suposiciones".

Veamos ahora algunos resultados matemáticos:

La dependencia de la energía en la sección eficaz elástica en la vecindad de una resonancia aislada en la onda s con un canal de decaimiento particular se puede expresar por la fórmula de Breit-Wigner

$$\sigma(E) \sim \pi \lambda^2 |A + \{\Gamma / [(E - E_0) + \left(\frac{1}{2} i\right) \Gamma]\}|^2 \quad 3.103$$

Aquí, A represente la dispersión potencial directa que varía lentamente con la energía; Γ es la anchura del estado, es decir, el rango de energías sobre el cual la resonancia

tiene un gran efecto sobre la dispersión; E_0 determina la localización de la resonancia; E es la energía y λ es la longitud de onda reducida del electrón. La sección eficaz fuera de la resonancia viene a ser $\pi\lambda^2|A|^2$. Cuando es pequeña la dispersión directa, la sección eficaz cerca de una resonancia viene a ser

$$\pi\lambda^2 \left[\frac{\Gamma^2}{(E - E_0)^2} + \frac{1}{4} \Gamma^2 \right]. \quad 3.104$$

El corrimiento de fase η que interviene siempre en la expresión para la sección eficaz elástica — para dispersión de ondas s se puede escribir $\sigma(E) = 4\pi\lambda^2 \text{sen}^2 \eta$ —, crece a través de π radianes como la energía a través de cada resonancia. Esto se puede ver de la expresión para la contribución resonante al corrimiento de fase,

$$\eta_{\text{res}} = - \cot^{-1} \left[(E - E_0) / \frac{1}{2} \Gamma \right]. \quad 3.105$$

En la Figura 40 se grafica el corrimiento de fase como una función de la energía cercana a una resonancia para cuatro casos arbitrarios. El corrimiento de fase para dispersión potencial es diferente para cada caso, pero en cada uno de ellos crece por π radianes cuando la energía pasa a través de la energía resonante E_0 . La forma de la sec-

ción eficaz resultante, se muestra sobre el pie de la Figura 40 que exhibe la estructura de interferencia esperada.

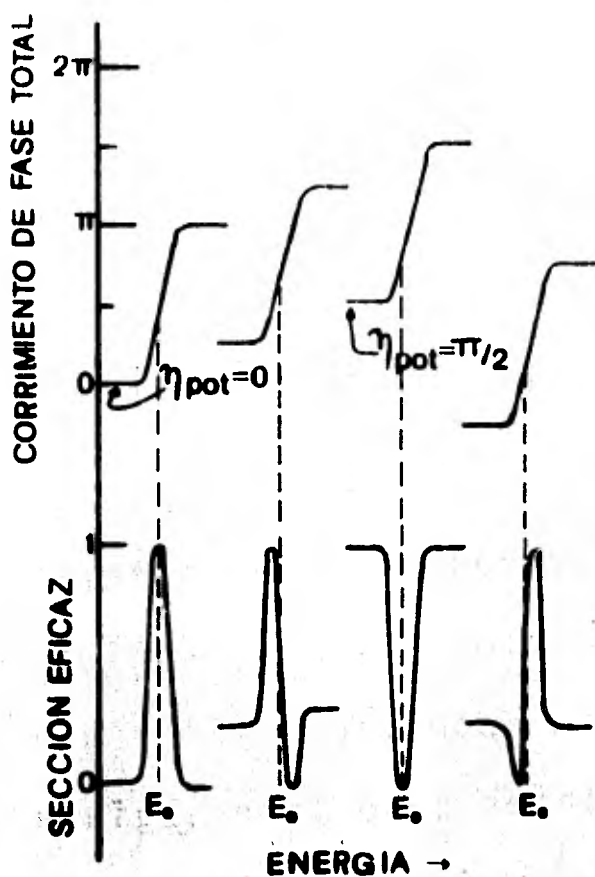


Fig. 40

La posición de E_0 esta definida como la energía a la cual la posición resonante del corrimiento de fase se encuentra aumentada por $\pi/2$; es decir

$$\eta_{res} = \frac{1}{2} (2n + 1)\pi .$$

3.106

Esta es la posición donde el corrimiento de fase ha aumentado por $\pi/2$ radianes a un valor más alto que el corrimiento de fase debido a la dispersión potencial que prevalece justo por debajo de la resonancia.

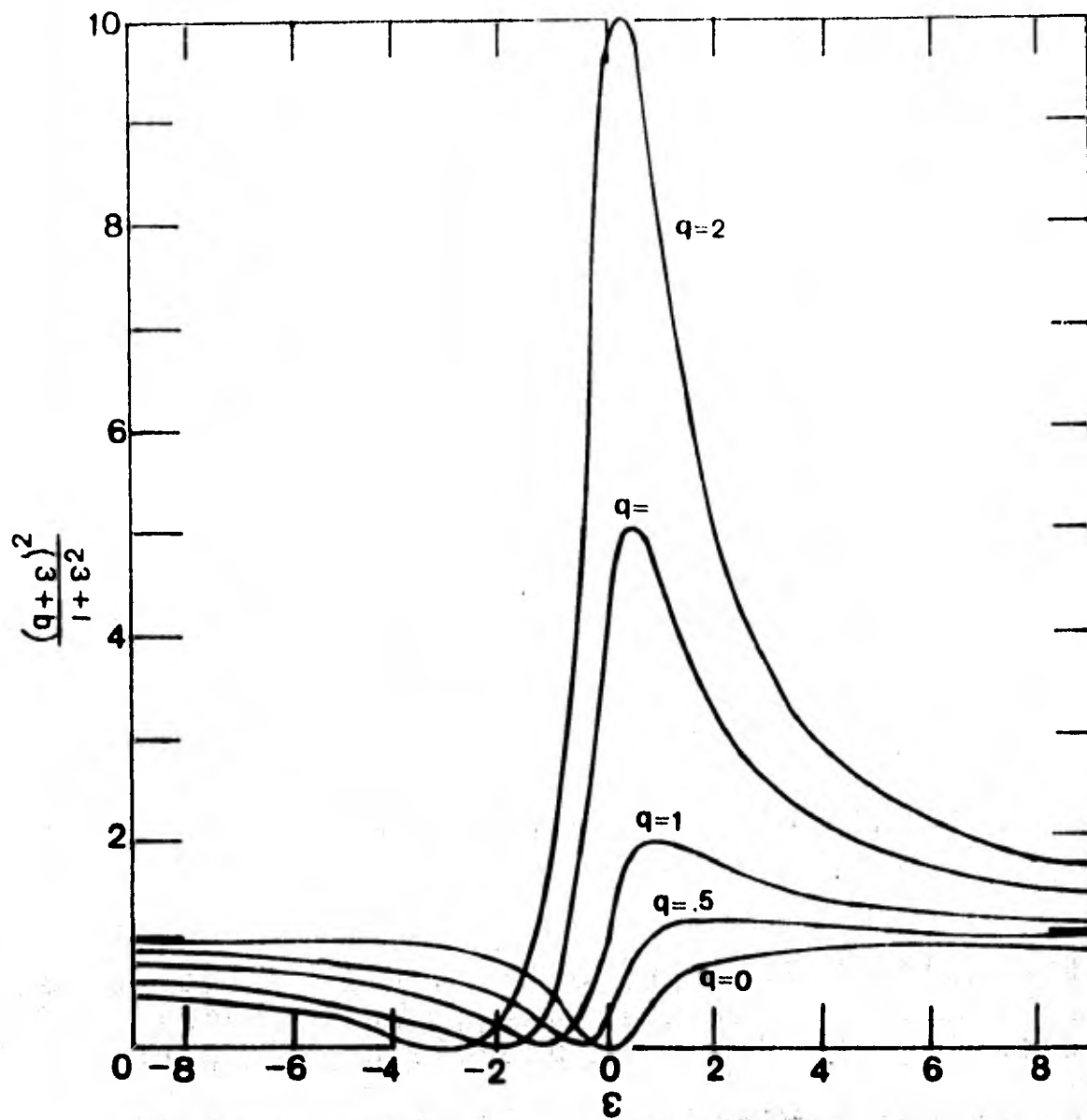


Fig. 41

Cuando estamos trabajando con dispersión inelástica, el decaimiento puede tomar lugar a otro estado diferente del estado base, y la porción resonante de la ecuación eficaz viene a ser

$$\pi\lambda^2 \left[\Gamma_{\text{ent}} \Gamma_{\text{sal}} / \left[(E - E_0)^2 + \left(\frac{1}{2} \Gamma \right)^2 \right] \right] \quad 3.107$$

Aquí Γ_{ent} es la anchura para el decaimiento en el estado base más un electrón libre y Γ_{sal} es la anchura parcial para el decaimiento dentro del estado excitado más un electrón libre. Así tenemos que $\Gamma = \Gamma_{ent} + \Gamma_{sal}$.

Es frecuentemente deseable evaluar el perfil de las líneas resonantes usando la fórmula debida a Fano (1961) y a Fano y Cooper (1965a):

$$\sigma(E) = \sigma_0 \left[(q + \epsilon)^2 / (1 + \epsilon^2) \right] + \sigma_A \quad 3.108$$

donde $\epsilon = (E - E_0) / \frac{1}{2} \Gamma$ representa la diferencia de la energía del electrón E desde la energía de resonancia ideal en unidades del semiancho $\frac{1}{2} \Gamma$ de la resonancia, σ es la sección eficaz de dispersión elástica para electrones de energía E , σ_A es la parte no resonante de la sección eficaz, $\sigma_0 + \sigma_A$ es el valor de σ lejos de la resonancia y q es un parámetro de forma igual a $-\cot \delta_e$ donde δ_e es el corrimiento de fase de la dispersión para la onda parcial de momento angular lh en que la resonancia ocurre. La Figura 41 muestra los perfiles de línea graficados para varios valores de q .

Si la energía del electrón es más grande que la energía más baja de excitación del átomo, la ecuación (3.108) es aún

válida pero q ya no está relacionada simplemente al corrimiento de fase elástico.

El perfil de resonancia dado por la ecuación (3.108) viene a ser una sección eficaz máxima $(q^2 + 1)\sigma_0 + \sigma_A$ en $\epsilon = 1/q$ y viene a ser una sección eficaz mínima σ_A en $\epsilon = -q$. La sección eficaz máxima se puede expresar también como $\pi(2\lambda + 1)\lambda^2 + \sigma_A$. Esta forma es conveniente ya que no requiere del conocimiento de q . En las energías de resonancia E_0 , para las cuales $\epsilon = 0$, la sección eficaz es $q^2 \sigma_0 + \sigma_A$. De aquí que ni la sección eficaz máxima ni mínima ocurren en E_0 . Nótese que para $q \ll 1$ la sección eficaz mínima σ_A ocurre a valores muy cercanos a E_0 , mientras que la sección eficaz máxima ocurre lejos de esta energía y no es muy diferente de $\sigma_0 + \sigma_A$. Para $q \gg 1$, la sección eficaz máxima es muy grande y ocurre a valores muy cercanos a E_0 , mientras que la sección eficaz mínima, aún σ_A , ocurre lejos de E_0 . En todos los casos E_0 está en alguna parte entre la sección eficaz mínima y máxima.

Si se desea analizar el perfil de línea en términos de una componente simétrica y una antisimétrica, se puede escribir (Shore, 1967)

$$\sigma(E) = C(E) + \frac{1}{2} \Gamma B [(E-E_0)^2 + (\Gamma/2)^2]^{-1} + D(E-E_0) [(E-E_0)^2 + (\Gamma/2)^2]^{-1}$$

Los parámetros B y D que especifican las componentes simétrica y antisimétrica de la línea, son constantes. Estas constantes relacionadas a la fórmula de Fano por la ecuación

$$\frac{B}{D} = \frac{q^2 - 1}{2q}$$

Comer y Read (1972) han desarrollado un método simple para la obtención de energías resonantes de perfiles ensanchados usando la formulación de Shore.

Recientes revisiones de la teoría han sido ensamblados por Smith (1966) y por Burke (1968).

Con pocas excepciones, todas las resonancias observadas en la sección eficaz total elástica e inelástica, se pueden asociar con estados excitados del átomo blanco. Estas resonancias en la sección eficaz han sido atribuidas por varios autores (Kleinpoppen, Raible, Schulz, Simpson, Fano y Cooper) a la formación de estados compuestos electrón-átomo de vida media corta que contiene dos o más electrones excitados. Un estado compuesto tal es así un estado doblemente o múltiplemente excitado del ión negativo formado por adición del electrón entrante a un átomo blanco en un estado excitado. Los estados compuestos son nombrados *estados resonantes centro-excitado*.

Taylor *et al*, nos sugieren que uno se puede imaginar que un estado resonante centro-excitado está formado por el proceso virtual siguiente:

"El electrón entrante 'golpea' a uno o más electrones del átomo blanco en un nivel excitado de tal manera que los núcleos o el núcleo están menormente apantallados por los electrones del átomo o molécula; el electrón ve luego una débil carga positiva y se liga para formar un ión negativo por un período corto de tiempo. Un ión negativo tal, decae vía autoionización para regresar luego al átomo blanco más el electrón dispersado".

Hay dos tipos posibles de estados resonantes centro-excitado que se designan como *tipo I* y *tipo II*. Esto ocurre porque un electrón en el campo potencial del estado excitado puede ir a un "estado ligado" o a un "estado virtual" de ese potencial. Uno puede distinguir un estado resonante centro-excitado tipo I de uno tipo II comparando sus energías con la energía del estado excitado del blanco-padre o cúmulo de estados excitados del blanco-padre — Un cúmulo tal de estados excitados del blanco-padre es por ejemplo, los cuatro niveles estrechamente espaciados $n = 2$ para el átomo de helio:

$^3S (1s2s)$ en 19.818 eV

$^1S (1s2s)$ en 20.614 eV

$^3P (1s2p)$ en 20.962 eV

$^1P (1s2p)$ en 21.216 eV

Sobre el estado base —.

Si la energía del ión negativo está por debajo de la energía de todos los posibles estados excitados del blanco-padre en el cúmulo, se puede decir, de acuerdo con el modelo anterior que los electrones entrantes han sido confinados en el campo potencial del estado excitado del blanco. Un estado resonante tal es nombrado tipo I. Si, empero, la energía del estado resonante del ión negativo está por encima de la energía de los estados excitados del blanco-padre, entonces el electrón entrante no puede ser confinado relativamente a los estados excitados del blanco-padre. Un estado tal es un estado virtual en el potencial del estado excitado del blanco y es nombrado un estado resonante centro-excitado tipo II.

Las resonancias tipo I también reciben los nombres de *resonancias a canal cerrado* o *resonancias Feshbach*.

Las resonancias tipo II también reciben los nombres de *resonancias a canal abierto* o *resonancias amoldadas* (shape resonancias).

Un tercer tipo, llamado *estado resonante partícula-soltera*, que explican otros estados resonantes y que dejan de explicar las de tipo I y II se formula el siguiente modelo: un ión negativo formado por electrón entrante que se mueve en el campo potencial del estado base del blanco.

Para dar idea de algunos órdenes de magnitud de tales resonancias diremos que los tiempos de vida de los estados centro-excitado tipo I son de alrededor de 10^{-14} - 10^{-13} segundos o más grandes, mientras que los de tipo II y *partícula-soltera* son de 10^{-14} segundos o menos.

Los estados compuestos están formados por la interacción de un electrón incidente con una molécula blanco en la que el electrón incidente está temporalmente capturado en la vecindad de la molécula. El complejo así formado recibe el nombre de *ión negativo temporalmente* o *resonancia*. Este último término indica que la captura del electrón ocurre a una energía definida, lo que nos lleva a una estructura clara en la sección eficaz. No obstante algunas veces el tiempo de vida del estado compuesto es tan corto que la anchura del estado, dada por el principio de incertidumbre, es gran

de. Los términos *estado compuesto*, *ión negativo temporalmente* y *resonancia* se usan con frecuencia de manera indisinta.

Los estados compuestos en las moléculas que han sido observadas tienen tiempos de vida en el rango 10^{-10} - 10^{-15} se. Estos estdos compuestos decaen por la emisión de un electrón en varios estados finales que son energéticamente accesibles. Lo interesante de las moléculas es la variedad de canales de decaimiento que son posibles:

- excitación vibracional y rotacional,
- excitación electrónica,
- dispersión elástica,
- adhesión-disociativa,
- adhesión de tres cuerpos,
- y otros.

La siguiente tabla nos da una guía útil para la semántica de los estados compuestos. Para mayores detalles ver el artículo de Schulz, Resonances in Electronic Impact on Diatomic Molecules en Reviews of Modern Physics, Vol. 45, No. 3 de julio de 1973.

TABLA VI
SEMANTICA DE LAS RESONANCIAS

Primer Nombre	Ultimo Nombre	Padre	Energía <i>vis a vis</i> padre	Algunas características	Ejemplos
Partícula-soltera Forma (1 partícula, 0 huecos)	...	Estado electrónico base	por encima (0 - 4 eV)	Excitación vibracional adhesión-disociación a baja energía	N ₂ (2 - 3 eV) H ₂ (2 - 4 eV)
Centro-excitado Partículas-hueco (2 partículas, 1 hueco)	Feshbach; Tipo I; Canal cerrado	Principalmente estado excitado Rydberg	por debajo (~ 0.5 eV)	Bandas correlacionadas al gran padre; estruc- tura aguda; muchos ca- nales de decaimiento	N ₂ (11.48 eV) H ₂ (Bandas n _a " - n _g ")
	Forma; Tipo II Canal abierto	Estado excitado Rydberg o valencia	por encima (0 - 2 eV)	Adhesión- disociación	N ₂ (9 - 11 eV) H ₂ (8 - 12 eV)
Centro-excitado doblemente (3 partículas, 2 huecos)	Feshbach	Estados valencia y estados Rydberg doblemente excitados	por debajo	Ionización por encima; decaimiento en 2 electrones	He(57.16 eV)
	Forma		por encima		He(22 eV)

CAPITULO 4

PRINCIPIO DE INCERTIDUMBRE. TIEMPO DE
RETARDO Y RELACIONES DE DISPERSION

En este capítulo nos proponemos revisar el *Principio de Incertidumbre* a partir de señales eléctricas en el espacio de las frecuencias y los tiempos, *Tiempo de Retardo*, *Relaciones de Dispersión* y otros conceptos relacionados, como son el de *causalidad*, *linealidad*, etc. Todos estos conceptos tienen que ver de alguna manera con el *concepto de resonancia*.

4.1 PRINCIPIO DE INCERTIDUMBRE

Sea $f(t)$ una señal y $F(\omega)$ su espectro¹⁹ de frecuencias correspondiente, suponiendo además que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt = 1 \quad 4.1$$

Así, $|f(t)|^2 dt$ se puede interpretar como la probabilidad de que una señal diferente de cero ocurra entre t y $t + dt$.

Por la relación de Parseval se tiene que

19. Término usado algunas veces para $|F(\omega)|$.

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\omega)|^2 d\omega = 1 ; \quad \omega = 2\pi\nu \quad 4.2$$

Así, $|F(\omega)|^2 d\omega$ se puede interpretar como la probabilidad de que la señal contenga frecuencias entre ν y $\nu + d\nu$.

El origen del tiempo se puede escoger de manera que

$$\langle t \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} t |f(t)|^2 dt = 0 \quad 4.3$$

La frecuencia (angular) promedio de la señal se puede definir como

$$\langle \omega \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \omega |F(\omega)|^2 d\omega \quad 4.4$$

La duración estadística de la señal está dada por

$$\begin{aligned} \sigma_t^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 |f(t)|^2 dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |F'(\omega)|^2 d\omega \quad 4.5 \end{aligned}$$

La última integral se sigue de una aplicación de la relación de Parseval a la derivada de la transformada de Fourier $F(\omega)$ de $f(t)$:

$$F'(\omega) = -i \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t} t f(t) dt \quad 4.6$$

El ancho de banda (angular) estadístico está dado por

$$\sigma_{\omega}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} [\omega^2 - \langle \omega \rangle]^2 |F(\omega)|^2 d\omega \quad 4.7$$

como
$$\int_{-\infty}^{+\infty} |P(\omega) + XQ(\omega)|^2 d\omega = ax^2 + bx + c \quad 4.8$$

de donde

$$b^2 - 4ac = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} (P^*Q + PQ^*) d\omega \right|^2 - 4 \int_{-\infty}^{+\infty} |P|^2 d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} |Q|^2 d\omega \leq 0 \quad 4.9$$

por lo tanto

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |P(\omega)|^2 d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} |Q(\omega)|^2 d\omega \geq \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} [P^*(\omega)Q(\omega) + P(\omega)Q^*(\omega)] d\omega \right|^2 \quad 4.10$$

que no es otra cosa que la desigualdad de Schwarz.

$$\text{Si } P(\omega) = F'(\omega) \text{ y } Q(\omega) = [\omega - \langle \omega \rangle] F(\omega) \quad 4.11$$

entonces, la desigualdad (4.10) se reescribe como sigue:

$$4\pi^2 \sigma_t^2 \sigma_\omega^2 \geq \left| \int_{-\infty}^{+\infty} [\omega - \langle \omega \rangle] \left[\frac{1}{2} (F^* F' + F F'^*) \right] d\omega \right|^2 \quad 4.12$$

$$\text{o bien } 2\pi \sigma_t \sigma_\omega \geq \frac{1}{2} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} [\omega - \langle \omega \rangle] d(|F|^2) \right| \quad 4.13$$

$$\text{ya que } \int_{-\infty}^{+\infty} \omega d|F|^2 = - \int |F|^2 d\omega = - 2\pi \quad 4.14$$

$$\langle \omega \rangle \int_{-\infty}^{+\infty} d|F|^2 = 0 \quad 4.15$$

entonces

$$2\pi \sigma_t \sigma_\omega \geq \pi \quad 4.16$$

Por lo tanto

$$\sigma_t \sigma_\omega \geq \frac{1}{2} \quad 4.17$$

o bien $\sigma_t \sigma_v \geq \frac{1}{4\pi}$ 4.18

dado que $\sigma_v = \frac{1}{2\pi} \sigma_\omega$ 4.19

Ahora bien, la hipótesis de Planck nos dice que

$$E = h\nu = \hbar\omega \quad 4.20$$

entonces, $\sigma_E = \hbar \sigma_\omega = h \sigma_\nu$ 4.21

por lo tanto $\sigma_t \sigma_E \geq \frac{1}{2} \hbar$ 4.22

La hipótesis de De Broglie nos dice que

$$p = \hbar k ; \quad k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad 4.23$$

entonces, $\sigma_p = \hbar \sigma_k$ 4.24

por lo tanto $\sigma_x \sigma_p \geq \frac{1}{2} \hbar$ 4.25

en virtud de $\sigma_x \sigma_k \geq \frac{1}{2}$ 4.26

4.2 TIEMPO DE RETARDO

Sean W_{ℓ}^{+} , W_{ℓ}^{-} dos ondas monocromáticas, con las cuales formamos un paquete de ondas, y cuyo comportamiento asintótico tienen la forma

$$W_{\ell}^{\pm}(r, t) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} A e^{-i(\omega \pm \Delta\omega)t} \left\{ e^{-i \left[(k \pm \Delta k)r - \frac{\ell\pi}{2} \right]} - e^{2i(n_{\ell} \pm \Delta n_{\ell})} e^{i \left[(k \pm \Delta k)r - \frac{\ell\pi}{2} \right]} \right\} \quad 4.27$$

$$W_{\ell}^{+} + W_{\ell}^{-} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 2 \left[e^{-i(kr + \omega t - \frac{\ell\pi}{2})} \cos(r\Delta k + t\Delta\omega) - e^{i(kr - \omega t - \frac{\ell\pi}{2} + 2n_{\ell})} \cos(r\Delta k - t\Delta\omega + 2\Delta n_{\ell}) \right] \quad 4.28$$

El primer término representa una onda entrante que tiene amplitud máxima en

$$r_{\text{máx}} = - \left(\frac{\Delta\omega}{\Delta k} \right) t \xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} - \left(\frac{d\omega}{dk} \right) t = - vt \quad 4.29$$

Ahora, como $\omega = \frac{E}{\hbar} = \hbar k^2 / 2m = \frac{mv^2}{2\hbar}$ y como $r_{\text{máx}}$ y $v \geq 0$, la relación (4.29) requiere que $t \leq 0$, lo cual es consistente con nuestra identificación del paquete de ondas entrante y con la amplitud máxima alcanzando el origen en $t = 0$ en ausencia de potencial.

El segundo término en (4.28) es una onda saliente con amplitud máxima en

$$r_{\text{máx}} = vt - \epsilon \frac{dn_{\ell}}{dk} \quad 4.30$$

en el límite de $\Delta k \rightarrow 0$.

Cuando no hay potencial presente $\frac{dn_{\ell}}{dk} = 0$ y $r_{\text{máx}} = vt$ para $t \geq 0$ describe la posición de la amplitud máxima en el paquete de ondas saliente. Si reescribimos (4.30) como

$$r_{\text{máx}} = v [t - (\Delta t)_{\ell}] \quad 4.31$$

entonces,

$$\begin{aligned} (\Delta t) &= \frac{2}{v} \frac{dn_{\ell}}{dk} \\ &= 2\hbar \frac{dn_{\ell}}{dE} \end{aligned} \quad 4.32$$

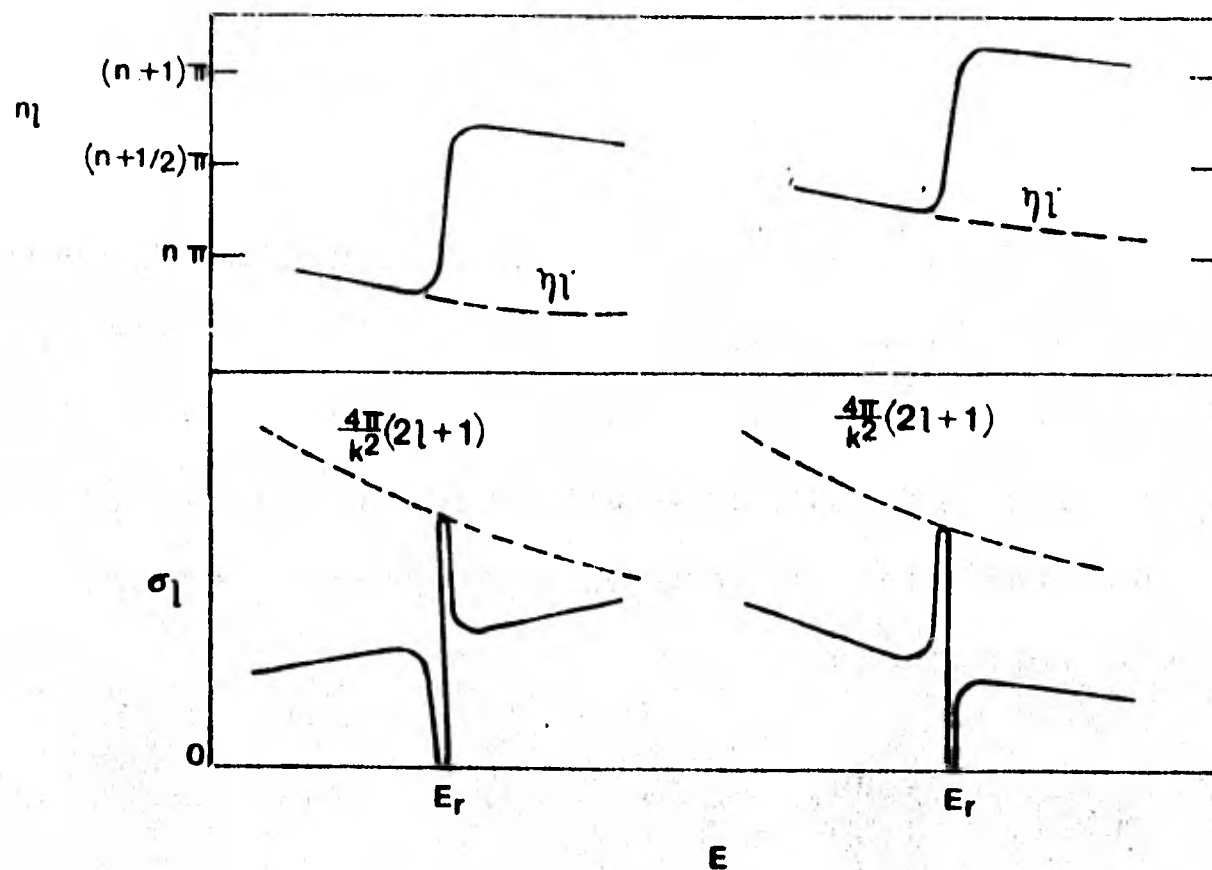
Este tiempo recibe el nombre de *Tiempo de Retardo* experimentado por el paquete de ondas en la dispersión por un campo potencial, en comparación con el tiempo cuando no hay dicho campo, donde $(\Delta t)_\ell = 0$.

Wigner ha demostrado con base en argumentos de causalidad — que veremos más adelante — que el tiempo mínimo de retardo posible para un potencial que se hace cero para $r \geq r_0$ es $-r_0/v$. Esto es posible para un potencial repulsivo infinito en r_0 , que refleje completamente el paquete de ondas. De esta manera tenemos que

$$(\Delta t)_\ell = \frac{2}{v} \frac{d\eta_\ell}{dk} \geq \frac{r_0}{v} \quad 4.33$$

o bien
$$\frac{d\eta_\ell}{dk} \geq -\frac{r_0}{2} \quad 4.34$$

lo que significa que hay un límite inferior sobre los valores posibles de la derivada del corrimiento de fase. Un límite superior sobre $d\eta_\ell/dk$ ó $(\Delta t)_\ell$ no existe. Este resultado es consistente con el comportamiento de η_ℓ a través de una resonancia aguda. En la siguiente figura vemos que $d\eta_\ell/dk$ y de aquí $(\Delta t)_\ell$ son muy grandes. Así, la dispersión a una energía de resonancia tal significa que la partícula incidente consume un tiempo largo en la vecindad del blanco.



Los corrimientos de fase y la sección eficaz parcial en la vecindad de una resonancia se grafican en la figura anterior. El orden de aparición del cero y el máximo depende del orden en que aparece el corrimiento de fase cuando toma valores múltiplos enteros o semienteros de π .

4.3 RELACIONES DE DISPERSION Y TEOREMA OPTICO

En varios campos de la Física, las *Relaciones de Dispersión* han demostrado ser de gran importancia, no sólo como una reflexión directa de los conceptos básicos de *causalidad* y *analiticidad* sino también como un marco de trabajo fenomenológico muy útil para la correlación e interpretación de datos experimentales sobre procesos de scattering.

Cabe destacar que se puede conseguir *información importante* acerca de un problema dado de principios físicos generales sin dar una *solución detallada* del problema. Así, la posibilidad de obtener información acerca de un fenómeno a partir de principios generales adquiere gran importancia cuando, como en el caso de la Mecánica Cuántica, la descripción detallada es imposible. Comencemos por analizar el caso del índice de refracción.

El índice de refracción como una función en el plano complejo, tiene sus polos en $I_-(\omega)$; esto debido al análisis que hicimos del denominador de (2.8.21) en la sección 2.1.3; por consiguiente $n(\omega)$ es analítica en $I_+(\omega)$. También podemos ver que $[n(\omega) - 1]$ es una función de cuadrado integrable, debido a que cuando $|\omega| \rightarrow \infty$, $|n(\omega) - 1| \rightarrow 1/|\omega^2|$.

Los hechos anteriores cumplen los requisitos establecidos por el Teorema de Titchmarsh (ver Apéndice B), lo cual nos permite escribir la siguiente Transformada de Hilbert:

$$\operatorname{Re} [n(\omega) - 1] = \frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{Im} n(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega' \quad 4.35$$

Se puede observar fácilmente de (2.8.21) que

$$n^*(\omega) = n(-\omega) \quad 4.36$$

y de aquí, lo siguiente:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} n(\omega) &= \operatorname{Re} n(-\omega) \\ \operatorname{Im} n(\omega) &= -\operatorname{Im} n(-\omega) \end{aligned} \quad 4.37$$

las relaciones anteriores se conocen como *relaciones de cruce*, las cuales vinculan regiones físicas y no-físicas.

Las relaciones de cruce nos están diciendo, además, que n_r es una función para y n_i una función impar, por lo que (4.35) también se puede reescribir como

$$\operatorname{Re} [n(\omega) - 1] = \frac{2}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\omega' \operatorname{Im} n(\omega')}{\omega'^2 - \omega^2} d\omega' \quad 4.38$$

A esta ecuación junto con la que nos da la parte imaginaria a través de la parte real se conocen como *Relaciones de Dispersión*.

Consideremos ahora una placa de espesor Δx en la que N dispersores por cm^3 están distribuidos al azar, y sobre la cual está incidiendo una onda plana de amplitud unidad y número de onda $k = \omega/c$.

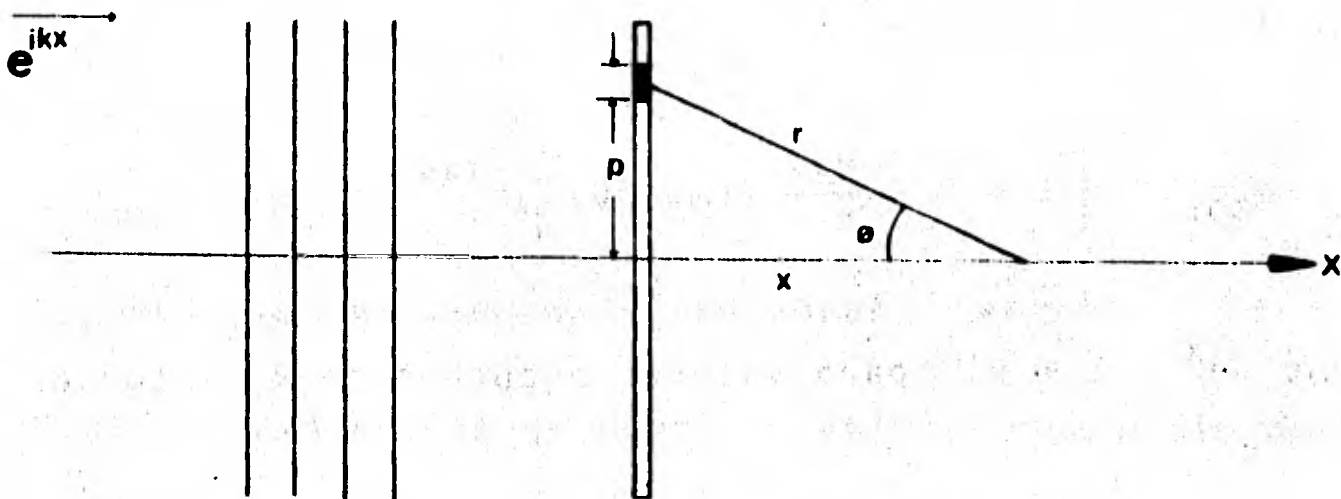


Fig. 42

$$\psi_{\text{tot}} = \psi_{\text{inc}} + \psi_{\text{disp}} \quad 4.39$$

donde

$$\psi_{\text{inc}} = e^{ikx} \quad 4.40$$

y

$$\psi_{\text{disp}} = f(\omega, \theta) \frac{e^{ikr}}{r} \quad 4.41$$

De la figura anterior vemos que si tomamos un anillo en la placa, de ancho $d\rho$, entonces

$$\psi_{\text{disp}} = 2\pi N\Delta x \int^{\infty} f(\omega, \tan^{-1} \frac{(r^2 - x^2)^{1/2}}{x}) e^{ikr} dr \quad 4.42$$

que integrada por partes nos da

$$\psi_{\text{disp}} \approx i \frac{2\pi N\Delta x}{k} f(\omega, 0) e^{ikx} \quad 4.43$$

Por lo tanto

$$\psi_{\text{tot}} \approx \left[1 + i \frac{2\pi N\Delta x}{k} f(\omega, 0) \right] e^{ikx} \quad 4.44$$

como $e^x \approx 1 + x$, para valores pequeños de x , entonces

$$\psi_{\text{tot}} \approx e^{ik\Delta x} \left[1 + 2\pi Nf(\omega, 0)/k^2 \right] \quad 4.45$$

Si el campo incidente e^{ikx} , cuya amplitud es unitaria en el origen, entonces se habrá propagado a través de la placa con un vector de propagación k' ; por consiguiente, el campo en $x = \Delta x$ será

$$\psi = e^{ik'\Delta x} \quad 4.46$$

De la figura anterior vemos que si tomamos un anillo en la placa, de ancho $d\rho$, entonces

$$\psi_{\text{disp}} = 2\pi N\Delta x \int_0^{\infty} f(\omega, \tan^{-1} \frac{(r^2 - x^2)^{1/2}}{x}) e^{ikr} dr \quad 4.42$$

que integrada por partes nos da

$$\psi_{\text{disp}} \approx i \frac{2\pi N\Delta x}{k} f(\omega, 0) e^{ikx} \quad 4.43$$

Por lo tanto

$$\psi_{\text{tot}} \approx \left[1 + i \frac{2\pi N\Delta x}{k} f(\omega, 0) \right] e^{ikx} \quad 4.44$$

como $e^x \approx 1 + x$, para valores pequeños de x , entonces

$$\psi_{\text{tot}} \approx e^{ik\Delta x} \left[1 + 2\pi N f(\omega, 0) / k^2 \right] \quad 4.45$$

Si el campo incidente e^{ikx} , cuya amplitud es unitaria en el origen, entonces se habrá propagado a través de la placa con un vector de propagación k' ; por consiguiente, el campo en $x = \Delta x$ será

$$\psi = e^{ik'\Delta x} \quad 4.46$$

A esta ecuación junto con la que nos da la parte imaginaria a través de la parte real se conocen como *Relaciones de Dispersión*.

Consideremos ahora una placa de espesor Δx en la que N dispersores por cm^3 están distribuidos al azar, y sobre la cual está incidiendo una onda plana de amplitud unidad y número de onda $k = \omega/c$.

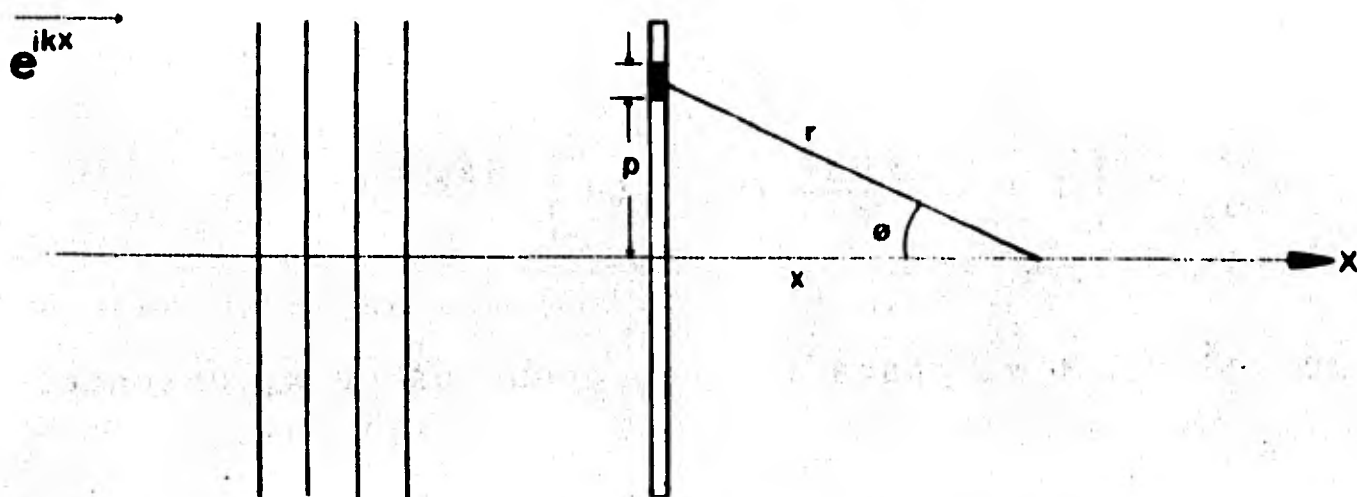


Fig. 42

$$\psi_{\text{tot}} = \psi_{\text{inc}} + \psi_{\text{disp}} \quad 4.39$$

donde
$$\psi_{\text{inc}} = e^{ikx} \quad 4.40$$

y
$$\psi_{\text{disp}} = f(\omega, \theta) \frac{e^{ikr}}{r} \quad 4.41$$

que comparada con (4.45), obtenemos

$$k' = k \left[1 + 2\pi N f(\omega, 0) / k^2 \right] \quad 4.47$$

El índice de refracción $n = k'/K$, también, por tanto

$$n(\omega) - 1 = 2\pi c^2 N f(\omega, 0) / \omega^2 \quad 4.48$$

La ecuación anterior se puede reescribir como

$$\alpha(\omega) = 4\pi c N \operatorname{Im} f(\omega) / \omega \quad 4.49$$

$$y \quad n_r(\omega) - 1 = 2\pi c^2 N \operatorname{Re} f(\omega) / \omega^2 \quad 4.50$$

donde hemos hecho $f(\omega) = f(\omega, 0)$

Si σ_T representa la sección transversal total de dispersión por dispersor, entonces

$$\alpha(\omega) = N \sigma_T(\omega) \quad 4.51$$

Luego con ayuda de (4.3.15) se tiene que

$$\sigma_T(\omega) = 4\pi C \operatorname{Im} f(\omega) / \omega \quad 4.52$$

Ahora, en vez de escribir la transformada de Hilbert para el índice de refracción, la escribiremos para la amplitud de dispersión $f(\omega)$, así

$$\operatorname{Re} f(\omega) = \frac{\omega^2}{\pi} P \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{Im} f(\omega')}{\omega'^2 (\omega' - \omega)} d\omega' \quad 4.53$$

o bien

$$\operatorname{Re} f(\omega) = \frac{2\omega^2}{\pi} P \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{Im} f(\omega')}{\omega' (\omega'^2 - \omega^2)} d\omega' \quad 4.54$$

esto, debido a que $\operatorname{Im} f(\omega')$ es impar.

El Teorema Óptico se puede establecer por medio de la siguiente ecuación:

$$\sigma_T(\omega) = 4\pi c \operatorname{Im} f(\omega)/\omega \quad 4.55$$

Si reemplazamos el teorema óptico en (4.54), obtenemos que

$$\operatorname{Re} f(\omega) = \frac{\omega^2}{2\pi^2 c} P \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sigma_T(\omega')}{\omega'^2 - \omega^2} d\omega' \quad 4.56$$

4.4 OTRAS PROPIEDADES GENERALES CONECTADAS CON LAS RELACIONES DE DISPERSION.

Hay otra serie de conceptos relacionados con la aplicación de las *Relaciones de Dispersión* a sistemas físicos y que de alguna manera ya hemos utilizado en la sección anterior, ellos son: *causalidad*, *simetría temporal*, *unitaridad*, *relaciones de cruce y convergencia para altas frecuencias (o altas energías)*. La naturaleza física y matemática de tales conceptos, por su claridad, se presentan haciendo uso de circuitos eléctricos.

4.4.1 CAUSALIDAD

En la Figura 43 se representa un sistema generalizado por medio de una caja en la que está fluyendo una señal de entrada I que viaja a través de ella hasta alcanzar una salida Θ . Una propiedad esencial que se tiene para tales sistemas es la *causalidad*.

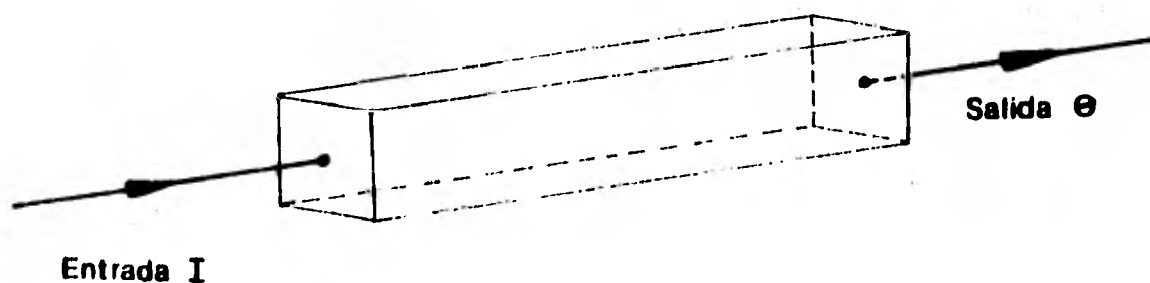


Fig. 43

Suponemos que para cualquier entrada dada hay una única salida. Por entrada y salida queremos significarlas como una entidad completa de la misma manera que cuando nos referimos a ondas queremos entender a la forma de la onda extendida sobre todo el tiempo más que a la amplitud de la forma de la onda en algún instante en el tiempo.

Haciendo uso de la definición anterior, podemos decir que si dos formas de onda diferentes arriban a una entrada en algún tiempo t , luego a la salida, también están emergiendo igualmente en algún tiempo.

4.4.2 LINEALIDAD

Un sistema lineal es aquel para el cual cualquier entrada dada alcanza una salida que es una función lineal de la entrada. Esta afirmación significa que si una entrada dada A alcanza una salida C y otra entrada dada B alcanza una salida D luego una entrada combinada de $A + B$ resultará en una salida que es $C + D$.

Para establecer matemáticamente la linealidad, expresamos la salida en el tiempo t , $\theta(t)$, como una combinación lineal de la entrada en todos los tiempos previos a la salida.

$$\theta(t) = \int_{-\infty}^t K(t, t') I(t') dt' \quad 4.57$$

Combinando los conceptos de causalidad y linealidad, podemos limitar la integración de la ecuación (4.57) a los tiempos t' anteriores a t , o alternativamente, necesitamos que $K(t, t') = 0$ cuando $t < t'$.

4.4.3 SIMETRIA TEMPORAL

Para aquellos casos en los que $K(t, t')$ depende sólo de la diferencia de tiempos, $t - t'$, de tal manera que podamos reescribir a $k(t, t')$ como $K(t - t')$ podemos decir que la entrada y la salida están relacionadas por

$$\theta(t) = \int_{-\infty}^t K(t - t') I(t') dt' \quad 4.58$$

Al reescribir $k(t, t')$ como $K(t - t')$ estamos aceptando que únicamente el tiempo relativo entre entrada y salida es de importancia y que el instante de tiempo en que la entrada es alcanzada al igual que la salida no es importante. A es tos supuestos es a lo que llamamos *simetría temporal*.

UNITARIDAD

Las condiciones de causalidad, linealidad y simetría tem-

poral restringen y ayudan a especificar ciertas propiedades generales del comportamiento de cualquier sistema. La conservación de la energía es otra de tales condiciones familiares. En el caso de los circuitos lineales la conservación de la energía relaciona las amplitudes de la forma de onda entrante a aquella de la salida en un caso particularmente simple.

En general, determinamos que para cualquier sistema en que la energía se conserva el promedio temporal de la energía de salida es menor o igual que el promedio temporal de la entrada. Así, si

$$I(t) = A_1 e^{i\omega_1 t} + A_2 e^{-i\omega_1 t} + A_3 e^{i\omega_2 t} + A_4 e^{-i\omega_2 t} \quad 4.59$$

y el circuito es tal que

$$\theta(t) = B_1 e^{i\omega_1 t} + B_2 e^{-i\omega_1 t} + B_3 e^{i\omega_2 t} + B_4 e^{-i\omega_2 t} \quad 4.60$$

Luego

$$|A_1|^2 + |A_2|^2 + |A_3|^2 + |A_4|^2 \geq |B_1|^2 + |B_2|^2 + |B_3|^2 + |B_4|^2 \quad 4.61$$

Si no hay disipación o fuentes de energía en un sistema, luego

$$\sum_{i=1} |A_i|^2 = \sum_{i=1} |B_i|^2 \quad 4.62$$

exactamente.

Cuando estamos interesados en aquellos sistemas en los que la energía se conserva y no hay disipación, decimos que la longitud de los vectores no cambia (representando a $I(t)$ y a $O(t)$ como vectores). A transformaciones tales como ésta, la llamamos *transformaciones unitarias*. En Mecánica Cuántica los cuadrados de las magnitudes de las amplitudes con que trabajamos son probabilidades, y la probabilidad también es una cantidad que se conserva.

Como una consecuencia de la unitaridad estamos en posibilidad de aceptar siempre que

$$\sum_i |A_i|^2 = \sum_i |B_i|^2 \quad 4.63$$

siempre y cuando las A_i se refieran a los voltajes de las componentes de las ondas seno de la entrada a un circuito eléctrico o a las amplitudes de las probabilidades de algun estado mecánico-cuántico particular de un sistema.

4.4.4 ALTAS FRECUENCIAS

En cualquier sistema lineal hay una relación simple en-

tre el tiempo de respuesta y la frecuencia de respuesta del sistema.

Para simplificar un poco las cosas hagamos que $K(t-t') = 0$ para $t' > t$; luego la ecuación (4.58) la podemos reescribir como

$$\theta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} K(t - t') I(t') dt' \quad 4.64$$

Si consideramos una entrada periódica $e^{-i\omega t}$ luego la ecuación (4.64) nos da

$$\theta(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} K(t - t') e^{-i\omega t'} dt' \quad 4.65$$

Esta expresión es de la forma $k(\omega) e^{-i\omega t}$, donde $k(\omega)$ es la transformada de Fourier de la entrada de tal manera que tenemos

$$k(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} K(t - t') e^{+i\omega(t-t')} dt' \quad 4.66$$

relacionando el comportamiento del sistema en el tiempo a la frecuencia de la respuesta del sistema.

De la teoría de circuitos lineales sabemos que la frecuencia de respuesta de este circuito está expresada por

$$k(\omega) = \frac{i}{\omega C} \left(R + \frac{i}{\omega C} \right) \quad 4.67$$

donde $k(\omega)$ es la función de entrada que aparece en la salida. ¿Satisface esta expresión la relación de causalidad que surge de la exigencia de que $K(t - t') = 0$ para $t' > t$? La respuesta a esta interrogante se puede ver fácilmente si utilizamos la transformada inversa de Fourier de la ecuación (4.64). Por conveniencia reemplazaremos $t - t'$ por t simplemente.

$$K(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} k(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \quad 4.68$$

Es conveniente reescribir la ecuación (4.67) como

$$k(\omega) = \frac{i}{RC} \left(\omega + \frac{i}{RC} \right)^{-1} \quad 4.69$$

luego la respuesta en el tiempo del circuito es

$$K(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{i}{RC} \cdot \frac{1}{\omega + (i/RC)} e^{-i\omega t} d\omega \quad 4.70$$

Utilizando integrales de contorno de variable compleja vemos que la integral (4.70) tiene un polo en $\omega = -1/RC$, es decir, el polo está sobre el eje imaginario negativo como se muestra en la Figura 45.

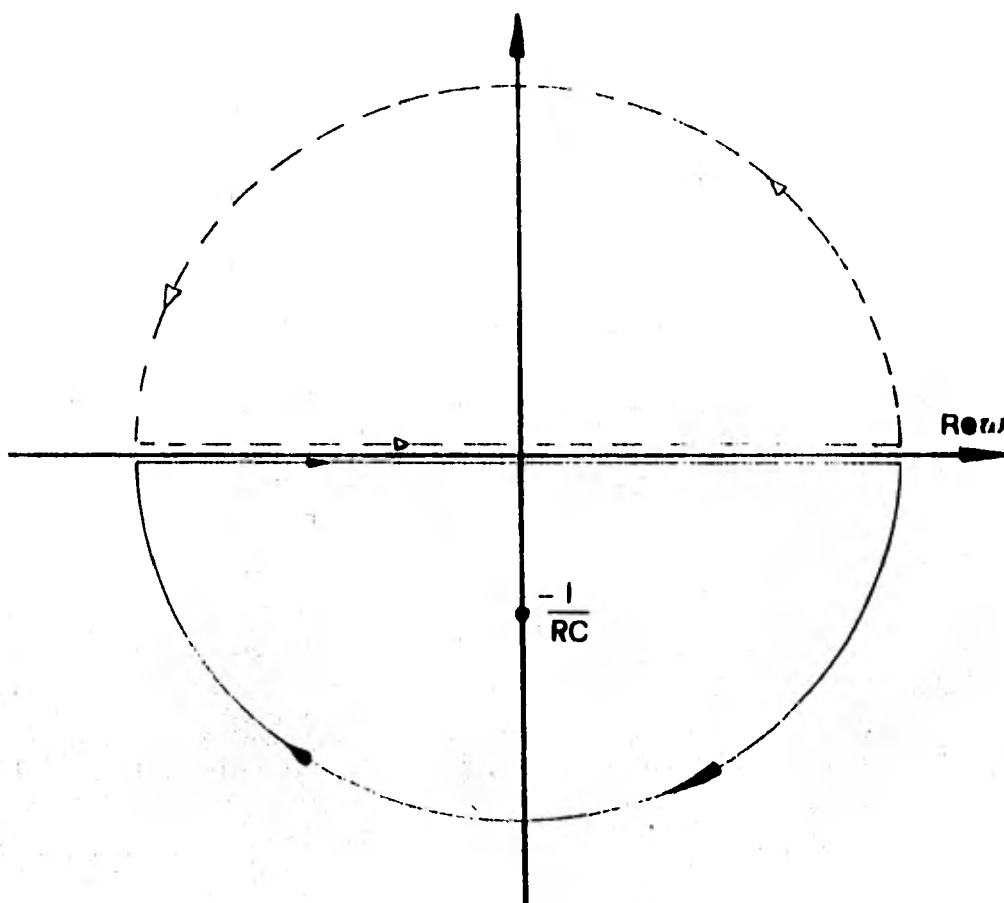


Fig. 45

como

$$\oint_C f(z) dz = \pm 2\pi i \sum_i (\text{Residuos } f(z) \text{ dentro del contorno})_i$$

Aquí el punto importante es la elección del contorno apro

piado, es decir, aquel para el cual $|e^{-i\omega t}|$ esté acotado. Si $t < 0$, entonces elegimos el semiplano con el que la parte imaginaria de ω es positiva. Escribiendo $\omega = x + iy$ tenemos que $|e^{-i\omega t}| = |e^{-i(x+iy)t}| = |e^{+yt}|$ que tiene que irse a cero para valores grandes de y , y negativos para t . Consecuentemente para $t < 0$ la integral debe ser tomada siempre a lo largo de un contorno en el semiplano superior donde y es positivo.

Utilizando integración de contorno calculamos la integral de la ecuación (4.70) por el método de residuos, pero como no hay polos en el semiplano superior entonces la suma de los residuos es cero.

Consecuentemente $K(t) = 0$ para $t < 0$. Este es el resultado esperado; este resultado desde luego es la condición impuesta al sistema por la condición de causalidad. Sin embargo, vemos ahora que es la condición correspondiente sobre $k(\omega)$ que la condición de causalidad se debe satisfacer en general. Esta restricción sobre $k(\omega)$ es esencial para especificar las relaciones de dispersión.

Para atar los cabos sueltos del ejemplo consideremos el caso de $t > 0$. Luego el contorno debe pasar a través del semiplano inferior donde se encuentra encerrado el polo en

$\omega = -i/RC$; así hay un residuo diferente de cero. Multiplicando el residuo por $-2\pi i$ (vemos porque la trayectoria de integración está en sentido directo a las manecillas del reloj) $K(t)$ nos da finalmente

$$K(t) = \frac{1}{RC} e^{-t/RC}, \quad t > 0, \quad 4.71$$

que es la salida esperada de este circuito para una función delta de entrada.

Ahora si intercambiamos el capacitor y la resistencia obtenemos el circuito de la Figura 46

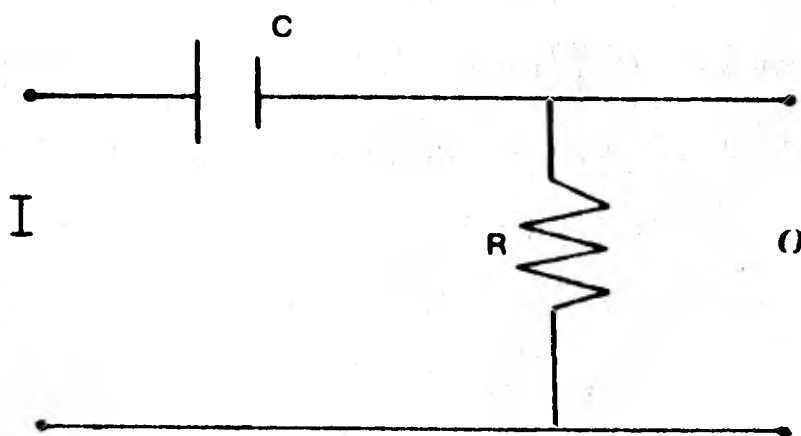


Fig. 46

La frecuencia de respuesta se puede escribir como

$$k(\omega) = R \mid [R + (i/\omega C)] = \omega [\omega + (i/RC)]^{-1} \quad 4.72$$

Aquí el polo está en $\omega = -i/RC$ pero el integrando ha cambiado. Por integración de contorno encontramos que

$$K(t) = -\frac{1}{RC} e^{-t/RC} \quad \text{para } t > 0. \quad 4.73$$

¿Cómo es posible que en un circuito tan simple, una función delta de entrada resulte en una salida negativa?

Un examen cuidadoso del comportamiento de $k(\omega)$ en la ecuación (4.72) a altas frecuencias revela la dificultad. El integrando no va a cero cuando ω va a grandes valores, i.e., hay problemas de convergencia. En efecto nuestro análisis ha sido incompleto ya que hemos despreciado el comportamiento a altas frecuencias sólo por considerar $t < 0$ y $t > 0$ mientras que hemos despreciado $t = 0$. Para ver esto reescribimos la ecuación (4.72) como

$$k(\omega) = \omega / [\omega + (i/RC)] = 1 - \frac{i}{RC} [\omega + (i/RC)]^{-1} \quad 4.74$$

Luego $K(t)$ viene a ser

$$\begin{aligned} K(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[1 - \frac{i}{RC} \frac{1}{\left(\omega + \frac{i}{RC} \right)} \right] e^{i\omega t} d\omega \\ &= \delta(t) - \frac{1}{RC} e^{-t/RC} \end{aligned} \quad 4.75$$

El primer término de la integral da la función delta mien tras que el segundo término da el negativo de la ecuación (4.71).

Hay hechos importantes de sumo interés que nos propor ciona este ejemplo:

dos funciones que pueden tener un polo en el mismo punto, tienen diferentes propiedades de convergencia, i.e., diferente comportamiento a altas frecuencias puede resultar en diferentes comportamientos en el tiempo. Uno de los problemas repetitivos de las re laciones de dispersión es el análisis de las propie dades de convergencia de las funciones a altas fre- cuencias, i.e., en $t = 0$. Generalmente, el integran do puede ser tratado como en la ecuación (4.74) y rompiéndolas en dos partes, una parta en $t = 0$, y otra parte correspondiente a $t > 0$, que en nuestro caso especial da un pulso positivo con una sobrecar- ga negativa.

Un tercer circuito (ver Figura 47) que exhibe otros he- chos de $k(\omega)$ que están relacionadas a scattering.

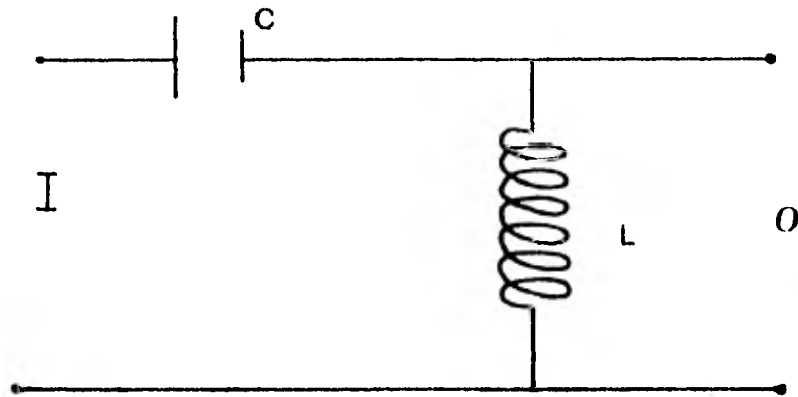


Fig. 47

Procediendo como antes determinemos $k(\omega)$

$$k(\omega) = \frac{\omega L}{I} / \left[(\omega L/i) + (i/\omega C) \right] = \frac{\omega^2}{\omega^2 - \frac{1}{LC}} \quad 4.76$$

y luego escribimos la ecuación (4.76) en forma conveniente para la transformada de Fourier

$$k(\omega) = 1 + \frac{1}{2(LC)^{1/2}} \left[\frac{1}{\omega - (LC)^{-1/2}} - \frac{1}{\omega + (LC)^{-1/2}} \right] \quad 4.77$$

No es sorprendente que esta expresión es simplemente la oscilación amortiguada característica de un circuito resonante excitado.

Expresado en términos del plano complejo como se muestra en la Figura 48

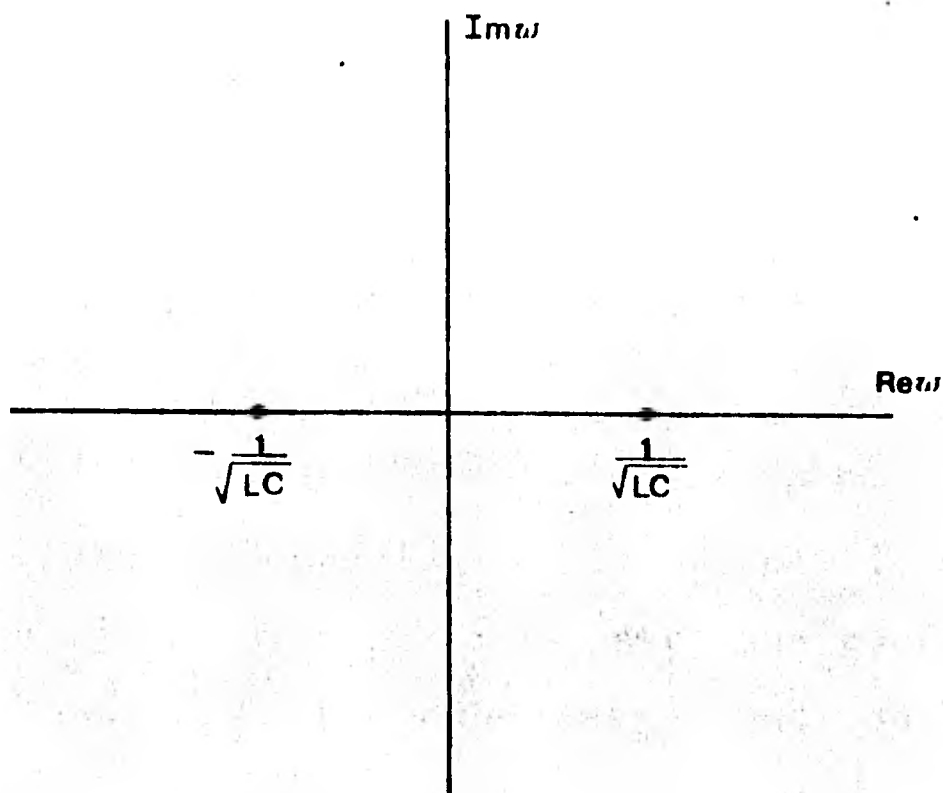


Fig. 48

Para el caso de scattering de partículas, las resonancias corresponden a resonancias en la sección transversal. Si los polos yacen sobre el eje real luego la resonancia amortiguada resultante representa la formación de partículas estables, la vida media de la resonancia decrece cuando el polo es desplazado del eje real.

4.4.5 RELACIONES DE CRUCE

Quando tratamos con un problema específico, es frecuentemente útil observar las propiedades de simetría del sistema bajo consideración. En el caso de los circuitos eléctricos la respuesta en el tiempo de un circuito, caracterizado por $K(t)$, debe ser una cantidad real, i.e., $K(t) = K^*(t)$. De este hecho podemos usar la ecuación (4.68) y escribir

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} K(\omega) e^{-i\omega t} d\omega &= \int_{-\infty}^{+\infty} k^*(\omega) e^{+i\omega t} d\omega \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} k^*(-\omega) e^{-i\omega t} d\omega \end{aligned} \quad 4.79$$

y de aquí se sigue que $k(\omega) = k^*(-\omega)$. Consecuentemente hay una simetría de reflexión a través del eje imaginario. Esta simetría está bien ilustrada en las ecuaciones (4.67), (4.72) y (4.76) y las figuras correspondientes.

En el caso de la Mecánica Cuántica $K(t)$ necesita no ser real y esta propiedad de simetría particular puede no ser usada. Sin embargo, determinamos una simetría análoga llamada simetría de cruce que es esencialmente para la aplicación de las relaciones de dispersión a la *teoría de scattering*.

La gran utilidad de las relaciones de dispersión nos la brinda cuando por ejemplo en un circuito lineal tanto la corriente como el voltaje aplicado están relacionados por una expresión de la forma

$$I e^{-i\omega t} = V e^{-i\omega t} Y(\omega), \quad 4.80$$

donde I y V son las amplitudes máximas de la corriente de entrada y el voltaje e $Y(\omega)$ es la admitancia compleja del circuito. Para un circuito tal el promedio temporal de la potencia de entrada es

$$P = \frac{1}{2} V^2 \operatorname{Re} Y(\omega). \quad 4.81$$

Así $\operatorname{Re} Y(\omega)$ puede ser determinada midiendo la potencia de entrada en tal circuito. Si esto es medido como una función de la frecuencia, la relación de dispersión

$$\operatorname{Im} Y(\omega) = -\frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{Re} Y(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega' \quad 4.82$$

puede ser usada para determinar $\operatorname{Im} Y(\omega)$

Así por un experimento relativamente simple es posible determinar la forma completa de la admitancia $Y(\omega)$.

CAPITULO 5

FISICA CLASICA Y FISICA CUANTICA

En este capítulo nos proponemos desarrollar otra serie de analogías que se producen a partir de lo expuesto hasta ahora. Para llevar a cabo este trabajo estudiaremos algunas *analogías entre fenómenos de física clásica* por una parte y por otra *analogías entre fenómenos de física clásica y física cuántica*.

5.1 ANALOGIAS ENTRE FENOMENOS DE FISICA CLASICA

Consideremos el problema de la propagación de una onda armónica polarizada plana a lo largo de una cuerda en una región en que la densidad lineal de masa, μ , de dicha cuerda cambia discontinuamente en un punto determinado.

La gráfica de la Figura 49 nos da los cambios de densidad con la posición en tres regiones.

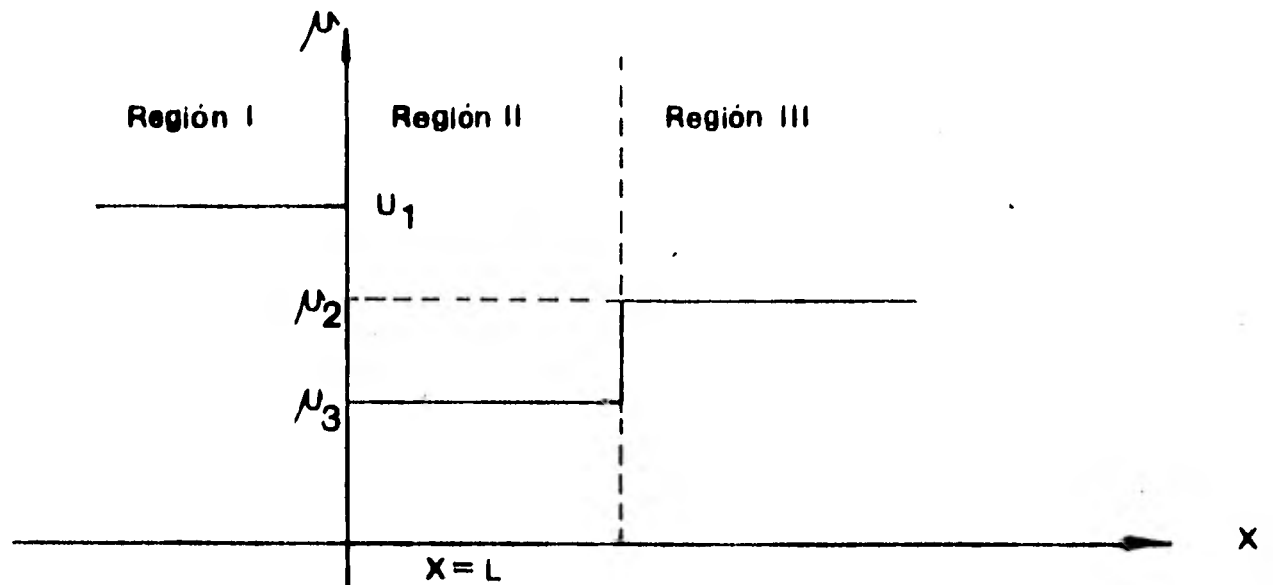


Fig. 49

La ecuación que rige a este fenómeno es la ecuación (2.119) del capítulo 2 y por lo tanto la solución la podemos escribir como sigue:

$$\psi_1(x, t) = e^{i(\omega t - k_1 x)} + R e^{i(\omega t + k_1 x)} \quad 5.1$$

$$\psi_2(x, t) = F e^{i(\omega t - k_2 x)} + B e^{i(\omega t + k_2 x)} \quad 5.2$$

$$\psi_3(x, t) = T e^{i[\omega t - k_3(x-L)]} \quad 5.3$$

donde $k_i = \omega \left(\frac{\mu_i}{\tau} \right)^{1/2}$; $i = 1, 2, 3.$ 5.4

En estas ecuaciones R es la amplitud de la onda reflejada en $x \leq 0$, F la amplitud de la onda hacia adelante en $0 \leq x \leq L$, B la amplitud de la onda hacia atrás en $0 \leq x \leq L$ y T es la amplitud de la onda transmitida en $x \geq L$. Consideramos normalizada a la unidad la amplitud de la onda incidente en $x \leq 0$.

Las condiciones de frontera de este problema son:

$$\psi_1(x, t) \Big|_{x=0} = \psi_2(x, t) \Big|_{x=0} \quad 5.5$$

$$\psi_2(x, t) \Big|_{x=L} = \psi_3(x, t) \Big|_{x=L}$$

$$y \quad \frac{\partial \psi_1(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{\partial \psi_2(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=L}$$

5.6

$$\frac{\partial \psi_2(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=L} = \frac{\partial \psi_3(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=L}$$

De (5.5) obtenemos

$$1 + R = F + B$$

5.7

$$F e^{-ik_2L} + B e^{ik_1L} = T$$

y de las ecuaciones (5.6)

$$1 - R = \frac{k_2}{k_1} (F - B)$$

5.8

$$-k_2 F e^{-ik_2L} + k_2 B e^{ik_2L} = -k_3 T$$

Combinando los resultados (5.7) y (5.8) vemos que

$$F \left(1 + \frac{k_2}{k_1} \right) + B \left(1 - \frac{k_2}{k_1} \right) = 2$$

5.9

$$F e^{-ik_2L} (k_3 - k_2) + B e^{ik_2L} (k_3 + k_2) = 0$$

Ahora definiendo

$$r_{ij} = \frac{k_i - k_j}{k_i + k_j} \quad 5.10$$

y

$$t_{ij} = \frac{2k_i}{k_i + k_j} \quad 5.11$$

como coeficientes de reflexión y transmisión, obtenemos que

$$R = r_{12} + \frac{t_{12}t_{21}t_{23}}{e^{ik_2L} - r_{21}r_{23}} \quad 5.12$$

$$F = \frac{t_{12}}{1 - r_{21}r_{23} e^{-ik_2L}} \quad 5.13$$

$$B = \frac{r_{23}t_{12} e^{-ik_2L}}{1 - r_{21}r_{23} e^{-ik_2L}} \quad 5.14$$

$$T = \frac{t_{23}t_{12} e^{-ik_2L}}{1 - r_{21}r_{23} e^{-ik_2L}} \quad 5.15$$

Si $k_2 = k_3$ entonces $r_{23} = 0$ y por lo tanto

$$R = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}$$

$$F = \frac{2k_1}{k_1 + k_2}$$

5.16

$$B = 0$$

$$T = \frac{2k_1}{k_1 + k_2} e^{-ik_2 L}$$

A continuación desarrollamos las ecuaciones que rigen a una línea de transmisión.

Las Figuras 50 y 51 representan una línea de transmisión

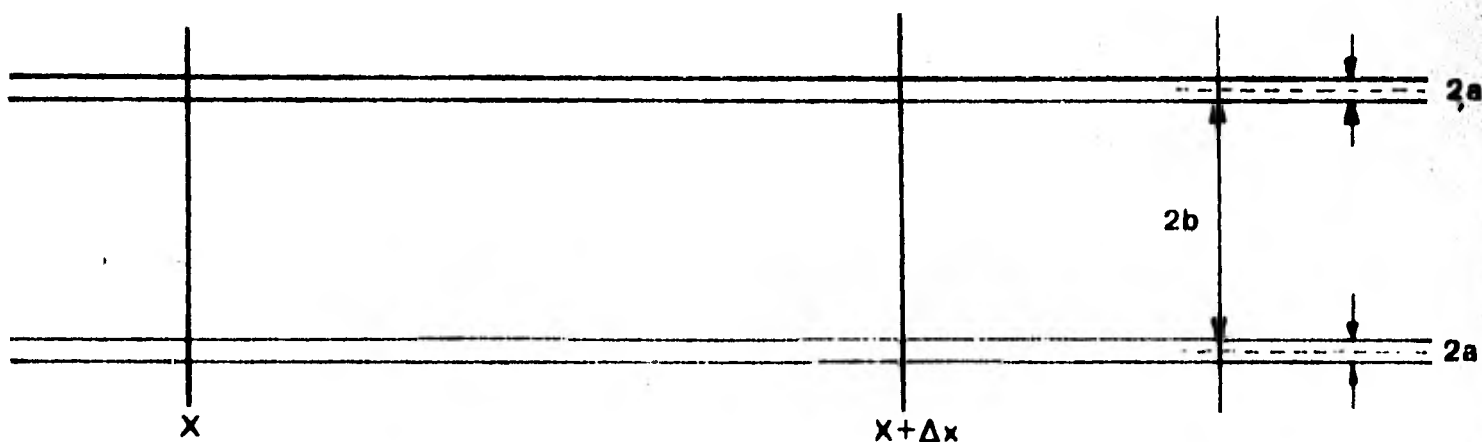


Fig. 50

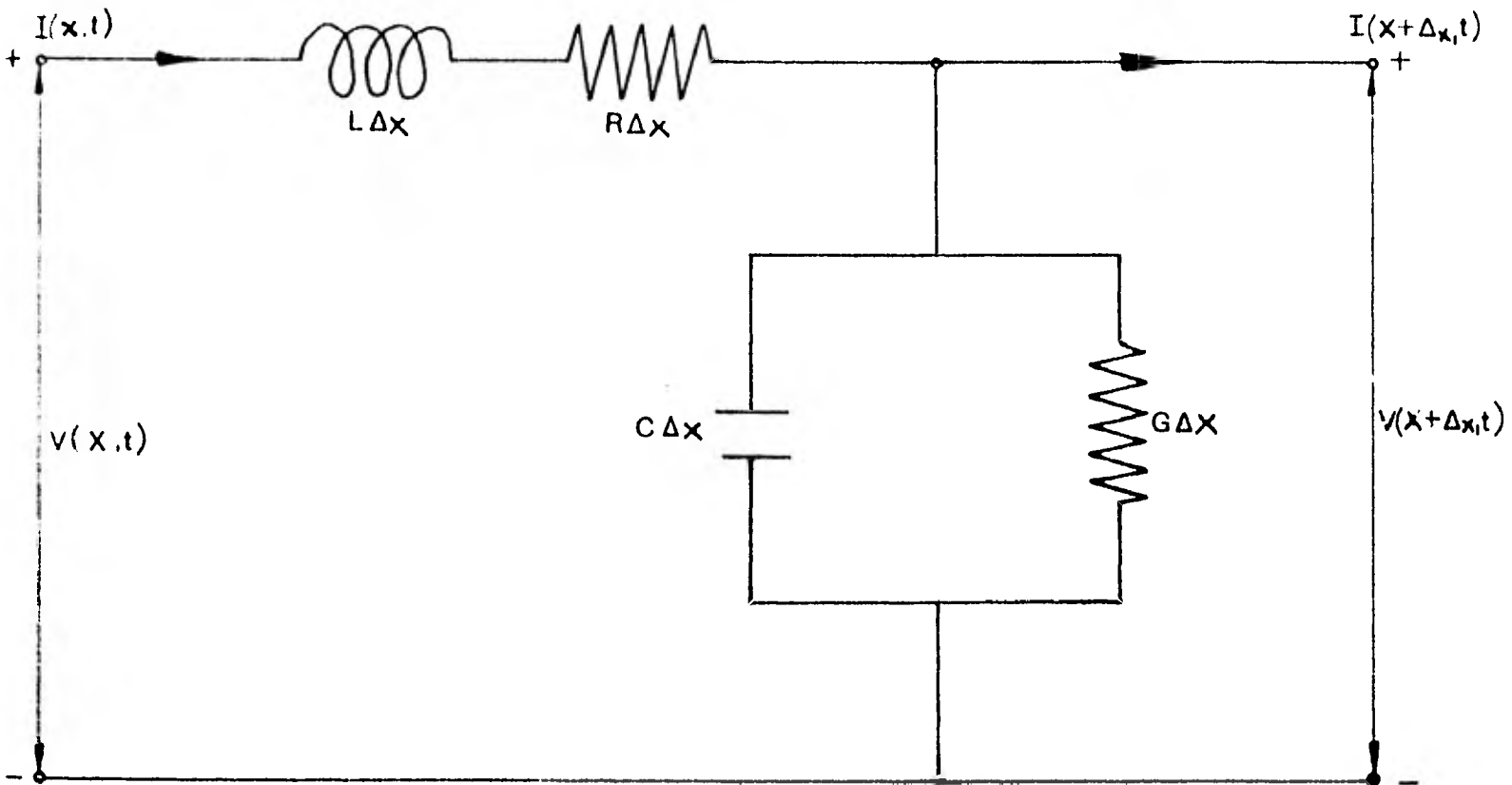


Fig. 51

Haciendo uso de las leyes de Kirchhoff:

$$V(x, t) - L\Delta x \frac{\partial}{\partial t} I(x, t) - R\Delta x I(x, t) - V(x+\Delta x, t) = 0 \quad 5.17$$

$$- \frac{V(x+\Delta x, t) - V(x, t)}{\Delta x} = L \frac{\partial}{\partial t} I(x, t) + RI(x, t)$$

$$\therefore - \frac{\partial}{\partial x} V(x, t) = L \frac{\partial}{\partial t} I(x, t) + RI(x, t) \quad 5.18$$

$$I(x, t) - C\Delta x \frac{\partial}{\partial t} V(x+\Delta x, t) - G\Delta x V(x+\Delta x, t) - I(x + \Delta x, t) = 0 \quad 5.19$$

$$- \frac{I(x+\Delta x, t) - I(x, t)}{\Delta x} = C \frac{\partial}{\partial t} V(x+\Delta x, t) + GV(x+\Delta x, t)$$

$$\therefore - \frac{\partial}{\partial x} I(x, t) = C \frac{\partial}{\partial t} V(x, t) + GV(x, t) \quad 5.20$$

Ahora derivando con respecto a x la ecuación (5.18) y luego la (5.20) obtenemos

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} V(x, t) = LC \frac{\partial^2}{\partial t^2} V(x, t) + (LG + CR) \frac{\partial}{\partial t} V(x, t) + RGV(x, t) \quad 5.21$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} I(x, t) = LC \frac{\partial^2}{\partial t^2} I(x, t) + (LG + CR) \frac{\partial}{\partial t} I(x, t) + RGI(x, t) \quad 5.22$$

A las ecuaciones (5.21) y (5.22) se les llama *ecuaciones de telegrafía*. Haciendo en estas dos últimas ecuaciones $R = G = 0$, es decir una línea de transmisión sin pérdida, encontramos las mismas ecuaciones de onda para una cuerda vibrante:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} V(x, t) = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} V(x, t) \quad 5.23$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} I(x, t) = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} I(x, t) \quad 5.24$$

donde $v = 1/\sqrt{LC}$

De aquí vemos que se esperarán resultados análogos a los de las cuerdas. Consideremos la siguiente línea de transmisión

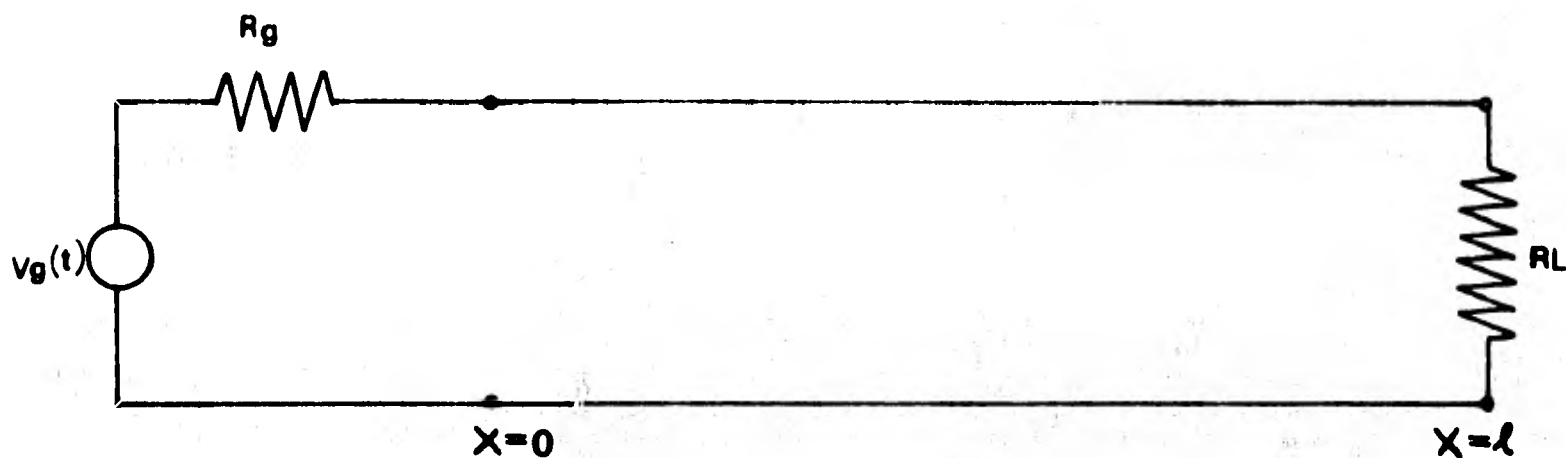


Fig. 52

En cualquier punto de la línea $\frac{V_+}{I_+} = R_0$, $\frac{V_-}{I_-} = -R_0$
 — donde V_+ e V_- significan voltajes hacia adelante y hacia atrás —
 excepto en $x = l$ donde $\frac{V_L}{I_L} = R_L$ pero $V_+ + V_- = V_L$ e
 $I_+ + I_- = I_L$ es decir

$$\frac{V_+}{R_0} - \frac{V_-}{R_0} = \frac{V_L}{R_L} \quad \text{que también podemos escribir como}$$

$$\frac{V_+ - V_-}{R_0} = \frac{V_+ + V_-}{R_L} \quad \text{y de aquí finalmente}$$

$$\therefore r = \frac{V_-}{V_+} = \frac{R_L - R_0}{R_L + R_0} \quad 5.25$$

$$\text{y como } \frac{V_+ - V_-}{R_0} = \frac{V_+ - (V_L - V_+)}{R_0} = \frac{V_L}{R_L} \quad \text{entonces también}$$

$$\therefore t = \frac{V_L}{V_+} = \frac{2R_L}{R_L + R_0} \quad 5.26$$

que no son otra cosa que los coeficientes de reflexión y transmisión. Con los resultados (3.11), (3.12) del capítulo 3 sobre Mecánica Cuántica, (5.16), (5.25) y (5.26) vemos clara la analogía entre cuerdas vibrantes con diferente densidad, línea de transmisión eléctrica y barreras de potencial cuánticas que resumiremos en el cuadro siguiente:

TABLA VII

Cuerda Vibrante con diferentes densidades	Línea de Transmisión Eléctrica	Barreras de Potencial Cuánticas
$\frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial t^2}$	$\frac{\partial^2 P(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 P(x,t)}{\partial t^2}$	
<p>con $v^2 = \tau/\mu$</p>	<p>con $P(x,t) = V(x,t) : I(x,t)$</p>	
$\frac{d^2 \chi(x)}{dx^2} = -k^2 \chi(x)$		$\frac{d^2 \psi(x)}{dx^2} = -k^2 \psi(x)$
<p>con $k = \omega/v$</p>		<p>con $k^2 = \epsilon - U; \epsilon = \frac{2mE}{\hbar^2}, u(x) = \frac{2mV(x)}{\hbar^2}$</p>
<p>y $Q(t) \sim e^{\pm i\omega t}$</p>		<p>y $\psi(x,t) = \psi(x) e^{-i \frac{E}{\hbar} t}$</p>
$R = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}$	$r = \frac{R_L - R_0}{R_L + R_0}$	$A = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}$
$F = \frac{2k_1}{k_1 + k_2}$	$t = \frac{2R_L}{R_L + R_0}$	$B = \frac{2k_1}{k_1 + k_2}$

Consideremos ahora la red eléctrica de la Figura 53

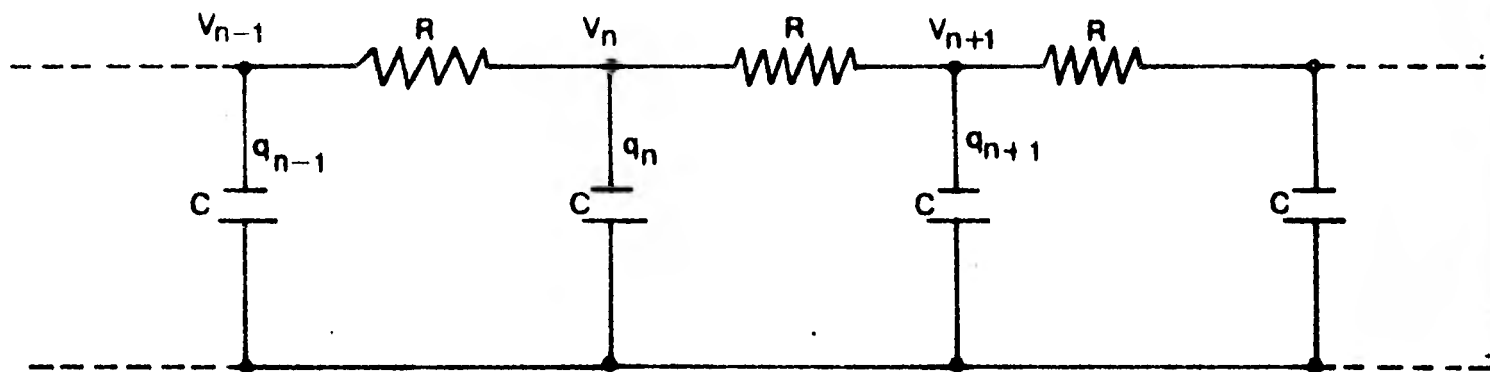


Fig. 53

El valor medio de la corriente que fluye hacia adentro y hacia afuera del electrodo superior del n -ésimo capacitor es

$$I_n = -\frac{1}{2} \left(\frac{V_{n+1} - V_{n-1}}{R} \right) \quad 5.27$$

y su diferencia es igual a la razón de cambio de la carga q_n sobre el n -ésimo capacitor:

$$\frac{dq_n}{dt} = \frac{V_{n+1} + V_{n-1} - 2V_n}{R} \quad 5.28$$

$$\therefore \frac{dV_n}{dt} = \frac{V_{n+1} + V_{n-1} - 2V_n}{RC} \quad 5.29$$

Si los distintos voltajes no varían demasiado rápido con n para considerarlos como valores de una función continua, entonces podemos desarrollar expresiones aproximadas para V_{n-1} y V_{n+1} haciendo uso de la expansión en series de Taylor, por lo que

$$V_{n-1} = V_n - \frac{\partial V_n}{\partial n} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V_n}{\partial n^2} \quad 5.30$$

$$V_{n+1} = V_n + \frac{\partial V_n}{\partial n} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V_n}{\partial n^2} \quad 5.31$$

Sustituyendo (5.30) y (5.31) en (5.27) y (5.29) obtenemos

$$I_n = - \frac{1}{R} \frac{\partial V_n}{\partial n} \quad 5.32a$$

$$I_n = - \frac{1}{RC} \frac{\partial q_n}{\partial n} \quad 5.32b$$

$$\frac{\partial V_n}{\partial t} = \frac{1}{RC} \frac{\partial^2 V_n}{\partial n^2} \quad 5.33a$$

$$\frac{\partial q_n}{\partial t} = \frac{1}{RC} \frac{\partial^2 q_n}{\partial n^2} \quad 5.33b$$

Por otra parte la ley de Fourier de la conducción térmica

$$J = -k \frac{\partial T}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = \frac{k}{s} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad 5.34$$

donde k es la conductividad térmica y s la capacidad calorífica por unidad de volumen y la ley de Fick de la difusión de partículas en una dimensión está dada por

$$J = - D \frac{\partial C}{\partial x} , \quad \frac{\partial^2 C}{\partial t^2} = D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \quad 5.35$$

donde D es el coeficiente de difusión y C la concentración de partículas a lo largo de la dirección del flujo.

Como se puede apreciar de las ecuaciones (5.32) y (5.33), (5.34) y (5.35) es clara la analogía que hay entre los fenómenos descritos anteriormente.

5.2 ANALOGIAS ENTRE GUIAS DE ONDAS, CAVIDADES RESONANTES Y FISICA CUANTICA

5.2.1 GUIAS DE ONDAS

Comenzaremos esta parte diciendo que: *una guía de ondas es un tubo de sección transversal arbitraria, el cual contiene en su interior un dieléctrico de baja pérdida y cuyas paredes son altamente conductoras. El objeto de una guía de ondas es transmitir energía electromagnética.*

Las ecuaciones de Maxwell son:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \quad , \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad 5.36$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \vec{J} \quad , \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 0 \quad 5.37$$

y suponiendo que la guía está vacía, entonces se tiene que dentro de ella

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} \quad , \quad \vec{B} = \mu_0 \vec{H} \quad , \quad \vec{J} = 0 \quad \text{y} \quad \rho = 0 \quad 5.38$$

El problema es determinar \vec{E} y \vec{H} , soluciones de las ecuaciones de Maxwell en el interior de la guía, sujetos a las condiciones de frontera adecuadas en la superficie de la guía. Como la componente normal de \vec{B} y la componente tangencial de \vec{E} deben ser continuas en una superficie entonces, las condiciones a la frontera son: \vec{E} es normal y \vec{H} es tangencial a la superficie.

Los campos siguientes, satisfacen las condiciones de frontera anteriores:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - \beta z)} \quad 5.39$$

$$\vec{H} = \vec{H}_0 e^{i(\omega t - \beta z)} \quad 5.40$$

donde \vec{E} y \vec{H} son funciones vectoriales de x e y , coordenadas en el plano de la sección transversal de la guía.

De las ecuaciones de Maxwell se puede ver fácilmente que los campos \vec{E} y \vec{H} satisfacen una ecuación de onda, como es de esperarse:

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0, \quad \nabla^2 \vec{H} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0 \quad 5.41$$

donde $c^2 = 1/\mu_0 \epsilon_0$.

Para saber bajo qué condiciones los campos \vec{E} y \vec{H} satisfacen las ecuaciones de onda, sustituyamos (5.39) y (5.40); lo que nos da

$$\frac{\partial^2 \vec{E}_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}_0}{\partial y^2} + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - \beta^2 \right) \vec{E}_0 = 0 \quad 5.42$$

y una ecuación igual para \vec{H} .

Si hacemos

$$\frac{\omega^2}{c^2} - \beta^2 = \left(\frac{2\pi}{\lambda_c} \right)^2 \quad 5.43$$

$$\frac{\omega^2}{c^2} = \left(\frac{2\pi}{\lambda_0} \right)^2 \quad 5.44$$

$$\beta^2 = \left(\frac{2\pi}{\lambda_g} \right)^2 \quad 5.45$$

entonces $\frac{1}{\lambda_o^2} = \frac{1}{\lambda_g^2} + \frac{1}{\lambda_c^2}$ 5.46

donde λ_o recibe el nombre de longitud de onda en el espacio libre, λ_g longitud de onda de la guía λ_c longitud de onda de corte.

Analicemos la ecuación (5.46)

- (a) Si $\lambda_o > \lambda_c$ entonces $\lambda_g^{-2} < 0$ y por lo tanto λ_g es un número complejo.
- (b) Si $\lambda_o < \lambda_c$ entonces $\lambda_g^{-2} > 0$ y por lo tanto λ_g es un número real.

De lo anterior se desprende que sólo longitudes de onda más cortas (altas frecuencias) que la longitud de onda de corte se propagarán en la guía.

5.2.2 ONDAS EMT, MT y ET

Las soluciones particulares de las ecuaciones de Maxwell se pueden clasificar de acuerdo a que las componentes de \vec{E} ó \vec{H} existan o no en la dirección de propagación: tomemos al eje z en la dirección de propagación

1^{ro} Se puede demostrar que no pueden existir puramente ondas longitudinales. Tomemos $E_x = E_y = H_x = H_y = 0$, luego

$$(\nabla \times \vec{E})_z = -i\omega\epsilon_0 \vec{H}_z = \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = 0$$

y $(\nabla \times \vec{H})_z = i\omega\epsilon_0 E_z = \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = 0$

y por lo tanto todas las componentes son nulas.

2^{do} Existen puramente ondas transversas en las que ni \vec{E} ni \vec{H} tienen componentes longitudinales. Tales ondas reciben el nombre de *ondas electromagnéticas - transversas (EMT) u ondas principales*.

3^{ro} Pueden existir ondas transversas en las que solamente \vec{E} tenga componentes longitudinales. Tales ondas reciben el nombre de *ondas magnético - transversas (MT) u ondas - E*.

4^o Pueden existir ondas transversas en las que solamente \vec{H} tenga componentes longitudinales. Tales ondas reciben el nombre de *ondas eléctrico - transversas (ET) u ondas - H*.

Esta clasificación es inclusiva, ya que todas las soluciones posibles de las ecuaciones de Maxwell se pueden construir por medio de combinaciones lineales de soluciones elementales de los últimos tres tipos.

Se dice que una onda es plana si las superficies equipases, en un instante de tiempo dado, son planos.

Una onda es uniforme si no hay cambio en la amplitud a lo largo de la superficie equipase.

Si tomamos al plano $x - y$ como la superficie equipase luego $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} = 0$ y E_z y H_z deben ser cero.

Una onda plana uniforme es por lo tanto una onda electromagnética transversa (EMT).

Las ecuaciones de Maxwell en general las podemos escribir como sigue:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, \quad \vec{\nabla} \times \vec{H} = \sigma \vec{E} + \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t},$$

5.47

$$\vec{\nabla} \cdot (\mu \vec{H}) = 0, \quad \vec{\nabla} \cdot (\epsilon \vec{E}) = \rho$$

donde $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$, $\vec{B} = \mu \vec{H}$, $\vec{J} = \sigma \vec{E}$

Para campos que varían armónicamente con el tiempo, las ecuaciones de Maxwell toman una forma muy simple, $\vec{E} = \vec{E}e^{i\omega t}$, $\vec{H} = \vec{H}e^{i\omega t}$, donde las amplitudes \vec{E} y \vec{H} son números complejos y de esta manera se incluyen la fase de los campos. Por lo tanto

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -i\omega\vec{H} \quad 5.48$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + i\omega\epsilon\vec{E} = (\sigma + i\omega\epsilon)\vec{E}$$

el otro par de ecuaciones quedan sin alterarse.

Para ondas planas uniformes las ecuaciones (5.48) se reducen a

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = -i\omega\mu H_y, \quad \frac{\partial H_y}{\partial z} = -(\sigma + i\omega\epsilon)E_x \quad 5.49$$

Si eliminamos a H_y de las ecuaciones anteriores, obtenemos

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} - i\omega\mu(\sigma + i\omega\epsilon)E_x = 0 \quad 5.50$$

una ecuación idéntica existe para H_y .

La solución de la ecuación (5.50) es $E_x = Ee^{-\gamma z}$, donde

$$\gamma = \sqrt{i\omega\mu\sigma - \omega^2\epsilon\mu} = \alpha + i\beta \quad 5.51$$

La cantidad γ recibe el nombre de *constante de propagación* de la onda, su parte real α es el de *constante de atenuación* y la parte imaginaria, β , el de *constante de fase*. Así los casos

$$v = \frac{\omega}{\beta} \quad \text{y} \quad \lambda = \frac{2\pi}{\beta}$$

la cantidad β es lo que hemos venido a llamar el *número de onda*, k , aunque, hablando estrictamente es el número de radianes por unidad de longitud y no el número de longitudes de onda.

Veamos ahora las soluciones en que \vec{E} es completamente transverso. Estas soluciones representan ondas eléctrico-transversas (ondas - ET) u ondas - H.

La conductividad del medio se omite explícitamente ya que se considerará contenida en la parte imaginaria de la constante dieléctrica ϵ .

Si $E_z = 0$, las ecuaciones de Maxwell, escritas en forma cartesiana, son

$$\frac{\partial E_y}{\partial z} = i\omega\mu H_x, \quad \frac{\partial E_x}{\partial z} = -i\omega\mu H_y \quad 5.51$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = i\omega\epsilon E_x, \quad \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} = i\omega\epsilon E_y \quad 5.52$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -i\omega\mu H_z \quad 5.53$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = 0 \quad 5.54$$

para las rotacionales, y

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} = 0 \quad 5.55$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0 \quad 5.56$$

para las divergencias.

Si suponemos que la variación con z de las cinco componentes de \vec{E} y \vec{H} están dadas por $e^{-\gamma z}$, luego las componentes del campo toman la forma $E_x(z) = e^{-\gamma z} E_x$ y expresiones similares para las otras componentes. De acuerdo con esto las ecuaciones (5.51) nos dan

$$E_y = - \frac{i\omega\mu}{\gamma} H_x, \quad E_x = \frac{i\omega\mu}{\gamma} H_y \quad 5.57$$

La impedancia de la onda, Z_H , es

$$Z_H = \frac{E_x}{H_y} = \frac{i\omega\mu}{\gamma}$$

también, $\frac{E_x}{E_y} = - \frac{H_y}{H_x} \quad 5.58$

Este resultado es significativo. El conjunto de líneas en el plano transversal que da la dirección del campo eléctrico transverso E_t en cualquier punto tiene como pendiente a $dy/dx = E_y/E_x$. Una expresión similar para las líneas magnéticas. La ecuación (5.58) es equivalente a

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\text{eléctrico}} \cdot \left(\frac{dy}{dx}\right)_{\text{magnético}} = -1$$

y las líneas de fuerza eléctrica y magnética son por lo tanto mutuamente perpendiculares en el plano transversal.

Si las variaciones con z expresadas anteriormente y los valores de E_x y E_y dados por las ecuaciones (5.57) se sustituyen en las ecuaciones (5.52), entonces se puede resolver para $\partial H_z / \partial x$ y $\partial H_z / \partial y$, dando

$$\frac{\partial H_z}{\partial x} = - \frac{\gamma^2 + \omega^2 \epsilon \mu}{\gamma} H_x , \quad 5.59$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} = - \frac{\gamma^2 + \omega^2 \epsilon \mu}{\gamma} H_y .$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} - i H_z = 0 \quad 5.60$$

sustituyendo ahora H_x y H_y de las ecuaciones (5.59) obtenemos

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial y^2} + (\gamma^2 + \omega^2 \epsilon \mu) H_z = 0 \quad 5.61$$

La ecuación anterior, obviamente que es una ecuación de onda. Si introducimos k_c , definida por

$$k_c^2 = \gamma^2 + \omega^2 \epsilon \mu \quad 5.62$$

luego los números k_c^2 son los valores característicos o eigenvalores, de la ecuación (5.61). A cada valor de k_c^2 corresponderá una función H_z , una función característica, a partir de la cual se pueden obtener las otras componentes de los campos.

Por separación de variables, la solución de (5.61) es

$$H_z = \cos k_x x \cos k_y y \quad 5.63$$

$$\text{con } k_c^2 = k_x^2 + k_y^2 = \gamma^2 + \omega^2 \mu \epsilon \quad 5.64$$

y a partir de este resultado, obtenemos

$$H_x = \frac{\gamma k_x}{k_x^2 + k_y^2} \sin k_x x \cos k_y y \quad 5.65$$

$$H_y = \frac{\gamma k_y}{k_x^2 + k_y^2} \cos k_x x \sin k_y y \quad 5.66$$

$$E_x = \frac{i\omega\mu k_y}{k_x^2 + k_y^2} \cos k_x x \sin k_y y \quad 5.67$$

$$E_y = -\frac{i\omega\mu k_x}{k_x^2 + k_y^2} \sin k_x x \cos k_y y \quad 5.68$$

Si la sección transversal de la guía es rectangular con dimensiones A en x y B en y , debemos aplicar las condiciones a la frontera.

$$E_x = 0 \text{ para } y = 0, \quad y = B \implies k_y = \frac{n\pi}{B}$$

$$E_y = 0 \text{ para } x = 0, \quad x = A \implies k_x = \frac{m\pi}{A}$$

con n y m enteros, incluyendo el cero.

De la ecuación (5.62) y estos resultados, tenemos que

$$\gamma^2 = \left(\frac{m\pi}{A}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{B}\right)^2 - \omega^2 \mu \epsilon \quad 5.69$$

Si no hay pérdidas presentes en el medio, entonces la frecuencia crítica está dada

$$\omega_c^2 = \frac{1}{\mu \epsilon} \left[\left(\frac{m\pi}{A}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{B}\right)^2 \right] \quad 5.70$$

Si λ_g es la longitud de onda de la guía, entonces

$$\gamma = i \left(\frac{2\pi}{\lambda_g}\right) \quad 5.71$$

$$y \quad \left(\frac{2\pi}{g}\right)^2 = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 - \left(\frac{m\pi}{A}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{B}\right)^2 \quad 5.72$$

$$\text{o bien} \quad \lambda_g = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{c}\right)^2}} \quad 5.73$$

$$\text{donde} \quad \frac{1}{\lambda_c^2} = \left(\frac{n}{2a}\right)^2 + \left(\frac{m}{2b}\right)^2 \quad 5.74$$

λ_c , longitud de onda de corte.

Un par de valores de n y m es suficiente para designar un modo particular, de acuerdo con nuestra notación, un modo ET_{mn} . El modo que tiene la frecuencia crítica más baja de propagación es el modo - ET_{10} . Si $A > B$. La frecuencia crítica es

$$\omega_c^2 = \frac{\pi}{\epsilon\mu A} \quad 5.75$$

y la longitud de onda de corte es

$$\lambda_c = 2A \quad 5.76$$

Este modo más bajo recibe el nombre de *modo dominante*.

5.3 TUNELAMIENTO CUANTICO Y GUIAS DE ONDA

En este momento podemos trazar otra analogía física entre un fenómeno clásico y uno cuántico, el de tunelamiento. Consideremos el problema unidimensional de la transmisión de una partícula a través de una región cuya energía potencial es más grande que la energía de la partícula. (Ver Figura 54).

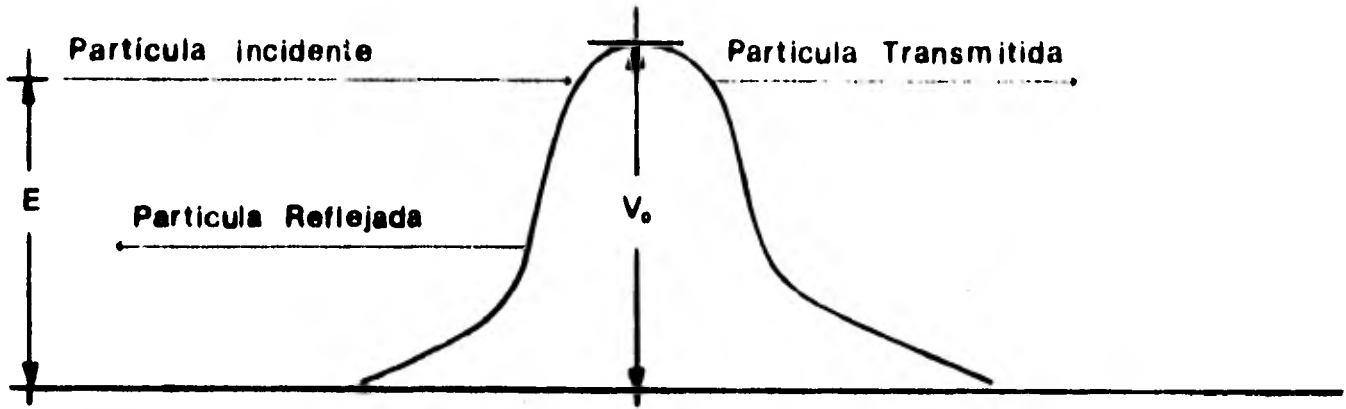


Fig. 54

El problema clásico se refiere al de una gafa de ondas con regiones discontinuas como se puede apreciar en la siguiente figura, donde además se hace una comparación con el tunelamiento cuántico.

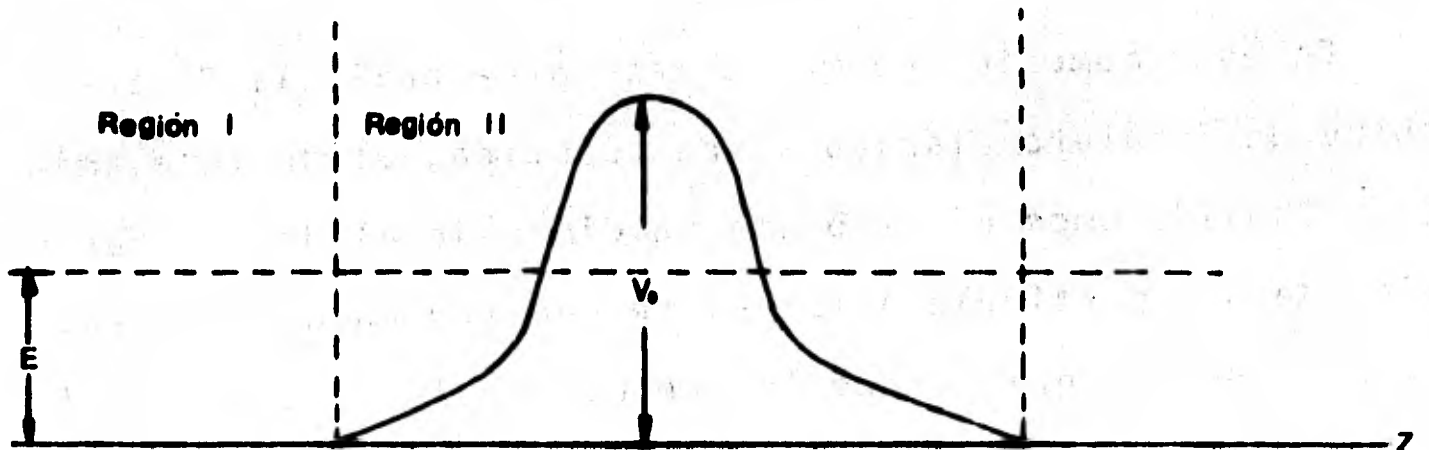


Fig. 55.a

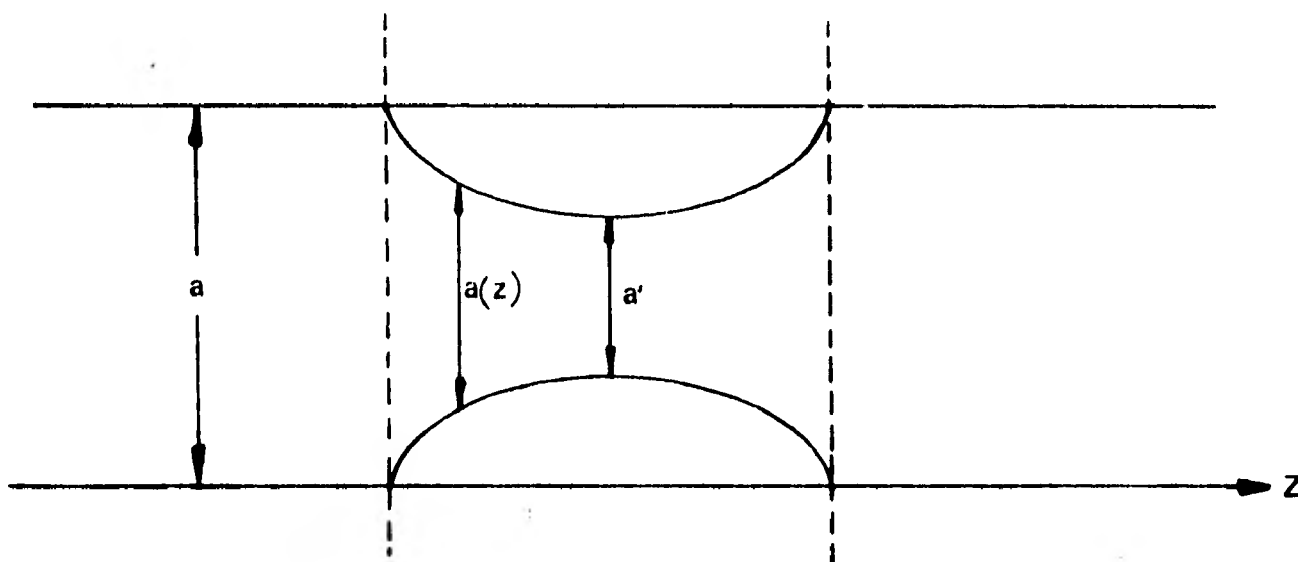


Fig. 55.b

La analogía entre una barrera cuántica y las regiones dis-
continuas de una guía de ondas la podemos apreciar cuando com-
paramos, adecuadamente, los resultados que aparecen tabulados
en los siguientes cuadros y que provienen de los resultados
en la sección anterior y de la primera parte del capítulo 3.

TABLA VIII

Regiones	Figura a	Figura b
Región I	$k^2 = \left(\frac{2mE}{h^2}\right)^2 = \left(\frac{2}{\lambda_E}\right)^2$ <p>λ_E : longitud de onda de Broglie de la partícula</p>	$k^2 = \left[\mu \epsilon \omega^2 - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 \right]$ <p>$\lambda_c = 2a$: longitud de onda de corte</p> $k^2 = \frac{2\pi}{\lambda} \left[1 - \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2 \right]$
Región II	<p>Si $E > V_0$</p> $k^2 = \left(\frac{2m}{h^2}\right) [E - V(z)]$ $= \frac{2\pi}{\lambda_E} [1 - V(z)E]$	<p>Si $\lambda < 2a'$</p> $k^2 = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 \left[1 - \frac{\lambda}{2a(z)} \right]$
	<p>Si $E < V_0$</p> $k^2 = \left(\frac{2m}{h^2}\right) [V(z) - E]$ $= \left(\frac{2\pi}{\lambda_E}\right) \left[\frac{V(z)}{E} - 1 \right]$	<p>Si $\lambda > 2a'$</p> $k^2 = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 \left[\frac{\lambda}{2a(z)} - 1 \right]$

Sea s una constante de proporcionalidad entre las constantes de propagación de los dos sistemas. Luego

$$k_{MC} = s k_{GO} \quad 5.77$$

$$\text{para } V(z) = 0, \quad \lambda < 2a : \frac{2\pi}{\lambda_E} = \frac{2\pi s}{\lambda} \left[1 - \left(\frac{\lambda}{2a} \right)^2 \right]^{1/2} \quad 5.76$$

$$\begin{aligned} \text{para } E > V_0, \quad \lambda > 2a : \frac{2\pi}{\lambda_E} \left[1 - \frac{V(z)}{E} \right]^{1/2} = \\ = \frac{2\pi s}{\lambda} \left\{ 1 - \left(\frac{\lambda}{2a(z)} \right)^2 \right\}^{1/2} \end{aligned} \quad 5.79$$

$$\begin{aligned} \text{para } E < V_0, \quad 2a' < \lambda < 2a : \frac{2\pi}{\lambda_E} \left[\frac{V(z)}{E} - 1 \right]^{1/2} \\ = \frac{2\pi s}{\lambda} \left\{ \left[\frac{\lambda}{2a(z)} \right]^2 - 1 \right\}^{1/2} \end{aligned} \quad 5.80$$

Si $E < V_0$, entonces de 5.76 y 5.80 obtenemos

$$\frac{E}{V(z)} = \frac{\left(\frac{2a}{\lambda} \right)^2 - 1}{\left[\frac{a}{a(z)} \right]^2 - 1} \quad 5.81$$

Si suponemos que la frecuencia del generador simula la energía cinética de la partícula, luego $E \rightarrow V_0$, $\lambda \rightarrow 2a'$

$$y \quad \frac{V_0}{V(z)} = \frac{\left(\frac{a}{a'}\right)^2 - 1}{\left[\frac{a}{a(z)}\right]^2 - 1} \quad 5.82$$

En general $V(z) = V_0 g(z)$, donde $g(z)$ es la función barrera y V_0 es el valor máximo de la barrera formada positivamente o el valor máximo de la barrera formada negativa mente. Luego

$$g(z) = \frac{\left[\frac{a}{a(z)}\right]^2 - 1}{\left(\frac{a}{a'}\right)^2 - 1} \quad 5.83$$

$$y \quad a(z) = a \left\{ 1 + g(z) \left[\left(\frac{a}{a'}\right)^2 - 1 \right] \right\}^{-1/2} \quad 5.84$$

En el caso de una barrera de potencial rectangular se tiene que

$$V(z) = V_0 g(z)$$

$$\text{donde} \quad g(z) = 0 \quad \text{para} \quad z \leq 0 \quad \text{y} \quad z \geq \ell_V$$

$$= 1 \quad \text{para} \quad 0 < z < \ell_V$$

5.85

El coeficiente de transmisión para esta barrera es

$$T^{-1} = 1 + \frac{1}{4} \frac{\text{sen } h^2 k' \ell_v}{\left(\frac{E}{V_0}\right) \left(1 - \frac{E}{V_0}\right)} \quad \text{para } E < V_0 \quad 5.86$$

$$\text{donde } k' = \left(\frac{2\pi}{\lambda_v}\right) \left(1 - \frac{E}{V_0}\right)^{1/2} \quad 5.87$$

$$\text{y } T^{-1} = 1 + \frac{1}{4} \frac{\text{sen}^2 k' \ell_v}{\left(\frac{E}{V_0}\right) \left(\frac{E}{V_0} - 1\right)} \quad \text{para } E > V_0 \quad 5.88$$

$$\text{donde } k' = \left(\frac{2\pi}{\lambda_v}\right) \left(\frac{E}{V_0} - 1\right)^{1/2} \quad 5.89$$

λ_v es la longitud de onda de Broglie que es igual a la longitud de onda de la partícula cuya energía cinética iguala a la energía de la barrera. De (5.78) vemos que como $\lambda_E \rightarrow \lambda_v$, $\lambda \rightarrow 2a$, entonces

$$\frac{1}{\lambda_v} = \left(\frac{S}{a'}\right) \left[1 - \left(\frac{a'}{a}\right)^2\right]^{1/2} \quad 5.90$$

sea q la constante de proporcionalidad entre la longitud de la barrera y la longitud de la discontinuidad de la guía de ondas, ℓ , luego

$$\ell_v = q\ell \quad 5.91$$

y

$$\frac{\ell_v}{\ell} = \left(\frac{M\ell}{a'}\right) \left[1 - \left(\frac{a'}{a}\right)^2\right]^{1/2} \quad 5.92$$

donde M es la constante adimensional qs . El contorno de la guía de ondas que estamos utilizando viene dado en la Figura 57

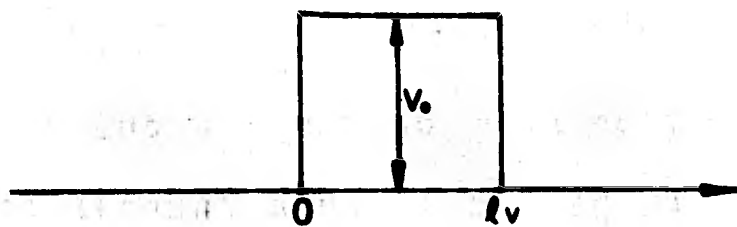


Fig. 56

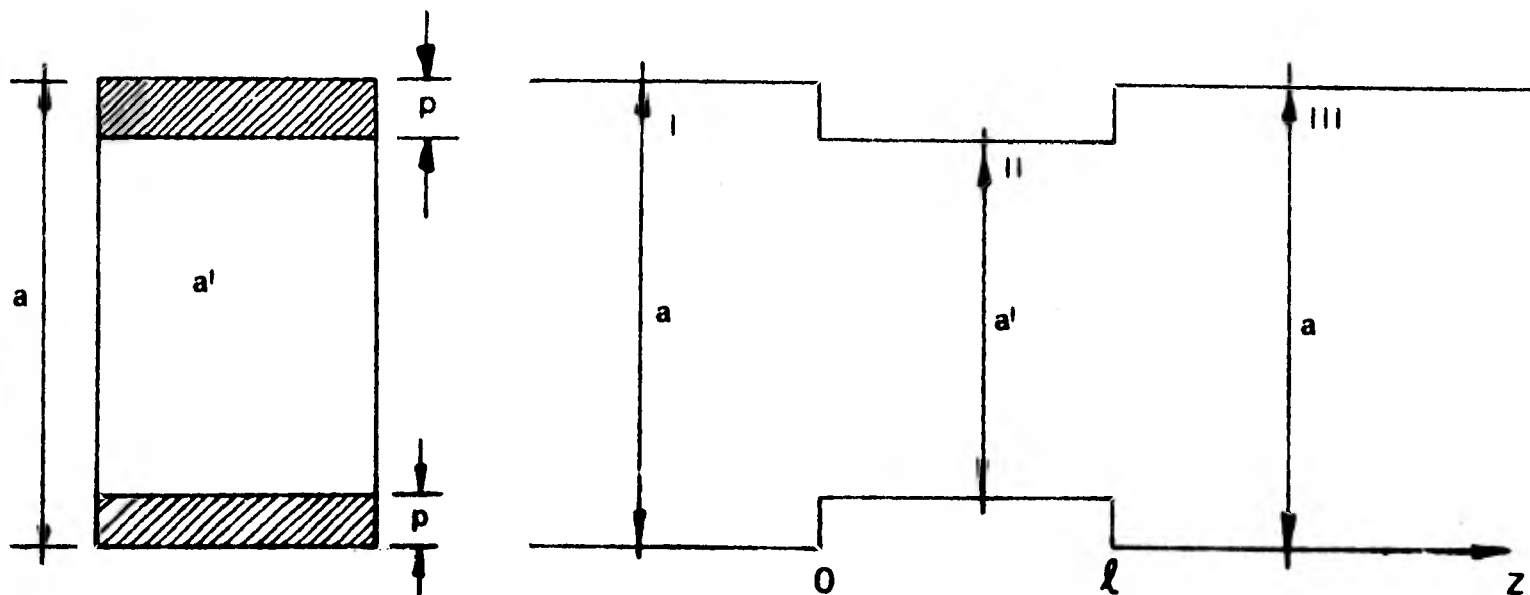


Fig. 57

Con un modo incidente ET_{10} en la región $z < 0$, el campo electromagnético en las tres regiones se expresa en términos de la componente transversa

Región I:

$$E_y^{(1)} = A_1(e^{ikz} + e^{-ikz}) \operatorname{sen} \left(\frac{\pi x}{a} \right) + \sum_{n=3,5,\dots}^{\infty} A_n \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{a} \right) e^{-knz} \quad 5.93$$

$$H_x^{(1)} = Y_1 A_1(e^{ikz} - e^{-ikz}) \operatorname{sen} \left(\frac{\pi x}{a} \right) + \sum_{n=3,5,\dots}^{\infty} Y_n A_n \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{a} \right) e^{-knz} \quad 5.94$$

donde

$$k = \omega \mu \epsilon - \left(\frac{\pi}{a} \right)^2, \quad k_n = \left(\frac{n\pi}{a} \right)^2 - \omega^2 \mu \epsilon \quad 5.95$$

$$Y_1 = \frac{k}{\omega\mu} ; \quad Y_n = \frac{k_n}{i\omega\mu} , \quad A_1 = \frac{i\omega\mu a}{\pi} \quad 5.96$$

Región II:

$$E_y^{(2)} = \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} B_n \operatorname{sen} \left[\frac{n\pi}{a} (x - p) \right] e^{k_n z} + \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} C_n \operatorname{sen} \left[\frac{n\pi}{a} (x - p) \right] e^{-k_n z} \quad 5.97$$

$$H_x^{(2)} = \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} Y_n' B_n \operatorname{sen} \left[\frac{n\pi}{a} (x - p) \right] e^{k_n' z} + \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} Y_n' C_n \operatorname{sen} \left[\frac{n\pi}{a} (x - p) \right] e^{-k_n' z} \quad 5.98$$

donde

$$k_n' = \left(\frac{n\pi}{a} \right)^2 - \omega^2 \mu \epsilon , \quad Y_n' = \frac{k_n'}{i\omega\mu} \quad 5.99$$

Región III:

$$E_y^{(3)} = t \operatorname{sen} \left(\frac{\pi x}{a} \right) e^{ikz} + \sum_{n=3,5,\dots}^{\infty} D_n \left(\frac{n\pi x}{a} \right) e^{k_n z} \quad 5.100$$

$$H_x^{(3)} = -Y_1 t \operatorname{sen} \left(\frac{\pi x}{a} \right) e^{ikz} - \sum_{n=3,5,\dots}^{\infty} Y_n D_n \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{a} \right) e^{k_n z} \quad 5.101$$

Igualando los campos en las fronteras y resolviendo para t/A , obtenemos el coeficiente de potencia transmitida $T = tt^*/A_1A_1^*$, que es aproximadamente

$$T^{-1} \approx 1 + \frac{1}{4} \left[\left(\frac{k'}{k} \right)^2 + 2 \right] \text{sen } h^2 k' \ell \quad 5.102$$

donde $k = \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right) \left[\left(\frac{\lambda}{2a} \right)^2 \right]$ 5.103

y $k' = \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right) \left[\left(\frac{\lambda}{2a'} \right)^2 - 1 \right]^{1/2}$ para $2a' < \lambda < 2a$ 5.104

Sustituyendo las condiciones, $V(z) = V_0$ y $a(z) = a'$, en la ecuación (5.81), tenemos la relación análoga

$$\left(\frac{k'}{k} \right)^2 + \left(\frac{k}{k'} \right)^2 + 2 = \left[\frac{E}{V_0} \left(1 - \frac{E}{V_0} \right) \right]^{-1} \quad 5.105$$

5.4 CAVIDADES RESONANTES Y GUIA DE ONDAS ACOPLADAS Y PARTICULAS ELEMENTALES

Una *cavidad resonante* la podemos definir como sigue:

una región del espacio totalmente encerrada por paredes hechas de buenos conductores.

Los campos dentro de una cavidad hueca se encuentran como ya lo hicimos en el capítulo 2 resolviendo las ecuaciones de Maxwell con las condiciones de frontera apropiadas.

Consideramos una cavidad rectangular (Figura 58) en donde las paredes perpendiculares a los ejes x e y son conductores eléctricos (E normal a la frontera), pero para las paredes perpendiculares al eje z elegimos un conductor magnético hipotético en donde los papeles que juegan E y H son invertidos. Esta convención no es esencial, pero simplifica la discusión.

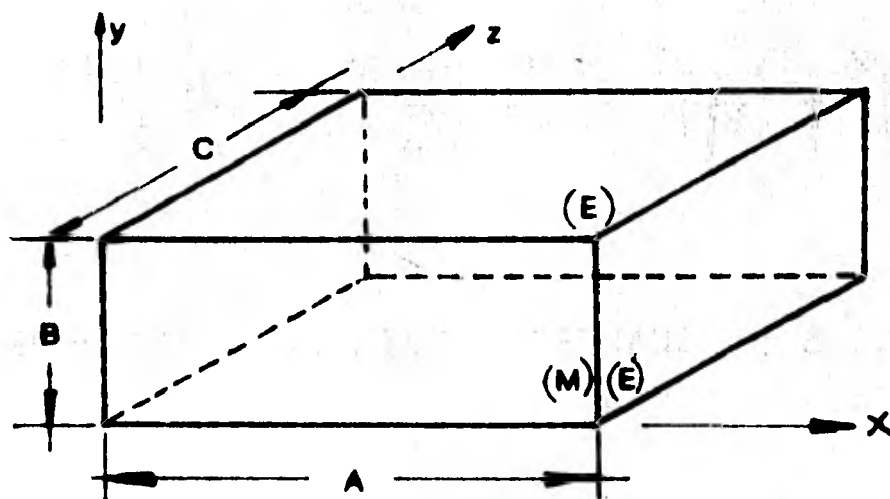


Fig. 58

La componente z del campo eléctrico como una función de las coordenadas espaciales, como lo hemos venido haciendo, es

$$E_z = E_0 \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{A} \operatorname{sen} \frac{m\pi y}{B} \operatorname{sen} \frac{\ell\pi z}{C} \quad 5.106$$

y la condición de frontera $E = 0$ en las paredes nos da que

$$\left(\frac{2\nu}{c}\right)^2 = \left(\frac{n}{A}\right)^2 + \left(\frac{m}{B}\right)^2 + \left(\frac{\ell}{C}\right)^2 \quad 5.107$$

donde ν es la frecuencia y n , m y ℓ son los número modo. El modo de oscilación está denotado por el símbolo (n, m, ℓ) .

La frecuencia más baja para la cual la cavidad resuena corresponde al modo $(1, 1, 1)$.

Aquí podemos definir la "paridad" de los modos en términos de sus simetrías con respecto a los planos que pasan a través del centro de la cavidad. La *paridad* es *par* o *impar* si el número modo es par o impar. Hay paridad asociada con cada número modo.

Cuando una cavidad no está limitada en una dirección entonces lo que tenemos es una gufa de onda (Figura 59) y por tanto hay solamente dos números modo n y m , ya que la longitud de onda en la dirección z puede tomar cualquier valor.

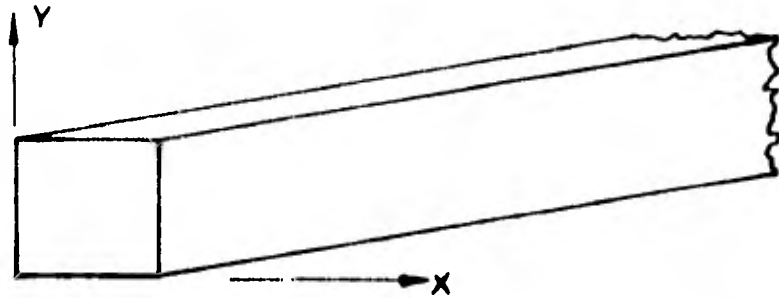


Fig. 59

De acuerdo con los resultados que hemos obtenido en la discusión de las guías de onda λ puede tomar todos los valores desde $2AB/(A^2 + B^2)^{1/2}$ hasta infinito cuando v está variando.

Tomemos ahora el caso de una cavidad cúbica de lado L acoplada con una guía de ondas de tamaño $L \times \frac{1}{2} L$ (Figura 60). Si nos imaginamos un "modo filtro" que sólo permita propagar bajo la guía un modo particular el modo $(1, 1, -)$ y si además despreciamos la distorsión del campo de la cavidad causada por la guía de ondas, entonces, la frecuencia de corte de la guía de onda se establece entre las frecuencias de los modos $(1, 1, 1)$ y $(1, 1, 2)$ en la cavidad, de tal manera que con la potencia del primer modo no pueda escapar a lo largo de la guía de ondas, mientras que en el último caso sí lo puede hacer. El decaimiento de los modos $(2, 1, 1)$ y $(1, 2, 1)$ por escape de la potencia a lo largo

de la guía de onda está prohibido en razón de la simetría del sistema, como se puede comprobar por inspección.

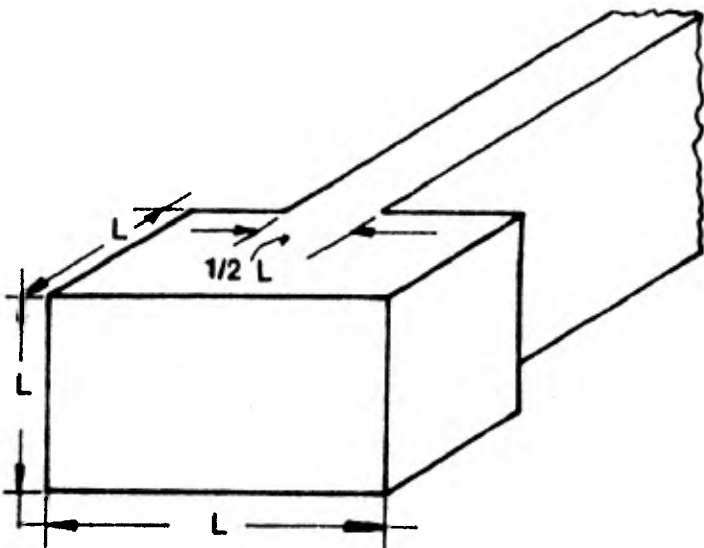


Fig. 60

Si excitamos la cavidad con una pequeña prueba incrementando la frecuencia gradualmente desde cero, veamos que es lo que pasa:

La ecuación (5.107) muestra que una *resonancia* ocurre cuando

$$\nu = \frac{c}{2L} (n^2 + m^2 + l^2)^{1/2} \quad 5.108$$

El valor más bajo de ν es por lo tanto $\sqrt{3} c/2L$. En la guía de ondas el campo es tal que $\lambda_z^2 = -2L^2$ si sustituí-

mos $A = \frac{1}{2} L$, $B = L$ y $v = \sqrt{3} C/2L$ en la ecuación

$$\frac{1}{\lambda_z^2} = \left(\frac{v}{C}\right)^2 - \frac{1}{4} \left[\left(\frac{n}{A}\right)^2 + \left(\frac{m}{B}\right)^2 \right] \quad 5.109$$

Como λ_z es un imaginario puro, la onda en la gufa es por lo tanto una onda desvaneciente.

Si la prueba es removida la cavidad oscilaría indefinidamente. El sistema, oscilando en el modo (1, 1, 1), tiene una vida media infinita.

Ahora incrementemos la frecuencia de tal manera que cuando llegue a $v = \sqrt{6} C/2L$ la ecuación (5.107) muestra que los tres modos (1, 1, 2), (1, 2, 1) y (2, 1, 1) pueden ser excitados. Si consideramos el primero de estos modos (1, 1, 2), determinamos que $\lambda_z^2 = + L^2$. Así λ_z es real y la potencia se puede escapar a lo largo de la gufa de ondas; si ahora separamos la prueba, el campo en la cavidad decaerá con una constante de tiempo que depende de la geometría interna de la unión entre la gufa de ondas y la cavidad.

5.4.1 ECUACION DE KLEIN-GORDON

Veamos ahora que es lo que pasa en Mecánica Cuántica:

Las propiedades ondulatorias de una partícula relativista en el espacio libre están expresadas de la manera más simple a través de la ecuación de Einstein

$$E^2 = p^2 c^2 + M_0^2 c^4 \quad 5.110$$

Si reemplazamos a E y p por sus correspondientes operadores

$$E \rightarrow ih \frac{\partial}{\partial t}, \quad \vec{p} \rightarrow -ih\vec{\nabla} \quad 5.111$$

y definiendo la longitud de onda Compton como

$$\lambda_0 = \frac{h}{M_0 c} \quad 5.112$$

la ecuación (5.110) nos conduce a la ecuación de Klein-Gordon

$$\left[\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \left(\frac{2\pi}{\lambda_0} \right)^2 \right] \psi = 0 \quad 5.113$$

con la solución

$$\psi = \psi_0 \exp 2\pi i \left(\frac{x}{\lambda} - vt \right) \quad 5.114$$

$$\text{donde } \frac{1}{\lambda^2} = \frac{v^2}{c^2} - \frac{1}{\lambda_0^2} \quad 5.115$$

y de la ecuación (5.111)

$$E = h\nu, \quad p = \frac{h}{\lambda}. \quad 5.116$$

En un sistema unidimensional:

Si $v > \frac{c}{\lambda_0}$ se tiene una amplitud independiente de x . Si definimos la frecuencia —y de aquí el momentum, si la masa es conocida —, luego es igualmente probable determinar la partícula, representada por la función de onda, en cualquier valor de x .

Si $v < \frac{c}{\lambda_0}$, entonces esto representa una energía menor que la energía en reposo de la partícula y momentum es imaginario. La amplitud de ψ crece exponencialmente con x y para evitar un valor infinito de la función de onda de la partícula debe terminar en una "fuente". Tal partícula se describe como "virtual".

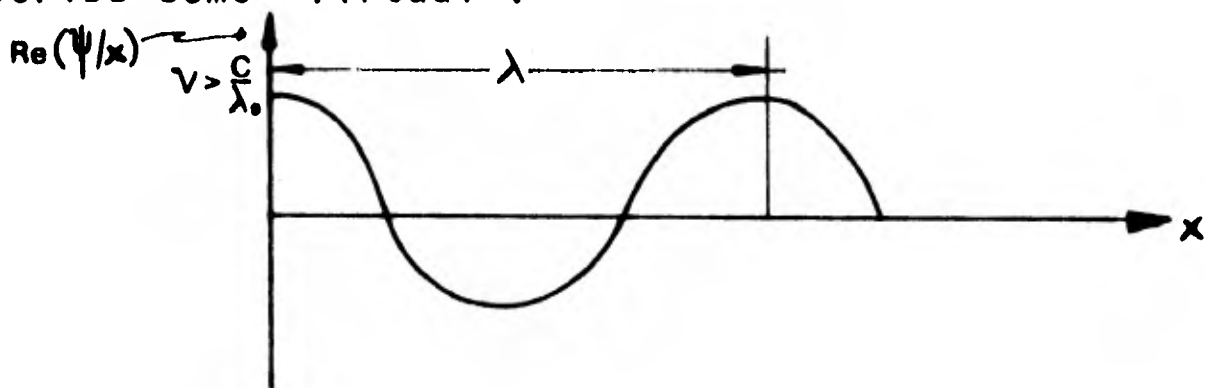


Fig. 61.a

Si ψ está confinada a un rango finito de x , $-\frac{1}{2}a < x < \frac{1}{2}a$ y se imponen condiciones de frontera, como por ejemplo $\psi = 0$ en $x \geq |\frac{1}{2}a|$, luego obtenemos soluciones solamente para $\lambda = 2a/n$, donde n es un entero. Esto significa que solamente estados con energías dadas por

$$E = C(M_0^2 c^2 + h^2 n^2 / 4a^2)^{1/2} \quad 5.117$$

pueden existir, con n entero positivo, el "número cuántico" apropiado al sistema.

5.4.2 ANALOGIAS ENTRE FISICA DE PARTICULAS ELEMENTALES Y ELECTROMAGNETISMO.

Con todo lo anterior podemos establecer las siguientes analogías dadas en la siguiente tabla.

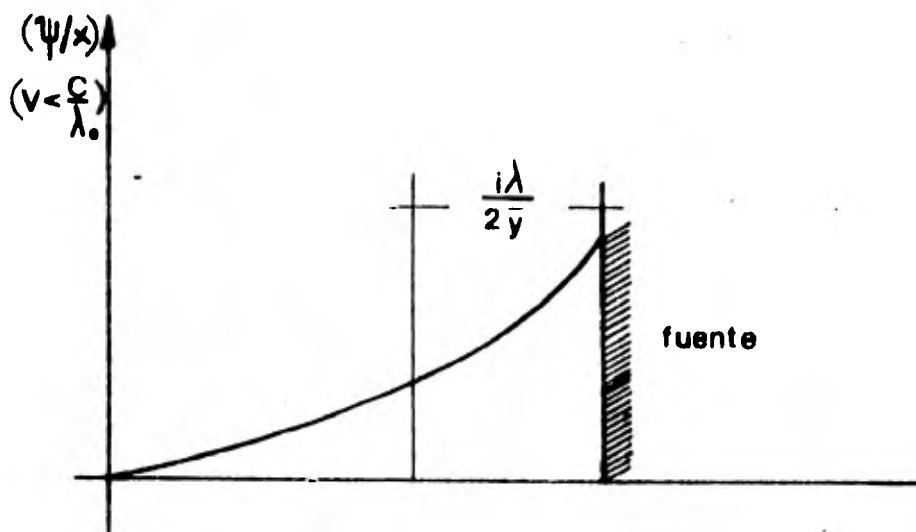


Fig. 61.b

TABLA IX

FISICA CUANTICA ANALOGADO	ELECTROMAGNETISMO ANALOGO
1. Función de Onda	1! Campo Eléctrico
2. Número Cuántico	2! Número Modo
3. Estado Base	3! Modo Más Bajo
4. Paridad: la reflexión está en un punto	4! Paridad: la reflexión está en un plano
5. Longitud de onda Compton de una partícula libre	5! Longitud de onda de corte
6. Energía en reposo de una partícula	6! Frecuencia de corte
7. Partícula Virtual	7! Onda Desvaneciente
8. Función de Onda para un conjunto Relacionado de Pares de Partículas	8! Campo en la Cavidad y la Gufa de ondas
9. (a) Una Partícula A (b) Una Partícula a	9! (a) Amplitud del Campo en la Cavidad (b) Amplitud del Campo en la Gufa
10. (a) Canal Cerrado (b) Canal Abierto	10! (a) λ_z imaginario (b) λ_λ real
11. Singulete, triplete,	11! Si Ninguno, Dos o Tres de los Números Modo coinciden en el número Modo
12. Constante de Acoplamiento	12! Constante de Acoplamiento (Relación del Campo de la Gufa con el de la Cavidad)

A continuación explicamos algunos aspectos de la tabla IX.

El campo en la cavidad y la gufa de ondas corresponden a la función de onda para un conjunto relacionado de pares de partículas, "una partícula A" y "una partícula a". La energía total en el centro de masa de esas partículas está dada por

$$E = h\nu = \left(\frac{hc}{2L}\right) (n^2 + m^2 + \ell^2)^{1/2} \quad 5.118$$

La amplitud del campo en la cavidad se puede asociar con la partícula A y la correspondiente a la del campo en la gufa de ondas con la partícula a.

El primer par de partículas en el conjunto es la A(1,1,1) y aquí la partícula a es virtual (λ_z imaginario) y el sistema es estable contra decaimiento.

El segundo par de partículas es la A(1, 1, 2) y aquí la partícula a es real ya que es energéticamente posible (λ_z real). En el primer caso la gufa de ondas corresponde a un "canal cerrado" y en último a un "canal abierto".

El decaimiento de las partículas A(1, 2, 1) y A(2, 1, 1) son energéticamente posibles, sólo que debido al "modo filtro"

que hipotéticamente hemos colocado, están prohibidas. La Figura 60 nos muestra también que m se debe de conservar en el decaimiento, $A(1, 2, 1)$ es por lo tanto estable. Para la partícula $A(2, 1, 1)$, por otro lado, no puede armonizar los campos precisamente en la cavidad a la interfase de la gufa de ondas; el campo de la cavidad se puede expandir en el rango $-\frac{1}{4}L < x < \frac{1}{4}L$ en términos de senos y cosenos, con ceros en $\pm \frac{1}{4}L$ (tomando aquí el origen en el centro de la caja). Por simetría, vemos que para n par, no habrá función par generada y nada se puede conseguir a través del modo filtro. Por otra parte, si n es impar, entonces hay un término $\cos 2\pi x/L$ en la expansión y por lo tanto el decaimiento es posible. Esto significa que el decaimiento puede ocurrir sólo cuando la paridad de n es conservada.

Si tenemos en mente la posibilidad de inyectar potencia bajo un canal y emerger a lo largo de otro, tomemos una cavidad cúbica y cuatro gufas de onda como se muestra en la Figura 62.

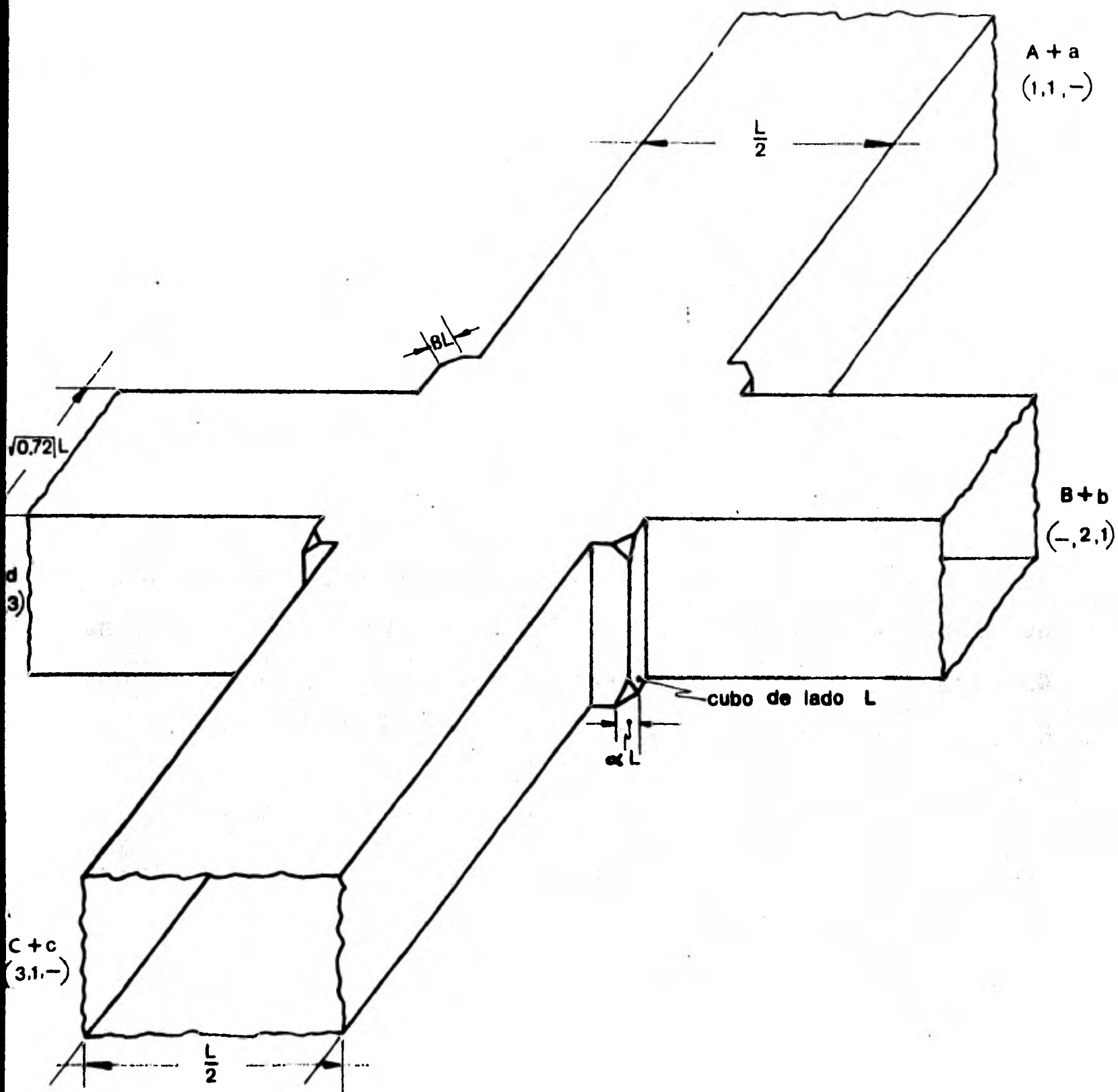


Fig. 62

Las cuatro guías de ondas corresponden a los cuatro diferentes modos de decaimiento de la cavidad, que denotamos por $A + a$, $B + b$, $C + c$ y $D + d$.

Si la cavidad es excitada, luego la potencia estará disponible para que pueda escapar por alguna de las guías de ondas, siempre y cuando se tenga una frecuencia que esté alrededor de la frecuencia de corte de la guía de ondas y la ley de conservación establecida anteriormente sea satisfecha.

Si la potencia es transmitida a lo largo de una guía de ondas hacia la cavidad, en general, algo será reflejado y algo pasará a través de la cavidad y emergerá bajo otro canal. Nuevamente, la frecuencia umbral y la ley de conservación deberán ser satisfechas.

Consideremos ahora el efecto de cortar las esquinas. El campo E_z varía sinusoidalmente con x , y y z de acuerdo con la ecuación (5.106). Si introducimos ahora alguna perturbación, que distorciona la forma de la cavidad, el patrón del campo será también distorcionado. El nuevo campo E podrá ser expandido en términos de los campos que existen en la cavidad no distorcionada:

$$E_z'(n, m, \ell) = \sum_{n, m, \ell} E_0(n, m, \ell) \cdot \sin \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{m\pi y}{L} \sin \frac{\ell\pi z}{L}$$

Así, asociado con el número modo m por ejemplo, hay, en general, una pequeña componente del campo con una distribución vertical $\sin M\pi y/L$, donde $M \neq m$. Además, si la perturbación es simétrica en y , luego M será par o impar de acuerdo con que m sea par o impar. Ahora el efecto de este "modo mixto" es que no necesariamente se conserva de manera estricta en el decaimiento; un modo con m en la cavidad escapa muy lentamente en una guía de ondas con un modo M , si el campo distorciónado asociado con m contiene una componente $E_0 \sin M\pi y/L$. Así, con una distorsión simétrica de la cavidad, puede ocurrir acoplamiento débil al igual que si m no es conservada; la paridad de m es, sin embargo, conservada. Supóngase ahora que las distorsiones no son simétricas (ver Figura 62) luego la paridad de m no necesariamente se conserva tampoco.

La intensidad de la interacción se puede indicar por una "constante de acoplamiento", g , que relaciona el campo en la guía con el campo en la cavidad. Si g es la unidad cuando $M = m$, luego para $M \neq m$ pero con conservación de paridad g es del orden de α y para $M \neq m$ y sin conservación de paridad g es del orden de $\alpha - \beta$. Suponemos que $\alpha - \beta \ll \alpha$ y designamos los tres tipos de decaimiento como fuerte, intermedio y débil. Estos hechos están tabulados en la tabla XI.

Vemos que un ligero rompimiento de la simetría del sistema permite la ocurrencia de interacciones prohibidas en un sistema simétrico. La analogía con interacción fuerte, electromagnética y débil es obvia. Como una comparación citamos la tabla XII dada por Feynman.

TABLA X

GUIA DE ONDA Canal	FRECUENCIA UMBRAL en unidades de $c/2L$
A + a	$(5)^{1/2}$
B + b	$(8)^{1/2}$
C + c	$(13)^{1/2}$
D + d	$(13.5)^{1/2}$

TABLA XI

ACOPLAMIENTO	FUERTE	INTERMEDIO	DEBIL
Constante de acoplamiento	1	α	$\alpha - \beta$
Conservación de N_y	Sí	No	No
Conservación de Paridad de N_y	Sí	Sí	No

TABLA XII

ACOPLAMIENTO	INTENSIDAD RELATIVA	LEYES DE CONSERVACION SATISFECHAS		
		i-spin	Extrañeza	Paridad
Fermi	10^{-10}	No	No	No
Electrodinámico	10^{-2}	No	Sí	Sí
Fuerte	10^1	Sí	Sí	Sí

CONCLUSION

Para finalizar este trabajo y a manera de conclusiones generales se puede decir lo siguiente: el *concepto de resonancia* no es un concepto unívoco y por lo tanto el uso del mismo es diverso, sin embargo cuando se lleva a ciertas *condiciones límite* se observa una tendencia a unificar esa diversidad de usos y por consiguiente es posible, en algunos casos, traducir a un mismo lenguaje conceptual dos o más usos diferentes de la resonancia en distintos problemas.

Otra característica importante del *concepto de resonancia* es que se le puede asociar de alguna manera con los *conceptos de tiempo de retardo, principio de incertidumbre, causalidad* y de aquí con *relaciones de dispersión* (en el sentido de transformada de Hilbert) y el *teorema óptico*, ciertamente que la conexión entre estos conceptos y el de resonancia no se ha hecho tan explícita como se hubiera querido.

Vale la pena señalar que ha quedado fuera de este estudio el *concepto de resonancia* en la termodinámica ya que ni siquiera se encontró algo análogo; consideramos que hay un hueco en este punto del trabajo.

Finalmente, hemos visto que la analogía en física se puede dar entre ecuaciones, conceptos, fenómenos, principios o leyes, medios materiales y físicos, objetos físicos, teorías, estructuras geométricas y que todas ellas se producen o se trazan por diferencias y semejanzas y formas de lenguaje. Me atrevería a decir que la física se ha desarrollado y reproducido en parte porque se ha copiado a sí misma por analogías en las etapas preliminares de muchas de sus leyes, principios y teorías, en general en la solución de muchos de sus problemas.

APENDICE A

Por el teorema de Helmholtz $\vec{\nabla} \cdot \vec{E}_a = 0$ y $\vec{\nabla} \cdot \vec{H}_a = 0$ luego suponemos que \vec{E}_a y \vec{H}_a deben satisfacer las siguientes relaciones

$$k_a \vec{E}_a = \vec{\nabla} \times \vec{H}_a, \quad k_a \vec{H}_a = \vec{\nabla} \times \vec{E}_a \quad (1)$$

$$y \quad \vec{n} \times \vec{E}_a = 0 \quad \text{sobre } S, \quad \vec{n} \times \vec{H}_a = 0 \quad \text{sobre } S' \quad (2)$$

siendo (2) las condiciones a la frontera, esto es, que \vec{E}_a no tiene componente tangencial sobre S , y \vec{H}_a no tiene componente tangencial sobre S' .

A continuación establecemos en forma de teoremas propiedades que cumplen las \vec{E}_a 's y las \vec{H}_a 's:

Teorema 1.- (i) $\vec{n} \cdot \vec{H}_a = 0$ sobre S
(ii) $\vec{n} \cdot \vec{E}_a = 0$ sobre S'

Demostración

Sea L una pequeña curva cerrada arbitraria sobre la superficie de S , luego por el teorema de Stokes y (1)

$$\int_L \vec{E}_a \cdot d\vec{\ell} = \int (\vec{\nabla} \times \vec{E}_a) \cdot \vec{n} da = k_a \int \vec{n} \cdot \vec{H}_a da \quad (3)$$

la integral de línea del miembro izquierdo de la primera igualdad es cero en virtud de (2), entonces la integral de superficie del segundo miembro de la segunda igualdad debe ser cero, lo cual es imposible, ya que estamos trabajando con un contorno arbitrario, al menos que $\vec{n} \cdot \vec{H}_a$ sea cero sobre S , que era lo que queríamos demostrar. La segunda parte del teorema uno se demuestra en forma análoga.

Teorema 2.- \vec{E}_a y \vec{H}_a satisfacen ecuaciones de onda por separado esto es,

$$(i) \quad \nabla^2 \vec{E}_a + k_a^2 \vec{E}_a = 0$$

$$(ii) \quad \nabla^2 \vec{H}_a + k_a^2 \vec{H}_a = 0$$

Demostración

Tomando el rotacional en ambos miembros de (1) obtenemos

$$k_a^2 \vec{E}_a = \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}_a) \quad , \quad k_a^2 \vec{H}_a = \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{H}_a) \quad (4)$$

ahora haciendo uso de la identidad vectorial $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$ y de que $\vec{\nabla} \cdot \vec{E}_a = 0$, $\vec{\nabla} \cdot \vec{H}_a = 0$ conseguimos (i) y (ii) del teorema.

Teorema 3.- \vec{E}_a y \vec{H}_a poseen propiedades de ortonormalidad, esto es,

$$\int_V \vec{E}_a \cdot \vec{E}_b \, dv = \int_V \vec{H}_a \cdot \vec{H}_b \, dv = \delta_{ab}$$

siendo δ_{ab} una delta de kronecher para los índices a y b.

Demostración

Primero, si $a \neq b$, entonces por la siguiente identidad vectorial

$$\begin{aligned} & \vec{\nabla} \cdot \left[\vec{E}_b \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}_a) \right] - \vec{\nabla} \cdot \left[\vec{E}_a \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}_b) \right] \\ &= (\vec{\nabla} \times \vec{E}_a) \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E}_b) - E_b \cdot \left[\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}_a) \right] - (\vec{\nabla} \times \vec{E}_b) \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E}_a) + E_a \cdot \left[\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}_b) \right] \end{aligned} \quad (5)$$

y (4), la identidad (5) se transforma a

$$\vec{\nabla} \cdot \left[\vec{E}_b \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}_a) \right] - \vec{\nabla} \cdot \left[\vec{E}_a \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}_b) \right] = (k_b^2 - k_a^2) \vec{E}_a \cdot \vec{E}_b \quad (6)$$

integrando (6) sobre el volumen V , y usando el teorema de Green tenemos lo siguiente

$$\int_{S, S'} \vec{n} \cdot (k_a \vec{E}_b \times \vec{H}_a - k_b \vec{E}_a \times \vec{H}_b) da = (k_b^2 - k_a^2) \int_V \vec{E}_a \cdot \vec{E}_b dv \quad (7)$$

De identidades vectoriales sabes que $\vec{A} \cdot \vec{B} \times \vec{C} = \vec{A} \times \vec{B} \cdot \vec{C}$, por lo que integrando del miembro izquierdo de (7) lo podemos escribir como

$$k_a \vec{H}_a \cdot (\vec{n} \times \vec{E}_b) - k_b \vec{H}_b \cdot (\vec{n} \times \vec{E}_a) \quad \text{sobre } S$$

$$\text{y} \quad k_b \vec{E}_a \cdot (\vec{n} \times \vec{H}_b) - k_a \vec{E}_b \cdot (\vec{n} \times \vec{H}_a) \quad \text{sobre } S'$$

en donde fácilmente podemos aplicar las condiciones a la frontera (2), concluyendo que

$$\int_V \vec{E}_a \cdot \vec{E}_b \, dv = 0 \quad \text{para } a \neq b$$

donde $k_b^2 - k_a^2 \neq 0$, excepto en el caso de que hubiera degeneración. Si este fuera el caso, siempre se puede probar, como en mecánica cuántica, que habrá funciones normales \vec{E}_a y \vec{E}_b que aseguren la ortogonalidad que deseamos a sabiendas de que \vec{E}_a y \vec{E}_b no necesariamente tengan dicha propiedad (proceso de ortogonalización de Smith).

La demostración para la ortogonalidad de las \vec{H}_a 's es enteramente análoga que para las \vec{E}_a 's.

Aprovechando (1) y una parte de (5) para el caso $a = b$, obtenemos

$$\vec{\nabla} \cdot [\vec{E}_a \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}_a)] = (\vec{\nabla} \times \vec{E}_a)^2 - \vec{E}_a \cdot [\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}_a)] = k_a^2 (H_a^2 - E_a^2) \quad (8)$$

e integrando sobre el volumen V , vemos que tal integral en el primer miembro, una vez aplicado el teorema de Green para pasar a una integral de superficie y aplicar las condiciones de frontera, es cero, lo que implica

$$\int_V H_a^2 \, dv = \int_V E_a^2 \, dv$$

pudiendo ser así, cada una igual a la unidad.

Ahora por el mismo teorema de Helmholtz, sabes que $\vec{\nabla} \times \vec{F}_a = 0$
 luego

$$k_a \vec{F}_a = \vec{\nabla} \psi \quad (9)$$

y si además

$$\psi_a = 0, \quad \vec{n} \times \vec{F}_a = 0 \quad \text{sobre } S \text{ y } S' \quad (10)$$

siendo estas últimas, condiciones a la frontera, tenemos también que

ψ_a y \vec{F}_a satisfacen ecuaciones de onda por separado, esto es,

$$(i) \quad \nabla^2 \psi_a + k_a^2 \psi_a = 0$$

$$(ii) \quad \nabla^2 \vec{F}_a + k_a^2 \vec{F}_a = 0.$$

Teorema 4.- ψ_a y \vec{F}_a poseen propiedades de ortonormalidad, esto es,

$$\int_V \psi_a \psi_b dv = \int_V \vec{F}_a \cdot \vec{F}_b dv = \delta_{ab}$$

Demostración

Usemos la identidad vectorial

$$\vec{\nabla} \cdot (\psi_a \vec{\nabla} \psi_b) = \psi_a \nabla^2 \psi_b + \vec{\nabla} \psi_a \cdot \vec{\nabla} \psi_b = -k_b^2 \psi_a \psi_b + \vec{\nabla} \psi_a \cdot \vec{\nabla} \psi_b \quad (11)$$

ahora intercambiando el orden de los índices a y b, se establece otra identidad análoga a (11) y una vez tomada la diferencia entre ellos, e integrando sobre V, y haciendo uso del teorema de Green, obtenemos

$$\int_{S, S'} \left(\psi_a \frac{\partial \psi_b}{\partial n} - \psi_b \frac{\partial \psi_a}{\partial n} \right) da = (k_a^2 - k_b^2) \int_V \psi_a \psi_b dv \quad (12)$$

La integral sobre las superficies S y S' de (12) se hacen cero, debido a las condiciones de frontera (10), por lo tanto, si $k_a \neq k_b$, entonces

$$\int_V \psi_a \psi_b dv = 0 \quad (13)$$

Integrando sobre V a (11), vemos que, debido a (9), (10) y (13) se tiene que

$$\int_V \vec{F}_a \cdot \vec{F}_b dv = 0 \quad (14)$$

Hasta aquí hemos demostrado sólo la ortogonalidad. Para la normalización, tomamos nuevamente a(11) pero con $a = b$, integramos sobre V y vemos (9), luego concluimos en

$$\int_V \psi_a^2 dv = \int_V F_a^2 dv \quad (15)$$

pudiendo ser así, cada una igual a la unidad.

Teorema 5.- Las F_a 's con las E_b son ortogonales.

Demostración

$$\vec{\nabla} \cdot (\psi_a \vec{E}_b) = \psi_a \vec{\nabla} \cdot \vec{E}_b + \vec{\nabla}(\psi_a \cdot \vec{E}_b) = k_a^2 \vec{F}_a \cdot \vec{E}_b \quad (16)$$

ya que $\vec{\nabla} \cdot \vec{E}_b = 0$. Integrando sobre V , usando el teorema de Green y las condiciones a la frontera, tenemos

$$\int_V \vec{F}_a \cdot \vec{E}_b dv = 0 \quad (17)$$

Finalmente, si queremos expandir una función arbitraria, como por ejemplo \vec{A} , en términos de \vec{E}_a 's y \vec{F}_a 's (de las \vec{H}_a 's y \vec{F}_a 's), lo que tenemos que hacer es determinar los coeficientes de la expansión, y esto es ya fácil, dados los teoremas de ortonormalización dados anteriormente.

$$\text{Supongamos que } \vec{A} = \vec{X} + \vec{Y} \quad (18)$$

donde \vec{X} es la parte solenoidal de \vec{A} , e \vec{Y} es la parte irrotacional de \vec{A} . Luego \vec{X} se puede expandir en serie de términos de las \vec{E}_a 's (o de las \vec{H}_a 's), e \vec{Y} en términos de las \vec{F}_a 's:

$$\vec{A} = \sum_a e_a \vec{E}_a + \sum_a f_a \vec{F}_a \quad (19)$$

Multiplicando \vec{A} por una de las \vec{E}_a 's e integrando sobre V y aplicando los teoremas de ortonormalización tenemos que

$$e_a = \int_V \vec{A} \cdot \vec{E}_a \, dv \quad (20)$$

y similarmente para las f_a .

Por lo tanto

$$A = \sum_a \left\{ \vec{E}_a \int_V \vec{A} \cdot \vec{E}_a \, dv + \vec{F}_a \int_V \vec{A} \cdot \vec{F}_a \, dv \right\} \quad (21)$$

APENDICE B

Teorema de TITCHMARSH.- Si una función de cuadrado integrable $T(z)$ cumple una cualesquiera de las siguientes tres propiedades:

(i) satisface las transformadas de Hilbert (relaciones de dispersión),

(ii) tiene una transformada de Fourier que se anula para $t < 0$,

(iii) es analítica en el semiplano superior,

luego, las otras dos propiedades se cumplen automáticamente.

Demostración:

1. (iii) \Rightarrow (i). Para demostrar esta parte, supongamos que:

(a) $T(z)$, i.e., la continuación analítica de la función habitual $T(x)$, es regular en $I_+(z)$ sobre el eje real.

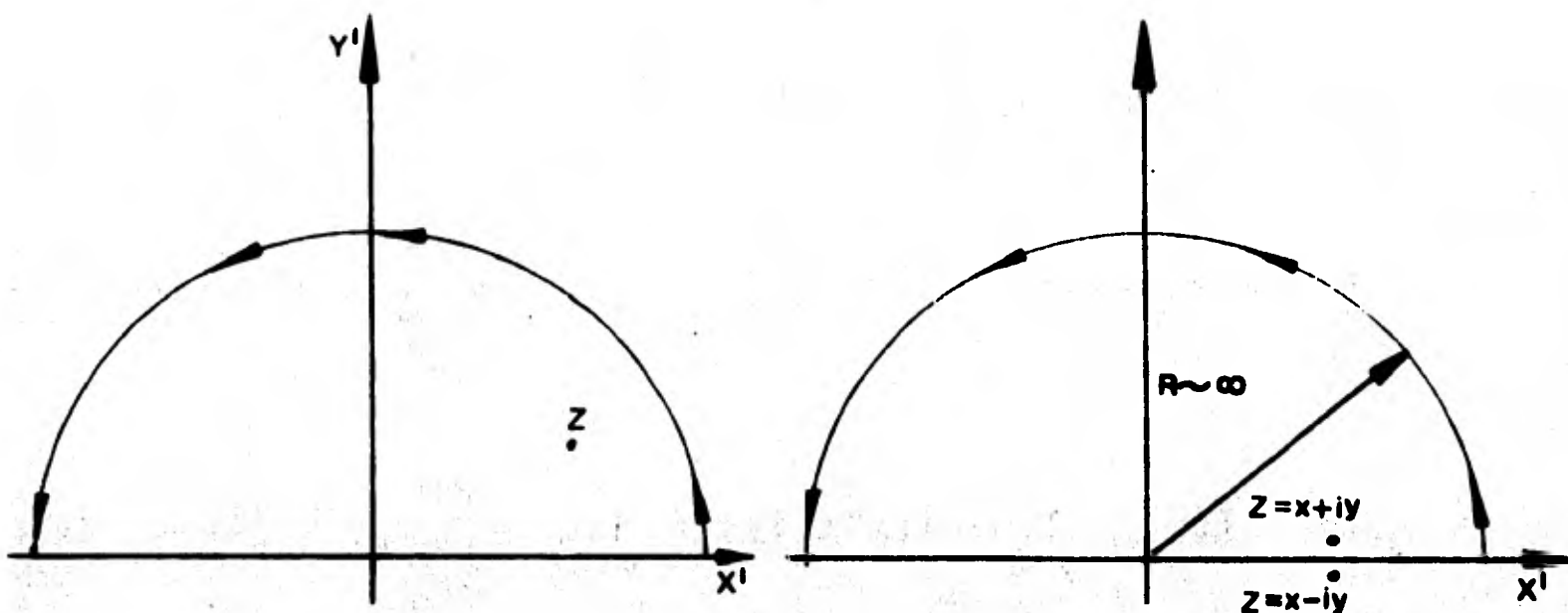
(b) $T(z) \sim 0$ cuando $|z| \sim \infty$

Por el teorema de Cauchy:

$$(1) \quad \int_C T(z) dz = 0$$

$$(2) \quad \frac{1}{2\pi i} \int \frac{T(z')}{z' - z} dz' = \begin{cases} T(z) & \text{si } z \text{ está dentro de } C \\ 0 & \text{si } z \text{ está fuera de } C \end{cases}$$

$$(3) \quad \frac{1}{\pi i} P \int \frac{T(z')}{z' - z} dz' = T(z) \quad \text{si } z \text{ está sobre } C$$



donde P significa el valor principal de Cauchy

Si z está muy cercano al eje real, entonces (3) se puede escribir como sigue:

$$(4) \quad T(z) = T(x + iy) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{T(x')}{x' - i x - iy} + C'$$

Si suponemos que en la región donde está C' , $T(z') \sim \frac{1}{|z'|}$

y que $|z'| \sim R$, luego el integrando es $\sim 1/R^2$, por lo tanto

$$C' \sim \pi R \frac{1}{R^2} = \frac{\pi}{R} \sim 0 \quad \text{para } R \sim \infty$$

Para z muy cercano al eje real por debajo, tenemos

$$(5) \quad 0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{T(x')}{x' - x + iy} dx' = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{T^*(x')}{x' - x - iy} dx' \quad (1)$$

Ahora restando (5) de (4) y haciendo $y \sim 0^+$ obtenemos

$$(6) \quad T(x) = \lim_{y \rightarrow 0^+} T(x + iy) = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\text{Im } T(x')}{x' - x - iy} dx'$$

ya que $T(x) - T^*(x) = 2i \text{Im}T(x)$

Tomemos finalmente el caso para el que $x' = x$, i.e.:

$$(7) \quad T(x) = \lim_{y \rightarrow 0^+} t(x + iy) = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{T(x')}{x' - x - iy} dx'$$

para hacerlo, retenemos a $z = x + iy$ dentro del contorno, deformándolo como se muestra en la siguiente figura y dejando $\rho \rightarrow 0$

para ello reescribimos x' en la región de deformación como $x' = x + \rho e^{i\theta}$ con lo cual determinamos

$$(8) \quad T(x) = \frac{P}{\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{T(x')}{x' - x} dx'$$

Tomando las partes real e imaginaria de esta última ecuación, se sigue que:

$$(9) \quad \operatorname{Re} T(x) = \frac{P}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{Im} T(x')}{x' - x} dx'$$

$$(10) \quad \operatorname{Im} T(x) = - \frac{P}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{Re} T(x')}{x' - x} dx'$$

En la literatura matemática a la funcional

$$H[f] = \frac{P}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x')}{x' - x} dx'$$

se le conoce con el nombre de Transformada de Hilbert de la función $f(x)$, lo cual concluye lo que queríamos demostrar.

2. (iii) \Rightarrow (ii)

De la parte anterior sabemos que

$$T(x) = \frac{p}{\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{T(x')}{x' - x} dx'$$

y escribiendo la transformada de Fourier de $T(x)$ como

$$(11) \quad \phi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt} T(x) dx$$

entonces

$$(12) \quad \phi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt} T(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-ixt} \frac{p}{\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{T(x')}{x' - x} dx'$$

y suponiendo que hay convergencia uniforme, las integraciones se pueden intercambiar para obtener

$$(13) \quad \phi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \theta(t) e^{-ix't} T(x') dx'$$

en donde $\theta(t) = \begin{cases} +1 & \text{si } t > 0 \\ -1 & \text{si } t < 0 \end{cases}$

usando la definición de la función de escalón $\theta(t)$ (13) \Rightarrow

$$(14) \quad \phi(t) = 0 \quad \text{para } t < 0 \quad \text{L.C.Q.D.}$$

3. (ii) \Rightarrow (iii)

Como $\phi(t) = 0$ para $t < 0$ entonces

$$(15) \quad T(x) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t) e^{ixt} dt = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{\infty}^{\infty} \phi(t) e^{ixt} dt$$

Sea $z = x + iy$ con $y > 0$ y $T(z)$ la continuación analítica de $T(x)$ a x compleja, luego

$$(16) \quad T(z) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_0^{+\infty} \phi(t) e^{izt} dt$$

esta integral converge para $y > 0$ bajo la continuación analítica dada para ω , lo cual significa que $T(z)$ es analítica en $I_+(z)$ de x compleja.

N O T A S

1. Pauling y Wilson en su libro de Introduction to Quantum Mechanics trabajan una analogía entre el fenómeno de resonancia en un sistema de dos péndulos acoplados.
2. En Matemáticas y Razanamiento Plausible, Polya nos ofrece una serie de analogías entre diversos problemas matemáticos muy interesantes.
3. Ibid.
4. En la referencia 17 se describe con más detalle esta analogía y se traza otra que es muy interesante desde el punto de vista pedagógico: paralelismo entre el científico-descubridor y estudiante-aprendiz, dicho paralelismo es trazado por Bruner.
5. Cfr. ref. 26
6. Sea f un campo escalar diferenciable continuamente sobre un conjunto abierto S en un n -espacio. Se dice que f es una función homogénea de grado p sobre S si $f(t\vec{x}) = t^p f(\vec{x})$ para cada real t y para cada \vec{x} en S tal que $t\vec{x} \in S$.

7. Aquí la analogía consiste en introducir un factor de escala que hace que las nuevas trayectorias sean semejantes a las primeras pero de tamaño diferente.
8. Los paréntesis $\langle \dots \rangle$ significan valores medios y están definidos como $\langle f \rangle = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} f(t) dt$. En caso de tener a $f(t) = \frac{dF(t)}{dt}$ con $F(t)$ acotada, entonces $\langle f \rangle = 0$.
9. Significa que el período de las oscilaciones es independiente de su amplitud.
10. Oscilador clásico: armónico simple.
11. Esta ecuación nos expresa la tercera ley de Kepler
12. Principio integral que recibe varios nombres según el camino en que la correspondencia entre los estados original y su vecindad o estados variados se establezca. Otros nombres asociados con este tipo de principio integral son: d'Alembert, Maupertuis, mínima acción.
13. Con esto queremos decir que *rayo* y *trayectoria* son conceptos análogos.
14. Cfr. ref. 42

15. Esta suposición hace posible la analogía entre la Óptica Física y la Mecánica Ondulatoria.
16. Op. cit.
17. Cfr. G. Polye, How to Solve it, Princeton University Press, 1945.
18. Cfr. ref. 35

REFERENCIAS

1. Bauer, M., y P.A. Mello. On the Lifetime-Width Relation for a Decaying State and the Uncertainty Principle. Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 73, No. 2, 283 (1976).
2. Burge, E.J. Definitions of Resonance and Exact Conditions for Resonance in Some Electrical Circuit I. Definitions of Resonance for Series and Parallel LCR Circuits, Am.J. Phys. 29, 19 (1961).
3. Burge, E.J. Definitions of Resonance and Exact Conditions for Resonance in Some Electrical Circuits II. Am. J. Phys. 29, 251 (1961).
4. Condon, E.U. Forced Oscillations in Cavity Resonators. J. App. Phys. 12, 129 (1941).
5. Condon, E.U. Principles of Micro-Wave Radio. Rev. Mod. Phys. 14, 341 (1942).
6. Chew, Gell-Mann & Rosenfeld. Strongly Interacting Particles. Sci. Am. 210 No. 2, 74 (1964).
7. Christy, R. W. Classical Theory of Optical Dispersion. Am. J. Phys. 40, 1403 (1972).

8. Crawford, Frank S. Waves, Berkeley Physics Course Vol. III. McGraw-Hill. USA, (1968).
9. Davies, Brian. Mathematical Models in Oscillation Theory. Phys. Educ. 13, 282 (1978).
10. Eisberg, R.M. Fundamentals of Modern Physics. John Wiley, USA (1961).
11. Ericson, T.E.O. y M.P. Locher. Hadron-Nucleus Forward Dispersion Relations. CERN 69-30, Theoretical Studies Division, November, (1969).
12. Eygs, Leonard. The Classical Electromagnetic Field. Addison-Wesley. USA (1972).
13. Fano, U. Effect of Configuration Interaction of Intensities and Phase Shifts. Phys. Rev. 124, 1866 (1961)
14. Fermi, E. Nuclear Physics. The University of Chicago Press, Chicago, USA (1967).
15. Feshbach, H.D.C., Peaslee & V.F. Wisshopf. On the Scattering and Absorption of Particles by Atomic Nuclei. Phys. Rev. 71, 145 (1947)
16. Feynman / Leighton/ Sands. The Feynman Lectures on Physics. Vols. I, II. II. Fondo Educativo Interamericana no, S. A. (1971).

17. Feynman, R.P. Theory of Fundamental Processes. Benjamin, N.Y., (1962)
18. Gee, Brian, Models as a Pedagogical Tool: Can we Learn from Maxwell? Phys. Educ. 13, 287 (1978).
19. Gell-Mann, M. y E. P. Rosenbaum. Elementary Particles. Sci. Am. (1957).
20. Gröss, G. On the Theory of Dielectric Loss. Phys. Rev. 59, 748 (1941).
21. Harré, R. Models in Science. Phys. Educ. 13, 275 (1978).
22. Hill, R. D. Resonance Particles. Sci. Am. January (1963).
23. Holbrow, D.H. y W.C. Davidon. An Introduction to Dispersion Relations. Am J. Phys. 32, 762 (1964).
24. Koff, S.A. Optical Dispersion. Revs. Mod. Phys. 4, No. 3, 471 (1932).
25. Kuyatt, E.E., J.A. Simson & S.R. Mielczarek. Elastic Resonances in Electron Scattering from He, Ne, Ar, Xe, and Hg. Phys. Rev. 138, No. 2A, A385 (1965).
26. Landau y Lifshitz. Mecánica, Vol. 1 del Curso de Física Teórica. Editorial Reverté Barcelona (1965).

27. Lawson, J.D. Analogous Behavior of Elementary Particles and Some Simple Waveguide and Cavity Systems. Am. J. Phys. 33, 733 (1965).
28. Messiah, Albert. Quantum Mechanics. Vol. I. North-Holland Publishing Company. Amsterdam (1958).
29. Miller, W.H. Resonance in the Scattering of Electron from Atoms. Phys. Rev. 152, 70 (1966).
30. Muirhead, H. The Physics of Elementary Particles. Pergamon Press. (1965)
31. Nussenzueig, H.M. Causality and Dispersion Relations. Academic Press. N. T. and London, (1972).
32. O'Malley T.F. y G. Geltman. Compound-Atom States for Two-Electron Systems. Phys. Rev. 137, A 1344 (1965).
33. Pake, G. E. Magnetic Resonance. Sci. Am. August (1958)
34. Pauling, L. y E. Bright Wilson. Introduction to Quantum Mechanics. McGraw-Hill, Tokyo, (1935).
35. Polya, G. Matemáticas y Razonamiento Plausible. Editorial Ténos, S.A., Madrid (1966).
36. Schultz, G.J. Resonances y Electron Impact on Diatomic Molecules. Rev. Mod. Phys. 45, 423 (1973).

37. Schultz, G.J. Resonances in Electron Impact on Atoms. Rev. Mod. Phys. 45, 378 (1973).
38. Scott, Alwyn, Kramers-Kronig Relations, Hilbert Transforms, Dispersion Relation, etc. Am. J. Phys. 32, 713 (1964).
39. Sharnoff, Mark. Validity Conditions for the Kramers-Kronig. Am. J. Phys. 32, 40 (1964).
40. Slater, J.C. Microwave Electronics. Rev. Mod. Phys. 18, 441 (1946).
41. Sneddon, I.N. Elementary of Partial Differential Equations. McGraw-Hill. Tokyo, (1957).
42. Sommerfeld, A. Optics. Lectures on Theoretical Physics Vol. IV. Academic Press.
43. Taylor, H.S., George V. Nazarov & A. Golebiewski. Quantitative Aspects of Resonances in Electron-Atom and Electron-Molecule, Scattering, Excitation, and Reactions. J. Chem. Phys. 45, 2872 (1966).
44. Tomlin, D.H. y G.K. Fullarton. Electrical Circuit Analogues of Thermal Conduction and Diffusion Phys. Educ. 13, 295 (1978).

45. Toll, John S. Causality and the Dispersion Relations: Logical Foundations. Phys. Rev. 104, 1760 (1956).
46. Veneziano, Gabriele. Elementary Particles Physics Today 22, No. 9, 31 (1968).
47. Wigner, E.P. Lower Limit for the Energy Derivative of the Scattering Phase Shift. Phys. Rev. 98, No. 1, 145 (1955).