

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE CIENCIAS



**ANÁLISIS DEL EFECTO DE LA DISTRIBUCIÓN
ESPACIAL DE LAS VARIABLES SOBRE LAS PRO-
PIEDADES DISPERSIVAS DE LAS ONDAS DE
GRAVEDAD - INERCIALES.**

T E S I S
QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE
F I S I C O
P E E C E N T A

MARIA ELENA FERNÁNDEZ BARAJAS



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas

Tesis Digitales

Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©

PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

I N D I C E

	Página
INTRODUCCIÓN	1
 CAPÍTULO 1	
ONDAS EN LA ATMÓSFERA	4
a) Ondas de sonido	4
b) Ondas de gravedad	9
c) Ondas inerciales	12
d) Ondas de Rossby	13
 CAPÍTULO 2	
EFFECTO DE LA DISTRIBUCIÓN ESPACIAL DE LAS VARIABLES DEPENDIENTES DE LAS ONDAS DE GRAVEDAD EN UNA DIMENSIÓN Y EN DOS DIMEN- SIONES, Y DE LAS ONDAS DE GRAVEDAD-INER- CIALES EN UNA DIMENSIÓN	17
a) Ondas de gravedad en una dimensión	19
b) Ondas de gravedad bidimensionales	25
c) Ondas de gravedad-inerciales en una dimensión y distribución espacial de las variables	30

	Página
CAPÍTULO 3	
ECUACIÓN DE ADVECCIÓN	41
a) Ecuación de advección lineal en una dimensión	42
b) Ecuación de advección lineal en dos dimensiones	44
c) Ecuación de advección no-lineal en una dimensión	47
CONCLUSIONES	49
APÉNDICE	
BIBLIOGRAFÍA	

Introducción

Debido a la importancia que tiene la predicción del tiempo en nuestros días, es preciso comprender los fenómenos físicos a un grado tal que puedan ser reproducidos cualitativa y cuantitativamente.

La investigación científica ha creado una estructura físico-matemática adecuada para el flujo atmosférico en latitudes medias. Dicha estructura en latitudes bajas debe ser reconsiderada, ya que a estas latitudes la atmósfera presenta diferencias en el contenido de vapor de agua, el campo de vientos, variación del parámetro de coriolis, etcétera.

México es un país que se encuentra en latitudes bajas; por tanto, para hacer un pronóstico numérico debe adaptarse una dinámica atmosférica apropiada que permita el diseño de modelos físico-matemáticos consistentes.

Al utilizar un sistema de ecuaciones primitivas gobernando el flujo atmosférico surgen dos problemas principales en la integración con diferencias finitas.

El primero es la simulación del proceso de ajuste geostrofico. A través de este proceso, la atmósfera establece un estado casi no divergente característico, como un resultado de la dispersión de las ondas de gravedad-inerciales.

El segundo problema es la predicción o simulación del flujo de gran escala casi no divergente después que éste se ha establecido. Aquí la advección horizontal es el mecanismo de evolución dominante.

Las ecuaciones gobernando el flujo atmosférico con las ondas de gravedad-inerciales excluidas, se conocen como "ecuaciones filtradas". Así ellas no incluyen el problema de ajuste geostrofico.

Esfuerzos para mejorar los modelos numéricos conducen al deseo de incluir los efectos no geostroficos. Esto es muy difícil de hacer con el sistema de ecuaciones modificadas, lo cual conduce a regresar al uso de las ecuaciones primitivas.

La rapidez de propagación de las ondas de gravedad y gravedad-inerciales y su sensibilidad a varios errores numéricos significa que su tratamiento requiere especiales consideraciones.

En esta tesis se analizará la simulación correcta del proceso de ajuste geostrofico, el cual está esencialmente gobernado por las ecuaciones

de ondas de gravedad-inerciales, investigándose el efecto de la distribución espacial de las variables dependientes sobre las propiedades dispersivas de dichas ondas. Esto se hará usando las aproximaciones conrotadas más simples para las derivadas espaciales, conservando las derivadas temporales en su forma diferencial.

En el capítulo 1 se analizan las propiedades de las oscilaciones atmosféricas.

En el capítulo 2 se analiza el efecto de la distribución espacial de las variables dependientes de las ondas de gravedad en una dimensión, en dos dimensiones y las ondas de gravedad-inerciales en una dimensión.

En el capítulo 3 se estudia la ecuación de advección lineal en una dimensión, dos dimensiones y la ecuación de advección no lineal en una dimensión.

Se completa este trabajo con un apéndice que es un complemento del capítulo 2 y que trata sobre la equivalencia entre las mallas E y B.

CAPITULO I

ONDAS EN LA ATMOSFERA

En la atmósfera ocurren movimientos de baja y alta frecuencia:

alta frecuencia	{	ondas de sonido
		ondas de gravedad
		ondas inerciales

baja frecuencia	{	ondas de Rossby
-----------------	---	-----------------

Como el aire es un medio elástico, cualquier perturbación que se propague en él lo hace en forma de movimiento ondulatorio. Los distintos tipos de perturbación son analizados a continuación tratando de aislar éstos en una forma precisa para hacer una clara distinción entre ellos.

a) Ondas de sonido

Es una experiencia general que las ondas de sonido pueden propagarse a tra-

vés de la atmósfera. Determinaremos aquí su velocidad de propagación y con el objeto de obtener las ondas de sonido en una forma pura supondremos que es despreciable la rotación, el calor y la fricción.

Las ondas de sonido son de tipo longitudinal, ésto es, ondas en las cuales las oscilaciones de la partícula son paralelas a la dirección de propagación.

El sonido es propagado por la compresión adiabática alternada y la expansión del medio.

Para excluir la posibilidad de oscilaciones transversas, se considera $v = u = 0$; eliminando toda dependencia sobre y y z y $u = u(x, t)$.

Con estas restricciones, la ecuación de momento, la ecuación de continuidad y la ecuación de energía termodinámicas para movimiento adiabático son, respectivamente.

$$\frac{d u}{d t} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad 1.1$$

$$\frac{d \rho}{d t} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad 1.2$$

$$\frac{d \ln \theta}{d t} = 0 \quad 1.3$$

con $\theta = \frac{p}{\rho R} \left(\frac{p}{\rho} \right)^{\frac{1}{\gamma - 1}}$; temperatura potencial $p_0 = 1000 \text{ mb}$

eliminando Θ en (1.3) se obtiene:

$$\frac{1}{\gamma} \frac{d \ln P}{d k} - \frac{d \ln P}{d k} = 0 \quad 1.4$$

donde $\gamma = C_p / C_v$ Eliminando γ de (1.2) y (1.4) obtenemos:

$$\frac{1}{\gamma} \frac{d \ln P}{d k} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad 1.5$$

Las dos ecuaciones resultantes son:

$$\frac{\partial u}{\partial k} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\gamma} \frac{\partial P}{\partial x} = 0 \quad 1.6$$

$$\frac{\partial P}{\partial k} + u \frac{\partial P}{\partial x} + \gamma P \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad 1.7$$

La solución de las dos ecuaciones anteriores puede encontrarse aplicando el método de perturbación, en el cual todos los campos de variables son divididos en dos partes, un estado de equilibrio, el cual es supuestamente independiente del tiempo y longitud más una pequeña desviación de esos valores de equilibrio, por lo tanto:

$$\begin{aligned} u(x, k) &= \bar{u} + u'(x, k) \\ p(x, k) &= \bar{p} + p'(x, k) \\ \rho(x, k) &= \bar{\rho} + \rho'(x, k) \end{aligned} \quad 1.8$$

sustituyendo (1.8) en (1.6) y (1.7) obtenemos:

$$\frac{\partial}{\partial k} (\bar{u} + u') + (\bar{u} + u') \frac{\partial}{\partial x} (\bar{u} + u') + \frac{1}{\gamma} \frac{\partial}{\partial x} (\bar{p} + p') = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (\bar{p} + p') + (\bar{\mu} + \mu) \frac{\partial}{\partial x} (\bar{p} + p') + v (\bar{p} + p') \frac{\partial}{\partial x} (\bar{\mu} + \mu) = 0$$

si $|p'|/\bar{p}| \ll 1$ el término de densidad puede ser desarrollado en forma binomial

$$\frac{1}{\bar{p} + p'} = \frac{1}{\bar{p}} \left(1 + \frac{p'}{\bar{p}}\right)^{-1} \approx \frac{1}{\bar{p}} \left(1 - \frac{p'}{\bar{p}}\right)$$

si

$$|\mu| \ll |\bar{\mu}|, \quad |p'| \ll |\bar{p}|, \quad |p'| \ll |\bar{p}|$$

se desprecian productos que contengan cantidades de perturbación, obteniendo así las ecuaciones de perturbación lineal

$$\frac{\partial \mu}{\partial x} + \bar{\mu} \frac{\partial \mu'}{\partial x} + \frac{1}{\bar{p}} \frac{\partial p'}{\partial x} = 0 \quad 1.9$$

$$\frac{\partial p'}{\partial x} + \bar{\mu} \frac{\partial p'}{\partial x} + v \bar{p} \frac{\partial \mu'}{\partial x} = 0 \quad 1.10$$

las cuales se pueden expresar de la siguiente manera:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \bar{\mu} \frac{\partial}{\partial x}\right) \mu' + \frac{1}{\bar{p}} \frac{\partial p'}{\partial x} = 0 \quad 1.11$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \bar{\mu} \frac{\partial}{\partial x}\right) p' + v \bar{p} \frac{\partial \mu'}{\partial x} = 0 \quad 1.12$$

Definiendo un operador $\mathcal{D} = \left(-\frac{\partial}{\partial x} + \bar{\mu} \frac{\partial}{\partial x}\right)$ las ecuaciones anteriores se expresan

$$\mathcal{D} \mu' + \frac{1}{\bar{p}} \frac{\partial p'}{\partial x} = 0 \quad 1.13$$

$$\partial_t p' + v \bar{p} \frac{\partial u'}{\partial x} \quad 1.14$$

aplicando el mismo operador a (1.14)

$$\partial_t \partial_t p' + v \bar{p} \frac{\partial}{\partial x} \partial_t u' = 0 \quad 1.15$$

despejando de la ecuación (1.13) $\partial_t u' = -\frac{1}{\beta} \frac{\partial p'}{\partial x}$ y sustituyendo en (1.15)

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} \right) p' - v \bar{p} \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{1}{\beta} \frac{\partial p'}{\partial x} \right) &= 0 \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} \right) p' &= \frac{v \bar{p}}{\beta} \frac{\partial^2 p'}{\partial x^2} \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 p' &= \frac{v \bar{p}}{\beta} \frac{\partial^2 p'}{\partial x^2} \end{aligned} \quad 1.16$$

suponemos una solución de la forma

$$p' = A e^{i k (x - ct)} \quad 1.17$$

donde A es la amplitud y $\frac{2\pi}{L} = k$ el número de onda; sustituyendo la solución (1.17) en la ecuación (1.16) obtenemos:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 A e^{i k (x - ct)} - \frac{v \bar{p}}{\beta} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (A e^{i k (x - ct)}) &= 0 \\ (-ikc + \bar{u})^2 A e^{i k (x - ct)} - \frac{v \bar{p}}{\beta} (-k^2) A e^{i k (x - ct)} &= 0 \\ -ikc \bar{u} + \bar{u}^2 k + \frac{v \bar{p}}{\beta} k^2 &= 0 \end{aligned}$$

resolviendo la ecuación anterior:

$$C = \bar{a} \cdot \left(\frac{\gamma \bar{p}}{\gamma} \right)^{1/2} \quad \text{de la ecuación de estado} \quad \frac{\bar{p}}{\bar{p}} = R \bar{T}$$

$$C = \bar{a} \cdot (\gamma R \bar{T})^{1/2} \quad 1.10$$

que nos da la velocidad del sonido en un fluido.

De lo anterior vemos que las ondas de sonido se propagan en la atmósfera a través de una serie de expansiones y compresiones, y ellas sólo pueden propagarse si el medio es compresible.

b) Ondas de gravedad

La acción de la gravedad hace que las masas de aire más densas se hundan y asciendan las más ligeras; esto origina perturbaciones que se propagan en forma de ondas transversales-verticales, en donde la partícula se mueve hacia arriba o hacia abajo mientras la onda se propaga horizontalmente; éstas son las ondas de gravedad. Para entender más este tipo de ondas se considerará la interfase entre dos fluidos incompresibles homogéneos de diferente densidad (fig. 1). La suposición de incompresibilidad es suficiente para excluir ondas de sonido del sistema y poder aislar las ondas de gravedad. También es despreciada la rotación de la tierra y se supone la condición hidrostática.

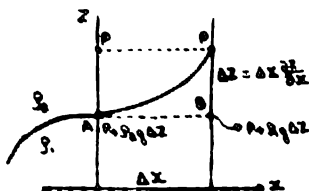


Figura 1

Puesto que ρ_1 y ρ_2 son constantes, el gradiente de presión horizontal en cada capa es independiente de la altura si la presión es hidrostática. Por simplicidad suponemos que no hay gradiente de presión en la capa superior. En la capa inferior se obtiene integrando verticalmente la ecuación hidrostática.

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \rho (p_1 - p_2) \frac{\partial z}{\partial x} \quad 1.19$$

Suponemos que el movimiento está en el plano x, z . La ecuación de movimiento de componente u para la capa inferior es:

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho w \frac{\partial u}{\partial z} + \rho (p_1 - p_2) \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \quad 1.20$$

Como $v = 0$ la ecuación de continuidad queda:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad 1.21$$

Integrando esta ecuación con respecto a z desde 0 a una altura z , se

obtiene:

$$\frac{\partial \bar{z}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{z}}{\partial x} + \bar{z} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = 0 \quad 1.22$$

en la cual se supone que la superficie de la tierra es plana $\alpha = 0$ en $z = 0$. Por tanto las soluciones de las ecuaciones (1.20) y (1.22), se obtienen usando el método de perturbación descrito anteriormente; sustituyendo ésto en (1.20) y (1.22) se obtiene:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\bar{u} + u') + (\bar{u} + u') \frac{\partial}{\partial x} (\bar{u} + u') + \omega \frac{\partial}{\partial z} (\bar{u} + u') + g (\bar{z} - z_0) \frac{\partial}{\partial x} (\bar{z} + z') = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\bar{z} + z') + (\bar{u} + u') \frac{\partial}{\partial x} (\bar{z} + z') + (\bar{z} + z') \frac{\partial}{\partial x} (\bar{u} + u') = 0$$

Realizando los productos de perturbaciones se obtiene:

$$\frac{\partial u'}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial u'}{\partial x} + g \left(1 - \frac{g}{f}\right) \frac{\partial z'}{\partial x} = 0 \quad 1.23$$

$$\frac{\partial z'}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial z'}{\partial x} + \bar{z} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = 0 \quad 1.24$$

eliminando u' de estas ecuaciones obtenemos:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} \right) z' = g \bar{z} \left(1 - \frac{g}{f}\right) \frac{\partial^2 z'}{\partial x^2} \quad 1.25$$

cuya solución es de la forma

$$z' = A e^{ik(x-ct)}$$

sustituyendo en (1.25)

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x}\right) \left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x}\right) A e^{ik(x-ct)} = gZ \left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_2}\right) \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}$$

y realizando las parciales se obtiene:

$$C = \bar{u} \pm \left[gZ \left(\rho_1 - \rho_2\right)\right]^{1/2} \quad 1.26$$

que es la velocidad de las ondas gravitacionales, observando que se propagan por cambios de presión debidos al peso del aire.

c) Ondas inerciales

El factor físico que mayor influencia tiene sobre el flujo atmosférico y lo hace diferente de las ondas de sonido y gravedad, es la rotación de la tierra. Se tomará en cuenta un caso muy especial en el cual consideraremos un aspecto de la rotación de la tierra en forma pura.

Consideremos el movimiento posible de la onda que pueda existir si suponemos un flujo horizontal y en el que además la fuerza de presión sea despreciable. Bajo estos supuestos se obtiene el sistema de ecuaciones.

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= f v \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= -f u \end{aligned} \quad 1.27$$

con una solución lineal de la forma

$$u = A e^{\pm h(\lambda - ct)} \quad , \quad v = A e^{\pm h(\lambda - ct)} \quad 1.28$$

sustituyendo (1.28) en (1.27) se obtiene:

$$- \lambda h c u = f v \quad 1.29$$

$$- \lambda h c v = - f u \quad 1.30$$

de (1.29) se despeja v y es sustituida en (1.30) obteniendo $\frac{h^2 c^2 \lambda}{f^2} u = u$;
despejando c^2 se tiene $c^2 = \frac{f^2}{h^2}$ por lo tanto $c = \pm \frac{f}{h}$ donde c es la
velocidad de las ondas inerciales.

El movimiento de estas ondas es, en contraposición con el de las ondas de sonido y gravedad, dependiente del número de onda h .

Estas ondas tienen, por lo tanto, un movimiento lento para valores de longitud de onda razonablemente pequeña.

d) Ondas de Rossby

Estas perturbaciones son las originadas por movimientos individuales horizontales del aire (viento) hacia el sur o hacia el norte; estas perturbaciones se propagan en forma de ondas transversales-horizontales y por lo tanto la onda está en el plano horizontal.

El movimiento de las ondas de Rossby puede obtenerse en una forma pura si despreciamos totalmente la divergencia horizontal y la velocidad vertical.

O sea que el flujo es horizontal y no divergente. La ecuación de vorticidad es

$$\frac{d}{dt} (\xi + f) = 0 \quad 1.31$$

Como puede verse en esta ecuación (1.31), la advección de vorticidad es el mecanismo principal de evolución atmosférica, es decir:

$$\frac{d}{dt} (\xi + f) = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} (\xi + f) + \mathbf{V} \cdot \nabla (\xi + f) = 0$$

o también

$$\frac{\partial}{\partial t} (\xi + f) = -\mathbf{V} \cdot \nabla (\xi + f)$$

Lo cual significa que el cambio local de la vorticidad absoluta es debido sólo a la advección de la misma.

La ecuación (1.31) es obtenida a partir de las ecuaciones de movimiento de componente u, v

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - f v + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad 1.32$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + f u + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad 1.33$$

y la ecuación de continuidad para $w = 0$ es:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad 1.34$$

diferenciando (1.32) con respecto a y , y (1.33) con respecto a x , y luego restándolas se obtiene la ecuación de vorticidad.

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + u \frac{\partial \xi}{\partial x} + v \frac{\partial \xi}{\partial y} + u \frac{\partial f}{\partial x} + v \frac{\partial f}{\partial y} + (\xi + f) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0 \quad 1.35$$

donde $\xi = \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)$; ξ sólo depende de y , entonces

$$\frac{d\xi}{dt} = v \frac{\partial f}{\partial y}$$

La ecuación (1.35) se puede escribir como:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\xi + f) + u \frac{\partial}{\partial x} (\xi + f) + v \frac{\partial}{\partial y} (\xi + f) = 0 \quad 1.36$$

la cual puede ser expresada como $\frac{d}{dt} (\xi + f) = 0$

Para obtener la velocidad de fase de las ondas de Rossby, se tiene a y v independientes de la coordenada y , y ξ independiente de x y t , por lo que la ecuación (1.35) se puede escribir de la siguiente manera:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t \partial x} + u \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \beta v = 0 \quad 1.37$$

donde $\beta \equiv \frac{\partial f}{\partial y}$ es el parámetro de Rossby, $v = v(\xi)$ e independiente de y ; con lo cual (1.37) es casi-lineal y suponemos que existe una solución de la forma

$$v = A e^{ik(x - ct)} \quad 1.38$$

sustituyendo (1.36) en (1.37) y haciendo las correspondientes derivaciones se obtiene

$$c = \bar{\omega} - \frac{\beta}{k^2} \quad 1.38$$

que da la velocidad de fase de las ondas de Rossby, las cuales se mueven en una dirección definida, en tanto que las otras ondas tienen un signo doble.

CAPÍTULO 2

EFECTO DE LA DISTRIBUCIÓN ESPACIAL DE LAS VARIABLES DEPENDIENTES DE LAS ONDAS DE GRAVEDAD EN UNA DIMENSIÓN Y EN DOS DIMENSIONES, Y DE LAS ONDAS DE GRAVEDAD - INERCIALES EN UNA DIMENSIÓN

En el presente capítulo se analiza la simulación correcta del proceso de ajuste geostrófico, el cual está esencialmente gobernado por las ecuaciones de ondas de gravedad-inerciales. Tales ecuaciones son obtenidas al considerar un fluido incompresible, homogéneo, no-viscoso, hidrostático, rotando con una base plana y superficie superior libre,

$$\frac{d\mu}{dt} - f v + g \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right) = 0 \quad 2.1$$

$$\frac{dv}{dt} + f \mu + g \left(\frac{\partial h}{\partial y} \right) = 0 \quad 2.2$$

$$\frac{dh}{dt} + h \left(\frac{\partial \mu}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0 \quad 2.3$$

donde t es tiempo, x y y son las coordenadas cartesianas, u y v son las componentes de velocidad en las direcciones x y y respectivamente,

h es la profundidad del fluido, f es el parámetro de Coriolis constante, y g es la gravedad. La razón de cambio individual de tiempo está definida por

$$\frac{d}{dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y}$$

Una forma linealizada de estas ecuaciones es usada, las cuales son obtenidas reemplazando $\frac{d}{dt}$ por $\frac{\partial}{\partial t}$, y h como el factor en $\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right)$ en la ecuación (2.3) por H , el valor medio de h .

Este procedimiento es justificado cuando el número de Rossby es pequeño y la escala horizontal es del orden del radio de deformación o menor.

Las ecuaciones básicas están dadas por:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= -g \frac{\partial h}{\partial x} + f v & \frac{\partial v}{\partial t} &= -g \frac{\partial h}{\partial y} - f u \\ \frac{\partial h}{\partial t} &= -H (\nabla \cdot \mathbf{v}) \end{aligned} \quad 2.4$$

las cuales están representando solamente una parte del sistema completo de las ecuaciones primitivas (la propagación horizontal de las ondas de gravedad y gravedad-inerciales).

El objetivo principal a continuación es analizar la distribución espacial de las variables dependientes de las ondas de gravedad y gravedad-inerciales.

a) Ondas de gravedad en una dimensión

Considerando la parte pura de las ondas de gravedad en la ecuación (2.4),

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -g \frac{\partial h}{\partial x} \quad , \quad \frac{\partial h}{\partial t} = -H \frac{\partial u}{\partial x} \quad 2.6$$

tenemos un sistema con dos variables dependientes (u, h) y dos variables independientes (x, t), cuya solución es supuesta proporcional a $e^{i(kx - \omega t)}$, así:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \text{Re} [\hat{u} e^{i(kx - \omega t)}] \\ h(x, t) &= \text{Re} [\hat{h} e^{i(kx - \omega t)}] \end{aligned} \quad 2.6$$

con lo cual

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= -\omega \hat{u} e^{i(kx - \omega t)} \quad ; \quad \frac{\partial h}{\partial t} = -\omega \hat{h} e^{i(kx - \omega t)} \\ \frac{\partial u}{\partial x} &= k \hat{u} e^{i(kx - \omega t)} \quad ; \quad \frac{\partial h}{\partial x} = k \hat{h} e^{i(kx - \omega t)} \end{aligned} \quad 2.7$$

sustituyendo en la ecuación (2.5) se obtiene:

$$\omega \hat{u} e^{i(kx - \omega t)} = g k \hat{h} e^{i(kx - \omega t)} \quad 2.8$$

$$\omega \hat{h} e^{i(kx - \omega t)} = H k \hat{u} e^{i(kx - \omega t)} \quad 2.9$$

de la ecuación (2.8) despejo $\omega = g k \frac{\hat{h} e^{i(kx - \omega t)}}{\hat{u} e^{i(kx - \omega t)}} = g k \frac{\hat{h}}{\hat{u}} ;$

agrupando términos $\left(\frac{\hat{u}}{\hat{h}} \right)^2 = \left(\frac{g k}{\omega} \right)^2 ,$

sustituyendo V y la ecuación (2.6) en (2.9) se tiene

$$g k \hat{h}^2 [R_0 e^{i(kx - vt)}]^2 = H k \hat{u}^2 [R_0 e^{i(kx - vt)}]^2$$

eliminando $[R_0 e^{i(kx - vt)}]^2$ obtenemos:

$$g k \hat{h}^2 = H k \hat{u}^2 \quad \text{con} \quad k = \text{número de ondas} = \frac{2\pi}{L}$$

obteniendo así la ecuación de frecuencia

$$\frac{v^2}{h^2} = H g \tag{2.10}$$

la velocidad de fase $\frac{v}{h} = c$; $c^2 = \frac{v^2}{h^2} = H g$; $c = \pm \sqrt{Hg}$ 2.11

velocidad de grupo $C_g = \frac{d}{dk}(hc)$, $C_g = \pm \sqrt{Hg}$

En los desarrollos anteriores se muestra que las ondas de gravedad pueden propagarse a lo largo del eje x en ambas direcciones con una rapidez de fase $\pm \sqrt{Hg}$

Esta rapidez de fase no es función del número de ondas k .

Efecto de discretización

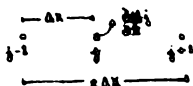
Considerando las ecuaciones diferenciales de diferencias finitas

$$\frac{\partial M_1}{\partial x} = -g \frac{h_{2j+1} - h_{2j-1}}{2 \Delta x}$$

2.12

$$\frac{\partial h_1}{\partial x} = -H \frac{M_{1j+1} - M_{1j-1}}{2 \Delta x}$$

donde las derivadas espaciales en la ecuación (2.5) están aproximadas por cocientes de diferencias finitas usando valores de los dos puntos vecinos como se muestra a continuación.



Las soluciones de la ecuación (2.12) tienen la forma:

$$h_{2j+1}(x) = \operatorname{Re} [\hat{h} e^{i(h_{2j+1} \Delta x - v t)}]$$

$$u_{2j+1}(x) = \operatorname{Re} [\hat{u} e^{i(h_{2j+1} \Delta x - v t)}]$$

2.13

$$u_{2j}(x) = \operatorname{Re} [\hat{u} e^{i(h_{2j} \Delta x - v t)}]$$

$$h_j(x) = \operatorname{Re} [\hat{h} e^{i(h_j \Delta x - v t)}]$$

en una forma similar al caso analítico se obtiene:

$$u_{2j+1} = \frac{\hat{h} g}{2 \Delta x} (e^{i h_{2j+1} \Delta x} - e^{-i h_{2j+1} \Delta x})$$

2.14

$$h_{2j+1} = \frac{H \hat{u}}{2 \Delta x} (e^{i h_{2j+1} \Delta x} - e^{-i h_{2j+1} \Delta x})$$

con $e^{i h \Delta x} - e^{-i h \Delta x} = 2 i \sin h \Delta x$

la ecuación (2.14) puede reducirse a:

$$\frac{h^2 g}{h^3 \Delta x} \sin h \Delta x = \frac{H \Delta^2}{\Delta x} \sin h \Delta x$$

y así obtener la ecuación de frecuencia

$$c^2 = \frac{y^2}{h^2} = H g \left(\frac{\sin h \Delta x}{h \Delta x} \right)^2 \quad 2.15$$

con velocidad de fase

$$c = \pm \sqrt{H g} \frac{\sin h \Delta x}{h \Delta x} \quad 2.16$$

y velocidad de grupo

$$c_g = \frac{d}{dh} (hc) = \pm \sqrt{H g} \cos h \Delta x$$

así al realizar las derivadas espaciales en diferencias finitas resulta una dispersión computacional al ser la velocidad de grupo y fase una función del número de ondas $h = \frac{2\pi}{\lambda}$. En la velocidad de fase, cuando $h \Delta x$ se incrementa desde cero, la rapidez de fase c decrece desde c , y alcanza el cero para longitudes de onda resolubles más cortas que $(2 \Delta x)$, cuando

$h \Delta x = \pi$. En la velocidad de grupo c_g cuando $h \Delta x$ se incrementa desde cero, la velocidad de grupo c_g decrece desde c_g y llega al valor $-c_g$ para las ondas más cortas que $(2 \Delta x)$ de longitud de onda. Estos resultados pueden verse en la figura 2.

Se verá cuál es el efecto de la distribución de las variables dependientes en las ondas de gravedad en una dimensión. Se supone que hay valores de u y h en todos los puntos de la malla.

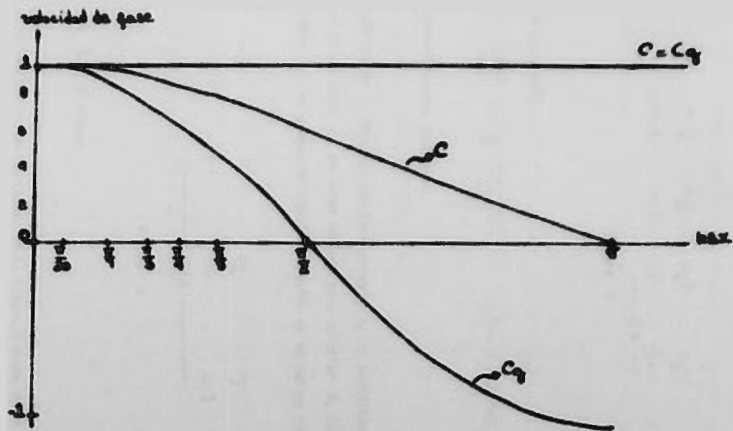


Figura 2

Velocidad de fase y grupo de las ondas de gravedad como una función del número de onda k .



Figura 3

obteniendo así:

$$\frac{\partial M_i}{\partial t} = -g \frac{h_{i+1} - h_{i-1}}{2\Delta x} ; \quad \frac{\partial h_i}{\partial x} = -H \frac{M_{i+1} - M_{i-1}}{2\Delta x}$$

no necesariamente acopladas.

Observando de lo anterior que para obtener u_i no necesitamos la variable h en el mismo punto i , en forma análoga para calcular h_i no necesitamos la variable u_i , se piensa en una distribución de variables como sigue:

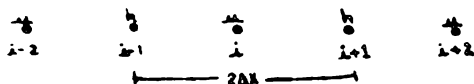


Figura 4

siendo Δx el mismo.

La distribución de las variables en la figura 3 puede verse como la superposición de dos submrejados de la figura 4, con la solución sobre cada uno de ellos siendo completamente desacoplados.

Así cuando se usa una malla como la ilustrada en la figura 4, las velocidades de fase y grupo cubren el espectro hasta longitudes de onda $4\Delta x$. Esto es una mejora muy importante ya que ondas con $h\Delta x > \frac{\pi}{2}$ han sido eliminadas, siendo éstas las que tienen grandes errores en la velocidad de fase (la cual es cero en $h\Delta x = \pi$) y velocidad de grupo negativa (en $h\Delta x = \pi$).

El tiempo de computación necesario para resolver el enrejado de la figura 4 está reducido por un factor de dos y el error de truncación es el mismo.

b) Ondas de gravedad bidimensionales

Tomemos el sistema de ecuaciones linealizadas

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mu}{\partial x} &= -g \frac{\partial h}{\partial x}, & \frac{\partial v}{\partial x} &= -g \frac{\partial h}{\partial y} \\ \frac{\partial h}{\partial x} &= -H \left(\frac{\partial \mu}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad 2.17$$

con soluciones ondulatorias de la forma:

$$\begin{aligned} \mu(x, t) &= R_{\mu} [\hat{\mu} e^{i(kx + ly - \omega t)}] \\ v(x, t) &= R_v [\hat{v} e^{i(kx + ly - \omega t)}] \\ h(x, t) &= R_h [\hat{h} e^{i(kx + ly - \omega t)}] \end{aligned} \quad 2.18$$

sustituyendo en la ecuación (2.17) se obtiene que las ondas de gravedad bidimensionales se propagan con la misma rapidez de fase constante

$C = \pm \sqrt{H_2}$. Por consiguiente los términos en (2.17) representan solamente una parte del sistema completo de ecuaciones primitivas.

De acuerdo a los resultados obtenidos en una dimensión, se consideran las cinco distribuciones de las variables dependientes u , v , h , sobre una malla cuadrada como se muestra en la figura 5. Por unidad de área tienen las mismas variables.

Para las mallas (A) hasta (D), d es igual a la distancia más corta entre puntos de la malla con la misma variable, y para (E), d es igual a $\sqrt{2}d$. Con el mismo valor de d , como se observa en la figura 5, el error de truncación de las ecuaciones (2.17) es el mismo. Nótese que la malla (E) puede ser vista como una superposición de 2 mallas (C), y la malla (A) puede ser formada por una superposición de dos mallas (E); cabe observar que en la malla (E) las líneas coincidiendo en los puntos más vecinos con la misma variable hacen un ángulo de $\pi/4$ con la malla, mientras que con las otras mallas esas líneas están a lo largo de las líneas de la malla.

Una de las primeras decisiones que debe tomarse cuando se diseña un modelo numérico de la atmósfera, es escoger la distribución de las variables dependientes sobre los puntos de la malla.

Entonces se desea ver algunos aspectos de la situación creada cuando las derivadas espaciales en el sistema son substituidas por sus diferencias finitas centradas. Es decir, se necesita una decisión sobre el arreglo espacial de las variables dependientes.

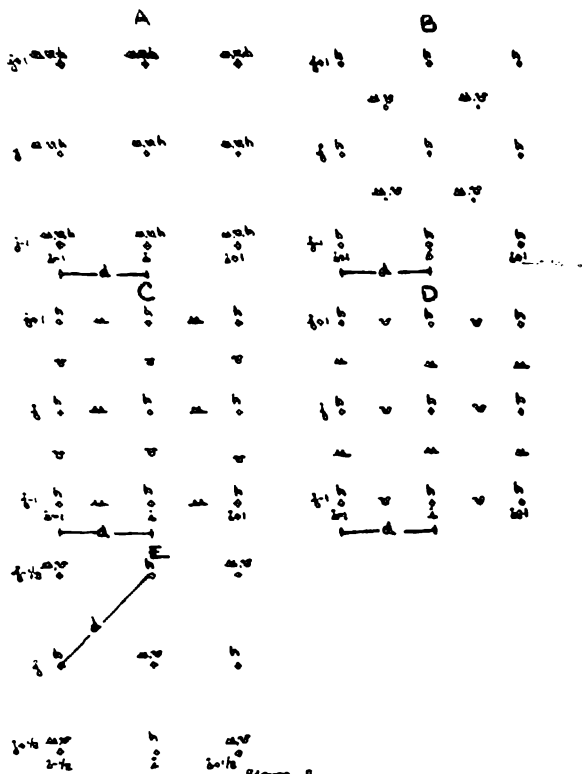


Figure 5

Distribución espacial de las variables dependientes sobre una malla cuadrada

Se consideran cinco tipos de mallas (figura 5) para la solución de diferencias finitas de (2.17), en donde el mismo operador de diferencias centradas δ_x y δ_y puede ser usado, así el sistema (2.17) es reemplazado por:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= -g \delta_x h & \frac{\partial v}{\partial x} &= -g \delta_y h \\ \frac{\partial h}{\partial x} &= -H (\delta_x u + \delta_y v)\end{aligned}\tag{2.19}$$

$$\text{donde: } \delta_x h \equiv \frac{1}{2\Delta x} [h(x+\Delta^0, y) - h(x-\Delta^0, y)]$$

$$\delta_y h \equiv \frac{1}{2\Delta y} [h(x+\Delta^0, y) - h(x-\Delta^0, y)]$$

Δ^0 es igual a " Δ " para las mallas A $\rightarrow$ D y a $\sqrt{2}\Delta$ para la malla (E).

Sustituyendo soluciones ondulatorias análogas a (2.18) en (2.19), se obtiene que la razón de la rapidez de fase dada por

$$c = \frac{v}{\sqrt{k^2 + \lambda^2}}$$

a la rapidez de fase verdadera $\sqrt{gH}$ es:

$$\frac{c}{\sqrt{gH}} = \sqrt{\frac{\lambda \cos^2 \chi + \lambda \sin^2 \chi}{\lambda^2 + y^2}}\tag{2.20}$$

Dando valores a χ y v comprendidos en el intervalo $[0, \pi]$ se obtiene la gráfica mostrada en la figura 6.

En la misma figura 6 se observe que las ondas admitidas cubren una región triangular en el plano k, ℓ sobre el número de onda, así como un decrecimiento

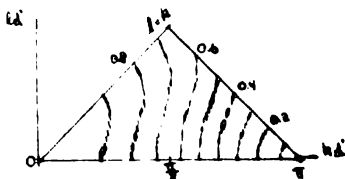


Figura 6

Velocidad de fase de las ondas de gravedad como una función del número de onda k y l , cuando las derivadas espaciales son substituidas por diferencias finitas centradas.

to general en la velocidad de fase con un incremento en el número de onda.

De las ecuaciones (2.13) gobernando la propagación de las ondas de gravedad, se ilustra el problema de separación de soluciones para las ondas de la figura 5.

$$\partial_x \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = -g \partial_x h$$

$$\partial_y \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) = -g \partial_y h$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (\partial_x u + \partial_y v) = -g (\partial_{xx} + \partial_y \partial_y) h$$

$$\frac{\partial h}{\partial x} = -H (\partial_x u + \partial_y v)$$

las cuales nos muestran que las perturbaciones del campo de altura se propagarán por la excitación de las perturbaciones del campo de divergencia y las perturbaciones del campo de divergencia se propagarán por la excitación de las perturbaciones del campo de altura.

c) Ondas de gravedad-inerciales en una dimensión y distribución espacial de las variables.

En este caso debe considerarse el término de Coriolis no conteniendo ésta derivadas, con lo cual se debe reconsiderar el problema de la distribución de las variables. Sea nuestro sistema de ecuaciones linealizadas

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= -g \frac{\partial h}{\partial x} + f v \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= -g \frac{\partial h}{\partial y} - f u \\ \frac{\partial h}{\partial x} &= -H \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)\end{aligned}\tag{2.21}$$

Para investigar el efecto de la distribución de las variables dependientes sobre las propiedades dispersivas de las ondas de gravedad-inerciales, se hará uso de las aproximaciones centradas más simples para las derivadas espaciales, conservando las derivadas temporales en su forma diferencial. Es decir, se trabaja con ecuaciones semi-discretas.

Se considerarán los cinco arreglos ilustrados en la figura 5. Todas las mallas tienen el mismo número de variables dependientes por unidad de área. El tiempo de computación necesario para una integración sobre cada una de las mallas será casi el mismo, las propiedades de la solución obtenida diferirán sólo por el efecto del arreglo de las variables.

Se define el siguiente operador de diferenciación espacial

$$\begin{aligned}(\delta_x \alpha)_{j,j} &\equiv \frac{1}{\Delta} (\alpha_{i+\frac{1}{2},j} - \alpha_{i-\frac{1}{2},j}) \\ (\bar{\alpha}^x)_{j,j} &\equiv \frac{1}{2} (\alpha_{i+\frac{1}{2},j} + \alpha_{i-\frac{1}{2},j})\end{aligned}\tag{2.22}$$

donde i y j son los índices de los puntos de la malla en las direcciones x y y respectivamente. Los símbolos $(\partial g / \partial x)_{ij}$ y $(\bar{\alpha}^g)_{ij}$ son definidos en una manera similar, con respecto a la dirección x y y

$$(\bar{\alpha}^g)_{ij} \equiv (\bar{\alpha}^g)_{ji} \quad (2.22)$$

Para cada una de las mallas se usarán las aproximaciones de diferencias finitas centradas para las derivadas espaciales y término de Coriolis como se observa en las figuras 7a y 7b.

Enseguida se obtendrán las ecuaciones de frecuencia en una dimensión de las ondas de gravedad-inerciales, donde u , v , h no depende de y ; el sistema de ecuaciones linealizadas (2.21) se reduce a:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= -g \frac{\partial h}{\partial x} + f v \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= -f u \\ \frac{\partial h}{\partial t} &= -H \frac{\partial u}{\partial x} \end{aligned} \quad (2.24)$$

con soluciones proporcionales a $\exp [i (kx - \omega t)]$

$$u(x, t) = \text{Re} [\hat{u} e^{i(kx - \omega t)}]$$

$$v(x, t) = \text{Re} [\hat{v} e^{i(kx - \omega t)}]$$

$$h(x, t) = \text{Re} [\hat{h} e^{i(kx - \omega t)}]$$

sustituyendo en la ecuación (2.24) se obtiene:

Malla A

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -g \overline{\delta_x h}^2 + f v$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -g \overline{\delta_y h}^2 - f u$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -H(\overline{\delta_x u}^2 + \overline{\delta_y v}^2)$$

Malla B

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -g(\overline{\delta_x h})^2 + f v$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -g(\overline{\delta_y h})^2 - f u$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -H[(\overline{\delta_x u})^2 + (\overline{\delta_y v})^2]$$

Malla C

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -g(\delta_x h) + f \bar{v}^{22}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -g(\delta_y h) - f \bar{u}^{22}$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -H(\delta_x u + \delta_y v)$$

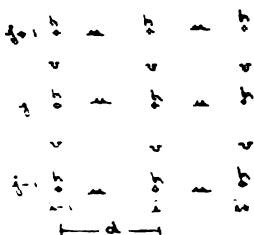
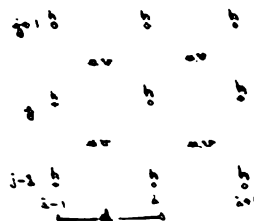
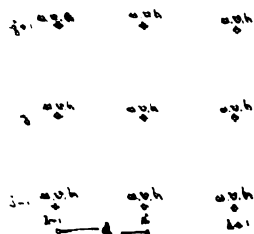
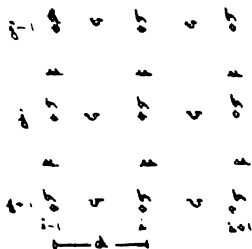


Figura 7a

Sistemas de diferencias finitas para cada malla

Malla D

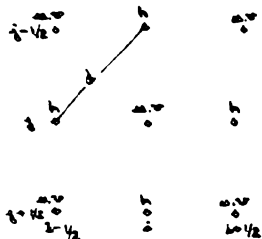


$$\frac{\partial u}{\partial x} = -g(\bar{\partial}_x h) + f u^{n+1}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -g(\bar{\partial}_x h) - f v^{n+1}$$

$$\frac{\partial h}{\partial x} = -H[(\bar{\partial}_x u)^{n+1} + (\bar{\partial}_x v)^{n+1}]$$

Malla E



$$\frac{\partial u}{\partial x} = -g(\bar{\partial}_x h) + f u$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -g(\bar{\partial}_x h) - f u$$

$$\frac{\partial h}{\partial x} = -H[\bar{\partial}_x u + \bar{\partial}_x v]$$

Figura 7b

Sistemas de diferencias finitas para cada malla

$$-\partial_x u(x, t) = -g h_{x, n}(x, t) + f v(x, t)$$

$$-\partial_x v(x, t) = -f u(x, t)$$

$$-\partial_x u(x, t) = -H h_{x, n}(x, t)$$

Eliminando u y h , obtenemos la ecuación de frecuencia γ para las ondas de gravedad-inerciales dada por:

$$\left(\frac{\gamma}{f}\right)^2 = 1 + g H \left(\frac{h}{f}\right)^2 \quad 2.25$$

donde k es el número de ondas en la dirección x ; definiendo como el radio de deformación, la ecuación (2.25) se expresa:

$$\left(\frac{\gamma}{f}\right)^2 = 1 + \lambda^2 k^2 \quad 2.26$$

la frecuencia de las ondas de gravedad-inerciales es una función creciente del número de onda k (figura 7c), a menos que el radio de deformación sea cero.

Para obtener la velocidad de grupo de la ecuación (2.26) se despeja γ .

$$\gamma = f (1 + \lambda^2 k^2)^{1/2}$$

$$c_g = \frac{\partial \gamma}{\partial k} = \frac{\partial}{\partial k} [f (1 + \lambda^2 k^2)^{1/2}] = f (1 + \lambda^2 k^2)^{-1/2} (\lambda^2 k)$$

por tanto la velocidad de grupo no es cero, lo cual es muy importante para el proceso de ajuste geostrofico; cuando $\lambda = 0$ implica que se tienen las ondas inerciales dominando.

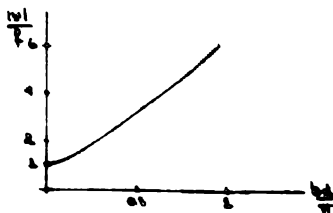


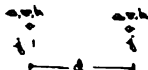
Figura 7c

Dependencia de la frecuencia sobre el número de onda

A continuación se verá cual es el efecto de discretización espacial para las ondas de gravedad-inerciales en una dimensión para las celdas A-E.

La distribución de las variables dependientes para una dimensión de la celda A es:

$$\frac{\partial \mu}{\partial x} = -g \bar{\zeta}_x h'' + f v$$



$$\frac{\partial v}{\partial x} = -f \mu$$

2.27

$$\frac{\partial h}{\partial x} = -H(\bar{\zeta}_x \mu)$$

sustituyendo el operador de diferenciación espacial definido en (2.22) y so-

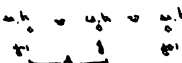
aciones proporcionales a $\exp [i(kx - \omega t)]$ se obtiene la ecuación de frecuencia

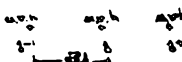
$$\left(\frac{\omega}{k}\right)^2 = 1 + \left(\frac{\lambda}{d}\right)^2 \sin^2 \frac{k d}{2}$$

Procediendo en forma similar para las mallas B - E se obtiene:

B  $\left(\frac{\omega}{k}\right)^2 = 1 + \left(\frac{\lambda}{d}\right)^2 \sin^2 \left(\frac{k d}{2}\right)$

C  $\left(\frac{\omega}{k}\right)^2 = \cos^2 \left(\frac{k d}{2}\right) + \left(\frac{\lambda}{d}\right)^2 \sin^2 \left(\frac{k d}{2}\right)$

D  $\left(\frac{\omega}{k}\right)^2 = \cos^2 \left(\frac{k d}{2}\right) + \left(\frac{\lambda}{d}\right)^2 \sin^2 \left(\frac{k d}{2}\right)$

E  $\left(\frac{\omega}{k}\right)^2 = 1 + 2 \left(\frac{\lambda}{d}\right)^2 \sin^2 \frac{k d}{2}$

En todas las cosas la frecuencia depende de dos parámetros kd y λ/d . Con estas frecuencias para las ondas de gravedad-inerciales, las propiedades de dispersión para cada malla serán examinadas.

Las longitudes de onda resolubles más cortas a lo largo del eje x son $2d$ para las mallas (A) - (D) con el correspondiente rango para el número de onda $0 < kd \leq \pi$, lo cual es comprobado fácilmente:

$$\lambda_{\min} = 2d \Rightarrow k_{\max} = \frac{2\pi}{\lambda_{\min}} = \frac{2\pi}{2d} \Rightarrow kd = \pi ; 0 < kd \leq \pi$$

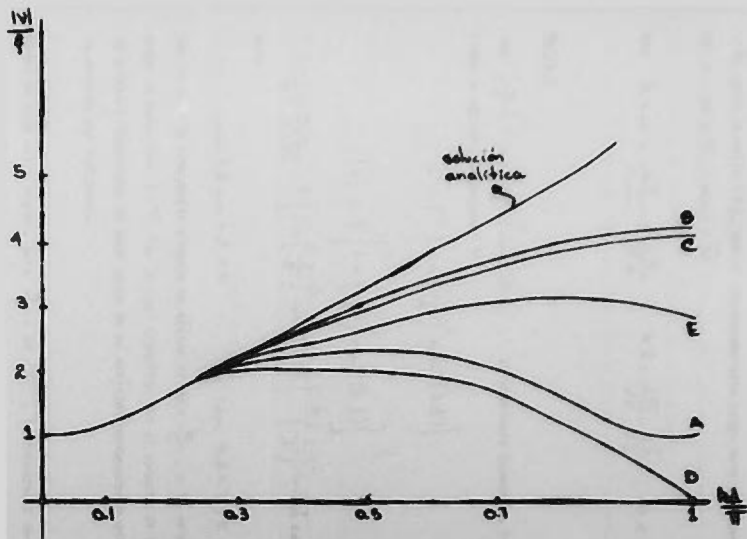


Figura 8. Dependencia de la frecuencia sobre el número de onda para el caso $\frac{\omega}{\Omega} = 2$.

Las longitudes de onda resolubles más cortas a lo largo del eje x son $\sqrt{2}d$ para la malla (E), con el correspondiente rango para el número de onda $0 < kd \leq \pi$, $\lambda_{\min} = \sqrt{2}d$

$$\text{con } k_{\min} = \frac{2\pi}{\lambda_{\min}} = \frac{2\pi}{\sqrt{2}d} ; \quad kd = \frac{2\pi}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} ; \quad 0 < kd \leq \pi$$

Parte A

Sea $\left(\frac{v}{f}\right)^2 = 1 + \left(\frac{\lambda}{d}\right)^2 \sin^2(kd)$. Se encontrará cuando la frecuencia tiene un mínimo; despejando v^2

$$v^2 = f^2 \left[1 + \left(\frac{\lambda}{d}\right)^2 \sin^2(kd) \right]$$

$$|v| = f \left[1 + \left(\frac{\lambda}{d}\right)^2 \sin^2(kd) \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$c_g = \frac{\partial v}{\partial(kd)} = f \left[1 + \left(\frac{\lambda}{d}\right)^2 \sin^2(kd) \right]^{-1/2} \left(\frac{\lambda}{d}\right)^2 \sin kd \cos kd$$

pero

$$\sin kd \cos kd = 0$$

$$\text{con } kd = \pi/2$$

con lo cual la frecuencia alcanza un mínimo en $kd = \frac{\pi}{2}$, y la velocidad de grupo es cero para $k = \pi/2d$, lo cual significa que el paquete de ondas está quieto y longitudes de onda cerca de su vecindad permanecerán quietas o se moverán muy lentamente.

Lejos de este valor mínimo, para $\frac{\pi}{2} < kd < \pi$, la frecuencia decrece cuando el número de ondas se incrementa (figura 8).

Cuando las ondas de gravedad-inerciales de aproximadamente ese número de ondas son excitadas cerca de un punto dentro de la región computacional, por ejemplo por efectos no lineales o forzamiento debido a calentamiento, etcétera, la energía ondulatoria se estacionará en ese punto.

Cuando $kd = \pi$ se tiene una oscilación inercial pura, y su velocidad de grupo es cero.

Figura B

$$\text{Sea} \quad \left(\frac{v}{c} \right)^2 = 1 + 4 \left(\frac{\lambda}{d} \right)^2 \sin^2 \left(\frac{kd}{2} \right)$$

despejando v^2

$$v^2 = c^2 \left[1 + 4 \left(\frac{\lambda}{d} \right)^2 \sin^2 \left(\frac{kd}{2} \right) \right] \quad ; \quad |v| = c \left[1 + 4 \left(\frac{\lambda}{d} \right)^2 \sin^2 \left(\frac{kd}{2} \right) \right]^{1/2}$$

en el rango $0 < kd < \pi$ la frecuencia se incrementa, alcanzando un máximo al final del rango (Figura B).

La velocidad de grupo:

$$v_g = \frac{\partial v}{\partial (kd)} = c \left[1 + 4 \left(\frac{\lambda}{d} \right)^2 \sin^2 \frac{kd}{2} \right]^{1/2} 4 \left(\frac{\lambda}{d} \right)^2 \sin \frac{kd}{2} \cos \frac{kd}{2}$$

es cero en $kd = \pi$.

Figura C

$$\text{Sea} \quad \left(\frac{v}{c} \right)^2 = \cos^2 \left(\frac{kd}{2} \right) + 4 \left(\frac{\lambda}{d} \right)^2 \sin^2 \left(\frac{kd}{2} \right)$$

$$v^2 = f^2 \left[\cos^2 \left(\frac{\lambda d}{2} \right) + 4 \left(\frac{\lambda}{d} \right)^2 \sin^2 \frac{kd}{2} \right] \quad |v| = f \left[\cos^2 \left(\frac{\lambda d}{2} \right) + 4 \left(\frac{\lambda}{d} \right)^2 \sin^2 \frac{kd}{2} \right]^{1/2}$$

la frecuencia alcanza un valor extremo en $kd = \pi$, se incrementa con kd si $\lambda/d > 1/2$ y decrece con kd si $\lambda/d < 1/2$. (Figura 8).

Prble D

$$\text{Sea} \quad \left(\frac{v}{f} \right)^2 = \cos^2 \left(\frac{kd}{2} \right) + \left(\frac{\lambda}{d} \right)^2 \sin^2 (kd)$$

La frecuencia alcanza un mínimo en $(\lambda/d)^2$ con $kd = 1/d$. En $kd = \pi$ se tiene una onda estacionaria.

$$|v| = f \left[\cos^2 \frac{kd}{2} + \left(\frac{\lambda}{d} \right)^2 \sin^2 (kd) \right]^{-1/2}$$

$$C_g = \frac{\partial v}{\partial (kd)} = f \left[\cos^2 \frac{kd}{2} + \left(\frac{\lambda}{d} \right)^2 \sin^2 kd \right]^{-1/2} (-1) \frac{1}{2} \cos \frac{kd}{2} \sin \frac{kd}{2} + \left(\frac{\lambda}{d} \right)^2 \sin kd \cos kd$$

$$C_g = 0 \quad \Rightarrow \quad \left[(-1) \frac{1}{2} \cos \frac{kd}{2} \sin \frac{kd}{2} + \left(\frac{\lambda}{d} \right)^2 \sin kd \cos kd \right] = 0$$

$$\text{recordando} \quad \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\sin kd \left[-\frac{1}{4} + \left(\frac{\lambda}{d} \right)^2 \cos kd \right] = 0 \quad ; \quad \left(\frac{\lambda}{d} \right)^2 \cos kd = \frac{1}{4}$$

Prble E

$$\text{Sea} \quad \left(\frac{v}{f} \right)^2 = 1 + 2 \left(\frac{\lambda}{d} \right)^2 \sin^2 \frac{kd}{2}$$

$$v^2 = \frac{1}{4} \left[1 + 2 \left(\frac{\lambda}{d} \right)^2 \cos^2 \frac{h d}{\sqrt{2}} \right] \quad |v| = \frac{1}{2} \left[1 + 2 \left(\frac{\lambda}{d} \right)^2 \cos^2 \frac{h d}{\sqrt{2}} \right]^{1/2}$$

$$-g = -\frac{\partial v}{\partial (h d)} = \frac{1}{2} \left[1 + 2 \left(\frac{\lambda}{d} \right)^2 \cos^2 \frac{h d}{\sqrt{2}} \right]^{-1/2} \frac{2}{\sqrt{2}} \left(\frac{\lambda}{d} \right)^2 \cos \frac{h d}{\sqrt{2}} \sin \frac{h d}{\sqrt{2}}$$

$$\text{pero } \sin \frac{h d}{\sqrt{2}} \cos \frac{h d}{\sqrt{2}} = 0 \quad \text{con } h d = \sqrt{2} \pi$$

Con lo cual la frecuencia alcanza un mínimo en $h d = \pi / \sqrt{2}$ y la velocidad de grupo es cero para la onda resoluble más corta con $h d = \sqrt{2} \pi$ dando una oscilación pura.

La figura 8 muestra una comparación de la dependencia de $|v|/g$ sobre $h d / \pi$ para el caso $\lambda/d = 2$, ilustrando la descripción no adecuada de las mailas A y D. La rapidez de fase y propiedades de dispersión de las tres mailas restantes son mejores, sin embargo la velocidad de grupo igual a cero ocurre en todas las mailas. Así con cualquiera de las mailas habrá dificultades en el proceso de ajuste geostrofico.

La diferencia entre los resultados para las mailas B y E es interesante porque esas dos mailas pueden ser obtenidas una de otra por una rotación de $\frac{\pi}{4}$ o sea 45° .

CAPITULO 3

ECUACION DE ADVECCION

En este capítulo se analizará el segundo problema en la integración por diferencias finitas de las ecuaciones gobernando el flujo atmosférico; éste es la predicción o simulación del flujo de gran escala casi-no divergente después que ha sido establecido. Aquí el mecanismo de evolución dominante es la advección horizontal, considerada como la parte más importante de las ecuaciones atmosféricas.

De nuestro sistema de ecuaciones primitivas completas en una dimensión

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} = -\mu \frac{\partial \mu}{\partial x} + f v - \frac{\partial \phi}{\partial x}$$

las propiedades de los términos $f v$ y $\frac{\partial \phi}{\partial x}$ fueron estudiados en el capítulo 2, las propiedades del término de advección $\frac{\partial \mu}{\partial t} = -\mu \frac{\partial \mu}{\partial x}$ serán estudiadas a continuación.

a) Ecuación de advección lineal en una dimensión

Consideremos primero la ecuación de advección lineal en una dimensión

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad , \quad c = \text{cte} \quad 3.1$$

con una solución analítica en la forma de una componente armónica

$$u(x,t) = R_e \left[(x) e^{i k x} \right] \quad 3.2$$

Aquí $u(x)$ es la amplitud de la onda y k el número de onda; sustituyendo (3.2) en (3.1) obtenemos

$$\frac{dU}{dt} + i k c U = 0$$

donde kc es igual a la frecuencia ν y $c \cdot \frac{\nu}{k}$ es la rapidez de fase de las ondas, por lo tanto la función $u(x,t)$ es adveccionada sin cambiar de forma con una velocidad de fase constante a lo largo del eje x .

Consideremos ahora el caso cuando las derivadas espaciales en (3.1) son aproximadas por un cociente de diferencias centradas

$$\frac{\partial u_j}{\partial t} + c \frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{2 \Delta x} = 0 \quad 3.3$$

obteniendo así una ecuación semi-discreta.

Puesto que la derivada temporal retiene su forma diferencial, cualquier error en (3.3) es debido a la diferenciación espacial.

La ecuación (3.3) tiene una solución de la forma

$$u_j(x) = R_e \left[U(k) e^{i k_j \Delta x} \right]$$

Al ser sustituida en (3.3) se obtiene

$$\frac{du}{dx} + i k \left(c - \frac{\sin \frac{k \Delta x}{2}}{\frac{k \Delta x}{2}} \right) U = 0 \quad 3.4$$

donde la rapidez de fase $c = c_{\text{non}} \frac{k \Delta x}{k \Delta x}$ deja de ser una constante y ser función del número de onda k . Por tanto al expresar las derivadas espaciales por un cociente de diferencias finitas resulta una dispersión de las ondas, llamada dispersión computacional.

El comportamiento de $k \frac{\Delta x}{2}$ en función del número de ondas para la velocidad de fase es análogo al de la figura 2.

Así la rapidez de advección cambia con el número de ondas, esta falsa dispersión es particularmente seria para las ondas más cortas. Si el patrón que está siendo adveccionado representa una superposición de más de una onda, esta falsa dispersión resultará en una deformación de ese patrón. Esto es de importancia para pequeña escala en la atmósfera.

Por tanto el efecto de dispersión computacional requiere especial cuidado.

Analizando la velocidad de grupo, se observa que para la ecuación (3.1) esta velocidad de grupo es igual a la rapidez de fase C . Con la ecuación semi-discreta la velocidad de grupo es $C_g = C \cos k \frac{\Delta x}{2}$. Por tanto para la ecuación de advección lineal (3.1) las ondas individuales y el paquete de ondas

se propagan con la misma velocidad constante $C = C_g$. Sin embargo en la ecuación de advección lineal aproximada por un cociente de diferencias centradas, la rapidez de fase y velocidad de grupo disminuyen cuando el número de ondas se incrementa.

Para longitudes de onda menores que $4 \Delta x$ se obtiene que la velocidad de grupo es negativa. Esto implica que el paquete de ondas se propagará en la dirección opuesta a la velocidad de advección y a la dirección de la propagación de las ondas individuales.

De acuerdo a lo obtenido anteriormente es necesario hacer un estudio de esquemas con diferencias no centradas, y seleccionar el más adecuado desde el punto de vista físico.

b) Ecuación de advección lineal en dos dimensiones

Consideremos ahora la ecuación de advección lineal en dos dimensiones

$$\frac{\partial M}{\partial t} + C_x \frac{\partial M}{\partial x} + C_y \frac{\partial M}{\partial y} = 0 \quad , \quad C_x, C_y = \text{cte} \quad 3.5$$

donde C_x, C_y son las componentes de la velocidad de advección. Con lo cual

$C = \sqrt{C_x^2 + C_y^2}$ es la rapidez de advección.

Se analizará la ecuación (3.5) cuando las derivadas espaciales son aproximadas por cocientes de diferencias de segundo orden.

$$\frac{\Delta M_{i,j}}{\Delta t} = -C_x \frac{M_{i+1,j} - M_{i-1,j}}{2\Delta x} - C_y \frac{M_{i,j+1} - M_{i,j-1}}{2\Delta y} \quad (3.6)$$

donde las coordenadas de los puntos de la malla son $x = i\Delta x$, $y = j\Delta y$, así los valores aproximados de $u(i\Delta x, j\Delta y)$ son denotados por $u_{i,j}$.

Sustituyendo en la ecuación (3.6) una solución de la forma

$$u_{i,j} = R_a \left[U(k) e^{i(kx + jy)} \right]$$

se obtiene

$$\frac{\Delta U}{\Delta t} = i \left(-\frac{C_x}{\Delta x} \sin k\Delta x - \frac{C_y}{\Delta y} \sin l\Delta y \right) \quad (3.7)$$

Se desea obtener el siguiente criterio de estabilidad

$$\left| \left(\frac{C_x}{\Delta x} \sin k\Delta x + \frac{C_y}{\Delta y} \sin l\Delta y \right) \Delta t \right| \leq 1 \quad (3.8)$$

el cual debe ser satisfecho para todos los valores admisibles de los números de ondas.

Consideremos el caso cuando $\Delta x = \Delta y$. Los números de ondas admisibles para una región cuadrada se muestran en la figura 9. Para longitudes de onda Δx , $k\Delta x = \pi/2$ y el término del lado derecho de la ecuación (3.7) obtiene un máximo en el centro del cuadrado.

$$\text{Así } \sin k\Delta x = \sin l\Delta x = 1$$

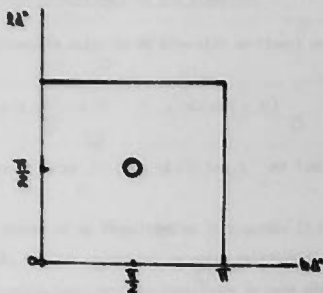


Figure 9

Para un valor dado de la rapidez de advección

$$\left| \left(\frac{c_x}{\Delta x} \cos k \Delta x + \frac{c_y}{\Delta y} \cos l \Delta y \right) \Delta t \right|$$

tiene un valor mínimo en este punto si la velocidad de advección hace un ángulo de $\frac{\pi}{2}$ con el eje x , en este caso $c_x = c_y = \left\{ \sqrt{2}/2 \right\} c$. Obteniendo de el criterio de estabilidad

$$\sqrt{2} c \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1$$

donde c es la rapidez de fase de las ondas más rápidas que describen nuestro sistema, en el caso de ecuaciones primitivas, la rapidez del sonido es la onda más rápida descrita por las ecuaciones; $c = 300 \text{ m seg}^{-1}$ con lo cual un paso del tiempo de solamente unos pocos minutos es permitido.

c) Ecuación de advección no-lineal en una dimensión

Finalmente estudiaremos la ecuación de advección no-lineal en una dimensión

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad ; \quad u = u(x, t) \quad 3.9$$

con una solución de la forma $u = g(x - ut)$ con g una función arbitraria.

Se considerará el efecto de no linealidad en la ecuación (3.9). Con un esquema de diferencias finitas se obtiene un error relacionado a la insuficiencia de la discretización para resolver longitudes de onda más cortas que $2 \Delta x$, o sea

$$L_{\min} = 2 \Delta x \Rightarrow K_{\max} = \frac{\pi}{\Delta x}$$

Considérese

$$u = \sin kx \quad 3.10$$

donde la función $u(x)$ puede ser representada por valores en los puntos de la malla, donde $k < k_{\max}$.

Sustituyendo (3.10) en el término no-lineal de la ecuación (3.9) se obtiene

$$u \frac{\partial u}{\partial x} = \sin kx \cos kx \text{ con } kx = \frac{1}{2} k \sin 2kx \quad 3.11$$

Pero el intervalo de la ecuación (3.10) está comprendido entre

$1/2 k_{\min} < k \leq k_{\max}$, donde el término no-lineal dará un número de onda

lejos del rango que pueda ser resuelto por el enrejado. Así, un cálculo con diferencias finitas no pueda por lo tanto ser reproducido.

Por ejemplo, al considerar el caso $L = \frac{4}{5} \Delta x$, línea continua en la figura 10, y conociendo solamente los valores en los puntos del enrejado, no podrá ser distinguida esta onda de la mostrada por la línea discontinua.

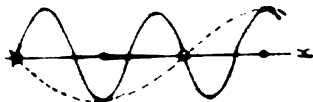


Figura 10

Una onda con $L = \frac{4}{5} \Delta x$

Así, suponiendo que las ondas más largas están presentes, se cometerá un error conocido como "aliasing".

Por tanto al hacer una integración por diferencias finitas deben tomarse medidas con respecto a este error, ya que de otro modo la integración no es aceptada físicamente.

CONCLUSIONES

De acuerdo a lo presentado en los capítulos anteriores, se concluye que cuando se aplica un esquema de diferencias finitas a las ecuaciones primitivas, la velocidad de fase se hace cero para longitudes de onda en la vecindad superior de $2 \Delta x$ y la velocidad de grupo toma valores negativos en la misma vecindad. Recordemos que en las ondas de gravedad y gravedad-inerciales tenemos dos variables dependientes y en el caso de la ecuación de advección tenemos una sola variable dependiente.

En este trabajo se encontró que la velocidad de grupo nunca es cero en las ondas de gravedad-inerciales (caso analítico), lo que es físicamente muy importante para el proceso de ajuste geostrofico, ya que estas ondas son las que llevan a la atmósfera a un estado de ajuste geostrofico.

En el caso de diferencias finitas la velocidad de grupo es cero, lo cual im-

olice que la onda permanece estacionaria en ese punto y longitudes de onda cerca de su vecindad superior permanecerán quietas o se moverán muy lentamente.

En la ecuación de advección el tener una velocidad de grupo negativa implica tener advección computacional en sentido opuesto al de advección física. Por tanto se ve la necesidad de dar una solución a esto.

Hay dos opciones a seguir en estos problemas:

- a) La aplicación de los operadores que filtran esta parte del espectro con componentes que tienen problemas.
- b) Analizar los efectos del esquema computacional aplicado en el diseño del modelo. Es decir, solucionar los alcances y limitaciones del esquema aplicado al problema físico en cuestión. En este trabajo es ésta la opción presentada, pues se han analizado las variables involucradas en las ecuaciones primitivas.

Para el campo de variables involucradas se utilizaron cinco arreglos para la distribución espacial de las variables. En el caso de las ondas de gravedad se elimina la parte del espectro con longitudes de onda muy pequeña, siendo el error de truncación el mismo, y el tiempo de computación necesario para resolver el enrejado está reducido por un factor de dos.

En el caso de las ondas de gravedad-inerciales la distribución de las variables más adecuada para el balance geostrófico es la representada por la malla C en la figura 8.

Dadas las condiciones de la República Mexicana, es decir su posición geográfica en latitudes tropicales, su orografía, variedad de climas, rodeado por dos océanos y la presencia de huracanes, los cuales son importantes para los recursos hídricos en el norte del país, presenta a los investigadores y meteorólogos una problemática en el diseño de modelos numéricos de los sistemas que generan las condiciones meteorológicas en la República Mexicana.

Ante esta problemática, se creyó conveniente desarrollar el presente trabajo, el cual se pretende sea de alguna utilidad en el diseño consistente de modelos matemáticos.

APPENDICE

$$\frac{\partial M_0}{\partial z} = -g \frac{h_1 - h_2}{\sqrt{z} \Delta} \quad \frac{\partial V_0}{\partial z} = -g \frac{h_2 - h_0}{\sqrt{z} \Delta}$$

A.2

$$\frac{\partial h_2}{\partial z} = -H \left(\frac{M_0 \cdot M_1}{\sqrt{z} \Delta} - \frac{V_0 \cdot V_1}{\sqrt{z} \Delta} \right)$$

Las componentes de la velocidad pueden ser expresadas usando las mismas z lo largo de los nuevos ejes coordenados.

$$u = \frac{\sqrt{z}}{2} (u' - v') \quad ; \quad v = \frac{\sqrt{z}}{2} (u' + v') \quad \text{A.3}$$

substituyendo (A.3) en (A.2) se obtiene

$$\frac{\sqrt{z}}{2} \left(\frac{\partial M_0}{\partial z} - \frac{\partial V_0}{\partial z} \right) = -g \frac{h_1 - h_2}{\sqrt{z} \Delta} \quad \text{A.4}$$

$$\frac{\sqrt{z}}{2} \left(\frac{\partial M_0}{\partial z} + \frac{\partial V_0}{\partial z} \right) = -g \frac{h_2 - h_0}{\sqrt{z} \Delta} \quad \text{A.5}$$

$$\frac{\partial h_2}{\partial z} = -\frac{H}{2\Delta} \left(\frac{M_0 - V_0 - M_1 - V_1}{\sqrt{z} \Delta} + \frac{M_1 + V_1 - M_0 - V_0}{\sqrt{z} \Delta} \right) \quad \text{A.6}$$

combinando (A.4) y (A.5) y agrupando términos en (A.6) se tiene:

$$\frac{\partial M_0}{\partial z} = -g \frac{1}{2\Delta} (h_1 + h_2 - h_0 - h_2) \quad .$$

A.7

$$\frac{\partial V_0}{\partial z} = -g \frac{1}{2\Delta} (h_1 + h_2 - h_1 - h_0)$$

$$\frac{\partial h_1}{\partial t} = -\frac{H}{2\Delta} (u_3 + u_6 - u_1 - u_4 + v_6 + v_1 - v_3 - v_6)$$

generalizando los resultados (A.7) puede escribirse como

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= -g \overline{\delta_x h}^n, & \frac{\partial v}{\partial t} &= -g \overline{\delta_y h}^n \\ \frac{\partial h}{\partial t} &= -H \left(\overline{\delta_x u}^n + \overline{\delta_y v}^n \right) \end{aligned} \quad \text{A.8}$$

El sistema (A.8) representa la aproximación en diferencias finitas centradas para las ecuaciones de onda de gravedad sobre la malla B. Un procedimiento análogo debe conducirnos de (A.8) sobre la malla B a las ecuaciones (A.1) sobre la malla E.

Por lo tanto la simulación de la propagación de las ondas de gravedad sobre las mallas E y B es invariante con respecto a la rotación de los ejes coordenados por un ángulo de 45°.

Como una consecuencia la separación de malla es una propiedad común de las mallas E y B.

BIBLIOGRAPHIA

- Fedor Mysinger, 1973
A method for construction of second-order accurate difference schemes permitting no false two-grid-interval curve in the height field.
TELLUS XIV, 5, 1973
- Zorisa I. Janjic, 1976
A stable centered difference scheme free of two-grid-interval noise.
Monthly Weather Review, Vol. 102, 1976.
- J.L. McGregor and L.M. Leslie, 1976
On the selection of grids for semi-implicit schemes.
Monthly Weather Review, Vol. 106, 1976.
- F. Mysinger and A. Arakawa
1976
Numerical methods used in atmospheric models.
GARP Publications Series No. 17, August, 1976

Zavisa I. Janjic, 1979

Forward-backward scheme modified to prevent
the grid-interval noise and its application
in σ -coordinates models.

(For publication) Federal Hydrometeorological
Institute, Belgrade, Yugoslavia.

L.W. Leslie, 1979

On the correct formulation of semi-implicit
schemes for grid-point models.

Journal of the Meteorological Society of
Japan, Vol. 57, No. 5, 1979. 488-499.

Marcelo Acaltzi, Tondo, 1979

Experimentos numéricos sobre dinámicas
atmosféricas a cada passo.

Tóts de Maestría en Geofísica, UNAM.

Malton, James R.

An introduction to dynamic meteorology.

Second Edition. Academic Press.
International Geophysics Series
Volume 23, 1979.