

1 ejem.

53

ALGUNOS ASPECTOS SOBRE EL
COMPORTAMIENTO TEMPORAL
DE REACTORES NUCLEARES

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE
F I L O S O F O
P R E S E N T A

JAVIER VYELA ESCOBARILLA



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

INDICE

INTRODUCCION.....	I
CAPITULO I. Reactores nucleares.....	4
I.1.- Introducción.....	4
I.2.- Productos de fisión!.....	4
I.3.- Balance de neutrones y condicion de- criticidad.....	6
I.4.- Tipos de reactores.....	7
I.5.- Modelo de reactor usado como base -- de este trabajo.....	8
CAPITULO II. Ecuaciones de transporte.....	10
II.1.- Obtención de las ecuaciones de - - transporte.....	10
II.2.- Origen de las dependencias tempora- les.....	24
II.3.- Cambio de variable en las ecuacio-- nes de transporte.....	25
II.4.- Condiciones de contorno.....	30
CAPITULO III. Derivación de las ecuaciones de - - transporte a través de un principio- variacional.....	33

III.1.-Introducción.....	33
III.2.-Construcción de una funcional co-- rrespondiente a procesos disipati vos lineales.....	34
III.3.-Construcción de una funcional para un sistema cuyo comportamiento es-- tá gobernado por un sistema de -- ecuaciones diferenciales acopladas	40
III.4.-Funcional asociada a un reactor nu clear.....	46
III.5.-Condiciones de contorno que deben-- satisfacer las funciones adjuntas.	48
 CAPITULO IV. Función de Importancia.....	 55
IV.1.- Introducción y definiciones.....	55
IV.2.- Ecuación de importancia de los -- neutrones.....	57
IV.3.- Ecuación de importancia de los -- precursores.....	63
IV.4.- Condiciones de contorno para las-- funciones de importancia.....	64
IV.5.- Equivalencia de la función adjun-- ta y la función de importancia...	65
IV.6.- Elección de la forma de la fuente externa adjunta.....	67

CAPITULO V. Ecuaciones cinéticas puntuales.....	71
V.1.- Introducción.....	71
V.2.-Obtención de las ecuaciones cinéticas- puntuales.....	72
V.3.-Forma convencional de los ecuaciones - cinéticas puntuales.....	81
V.4.- Elección de la función $G(t)$	86
V.5.-Factor de multiplicación.....	88
 CAPITULO VI. Método de solución de las ecuaciones -- cinéticas por desarrollo en <u>eigen</u> vector <u>es</u>	97
VI.1.-Introducción.....	97
VI.2.-Bases matemáticas.....	98
VI.3.- Comportamiento temporal modal.....	107
VI.4.- Reactividad y factor de multiplica- - ción.....	114
VI.5.- Ecuaciones de la Hora Inversa.....	120
 CAPITULO VII. Aplicación del desarrollo en <u>eigen</u> vec- tores de las ecuaciones cinéticas puntua les.....	137
VII.1.- Introducción.....	137
VII.2.-Análisis de los parámetros de las ecua ciones cinéticas puntuales.....	144
VII.3.-Discusión sobre la inclusión de fuen-- tes externos de neutrones.....	156

VII.4.-Interpretación de la función adjunta	159
CAPITULO VIII. Solución aproximada de las ecuaciones	
cinéticas puntuales.....	165
VIII.1.- Introducción.....	165
VIII.2.- Ecuaciones cinéticas puntuales <u>aproximadas</u>	166
VIII.3.- Solución analítica para el modelo de un grupo de neutrones retardados.....	168
VIII.4.- Método de solución analógica.....	192
VIII.5.- Diagrama propuesto para resolver las ecuaciones cinéticas puntuales con seis grupos de neutrones retardados - usando el método analógico	202
CONCLUSIONES.....	205
Apendice A.-	
A.1.- Transformada de Laplace.....	205
A.2.- Cálculo de los constantes "a" y "b".....	211
Apendice B.- Amplificadores operacionales.....	219
Bibliografía.....	228

I N T R O D U C C I O N

El descubrimiento, desarrollo y uso de la energía nuclear, vino a abrir un gran campo de Investigación tanto en la Física Teórica - como en la Experimental, así como en la Ingeniería. Las grandes - perspectivas que tiene la energía nuclear como fuente principal - de energía en un futuro no muy lejano, incrementan la importancia del estudio e investigación en éste campo.

En este trabajo sólo nos interesarán los reactores nucleares de - Fisión, y en particular la llamada Cinética de Reactores Nucleares, es decir, el comportamiento temporal de la población de neutrones, y sus precursores.

Dentro del campo de la Cinética de Reactores radican dos tipos básicos de comportamiento temporal (2): el comportamiento a largo - plazo y el comportamiento a corto plazo.

El comportamiento a largo plazo es producido por los cambios de - composición del núcleo del reactor, por consumo de combustible por envenenamiento, por producción de radioisótopos y por producción - de isótopos ffsiles y fisionables (2); el tiempo asociado a éstos - fenómenos puede ser desde horas hasta días.

El comportamiento a corto plazo (con tiempos asociados hasta de minutos), es debido a propiedades intrínsecas del sistema, como geometría y composición, así como a efectos de cambios de Temperatura, - etc.

Este trabajo se enfoca al comportamiento temporal a corto plazo, - en donde se suponen geometría, composición y temperatura constantes, siendo su objetivo principal, obtener y analizar las ecuaciones que gobiernan el comportamiento temporal de la población de neutrones y precursores, en base a un principio variacional y obtener algunas - soluciones aproximadas de las llamadas "ecuaciones cinéticas puntuales".

En el primer capítulo se mencionan las características principales - de los Reactores Nucleares y las suposiciones básicas para el - desarrollo del trabajo.

En el segundo y tercer capítulos se deducen las ecuaciones de transporte directas y adjuntas a través de un principio variacional.

En el cuarto capítulo se introduce el concepto de "función de Importancia" y se deducen las ecuaciones diferenciales que rigen su comportamiento espacio-temporal.

Además, se identifica a las "funciones adjuntas" y las "funciones de Importancia"

En el quinto capítulo se deducen las llamadas ecuaciones cinéticas puntuales.

En el sexto capítulo se desarrollan las densidades de neutrones y - precursores, junto con sus adjuntos, en Eigenvectores de un operador - Matricial (el cual es discutido en el referencia 9).

En el séptimo capítulo se hace una aplicación de estos desarrollos - en eigenvectores al cálculo de parámetros de las "ecuaciones cinéticas

puntuales" Se establece una interpretación de las funciones de densidad adjuntas.

En el octavo y último capítulo se obtienen algunas soluciones aproximadas de las ecuaciones cinéticas puntuales, a través de un método analítico de un simulador analógico simple y se comparan los resultados obtenidos.

Entre los principales resultados obtenidos, están la obtención de las ecuaciones diferenciales que rigen el comportamiento de las funciones de importancia, la generalización de las llamadas ecuaciones puntuales y de los parámetros involucrados en ella y la concordancia entre las soluciones obtenidas de las ecuaciones cinéticas puntuales para el caso de un grupo de neutrones retardados, usando los métodos analítico y analógico.

Por último, es necesario hacer notar que debido a que los símbolos de sumatoria y de sección transversal son generalmente los mismos hemos hecho la convención de que el símbolo de sumatoria sea denotado por

Σ en vez de Σ_1 .

CAPITULO I

REACTORES NUCLEARES

I.1 Introducción

Un reactor nuclear es un arreglo de ciertos materiales (tales como materiales fisiles, fisionables y fértiles; moderados, absorbedores etc.) en el cual se lleva a cabo, en forma controlada, una reacción en cadena con neutrones (2) .

El proceso fundamental que tiene lugar en un reactor nuclear es aquel llamado fisión nuclear, en el cual un núcleo pesado, mediante la absorción de un neutrón, se divide dando lugar a dos núcleos más ligeros, junto con la emisión de neutrones, rayos gamma, beta y neutrinos.

Desde el punto de vista de la utilización de la energía nuclear, la importancia del proceso de fisión, radica en la gran cantidad de energía liberada y en la emisión de nuevos neutrones.

La combinación de éstos dos hechos es lo que hace posible la existencia de una reacción en cadena de fisiones, autosostenida, con producción de energía.

Una cuestión importante es que la reacción en cadena autosostenida es solamente posible con material fisil. Los materiales fisionables no pueden mantener una reacción en cadena debido a que la probabilidad de fisión (relacionada con la sección transversal de fisión, discutida en el próximo capítulo) es pequeña para neutrones de cualquier energía (2) .

I.2 Productos de Fisión

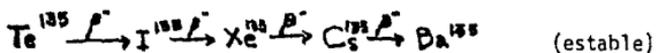
Cuando un núcleo sufre fisión se forma cierto número de productos

de ésta.

Se producen los llamados fragmentos de fisión (núcleos en los cuales se divide el núcleo original), y como ya se mencionó se producen neutrones rayos gamma, beta y neutrinos, ya sea en el instante mismo de la fisión ó en algún tiempo posterior, cuando los fragmentos de fisión (generalmente inestables) decaigan.

Cuando se forman los fragmentos de fisión, éstos son excesivamente "ricos en neutrones ", es decir contienen más neutrones de los necesarios para que sean estables y tienden a decaer con la emisión de una ó más partículas beta, neutrinos y rayos gamma.

Por ejemplo, el isótopo de Telurio, Te-135 que se produce directamente en fisión, decae mediante el siguiente esquema :



que es acompañado de radiación gamma y neutrinos. El decaimiento de los fragmentos de fisión es importante por varias razones, primero la energía emitida en forma de rayos beta y gamma, durante la operación representa una contribución a la energía recuperable (para usos prácticos) de la fisión, ya que la gran mayoría de éstas partículas no pueden escapar de un reactor.

En segundo lugar, algunos de éstos fragmentos de fisión pueden dar origen a neutrones.

Estos se producen debido a la emisión de neutrones por núcleos derivados del decaimiento beta de los fragmentos de fisión y son emitidos con grandes tiempos de retraso (del orden de segundos), después de que la fisión se lleva a cabo. Debido a ésto, los neutrones producidos así se llaman "neutrones retardados". Estos neutrones juegan un papel muy importante en la operación y control de reactores nucleares, como se verá más adelante.

En el proceso de fisión se producen también neutrones prácticamente

en el instante mismo de la fisión, y son llamados neutrones inmediatos.

No todos los fragmentos de fisión ó sus cadenas de desintegración producen neutrones retardados, por lo que se puede pensar que el número de éstos varía de fisión a fisión.

De igual manera el número de neutrones inmediatos de fisión varía de fisión a fisión y por lo tanto, mientras que en algunas fisiones no aparecerán neutrones inmediatos, en otros pueden producirse cinco, por ejemplo, ó aún más. Sin embargo, basta con conocer el número promedio de neutrones emitidos por fisión tanto de los inmediatos como de los retardados en el tratamiento teórico de los reactores nucleares.

Por último, es necesario mencionar que los fragmentos de fisión, pueden absorber neutrones en forma considerable, por lo que actúan como venenos y deben ser tomados en cuenta en un tratamiento riguroso de los procesos involucrados en los reactores nucleares .

Por último, es necesario mencionar que los fragmentos de fisión, pueden absorber neutrones en forma considerable, por lo que actúan como venenos y deben ser tomados en cuenta en un tratamiento riguroso de los procesos involucrados en los reactores nucleares (1) .

I.3 Balance de Neutrones y condición de criticidad

Para producir una reacción en cadena autosostenida en un reactor nuclear, se debe establecer un balance entre la razón a la cual los neutrones se producen en el sistema y la razón a la cual desaparecen (2) .

Los neutrones se producen en el sistema por fisiones y/ó por fuentes-externas (hechos por ejemplo, con una combinación de Radio con Berilio), introducidos en el reactor.

Los neutrones desaparecen del sistema en dos formas: ya sea escapando del reactor a través de su superficie ó siendo absorbidos por núcleos

de los materiales que componen el reactor nuclear.

Las razones a las cuales los neutrones escapan y son absorbidos dentro del reactor, dependen del tamaño, forma geométrica, composición y arreglo de los materiales de los cuales está formado.

La condición necesaria para que una reacción en cadena con neutrones sea estable y autosostenida, es que exactamente una fisión debe dar lugar a sólo una otra y, si éste es el caso, el número de fisiones que ocurren por unidad de tiempo en todo el sistema será una constante en el tiempo. Por otra parte, si cada fisión da origen a más de una fisión en promedio, la razón de fisiones se incrementará con el tiempo y al contrario si cada fisión da origen en promedio a menos de una fisión, la razón de fisiones decrecerá con el tiempo. Cuando ocurre alguno de los casos anteriores en un reactor, éste se dice que es crítico, supercrítico ó subcrítico, respectivamente.

A la relación de la razón de fisiones en una cierta generación entre la razón de fisiones en la generación inmediata anterior, se le llama "factor de multiplicación " del sistema. Una medida de cuán lejos está un reactor de ser crítico, está dada por la llamada "reactividad" Estos conceptos serán discutidos con más detalle posteriormente.

1.4 Tipos de reactores

Una de las formas en que pueden clasificarse los reactores nucleares se basa en la energía cinética con la cual la gran mayoría de los neutrones producen las fisiones (2).

Los neutrones de fisión son emitidos con un espectro de energía cuyo promedio está alrededor de los 2 Mev, por lo tanto, si el reactor contiene materiales de poca masa atómica (tales como carbono, berlio ó agua) los neutrones perderán rápidamente energía cinética por colisiones, llegando a la llamada región térmica (en la cual los neutrones

neutrones estarán aproximadamente en equilibrio térmico con los átomos del medio) y por lo tanto producirán la mayoría de las fisiones en el intervalo energético desde 0.01 ev hasta 0.3 ev, (2).

Este tipo de reactores se llaman Reactores Térmicos.

Si el sistema está construido con materiales tales que hagan que, la gran mayoría de los neutrones que causan fisión posean energías desde un poco arriba de la región térmica, hasta del orden de 10 Kev, - el reactor es llamado Reactor Intermedio.

Y si las fisiones se producen principalmente con neutrones de energías arriba de 10 Kev, los reactores son llamados Reactores Rápidos.

Otra forma de clasificar los reactores nucleares es basándose en la distribución de los materiales que los forman. Con base en esto los reactores pueden clasificarse como Homogéneos o Heterogéneos

Los reactores nucleares homogéneos son aquellos que tienen a los materiales que forman el núcleo del reactor en una mezcla homogénea.

Los reactores heterogéneos son los que tienen los materiales que forman el núcleo del reactor separados y distribuidos en regiones bien definidas, (10).

I.5 Modelo de reactor usado como base de este trabajo

Para los fines de este trabajo se hacen varias suposiciones sobre el funcionamiento de un reactor nuclear.

En el modelo que se adopta, se supone que el material de que está formado el reactor no sufre desgaste, es decir no hay consumo de material ffsil ni fisionable, ni envenenamiento por productos de fisión. Además se supone que el reactor funciona a temperatura constante y por lo tanto se desprecian los cambios en la densidad de los materiales debidos a cambios de Temperatura y alteraciones en las secciones eficaces debidas a efecto Doppler (1) (2) . En otras palabras, no se producen efectos de retroalimentación por cambios en el nivel de Potencia al cual trabaja el reactor.

Por último, el desarrollo seguido en el trabajo es válido para cualquier tipo de reactor, ya sea térmico ó rápido, heterogéneo u homogéneo .

En el siguiente capítulo se deducen las ecuaciones que gobiernan el comportamiento de la densidad de neutrones y precursores en éste tipo de sistema.

ECUACIONES DE TRANSPORTEII.1 Obtención de las ecuaciones de transporte

En ésta sección se derivan, a partir de consideraciones físicas, las consideraciones de transporte que rigen el comportamiento de un reactor nuclear. Se utiliza el método seguido en la Referencia I en la **derivación** de ellas. Como se mencionó en el capítulo I, nos interesará sólo el comportamiento temporal a corto plazo, es decir, dentro de un lapso de tiempo suficientemente corto para que los efectos de consumo de material físil y producción de isótopos en una cantidad considerable para ser tomada en cuenta, puedan ser despreciados.

El comportamiento espacio temporal de la población de neutrones está completamente descrito introduciendo una función de siete variables, la cual será denotada por $n(\vec{r}, \vec{v}, t)$, llamada densidad angular de neutrones y se define de manera que

$$n(\vec{r}, \vec{v}, t) d^3\vec{r} d^3\vec{v} \dots \quad (\text{II.1.1})$$

sea el número esperado de neutrones en el elemento de volumen en $d^3\vec{r}$ en \vec{r} con velocidades en $d^3\vec{v}$ en \vec{v} al tiempo t .

Definiendo la densidad angular de neutrones como el número esperado en vez del número verdadero de neutrones en el elemento de volumen en el espacio fase $d^3\vec{r} d^3\vec{v}$, se ha excluido la posibilidad de describir fluctuaciones locales en la población de neutrones.

Ahora bien, los neutrones, en sus trayectorias dentro del medio

materia del reactor, sufrirán colisiones con los átomos del medio, se supondrá que éstas colisiones son instantáneas; así su efecto sobre el movimiento de los neutrones puede ser descrito especificando el camino libre medio entre colisiones como función de la velocidad de los neutrones. El inverso del camino libre medio es la llamada sección transversal macroscópica $\Sigma(\bar{r}, \bar{v}, t)$

siendo
$$\Sigma(\bar{r}, \bar{v}, t) v n(\bar{r}, \bar{v}, t) d^3\bar{r} d^3\bar{v} \dots (\text{II.1.2})$$

el número promedio de colisiones por segundo en el elemento de volumen $d^3\bar{r}$ en \bar{r} de neutrones con velocidades en $d^3\bar{v}$ alrededor de \bar{v} , al tiempo t .

Experimentalmente se encuentra que la sección transversal macroscópica depende de la magnitud de la velocidad \bar{v} , (2). Es decir

$$\Sigma(\bar{r}, \bar{v}, t) = \Sigma(\bar{r}, |\bar{v}|, t) \equiv \Sigma(\bar{r}, v, t) \dots (\text{II.1.3})$$

(En la sección 1.2 se discute brevemente el origen de la dependencia temporal de las secciones transversales macroscópicas).

Dependiendo del tipo de colisión que sufran los neutrones, éstos pueden ser capturados, dispersados hacia otras velocidades, causar fisión, etc. Cada uno de éstos eventos está caracterizado por una sección macroscópica parcial, las cuales son denotadas por

$$\Sigma_c(\bar{r}, |\bar{v}|, t), \Sigma_s(\bar{r}, |\bar{v}|, t), \Sigma_f(\bar{r}, |\bar{v}|, t), \text{ etc.},$$

respectivamente para los eventos de captura, dispersión, fisión.

Ya que las razones de colisión son aditivas tenemos :

$$\sum_T(\bar{r}, \bar{v}, t) = \sum_C(\bar{r}, \bar{v}, t) + \sum_F(\bar{r}, \bar{v}, t) + \dots \quad (\text{II} . 1.4)$$

Donde $\sum_T(\bar{r}, \bar{v}, t)$ es llamada la sección macroscópica total.

La descripción matemática de un evento de dispersión requiere de la introducción de la sección transversal macroscópica de dispersión, denotada por $\sum_S(\bar{r}, \bar{v} \rightarrow \bar{v}', t)$ de modo que

$$\sum_S(\bar{r}, \bar{v} \rightarrow \bar{v}', t) v n(\bar{r}, \bar{v}, t) d^3\bar{r} d^3\bar{v} d^3\bar{v}' \dots (\text{II} . 1.5)$$

sea el número esperado de neutrones en $d^3\bar{r}$ en \bar{r} y $d^3\bar{v}$ en \bar{v} , que son dispersados a $d^3\bar{v}'$ alrededor de \bar{v}' debido a colisiones de neutrones en $d^3\bar{v}$ en \bar{v} , dentro del mismo elemento de volúmen $d^3\bar{r}$ en \bar{r} .

De esta definición se puede ver que

$$\int \sum_S(\bar{r}, \bar{v} \rightarrow \bar{v}', t) d^3\bar{v}' = \sum_S(\bar{r}, \bar{v}, t) \dots (\text{II} . 1.6)$$

donde se utilizó (II.1.3)

El evento de fisión requiere un poco más de atención debido a la alta importancia de los productos de ella.

En un evento de fisión, en promedio, se produce más de un neutrón. Estos neutrones son emitidos en el punto en el espacio fase donde la fisión tuvo lugar (1).

Algunos de ellos son emitidos instantáneamente (en intervalos de tiempo del orden 10^{-8} segundos ó menos después de que el evento de

fisión tuvo lugar) y son nombrados neutrones inmediatos. Otros son emitidos con grandes tiempos de retardo (del orden de segundos) y son llamados neutrones retardados.

Su emisión se sigue de la desexcitación de ciertos fragmentos de fisión por decaimiento beta como se mencionó en el Capítulo I; por ejemplo, el $^{87}_{35}\text{Br}$ cuyo proceso de decaimiento es ilustrado en la siguiente figura.

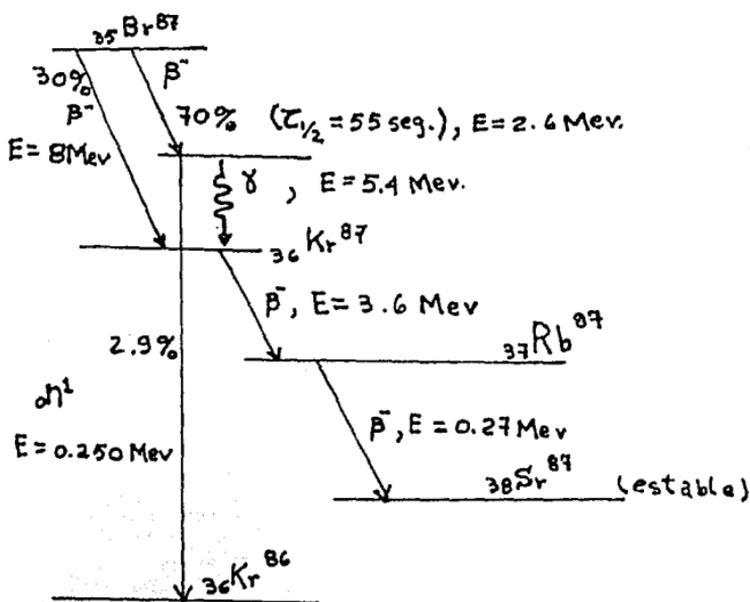


FIGURA II.1 Esquema de decaimiento del $^{87}_{35}\text{Br}$

Estos fragmentos de fisión son llamados precursores de neutrones retardados. Un neutrón retardado es emitido por el núcleo hijo (en el caso ilustrado es el ${}_{36}\text{Kr}^{87}$) el cual es producido por el decaimiento beta del fragmento de fisión correspondiente.

La migración de los precursores antes de la emisión puede ser despreciada debido a que ellos pierden energía cinética muy rápidamente como consecuencia de su gran carga eléctrica, y por lo tanto son detenidos en una distancia corta del punto de su formación por fisión, ($\sim 1.4 (10^3)$ cm. en aluminio).

Por lo tanto, supondremos que los neutrones, tanto inmediatos como retardados, son emitidos en el mismo punto del espacio en el cual la fisión tuvo lugar.

Los neutrones retardados pueden ser clasificados en varios grupos, cada uno caracterizado por la constante de decaimiento del precursor responsable por la fracción de los neutrones retardados que son emitidos debido a éste precursor.

De esta discusión es evidente que se necesitan las siguientes cantidades para describir un evento de fisión de una manera cuantitativa desde el punto de vista de la cinética de reactores :

a) La constante de decaimiento λ_i del i -ésimo grupo de precursores.

- b) La fracción de neutrones de fisión β_i que son emitidos debido al decaimiento de los precursores del i -ésimo grupo .

De manera que

$$\beta = \sum_i \beta_i \quad \dots \text{ (II.1.7)}$$

es la fracción total de neutrones de fisión que son retardados.

- c) Las distribuciones de velocidad de los neutrones tanto inmediatas como retardados.

sea

$f_0(\vec{v})$ la función de distribución de velocidades de neutrones inmediatos y $f_i(\vec{v})$ la función de distribución de velocidades de los neutrones retardados correspondientes al i -ésimo grupo.

Siendo $f_j(\vec{v}) d^3\vec{v}$ para $j = 0, 1, \dots$... (II.1.8)

la fracción de neutrones emitidos con velocidad en $d^3\vec{v}$ alrededor de \vec{v} que están normalizadas a la unidad, es decir

$$\int_{\forall \vec{v}} d^3\vec{v} f_j(\vec{v}) = 1 \quad j = 0, 1, \dots \text{ (II.1.9)}$$

- d) El número promedio de neutrones $\nu(\vec{r}, \vec{v}, t)$ (tanto inmediatos como retardados) producidos por fisión inducida por un neutrón de rapidez $v (\equiv |\vec{v}|)$.

Ahora bien, los precursores de neutrones de fisión retardados

son comúnmente clasificados en 6 grupos diferentes (para cada uno de los isótopos fisionables).

Los parámetros correspondientes a cada grupo para U-235 y Pu-239 se muestran en la siguiente tabla, para neutrones térmicos ($E \sim 0.025$ ev) y neutrones rápidos ($E \sim 1.8$ Mev), (1).

TABLA II. 1

	U-235		Pu-239	
	Fisiones Térmicas	Fisiones Rápidas ~ 1.8 Mev	fisiones Térmicas	Fisiones Rápidas ~ 1.8 Mev
k_1	0.0124 s ⁻¹	0.0127 s ⁻¹	0.0128 s ⁻¹	0.0129 s ⁻¹
β_1	0.00021	0.00024	0.00007	0.00008
k_2	0.0305 s ⁻¹	0.0317 s ⁻¹	0.0301 s ⁻¹	0.0311 s ⁻¹
β_2	0.00142	0.00136	0.00063	0.00056
k_3	0.111 s ⁻¹	0.115 s ⁻¹	0.124 s ⁻¹	0.134 s ⁻¹
β_3	0.00127	0.00120	0.00044	0.00043
k_4	0.302 s ⁻¹	0.311 s ⁻¹	0.325 s ⁻¹	0.331 s ⁻¹
β_4	0.00257	0.00260	0.00068	0.00066
k_5	1.13 s ⁻¹	1.40 s ⁻¹	1.12 s ⁻¹	1.26 s ⁻¹
β_5	0.00075	0.00082	0.00018	0.00021
k_6	3.00 s ⁻¹	3.87 s ⁻¹	2.69 s ⁻¹	3.21 s ⁻¹
β_6	0.00027	0.00017	0.00009	0.00007

Como se puede observar en esta tabla, las constantes de decaimiento -

y las fracciones de neutrones retardados dependen ligeramente de la energía. Se ignorará esta dependencia en todas las derivaciones siguientes.

Para incluir el efecto de los neutrones retardados de una manera cuantitativa se debe introducir la concentración de precursores de neutrones retardados, denotada por $C_i(\bar{r}, t)$, tal que:

$$C_i(\bar{r}, t) d^3r \quad \dots \text{(II. 1.10)}$$

sea el número esperado de precursores ficticios del i -ésimo grupo en d^3r en \bar{r} al tiempo t , los cuales siempre decaen emitiendo un neutrón.

Este concepto, se puede aclarar observando la figura que muestra el decaimiento del isótopo ${}_{35}\text{Br}^{87}$. El ${}_{36}\text{Kr}^{87}$ decae ya sea emitiendo una partícula beta (con probabilidad 97.1 %) ó emitiendo un neutrón (con probabilidad 2.9%). De manera que el número promedio de átomos de ${}_{35}\text{Br}^{87}$ por fisión no es igual al número promedio de neutrones retardados por fisión en ese grupo. Utilizando la definición, la concentración de precursores correspondiente al ${}_{35}\text{Br}^{87}$ es :

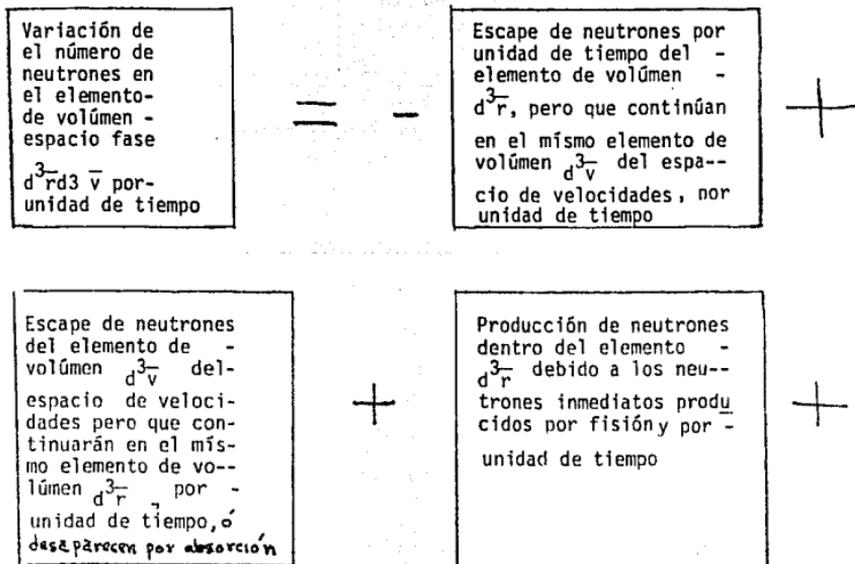
$$C_1(\bar{r}, t) = (0.70) (0.029) N_{\text{Br}^{87}} \\ = 0.0203 \times N_{\text{Br}^{87}}(\bar{r}, t)$$

donde $N_{\text{Br}^{87}}$ es la densidad de átomos de ${}_{35}\text{Br}^{87}$ al tiempo t en

\bar{r} .

Se puede ver de aquí que la densidad $C_i(\vec{r}, t)$ de precursores del i -ésimo grupo no es un observable físico, es decir, no es observable experimentalmente.

Consideremos ahora, el balance de todos los procesos que modifican la densidad angular de neutrones en un elemento de volumen del espacio fase $d^3\vec{r} d^3\vec{v}$ en \vec{r} y \vec{v} . Es decir ;



Producción de neutrones en el elemento de volumen $d^3r d^3v$ debido al decaimiento de los - precursores producidos por fisión, por unidad de tiempo

+

Aparición de neutrones que estando en el mismo elemento d^3r cambian su velocidad y llegan a d^3v en $\frac{1}{v}$ en el mismo elemento $- d^3r$ debido a colisiones de dispersión, por unidad de tiempo.

+

+

Producción por medios externos de neutrones en $d^3r d^3v$, por unidad de tiempo.

... (II.1.12)

y el balance que rige el comportamiento de la densidad de precursores del i-ésimo grupo :

Variación del número de precursores del i-ésimo grupo en d^3r , por unidad de tiempo

=

producción de precursores del i-ésimo grupo por fisión en $- d^3r$ por unidad de tiempo.

-

-

decaimiento de los precursores del i-ésimo grupo en d^3r por unidad de tiempo

... (II.1.13)

Para escribir estos balances en lenguajes matemático, es necesario obtener antes una expresión matemática para describir el escape de neutrones en $d^3\bar{r}$.

Nos concretaremos, a deducir el escape de neutrones del elemento de volúmen $d^3\bar{r}$ en \bar{r} a lo largo del eje X. De manera completamente análoga se deduce el escape a lo largo de los otros dos ejes.

Considerando neutrones de velocidad $\vec{v} = v_x \hat{i} + v_y \hat{j} + v_z \hat{k}$ el número neto de estos neutrones que escapan del elemento de volúmen $\Delta x \Delta y \Delta z$ (ver. Fig. II.2) a lo largo del eje X en un intervalo de tiempo dt es :

$\Delta N_x =$ (número de neutrones que entran en el intervalo de tiempo dt) - (número de neutrones que salen en el intervalo de tiempo dt).

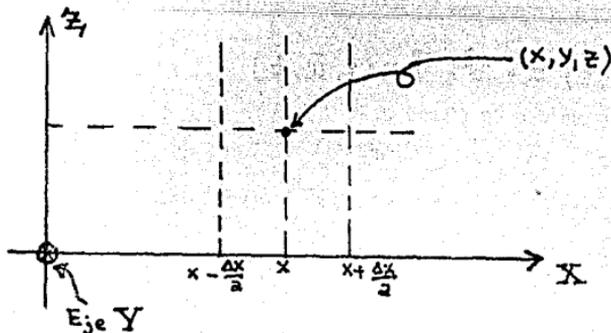


FIGURA II.2

$$\Delta N_x = \left\{ v_x n \left(x - \frac{\Delta x}{2}, y, z; \bar{v}; t \right) \Delta z \Delta y dt \right\} - \left\{ v_x \left[n \left(x + \frac{\Delta x}{2}, y, z; \bar{v}; t \right) + \frac{\partial n}{\partial x} \left(x - \frac{\Delta x}{2}, y, z; \bar{v}; t \right) \Delta x + \dots \right] \Delta z \Delta y dt \right\} \quad (\text{II.1.13})$$

Ahora dividiendo entre $\Delta x \Delta y \Delta z$ y haciendo tender

con la notación $\lim_{\Delta x \Delta y \Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta N_n}{\Delta x \Delta y \Delta z} \equiv \partial(n_x)_t \equiv$ variación del número de neutrones por unidad de volumen, tenemos que la ecuación (II.1.11) queda como-

$$\partial(n_x)_t = - \frac{\partial n(\bar{r}, \bar{v}, t)}{\partial x} \cdot v_x dt \quad \dots (II.1.14)$$

Para el escape a lo largo de los otros dos ejes se tiene, por argumentos similares.

$$\partial(n_y)_t = - \frac{\partial n}{\partial y} \cdot v_y dt \quad \dots (II.1.15a)$$

$$\partial(n_z)_t = - \frac{\partial n}{\partial z} \cdot v_z dt \quad \dots (II.1.15b)$$

y tomando el escape total como la suma de los escapes a lo largo de los 3 ejes

$$\partial n = \partial(n_x)_t + \partial(n_y)_t + \partial(n_z)_t \quad \dots (II.1.16)$$

Se obtiene

$$\partial n(\bar{r}, \bar{v}, t) = - \vec{v} \cdot \vec{\nabla} n(\bar{r}, \bar{v}, t)$$

y el escape por unidad de tiempo es :

$$\left(\frac{\partial n}{\partial t} \right)_{\text{escap}} = - \vec{v} \cdot \vec{\nabla} n(\bar{r}, \bar{v}, t) \quad \dots (II.1.17)$$

(que es la expresión que se necesita para el escape de neutrones.

Es ahora posible reescribir las expresiones (II.1.12) y (II.1.13) en lenguaje matemático.

La expresión (II.1.12) :

$$\frac{\partial n(\bar{r}, \bar{v}, t)}{\partial t} = - \vec{v} \cdot \vec{\nabla} n(\bar{r}, \bar{v}, t) - v \Sigma_T(\bar{r}, v, t) n(\bar{r}, \bar{v}, t)$$

$$\begin{aligned}
 & + \int_0^{\infty} (\bar{v}) \int d^3v' \nu(\bar{r}, v', t) (1-\beta) v' \Sigma_f(\bar{r}, v', t) n(\bar{r}, \bar{v}, t) \\
 & + \sum_{i=1}^6 \lambda_i \int_0^{\infty} (\bar{v}) C_i(\bar{r}, t) + \int d^3v' v' \Sigma_s(\bar{r}, \bar{v} \rightarrow \bar{v}', t) n(\bar{r}, \bar{v}', t) \\
 & + S(\bar{r}, \bar{v}, t) \qquad \dots \text{ (II.1.18) }
 \end{aligned}$$

donde el último término es la fuente externa; y la expresión

(II.1.13):

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial C_i(\bar{r}, t)}{\partial t} & = \int d^3v' \nu(\bar{r}, v', t) v' \Sigma_f(\bar{r}, v', t) n(\bar{r}, \bar{v}', t) \\
 & - \lambda_i C_i(\bar{r}, t) \qquad \dots \text{ (II.1.19) }
 \end{aligned}$$

Identificando los términos de la ecuación (II.1.18) :

a) $-\bar{v} \cdot \bar{\nabla} n(\bar{r}, \bar{v}, t)$ expresa el escape de neutrones por unidad de volumen en el espacio físico en \bar{r} permaneciendo en el mismo elemento de volumen del espacio de velocidades, como ya se mencionó.

b) El término $v \Sigma_f(\bar{r}, v, t) n(\bar{r}, v, t)$ es el número de neutrones por unidad de volumen en el espacio fase alrededor de \bar{r} y \bar{v} que sufren colisión y salen, como consecuencia de ello, del elemento de volumen del espacio de velocidades permaneciendo en el mismo elemento $d^3\bar{r}$ en \bar{r} del espacio físico ó desaparecen por absorción.

c) El tercer término de la ecuación (II.1.18) es el número total de neutrones inmediatos por unidad de volumen en el espacio fase, producidos por unidad de tiempo en eventos de fisión en $d^3\bar{r}$ alrededor de \bar{r} con velocidades en $d^3\bar{v}$ en \bar{v} inducidos por neutrones en todo el espacio de velocidades.

d) El cuarto término es el número de neutrones retardados emitidos por unidad de volumen en el espacio fase alrededor de \bar{r} y \bar{v} - debido al decaimiento de los precursores.

c) El quinto término es el número de neutrones por unidad de volumen del espacio físico en \bar{r} que son dispersados a d^3v - alrededor de \bar{v} , permaneciendo dentro del mismo elemento de volumen del espacio físico.

f) Finalmente, el término $S(\bar{r}, \bar{v}, t)$ denota el número de neutrones introducidos por unidad de volumen en el espacio fase - alrededor de \bar{r} y \bar{v} , por unidad de tiempo.

Con respecto a la ecuación (II.1.19) :

a) El primer término del lado derecho es el número total de precursores de la i -ésima clase producidos por unidad de tiempo - y por unidad de volumen en el espacio físico debido a fisiones - que tienen lugar alrededor de \bar{r} .

b) El segundo término es la razón de decaimiento de los precursores de la i -ésima clase alrededor de \bar{r} .

Las ecuaciones (II.1.18) y (II.1.19) son ecuaciones de balance entre la producción y desaparición de neutrones y precursores.

Son llamadas las ecuaciones de transporte dependientes del tiem

po, y la solución rigurosa de ellas es un problema tremendamente complicado aún en ausencia de neutrones retardados. Se han obtenido soluciones rigurosas solo en situaciones muy simplificadas.

II.2 Origen de las Dependencias temporales

En ésta sección se discutirá brevemente la razón de las dependencias temporales en los diversos parámetros que aparecen en las ecuaciones de transporte.

a) Secciones Transversales

En primer lugar, se incluye la posibilidad de introducir absorbedores ó material ffsil por medio externos al reactor, poniendo explícitamente la variable t ; en la expresión para la sección macroscópica correspondiente.

Además, ya que las secciones transversales macroscópicas, son también expresadas en términos de las secciones transversales microscópicas (2) en la siguiente forma :

$$\sum_y j(\bar{r}, \nu, t) = \sum_e N_e(\bar{r}, t) \sigma_j^e(\bar{r}, \nu, t), \quad j = c, f, s \quad \dots (II.2.1)$$

$$\sum_s j(\bar{r}, \bar{\nu} \rightarrow \bar{\nu}', t) = \sum_e N_e(\bar{r}, t) \sigma_s^e(\bar{r}, \bar{\nu} \rightarrow \bar{\nu}', t) \quad \dots (II.2.2)$$

Donde :

i) $N_e(\bar{r}, t)$ es la densidad de núcleos atómicos de la clase e en \bar{r} , al tiempo t , cuya dependencia temporal es debido al consumo,

producción ó introducción por medio externos (para fines de control por ejemplo), como se mencionó antes.

ii) $\sigma_j^e(\bar{r}, \bar{v}, t)$ y $\sigma_s^e(\bar{r}, \bar{v} \rightarrow \bar{v}', t)$ son las llamadas secciones transversales microscópicas de captura, fisión o dispersión (dependiendo de j) y la sección transversal diferencial, respectivamente .-

Su dependencia espacio-temporal es debida a que ellas son un promedio sobre las secciones transversales microscópicas de núcleos que - - tienen una distribución de rapidezces y ésta depende directamente - de la temperatura, la cual es una función de la posición y el tiempo, (1).

b) Parámetro $\lambda(\bar{r}, \bar{v}, t)$

La dependencia espacio-temporal del parámetro λ se debe a las mismas causas que producen ésta dependencia en las secciones transversales microscópicas.

II.3. Cambio de variables en las ecuaciones de transporte

En la sección II.1 se desarrolló una descripción analítica del - comportamiento espacio-temporal de la población de neutrones y precursores, en ésta sección cambiaremos las variables correspondientes a - los argumentos y se definirán operadores para simplificar la escritura en las ecuaciones, (1).

Es más conveniente expresar la densidad de neutrones $n(\vec{r}, \vec{v}, t)$ en términos de la variable "letargia" μ y el vector unitario $\underline{\Omega}$ decir, usar $n(\vec{r}, \mu, \underline{\Omega}, t)$ en vez de $n(\vec{r}, \vec{v}, t)$, donde $\underline{\Omega}$ se define como

$$\mu \equiv \ln \frac{E_0}{E} \quad \text{ó} \quad \mu = 2 \ln \left(\frac{v_0}{v} \right) \quad \dots \quad (\text{II.3.1})$$

donde E_0 es una energía de referencia, de manera que no haya neutrones en el sistema con energía $E > E_0$ y $\underline{\Omega}$ es un vector unitario que denota la dirección de movimiento del neutrón - - - -

$$\left(\underline{\Omega} \equiv \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} \right)$$

Así, $n(\vec{r}, \underline{\Omega}, t)$ se define por :

$$n(\vec{r}, \mu, \underline{\Omega}, t) \, d\mu \, d\Omega \equiv -n(\vec{r}, \vec{v}, t) \, d^3 v \quad \dots \quad (\text{II.3.2})$$

La cual puede ponerse como

$$n(\vec{r}, \mu, \underline{\Omega}, t) \, d\mu \, \sin \theta \, d\theta \, d\varphi = -n(\vec{r}, \vec{v}, t) \, v^2 \, dv \, \sin \theta \, d\theta \, d\varphi$$

en donde el signo menos aparece debido a que un aumento en la rapidez produce una disminución de letargia. De la ecuación anterior obtenemos

$$n(\vec{r}, \mu, \underline{\Omega}, t) = - \left(\frac{\partial v}{\partial \mu} \right) n(\vec{r}, \vec{v}, t) \, v^2$$

y haciendo uso de la definición (II.3.1)

$$\frac{dv}{d\mu} = - \frac{v}{2}$$

$$\text{de manera que } n(\vec{r}, \mu, \underline{\Omega}, t) = \frac{1}{2} v^3 n(\vec{r}, \vec{v}, t) \quad \dots \quad (\text{II.3.3})$$

En lo concerniente a las secciones transversales macroscópicas, velocidad y demás parámetros, el cambio de variable lleva a :

$$\Sigma(\bar{r}, \nu, t) = \Sigma(\bar{r}, \mu, t) \quad \dots \text{ (II.3.4)}$$

$$\vec{v} = \nu(\mu) \underline{\Omega} \quad \dots \text{ (II.3.5)}$$

$$\partial(\bar{r}, \nu, t) = \partial(\bar{r}, \mu, t) \dots \text{ (II.3.6)}$$

Ahora se introduce este cambio de variable en las demás funciones ya definidas.

$$f_j(\bar{v}) d^3v = - f_j(\mu, \underline{\Omega}) d\mu d\underline{\Omega}$$

y como en el caso de la densidad de neutrones,

$$f_j(\mu, \underline{\Omega}) = \frac{1}{2} v^3 f_j(\bar{v}) \quad \dots \text{ (II.3.7)}$$

y para el caso de emisión isotrópica de neutrones,

$$f_j(\mu, \underline{\Omega}) = \frac{1}{4\pi} f_j(\mu) \quad \dots \text{ (II.3.8)}$$

Por lo tanto

$$f_j(\bar{v}) = \frac{2}{v^3} \left(\frac{1}{4\pi} f_j(\mu) \right) \dots \text{ (II.3.9)}$$

y también para la fuente externa de neutrones

$$S(\bar{r}, \bar{v}, t) = \frac{2}{v^3} S(\bar{r}, \mu, \underline{\Omega}, t) \quad \dots \text{ (II.3.10)}$$

Por lo tanto, suponiendo emisión isotrópica de neutrones en el medio

y utilizando la relación $d^3\bar{v} = \frac{1}{2} v^3 du d\underline{\Omega}$ las ecuaciones de transporte (II.1.18) y (II.1.19) quedan expresadas en términos de estas nuevas variables, como

$$\frac{\partial C_i(\bar{r}, t)}{\partial t} = \int d\mu \int d\underline{\Omega}' \beta_i \partial(\bar{r}, \mu', t) \Sigma_f(\bar{r}, \mu', t) v(\mu') n(\bar{r}, \mu', \underline{\Omega}', t) - \lambda_i C_i(\bar{r}, t) \quad \dots \text{ (II.3.12)}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial n(\bar{r}, \mu, \underline{\Omega}, t)}{\partial t} = & - \underline{\Omega} \cdot \nabla v(\mu) n(\bar{r}, \mu, \underline{\Omega}, t) - \Sigma(\bar{r}, \mu, t) v(\mu) n(\bar{r}, \mu, \underline{\Omega}, t) \\
& + \frac{1}{4\pi} \int_0(u) \int d\mu' \int d\underline{\Omega}' \delta(\bar{r}, \mu', t) (1-\beta) \Sigma_F(\bar{r}, \mu', t) v(\mu') n(\bar{r}, \mu', \underline{\Omega}', t) \\
& + \int d\mu' \int d\underline{\Omega}' \Sigma_S(\bar{r}, \mu' \rightarrow \mu, \underline{\Omega}' \rightarrow \underline{\Omega}, t) v(\mu') n(\bar{r}, \mu', \underline{\Omega}', t) \\
& + \sum_{i=1}^6 \lambda_i \frac{f_i(u)}{4\pi} C_i(\bar{r}, t) + S(\bar{r}, \mu, \underline{\Omega}, t) \quad \dots (\text{II.3.11})
\end{aligned}$$

donde las $f_j(u)$ para $j=0,1,\dots,6$ están normalizadas a la unidad.

La ecuación (II.3.12) puede ser modificada para escribir las ecuaciones de transporte de una manera más reducida, por medio de la definición de operadores.

Definamos

$$C_i(\bar{r}, \mu, \underline{\Omega}, t) \equiv \frac{f_i(u)}{4\pi} C_i(\bar{r}, t) \quad \dots (\text{II.3.13})$$

Ahora, multiplicando ambos lados de la ecuación (II.3.12) por

$$\frac{f_i(u)}{4\pi} \quad \text{se obtiene:}$$

$$\begin{aligned}
\frac{f_i(u)}{4\pi} \frac{\partial C_i(\bar{r}, t)}{\partial t} = & - \frac{f_i(u)}{4\pi} \lambda_i C_i(\bar{r}, t) + \\
& + \frac{f_i(u)}{4\pi} \int d\mu' \int d\underline{\Omega}' \beta_i \delta(\bar{r}, \mu', t) \Sigma_F(\bar{r}, \mu', t) v(\mu') n(\bar{r}, \mu', \underline{\Omega}', t)
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial C_i(\bar{r}, u, \underline{\Omega}, t)}{\partial t} = -\lambda_i C_i(\bar{r}, u, \underline{\Omega}, t) + \int_0^{\infty} \frac{f_i(u)}{4\pi} \iint d\mu' d\underline{\Omega}' \beta_i \nu(\bar{r}, \mu', t) \Sigma_F(\bar{r}, \mu', t) \nu(\mu') \eta(\bar{r}, \mu', \underline{\Omega}', t)$$

... (II.3.14)

En donde se puede interpretar a $C_i(\bar{r}, u, \underline{\Omega}, t)$ como a la densidad de precursores de la i -ésima clase que decaerán emitiendo un neutrón con letargia u y dirección $\underline{\Omega}$.

Definiendo ahora los siguientes operadores

$$\hat{L} \equiv -\underline{\Omega} \cdot \bar{\nabla} \nu(\mu) - \Sigma_T(\bar{r}, \mu, t) \nu(\mu) + \iint d\mu' d\underline{\Omega}' \nu(\mu') \Sigma_S(\bar{r}, \mu' \rightarrow \mu, \underline{\Omega}' \rightarrow \underline{\Omega}, t) \dots \text{(II.3.15)}$$

$$\hat{M}_0 \equiv \int_0^{\infty} \frac{f_0(u)}{4\pi} \iint d\mu' d\underline{\Omega}' \nu(\mu') \nu(\bar{r}, \mu', t) (1-\beta) \Sigma_F(\bar{r}, \mu', t) \dots \text{(II.3.16)}$$

y el operador :

$$\hat{M}_i \equiv \int_0^{\infty} \frac{f_i(u)}{4\pi} \iint d\mu' d\underline{\Omega}' \beta_i \nu(\mu') \nu(\bar{r}, \mu', t) \Sigma_F(\bar{r}, \mu', t) \dots \text{(II.3.17)}$$

y el operador $\hat{H} \equiv \hat{L} + \hat{M}_0 \dots \text{(II.3.18)}$

Que se llama operador de Boltzmann.

Con los cuales las ecuaciones (II.3.11) y (II.3.12) quedan como :

$$\frac{\partial \eta(\bar{r}, \mu, \underline{\Omega}, t)}{\partial t} = \hat{H}(\bar{r}, \mu, \underline{\Omega}, t) \eta(\bar{r}, \mu, \underline{\Omega}, t) + \sum_{i=1}^6 \lambda_i C_i(\bar{r}, \mu, \underline{\Omega}, t) + S(\bar{r}, \mu, \underline{\Omega}, t) \dots \text{(II.3.19)}$$

$$\frac{\partial C_i(\vec{r}, \mu, \underline{\Omega}, t)}{\partial t} = \hat{M}_i(\vec{r}, \mu, \underline{\Omega}, t) n(\vec{r}, \mu, \underline{\Omega}) - \lambda_i C_i(\vec{r}, \mu, \underline{\Omega}, t) \dots \text{(II.3.20)}$$

para $i=2, 0, 0, 0, 0$.

Estas ecuaciones son exactas dentro del modelo adoptado para representar el comportamiento espacio-temporal de la población de neutrones en un reactor.

Ahora bien, el significado físico de los operadores definidos en (II.3.15), (II.3.16) y (II.3.17), (1), es el siguiente :

El operador \hat{L} describe el transporte, absorción y dispersión de neutrones; \hat{M}_0 determina la razón de producción de neutrones inmediatos cuando opera sobre la densidad angular $n(\vec{r}, \mu, \underline{\Omega}, t)$. Similarmente, \hat{M}_i es el operador de producción de precursores y determina la razón de producción de los precursores del i -ésimo tipo, cuando opera sobre $n(\vec{r}, \mu, \underline{\Omega}, t)$.

En resumen los operadores \hat{M}_0 y \hat{M}_i son operadores de producción, el operador \hat{L} cambia la posición de los neutrones en el espacio fase ó los desaparece, por lo que \hat{L} es un operador de destrucción.

II.4 Condiciones de contorno

Entenderemos por condiciones de contorno de una cierta función definida en el tiempo y en el espacio - fase, como los valores numéricos que ella debe alcanzar a) en un cierto punto ó región del espacio - fase, a cualquier tiempo (condiciones de contorno espaciales) y - b) su valor a un tiempo dado, en cada punto de el espacio fase - (condición de contorno temporal).

Así, las condiciones para las funciones de densidad $n(\vec{r}, u, \underline{\Omega}, t)$ y $Ci(\vec{r}, u, \underline{\Omega}, t)$, se determinan considerando su naturaleza física.

La densidad angular de neutrones $n(\vec{r}, u, \underline{\Omega}, t)$ y debe ser continúa, - Positiva y finita en todo el medio excepto en un número finito de - puntos. Esto último es debido a que, por ejemplo, en presencia de fuentes puntuales, la densidad angular de neutrones no es finita en el - punto en el espacio donde la fuente está localizada.

Para especificar las condiciones de contorno espaciales se supondrá - que el sistema está limitado por una superficie convexa en el vacío.

Se supone también que no hay neutrones incidentes sobre la superficie externa provenientes del exterior.

Así

$$n(\vec{r}_s, u, \underline{\Omega}, t) = 0$$

para $\underline{\Omega} \cdot \hat{e} < 0$

donde $\bar{r}_s \in \{S\}$; $\{S\}$ es el conjunto de puntos que forman la superficie externa, y \hat{e} es el vector unitario que define el elemento de superficie en el cual \bar{r}_s esta situado.

Debido a que la producción de precursores del i-ésimo tipo está regida por la densidad de neutrones a través del operador \hat{M}_i , una vez determinadas las condiciones de contorno espaciales para la densidad de neutrones no es necesario imponer condiciones de contorno sobre la densidad de precursores.

Las condiciones de contorno temporales son los valores que tienen $n(\bar{r}, u, \underline{A}, t)$ y $C_i(\bar{r}, u, \underline{A}, t)$, $i=1, \dots, 6$ en algún tiempo de referencia t_r , (arbitrariamente escogido como $t_r=0$) de manera que la solución de las ecuaciones de transporte para cualquier tiempo $t \geq t_r$ sea única.

En el siguiente capítulo derivaremos a través de un principio, las ecuaciones integrodiferenciales (II.3.19) y (II.3.20) ,

C A P I T U L O I I I

DERIVACION DE LAS ECUACIONES DE TRANSPORTE A TRAVES DE UN PRINCIPIO VARIACIONAL

III.1 Introducción

En éste capítulo se construye una funcional, también llamada Acción por analogía con la mecánica clásica, para que en base a ella sean derivadas las ecuaciones de transporte de los neutrones y precursores en un reactor nuclear.

En la próxima sección se propone una expresión para ésta funcional, en el caso de un sistema disipativo lineal cuyo comportamiento es descrito por la expresión :

$$\frac{\partial \Psi(x,t)}{\partial t} = \hat{L}(x,t) \Psi(x,t) + S(x,t) \quad (\text{III.1.1})$$

donde : X representa variables angulares, energéticos y de posición t es la coordenada temporal; $\Psi(x,t)$ es una función de densidad (por ejemplo de partículas alrededor del punto X del espacio fase-al tiempo t , y es llamada la función de estado); $\hat{L}(x,t)$ es un operador lineal con t como parámetro y $S(x,t)$ es una función que representa fuentes externas (de partículas , por ejemplo).

Después, basándose en ella se construye la funcional asociada con las ecuaciones de transporte en reactores nucleares.

III.2 Construcción de una funcional

Correspondiente a procesos disipativos lineales

En esta sección se sigue el método de Pomraming (3), para construir una funcional, de manera que al tomar la primera variación de ésta e igualarla a cero se obtenga, como "ecuación de Euler-Lagrange", la siguiente expresión :

$$\frac{\partial \Psi(x,t)}{\partial t} = \hat{L}(x,t) \Psi(x,t) + S(x,t) \quad (\text{III.2.1})$$

(en la sección anterior se explicó el significado de cada término).

Debido a que el operador $\hat{L}(x,t)$ puede contener derivadas con respecto a las variables agrupadas en el símbolo X y a que se quiere construir una Funcional que incluya todas las posibles operadores $\hat{L}(x,t)$ sin conocer explícitamente su forma, nos vemos en la necesidad de proponer que la Funcional denotada por F solo dependa de $\Psi(x,t)$ y de, posiblemente, otra función ó funciones pero no de las derivadas de éstos con respecto a las variables X y/ó t .

Ya que los términos temporales de contorno forman parte integral de la descripción matemáticamente completa del sistema físico que es estudiado, es posible también que a través de la funcional puedan ser incluidos éstos términos. Esto se puede lograr sólo si (al contrario de lo tradicionalmente propuesto) se exige que las variaciones de la función de estado $\Psi(x,t)$ y de las otras funciones de las cuales pueda depender la funcional, evaluados en los extremos del intervalo temporal, en el cual la funcional describe al sistema, sean diferentes de cero.

Resumiendo, es necesaria una Funcional de tal forma que al tomar -
la primera variación de ésta e igualarla a cero obtengamos :

a) La ecuación del proceso disipativo descrito por (III.2.1)

b) Una condición de contorno temporal para $\Psi(x,t)$:

$$\Psi(x,0) = f(x) \quad (III.2.2)$$

donde $f(x)$ es una función conocida (ó propuesta)

Además hay que hacer notar que la función de estado debe cumplir -
con ciertas condiciones de contorno espaciales.

Antes de continuar hay que hacer notar un punto que se utilizará más
adelante y que consiste en que en general, para cualquier función -
 $g(x,t)$ se cumple lo siguiente (3), (14) :

$$\int dx g(x,t) \hat{L}(x,t) \Psi(x,t) = \int dx \Psi(x,t) L^+(x,t) g(x,t) + \text{términos de contorno espaciales} \quad (III.2.3)$$

Donde la integral se lleva a cabo sobre todo el "volúmen" que ocupa -
el sistema en el espacio fase y $\hat{L}(x,t)$ es el llamado operador adjunto
y además como ya se mencionó $\Psi(x,t)$ debe cumplir con ciertas condi-
ciones de contorno espaciales, análogas a las de la sección II.4 del
capítulo anterior.

Se define como "función adjunta" $\Psi^+(x,t)$ a aquella función $\Psi(x,t)$ que hace que los términos de contorno espaciales en la ecuación (III.2.3) sean cero. Es decir

$$\int dx \Psi^+(x,t) \mathcal{L} \Psi(x,t) = \int dx \Psi(x,t) \mathcal{L}^+ \Psi^+(x,t) \quad \dots (III.2.4)$$

Ahora, una funcional propuesta por Roussopoulos, (3) para el sistema descrito por (III.2.1), la cual denotaremos por $F_1[\Psi, \Psi^+]$, donde Ψ y Ψ^+ son las función de estado y su adjunta, es :

$$F_1[\Psi, \Psi^+] = \int dx \int_0^T \left[-\Psi^+ \frac{\partial \Psi}{\partial t} + \mathcal{L} \Psi + S \Psi^+ + S^+ \Psi \right] dt \quad \dots (III.2.5)$$

donde S^+ es una función arbitraria de x y t ; la integración se extiende sobre todo el volumen del espacio fase que contiene al sistema.

Tomando la primera variación de esta Funcional se obtiene :

$$\begin{aligned} \delta F_1[\Psi, \Psi^+] &= \int dx \int_0^T dt \left\{ \left[-\frac{\partial \Psi^+}{\partial t} + \mathcal{L} \Psi + S \right] \delta \Psi + \right. \\ &\quad \left. + \left[\frac{\partial \Psi}{\partial t} + \mathcal{L}^+ \Psi^+ + S^+ \right] \delta \Psi^+ \right\} + \\ &+ \int dx \left[\Psi^+(x,0) \delta \Psi(x,0) - \Psi^+(x,T) \delta \Psi(x,T) \right] \quad \dots (III.2.6) \end{aligned}$$

Donde, para sacar la variación sobre $\Psi(x,t)$, se hace uso de (III.2.4) y de que

$$\int dx \int_0^T \Psi^+ \frac{\partial \Psi}{\partial t} = - \int dx \int_0^T \Psi \frac{\partial \Psi^+}{\partial t} + \int dx \left[\Psi^+(x,T) \Psi(x,T) - \Psi^+(x,0) \Psi(x,0) \right] \quad \dots (III.2.7)$$

De manera que para que δF , sea cero (para variaciones arbitrarias de Ψ y Ψ^+), es necesario que se cumpla :

$$-\frac{\delta \Psi}{\delta t}(x,t) + \hat{L}(x,t) \Psi(x,t) + S(x,t) = 0 \dots (III.2.8)$$

$$\frac{\delta \Psi^+(x,t)}{\delta t} + \hat{L}^+(x,t) \Psi^+(x,t) + S^+(x,t) = 0 \dots (III.2.9)$$

pero como ya se mencionó, se supone que $\delta \Psi(x,0)$ y $\delta \Psi(x,T)$ son diferentes de cero, por lo que se debe cumplir que

$$\Psi^+(x,T) = \Psi^+(x,0) = 0.$$

Es claro que éstas condiciones de contorno no son adecuadas, puesto que se tiene una ecuación diferencial que debe cumplir

$\Psi^+(x,t)$, (III.2.9), y que es sólo de primer orden, por lo que el problema está sobre-especificado.

Hay un sólo ejemplo en el cual esta funcional es aceptable. Este es al imponer la condición de que $\Psi^+(x,T) = 0$ y además que

$\Psi(x,t)$ obedezca una condición de contorno en $t=0$ de manera que $\delta \Psi(x,0) = 0$; solo entonces los términos de contorno desaparecen.

Esto restringe el tipo de problemas que pueden ser descritos por esa Funcional, por lo que es necesario entonces modificar

$F_1[\Psi, \Psi^+]$ de manera que desaparezcan estas restricciones.

Una modificación posible (3) donde se denota a la nueva funcional por $F_2[\Psi, \Psi^+]$, es la siguiente :

$$F_2[\Psi, \Psi^+] = F_1[\Psi, \Psi^+] + \int dx f_1^+(x) \Psi(x,T) + \int dx \Psi^+(x,0) [f(x) - \Psi(x,0)] \dots (III.2.10)$$

donde $f_1^{\dagger}(x)$ y $f(x)$ son funciones arbitrarias independientes entre sí.

Tomando la primera variación de la funcional $F_2[\Psi, \Psi^{\dagger}]$:

$$\begin{aligned} \delta F_2[\Psi, \Psi^{\dagger}] &= \delta F_1[\Psi, \Psi^{\dagger}] + \int dx f_1^{\dagger}(x) \delta \Psi(x, T) \\ &+ \int dx \delta \Psi^{\dagger}(x, 0) [f(x) - \Psi(x, 0)] - \int dx \Psi^{\dagger}(x, 0) \delta \Psi(x, 0) \end{aligned}$$

... (III.2.11)

sustituyendo F_1 de (III.2.6) en (III.2.11) e igualando a cero

F_2 se tiene :

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^T dt \int dx \left\{ \left[-\frac{\partial \Psi}{\partial t} + \hat{L} \Psi + S \right] \delta \Psi^{\dagger} + \left[\frac{\partial \Psi^{\dagger}}{\partial t} + \hat{L}^{\dagger} \Psi^{\dagger} + S^{\dagger} \right] \delta \Psi \right\} \\ &+ \int dx [\Psi^{\dagger}(x, 0) \delta \Psi(x, 0)] - \int dx [\Psi^{\dagger}(x, T) \delta \Psi(x, T)] \\ &+ \int dx f_1^{\dagger}(x) \delta \Psi(x, T) + \int dx [f(x) - \Psi(x, 0)] \delta \Psi^{\dagger}(x, 0) \\ &- \int dx \Psi^{\dagger}(x, 0) \delta \Psi(x, 0) \end{aligned}$$

... (III.2.12)

De manera que para variaciones arbitrarias de $\Psi(x, t)$ y $\Psi^{\dagger}(x, t)$, es necesario que se cumplan las ecuaciones (III.2.8) y (III.2.9) y

además, para que se anulen los términos de contorno temporales - se requiere :

$$\left. \begin{aligned} \Psi(x,0) &= f(x) \\ \Psi^\dagger(x,T) &= f_1^\dagger(x) \end{aligned} \right\} \dots \text{(III.2.13)}$$

Con lo cual se ha logrado describir totalmente el sistema incluyen do las condiciones de contorno temporales a través de la Funcional propuesta en (III.2.10).

Como se puede observar, al describir el sistema físico disipativo - a través de una funcional aparecen 2 ecuaciones de Euler-Lagrange. Una, que es la ecuación (III.2.1), buscada originalmente y una - ecuación extra, la (III.2.9) que describe el comportamiento de la función adjunta.

Esto es debido a que el operador $\frac{\delta}{\delta t}$ que aparece en la Funcional $F_2[\Psi, \Psi^\dagger]$ no es autoadjunto y a que en general

$$\hat{L}(x,t) \neq \hat{L}^\dagger(x,t)$$

Debido a ésto, el sistema físico solo ésta completamente descrito a - través de una funcional que incluya la función $\Psi(x,t)$ y su adjunta- $\Psi^\dagger(x,t)$.

III.3 Construcción de una funcional para un sistema cuyo comportamiento esta gobernado por un sistema de ecuaciones diferenciales acopladas.

Como se vió en el capítulo anterior, las ecuaciones que gobiernan el comportamiento espaciotemporal de la población de neutrones está descrito por siete ecuaciones diferenciales acopladas (II.3.19) y (II.3.20). El problema ahora es construir una Funcional cuyas ecuaciones de Euler-Lagrange sean esas.

Trataremos primero un caso más sencillo (en apariencia) : el de un sistema descrito por un par de ecuaciones diferenciales acoplados del tipo siguiente.

$$\frac{\partial \Psi(x,t)}{\partial t} = \hat{L}_0(x,t) \Psi(x,t) + \lambda C(x,t) + S(x,t) \quad (\text{III.3.1})$$

y

$$\frac{\partial C(x,t)}{\partial t} = \hat{L}_1(x,t) \Psi(x,t) - \lambda C(x,t) \quad (\text{III.3.2})$$

Siendo \hat{L}_0 y \hat{L}_1 , operadores, λ es una constante y $S(x,t)$ es el término de fuente externa.

En principio, se puede intentar contruir la funcional en cuestión - como la suma de dos Funcionales, siendo una de ellas la Funcional - asociada a la ecuación (III.3.1) tomando como fuente externa modi- ficada a una combinación lineal de $S(x,t)$ y $\mathcal{L}C(x,t)$, es decir -

"Sext Mod" = $S(x,t) + A_1 \mathcal{L}C(x,t)$, donde A_1 es una constante - a determinar y la fuente adjunta tiene que cambiarse en consecuen- cia a una fuente externa modificada adjunta de la forma :

$$S^{\dagger}_{\text{ext MOD}} = S^{\dagger}(x,t) + A_2 \mathcal{L}^{\dagger}C(x,t), \text{ donde } A_2 \text{ es otra constante a determinar.}$$

Esta funcional la cual es denotada por $F_1[\Psi, \Psi^{\dagger}]$ utilizando la forma de la funcional de la sección anterior esta dada por :

$$F_1[\Psi, \Psi^{\dagger}] = \int dx \int_0^T dt \left[-\Psi^{\dagger} \frac{\partial \Psi}{\partial t} + \Psi^{\dagger} \hat{\mathcal{L}}_0 \Psi + S \Psi^{\dagger} \right. \\ \left. + A_1 \mathcal{L}C(x,t) \Psi^{\dagger} + \Psi S^{\dagger} + \Psi A_2 \mathcal{L}^{\dagger}C(x,t) \right] \\ + \int dx f_1^{\dagger}(x) \Psi(x,T) + \int dx \Psi^{\dagger}(x,0) [f(x) - \Psi(x,0)] \\ \dots \text{ (III.3.3)}$$

La otra Funcional, la cual es asociada a la ecuación (III.3.2), puede ser construida tomando como fuentes externas modificadas, directas - y adjuntas, a $A_3 \hat{\mathcal{L}}_1 \Psi(x,t)$ y a $A_4 \hat{\mathcal{L}}_1^{\dagger} \Psi^{\dagger}(x,t)$ respectivamente. Siendo A_3 y A_4 constantes por determinar. Denotemos esta Funcional por -

$F_{II}[\Psi, \Psi^\dagger, C, C^\dagger]$, la cual esta dada explícitamente por :

$$F_{II}[C, C^\dagger] = \int dx \int_0^T dt \left[-C^\dagger \frac{\partial C}{\partial t} + C^\dagger A_3 \hat{L}_1 \Psi + A_4 C \hat{L}_1^\dagger \Psi^\dagger - C^\dagger \lambda C \right] + \int dx C_f^\dagger(x) C(x, T) + \int dx C^\dagger(x, 0) [C_0(x) - C(x, 0)]$$

... (III.3.4)

Donde $C_0(x)$ es la condición de contorno en

$t = 0$ de $C(x, t)$ y $C_f^\dagger(x)$ es la condición a $t = T$ de $C^\dagger(x, t)$.

Ahora se construye una Funcional que sea la suma de F_I y F_{II} y se iguala a cero su primera variación, de tal manera que, exigiendo que las ecuaciones de Euler-Lagrange obtenidas sean las ecuaciones (III.3.1) y (III.3.2), se puedan determinar las constantes $A_1, A_2, A_3,$ y A_4

Sea pues :

$$F[\Psi, \Psi^\dagger, C, C^\dagger] = F_I[\Psi, \Psi^\dagger] + F_{II}[C, C^\dagger]$$

y sustituyendo las expresiones para F_I y F_{II} :

$$F[\Psi, \Psi^\dagger, C, C^\dagger] = \int dx \int_0^T dt \left[-\Psi^\dagger \frac{\partial \Psi}{\partial t} - C^\dagger \frac{\partial C}{\partial t} + \Psi^\dagger \hat{L}_0 \Psi + S \Psi + \Psi^\dagger A_1 \lambda C + \Psi S^\dagger + \Psi A_2 \lambda C^\dagger + C^\dagger A_3 \hat{L}_1 \Psi + C A_4 \hat{L}_1^\dagger \Psi^\dagger - C^\dagger \lambda C \right] + \int dx [f_1^\dagger(x) \Psi(x, T) + C_f^\dagger(x) C(x, T)] + \int dx \left\{ \Psi^\dagger(x, 0) [F(x) - \Psi(x, 0)] + C^\dagger(x, 0) [C_0(x) - C(x, 0)] \right\}$$

De manera que la primera variación de ésta funcional es :

$$\begin{aligned} \delta F [\Psi, \Psi^+, C, C^+] = & \int dx \int_0^T dt \left\{ \left[-\frac{\partial \Psi}{\partial t} + \hat{L}_0 \Psi + S + A_1 \lambda C + \right. \right. \\ & + A_4 \hat{L}_1 C \left. \right] \delta \Psi^+ + \left[\frac{\partial \Psi^+}{\partial t} + \hat{L}_0^+ \Psi^+ + S^+ + A_2 \lambda C^+ + A_3 \hat{L}_1^+ C^+ + A_4 \hat{L}_1 C \right] \\ & \cdot \delta \Psi \left. \right\} + \int dx [f(x) - \Psi(x, 0)] \delta \Psi^+(x, 0) + \int dx f_1^+(x) \delta \Psi(x, T) \\ & - \int dx \Psi^+(x, 0) \delta \Psi(x, 0) + \int dx \int_0^T dt \left\{ \left[-\frac{\partial C}{\partial t} - \lambda C + A_2 \lambda \Psi \right. \right. \\ & + A_3 \hat{L}_1 \Psi \left. \right] \delta C^+ + \left[\frac{\partial C^+}{\partial t} + A_1 \lambda \Psi^+ + A_4 \hat{L}_1^+ \Psi^+ - \lambda C^+ \right] \delta C \left. \right\} \\ & + \int dx [C_0(x) - C(x, 0)] \delta C^+(x, 0) + \int dx C_f(x) \delta C(x, T) \\ & - \int dx C^+(x, 0) \delta C(x, 0) + \int dx \Psi^+(x, T) \delta \Psi(x, T) + \int dx \Psi^+(x, 0) \times \\ & \times \delta \Psi(x, 0) + \int dx C^+(x, T) \delta C(x, T) + \int dx C^+(x, 0) \delta C(x, 0) \end{aligned}$$

... (III.3.6)

Ahora, el igualar a cero δF para cualquier variación de

$$\Psi, \Psi^+, C \text{ y } C^+$$

se tiene que cumplir :

$$-\frac{\partial \Psi}{\partial t} + \hat{L}_0 \Psi + S + A_1 \lambda C + A_4 \hat{L}_1 C = 0 \quad \dots \text{(III.3.7)}$$

$$\frac{\partial \Psi^+}{\partial t} + \hat{L}_0^+ \Psi^+ + S^+ + A_2 \lambda C^+ + A_3 \hat{L}_1^+ C^+ + A_4 \hat{L}_1 C = 0 \quad \dots \text{(III.3.8)}$$

$$-\frac{\partial C}{\partial t} + A_2 \lambda \Psi + A_3 \hat{L}_1 \Psi - \lambda C = 0 \quad \dots \text{(III.3.9)}$$

$$\frac{\partial C^+}{\partial t} + A_1 \lambda \Psi^+ + A_4 \hat{L}_1^+ \Psi^+ - \lambda C^+ = 0 \quad \dots \text{(III.3.10)}$$

De manera que, para que se satisfaga las ecuaciones (III.3.1) y

(III.3.2), es necesario que :

$$A_1 = 1$$

$$A_2 = 0$$

$$A_3 = 1$$

$$A_4 = 0$$

En esta forma, las ecuaciones de Euler-Lagrange son, sustituyendo estos valores.

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = \hat{L}_0 \Psi + \lambda C + S \quad (\text{III.3.7'})$$

$$-\frac{\partial \Psi^\dagger}{\partial t} = \hat{L}_0^\dagger \Psi^\dagger + \hat{L}_1^\dagger C^\dagger + S^\dagger \quad (\text{III.3.8'})$$

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \hat{L}_1 \Psi - \lambda C \quad (\text{III.3.9'})$$

$$-\frac{\partial C^\dagger}{\partial t} = \lambda \Psi^\dagger - \lambda C^\dagger \quad (\text{III.3.10'})$$

y además se tienen como condiciones de contorno :

$$\left. \begin{aligned} C(x,0) &= C_0(x) \\ \Psi(x,0) &= F(x) \\ \Psi^\dagger(x,T) &= f_1^\dagger(x) \\ C^\dagger(x,T) &= C_f^\dagger(x) \end{aligned} \right\} \dots (\text{III.3.11})$$

Entonces funcional $F[\Psi, \Psi^\dagger, C, C^\dagger]$,

expresado por la ecuación (III.3.5) queda :

$$\begin{aligned} F[\Psi, \Psi^\dagger, C, C^\dagger] &= \int dx \int_0^T dt \left[-\Psi^\dagger \frac{\partial \Psi}{\partial t} - C^\dagger \frac{\partial C}{\partial t} + \Psi^\dagger \hat{L}_0 \Psi + S \Psi^\dagger + \Psi^\dagger \lambda C \right. \\ &+ \Psi S^\dagger + C^\dagger \hat{L}_1 \Psi - C^\dagger \lambda C \left. \right] + \int dx \left\{ f_1^\dagger(x) \Psi(x,T) + C_f^\dagger(x) C(x,T) \right. \\ &+ \Psi^\dagger(x,0) [f(x) - \Psi(x,0)] + C^\dagger(x,0) [C_0(x) - C(x,0)] \left. \right\} \dots (\text{III.3.12}) \end{aligned}$$

la cual contiene las ecuaciones de Euler-Lagrange para un proceso disipativo descrito por las ecuaciones diferenciales (III.3.1) y (III.3.2). Por lo tanto, se ha obtenido la funcional buscada.

En el caso de un reactor nuclear cuya densidad de neutrones está gobernada por las ecuaciones (II.3.19) y II.3.20), el acoplamiento entre las 6 ecuaciones (II.3.20) se lleva a cabo solo a través de la ecuación (II.3.19), es decir, las ecuaciones (II.3.20) son independientes entre sí.

Por lo tanto, la generalización a un conjunto de $m+1$ ecuaciones diferenciales acopladas de la forma :

$$\frac{\partial \varphi(x,t)}{\partial t} = \hat{L}_0(x,t) \varphi(x,t) + \sum_{i=1}^m \lambda_i C_i(x,t) + S(x,t) \quad (\text{III.3.13})$$

$$\frac{\partial C_i(x,t)}{\partial t} = \hat{L}_i(x,t) \varphi(x,t) - \lambda_i C_i(x,t) \quad \dots \quad (\text{III.3.14})$$

para $i=1, 2, \dots, m$.

Está dada por la funcional :

$$\begin{aligned} & F[\varphi, \varphi^\dagger, C_i, C_i^\dagger, (i=1, 2, \dots, m)] \\ &= \int dx \int_0^T dt \left\{ -\varphi^\dagger \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \sum_{i=1}^m C_i^\dagger \frac{\partial C_i}{\partial t} + \varphi^\dagger \hat{L}_0 \varphi + S \varphi^\dagger + \sum_{i=1}^m \varphi^\dagger \lambda_i C_i + \varphi S^\dagger \right. \\ &+ \left. \sum_{i=1}^m C_i^\dagger \hat{L}_i \varphi - \sum_{i=1}^m C_i^\dagger \lambda_i C_i \right\} + \int dx \left\{ f_1^\dagger(x) \varphi(x, T) + \sum_{i=1}^m C_{fi}^\dagger(x) \times \right. \\ &\times C_i(x, T) + \varphi^\dagger(x, 0) [f(x) - \varphi(x, 0)] + \left. \sum_{i=1}^m C_i^\dagger(x, 0) [C_{oi}(x) - C_i(x, 0)] \right\} \\ & \dots \quad (\text{III.3.15}) \end{aligned}$$

que describe totalmente un proceso disipativo de la forma anterior.

De manera que al tomar la primera variación de ésta funcional e igualarla a cero, se obtiene :

$$\frac{\partial \varphi(x,t)}{\partial t} = \hat{\lambda}_0(x,t) \varphi(x,t) + \sum_{i=1}^m \lambda_i C_i(x,t) + S(x,t) \quad \dots \text{ (III.3.16)}$$

$$-\frac{\partial \varphi^{\dagger}(x,t)}{\partial t} = \hat{\lambda}_0(x,t) \varphi^{\dagger}(x,t) + \sum_{i=1}^m \hat{\lambda}_i^{\dagger}(x,t) C_i^{\dagger}(x,t) + S^{\dagger}(x,t) \quad \dots \text{ (III.3.17)}$$

$$\frac{\partial C_i(x,t)}{\partial t} = \hat{\lambda}_i(x,t) \varphi(x,t) - \lambda_i C_i(x,t) \quad i=1,2,\dots,m \quad \dots \text{ (III.3.18)}$$

$$-\frac{\partial C_i^{\dagger}(x,t)}{\partial t} = \lambda_i \varphi^{\dagger}(x,t) - \hat{\lambda}_i^{\dagger} C_i^{\dagger}(x,t) \quad i=1,2,\dots,m \quad \dots \text{ (III.3.19)}$$

con las condiciones de contorno temporales.

$$\left. \begin{aligned} C_i(x,0) &= C_{oi}(x) \\ \varphi(x,0) &= f(x) \\ \varphi^{\dagger}(x,T) &= f_1^{\dagger}(x) \\ C_i^{\dagger}(x,T) &= C_{fi}^{\dagger}(x) \end{aligned} \right\} \quad \dots \text{ (III.3.20)}$$

III.4. Funcional Asociada a un reactor nuclear

Dentro del modelo que se ha escogido para describir el comportamiento de la densidad de neutrones en un reactor nuclear, estamos ya en condiciones de escribir la Funcional asociada para su descripción.

Comparando las ecuaciones (II.3.19), (II.3.20), (III.3.13) y

(III.3.14) notamos que para el caso de un reactor nuclear :

$$\begin{aligned} \hat{\lambda}_0(x,t) &\longrightarrow \hat{A}(\bar{r}, \mu, \Omega, t) \\ \hat{\lambda}_i(x,t) &\longrightarrow \hat{M}_i(\bar{r}, \mu, \Omega, t) \\ C_i(x,t) &\longrightarrow C_i(\bar{r}, \mu, \Omega, t) \\ \varphi(x,t) &\longrightarrow n(\bar{r}, \mu, \Omega, t) \\ dx &\longrightarrow d\mu \, d\Omega \, d^3r \end{aligned}$$

Por lo tanto, la funcional buscada, que es igual a la (III.3.15),

(4) , es :

$$\begin{aligned}
F[n, n^t, C_i, C_i^t, \dots, C_6, C_6^t] = & \int_0^T \iiint d^3\bar{r} d\mu d\Omega dt \left\{ -n^t \frac{\partial n}{\partial t} - \sum_{i=1}^6 C_i^t \frac{\partial C_i}{\partial t} \right. \\
& + n^t \hat{A} n + S n^t + \sum_{i=1}^6 n^t \lambda_i C_i + n S^t + \sum_{i=1}^6 C_i^t \hat{M}_i n - \sum_{i=1}^6 C_i^t \lambda_i C_i \left. \right\} \\
& + \iiint d^3\bar{r} d\mu d\Omega \left\{ f_f^t(\bar{r}, \mu, \Omega) n(\bar{r}, \mu, \Omega, T) + \sum_{i=1}^6 C_{fi}^t(\bar{r}, \mu, \Omega) \times \right. \\
& \times C_i(\bar{r}, \mu, \Omega, T) + n^t(\bar{r}, \mu, \Omega, 0) [f_0(\bar{r}, \mu, \Omega) - n(\bar{r}, \mu, \Omega, 0)] \\
& \left. + \sum_{i=1}^6 C_{fi}^t(\bar{r}, \mu, \Omega, 0) [C_{oi}(\bar{r}, \mu, \Omega) - C_i(\bar{r}, \mu, \Omega, 0)] \right\} \quad \dots (III.4.1)
\end{aligned}$$

Donde se han suprimido los argumentos en la primera parte de la Funcional para simplificar la notación.

Las ecuaciones de Euler-Lagrange obtenidas de ésta Funcional son :

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \hat{A} n + \sum_{i=1}^6 \lambda_i C_i + S \quad \dots (III.4.2)$$

$$-\frac{\partial n^t}{\partial t} = \hat{A}^t n^t + \sum_{i=1}^6 \hat{M}_i^t C_i^t + S^t \quad \dots (III.4.3)$$

$$\frac{\partial C_i}{\partial t} = \hat{M}_i n - \lambda_i C_i ; i=1,2,\dots,6 \quad \dots (III.4.4)$$

$$-\frac{\partial C_i^t}{\partial t} = \lambda_i n^t - \lambda_i C_i^t ; i=1,2,\dots,6 \quad \dots (III.4.5)$$

Con las condiciones de contorno

$$\left. \begin{aligned}
n(\bar{r}, \mu, \Omega, 0) &= f_0(\bar{r}, \mu, \Omega) \\
n^t(\bar{r}, \mu, \Omega, T) &= f_f^t(\bar{r}, \mu, \Omega) \\
C_i(\bar{r}, \mu, \Omega, 0) &= C_{oi}(\bar{r}, \mu, \Omega) \\
C_i^t(\bar{r}, \mu, \Omega, T) &= C_{fi}^t(\bar{r}, \mu, \Omega)
\end{aligned} \right\} \quad \dots (III.4.6)$$

III.5 Condiciones de contorno que deben satisfacer las funciones adjuntas.

En la sección anterior se construyó una funcional apropiada para describir el comportamiento de la población de neutrones y precursores, sin reparar en las condiciones de contorno espaciales que, como se mencionó en la sección 2 de éste capítulo, deben satisfacer las funciones adjuntas n^+ y C_i^+ ($i=1, \dots, 6$).

Recordando que las funciones adjuntas son definidas de manera que cumplan :

$$\iiint d^3r d\mu d\underline{\Omega} n^+ \hat{H} n = \iiint d^3r d\mu d\underline{\Omega} n \hat{H}^+ n^+ \dots (III.5.1)$$

$$\iiint d^3r d\mu d\underline{\Omega} C_i^+ \hat{M}_i n = \iiint d^3r d\mu d\underline{\Omega} n \hat{M}_i^+ C_i^+ \dots (III.5.2)$$

lo cual se supuso al obtener las ecuaciones de Euler-Lagrange de la Funcional (III.4.1).

En ésta sección se deducirán las condiciones de contorno espaciales mediante las cuales se cumplen las condiciones (III.5.1) y (III.5.2), (1)

Para ello, se define el producto escalar de dos funciones $\phi_1(\vec{r}, \mu, \underline{\Omega}, t)$ y $\phi_2(\vec{r}, \mu, \underline{\Omega}, t)$, (1) por :

$$\langle \phi_1 | \phi_2 \rangle \equiv \iiint d^3r d\mu d\underline{\Omega} \phi_1^*(\vec{r}, \mu, \underline{\Omega}, t) \phi_2(\vec{r}, \mu, \underline{\Omega}, t) \dots (III.5.3)$$

donde * significa el complejo conjugado.

Sea \hat{O} un operador arbitrario; siempre es posible encontrar que

$$(1) \quad (3) : \langle \phi_1 | \hat{O} \phi_2 \rangle = \langle \hat{O}^\dagger \phi_1 | \phi_2 \rangle + \text{términos de contorno} \dots (III.5.4)$$

Donde \hat{O}^\dagger es el operador adjunto de \hat{O} ; y se define de acuerdo a la sección III.2 como la función adjunta de ϕ_2 , a aquella función ϕ , que hace nulos los términos de contorno.

Dado que las funciones y operadores involucrados en la Funcional (III.4.1) deben ser reales, (ver próximo capítulo) no hay ningún problema en adoptar la notación de producto escalar definida en (III.5.3).

Así pues se tiene que las ecuaciones (III.5.1) y (III.5.2) pueden ser expresadas como :

$$\langle n^\dagger | \hat{H} | n \rangle = \langle \hat{H}^\dagger n^\dagger | n \rangle \dots (III.5.5)$$

$$\langle C_i^\dagger | \hat{M}_i | n \rangle = \langle \hat{M}_i^\dagger C_i^\dagger | n \rangle \dots (III.5.6)$$

Utilizando las definiciones de los operadores \hat{M}_i y \hat{H} dados por (II.3.15) a (II.3.18) se puede observar que \hat{H} está compuesto por la suma de cuatro operadores y \hat{M}_i solo por un operador. Uno de ellos es $-\int \underline{\Omega} v(u) \vec{\nabla}$, otro es el operador multiplicativo $\sum_T(\vec{r}, \mu, t) v(\mu)$ y tres operadores de la forma

$$h_1(\vec{r}, \mu, \underline{\Omega}, t) \iint d\mu' d\underline{\Omega}' h_2(\vec{r}; \mu', \underline{\Omega}'; \mu, \underline{\Omega}; t)$$

Dada la propiedad distributiva del producto escalar, podemos enfocar nuestra atención a cada uno de éstos operadores por separado.

a) Se tiene pues el siguiente producto escalar

$$\begin{aligned}
 -\langle n^+ | \underline{\Omega} \cdot \bar{\nabla} v n \rangle &= -\iiint d^3r d\mu d\underline{\Omega} n^+ v \underline{\Omega} \cdot \bar{\nabla} n \dots \text{(III.5.7)} \\
 &= -\iiint d^3r d\mu d\underline{\Omega} v(\mu) \underline{\Omega} \cdot (n^+ \bar{\nabla} n)
 \end{aligned}$$

para el primer operador y utilizando la identidad (14), (1):

$$\bar{\nabla} \cdot (\vec{A} \epsilon) = \epsilon \nabla \cdot \vec{A} + \vec{A} \cdot \nabla \epsilon$$

tenemos

$$\begin{aligned}
 -\langle n^+ | v \underline{\Omega} \cdot \nabla n \rangle &= \iiint d\mu d\underline{\Omega} d^3r v(\mu) n \nabla \cdot (\underline{\Omega} n^+) - \\
 &\quad - \iiint d\mu d\underline{\Omega} d^3r v(\mu) \nabla \cdot (n \underline{\Omega} n^+)
 \end{aligned}$$

el último término, utilizando el teorema de Gauss (14), queda:

$$\iiint d\mu d\underline{\Omega} v(\mu) d^3r \nabla \cdot (n \underline{\Omega} n^+) = \iint d\mu d\underline{\Omega} v(\mu) \hat{e} \cdot (n \underline{\Omega} n^+) dS$$

Siendo \hat{e} el vector unitario que define a la diferencial de superficie dS .

Entonces ya que

$$n(\vec{r}_s, \mu, \underline{\Omega}, t) = 0 \quad \text{si} \quad \underline{\Omega} \cdot \hat{e} < 0$$

como se discutió en la sección II.4, para que $\int_S \hat{e} \cdot (n \underline{\Omega} n^+) dS$ sea cero, es necesario que

$$n^+(\vec{r}_s, \mu, \underline{\Omega}, t) = 0 \quad \text{para} \quad \underline{\Omega} \cdot \hat{e} > 0 \dots \text{(III.5.8)}$$

con lo cual (III.5.7) queda como:

$$-\langle n^+ | v(\mu) \underline{\Omega} \cdot \bar{\nabla} n \rangle = \int d^3r \int d\mu \int d\underline{\Omega} [v(\mu) \bar{\nabla} \cdot (\underline{\Omega} n^+)] n$$

y dado que

$$\bar{\nabla} \cdot (\underline{\Omega} n^+) = n^+ \bar{\nabla} \cdot \underline{\Omega} + \underline{\Omega} \cdot \bar{\nabla} n^+$$

como $\underline{\Omega}$ es independiente de las coordenadas espaciales

$$\bar{\nabla} \cdot (\underline{\Omega} n^{\dagger}) = \underline{\Omega} \cdot \nabla n^{\dagger}$$

y

$$\langle n^{\dagger} | -v(\mu) \underline{\Omega} \cdot \bar{\nabla} n \rangle = \langle v(\mu) \underline{\Omega} \cdot \bar{\nabla} n^{\dagger} | n \rangle \dots \text{(III.5.9)}$$

con el operador adjunto de

$$\hat{O}_1 = -v(\mu) \underline{\Omega} \cdot \bar{\nabla} \quad \text{siendo}$$

$$\hat{O}_1^{\dagger} = v(\mu) \underline{\Omega} \cdot \bar{\nabla} \dots \text{(III.5.10)}$$

b) Para el segundo operador consideremos el producto escalar

$$\langle n^{\dagger} | \sum_T v(\mu) n \rangle = \int d^3r \int d\mu \int d\underline{\Omega} \sum_T v n^{\dagger} n \dots \text{(III.5.11)}$$

de manera que el operador adjunto del operador multiplicativo

$$\hat{O}_2 = \sum_T (\bar{r}, \mu, t) v(\mu) \quad \text{es}$$

$$\hat{O}_2^{\dagger} = \sum_T (\bar{r}, \mu, t) v(\mu) \dots \text{(III.5.12)}$$

Por lo tanto, éste operador es auto adjunto.

c) Para los dos operadores restantes, consideremos el producto

escalar : $\langle n^{\dagger} | h_1(\bar{r}, \mu, \underline{\Omega}, t) \int \int d\mu' d\underline{\Omega}' h_2(\bar{r}, \mu', \underline{\Omega}'; \mu, \underline{\Omega}; t) n(\bar{r}, \mu', \underline{\Omega}', t) \rangle$

$$= \int d^3r \int d\mu \int d\underline{\Omega} h_1(\bar{r}, \mu, \underline{\Omega}, t) n^{\dagger} \int d\mu' \int d\underline{\Omega}' h_2(\bar{r}, \mu', \underline{\Omega}'; \mu, \underline{\Omega}; t) n(\bar{r}, \mu', \underline{\Omega}', t) \text{(III.5.13)}$$

En el miembro derecho es posible intercambiar el orden de integración de

$$\int \int d\mu d\underline{\Omega} \quad \text{y} \quad \int \int d\mu' d\underline{\Omega}'$$

e intercambiando $u \leftrightarrow u'$, $\underline{\Omega} \leftrightarrow \underline{\Omega}'$

se obtiene :

$$\langle n^+ | h_1(\bar{r}, \underline{\mu}, \underline{\Omega}, t) \rangle \langle \langle \int d\underline{\mu}' d\underline{\Omega}' h_2(\bar{r}; \underline{\mu}', \underline{\Omega}'; \underline{\mu}, \underline{\Omega}; t) n(\bar{r}, \underline{\mu}', \underline{\Omega}', t) \rangle \rangle$$

$$= \langle \langle \int d\underline{\mu}' d\underline{\Omega}' h_2(\bar{r}, \underline{\mu}', \underline{\Omega}', t) h_1(\bar{r}; \underline{\mu}, \underline{\Omega}; \underline{\mu}', \underline{\Omega}'; t) n^+(\bar{r}, \underline{\mu}', \underline{\Omega}', t) | n \rangle \rangle$$

con lo cual se tiene que el operador adjunto de

$$\hat{O}_3 = h_1(\bar{r}, \underline{\mu}, \underline{\Omega}, t) \langle \langle \int d\underline{\mu}' d\underline{\Omega}' h_2(\bar{r}; \underline{\mu}', \underline{\Omega}'; \underline{\mu}, \underline{\Omega}; t) \rangle \rangle \text{ es}$$

$$\hat{O}_3^+ = \langle \langle \int d\underline{\mu}' d\underline{\Omega}' h_1(\bar{r}, \underline{\mu}', \underline{\Omega}', t) h_2(\bar{r}; \underline{\mu}, \underline{\Omega}; \underline{\mu}', \underline{\Omega}'; t) \rangle \rangle \dots \text{ (III.5.14)}$$

sin ninguna condición sobre

$$n^+(\bar{r}, \underline{\mu}, \underline{\Omega}, t)$$

Con éste resultado es posible encontrar los operadores adjuntos de -
los siguientes operadores :

Para :

$$\hat{O}_4 \equiv \langle \langle \int d\underline{\mu}' d\underline{\Omega}' v(\underline{\mu}') \Sigma_S(\bar{r}; \underline{\mu}', \underline{\Omega}' \rightarrow \underline{\mu}, \underline{\Omega}; t) \rangle \rangle$$

es

$$\hat{O}_4^+ = \langle \langle \int d\underline{\mu}' d\underline{\Omega}' v(\underline{\mu}') \Sigma_S(\bar{r}; \underline{\mu}, \underline{\Omega} \rightarrow \underline{\mu}', \underline{\Omega}'; t) \rangle \rangle \dots \text{ (III.5.15)}$$

Si

$$\hat{O}_5 \equiv \frac{f_0(\underline{\mu})}{4\pi} \langle \langle \int d\underline{\mu}' d\underline{\Omega}' v(\underline{\mu}') \vartheta(\bar{r}, \underline{\mu}', t) (1-\beta) \Sigma_F(\bar{r}, \underline{\mu}', t) \rangle \rangle$$

$$\hat{O}_5^+ = v(\underline{\mu}) \vartheta(\bar{r}, \underline{\mu}, t) \Sigma_F(\bar{r}, \underline{\mu}, t) \langle \langle \int d\underline{\mu}' d\underline{\Omega}' \frac{f_0(\underline{\mu}')}{4\pi} (1-\beta) \rangle \rangle \dots \text{ (III.5.16)}$$

y para :

$$\hat{O}_6 \equiv \frac{f_i(\underline{\mu})}{4\pi} \langle \langle \int d\underline{\mu}' d\underline{\Omega}' \beta_i \vartheta(\bar{r}, \underline{\mu}', t) v(\underline{\mu}') \Sigma_F(\bar{r}, \underline{\mu}', t) \rangle \rangle$$

es

$$\hat{O}_6^+ = \beta_i \vartheta(\bar{r}, \underline{\mu}, t) v(\underline{\mu}) \Sigma_F(\bar{r}, \underline{\mu}, t) \langle \langle \int d\underline{\mu}' d\underline{\Omega}' \frac{f_i(\underline{\mu}')}{4\pi} \rangle \rangle \text{ (III.5.17)}$$

Utilizando los resultados anteriores, el
operador adjunto de \hat{H} , definido en
(II.3.17), es :

$$\begin{aligned} \hat{H}^+ &= \underline{\Omega} \cdot v(\mu) \bar{\nabla} - \Sigma_T(\bar{r}, \mu, t) v(\mu) \\ &+ v(\mu) \iint d\mu' d\Omega' \Sigma_S(\bar{r}; \mu, \Omega \rightarrow \mu', \Omega'; t) \\ &+ v(\mu) \partial(\bar{r}, \mu, t) (1-\beta) \Sigma_F(\bar{r}, \mu, t) \iint d\mu' d\Omega' \frac{f_0(\mu')}{4\pi} \dots \text{(III.5.18)} \end{aligned}$$

Y la condición de contorno obtenida para la función adjunta

$n^+(\bar{r}, \underline{\Omega}, t)$ es :

$$\begin{aligned} n^+(\bar{r}_S, \mu, \underline{\Omega}, t) &= 0 \text{ para } \underline{\Omega} \cdot \hat{e} > 0 \\ &\text{con } \bar{r}_S \in \{S\} \dots \text{(III.5.8)} \end{aligned}$$

con $\{S\}$ denotando el conjunto de puntos que forman la superficie física del sistema.

Con la definición del operador \hat{M}_i dada por (II.3.17) y utilizando el resultado (III.5.14), se tiene que su operador adjunto es

$$\hat{M}_i^+ = \beta_i \partial(\bar{r}, \mu, t) v(\mu) \Sigma_F(\bar{r}, \mu, t) \iint d\mu' d\Omega' \frac{f_i(\mu')}{4\pi} \dots \text{(III.5.19)}$$

sin ninguna condición de contorno espacial sobre $C_i^+(\bar{r}, \underline{\Omega}, t)$.

Resumiendo en éste capítulo se derivaron, mediante un principio variacional, las ecuaciones de transporte para la densidad de neutrones y precursores en un reactor nuclear. Como una consecuencia de ello se obtuvieron las ecuaciones extra que gobiernan el comportamiento espacio-temporal de ciertas funciones que llamamos funciones adjuntas y que deben cumplir condiciones de contorno espaciales.

Estas funciones adjuntas juegan un papel muy importante en Cinética de Reactores y tienen un significado muy interesante, el cual es discutido en el capítulo próximo.

Debido a que la funcional describe al sistema entre los tiempos $t=0$ y $t=T$, el problema de encontrar las soluciones de las ecuaciones diferenciales que gobiernan el comportamiento de las funciones adjuntas es un problema de valor final, el cual algunas veces es mal interpretado pensando en un problema inverso al de causa y efecto -

(5) . Las condiciones finales para éstas funciones serán discutidas también en el próximo capítulo.

CAPITULO IV

FUNCION DE IMPORTANCIA

IV.1 Introducción y Definiciones

Durante la operación de un reactor estaremos, en general, interesados en la contribución de los neutrones y precursores, a un cierto evento (por ejemplo la absorción total de neutrones en una región particular del sistema en un cierto intervalo de tiempo; la potencia ó razón de fisión en todo el sistema a un cierto tiempo; etc), por lo que deben ser especificadas ciertas funciones características que determinen la contribución de los neutrones y precursores a éste evento; estas funciones deben depender de la posición, energía ó letargia, dirección y tiempo.

La importancia de estas funciones radica en que su conocimiento nos capacita para determinar en que regiones el sistema es más "sensible" a perturbaciones (inserción de absorbedores, fuentes de neutrones, etc) (2) y por lo tanto es fundamental en el control de Reactores Nucleares (5).

Eligiendo un evento, existirán ciertos neutrones y precursores cuya contribución a éste evento sea mayor que la de otros, es decir, tendrán más importancia relativa para la realización de él.

La importancia de un neutrón ó precursor será entendido como una medida de la probable contribución de éste, al evento elegido (5).

Así, la importancia de un neutrón ó precursor a un cierto tiempo está relacionada al número de neutrones y precursores que generará, así como al papel asignado (importancia) a cada uno de ellos.

Así pues, al contrario de la población de neutrones y precursores - la importancia describe la contribución de cada miembro de la población a un evento futuro.

Ya que las poblaciones de precursores no son observables experimentalmente, su importancia debe de estar ligada a la de los neutrones que generan. Debido a que la contribución al evento por parte de un precursor debe ser realizada por medio de su decaimiento (emitiendo un neutrón), las unidades de la importancia de los precursores deben ser las mismas que las de los neutrones.

De la discusión anterior se pueden obtener las siguientes conclusiones :

1) La importancia de un neutrón ó precursor es su probable contribución al evento.

2) La importancia de un neutrón ó precursor es igual a la importancia total de sus descendientes (probables) a cualquier tiempo posterior, - más la importancia que se asigna debido a la producción del evento - elegido.

Estamos ahora en condiciones de deducir las ecuaciones diferenciales -

que rigen el comportamiento de la función de importancia.

Denotando la función de importancia de los neutrones como $\Phi_i(\bar{r}, \mu, \Omega, t)$ y la de los precursores del i -ésimo grupo que decaerán emitiendo un neutrón con letargia μ y dirección Ω como $\lambda_{xi}(\bar{r}, \mu, \Omega, t)$, al tiempo t .

IV.2. Ecuación de importancia de los neutrones

Sea

$$N = N(u, \Omega)$$

$$\text{donde } N(u, \Omega) \equiv n(\bar{r}, \mu, \Omega, t) dx dy dz \quad \dots \text{ (IV.2.1)}$$

siendo $n(\bar{r}, \mu, \Omega, t)$ la densidad de neutrones en \bar{r} con letargia μ y dirección Ω , al tiempo t .

Ahora, consideraremos los eventos producidos por estos N neutrones que ocurren en el intervalo de tiempo entre t y $t + \delta t$. La importancia de estos N neutrones al tiempo t es :

$$N \Phi_I(\bar{r}, \mu, \Omega, t) \quad \dots \text{ (IV.2.2)}$$

Si estos neutrones no cambiarán su posición en el espacio fase, al tiempo $t + \delta t$ su importancia sería

$$N \Phi_I(\bar{r}, \mu, \Omega, t + \delta t) \quad \dots \text{ (IV.2.3)}$$

Algunos de éstos N neutrones serán absorbidos como consecuencia de las colisiones que realizan, por lo que ya no pueden contribuir a la realización del evento; por lo tanto, el número de neutrones absorbidos en el intervalo de tiempo entre t y $t+\delta t$ es

$$\delta t \cdot \Sigma_a(\bar{r}, \mu, t) n(\bar{r}, \mu, t) v(\mu) dx dy dz$$

y la pérdida de importancia será

$$\delta t \Sigma_a(\bar{r}, \mu, t) N v(\mu) \Phi_I(\bar{r}, \mu, t, t+\delta t) \quad (\text{IV.2.4})$$

donde utilizamos la ecuación (IV.2.1)

El proceso de dispersión provoca un cambio en la importancia de los neutrones; de manera que el incremento de importancia debido a éstas colisiones es la diferencia entre la nueva importancia de los neutrones dispersados menos la importancia original de estos. Es decir:

$$\int \int v(\mu) n(\bar{r}, \mu, t) \Sigma_s(\bar{r}, \mu, \mu', t) \Phi_I(\bar{r}, \mu', t, t+\delta t) \cdot \delta t dx dy dz d\mu' d\Omega'$$

$$- \Sigma_s(\bar{r}, \mu, t) N \Phi_I(\bar{r}, \mu, t, t+\delta t) v(\mu) \delta t$$

ó sea, que el incremento de importancia es

$$\int \int v(\mu) N \Sigma_s(\bar{r}, \mu, \mu', t) \Phi_I(\bar{r}, \mu', t, t+\delta t) \delta t d\mu' d\Omega'$$

$$- \Sigma_s(\bar{r}, \mu, t) N \Phi_I(\bar{r}, \mu, t, t+\delta t) v(\mu) \delta t \quad \dots \quad (\text{IV.2.5})$$

Ahora, tomando en cuenta los neutrones inmediatos producidos por el proceso de fisión (que es un caso especial del proceso de absorción) la importancia producida es pues :

$$\delta t v(\bar{r}, \mu, t) v(\mu) N (1-\beta) \Sigma_f(\bar{r}, \mu, t) \times \dots \quad (\text{IV.2.6})$$

$$\int \int \frac{f_0(\mu')}{4\pi} \Phi_I(\bar{r}, \mu', t, t+\delta t) d\mu' d\Omega'$$

(donde como, se mencionó en el CAP. II, se supone emisión isotrópica).

En el proceso de fisión se producen precursores cuya importancia es -

$$\delta t \sum_{i=1}^6 \lambda(\bar{r}, \mu, t) v(\mu) N \beta_i \Sigma_f(\bar{r}, \mu, t) \times \iint d\mu' d\Omega' \frac{f_i(\mu')}{4\pi} C_{ii}(\bar{r}, \mu', \Omega', t) \dots \quad (IV.2.7)$$

Ahora, si estos N neutrones producen el evento elegido y denotando - por $\delta Q^+(\bar{r}, \mu, \underline{\Omega}, t)$ la importancia promedio asignada por neutrón en $\bar{r}, \mu, \underline{\Omega}$ al tiempo t, a la producción del evento, la importancia asignada a la producción de éste evento es :

$$N \delta Q^+(\bar{r}, \mu, \underline{\Omega}, t) \quad (IV.2.8)$$

Por último, se tomará en cuenta el cambio de importancia debido al - escape de estos N neutrones del elemento del volumen $d^3\bar{r}$ en \bar{r} .

El cambio de importancia estará dada por la "nueva" importancia debido al escape del elemento $d^3\bar{r}$ en \bar{r} menos la importancia $d^3\bar{r}$ en \bar{r} .

Analizando sólo el cambio de importancia debido al movimiento a lo - largo del eje X ya que el cambio asociado con el movimiento a lo largo de los otros dos ejes es similar, se tiene :

Al considerar el movimiento a lo largo del eje X, solo nos interesará la componente de la velocidad $\bar{v}(u, \underline{\Omega})$ a lo largo del eje X, es decir - $V_x(u)$.

Así, estando en el punto \bar{r} la densidad de neutrones con letargia u y dirección $\underline{\Omega}$ al tiempo t es $n(\bar{r}, \mu, \underline{\Omega}, t)$; por lo que el número de neutrones con letargia u y dirección $\underline{\Omega}$ en \bar{r} que atraviesan el área $dydz$ en un intervalo de tiempo δt es

$$\delta t v_x(\mu) n(\bar{r}, \mu, \underline{\Omega}, t) dy dz$$

entonces la importancia perdida debido a su movimiento a lo largo del eje X es

$$\delta t v_x(\mu) n(\bar{r}, \mu, \underline{\Omega}, t) \Phi_I(\bar{r}, \mu, \underline{\Omega}, t) dy dz \dots \quad (IV.2.9)$$

Estos neutrones llegarán a un nuevo punto $\bar{r}' = (x+dX, y, z)$ en el cual la función de importancia es

$$\Phi_I(\bar{r}', \mu, \underline{\Omega}, t+\delta t) =$$

$$\Phi_I(\bar{r}, \mu, \underline{\Omega}, t+\delta t) + \frac{\partial \Phi_I(\bar{r}, \mu, \underline{\Omega}, t+\delta t)}{\partial x} dx \dots \quad (IV.2.10)$$

y la nueva importancia será

$$\delta t v_x(\mu) n(\bar{r}, \mu, \underline{\Omega}, t) dy dz \left[\Phi_I(\bar{r}, \mu, \underline{\Omega}, t+\delta t) + \frac{\partial \Phi_I(\bar{r}, \mu, \underline{\Omega}, t+\delta t)}{\partial x} dx \right] \dots \quad (IV.2.11)$$

Entonces el cambio de importancia total debido al movimiento a lo largo del eje X es

$$\delta t v_x(\mu) n(\bar{r}, \mu, \underline{\Omega}, t) \left[\Phi_I(\bar{r}, \mu, \underline{\Omega}, t+\delta t) + \frac{\partial \Phi_I(\bar{r}, \mu, \underline{\Omega}, t+\delta t)}{\partial x} dx - \Phi_I(\bar{r}, \mu, \underline{\Omega}, t) \right] \dots \quad (IV.2.12)$$

- El cambio a lo largo de los ejes Y y Z se obtiene reemplazando (en la expresión anterior) "x" por "y" ó por "z", respectivamente,
- de manera que haciendo uso de la conclusión (2), el balance total de importancia queda como :

$$\begin{aligned}
 N \Phi_I(\bar{r}, \mu, \underline{\omega}, t) &= N \Phi_I(\bar{r}, \mu, \underline{\omega}, t + \delta t) - \Sigma_a(\bar{r}, \mu, t) \delta t N v(\mu) \Phi_I(\bar{r}, \mu, \underline{\omega}, t + \delta t) \\
 &\quad - \Sigma_s(\bar{r}, \mu, t) \delta t N v(\mu) \Phi_I(\bar{r}, \mu, \underline{\omega}, t + \delta t) \\
 &\quad + \iint d\mu' d\underline{\omega}' v(\mu') N \Sigma_s(\bar{r}; \mu, \underline{\omega} \rightarrow \mu', \underline{\omega}'; t) \delta t \Phi_I(\bar{r}, \mu', \underline{\omega}', t + \delta t) \\
 &\quad + \delta t v(\mu) N (1-\beta) \Sigma_f(\bar{r}, \mu, t) \iint d\mu' d\underline{\omega}' \frac{f_0(\mu')}{4\pi} \Phi_I(\bar{r}, \mu', \underline{\omega}', t + \delta t) \\
 &\quad + \sum_{i=1}^6 v(\mu) \delta t N \beta_i \Sigma_f(\bar{r}, \mu, t) \iint d\mu' d\underline{\omega}' \frac{f_i(\mu')}{4\pi} C_{Ii}(\bar{r}, \mu', \underline{\omega}', t + \delta t) \\
 &\quad + \delta t v_x(\mu) n(\bar{r}, \mu, \underline{\omega}, t) \left[\Phi_I(\bar{r}, \mu, \underline{\omega}, t + \delta t) + \frac{\partial \Phi_I}{\partial x}(\bar{r}, \mu, \underline{\omega}, t + \delta t) dx - \Phi_I(\bar{r}, \mu, \underline{\omega}, t) \right] \\
 &\quad + \delta t v_y(\mu) n(\bar{r}, \mu, \underline{\omega}, t) \left[\Phi_I(\bar{r}, \mu, \underline{\omega}, t + \delta t) + \frac{\partial \Phi_I}{\partial y}(\bar{r}, \mu, \underline{\omega}, t + \delta t) dy - \Phi_I(\bar{r}, \mu, \underline{\omega}, t) \right] \\
 &\quad + \delta t v_z(\mu) n(\bar{r}, \mu, \underline{\omega}, t) \left[\Phi_I(\bar{r}, \mu, \underline{\omega}, t + \delta t) + \frac{\partial \Phi_I}{\partial z}(\bar{r}, \mu, \underline{\omega}, t + \delta t) dz - \Phi_I(\bar{r}, \mu, \underline{\omega}, t) \right] \\
 &\quad + \delta Q^+(\bar{r}, \mu, \underline{\omega}, t + \delta t) N
 \end{aligned}$$

... (IV.2.13)

Ahora esta ecuación puede ponerse como :

$$\begin{aligned}
 -N \frac{\Phi_I(\bar{r}, \mu, \underline{\omega}, t + \delta t) - \Phi_I(\bar{r}, \mu, \underline{\omega}, t)}{\delta t} &= -\Sigma_T(\bar{r}, \mu, t) N v(\mu) \Phi_I(\bar{r}, \mu, \underline{\omega}, t + \delta t) \\
 &\quad + \iint N v(\mu') \Sigma_s(\bar{r}; \mu, \underline{\omega} \rightarrow \mu', \underline{\omega}'; t) \Phi_I(\bar{r}, \mu', \underline{\omega}', t + \delta t) d\mu' d\underline{\omega}' \\
 &\quad + v(\mu) N (1-\beta) \Sigma_f(\bar{r}, \mu, t) \iint \frac{f_0(\mu')}{4\pi} \Phi_I(\bar{r}, \mu', \underline{\omega}', t + \delta t) d\mu' d\underline{\omega}' \\
 &\quad + \sum_{i=1}^6 v(\mu) N \beta_i \Sigma_f(\bar{r}, \mu, t) \iint \frac{f_i(\mu')}{4\pi} C_{Ii}(\bar{r}, \mu', \underline{\omega}', t + \delta t) d\mu' d\underline{\omega}'
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \eta(\bar{r}, \mu, \Omega, t) \bar{v}(\mu, \Omega) \cdot \bar{\nabla} \Phi_I(\bar{r}, \mu, \Omega, t + \delta t) d^3 \bar{r} \\
& + v_x(\mu) \eta(\bar{r}, \mu, \Omega, t) [\Phi_I(\bar{r}, \mu, \Omega, t + \delta t) - \Phi_I(\bar{r}, \mu, \Omega, t)] dy dz \\
& + v_y(\mu) \eta(\bar{r}, \mu, \Omega, t) [\Phi_I(\bar{r}, \mu, \Omega, t + \delta t) - \Phi_I(\bar{r}, \mu, \Omega, t)] dx dz \\
& + v_z(\mu) \eta(\bar{r}, \mu, \Omega, t) [\Phi_I(\bar{r}, \mu, \Omega, t + \delta t) - \Phi_I(\bar{r}, \mu, \Omega, t)] dx dy \\
& + N \frac{\delta Q^+(\bar{r}, \mu, \Omega, t + \delta t)}{\delta t} \quad \dots \text{(IV.2.14)}
\end{aligned}$$

Al tomar el límite cuando $\delta t \rightarrow 0$ haciendo uso de la definición (IV.2.1) y de que

$$\lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\Phi_I(\bar{r}, \mu, \Omega, t + \delta t) - \Phi_I(\bar{r}, \mu, \Omega, t)}{\delta t} = \frac{\partial \Phi_I(\bar{r}, \mu, \Omega, t)}{\partial t}$$

y definiendo además

$$S^+(\bar{r}, \mu, \Omega, t) \equiv \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\delta Q^+(\bar{r}, \mu, \Omega, t + \delta t)}{\delta t}$$

se obtiene

$$\begin{aligned}
- \frac{\partial \Phi_I(\bar{r}, \mu, \Omega, t)}{\partial t} &= v(\mu) \Omega \cdot \bar{\nabla} \Phi_I(\bar{r}, \mu, \Omega, t) - \Sigma_T(\bar{r}, \mu, t) v(\mu) \Phi_I(\bar{r}, \mu, \Omega, t) \\
&+ \iint d\mu' d\Omega' v(\mu') \Sigma_S(\bar{r}; \mu, \Omega \rightarrow \mu', \Omega'; t) \Phi_I(\bar{r}, \mu', \Omega', t) \\
&+ \sum_{G=1}^6 v(\mu) \partial(\bar{r}, \mu, t) \beta_G \Sigma_f(\bar{r}, \mu, t) \iint \frac{f_i(\mu')}{4\pi} C_{Ii}^G(\bar{r}, \mu', \Omega', t) du' d\Omega' \\
&+ \partial(\bar{r}, \mu, t) v(\mu) (1 - \beta) \Sigma_f(\bar{r}, \mu, t) \iint \frac{f_0(\mu')}{4\pi} \Phi_I(\bar{r}, \mu', \Omega', t) du' d\Omega' \\
&+ S(\bar{r}, \mu, \Omega, t) \quad \text{(IV.2.15)}
\end{aligned}$$

Que es la ecuación diferencial que rige la función de importancia de los neutrones en el sistema que estamos estudiando.

IV.3 Ecuación de importancia de los precursores

La ecuación del balance, de importancia para los precursores de la i -ésima especie, se puede deducir de manera análoga a la ecuación de importancia para los neutrones.

En un elemento de volumen $d^3\bar{r}$ en \bar{r} , se tiene $C_i(\bar{r}, u, \underline{\omega}, t) d^3\bar{r} = N_i$ precursores del i -ésimo grupo, los cuales decaerán emitiendo neutrones con letargía u y dirección $\underline{\omega}$.

Denotando, como en la sección anterior, por $C_{Ii}(\bar{r}, u, \underline{\omega}, t)$ la importancia de éstos precursores de tiempo t , se tiene que después de un tiempo δt han decaído $N_i \lambda_i \delta t$ precursores, dejando $N_i(1 - \lambda_i \delta t)$ precursores con importancia

$$C_{Ii}(\bar{r}, u, \underline{\omega}, t + \delta t)$$

Los neutrones producidos tienen importancia $\Phi_i(\bar{r}, u, \underline{\omega}, t + \delta t)$, por lo que la ecuación de balance es

$$N_i C_{Ii}(\bar{r}, u, \underline{\omega}, t) = N_i(1 - \lambda_i \delta t) C_{Ii}(\bar{r}, u, \underline{\omega}, t + \delta t) + N_i \lambda_i \delta t \Phi_i(\bar{r}, u, \underline{\omega}, t + \delta t) \quad \dots \text{(IV.3.1)}$$

Escribiendo esta ecuación como

$$\begin{aligned} & - \frac{C_{Ii}(\bar{r}, u, \underline{\omega}, t + \delta t) - C_{Ii}(\bar{r}, u, \underline{\omega}, t)}{\delta t} = \\ & = \lambda_i \Phi_i(\bar{r}, u, \underline{\omega}, t + \delta t) - \lambda_i C_{Ii}(\bar{r}, u, \underline{\omega}, t + \delta t) \dots \text{(IV.3.2)} \end{aligned}$$

y tomando el límite cuando $\delta t \rightarrow 0$

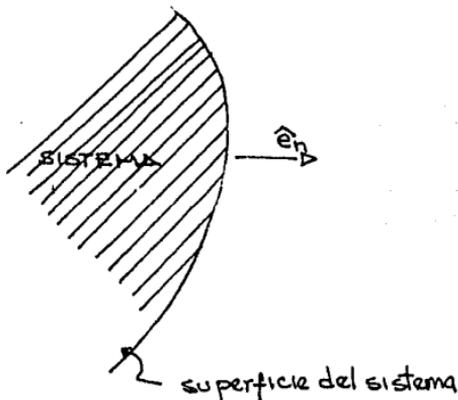
$$\frac{\partial C_i(F, \mu, \Omega, t)}{\partial t} = \lambda_i \Phi_i(F, \mu, \Omega, t) - \lambda_i C_i(F, \mu, \Omega, t) \dots \text{(IV.3.3.)}$$

Se tiene la ecuación diferencial que rige el comportamiento de la función de importancia de los precursores.

IV.4 Condiciones de contorno para las funciones de importancia

Sea un sistema finito, siendo $\bar{V} = \{S\}$, $\{S\}$ conjunto de puntos pertenecientes a su superficie.

Un neutrón que escapa del sistema no puede producir directa o indirectamente el evento característico. Entonces la importancia de un neutrón sobre la superficie del sistema, debe ser nula siempre que vaya en una dirección $\underline{\Omega}$ que cumpla con $\underline{\Omega} \cdot \underline{e}_n > 0$ donde \underline{e}_n es un vector unitario perpendicular al sistema, como se muestra en el siguiente esquema:



Es decir

$$\dot{\Phi}_I(\bar{r}_s, \mu, \underline{a}, t) = 0 \text{ si } \underline{a} \cdot \hat{e}_n > 0 \quad \dots \text{ (IV.4.1)}$$

Por lo tanto dado el significado físico de $C_{Ii}(\bar{r}, \mu, \underline{a}, t)$ - tenemos que :

$$C_{Ii}(\bar{r}_s, \mu, \underline{a}, t) = 0 \text{ si } \underline{a} \cdot \hat{e}_n > 0 \quad \dots \text{ (IV.4.2.)}$$

IV.5 Equivalencia de la función adjunta con la función de importancia.

Comparando las ecuaciones (IV.2.15), (III.5.18) y (III.5.19), es obvio que se puede poner la ecuación (IV.2.15) en la siguiente forma

$$-\frac{\partial \Phi_I}{\partial t} = \hat{H}^+ \Phi_I + \sum_{i=1}^6 \hat{M}_i^+ C_{Ii} + S^+ \quad \dots \text{ (IV.5.1)}$$

que junto con la ecuación (IV.3.3) :

$$-\frac{\partial C_{Ii}}{\partial t} = \lambda_i \Phi_I - \lambda_i C_{Ii}$$

son de idéntica forma que las ecuaciones (III.4.3.) y (II.4.5), es decir, con las ecuaciones cinéticas adjuntas.

La condición de contorno para la función adjunta, dada por la ecuación (III.5.8), es también idéntica a la obtenida en la sección an-

terior.

Por lo tanto, las funciones de importancia y las adjuntas tendrán, idéntica solución y se pueden identificar.

Recordando que las ecuaciones cinéticas adjuntas fueron consecuencia de exigir que las ecuaciones cinéticas directas sean obtenidas através de un principio variacional, el hecho de identificar las funciones adjuntas y las de importancia muestra que aquellas tienen una dependencia temporal estrechamente relacionada al comportamiento de la densidad de neutrones a través de los eventos que producen. Estas funciones adjuntas son entonces una propiedad del sistema físico y de ninguna manera de algún reactor de referencia no perturbado, como comúnmente son utilizadas (1), (2), (6).

Dado que las funciones de importancia de neutrones y precursores, son una medida de la probable contribución a un cierto evento, deben ser funciones reales, al igual que las densidades de precursores y neutrones.

En adelante nos referiremos a las funciones de importancia ó a las funciones adjuntas indistintamente.

IV.6 Elección de la forma de la Fuente externa adjunta

La elección de la fuente externa adjunta, como podemos deducir de las discusiones anteriores, está íntimamente relacionada con el tipo de evento del que se quiere tener una estimación, (3), (5).

Sustituyendo las ecuaciones (III.4.2.) y (III.4.4) en la Funcional (III.4.1) con las condiciones (III.4.6), se tiene que :

$$F[n, n^+, C_i, C_i^+] = \int_0^T dt \left\{ \int d^3r du d\Omega [n s^+] + \int \int \int d^3r du d\Omega \left\{ f_f^+(\bar{r}, u, \Omega) n(\bar{r}, u, \Omega, T) + \sum_{i=1}^6 C_{fi}^+(\bar{r}, u, \Omega) C_i(\bar{r}, u, \Omega, T) \right\} \dots \right. \quad (IV.6.1)$$

a) Ahora si se elige

$$f_f^+(\bar{r}, u, \Omega) = C_{fi}^+(\bar{r}, u, \Omega) = 0 \quad \dots (IV.6.2)$$

entonces

$$F[n, n^+, C_i, C_i^+] = \int_0^T dt \left\{ \int d^3r du d\Omega S^+ n \right. \quad \dots (IV.6.3)$$

y se tiene una estimación de la integral sobre todo el volumen en el espacio fase del sistema y en el tiempo.

La justificación física de lo anterior es la siguiente :

Si se elige un evento arbitrario por ejemplo la absorción de neutrones por un material en un cierto elemento de volumen del reactor entre el tiempo $t=0$ y $t=T$, la importancia tanto de neutrones como de precursores al tiempo $t=T$ debe ser cero, puesto que en este instante éstos no pueden contribuir al evento. Entonces la fuente adjunta puede elegirse como una función proporcional a la sección transversal macroscópica de absorción del material elegido.

b) Si el evento elegido está relacionado con la densidad de neutrones al tiempo $t=T$ (es decir si el evento se realiza al tiempo $t=T$), tenemos :

$$S^+(\bar{r}, \mu, \underline{\Omega}) = C_{fi}^+(\bar{r}, \mu, \underline{\Omega}) = 0 \quad \dots \text{ (IV.6.4)}$$

y la funcional es :

$$F(n, n^+, C_i, C_i^+) = \iiint d^3r d\mu d\Omega f_f^+(\bar{r}, \mu, \underline{\Omega}) \cdot n \quad \dots \text{ (IV.6.5)}$$

Donde esta funcional es ahora una integral de la densidad de neutrones al tiempo $t=T$ sobre todo el sistema en el espacio fase, pesada con la función $f_f^+(\bar{r}, \mu, \underline{\Omega})$. (5) .

Como un ejemplo de este tipo de situación, consideremos el caso siguiente (1), (6) : si un neutrón es insertado en un reactor crítico en un punto particular, ¿Cuál es el comportamiento subsecuente, del sistema ? y en particular ¿Cuál es el incremento en el número de fisiones por unidad de tiempo, a que dá lugar, un intervalo de tiempo después, de manera que los efectos transitorios desaparezcan ?

La respuesta es que el incremento en el número de fisiones por unidad de tiempo es proporcional a la función de importancia, evaluada en el punto en el espacio fase en el cual el neutrón fué insertado.

Esta forma, particular de elegir el evento característico, dá origen a la llamada "interpretación de última progenie" de la función de importancia en el caso de un reactor crítico (1), y para el caso particular en el cual se normaliza la función de importancia (6), (dado que en un reactor crítico sin transitorios una fisión da origen a otra fisión), a que cumpla con :

$$\begin{aligned} & \iiint d^3r \, d\mu \, d\Omega \, \nu(\bar{r}, \mu) \Sigma_f(\bar{r}, \mu) n(\bar{r}, \mu, \underline{\Omega}) \Phi_{\bar{r}}(\bar{r}, \mu, \underline{\Omega}) = \\ & = \iiint d^3r \, d\mu \, d\Omega \, \Sigma_f(\bar{r}, \mu) \nu(\mu) n(\bar{r}, \mu, \underline{\Omega}) \end{aligned} \quad (\text{IV.6.6})$$

A la nueva función de importancia normalizada de ésta forma se le llama "probabilidad de fisión iterada".

La diferencia entre éstas dos interpretaciones de la función de

importancia, es que en el último caso, la función de importancia está normalizada.

Así pues, eligiendo que la fuente externa adjunta sea cero y cierto evento característico la expresión (IV.6.5) nos proporciona una estimación de éste evento.

En el capítulo VII se discutirá bajo ésta misma elección del evento característico la interpretación de la función de importancia para reactores críticos, subcríticos y supercríticos.

En el próximo capítulo se derivan a través de un principio variacional las llamadas "ecuaciones cinéticas puntuales".

C A P I T U L O V

ECUACIONES CINÉTICAS PUNTUALES

V.I. Introducción

Las ecuaciones cinéticas directas y adjuntas, discutidas en los capítulos anteriores, describen el comportamiento de la población de neutrones con mucho mayor detalle de lo que se necesita para la mayoría de los usos prácticos (1). En algunas aplicaciones estaremos sólo interesados en las características dominantes del comportamiento temporal de la población de neutrones, tales como la variación del número total de neutrones ó la generación total de potencia en el medio, como una función del tiempo. Detalles como la dependencia angular de la densidad de neutrones y en algunos casos su distribución espacial, no son de gran interés.

Es deseable, entonces, transformar las ecuaciones cinéticas básicas a una forma más simple la cual contenga sólo los aspectos dominantes de interés práctico de la densidad de neutrones.

En éste capítulo obtendremos un conjunto de ecuaciones los cuales describirán sólo el comportamiento temporal predominante de la población total de neutrones. Estas ecuaciones son las llamadas "ecuaciones cinéticas puntuales".

En la formulación de ellas seguiremos el método utilizado por Becker (4), pero haremos ciertas modificaciones en las definiciones, con lo cual obtenemos más simplicidad y coherencia con el desarrollo posterior.

V.2. "Obtención de las Ecuaciones Cinéticas Puntuales"

En esta sección se derivan las llamadas ecuaciones cinéticas puntuales a través del principio variacional usado en el capítulo III pero, como se mencionó antes, lo que buscamos son sólo las ecuaciones que describan el comportamiento temporal dominante, de las densidades de los neutrones, los precursores y sus funciones de importancia.

Consideremos, por lo tanto, la siguiente separación, de las funciones, de densidad y de sus adjuntos (4):

$$\left. \begin{aligned} n(r, \mu, \Omega, t) &= P(t) \Psi(r, \mu, \Omega, t) \\ C_i(r, \mu, \Omega, t) &= F_i(t) \Theta_i(r, \mu, \Omega, t) \\ n^+(r, \mu, \Omega, t) &= P^+(t) \Psi^+(r, \mu, \Omega, t) \\ C_i^+(r, \mu, \Omega, t) &= F_i^+(t) \Theta_i^+(r, \mu, \Omega, t) \end{aligned} \right\} \text{(V.2.1)}$$

para $i = 1, 2, \dots, 6$.

Es decir, se propone que las densidades sean el producto de una función temporal y una función espacio-temporal. Siendo las funciones $P(t)$, $P^+(t)$, $F_i(t)$ y $F_i^+(t)$, el comportamiento temporal dominante de las funciones de densidad y de sus importancias.

Las funciones Ψ , Ψ^+ , θ_i y θ_i^+ son llamadas las funciones de forma que también pueden variar con el tiempo pero en forma mucho más lenta. El cálculo ó proposición de éstas últimas es un problema bastante complicado en la mayoría de los casos (8) pero no nos preocuparemos por ello dado nuestro interés en las variaciones dominantes.

Ahora utilizando por simplicidad la notación del producto escalar - dada en (III.5.3.):

$$\langle \phi_1 | \phi_2 \rangle = \iiint d^3r d\mu d\Omega \phi_1^*(\bar{r}, \mu, \Omega, t) \phi_2(\bar{r}, \mu, \Omega, t) \quad (\text{V.2.2.})$$

y recordando del capítulo anterior que las funciones de densidad y las de importancia son reales la funcional (III.4.1) queda como :

$$F[n, n^+, c_i, c_i^+] = \int_0^T dt \left\{ -\langle n^+ | \frac{\partial n}{\partial t} \rangle - \sum_{i=1}^6 \langle c_i^+ | \frac{\partial c_i}{\partial t} \rangle \right.$$

$$+ \langle n^+ | \hat{H} n \rangle + \langle n^+ | S \rangle + \sum_{i=1}^6 \lambda_i \langle n^+ | c_i \rangle$$

$$+ \sum_{i=1}^6 \langle c_i^+ | \hat{M}_i n \rangle - \sum_{i=1}^6 \lambda_i \langle c_i^+ | c_i \rangle + \langle S^+ | n \rangle \left. \right\}$$

$$+ \langle f_f^+(\bar{r}, \mu, \Omega) | n(\bar{r}, \mu, \Omega, T) \rangle$$

$$+ \sum_{i=1}^6 \langle c_{fi}^+(\bar{r}, \mu, \Omega) | c_i(\bar{r}, \mu, \Omega, T) \rangle$$

$$+ \langle n^+(\bar{r}, \mu, \Omega, t=0) | f_0(\bar{r}, \mu, \Omega) \rangle -$$

$$\begin{aligned}
& - \langle n^+(\bar{r}, \underline{\mu}, \underline{\Omega}, t=0) | n(\bar{r}, \underline{\mu}, \underline{\Omega}, t=0) \rangle + \\
& + \sum_{i=1}^6 \langle C_i^+(\bar{r}, \underline{\mu}, \underline{\Omega}, t=0) | C_{0i}(\bar{r}, \underline{\mu}, \underline{\Omega}) \rangle \\
& - \sum_{i=1}^6 \langle C_i^+(\bar{r}, \underline{\mu}, \underline{\Omega}, t=0) | C_i(\bar{r}, \underline{\mu}, \underline{\Omega}, t=0) \rangle \\
& \dots (\text{X.2.3})
\end{aligned}$$

Ahora si sustituimos (X.2.1) en esta funcional y consideramos como funciones independientes en ella a $P(t)$, $P^+(t)$, $\xi_i(t)$ y $\xi_i^+(t)$, dicha funcional, (X.2.3), queda como:

$$\begin{aligned}
F[P, P^+, \xi_i, \xi_i^+] &= \int_0^T dt \left\{ -P^+(t) \dot{P}(t) \langle \psi^+ | \psi \rangle \right. \\
& - P^+(t) P(t) \langle \psi^+ | \frac{\partial \psi}{\partial t} \rangle - \sum_{i=1}^6 \xi_i^+(t) \dot{\xi}_i(t) \langle \theta_i^+ | \theta_i \rangle \\
& \left. - \sum_{i=1}^6 \xi_i^+(t) \xi_i(t) \langle \theta_i^+ | \frac{\partial \theta_i}{\partial t} \rangle + P^+(t) P(t) \langle \psi^+ | \hat{H} \psi \rangle \right. \\
& \left. + P^+(t) \langle \psi^+ | S \rangle + \cancel{P(t) \langle S^+ | \psi \rangle} + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \delta F[P, P^+, \xi_i, \xi_i^+] &= \int_0^{\pi} dt \left\{ -\dot{P}(t) \langle \psi^+ | \psi \rangle - P(t) \langle \psi^+ | \frac{\partial \psi}{\partial t} \rangle \right. \\
 &+ P(t) \langle \psi^+ | \hat{H} \psi \rangle + \langle \psi^+ | \delta \rangle + \sum_{i=1}^6 \lambda_i \xi_i(t) \langle \psi^+ | \theta_i \rangle \left. \right\} \delta P^+ \\
 &+ \left[\langle \psi^+(\bar{r}, \underline{u}, \underline{d}, 0) | F_0(\bar{r}, \underline{u}, \underline{d}) \rangle - P(0) \langle \psi^+(\bar{r}, \underline{u}, \underline{d}, 0) | \psi(\bar{r}, \underline{u}, \underline{d}, 0) \rangle \right] \delta P^+(0) \\
 &+ \int_0^{\pi} dt \left\{ \dot{P}^+(t) \langle \psi^+ | \psi \rangle - P^+(t) \langle \psi^+ | \frac{\partial \psi}{\partial t} \rangle + P^+(t) \langle \psi^+ | \hat{H} \psi \rangle \right. \\
 &+ \langle S^+ | \psi \rangle + \sum_{i=1}^6 \xi_i^+(t) \langle \theta_i^+ | \hat{M}_i \psi \rangle \left. \right\} \delta P \\
 &- \delta_{P(t)} \int_0^{\pi} dt \left\{ \left(\frac{d}{dt} P P^+ \right) \langle \psi^+ | \psi \rangle \right\} \\
 &+ \langle F_f^+(\bar{r}, \underline{u}, \underline{d}) | \psi(\bar{r}, \underline{u}, \underline{d}, \pi) \rangle \delta P(\pi) \\
 &- P^+(0) \langle \psi^+(\bar{r}, \underline{u}, \underline{d}, 0) | \psi(\bar{r}, \underline{u}, \underline{d}, 0) \rangle \delta P(0) \\
 &+ \sum_{i=1}^6 \int_0^{\pi} dt \left\{ -\dot{\xi}_i(t) \langle \theta_i^+ | \theta_i \rangle - \xi_i(t) \langle \theta_i^+ | \frac{\partial \theta_i}{\partial t} \rangle \right. \\
 &+ P(t) \langle \theta_i^+ | \hat{M}_i \psi \rangle - \lambda_i \xi_i(t) \langle \theta_i^+ | \theta_i \rangle \left. \right\} \delta \xi_i^+(t) + \\
 &+ \sum_{i=1}^6 \left[\langle \theta_i^+(\bar{r}, \underline{u}, \underline{d}, 0) | C_{0i}(\bar{r}, \underline{u}, \underline{d}) \rangle - \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{i=1}^6 \lambda_i P^\dagger(t) \xi_i(t) \langle \Psi^\dagger | \theta_i \rangle \\
 & + \sum_{i=1}^6 \xi_i^\dagger(t) P(t) \langle \theta_i^\dagger | \hat{M}_i \Psi \rangle - \sum_{i=1}^6 \lambda_i \xi_i^\dagger(t) \xi_i(t) \langle \theta_i^\dagger | \theta_i \rangle \\
 & + P(t) \langle S^\dagger | \Psi \rangle \} +
 \end{aligned}$$

$$P(\mathbb{T}) \langle F_p^\dagger(\bar{r}, \underline{\mu}, \underline{L}) | \Psi(\bar{r}, \underline{\mu}, \underline{L}, \mathbb{T}) \rangle +$$

$$+ \sum_{i=1}^6 \xi_i(\mathbb{T}) \langle C_{F_i}^\dagger(\bar{r}, \underline{\mu}, \underline{L}) | \theta_i(\bar{r}, \underline{\mu}, \underline{L}, \mathbb{T}) \rangle +$$

$$+ P^\dagger(0) \langle \Psi^\dagger(\bar{r}, \underline{\mu}, \underline{L}, t=0) | F_0(\bar{r}, \underline{\mu}, \underline{L}) \rangle$$

$$- P^\dagger(0) P(0) \langle \Psi^\dagger(\bar{r}, \underline{\mu}, \underline{L}, t=0) | \Psi(\bar{r}, \underline{\mu}, \underline{L}, t=0) \rangle$$

$$+ \sum_{i=1}^6 \xi_i^\dagger(0) \langle \theta_i^\dagger(\bar{r}, \underline{\mu}, \underline{L}, t=0) | C_{\theta_i}(\bar{r}, \underline{\mu}, \underline{L}) \rangle$$

$$- \sum_{i=1}^6 \xi_i^\dagger(0) \xi_i(0) \langle \theta_i^\dagger(\bar{r}, \underline{\mu}, \underline{L}, t=0) | \theta_i(\bar{r}, \underline{\mu}, \underline{L}, t=0) \rangle$$

... (V.2.4)

Tomando la primera variación de ésta funcional, se tiene:

$$\begin{aligned}
& - \xi_i(0) \langle \theta_i^+(\bar{r}, \underline{u}, 0) | \theta_i(\bar{r}, \underline{u}, 0) \rangle \delta \xi_i^+(0) \\
& + \sum_{i=1}^G \int_0^{\pi} dt \left\{ \xi_i^+(t) \langle \theta_i^+ | \theta_i \rangle - \xi_i^+(t) \langle \theta_i^+ | \frac{\partial \theta_i}{\partial t} \rangle \right. \\
& + \lambda_i P^+(t) \langle \psi^+ | \theta_i \rangle - \lambda_i \xi_i^+(t) \langle \theta_i^+ | \theta_i \rangle \left. \right\} \delta \xi_i(t) \\
& - \sum_{i=1}^G \delta \xi_i(t) \int_0^{\pi} dt \left\{ \left(\frac{d}{dt} \xi_i \xi_i^+ \right) \langle \psi^+ | \psi \rangle \right\} + \\
& + \sum_{i=1}^G \left[\langle C_{F_i}^+(\bar{r}, \underline{u}, \pi) | \theta_i(\bar{r}, \underline{u}, \pi) \rangle \delta \xi_i(\pi) - \right. \\
& \left. - \xi_i^+(0) \langle \theta_i^+(\bar{r}, \underline{u}, 0) | \theta_i(\bar{r}, \underline{u}, 0) \rangle \delta \xi_i(0) \right] \quad (\text{V.2.5})
\end{aligned}$$

Donde los términos

$$\delta_{P(t)} \int_0^{\pi} dt \left\{ \left(\frac{d}{dt} (P^+ P) \right) \langle \psi^+ | \psi \rangle \right\} \quad y$$

$$\delta_{\xi_i(t)} \int_0^{\pi} dt \left\{ \left(\frac{d}{dt} (\xi_i^+ \xi_i) \right) \langle \theta_i^+ | \theta_i \rangle \right\}$$

significan variaciones con respecto a $P(t)$ y $\xi_i(t)$ de -

los términos correspondientes.

Con ésto en mente :

$$\begin{aligned}
\delta_{P(t)} \int_0^{\pi} dt \left\{ \left(\frac{d}{dt} (P^+ P) \right) \langle \psi^+ | \psi \rangle \right\} &= \delta_{P(t)} \int_0^{\pi} dt \frac{d}{dt} (P^+ P \langle \psi^+ | \psi \rangle) \\
&- \delta_{P(t)} \int_0^{\pi} dt P^+ P \left[\langle \frac{\partial \psi^+}{\partial t} | \psi \rangle + \langle \psi^+ | \frac{\partial \psi}{\partial t} \rangle \right]
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \delta P(t) \int_0^{\pi} dt \left\{ \frac{d}{dt} (P^{\dagger} P) \langle \psi^{\dagger} | \psi \rangle \right\} &= P^{\dagger}(\pi) \langle \psi^{\dagger}(\bar{r}, \mu, \underline{r}, \pi) | \psi(\bar{r}, \mu, \underline{r}, \pi) \rangle \delta P(\pi) \\ &- P^{\dagger}(0) \langle \psi^{\dagger}(\bar{r}, \mu, \underline{r}, 0) | \psi(\bar{r}, \mu, \underline{r}, 0) \rangle \delta P(0) \\ &- \int_0^{\pi} dt \left\{ P^{\dagger}(t) \left[\langle \frac{\partial \psi^{\dagger}}{\partial t} | \psi \rangle + \langle \psi^{\dagger} | \frac{\partial \psi}{\partial t} \rangle \right] \delta P(t) \right\} \dots \text{(V.2.6)} \end{aligned}$$

De la misma manera :

$$\begin{aligned} \delta \xi_i(t) \int_0^{\pi} dt \left\{ \frac{d}{dt} (\xi_i^{\dagger} \xi_i) \langle \theta_i^{\dagger} | \theta_i \rangle \right\} &= \\ &= \xi_i^{\dagger}(\pi) \langle \theta_i^{\dagger}(\bar{r}, \mu, \underline{r}, \pi) | \theta_i(\bar{r}, \mu, \underline{r}, \pi) \rangle \delta \xi_i(\pi) \\ &- \xi_i^{\dagger}(0) \langle \theta_i^{\dagger}(\bar{r}, \mu, \underline{r}, 0) | \theta_i(\bar{r}, \mu, \underline{r}, 0) \rangle \delta \xi_i(0) \\ &- \int_0^{\pi} dt \left\{ \xi_i^{\dagger}(t) \left[\langle \frac{\partial \theta_i^{\dagger}}{\partial t} | \theta_i \rangle + \langle \theta_i^{\dagger} | \frac{\partial \theta_i}{\partial t} \rangle \right] \delta \xi_i(t) \right\} \\ &\dots \text{(V.2.7)} \end{aligned}$$

y sustituyendo (V.2.6) y (V.2.7) en (V.2.5) y exigiendo que ésta -
variación sea cero obtenemos:

$$\begin{aligned} P^{\dagger}(t) \langle \psi^{\dagger} | \psi \rangle - P^{\dagger}(t) \langle \psi^{\dagger} | \frac{\partial \psi}{\partial t} \rangle + P^{\dagger}(t) \langle \psi^{\dagger} | \hat{H} \psi \rangle \\ + \langle \psi^{\dagger} | \psi \rangle + \sum_{i=1}^6 \xi_i^{\dagger}(t) \langle \theta_i^{\dagger} | \hat{M}_i \psi \rangle + P^{\dagger}(t) \langle \frac{\partial \psi^{\dagger}}{\partial t} | \psi \rangle \\ + P^{\dagger}(t) \langle \psi^{\dagger} | \frac{\partial \psi}{\partial t} \rangle = 0 \dots \text{(V.2.8)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\dot{P}(t) \langle \psi^\dagger | \psi \rangle - P(t) \langle \psi^\dagger | \frac{\partial \psi}{\partial t} \rangle + P(t) \langle \psi^\dagger | \hat{H} \psi \rangle \\
& + \langle \psi^\dagger | S \rangle + \sum_{i=1}^G \lambda_i \xi_i(t) \langle \psi^\dagger | \theta_i \rangle = 0 \\
& \dots (\text{V.2.9})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\dot{\xi}_i(t) \langle \theta_i^\dagger | \theta_i \rangle - \xi_i(t) \langle \theta_i^\dagger | \frac{\partial \theta_i}{\partial t} \rangle \\
& + P(t) \langle \theta_i^\dagger | \hat{M}_i \psi \rangle - \lambda_i \xi_i(t) \langle \theta_i^\dagger | \theta_i \rangle = 0 \\
& \dots (\text{V.2.10})
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
& \dot{\xi}_i(t) \langle \theta_i^\dagger | \theta_i \rangle - \cancel{\xi_i(t) \langle \theta_i^\dagger | \frac{\partial \theta_i}{\partial t} \rangle} + \lambda_i P(t) \langle \psi^\dagger | \theta_i \rangle \\
& - \lambda_i \xi_i(t) \langle \theta_i^\dagger | \theta_i \rangle + \xi_i(t) \langle \frac{\partial \theta_i}{\partial t} | \theta_i \rangle \\
& + \cancel{\xi_i(t) \langle \theta_i^\dagger | \frac{\partial \theta_i}{\partial t} \rangle} = 0 \quad (\text{V.2.11})
\end{aligned}$$

Los términos de contorno son cero sí :

$$\left. \begin{aligned} f_P^+(\bar{r}, \mu, \underline{d}) &= P^+(\mathbb{T}) \Psi^+(\bar{r}, \mu, \underline{d}, \mathbb{T}) \\ f_0(\bar{r}, \mu, \underline{d}) &= P(0) \Psi(\bar{r}, \mu, \underline{d}, 0) \\ C_{0i}(\bar{r}, \mu, \underline{d}) &= \xi_i(0) \theta_i(\bar{r}, \mu, \underline{d}, 0) \\ C_{Fi}^+(\bar{r}, \mu, \underline{d}) &= \xi_i^+(\mathbb{T}) \theta_i^+(\bar{r}, \mu, \underline{d}, \mathbb{T}) \end{aligned} \right\} \text{(V.2.12)}$$

que son las condiciones de contorno obtenidas antes, (III.4.6.).

Despejando los derivados temporales de las ecuaciones, (V.2.8) a

(V.2.11) tenemos

$$\begin{aligned} \dot{P}(t) &= P(t) \frac{\langle \Psi^+ | \hat{H} \Psi \rangle - \langle \Psi^+ | \frac{\partial \Psi}{\partial t} \rangle}{\langle \Psi^+ | \Psi \rangle} + \sum_{i=1}^c \lambda_i \xi_i(t) \frac{\langle \Psi^+ | \theta_i \rangle}{\langle \Psi^+ | \Psi \rangle} \\ &+ \frac{\langle \Psi^+ | \mathcal{S} \rangle}{\langle \Psi^+ | \Psi \rangle} \quad \dots \text{(V.2.13)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -\dot{P}^+(t) &= P^+(t) \frac{\langle \Psi^+ | \hat{H} \Psi \rangle + \langle \frac{\partial \Psi^+}{\partial t} | \Psi \rangle}{\langle \Psi^+ | \Psi \rangle} + \sum_{i=1}^c \xi_i^+(t) \frac{\langle \theta_i^+ | \hat{M}_i \Psi \rangle}{\langle \Psi^+ | \Psi \rangle} \\ &+ \frac{\langle \mathcal{S}^+ | \Psi \rangle}{\langle \Psi^+ | \Psi \rangle} \quad \dots \text{(V.2.14)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_i(t) &= P(t) \frac{\langle \theta_i^+ | \hat{M}_i \Psi \rangle}{\langle \theta_i^+ | \theta_i \rangle} - \xi_i(t) \left[\lambda_i + \frac{\langle \theta_i^+ | \frac{\partial \theta_i}{\partial t} \rangle}{\langle \theta_i^+ | \theta_i \rangle} \right] \\ &\dots \text{(V.2.15)} \end{aligned}$$

$$-\dot{\xi}_i^+(t) = \lambda_i P^+(t) \frac{\langle \psi^+ | \theta_i \rangle}{\langle \theta_i^+ | \theta_i \rangle} - \xi_i^+(t) \left[\lambda_i - \frac{\langle \frac{\partial \theta_i^+}{\partial t} | \theta_i \rangle}{\langle \theta_i^+ | \theta_i \rangle} \right]$$

(V.2.16)

Estas son las ecuaciones cinéticas puntuales, aunque no en su forma convencional.

V.3. Forma Convencional de las Ecuaciones Cinética Puntuales

Las ecuaciones cinéticas puntuales obtenidas en la sección anterior no están escritas en la forma tradicional. Aquí mediante algunas definiciones, las pondremos en la llamada forma convencional de las ecuaciones cinéticas puntuales.

Tomemos pues la ecuación (V.2.13)

Sumando y restando la siguiente cantidad :

$$\frac{1}{\langle \psi^+ | \psi \rangle} \left\{ \sum_{i=1}^G \langle \theta_i^+ | \hat{M}_i \psi \rangle + \sum_{i=1}^G \lambda_i \langle \psi^+ | \theta_i \rangle - \sum_{i=1}^G \lambda_i \langle \theta_i^+ | \theta_i \rangle \right\}$$

obtenemos :

$$\begin{aligned} \dot{P}(t) = & \frac{P(t)}{\langle \psi^+ | \psi \rangle} \left[\langle \psi^+ | \hat{H} \psi \rangle + \sum_{i=1}^G \langle \theta_i^+ | \hat{M}_i \psi \rangle + \sum_{i=1}^G \lambda_i \langle \psi^+ | \theta_i \rangle \right. \\ & - \sum_{i=1}^G \lambda_i \langle \psi^+ | \theta_i \rangle - \left(\langle \psi^+ | \frac{\partial \psi}{\partial t} \rangle + \sum_{i=1}^G \langle \theta_i^+ | \hat{M}_i \psi \rangle \right. \\ & \left. \left. + \sum_{i=1}^G \lambda_i \langle \psi^+ | \theta_i \rangle - \sum_{i=1}^G \lambda_i \langle \theta_i^+ | \theta_i \rangle \right) \right] + \end{aligned}$$

$$+ \sum_{i=1}^G \lambda_i \xi_i(t) \frac{\langle \psi^\dagger | \theta_i \rangle}{\langle \psi^\dagger | \psi \rangle} + \frac{\langle \psi^\dagger | S \rangle}{\langle \psi^\dagger | \psi \rangle}$$

Si definimos :

$$\rho(t) \equiv \frac{1}{G(t)} \left\{ \langle \psi^\dagger | \hat{H} \psi \rangle + \sum_{i=1}^G \left(\langle \theta_i^\dagger | \hat{M}_i \psi \rangle + \lambda_i \langle \psi^\dagger \theta_i^\dagger | \theta_i \rangle \right) \right\} \quad \dots (\text{V.3.1})$$

$$\lambda(t) \equiv \frac{1}{G(t)} \langle \psi^\dagger | \psi \rangle \quad \dots (\text{V.3.2})$$

$$\beta_{ie}(t) \equiv \frac{1}{G(t)} \langle \theta_i^\dagger | \hat{M}_i \psi \rangle \quad \dots (\text{V.3.3})$$

$$W_1(t) \equiv \frac{1}{G(t)} \left\{ \langle \psi^\dagger | \frac{\partial \psi}{\partial t} \rangle + \sum_{i=1}^G \lambda_i \langle \psi^\dagger \theta_i^\dagger | \theta_i \rangle \right\} \quad \dots (\text{V.3.4})$$

$$\bar{c}_i(t) \equiv \frac{\xi_i(t)}{\langle \psi^\dagger | \psi \rangle} \langle \theta_i^\dagger | \theta_i \rangle \quad \dots (\text{V.3.5})$$

$$b_i(t) \equiv \frac{\langle \psi^\dagger | \theta_i \rangle}{\langle \theta_i^\dagger | \theta_i \rangle} \quad \dots (\text{V.3.6})$$

y

$$\bar{s}(t) = \frac{\langle \psi^\dagger | S \rangle}{\langle \psi^\dagger | \psi \rangle} \quad \dots (\text{V.3.7})$$

donde $G(t)$ es una función arbitraria.

La elección de esta función (y por lo tanto el significado que le daremos a los parámetros definidos) la haremos en la próxima sección.

De manera que con las definiciones anteriores la ecuación (V.2.13) queda como :

$$\dot{P}(t) = P(t) \frac{f(t) - P_e(t) - W_1(t)}{\lambda(t)} + \sum_{i=1}^G \lambda_i b_i(t) \bar{C}_i(t) + \bar{S}(t) \quad \dots (\text{V.3.8})$$

con

$$P_e(t) = \sum_{i=1}^G \beta_{ie}(t) \quad \dots (\text{V.3.9})$$

Tomando ahora la ecuación (V.2.14) usando las mismas definiciones y además definiendo :

$$W_2(t) \equiv \frac{1}{B(t)} \left(\left\langle \frac{\partial \psi^+}{\partial t} \middle| \psi \right\rangle - \sum_{i=1}^G \lambda_i \left\langle \psi^+ - \theta_i^+ \middle| \theta_i \right\rangle \right) \quad \dots (\text{V.3.10})$$

$$\bar{S}^+(t) \equiv \frac{\langle S^+ | \psi \rangle}{\lambda(t) B(t)} \quad \dots (\text{V.3.11})$$

tenemos

$$-\dot{P}^+(t) = P^+(t) \frac{f(t) - P_e(t) + W_2(t)}{\lambda(t)} + \sum_{i=1}^G \frac{\beta_{ie}(t)}{\lambda(t)} \xi_i^+(t) + \bar{S}^+(t) \quad \dots (\text{V.3.12})$$

Para la ecuación (V.2.15) es decir :

$$\dot{\xi}_i(t) = P(t) \frac{\langle \theta_i^\dagger | \hat{M}_i | \psi \rangle}{\langle \theta_i^\dagger | \theta_i \rangle} - \xi_i(t) \left\{ \lambda_i + \frac{\langle \theta_i^\dagger | \frac{\partial \theta_i}{\partial t} \rangle}{\langle \theta_i^\dagger | \theta_i \rangle} \right\}$$

de la definición (V.3.5), despejando $\xi_i(t)$, tenemos

$$\xi_i(t) = \frac{\langle \psi^\dagger | \psi \rangle}{\langle \theta_i^\dagger | \theta_i \rangle} \bar{c}_i(t)$$

y derivando con respecto al tiempo se tiene

$$\dot{\xi}_i(t) = \dot{\bar{c}}_i(t) \frac{\langle \psi^\dagger | \psi \rangle}{\langle \theta_i^\dagger | \theta_i \rangle} + \bar{c}_i(t) \frac{d}{dt} \left(\frac{\langle \psi^\dagger | \psi \rangle}{\langle \theta_i^\dagger | \theta_i \rangle} \right)$$

Sustituyendo ésta expresión en la ecuación (V.2.15) se tiene :

$$\begin{aligned} \dot{\bar{c}}_i(t) \frac{\langle \psi^\dagger | \psi \rangle}{\langle \theta_i^\dagger | \theta_i \rangle} + \bar{c}_i(t) \left\{ \frac{\langle \theta_i^\dagger | \theta_i \rangle \frac{d}{dt} \langle \psi^\dagger | \psi \rangle - \langle \psi^\dagger | \psi \rangle \langle \theta_i^\dagger | \frac{\partial \theta_i}{\partial t} \rangle - \langle \psi^\dagger | \psi \rangle \langle \frac{\partial \theta_i^\dagger}{\partial t} | \theta_i \rangle}{\langle \theta_i^\dagger | \theta_i \rangle^2} \right\} \\ = P(t) \frac{\langle \psi^\dagger | \psi \rangle}{\langle \theta_i^\dagger | \theta_i \rangle} \frac{\langle \theta_i^\dagger | \hat{M}_i | \psi \rangle}{\langle \psi^\dagger | \psi \rangle} - \frac{\langle \psi^\dagger | \psi \rangle}{\langle \theta_i^\dagger | \theta_i \rangle} \lambda_i \bar{c}_i(t) \\ - \frac{\langle \psi^\dagger | \psi \rangle}{\langle \theta_i^\dagger | \theta_i \rangle^2} \bar{c}_i(t) \langle \theta_i^\dagger | \frac{\partial \theta_i}{\partial t} \rangle \end{aligned}$$

Utilizando ahora las demás definiciones, tenemos :

$$\begin{aligned} \dot{\bar{c}}_i(t) \frac{\langle \psi^\dagger | \psi \rangle}{\langle \theta_i^\dagger | \theta_i \rangle} = P(t) \frac{\beta_{ie}(t)}{\lambda(t)} \frac{\langle \psi^\dagger | \psi \rangle}{\langle \theta_i^\dagger | \theta_i \rangle} - \frac{\langle \psi^\dagger | \psi \rangle}{\langle \theta_i^\dagger | \theta_i \rangle} \lambda_i \bar{c}_i(t) \\ - \bar{c}_i(t) \frac{\langle \theta_i^\dagger | \theta_i \rangle \frac{d}{dt} \langle \psi^\dagger | \psi \rangle - \langle \psi^\dagger | \psi \rangle \langle \frac{\partial \theta_i^\dagger}{\partial t} | \theta_i \rangle}{\langle \theta_i^\dagger | \theta_i \rangle^2} \end{aligned}$$

y reorganizando términos :

$$\dot{\bar{c}}_i(t) = \frac{\beta_{ie}(t)}{\lambda(t)} P(t) - \lambda_i \bar{c}_i(t) + \bar{c}_i(t) \left[\frac{\langle \frac{\partial \theta_i^\dagger}{\partial t} | \theta_i \rangle}{\langle \theta_i^\dagger | \theta_i \rangle} - \frac{d}{dt} \frac{\langle \psi^\dagger | \psi \rangle}{\langle \psi^\dagger | \psi \rangle} \right]$$

... (V.3.13)

Definiendo ahora :

$$W_{3i}(t) \equiv \frac{\left\langle \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\theta_i}{\lambda(t) E(t)} \right) \middle| \theta_i \right\rangle}{\frac{1}{\lambda(t) E(t)} \langle \theta_i^+ | \theta_i \rangle} \dots (\text{V.3.14})$$

y dado que

$$\frac{\left\langle \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\theta_i}{\lambda E} \right) \middle| \theta_i \right\rangle}{\frac{1}{\lambda E} \langle \theta_i^+ | \theta_i \rangle} = \frac{\left\langle \frac{\partial \theta_i^+}{\partial t} \middle| \theta_i \right\rangle}{\langle \theta_i^+ | \theta_i \rangle} - \frac{\frac{d}{dt} \langle \psi^+ | \psi \rangle}{\langle \psi^+ | \psi \rangle}$$

tenemos finalmente :

$$\dot{\bar{C}}_i(t) = \frac{\beta_{ie}(t)}{\lambda(t)} P(t) - (\lambda_i - W_{3i}(t)) \bar{C}_i(t) \dots (\text{V.3.15})$$

Por último, la ecuación (V.2.16) queda, con el uso de las definiciones pertinentes :

$$-\dot{\xi}_i^+(t) = \lambda_i b_i(t) P^+(t) - \xi_i^+(t) [\lambda_i - W_{4i}(t)] \dots (\text{V.3.16})$$

donde hemos definido

$$W_{4i}(t) \equiv \frac{\left\langle \frac{\partial \theta_i^+}{\partial t} \middle| \theta_i \right\rangle}{\langle \theta_i^+ | \theta_i \rangle} \dots (\text{V.3.17})$$

Resumiendo, las ecuaciones cinéticas su forma más convencional son

$$\dot{P}(t) = P(t) \frac{P(t) - P_e(t) - W_1(t)}{\lambda(t)} + \sum_{i=1}^G \lambda_i b_i(t) \bar{C}_i(t) + \bar{S}(t) \dots (\text{V.3.8})$$

$$-\dot{P}^+(t) = P^+(t) \frac{P(t) - P_e(t) + W_2(t)}{\lambda(t)} + \sum_{i=1}^G \frac{\beta_{ie}(t)}{\lambda(t)} \xi_i^+(t) + \bar{S}^+(t) \dots (\text{V.3.12})$$

$$\dot{\bar{C}}_i(t) = \frac{\beta_{ie}(t)}{\lambda(t)} P(t) - (\lambda_i - W_{3i}(t)) \bar{C}_i(t) \dots (\text{V.3.15})$$

$$-\dot{\xi}_i^+(t) = \lambda_i b_i(t) P^+(t) - \xi_i^+(t) [\lambda_i - W_{4i}(t)] \dots (\text{V.3.16})$$

V.4. Elección de la función $G(t)$

La elección del factor $G(t)$ es arbitraria en el sentido de que las ecuaciones cinéticas puntuales (V.3.8), (V.3.12), (V.3.15) y (V.3.16) son independientes de él. Sin embargo las magnitudes, $\rho(t)$, $\beta_{ie}(t)$ y $\lambda(t)$ dependen de $G(t)$.

La arbitrariedad en la elección de $G(t)$ implica que las cantidades mencionadas antes, no pueden ser definidas como entidades físicas en un sentido absoluto y por lo tanto, solo las relaciones $\rho(t)/\lambda(t)$ y $\beta_{ie}(t)/\lambda(t)$ pueden ser definidas sin ambigüedad.

Esta conclusión tiene la importante consecuencia que solo las relaciones de estas cantidades pueden ser medidas experimentalmente para un reactor dado.

Elijamos entonces arbitrariamente

$$G(t) \equiv \langle \psi^+ | \hat{M}_0 \psi \rangle + \sum_{i=1}^6 \langle \theta_i^+ | \hat{M}_i \psi \rangle$$

De modo que

$$a) \quad \rho(t) \equiv \frac{\langle \psi^+ | \hat{H} \psi \rangle + \sum_{i=1}^6 \langle \theta_i^+ | \hat{M}_i \psi \rangle + \sum_{i=1}^6 \lambda_i \langle \psi^+ - \theta_i^+ | \theta_i \rangle}{\langle \psi^+ | \hat{M}_0 \psi \rangle + \sum_{i=1}^6 \langle \theta_i^+ | \hat{M}_i \psi \rangle} \dots (V.4.1)$$

que es la llamada "reactividad" y es definida como el cociente entre la generación neta de importancia y la generación de importancia si todos los coeficientes temporales fueran la unidad.

$$b) \quad \lambda(t) \equiv \frac{\langle \psi^+ | \psi \rangle}{\langle \psi^+ | \hat{M}_0 \psi \rangle + \sum_{i=1}^G \langle \theta_i^+ | \hat{M}_i \psi \rangle} \quad \dots (\text{V. 4.2})$$

que es el llamado "tiempo de generación de neutrones" y es definido como el cociente de la importancia de todos los neutrones en el reactor entre la generación de importancia, si los coeficientes temporales fueran la unidad.

$$c) \quad \beta_{ie}(t) \equiv \frac{\langle \theta_i^+ | \hat{M}_i \psi \rangle}{\langle \psi^+ | \hat{M}_0 \psi \rangle + \sum_{i=1}^G \langle \theta_i^+ | \hat{M}_i \psi \rangle} \quad \dots (\text{V. 4.3})$$

es llamada la "fracción efectiva de neutrones retardados del i-ésimo grupo". Es definida como la razón de la importancia de los precursores generados del i-ésimo grupo a la importancia total generada, si los coeficientes temporales fueran la unidad.

$$d) \quad \bar{S}(t) \equiv \frac{\langle \psi^+ | S \rangle}{\langle \psi^+ | \psi \rangle} \quad \dots (\text{V. 4.4})$$

que llamaremos "fuente efectiva".

Es así el cociente de la importancia de los neutrones de fuente entre la importancia de todos los neutrones en el reactor, si los coeficientes temporales fueran la unidad.

$$e) \quad \bar{C}_i(t) \equiv \xi_i(t) \frac{\langle \theta_i^+ | \theta_i \rangle}{\langle \psi^+ | \psi \rangle}$$

$$\equiv \frac{\langle \theta_i^+ | C_i(\bar{v}, \mu, \beta, t) \rangle}{\langle \psi^+ | \psi \rangle} \quad \dots (\text{V. 4.5})$$

Es llamada la "concentración efectiva de precursores del i -ésimo grupo" y es el cociente de la importancia de los precursores del i -ésimo grupo entre la importancia de los neutrones en todo el sistema, si los coeficientes, temporales de las funciones adjuntas y de la densidad de neutrones fueran la unidad.

Es debido al sentido físico de estas definiciones que se seleccionó $G(t)$ en la forma anterior.

V.5. Factor de Multiplicación

Siguiendo la tradición (2)(6) definimos el factor de multiplicación efectivo como :

$$K_{eff}(t) \equiv \frac{1}{1 - \beta(t)} \quad \dots \quad (V.5.1)$$

de manera que sustituyendo (V.4.1), obtenemos :

$$K_{eff}(t) \equiv \frac{\langle \psi^+ | \hat{M}_0 \psi \rangle + \sum_{i=1}^6 \langle \theta_i^+ | \hat{M}_i \psi \rangle}{\langle \psi^+ | \hat{M}_0 \psi \rangle + \sum_{i=1}^6 \langle \theta_i^+ | \hat{M}_i \psi \rangle - \langle \psi^+ | \hat{H} \psi \rangle - \sum_{i=1}^6 \left\{ \langle \theta_i^+ | \hat{M}_i \psi \rangle - \lambda_i \langle \psi^+ | \theta_i^+ \rangle \right\}}$$

y haciendo :

$$\hat{H} \equiv \hat{L} + \hat{M}_0 \quad \text{tenemos :}$$

$$K_{eff}(t) \equiv \frac{\langle \psi^+ | \hat{M}_0 \psi \rangle + \sum_{i=1}^6 \langle \theta_i^+ | \hat{M}_i \psi \rangle}{\sum_{i=1}^6 \lambda_i \langle \theta_i^+ | \psi^+ \rangle - \langle \psi^+ | \hat{L} \psi \rangle} \quad \dots \text{ (X.5.2)}$$

Dado que \hat{L} es un operador de "destrucción" y \hat{M}_0 y \hat{M}_i son operadores de producción (ver cap. II), $K_{eff}(t)$ es definido como la razón de la producción de importancia, a la destrucción de importancia.

Veamos ahora que diferencia existe entre la definición de factor de multiplicación dada en (V.5.2.) y la definición tradicional de éste factor (1), (6).

Antes de continuar, hagamos un análisis de la forma en la cual se define tradicionalmente el factor de multiplicación (1).

Recordando que las ecuaciones cinéticas están dadas por (III.3.19) y (II.3.20) es decir :

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \hat{H}n + \sum_{i=1}^6 \lambda_i C_i + S$$

$$\frac{\partial C_i}{\partial t} = \hat{M}_i n - \lambda_i C_i$$

Consideremos ahora un sistema libre de fuentes externas. La población de neutrones en él será función del tiempo, ya sea que se incremente ó decrezca; en el primer caso, se dice que el sistema es supercrítico y en el segundo subcrítico; si la población permanece constante se dice que el sistema es crítico.

En este último caso, la densidad angular de neutrones $N_0(\vec{r}, \mu, \underline{\Omega})$ satisface la siguiente ecuación, obtenida de (II.3.19) y (II.3.20):

$$\left(\hat{H} + \sum_{i=1}^6 \hat{M}_i \right) N_0(\vec{r}, \mu, \underline{\Omega}) = 0 \quad \dots \text{(V.5.3)}$$

Usando las definiciones (II.3.15), (II.3.16), (II.3.17) y (II.3.18) y definiendo

$$\hat{M} \equiv \hat{M}_0 + \sum_{i=1}^6 \hat{M}_i$$

es decir

$$\hat{M} \equiv \frac{f(\mu)}{4\pi} \iint d\mu' d\underline{\Omega}' v(\vec{r}, \mu') v(\mu') \Sigma_f(\vec{r}, \mu') \quad \dots \text{(V.5.4)}$$

donde

$$f(\mu) = (1-\beta) f_0(\mu) + \sum_{i=1}^6 \beta_i f_i(\mu) \quad \dots \text{(V.5.5)}$$

siendo $f(u)$ el promedio pesado de las distribuciones de energía de los neutrones inmediatos como retardados, en estado de régimen constante.

La ecuación (V.5.3.) queda como :

$$(\hat{L} + \hat{M}) N_o(\bar{v}, \mu, \underline{\Omega}) = 0 \quad \dots \text{(V.5.6)}$$

Esta ecuación debe ser resuelta con las condiciones de contorno, discutidas en el capítulo II y su solución debe ser continua y positiva dentro del sistema.

En el caso de un sistema no crítico, la ecuación (V.5.6) tiene como única solución :

$$N_o(\bar{v}, \mu, \underline{\Omega}) = 0$$

ya que no existe ninguna otra distribución de neutrones que cumpla ésta ecuación.

Supongamos que podemos modificar el operador \hat{M} en un factor positivo $\frac{1}{K}$, de manera que, ajustando éste valor podamos convertir el sistema no crítico, en uno crítico.

Es decir hacer :

$$\left(\hat{L} + \frac{1}{K_s} \hat{M} \right) N(\bar{v}, \mu, \underline{\Omega}) = 0 \quad \dots \text{(V.5.7)}$$

con

$$N(\bar{v}, \mu, \underline{\Omega}) \neq 0$$

donde hemos denotado el factor $\frac{1}{K}$ que hace crítico al sistema por $\frac{1}{K_S}$,

Para obtener el significado físico de $K_S(1)$, el cual ha sido introducido como un ente meramente matemático, romperemos artificialmente el proceso de reacción en cadena en ciclos de neutrones. Empezamos un ciclo introduciendo neutrones con la misma distribución espacial y energética que la densidad $N(\bar{r}, \mu, \underline{\Omega})$ de la ecuación (V.5.7).

Estos neutrones eventualmente desaparecerán ya sea por escape ó por absorción, marcando el final del ciclo. Algunos de los neutrones absorbidos causarán las fisiones que producen los neutrones del siguiente ciclo.

Denotando por $Q(\bar{r}, \mu, \underline{\Omega})$, el número de neutrones emitidos por unidad de tiempo y volúmen, alrededor de \bar{r} , μ y $\underline{\Omega}$, en el sistema crítico, se tiene que

$$Q(\bar{r}, \mu, \underline{\Omega}) = \frac{1}{K_S} \hat{M} N_n(\bar{r}, \mu, \underline{\Omega}) \quad \dots \quad (V.5.8)$$

Si inyectamos instantáneamente neutrones con la distribución $Q(\bar{r}, \mu, \underline{\Omega}) \Delta t$

(donde Δt es un intervalo de tiempo pequeño), estos se perderán, como ya se mencionó, ya sea por escape ó absorción y su comportamiento temporal está gobernado por el operador de destrucción $\hat{L}(1)$.

Así pues :

$$\frac{\partial q(\bar{r}, \mu, \underline{d}, t)}{\partial t} = \hat{L} q(\bar{r}, \mu, \underline{d}, t) \quad \dots (V.5.9)$$

donde $q(\bar{r}, \mu, \underline{d}, t)$ es la densidad angular de estos neutrones al tiempo t .

Entonces para $t=0$ se tiene

$$q(\bar{r}, \mu, \underline{d}, t=0) = Q(\bar{r}, \mu, \underline{d}) \Delta t \quad \dots (V.5.10)$$

y para $t \rightarrow \infty$

$$q(\bar{r}, \mu, \underline{d}, t \rightarrow \infty) = 0 \quad \dots (V.5.11)$$

Integrando la ecuación (V.5.9)

con respecto al tiempo de 0 a ∞ es decir :

$$\int_0^{\infty} \frac{\partial q(\bar{r}, \mu, \underline{d}, t)}{\partial t} dt - \int_0^{\infty} \hat{L} q(\bar{r}, \mu, \underline{d}, t) dt = 0 \quad \dots (V.5.12)$$

Usando las condiciones (V.5.10) y (V.5.11) y si \hat{L} no depende de t , se obtiene :

$$\frac{1}{k_s} \hat{M} N(\bar{r}, \mu, \underline{d}) \Delta t + \hat{L} \int_0^{\infty} q(\bar{r}, \mu, \underline{d}, t) dt = 0 \quad \dots (V.5.13)$$

y usando la ecuación (V.5.7), tenemos :

$$-\hat{L} N(\bar{r}, \mu, \underline{d}) \Delta t + \hat{L} \int_0^{\infty} q(\bar{r}, \mu, \underline{d}, t) dt = 0 \quad \dots (V.5.14)$$

\Rightarrow

$$N(\bar{r}, \mu, \underline{d}) \Delta t = \int_0^{\infty} q(\bar{r}, \mu, \underline{d}, t) dt \quad (V.5.15)$$

Entonces en el transcurso del tiempo los neutrones insertados están produciendo nuevos neutrones, así por ejemplo el número de neutrones que serán producidos, ya sea inmediatos ó retardados, por unidad de tiempo y volúmen es :

$$\hat{M} q(\bar{r}, \mu, \underline{r}, t)$$

es decir, estamos tomando en cuenta los neutrones retardados que más tarde ó más temprano tendrán que aparecer. Así pués, el número total de neutrones producidos será, denotándolo por $P(\bar{r}, \mu, \underline{r})$:

$$P(\bar{r}, \mu, \underline{r}) = \int_0^{\infty} \hat{M} q(\bar{r}, \mu, \underline{r}, t) dt \quad \dots \text{(V.5.16)}$$

Y si \hat{M} no depende del tiempo

$$P(\bar{r}, \mu, \underline{r}) = \hat{M} \int_0^{\infty} q(\bar{r}, \mu, \underline{r}, t) dt \quad \dots \text{(V.5.17)}$$

y usando (V.5.15) se obtiene :

$$P(\bar{r}, \mu, \underline{r}) = \hat{M} N(\bar{r}, \mu, \underline{r}) \Delta t \quad \dots \text{(V.5.18)}$$

Ahora realizando el cociente entre el número total de neutrones producidos y el número de neutrones insertado, usando (V.5.8), tenemos :

$$\frac{P(\bar{r}, \mu, \underline{r})}{Q(\bar{r}, \mu, \underline{r})} = \frac{\hat{M} N(\bar{r}, \mu, \underline{r}) \Delta t}{\frac{1}{K_S} \hat{M} N(\bar{r}, \mu, \underline{r}) \Delta t} \quad \dots \text{(V.5.19)}$$

y por lo tanto

$$\frac{P(\bar{r}, \mu, \underline{r})}{Q(\bar{r}, \mu, \underline{r})} = K_S \quad \dots \text{(V.5.20)}$$

A este factor K_S se le llama, factor de multiplicación, estático y es por lo tanto el cociente entre el número de neutrones producidos en una generación al número de neutrones producidos en la inmediata anterior.

Asociada a la ecuación (V.5.7), existe la ecuación de importancia correspondiente que es :

$$\left(\hat{L}^+ + \frac{1}{K_S} \hat{M}^+ \right) N^+ = 0 \quad \dots (V.5.21)$$

donde N^+ es ahora la función de importancia de los neutrones en éste sistema.

Multiplicando escalarmente la ecuación (V.5.7) por $N^+(\vec{r}, \mu, \underline{E})$ y despejando K_S obtenemos

$$K_S = - \frac{\langle N^+ | \hat{M} N \rangle}{\langle N^+ | \hat{L} N \rangle} \quad \dots (V.5.22)$$

comparando entonces (V.5.22) con la definición (V.5.2) es obvio que las dos definiciones serían equivalentes solo en el caso de que

$$\psi^+ = \theta_i^+ \quad \text{y además que} \quad \psi = \theta_i$$

Esto solo es cierto para el caso particular de un reactor en estado de régimen constante es decir, crítico.

La diferencia esencial entre las dos definiciones consiste en haber supuesto, en éste último caso, que el sistema es artificialmente crítico, lo cual implica que las funciones de forma para las densidades de neutrones y precursores son iguales, lo mismo que para las

funciones de forma de sus importancias.

Por lo tanto, en la definición de factor de multiplicación dado en (V.5.2) se toma en cuenta el hecho de que las funciones de forma de los precursores y de sus importancias son en general diferentes a las de los neutrones. Esto implica la mayor generalidad de la definición (V.5.2.)

Resumiendo, en éste capítulo hemos obtenido, a través de un principio variacional, las llamadas "ecuaciones cinéticas puntuales" y hemos definido, la reactividad, factor de multiplicación, etc., en una forma generalizada.

En el próximo capítulo, desarrollamos las funciones de densidad de los neutrones y precursores y sus correspondientes funciones de importancia, en eigenvectores de un operador matricial y su operador adjunto respectivamente, para obtener las llamadas ecuaciones de la "Hora Inversa" (1), (2) que son útiles en la determinación de parámetros de operación de un reactor.

C A P I T U L O VI

METODO DE SOLUCION DE LAS ECUACIONES CINETICAS

POR DESARROLLO EN EIGENVECTORES

VI.1. Introducción

La mayoría de los métodos que han sido desarrollados para la solución de las ecuaciones cinéticas que se obtuvieron en los capítulos anteriores, pueden ser clasificados en "métodos nodales" y "métodos modales".

Un tratamiento nodal se basa en dividir al reactor en regiones y adjudicar a cada región un comportamiento cinético individual, determinado por las propias características de dicha región y por el acoplamiento a través del escape de neutrones con las regiones vecinas.

Por otra parte un análisis modal describe el comportamiento espacio-temporal como una combinación lineal de formas de flujo correspondientes a todo el sistema, siendo los coeficientes de la combinación funciones del tiempo, (8).

En este capítulo seguiremos éste último método basandonos en el trabajo de Von T. Gozani, (7).

Para realizar esto, en base a la definición de un operador matricial (9), y a la ecuación de **eigenvalores** correspondiente a dicho operador, proponemos que las funciones de densidad de neutrones y precursores sean una combinación lineal de los eigenvectores de éste operador.

Usando después un principio variacional obtenemos las ecuaciones diferenciales que gobiernan el comportamiento temporal de los coeficientes de dicha combinación.

Definiremos posteriormente coeficientes de reactividad los cuales excitan los diferentes "modos", entendiendo por modos a un eigenvector y su correspondiente eigenvalor (7).

Por último deducimos, las llamadas Ecuaciones de la Hora Inversa, en base a definiciones adecuadas.

VI.2. Bases Matemáticas

Presentaremos ahora las bases matemáticas en las cuales nos apoyaremos.

En el dominio de un cierto operador matricial \hat{O} habrá, en general, un subespacio de vectores $\{\vec{\xi}_n\}$ con la propiedad de que

$$\hat{O} \vec{\xi}_n = a_n \vec{\xi}_n \quad \dots (\text{VI.2.1})$$

Donde, en general, las a_n 's son números complejos; los vectores son llamados eigenvectores del operador \hat{O} y los números a_n son llamados eigenvalores.

Definamos ahora el producto escalar de dos vectores $\vec{\mu}$ y $\vec{\nu}$ como:

$$\langle \vec{\mu} | \vec{\nu} \rangle = \sum_{i=1} \langle \mu_i | \nu_i \rangle \quad \dots (\text{VI.2.2})$$

Sea ahora, \hat{O}^\dagger el operador adjunto de \hat{O} , el cual tiene también eigenvectores, denotados por $\{\vec{\phi}_n\}$, los cuales cumplen la ecuación:

$$\hat{O}^+ \vec{\varphi}_n = b_n \vec{\psi}_n \quad \dots (\text{VI.2.3})$$

Encontremos ahora la relación que tienen los elementos de \hat{O} y \hat{O}^+ , (1).

Sean pues \hat{O} y \hat{O}^+ operadores matriciales de $m \times m$ elementos. La relación entre los elementos de éstos operadores estará dada por

$$\langle \vec{\psi}_n | \hat{O} \vec{\varphi}_m \rangle = \langle \hat{O}^+ \vec{\varphi}_n | \vec{\psi}_m \rangle \quad \dots (\text{VI.2.4})$$

Si el operador \hat{O} , está representado por

$$\hat{O} = \begin{pmatrix} \hat{O}_{11} & \hat{O}_{12} & \dots & \hat{O}_{1m} \\ \hat{O}_{21} & \hat{O}_{22} & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{O}_{m1} & \dots & \dots & \hat{O}_{mm} \end{pmatrix} \quad \dots (\text{VI.2.5})$$

y sus eigenvectores por

$$\vec{\psi}_n = \begin{pmatrix} \psi_{n1} \\ \vdots \\ \psi_{nm} \end{pmatrix} \quad \dots (\text{VI.2.6})$$

entonces:

$$\hat{O} \vec{\psi}_n = \begin{pmatrix} \sum_{s=1}^m \hat{O}_{1s} \psi_{ns} \\ \vdots \\ \sum_{s=1}^m \hat{O}_{ms} \psi_{ns} \end{pmatrix} \quad \dots (\text{VI.2.7})$$

Ahora usando (VI.2.2), tenemos que

$$\begin{aligned} \langle \vec{\varphi}_r | \hat{O} \vec{\xi}_n \rangle &= \sum_{\mu=1}^m \langle \varphi_{r\mu} | \sum_{s=1}^m \hat{O}_{\mu s} \xi_{ns} \rangle \\ &= \sum_{\mu=1}^m \sum_{s=1}^m \langle \varphi_{r\mu} | \hat{O}_{\mu s} \xi_{ns} \rangle \quad \dots \quad (\text{VI.2.8}) \end{aligned}$$

y usando la definición de operador adjunto, (III.5.4).

$$\langle \vec{\varphi}_r | \hat{O} \vec{\xi}_n \rangle = \sum_{\mu=1}^m \sum_{s=1}^m \langle \hat{O}_{\mu s}^+ \varphi_{r\mu} | \xi_{ns} \rangle \quad \dots \quad (\text{VI.2.9})$$

Intercambiando μ por s , se tiene:

$$\begin{aligned} \langle \vec{\varphi}_r | \hat{O} \vec{\xi}_n \rangle &= \sum_{\mu=1}^m \sum_{s=1}^m \langle \hat{O}_{s\mu} \varphi_{rs} | \xi_{n\mu} \rangle \\ &= \sum_{\mu=1}^m \langle \sum_{s=1}^m \hat{O}_{s\mu}^+ \varphi_{rs} | \xi_{n\mu} \rangle \quad \dots \quad (\text{VI.2.10}) \end{aligned}$$

Sea ahora

$$\hat{\Theta}^{\dagger} \equiv \begin{pmatrix} \hat{O}_{11} & \hat{O}_{21} & \dots & \hat{O}_{m1} \\ \hat{O}_{12} & & & \\ \vdots & & \ddots & \\ \hat{O}_{1m} & & & \hat{O}_{mm} \end{pmatrix} \dots (\text{VI.2.11a})$$

y como

$$\vec{\varphi}_r = \begin{pmatrix} \varphi_{r1} \\ \varphi_{r2} \\ \vdots \\ \varphi_{rm} \end{pmatrix} \dots (\text{VI.2.11b})$$

Entonces

$$\hat{\Theta}^{\dagger} \vec{\varphi}_r = \begin{pmatrix} \sum_{s=1}^m \hat{O}_{s1}^{\dagger} \varphi_{rs} \\ \vdots \\ \sum_{s=1}^m \hat{O}_{sm}^{\dagger} \varphi_{rs} \end{pmatrix} \dots (\text{VI.2.12})$$

con lo cual

$$\langle \vec{\varphi}_r | \hat{\Theta} \vec{\xi}_m \rangle = \langle \hat{\Theta}^{\dagger} \vec{\varphi}_r | \vec{\xi}_m \rangle$$

Así pues, si:

$\hat{O} = [\hat{O}_{ij}]$ entonces $\hat{O}^\dagger = [\hat{O}_{ji}^*]$... (VI.2.13). Con este resultado probemos el siguiente teorema.

Teorema (1), (6).- Sea $\vec{\xi}_k$ un eigenvector de \hat{O} al que le corresponde el eigenvalor a_k y sea $\vec{\psi}_l$ un eigenvector del operador adjunto \hat{O}^\dagger con eigenvalor b_l .

Entonces

$$\left. \begin{aligned} a_k &= b_l^* & \text{o} \\ \langle \vec{\psi}_l | \vec{\xi}_k \rangle &= 0 \end{aligned} \right\} \dots (\text{VI.2.14})$$

Prueba:

Tenemos

$$\hat{O} \vec{\xi}_k = a_k \vec{\xi}_k \dots (\text{VI.2.15})$$

y

$$\hat{O}^\dagger \vec{\psi}_l = b_l \vec{\psi}_l \dots (\text{VI.2.16})$$

Así pues multiplicando escalarmente ambos lados de la ecuación (VI.2.15) por $\vec{\psi}_l$ por la izquierda y (VI.2.16) por $\vec{\xi}_k$ por la derecha tenemos:

$$\sum_{t=1}^m \langle \vec{\psi}_{lt} | \sum_{s=1}^m \hat{O}_{ts} \vec{\xi}_{ks} \rangle = \sum_{t=1}^m \langle \vec{\psi}_{lt} | a_k \vec{\xi}_{kt} \rangle \dots (\text{VI.2.17})$$

y la ecuación (VI.2.16) queda:

$$\sum_{t=1}^m \langle \sum_{\mu=1}^m \hat{O}_{\mu t}^* \vec{\psi}_{l\mu} | \vec{\xi}_{kt} \rangle = \sum_{t=1}^m \langle b_l \vec{\psi}_{lt} | \vec{\xi}_{kt} \rangle \dots (\text{VI.2.18})$$

Podemos ahora factorizar los eigenvalores a_k y b_l .

Entonces la ecuación (VI.2.17) queda :

$$\sum_{t=1}^m \sum_{s=1}^m \langle \varphi_{\lambda t} | \hat{O}_{ts} \varphi_{\kappa s} \rangle = \sum_{t=1}^m a_{\kappa} \langle \varphi_{\lambda t} | \varphi_{\kappa t} \rangle \dots (\text{VI.2.19})$$

y utilizando el operador adjunto

$$\sum_{t=1}^m \sum_{s=1}^m \langle \hat{O}_{ts}^+ \varphi_{\lambda t} | \varphi_{\kappa s} \rangle = \sum_{t=1}^m a_{\kappa} \langle \varphi_{\lambda t} | \varphi_{\kappa t} \rangle \dots (\text{VI.2.20})$$

Donde, intercambiando los índices s y t, obtenemos

$$\sum_{t=1}^m \sum_{s=1}^m \langle \hat{O}_{st}^+ \varphi_{\lambda s} | \varphi_{\kappa t} \rangle = \sum_{s=1}^m a_{\kappa} \langle \varphi_{\lambda s} | \varphi_{\kappa s} \rangle \dots (\text{VI.2.21})$$

y la ecuación (VI.2.18) queda

$$\sum_{t=1}^m \sum_{\mu=1}^m \langle \hat{O}_{\mu t}^+ \varphi_{\lambda \mu} | \varphi_{\kappa t} \rangle = \sum_{t=1}^m b_{\lambda}^* \langle \varphi_{\lambda t} | \varphi_{\kappa t} \rangle \dots (\text{VI.2.22})$$

Cambiando u por s en el miembro izquierdo y t por s en el derecho, tenemos

$$\sum_{t=1}^m \sum_{s=1}^m \langle \hat{O}_{st}^+ \varphi_{\lambda s} | \varphi_{\kappa t} \rangle = \sum_{s=1}^m b_{\lambda}^* \langle \varphi_{\lambda s} | \varphi_{\kappa s} \rangle \dots (\text{VI.2.23})$$

Restando las ecuaciones (VI.2.21) y (VI.2.23) obtenemos

$$\sum_{s=1}^m (a_{\kappa} - b_{\lambda}^*) \langle \varphi_{\lambda s} | \varphi_{\kappa s} \rangle = 0 \dots (\text{VI.2.24})$$

ó sea

$$(a_{\kappa} - b_{\lambda}^*) \sum_{s=1}^m \langle \varphi_{\lambda s} | \varphi_{\kappa s} \rangle = (a_{\kappa} - b_{\lambda}^*) \langle \vec{\varphi}_{\lambda} | \vec{\varphi}_{\kappa} \rangle \dots (\text{VI.2.25})$$

(donde usamos (VI.2.5)), de donde concluimos que

$$a_{\kappa} = b_{\lambda}^*$$

$$\text{ó}$$

$$\langle \vec{\psi}_{\lambda} | \vec{\xi}_{\kappa} \rangle = 0$$

Con lo cual concluye la prueba :

La consecuencia de ésto es que uno puede asociar y "etiquetar" los -
 eigenvectores de los operadores matriciales de tal forma que los eigen-
 valores asociados con los eigenvectores $\vec{\xi}_{\kappa}$ (eigenvectores -
 de \hat{O}) sean los complejos conjugados de los eigenvectores $\vec{\psi}_{\lambda}$ -
 (eigenvectores de \hat{O}^{\dagger})

Así entonces

$$\langle \vec{\psi}_{\lambda} | \vec{\xi}_{\kappa} \rangle = A_{\lambda\kappa} \delta_{\lambda\kappa} \dots (\text{VI.2.26})$$

Es decir, los eigenvectores directos y adjuntos forman conjuntos biorto-
 normales, que constituyen una base.

Ahora, recordando las ecuaciones de transporte (II.3.19) y (II.3.20) -
 y denotando por

$$\vec{\eta}(\vec{r}, \mu, \underline{l}, t) = \begin{pmatrix} n(\vec{r}, \mu, \underline{l}, t) \\ c_1(\vec{r}, \mu, \underline{l}, t) \\ \vdots \\ c_c(\vec{r}, \mu, \underline{l}, t) \end{pmatrix} \dots (\text{VI.2.27})$$

estas ecuaciones quedan en forma matricial como :

$$\frac{\partial \vec{n}}{\partial t} = \begin{pmatrix} \hat{H} & \lambda_1 & \dots & \lambda_6 \\ \hat{M}_1 & -\lambda_1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ \hat{M}_6 & & & -\lambda_6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n \\ C_1 \\ \vdots \\ C_6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} S \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \dots (\text{VI.2.28})$$

Sean :

$$\vec{S} = \begin{pmatrix} S \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \dots (\text{VI.2.29})$$

y

$$\hat{K} \equiv \begin{pmatrix} \hat{H} & \lambda_1 & \dots & \lambda_6 \\ \hat{M}_1 & -\lambda_1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ \hat{M}_6 & & & -\lambda_6 \end{pmatrix} \dots (\text{VI.2.30})$$

de manera que las ecuaciones de transporte se pueden escribir como

$$\frac{\partial \vec{n}}{\partial t} = \hat{K} \vec{n} + \vec{S} \dots (\text{VI.2.31})$$

y utilizando la definición (VI.2.13)

$$\hat{K}^+ = \begin{pmatrix} \hat{H}^+ & \hat{M}_1^+ & \dots & \hat{M}_6^+ \\ \lambda_1 & -\lambda_1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ \vdots & & & \\ \lambda_6 & & & -\lambda_6 \end{pmatrix} \dots (\text{VI.2.32})$$

y con
$$\vec{S}^+ = \begin{pmatrix} S^+ \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \dots \quad (\text{VI.2.33})$$

tenemos que las ecuaciones de transporte adjuntas (III.4.3) y (III.4.5) quedan como :

$$-\frac{\partial \vec{n}^+}{\partial t} = \hat{K}^+ \vec{n}^+ + \vec{S}^+ \quad \dots \quad (\text{VI.2.34})$$

donde

$$\vec{n}^+ \equiv \begin{pmatrix} n^+ \\ c_1^+ \\ \vdots \\ c_l^+ \end{pmatrix} \quad \dots \quad (\text{VI.2.35})$$

Ahora, sean las ecuaciones de eigenvalores

$$\hat{K}(\bar{r}, \mu, \underline{Q}) \vec{\Phi}_n(\bar{r}, \mu, \underline{Q}) = \omega_n \vec{\Phi}_n \quad \dots \quad (\text{VI.2.36})$$

$$\hat{K}^+(\bar{r}, \mu, \underline{Q}) \vec{\Phi}_n^+(\bar{r}, \mu, \underline{Q}) = \omega_n^* \vec{\Phi}_n^+ \quad \dots \quad (\text{VI.2.37})$$

Así, de la condición (VI.2.26) tenemos :

$$\langle \vec{\Phi}_m^+ | \vec{\Phi}_n \rangle = A_{mn} \delta_{mn} \quad \dots \quad (\text{VI.2.38})$$

y normalizando a la unidad :

$$\langle \vec{\Phi}_m^+ | \vec{\Phi}_n \rangle = \delta_{mn} \quad \dots \quad (\text{VI.2.38}')$$

En todo el desarrollo anterior hemos supuesto que el operador matricial

\hat{K} y por lo tanto \hat{K}^+ no dependen del tiempo. En el caso de que dependan del tiempo las ecuaciones de eigenvalores serían :

$$\hat{K}(\bar{r}, \mu, \underline{d}; t) \vec{\Phi}_n(\bar{r}, \mu, \underline{d}; t) = \omega_n(t) \vec{\Phi}_n(\bar{r}, \mu, \underline{d}; t) \dots (\text{VI.2.39})$$

en donde el tiempo t actúa como parámetro en esta ecuación. Para las funciones adjuntas se tiene

$$\hat{K}^+(\bar{r}, \mu, \underline{d}; t) \vec{\Phi}_n^+(\bar{r}, \mu, \underline{d}; t) = \omega_n^*(t) \vec{\Phi}_n^+(\bar{r}, \mu, \underline{d}; t) \dots (\text{VI.2.40})$$

donde t , también es un parámetro

VI.3 COMPORTAMIENTO TEMPORAL MODAL

Si proponemos que n y n^+ sean una combinación lineal sus eigenvalores correspondientes, siendo los coeficientes de la combinación funciones del tiempo tenemos:

$$\vec{r} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(t) \vec{\Phi}_n = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(t) \begin{pmatrix} N_n \\ C_{1n} \\ \vdots \\ C_{6n} \end{pmatrix} \dots (\text{VI.3.1})$$

$$y \quad \vec{n}^+ = \sum_{n=0}^{\infty} P_n^+(t) \vec{\Phi}_n^+ = \sum_{n=0}^{\infty} P_n^+(t) \begin{pmatrix} C_{1n}^+ \\ \vdots \\ C_{en}^+ \end{pmatrix} \quad \dots \text{(VI.3.2)}$$

Los coeficientes estarán determinados por las relaciones

$$P_n(t) = \langle \vec{\Phi}_n^+ | \vec{n} \rangle$$

y

$$P_n^+(t) = \langle \vec{n}^+ | \vec{\Phi}_n \rangle$$

donde hemos utilizado la relación (VI.2.38'), suponiendo que podemos calcular los eigenvectores

Para determinar los coeficientes de esta manera necesitamos conocer $\vec{n}(\bar{r}, \mu, \underline{Q}, t)$ y $\vec{n}^+(\bar{r}, \mu, \underline{Q}, t)$, lo cual implica haber resuelto ya el problema.

Un método alternativo consiste en utilizar un principio variacional para obtener ecuaciones diferenciales para los coeficientes temporales. Seguiremos este método.

La funcional (V.2.3) puede ponerse en una forma matricial, (usando las definiciones de \hat{K} y \hat{K}^+ , de la sección anterior), como

$$F[\vec{n}, \vec{n}^+] = \int_0^{\pi} \left\{ \langle \vec{n}^+ | \frac{\partial \vec{n}}{\partial t} \rangle + \langle \vec{n}^+ | \hat{K} \vec{n} \rangle + \langle \vec{n}^+ | \vec{S} \rangle + \langle \vec{S}^+ | \vec{n} \rangle \right\} dt + \langle \vec{n}_F^+(\bar{r}, \mu, \underline{Q}) | \vec{n}(\bar{r}, \mu, \underline{Q}, \pi) \rangle + \langle \vec{n}^+(\bar{r}, \mu, \underline{Q}, 0) | \langle \vec{n}_0(\bar{r}, \mu, \underline{Q}) - n(\bar{r}, \mu, \underline{Q}, 0) \rangle \rangle \dots \text{(VI.3.3)}$$

Donde

$$\begin{aligned}
 \vec{n}(\bar{r}, \mu, \underline{d}, \mathbb{T}) &= \begin{pmatrix} n(\bar{r}, \mu, \underline{d}, \mathbb{T}) \\ C_1(\bar{r}, \mu, \underline{d}, \mathbb{T}) \\ \vdots \\ C_0(\bar{r}, \mu, \underline{d}, \mathbb{T}) \end{pmatrix} \\
 \vec{n}(\bar{r}, \mu, \underline{d}, 0) &= \begin{pmatrix} n(\bar{r}, \mu, \underline{d}, 0) \\ C_1(\bar{r}, \mu, \underline{d}, 0) \\ \vdots \\ C_0(\bar{r}, \mu, \underline{d}, 0) \end{pmatrix} \\
 \vec{n}_0(\bar{r}, \mu, \underline{d}) &= \begin{pmatrix} b_0(\bar{r}, \mu, \underline{d}) \\ C_{01}(\bar{r}, \mu, \underline{d}) \\ \vdots \\ C_{00}(\bar{r}, \mu, \underline{d}) \end{pmatrix} \\
 \vec{n}_F^+(\bar{r}, \mu, \underline{d}, 0) &= \begin{pmatrix} n^+(\bar{r}, \mu, \underline{d}, 0) \\ C_1^+(\bar{r}, \mu, \underline{d}, 0) \\ \vdots \\ C_0^+(\bar{r}, \mu, \underline{d}, 0) \end{pmatrix} \\
 \vec{n}_F^+(\bar{r}, \mu, \underline{d}) &= \begin{pmatrix} b_F^+(\bar{r}, \mu, \underline{d}) \\ C_F^+(\bar{r}, \mu, \underline{d}) \\ \vdots \\ C_{F0}^+(\bar{r}, \mu, \underline{d}) \end{pmatrix}
 \end{aligned}
 \left. \vphantom{\begin{aligned} \vec{n}(\bar{r}, \mu, \underline{d}, \mathbb{T}) \\ \vec{n}(\bar{r}, \mu, \underline{d}, 0) \\ \vec{n}_0(\bar{r}, \mu, \underline{d}) \\ \vec{n}_F^+(\bar{r}, \mu, \underline{d}, 0) \\ \vec{n}_F^+(\bar{r}, \mu, \underline{d}) \end{aligned}} \right\} \dots \text{ (VI.3.4) }$$

Ahora, utilizando, los desarrollos propuesto (VI.3.1) y (VI.3.2) y -
 utilizando la relación de biortonormalidad (VI.2.3B') con

$$\vec{n}_F^+(\bar{r}, \mu, \underline{d}) = \sum_{j=0}^{\infty} C_j^+ \vec{\Phi}_j^+$$

$$\left. \vphantom{\sum_{j=0}^{\infty} C_j^+ \vec{\Phi}_j^+} \right\} \dots \text{ (VI.3.5) }$$

$$\vec{n}_0(\bar{r}, \mu, \underline{d}) = \sum_{\ell=0}^{\infty} D_{\ell} \vec{\Phi}_{\ell}$$

y

$$\left. \begin{aligned} \vec{S}(\vec{r}, \mu, \underline{L}, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} S_n(t) \vec{\Phi}_n \\ \vec{S}^+(\vec{r}, \mu, \underline{L}, t) &= \sum_{m=0}^{\infty} S_m^+(t) \vec{\Phi}_m^+ \end{aligned} \right\} \dots (\text{VI.3.6})$$

la funcional queda ahora:

$$\begin{aligned} F[P_n, P_n^+] &= \int_0^T dt \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ -P_n^+ \dot{P}_n \langle \vec{\Phi}_n^+ | \vec{\Phi}_n \rangle \right. \\ &+ P_n^+ P_n \langle \vec{\Phi}_n^+ | \hat{K} \vec{\Phi}_n \rangle + P_n^+ S_n(t) \langle \vec{\Phi}_n^+ | \vec{\Phi}_n \rangle \\ &\left. + P_n S_n^+(t) \langle \vec{\Phi}_n^+ | \vec{\Phi}_n \rangle \right\} \\ &+ \sum_{m=0}^{\infty} C_m^+ P_m(T) \langle \vec{\Phi}_m^+ | \vec{\Phi}_m \rangle + \sum_{m=0}^{\infty} D_m P_m^+(0) \langle \vec{\Phi}_m^+ | \vec{\Phi}_m \rangle \\ &- \sum_{m=0}^{\infty} P_m^+(0) P_m(0) \langle \vec{\Phi}_m^+ | \vec{\Phi}_m \rangle \end{aligned}$$

... (VI.3.7)

Encontremos ahora, las ecuaciones de Euler - Lagrange tomando la primera variación de F igual a cero.

Es decir:

$$\begin{aligned} \delta F = 0 = & \int_0^{\pi} dt \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ [-\dot{P}_n(t) \langle \vec{\Phi}_n^+ | \vec{\Phi}_n \rangle \right. \\ & + P_n(t) \langle \vec{\Phi}_n^+ | \hat{K} \vec{\Phi}_n \rangle + S_n(t) \langle \vec{\Phi}_n^+ | \vec{\Phi}_n \rangle] \delta P_n^+ \\ & + [\dot{P}_n^+(t) \langle \vec{\Phi}_n^+ | \vec{\Phi}_n \rangle + P_n^+(t) \langle \vec{\Phi}_n^+ | \hat{K} \vec{\Phi}_n \rangle \\ & \left. + S_n^+(t) \langle \vec{\Phi}_n^+ | \vec{\Phi}_n \rangle] \delta P_n \right\} - \sum_{m=0}^{\infty} \delta_{P_m} \int_0^{\pi} \langle \vec{\Phi}_m^+ | \vec{\Phi}_m \rangle \frac{d}{dt} (P_m^+ P_m) dt \\ & + \sum_{n=0}^{\infty} C_n^+ \langle \vec{\Phi}_n^+ | \vec{\Phi}_n \rangle \delta P_n(\pi) - \sum_{n=0}^{\infty} P_n^+(0) \langle \vec{\Phi}_n^+ | \vec{\Phi}_n \rangle \delta P_n(0) \\ & + \sum_{n=0}^{\infty} D_n \langle \vec{\Phi}_n^+ | \vec{\Phi}_n \rangle \delta P_n^+(0) \\ & - \sum_{n=0}^{\infty} P_n(0) \langle \vec{\Phi}_n^+ | \vec{\Phi}_n \rangle \delta P_n^+(0) \quad \dots \quad (\text{VI.3.8}) \end{aligned}$$

Ah..., $\delta_{P_n(t)} \int_0^{\pi} \langle \vec{\Phi}_n^+ | \vec{\Phi}_n \rangle \frac{d}{dt} (P_n^+ P_n) dt$ significa la variación con respecto a $P_n(t)$ de la integral; así pues:

$$\int_0^{\pi} \left[\frac{d}{dt} (P_n^+ P_n) \right] \langle \vec{\Phi}_n^+ | \vec{\Phi}_n \rangle dt = \langle \vec{\Phi}_n^+ | \vec{\Phi}_n \rangle [P_n^+(\pi) P_n(\pi) - P_n^+(0) P_n(0)]$$

$$\delta_{P_n(t)} \int_0^{\pi} \left[\frac{d}{dt} (P_n^+ P_n) \right] \langle \vec{\Phi}_n^+ | \vec{\Phi}_n \rangle dt = \langle \vec{\Phi}_n^+ | \vec{\Phi}_n \rangle [\delta P_n^+(\pi) P_n(\pi) - P_n^+(0) \delta P_n(0)]$$

y sustituyendo en (VI.3.8) obtenemos

$$\begin{aligned}
 & \int_0^T dt \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ [-P_n(t) \langle \vec{\Phi}_n^+ | \vec{\Phi}_n \rangle + P_n(t) \langle \vec{\Phi}_n^+ | \hat{K} \vec{\Phi}_n \rangle \right. \\
 & + S_n(t) \langle \vec{\Phi}_n^+ | \vec{\Phi}_n \rangle \left. \right\} \delta P_n^+ + [P_n^+(t) \langle \vec{\Phi}_n^+ | \vec{\Phi}_n \rangle \\
 & + P_n^+(t) \langle \vec{\Phi}_n^+ | \hat{K} \vec{\Phi}_n \rangle + S_n^+(t) \langle \vec{\Phi}_n^+ | \vec{\Phi}_n \rangle] \delta P_n \\
 & + \sum_{n=0}^{\infty} [C_n^+ - P_n^+(\tau)] \langle \vec{\Phi}_n^+ | \vec{\Phi}_n \rangle \delta P_n(\tau) \\
 & + \sum_{n=0}^{\infty} [P_n^+(0) - P_n^+(0)] \langle \vec{\Phi}_n^+ | \vec{\Phi}_n \rangle \delta P_n(0) \\
 & + \sum_{n=0}^{\infty} [D_n - P_n(0)] \langle \vec{\Phi}_n^+ | \vec{\Phi}_n \rangle \delta P_n^+(0) = 0 \quad \dots \quad (\text{VI.3.9})
 \end{aligned}$$

lo cual implica que para variaciones arbitrarias de P_n y P_n^+ , sus coeficientes deben ser cero, es decir,

$$\left. \begin{aligned}
 -P_n(t) \langle \vec{\Phi}_n^+ | \vec{\Phi}_n \rangle + P_n(t) \langle \vec{\Phi}_n^+ | \hat{K} \vec{\Phi}_n \rangle + S_n(t) \langle \vec{\Phi}_n^+ | \vec{\Phi}_n \rangle &= 0 \\
 P_n^+(t) \langle \vec{\Phi}_n^+ | \vec{\Phi}_n \rangle + P_n^+(t) \langle \vec{\Phi}_n^+ | \hat{K} \vec{\Phi}_n \rangle + S_n^+(t) \langle \vec{\Phi}_n^+ | \vec{\Phi}_n \rangle &= 0
 \end{aligned} \right\} (\text{VI.3.10})$$

con las condiciones de contorno temporales

$$\left. \begin{aligned}
 C_n^+ &= P_n^+(\tau) \\
 D_n &= P_n(0)
 \end{aligned} \right\} \dots (\text{VI.3.11})$$

y despejando los derivados temporales en (VI. 3.10) obtendremos:

$$\dot{P}_n(t) = \frac{\langle \vec{\Phi}_n^+ | \hat{K} \vec{\Phi}_n \rangle}{\langle \vec{\Phi}_n^+ | \vec{\Phi}_n \rangle} P_n(t) + S_n(t) \quad \dots (\text{VI. 3.12})$$

$$-\dot{P}_n^+(t) = \frac{\langle \vec{\Phi}_n^+ | \hat{K} \vec{\Phi}_n \rangle}{\langle \vec{\Phi}_n^+ | \vec{\Phi}_n \rangle} P_n^+(t) + S_n^+(t) \quad \dots (\text{VI. 3.13})$$

que son las ecuaciones diferenciales que rigen el comportamiento --
temporal de los coeficientes del desarrollo en eigenventores.

Si utilizamos la relación de biortonormalidad y el hecho de que,

$$\frac{\langle \vec{\Phi}_n^+ | \hat{K} \vec{\Phi}_n \rangle}{\langle \vec{\Phi}_n^+ | \vec{\Phi}_n \rangle} = \omega_n \quad \dots (\text{VI. 3.14})$$

obtendremos:

$$\dot{P}_n(t) = \omega_n P_n(t) + S_n(t) \quad \dots (\text{VI. 3.15})$$

y

$$-\dot{P}_n^+(t) = \omega_n P_n^+(t) + S_n^+(t) \quad \dots \text{(VI.3.16)}$$

Cuyas soluciones para el caso de fuentes externas directas y adjuntas-
constantes, son.

$$P_n(t) = P_n(0) e^{\omega_n t} + \frac{S_n}{\omega_n} (e^{\omega_n t} - 1) \quad \dots \text{(VI.3.7)}$$

$$P_n^+(t) = P_n^+(\pi) e^{\omega_n(\pi-t)} + \frac{S_n^+}{\omega_n} (e^{\omega_n(\pi-t)} - 1) \quad \dots \text{(VI.3.8)}$$

Donde hemos tomado en cuenta que el problema descrito por (VI.3.15) -
es un problema de valor inicial y el descrito por la ecuación - -
(VI.3.16) es un problema de valor final, como se discutió en el capítu
lo IV.

En las próximas secciones nos dedicaremos a expresar la ecuación (VI.
3.14) en diferentes formas mediante la definición de algunos paráme-
tros.

VI.4. Reactividad y Factor de Multiplicación

Siguiendo la definición de reactividad dada anteriormente (ecuación -
(V.4.1)) podemos definir coeficientes de reactividad que excitan los di

ferentes "modos", (7).

Reactividad en el modo n.-

Es el cociente entre la razón de producción neta de importancia y la razón de producción de importancia en el n-ésimo modo.

Es decir

$$\rho_n = \frac{P_n^+(t)P_n(t) \left\{ \langle N_n^+ | \hat{H} N_n \rangle + \sum_{i=1}^G \langle C_{in}^+ | \hat{M}_i N_n \rangle + \sum_{i=1}^G \lambda_i \langle N_n^+ - C_{in}^+ | C_{in} \rangle \right\}}{P_n^+(t)P_n(t) \left\{ \langle N_n^+ | \hat{M}_0 N_n \rangle + \sum_{i=1}^G \langle C_{in}^+ | \hat{M}_i N_n \rangle \right\}}$$

$$\rho_n = \frac{\langle N_n^+ | \hat{H} N_n \rangle + \sum_{i=1}^G \langle C_{in}^+ | \hat{M}_i N_n \rangle + \sum_{i=1}^G \lambda_i \langle N_n^+ - C_{in}^+ | C_{in} \rangle}{\langle N_n^+ | \hat{M}_0 N_n \rangle + \sum_{i=1}^G \langle C_{in}^+ | \hat{M}_i N_n \rangle} \dots (\text{VI.4.1})$$

Esta expresión puede modificarse si descomponemos el operador \hat{K} en dos partes, una que llamaremos de producción y otra que llamaremos de destrucción, basándonos en la discusión de la sección II.3. Es decir

$$\hat{K} = \hat{P} - \hat{D} \dots (\text{VI.4.2})$$

donde

\hat{P} = operador de producción

y

\hat{D} = operador de destrucción.

Ahor (VI.2.30; y (II.3.18):

$$\hat{K} = \begin{pmatrix} \hat{A} & \lambda_1 & \dots & \lambda_6 \\ \hat{M}_1 & -\lambda_1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ \hat{M}_6 & 0 & & -\lambda_6 \end{pmatrix}$$

y $\hat{H} = \hat{M}_0 + \hat{L}$

Entonces

$$\hat{K} = \begin{pmatrix} \hat{M}_0 & 0 & \dots & 0 \\ \hat{M}_1 & 0 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ \hat{M}_6 & 0 & & 0 \\ \dots & & & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -\hat{L} & -\lambda_1 & \dots & -\lambda_6 \\ 0 & \lambda_1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_6 \end{pmatrix}$$

... (VI.4.3)

por lo que

$$\hat{P} \equiv \begin{pmatrix} \hat{M}_0 & 0 & \dots & 0 \\ \hat{M}_1 & 0 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ \hat{M}_6 & 0 & & 0 \end{pmatrix} \quad \dots \text{(VI.4.4)}$$

y

$$\hat{D} \equiv \begin{pmatrix} -\hat{L} & -\lambda_1 & \dots & -\lambda_6 \\ 0 & \lambda_1 & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & & \lambda_6 \end{pmatrix} \quad \dots \text{(VI.4.5)}$$

Utilizando estas definiciones, la expresión (VI.4.1) queda como:

$$\rho_n \equiv \frac{\langle \vec{\Phi}_n^+ | \hat{K} \vec{\Phi}_n \rangle}{\langle \vec{\Phi}_n^+ | \hat{P} \vec{\Phi}_n \rangle} \quad \dots \text{(VI.4.6)}$$

Usando ésta definición, la ecuación (VI.3.14), es decir

$$\omega_n = \frac{\langle \vec{\Phi}_n^+ | \hat{K} \vec{\Phi}_n \rangle}{\langle \vec{\Phi}_n^+ | \vec{\Phi}_n \rangle}$$

se puede expresar como:

$$\rho_n = \frac{\omega_n \langle \vec{\Phi}_n^+ | \vec{\Phi}_n \rangle}{\langle \vec{\Phi}_n^+ | \hat{H} \vec{\Phi}_n \rangle} \quad \dots \text{(VI.4.7)}$$

Ahora, se definimos, el factor de multiplicación del n-ésimo modo como

$$K_n \equiv \frac{1}{1 - \rho_n} \quad \dots \text{(VI.4.8)}$$

y utilizando la definición de ρ_n , dada en (VI.4.6), tenemos que

$$K_n \equiv \frac{\langle \vec{\Phi}_n^+ | \hat{H} \vec{\Phi}_n \rangle}{\langle \vec{\Phi}_n^+ | \hat{H} \vec{\Phi}_n \rangle} \quad \dots \text{(VI.4.9)}$$

Es decir, K_n es el cociente entre la razón de producción de importancia y la razón de destrucción de importancia en el n -ésimo modo, lo cual concuerda con la definición dada en la ecuación (V.5.2).

Con esta definición de factor de multiplicación la ecuación (VI.3.14) puede ponerse como:

$$K_n = 1 + \frac{\langle \vec{\Phi}_n^+ | \vec{\Phi}_n \rangle}{\langle \vec{\Phi}_n^+ | \hat{D} \vec{\Phi}_n \rangle} \omega_n \quad \dots \text{(VI.4.10)}$$

Subrayamos que las ecuaciones (VI.4.7) y (VI.4.10) son formas diferentes de expresar la ecuación (VI.3.14); cabe hacer notar que en la primera de estas ecuaciones solo está involucrada el operador de destrucción y en la segunda solo el de destrucción.

VI. 5. ECUACIONES DE LA HORA INVERSA

El objetivo que perseguimos aquí es expresar las ecuaciones (VI.4.7) y (VI.4.10) de una manera en la cual no aparezcan explícitamente los factores de Producción, β_i de destrucción.

Para lograr ésto definiremos el "tiempo de generación generalizado - en el n-ésimo modo " como el cociente entre la importancia de neutrones y precursores y la razón de producción de importancia, en el n-ésimo modo.

Si el "tiempo de generación generalizado " lo denotamos por $\rho_n^{(g)}$ se tiene que

$$\rho_n^{(g)} \equiv \frac{\langle \vec{\Phi}_n^+ | \vec{\Phi}_n \rangle}{\langle \vec{\Phi}_n^+ | \hat{H} \vec{\Phi}_n \rangle} \dots (\text{VI} . 5 . 1)$$

Definiremos también el "tiempo de vida generalizado " como la importancia de neutrones y precursores en el m-ésimo modo entre la razón de destrucción de importancia en ese modo.

Sea el "tiempo de vida generalizado " definido por

$$L_n^{(g)}$$

por lo que

$$L_n^{(g)} \equiv \frac{\langle \vec{\Phi}_n^+ | \vec{\Phi}_n \rangle}{\langle \vec{\Phi}_n^+ | \hat{D} \vec{\Phi}_n \rangle} \dots (\text{VI} . 5 . 2)$$

con estas definiciones, las ecuaciones (VI.4.7) y (VI.4.10) quedan como :

$$\rho_n = \omega_n \lambda_n^{(g)} \dots (\text{VI.5.3})$$

y

$$K_n = 1 + \omega_n L_n^{(g)} \dots (\text{VI.5.4})$$

Dado que en la práctica solo la población de neutrones es un observable, es más conveniente expresar estas ecuaciones en términos de $N_n(\bar{r}, \mu, \underline{\Omega})$ es decir, sólomente del primer término del eigen vector

$$\vec{\Phi}_n(\bar{r}, \mu, \underline{\Omega})$$

Para realizar esto utilizamos la ecuación de eigenvalores (VI.2.36) y con la definición de \hat{K} obtenemos

$$C_{in} = \frac{\hat{M}_i N_n}{\lambda_i + \omega_n} \dots (\text{VI.5.5})$$

Definamos el "tiempo de generación de los neutrones en el n-ésimo modo como

$$\lambda_n \equiv \lambda_n^{(g)} \frac{\langle N_n^+ | N_n \rangle}{\langle \vec{\Phi}_n^+ | \vec{\Phi}_n \rangle} \dots (\text{VI.5.6})$$

es decir

$$\lambda_n \equiv \frac{\langle N_n^+ | N_n \rangle}{\langle \vec{\Phi}_n^+ | \hat{P} \vec{\Phi}_n \rangle} \dots (\text{VI.5.7})$$

y el "tiempo de vida de los neutrones" como

$$L_n = L_n^{(g)} \frac{\langle N_n^+ | N_n \rangle}{\langle \vec{\Phi}_n^+ | \vec{\Phi}_n \rangle} \quad \dots \text{(VI.5.8)}$$

o sea

$$L_n \equiv \frac{\langle N_n^+ | N_n \rangle}{\langle \vec{\Phi}_n^+ | \hat{D} \vec{\Phi}_n \rangle} \quad \dots \text{(VI.5.9)}$$

Nótese que el tiempo de generación de los neutrones en el n-ésimo modo tiene una estrecha relación con la definición de tiempo de generación de los neutrones, dada en la ec. (V.4.2).

Definamos la "fracción efectiva de neutrones retardados del i-ésimo grupo en el n-ésimo modo", siguiendo (V.4.3), como :

$$\beta_{ineff} \equiv \frac{\langle C_{in}^+ | \hat{M}_i N_n \rangle}{\langle \vec{\Phi}_n^+ | \hat{D} \vec{\Phi}_n \rangle} \quad \dots \text{(VI.5.10)}$$

Y es el cociente entre la razón de la producción de importancia debida a los precursores del i-ésimo grupo en el n-ésimo modo y la razón de producción de importancia en el n-ésimo modo.

Ahora, despejando en (VI.5.8) $L_n^{(g)}$, tenemos

$$L_n^{(g)} = L_n \frac{\langle \vec{\Phi}_n^+ | \vec{\Phi}_n \rangle}{\langle N_n^+ | N_n \rangle}$$

y desarrollando

$$\langle \vec{\Phi}_n^+ | \vec{\Phi}_n \rangle = \langle N_n^+ | N_n \rangle + \sum_{i=1}^G \langle C_{in}^+ | C_{in} \rangle$$

Por lo que

$$L_n^{(g)} = L_n \left[1 + \sum_{i=1}^G \frac{\langle C_{in}^+ | C_{in} \rangle}{\langle N_n^+ | N_n \rangle} \right] \quad \dots \text{(VI.5.11)}$$

De manera análoga $\lambda_n^{(g)}$ puede despejarse en (VI.5.6) como

$$\lambda_n^{(g)} = \lambda_n \left[1 + \sum_{i=1}^G \frac{\langle C_{in}^+ | C_{in} \rangle}{\langle N_n^+ | N_n \rangle} \right] \dots \text{(VI.5.12)}$$

así sustituyendo (VI.5.12) en (VI.5.3) obtenemos

$$\rho_n = \omega_n \lambda_n + \sum_{i=1}^G \omega_n \lambda_n \frac{\langle C_{in}^+ | C_{in} \rangle}{\langle N_n^+ | N_n \rangle}$$

Utilizando (VI.5.7) para λ_n y sustituyendo sólo en el 2º término de la ecuación anterior:

$$\rho_n = \omega_n \lambda_n + \sum_{i=1}^G \omega_n \frac{\langle C_{in}^+ | C_{in} \rangle}{\langle \vec{\Phi}_n^+ | \hat{P} \vec{\Phi}_n \rangle}$$

Utilizando ahora (VI.5.5)

$$\rho_n = \omega_n \lambda_n + \sum_{i=1}^G \frac{\omega_n}{\lambda_i + \omega_n} \frac{\langle C_{in}^+ | \hat{M}_i N_n \rangle}{\langle \vec{\Phi}_n^+ | \hat{P} \vec{\Phi}_n \rangle}$$

y usando la definición (VI.5.10) obtenemos

$$\rho_n = \omega_n \lambda_n + \sum_{i=1}^G \frac{\omega_n}{\lambda_i + \omega_n} \beta_{ineff} \dots \text{(VI.5.13)}$$

Ahora sustituyamos (VI.5.II) en (VI.5.4) y tenemos:

$$K_n = 1 + \omega_n L_n \left[1 + \sum_{i=1}^G \frac{\langle C_{in}^+ | C_{in} \rangle}{\langle N_n^+ | N_n \rangle} \right]$$

De nuevo, sustituyendo C_{in} por la expresión (VI.5.5):

$$K_n = 1 + \omega_n L_n + \omega_n L_n \sum_{i=1}^G \frac{1}{\lambda_i + \omega_n} \frac{\langle C_{in}^+ | \hat{M}_i N_n \rangle}{\langle N_n^+ | N_n \rangle}$$

Sustituyendo L_n , dado en (VI.5.9), en el tercer término del segundo miembro:

$$K_n = 1 + \omega_n L_n + \omega_n \sum_{i=1}^6 \frac{1}{\lambda_i + \omega_n} \frac{\langle C_{in}^+ | \hat{M}_i N_n \rangle}{\langle \hat{\Phi}_n^+ | \hat{D} \hat{\Phi}_n \rangle}$$

y multiplicando y dividiendo el tercer término por $\langle \hat{\Phi}_n^+ | \hat{P} \hat{\Phi}_n \rangle$:

$$K_n = 1 + \omega_n L_n + \omega_n \sum_{i=1}^6 \frac{1}{\lambda_i + \omega_n} \frac{\langle \hat{\Phi}_n^+ | \hat{P} \hat{\Phi}_n \rangle}{\langle \hat{\Phi}_n^+ | \hat{D} \hat{\Phi}_n \rangle} \frac{\langle C_{in}^+ | \hat{M}_i N_n \rangle}{\langle \hat{\Phi}_n^+ | \hat{P} \hat{\Phi}_n \rangle}$$

Usando las definiciones de β_{ineff} y K_n tenemos:

$$K_n = 1 + \omega_n L_n + \omega_n K_n \sum_{i=1}^6 \frac{\beta_{ineff}}{\lambda_i + \omega_n} \dots \text{(VI.5.14)}$$

Ahora resumiremos lo que hemos hecho:

Partimos de la ecuación

$$\frac{\langle \hat{\Phi}_n^+ | \hat{K} \hat{\Phi}_n \rangle}{\langle \hat{\Phi}_n^+ | \hat{\Phi}_n \rangle} = \omega_n$$

y mediante la definición de $\lambda_n, L_n, \rho_n, K_n$ y

β_{ineff} la pusimos en dos formas diferentes pero equivalentes

$$\rho_n = \omega_n \lambda_n + \omega_n \sum_{i=1}^6 \frac{\beta_{ineff}}{\lambda_i + \omega_n} \dots \text{(VI.5.13)}$$

y

$$K_n = 1 + \omega_n L_n + \omega_n K_n \sum_{i=1}^6 \frac{\beta_{ineff}}{\lambda_i + \omega_n} \dots \text{(VI.5.14)}$$

Su lazo de unión es la relación

$$L_n = K_n \lambda_n \dots \text{(VI.5.15)}$$

Las ecuaciones (VI.5.13) y (VI.5.14) son llamadas las "ecuaciones de la Hora Inversa". Cada una proporciona una relación entre K_n - o' β_n y el eigenvalor cinético ω_n el cual en principio puede ser medible.

La ecuación (VI.5.14) puede ponerse en una forma más conocida. Sumando $\omega_n L_n \cdot K_n$ en ambos miembros de esta ecuación tenemos :

$$K_n(1 + \omega_n L_n) - (1 - \omega_n L_n) = K_n \left\{ \omega_n L_n + \omega_n \sum_{i=1}^6 \frac{\beta_{ineff}}{\lambda_i + \omega_n} \right\}$$

$$K_n - 1 = K_n \left\{ \frac{\omega_n L_n}{1 + \omega_n L_n} + \frac{\omega_n}{1 + \omega_n L_n} \sum_{i=1}^6 \frac{\beta_{ineff}}{\lambda_i + \omega_n} \right\}$$

y utilizando la definición de reactividad : $\rho_n = \frac{K_n - 1}{K_n}$, se tiene :

$$\rho_n = \frac{\omega_n L_n}{1 + \omega_n L_n} + \frac{\omega_n}{1 + \omega_n L_n} \sum_{i=1}^6 \frac{\beta_{ineff}}{\lambda_i + \omega_n} \quad \dots \text{(VI.5.16)}$$

la cual tiene idéntica forma a la dada en (2).

La ecuación (VI.5.16) es de importancia fundamental en el control seguro de un reactor nuclear, debido a que nos permite predecir, dada una reactividad el comportamiento temporal de éste en base a parámetros relacionados con las características del reactor, como son la fracción efectiva de neutrones retardados y el tiempo de vida de los neutrones, los cuales pueden ser determinados experimentalmente.

Mediante el análisis de ésta ecuación es posible definir como veremos, el llamado período estable de un reactor, el cual, debido a la presencia de neutrones retardados, resulta ser lo suficientemente grande para

poder controlar en forma segura un reactor.

Veamos ahora la importancia de la ecuación (VI.5.16) dentro del formalismo de eigenvectores

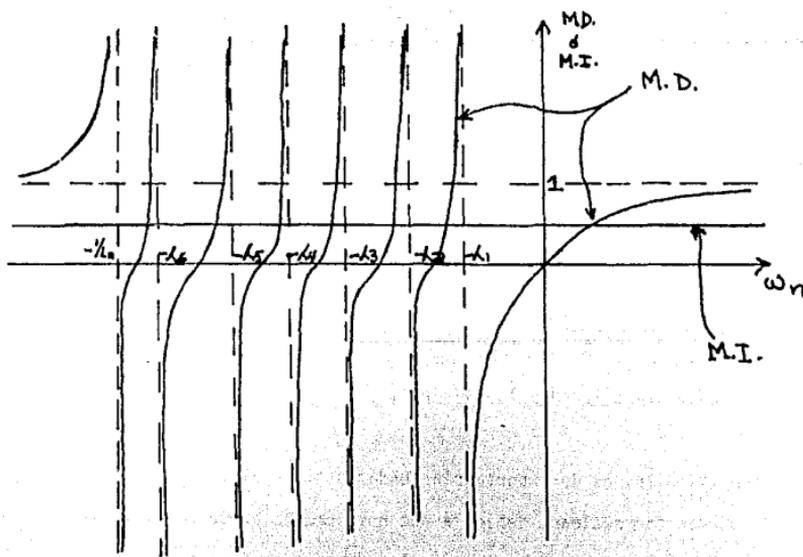


FIGURA VI.1 GRÁFICA DEL MIEMBRO DERECHO (M.D.) Y DEL MIEMBRO IZQUIERDO (M.I.) DE LA ECUACION (VI.5.16).

La importancia de los eigenvectores cinéticos ω_n radica en que ellos gobiernan el comportamiento temporal de los coeficientes del desarrollo en eigenvectores del vector de densidad de población expresado por (VI.2.27) y por lo tanto sus valores nos permiten saber si el reactor es crítico, subcrítico ó supercrítico. Esto lo discutiremos un poco más adelante.

Observando la figura VI.1, se puede ver que para cada valor de ρ_n , λ_n , L_n y β_{ineff} existen 7 valores posibles de ω_n . Ahora si recordamos las definiciones de ρ_n , λ_n , L_n y β_{ineff} dadas en (VI.4.6), (VI.5.7), (VI.5.8) y (VI.5.10) se ve que para calcular éstas cantidades, es necesario conocer tanto N_n , como N_n^+ , así como ω_n ; suponiendo que se conocen N_n , N_n^+ y ω_n , podemos calcular entonces dichos parámetros. Así pues al resolver para ω_n la ecuación de la HORA INVERSA, de los 7 valores posibles denotados por ω_{nj} ($j=0, \dots, 6$), solo uno es el completamente aceptado, aquel con el cual se calcularon ρ_n , λ_n , L_n y β_{ineff} .

Los restantes valores ω_{nj} también son válidos e importantes, lo discutiremos basándonos en el análisis de la ecuación de eigenvalores (VI.2.36).

De la ecuación (VI.2.3a), usando la definición (VI.2.30), tenemos que

$$C_{in}(\rho, \mu, \underline{\Omega}) = \frac{\hat{M}_i N_n}{k_i + \omega_n}$$

y entonces la ecuación de eigenvectores se reduce a

$$\hat{H} N_n - \omega_n N_n + \sum_{i=1}^6 \frac{\lambda_i \hat{M}_i N_n}{\lambda_i + \omega_n} = 0 \quad \dots (\text{VI.5.17})$$

Esta es una ecuación integro diferencial la cual debe ser resuelta, para N_n , y ω_n .

La solución rigurosa de ésta ecuación dentro del formulismo de la Teoría de Transporte, es prácticamente imposible, pero dentro de la aproximación de Difusión es posible resolverla analíticamente en casos sencillos, como por ejemplo, reactores homogéneos esféricos, cilíndricos, en forma de loza y de paralelepípedo. No entraremos más en detalle en éste punto, Solo nos concretaremos a analizar la ecuación (VI.5.17) en una forma un poco superficial.

Dado que ω_n no depende de los parámetros $\mu, \bar{r}, \underline{\Omega}$, si integramos a todo el volumen del espacio fase que ocupa el sistema y definiendo

$$A_1 \equiv \iiint d^3\bar{r} d\mu d\underline{\Omega} \hat{H} N_n \quad \dots (\text{VI.5.18})$$

$$A_2 \equiv \iiint d^3\bar{r} d\mu d\underline{\Omega} N_n \quad \dots (\text{VI.5.19})$$

$$A_{3i} \equiv \iiint d^3\bar{r} d\mu d\underline{\Omega} \hat{M}_i N_n \quad \dots (\text{VI.5.20})$$

obtenemos la ecuación

$$A_1 - \omega_n A_2 + \sum_{i=1}^6 \frac{\lambda_i A_{3i}}{\lambda_i + \omega_n} = 0 \quad \dots (\text{VI.5.21})$$

La cual es una ecuación de séptimo grado, que debe ser resuelta para valores dados de A_1 , A_2 , y A_3 ; , por lo tanto, existen 7 valores de ω_n que la satisfacen y serán denotados por ω_{nE} , ($E=0, \dots, 6$). La gráfica de ésta ecuación está dada en la figura VI.2.

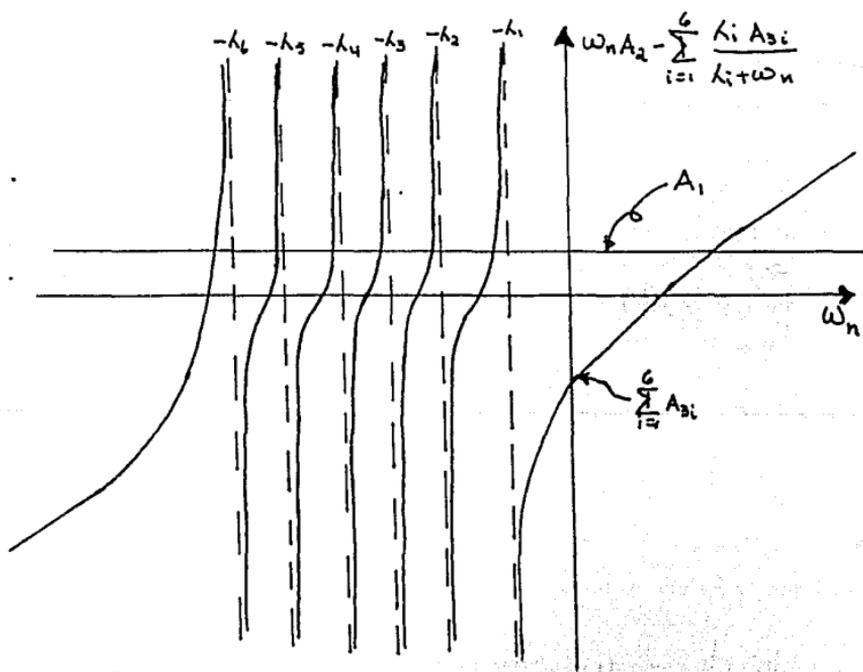


FIGURA VI.2.

De ésta gráfica se puede ver que los valores ω_{nE} , están situados alrededor de los constantes de decaimiento $-k_i$, (7), (8).

y la ecuación (VI.5.5), podemos concluir que para cada función $N_n(\vec{r}, \mu, \underline{\Omega})$ le corresponden siete funciones expresadas por :

$$C_{i n \epsilon}(\vec{r}, \mu, \underline{\Omega}) = \frac{\hat{M}_i N_n(\vec{r}, \mu, \underline{\Omega})}{\lambda_i + \omega_{n \epsilon}} \quad \dots (\text{VI.5.22})$$

De manera que si construimos el eigenvector correspondiente a cada pareja de subíndices n y ϵ , tenemos

$$\vec{\phi}_{n \epsilon}(\vec{r}, \mu, \underline{\Omega}) = \begin{pmatrix} N_n \\ C_{1 n \epsilon} \\ \vdots \\ C_{6 n \epsilon} \end{pmatrix} \quad \dots (\text{VI.5.23})$$

Ahora recordemos, como ya se demostró en la sección VI.2, que para cada ecuación de eigenvalores.

$$\hat{K} \vec{\phi}_{n \epsilon} = \omega_{n \epsilon} \vec{\phi}_{n \epsilon} \quad \dots (\text{VI.5.24})$$

existe

$$\hat{K}^+ \vec{\phi}_{n \epsilon}^+ = \omega_{n \epsilon}^* \vec{\phi}_{n \epsilon}^+ \quad \dots (\text{VI.5.25})$$

Con la propiedad de que

$$\langle \vec{\Phi}_{n\epsilon_1}^\dagger | \vec{\Phi}_{m\epsilon_2} \rangle = \delta_{mn} \delta_{\epsilon_1\epsilon_2} \quad (\text{VI. 5.26})$$

Así pues, se puede concluir que los eigenvectores $\vec{\Phi}_{n\epsilon}$ existen en conjuntos de 7, los cuales tienen el mismo primer elemento $N_n(\bar{r}, \mu, \underline{A})$ y difieren en los demás elementos debido a los valores de $\omega_{n\epsilon}$.

Podemos entonces suponer que los elementos $C_{i n \epsilon}$, para n fija, sólo difieren ligeramente entre sí.

Por lo tanto, regresando al tema de la ecuación de la Hora Inversa, se puede pensar que los valores calculados de P_n, λ_n, L_n y $\beta_{i n \epsilon \text{eff}}$ usando cualquier eigenvector del conjunto

$\{\vec{\Phi}_{n\epsilon}, \epsilon=0, \dots, 6\}$ con su valor correspondiente $\omega_{n\epsilon}$, serán aproximadamente iguales. Así pues, al sustituir los valores P_n, λ_n, L_n y $\beta_{i n \epsilon \text{eff}}$ en la ecuación de la Hora Inversa, se obtienen como soluciones 7 valores de ω_n los cuales son aproximadamente los eigenvalores correspondientes al conjunto $\{\vec{\Phi}_{n\epsilon}\}$. Entonces, la utilidad de la ecuación de la Hora Inversa es obtener en forma aproximada los eigenvalores $\omega_{n\epsilon}$ correspondientes al conjunto $\{\vec{\Phi}_{n\epsilon}\}$.

De todo el conjunto de eigenvalores cinéticos $\omega_n e$, existirá uno el cual estará situado en la gráfica VI.1 más a la derecha que todos los demás, éste será llamado el eigenvalor fundamental y es pues algebraicamente mayor que todos los demás. De manera que el coeficiente correspondiente del desarrollo (expresado por (VI.3.1)) tendrá un comportamiento de dominante, en relación a los demás coeficientes y dado que la población de neutrones y precursores no puede ser negativa, su eigenvector correspondiente, el cual es llamado también eigenvector fundamental, debe cumplir con la condición de que sus elementos sean no negativos. Los demás eigenvectores pueden tener elementos cuyos valores sean negativos.

Entonces si el eigenvalor correspondiente al eigenvector fundamental, es decir, el eigenvalor fundamental es positivo, el reactor es supercrítico, si es cero el reactor es crítico y si es menor que cero, subcrítico

Al inverso del eigenvalor fundamental se le conoce como el periodo estable del reactor y es el tiempo necesario para que la población aumente ó disminuya en un factor de e , (1), (2).

Este periodo gobierna el comportamiento fundamental, también llamado asintótico, del reactor si se deja transcurrir un tiempo suficientemente grande para que los efectos debidos a los demás eigenvalores decaigan.

Cabe hacer notar que el eigenvalor fundamental depende de la fracción de neutrones retardados.

La existencia de neutrones retardados nos facilita el manejo seguro de un reactor nuclear, puesto que si $\beta_{ineff} = 0$ para toda i , el eigenvalor correspondiente, será mayor que el eigenvalor correspondiente a $\beta_{ineff} \neq 0$.

Señalemos ahora dos características que son directamente observables de la gráfica VI.1. Estas son : a) que de los 7 eigenvalores obtenidos de la ecuación de la Hora Inversa, seis de ellos están íntimamente relacionados con las constantes de decaimiento de los precursores de neutrones retardados y debido a ello esos eigenvalores son llamados eigenvalores retardados; el eigenvalor restante es llamado eigenvalor inmediato;

b) que incluso para $\rho_n \rightarrow -\infty$, $\omega_n \rightarrow -\lambda_1$ y esto tiene la importante consecuencia de que la población de neutrones no puede decaer más rápidamente que $e^{-\lambda_1 t}$.

Por último volviendo a la ecuación (VI.5.26) demostraremos que para n fija se cumple que

$$\langle \vec{\phi}_{n, \epsilon_1}^+ | \vec{\phi}_{n, \epsilon_2} \rangle = \delta_{\epsilon_1 \epsilon_2} \quad (\text{VI.5.27})$$

Así pues, usando (VI.5.17) tenemos que para la misma n se debe cumplir que

$$\left. \begin{aligned} \hat{H} N_n - \omega_n \epsilon_1 N_n + \sum_{i=1}^6 \frac{\lambda_i \hat{M}_i N_n}{\lambda_i + \omega_n \epsilon_1} &= 0 \\ \hat{H} N_n - \omega_n \epsilon_2 N_n + \sum_{i=1}^6 \frac{\lambda_i \hat{M}_i N_n}{\lambda_i + \omega_n \epsilon_2} &= 0 \end{aligned} \right\} (\text{VI.5.28})$$

restando éstas dos ecuaciones obtenemos

$$(\omega_{n\epsilon_1} - \omega_{n\epsilon_2}) N_n + (\omega_{n\epsilon_1} - \omega_{n\epsilon_2}) \sum_{i=1}^G \frac{\lambda_i \hat{M}_i N_n}{(\lambda_i + \omega_{n\epsilon_1})(\lambda_i + \omega_{n\epsilon_2})} = 0 \quad \dots (\text{VI.5.29})$$

Por lo tanto, si $\epsilon_1 = \epsilon_2$ esta relación se cumple automáticamente. Si $\epsilon_1 \neq \epsilon_2$

la relación (VI.5.29) se reduce a :

$$N_n + \sum_{i=1}^G \frac{\lambda_i \hat{M}_i N_n}{(\lambda_i + \omega_{n\epsilon_1})(\lambda_i + \omega_{n\epsilon_2})} = 0 \quad (\text{VI.5.30})$$

Así pues con éste resultado calculemos $\langle \vec{\Phi}_{n\epsilon_1}^+ | \vec{\Phi}_{n\epsilon_2} \rangle$,

como

$$\langle \vec{\Phi}_{n\epsilon_1}^+ | \vec{\Phi}_{n\epsilon_2} \rangle = \langle N_n^+ | N_n \rangle + \sum_{i=1}^G \langle C_{in\epsilon_1}^+ | C_{in\epsilon_2} \rangle \quad (\text{VI.5.31})$$

Ahora usando la ecuación de eigenvalores (VI.2.37) y la definición de

\hat{K}^+ , se tiene :

$$C_{i n \epsilon_1}^+ = \frac{\lambda_i N_n^+}{\lambda_i + \omega_{n \epsilon_1}^*} \dots (\text{VI.5.32})$$

y utilizando (VI.5.22) la ecuación (VI.5.31) queda como :

$$\langle \vec{\Phi}_{n \epsilon_1}^+ | \vec{\Phi}_{n \epsilon_2} \rangle = \langle N_n^+ | N_n \rangle + \sum_{i=1}^6 \left\langle \frac{\lambda_i N_n^+}{\lambda_i + \omega_{n \epsilon_1}^*} \middle| \frac{\hat{M}_i N_n}{\lambda_i + \omega_{n \epsilon_2}} \right\rangle \dots (\text{VI.5.33})$$

pero como en el miembro izquierdo del producto escalar hay que sacar el complejo conjugado podemos pasar el factor $\frac{\lambda_i}{\lambda_i + \omega_{n \epsilon_1}^*}$ al miembro derecho como $\frac{\lambda_i}{\lambda_i + \omega_{n \epsilon_1}}$ con lo cual (VI.5.33) queda -

$$\langle \vec{\Phi}_{n \epsilon_1}^+ | \vec{\Phi}_{n \epsilon_2} \rangle = \langle N_n^+ | N_n \rangle + \sum_{i=1}^6 \left\langle N_n^+ \middle| \frac{\lambda_i \hat{M}_i N_n}{(\lambda_i + \omega_{n \epsilon_1})(\lambda_i + \omega_{n \epsilon_2})} \right\rangle \dots (\text{VI.5.34})$$

la cual puede ponerse como

$$\langle \vec{\Phi}_{n \epsilon_1}^+ | \vec{\Phi}_{n \epsilon_2} \rangle = \langle N_n^+ | N_n + \sum_{i=1}^6 \frac{\lambda_i \hat{M}_i N_n}{(\lambda_i + \omega_{n \epsilon_1})(\lambda_i + \omega_{n \epsilon_2})} \rangle \dots (\text{VI.5.35})$$

y usando la relación (VI.5.30) es obvio que

$$\langle \vec{\Phi}_{n \epsilon_1}^+ | \vec{\Phi}_{n \epsilon_2} \rangle = 0 \quad \text{si } \epsilon_1 \neq \epsilon_2$$

que es lo que queríamos demostrar.

Resumiendo, en éste capítulo hemos desarrollado las densidades - de neutrones y precursores junto con sus funciones de importancia en eigenvectores de dos operadores matriciales. Usando éstos - eigenvectores y definiendo ciertos parámetros se dedujo la llamada ecuación de la Hora Inversa, la cual juega un papel muy importante en la predicción del comportamiento temporal de un reactor-nuclear.

En el próximo capítulo se aplica el desarrollo en eigenvectores - se aplica el desarrollo en eigenvectores discutido en éste capítulo al análisis de algunos de los parámetros de las ecuaciones cinéticas puntuales, deducidas en el capítulo V.

CAPITULO VII

Aplicación del Desarrollo en Eigenvectores al análisis de los Parámetros en las ecuaciones cinéticas puntuales.

VII.1. Introducción

En éste capítulo se aplica el formalismo presentado en el capítulo anterior al análisis de los parámetros involucrados en las ecuaciones cinéticas puntuales, desarrolladas en el capítulo V.

Ahora, en la definición de éstos parámetros están involucrados las funciones adjuntas, las cuales satisfacen el conjunto de ecuaciones diferenciales dadas en el capítulo IV.

En éstas ecuaciones nosotros tenemos libertad para escoger si la fuente adjunta es cero ó si es diferente de cero.

Si escogemos que es diferente de cero, tenemos que imponer como condiciones temporales finales, que las densidades adjuntas sean cero.

Si escogemos que la fuente externa adjunta sea cero, podemos imponer una condición final para la función de importancia de la densidad de neutrones diferente de cero y la de los precursores igual a cero.

Trabajaremos con la fuente externa adjunta igual a cero, (los resultados son idénticos si trabajamos con la fuente adjunta diferente de cero),

Además, para efectos de simplicidad consideraremos que en el sistema no existen fuentes externas de neutrones. En la sección VII.3 se hace un comentario sobre la inclusión de fuentes externas de neutrones.

Recordando del capítulo anterior que los coeficientes de los eigen--
vectores, dados en (VI.3.1) en los cuales fue desarrollado el vector
de estado $\vec{n}(\bar{r}, \mu, \underline{R}, t)$, poseen un comportamiento
temporal para fuentes externas constantes dado por :

$$P_n(t) = P_n(0) e^{\omega_n t} + \frac{S_n}{\omega_n} [e^{\omega_n t} - 1] \quad \dots \text{(VII.1.1)}$$

y

$$P_n^+(t) = P_n^+(\tau) e^{\omega_n(\tau-t)} + \frac{S_n^+}{\omega_n} [e^{\omega_n(\tau-t)} - 1] \quad \dots \text{(VII.1.2)}$$

Para $S(\bar{r}, \mu, \underline{R}, t) = 0$ como lo exige la elección de
nuestro evento, y para $S(\bar{r}, \mu, \underline{R}, t) = 0$
tenemos

$$P_n(t) = P_n(0) e^{\omega_n t} \quad \dots \text{(VII.1.3)}$$

y

$$P_n^+(t) = P_n^+(\tau) e^{\omega_n(\tau-t)} \quad \dots \text{(VII.1.4)}$$

Donde esta solución es válida para $t \in [0, \infty)$.

Elijamos una expresión para las funciones de forma espacio-temporales usadas en las ecuaciones cinéticas puntuales. Para ello, recordando la discusión de la última sección del capítulo anterior, es claro que aunque los eigenvectores no están degenerados, éstos existen en conjuntos de 7 los cuales tienen el primer elemento igual.

Ahora, dado que en el eigenvector fundamental, está $N_0(\bar{r}, \mu, \underline{L})$, cuya característica es que debe ser positivo en todo el sistema y dado que

$$\eta(\bar{r}, \mu, \underline{L}, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^6 P_{nj}(t) N_n(\bar{r}, \mu, \underline{L}) \dots (\text{VII} . 1.5)$$

ó

$$\eta(\bar{r}, \mu, \underline{L}, t) = \left(\sum_{j=0}^6 P_{0j}(t) \right) N_0(\bar{r}, \mu, \underline{L}) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=0}^6 P_{nj}(t) N_n \dots (\text{VII} . 1.6)$$

Podemos sacar como comportamiento temporal fundamental a

$$\sum_{j=0}^6 P_{0j}(t)$$

con lo cual, si definimos

$$P(t) = \sum_{j=0}^6 P_{0j}(t) \dots (\text{VII} . 1.7)$$

se tiene que

$$\eta(\bar{r}, \mu, \underline{L}, t) = P(t) \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^6 \frac{P_{nj}(t)}{P(t)} N_n(\bar{r}, \mu, \underline{L}) \dots (\text{VII} . 1.8)$$

Con lo cual podemos definir

$$\Psi(\bar{r}, \underline{u}, \underline{l}, t) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^6 \frac{P_{nj}(t)}{P(t)} N_n \quad \dots (\text{VII} . 1.9)$$

y de esta manera tenemos

$$\eta(\bar{r}, \underline{u}, \underline{l}, t) = P(t) \Psi(\bar{r}, \underline{u}, \underline{l}, t) \quad \dots (\text{VII} . 1.10)$$

De la misma manera, dado que

$$C_i(\bar{r}, \underline{u}, \underline{l}, t) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(t) C_{in}(\bar{r}, \underline{u}, \underline{l}) \quad \dots (\text{VII} . 1.11)$$

y recordando de (VI.5.22) que

$$C_{in\epsilon} = \frac{\hat{M}_i N_n}{\lambda_i + \omega_{n\epsilon}}$$

entonces

$$C_i(\bar{r}, \underline{u}, \underline{l}, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\epsilon=0}^6 \frac{P_{n\epsilon}(t)}{\lambda_i + \omega_{n\epsilon}} \hat{M}_i N_n \quad \dots (\text{VII} . 1.12)$$

pero los $N_n(\bar{r}, \underline{u}, \underline{l})$ existen en conjuntos de 7 y el fundamental es $N_0(\bar{r}, \underline{u}, \underline{l})$ por lo que podemos hacer :

$$C_i(\bar{r}, \underline{u}, \underline{l}, t) = \sum_{j=0}^6 \frac{P_{0j} \hat{M}_i N_0}{\lambda_i + \omega_{0j}} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=0}^6 \frac{P_{nj} \hat{M}_i N_n}{\lambda_i + \omega_{nj}} \quad \dots (\text{VII} . 1.13)$$

Si el comportamiento temporal fuerte lo definimos por **convencencia**

como :

$$\xi_i(t) = \sum_{j=0}^6 P_{0j}(t), (=P(t)) \quad \dots \quad (\text{VII} . 1.14)$$

podemos proponer :

$$C_i(\bar{r}, \mu, \underline{R}, t) = \xi_i(t) \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^6 \frac{P_{nj}(t)}{P(t)} C_{inj}(\bar{r}, \mu, \underline{R}) \quad \dots \quad (\text{VII} . 1.15)$$

y si definimos como

$$\theta_i(\bar{r}, \mu, \underline{R}, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^6 \frac{P_{nj}(t)}{P(t)} C_{inj}(\bar{r}, \mu, \underline{R}) \quad \dots \quad (\text{VII} . 1.16)$$

con

$$C_{inj}(\bar{r}, \mu, \underline{R}) = \frac{\hat{M}_i N_n}{\lambda_i + \omega_{nj}} \quad \dots \quad (\text{VII} . 1.16)$$

por lo que

$$C_i(\bar{r}, \mu, \underline{R}, t) = \xi_i(t) \theta_i(\bar{r}, \mu, \underline{R}, t) \quad \dots \quad (\text{VII} . 1.17)$$

Ahora, por argumentos similares :

$$n^+(\bar{r}, \mu, \underline{R}, t) = \sum_{j=0}^6 P_{0j}^+(t) N_0^+ + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=0}^6 P_{nj}^+(t) N_n^+ \quad \dots \quad (\text{VII} . 1.18)$$

y definimos

$$P^+(t) \equiv \sum_{j=0}^6 P_{0j}^+(t) \quad \dots \quad (\text{VII.1.19})$$

y la función de forma :

$$\Psi^+(\bar{r}, \underline{\mu}, \underline{\ell}, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^6 \frac{P_{nj}^+(t)}{P(t)} N_n^+ \quad \dots \quad (\text{VII.1.20})$$

por lo que

$$\eta^+(\bar{r}, \underline{\mu}, \underline{\ell}, t) = P^+(t) \Psi^+(\bar{r}, \underline{\mu}, \underline{\ell}, t) \quad \dots \quad (\text{VII.1.21})$$

y para la importancia de la densidad de precursores,

$$C_i^+(\bar{r}, \underline{\mu}, \underline{\ell}, t) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n^+(t) C_{in}^+(\bar{r}, \underline{\mu}, \underline{\ell}) \quad \dots \quad (\text{VII.1.22})$$

donde de (VI.5.32)

$$C_{in}^+(\bar{r}, \underline{\mu}, \underline{\ell}) = \frac{\lambda_i N_n^+(\bar{r}, \underline{\mu}, \underline{\ell})}{\lambda_i + \omega_{ni}^*}$$

entonces

$$C_i^+(\bar{r}, \underline{\mu}, \underline{\ell}, t) = \sum_{j=0}^6 \frac{\lambda_i P_{0j}^+(t)}{\lambda_i + \omega_{0j}^*} N_0^+ + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=0}^6 \frac{\lambda_i P_{nj}^+(t)}{\lambda_i + \omega_{ni}^*} N_n^+ \quad \dots \quad (\text{VII.1.23})$$

y definiendo por conveniencia

$$\xi_i^+(t) \equiv \sum_{j=0}^6 P_{0j}^+(t), (= P^+(t)) \dots (\text{VII.1.24})$$

y como función de forma

$$\theta_i^+(\bar{r}, \underline{u}, \underline{\rho}, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^6 \frac{P_{nj}^+(t)}{P^+(t)} C_{inj}^+(\bar{r}, \underline{u}, \underline{\rho}) \dots (\text{VII.1.25})$$

con
$$C_{inj}^+ = \frac{\lambda_i N_n^+}{\lambda_i + \omega_{nj}^*}$$

$$C_i^+(\bar{r}, \underline{u}, \underline{\rho}, t) = \xi_i^+(t) \theta_i^+(\bar{r}, \underline{u}, \underline{\rho}, t) \dots (\text{VII.1.26})$$

Resumiendo, las funciones de forma espacio-temporales propuestas son

$$\Psi(\bar{r}, \underline{u}, \underline{\rho}, t) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^6 \frac{P_{nj}(t)}{P(t)} N_n(\bar{r}, \underline{u}, \underline{\rho}) \dots (\text{VII.1.27})$$

$$\theta_i(\bar{r}, \underline{u}, \underline{\rho}, t) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^6 \frac{P_{nj}(t)}{P(t)} C_{inj}(\bar{r}, \underline{u}, \underline{\rho}) \dots (\text{VII.1.28})$$

$$\Psi^+(\bar{r}, \mu, \underline{\Omega}, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^G \frac{P_{nj}^+(t)}{P^+(t)} N_n^+(\bar{r}, \mu, \underline{\Omega}) \dots (\text{VII.1.29})$$

y

$$\Theta_i^+(\bar{r}, \mu, \underline{\Omega}, t) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^G \frac{P_{nj}^+(t)}{P^+(t)} C_{inj}^+(\bar{r}, \mu, \underline{\Omega}) \dots (\text{VII.1.30})$$

Con éstas definiciones de funciones de forma espacio-temporales podemos calcular y analizar el comportamiento temporal de los parámetros de las ecuaciones cinéticas puntuales.

VII.2. Análisis de los parámetros de las ecuaciones cinéticas puntuales.

a) Reactividad

La definición de reactividad fue dada en (V.4.1) y es

$$\rho(t) = \frac{\langle \Psi^+ | \hat{H} \Psi \rangle + \sum_{i=1}^G \langle \Theta_i^+ | \hat{M}_i \Psi \rangle + \sum_{i=1}^G \lambda_i \langle \Psi^+ - \Theta_i^+ | \Theta_i \rangle}{\langle \Psi^+ | \hat{M}_0 \Psi \rangle + \sum_{i=1}^G \langle \Theta_i^+ | \hat{M}_i \Psi \rangle}$$

y sustituyendo las funciones de forma espacio-temporales obtenemos

$$\rho(t) = \frac{\sum_{m,n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^G \left\{ \frac{P_{n\ell}(t) P_{mj}^+(t)}{P(t) P^+(t)} \langle N_m^+ | \hat{H} N_n \rangle + \frac{P_{n\ell}(t) P_{mj}^+(t)}{P(t) P^+(t)} \sum_{i=1}^G \langle C_{inj}^+ | \hat{M}_i N_n \rangle + \dots \right.}{\sum_{m,n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^G \left\{ \frac{P_{n\ell}(t) P_{mj}^+(t)}{P(t) P^+(t)} \langle N_m^+ | \hat{M}_0 N_n \rangle + \right.}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{P_{ne}(t) P_{mj}^+(t)}{P(t) P^+(t)} \sum_{i=1}^6 \lambda_i \langle N_m^+ | C_{ine} \rangle - \frac{P_{ne}(t) P_{mj}^+(t)}{P(t) P^+(t)} \sum_{i=1}^6 \lambda_i \langle e_{im_j}^+ | C_{ine} \rangle \} \\
 & + \frac{P_{ne}(t) P_{mj}^+(t)}{P(t) P^+(t)} \sum_{i=1}^6 \langle e_{im_j}^+ | \hat{M}_i N_n \rangle \} \\
 & \dots (\text{VII.2.1})
 \end{aligned}$$

Donde los productos $P(t) P^+(t)$ se eliminan -
utilizando (VII.1.3) y (VII.1.4) tenemos que el produc-

$$\text{to } P_{ne}(t) P_{mj}^+(t) = P_{ne}(0) P_{mj}^+(T) e^{\omega_{ne} t} e^{\omega_{mj} (T-t)} \dots (\text{VII.2.2})$$

que aparece en todos los términos tiene un comportamien-
to asintótico gobernado por el eigenvalor algebraicamen-
te mas grande al que llamamos fundamental y denotaremos
por ω_{00} .

Entonces dividiendo (VII.2.1.) entre $P_{00}(t) P_{00}^+(t)$
tenemos que:

$$\frac{P_{ne}(t) P_{mj}^+(t)}{P_{00}(t) P_{00}^+(t)} = \frac{P_{ne}(0) P_{mj}^+(T) e^{-\omega_{00} t} e^{-\omega_{mj} (T-t)}}{P_{00}(0) P_{00}^+(T)} \dots (\text{VII.2.3})$$

Ahora dado que $\omega_{mj} < \omega_{00}$ para $m, j \neq 0$,

y que por lo tanto

$$\frac{P_{mj}^+(T)}{P_{oo}^+(T)} e^{-(\omega_{oo}-\omega_{mj})(T-t)}$$

esta siempre acotado entre

$$\frac{P_{mj}^+(T)}{P_{oo}^+(T)} e^{-(\omega_{oo}-\omega_{mj})T} \quad \text{y} \quad \frac{P_{mj}^+(T)}{P_{oo}^+(T)}$$

entonces, cuando t aumenta

$$\frac{P_{ne}(t) P_{mj}^+(t)}{P_{oo}(t) P_{oo}^+(t)} \cong 0 \quad \dots \text{(VII.2.4)}$$

para $n, l, m, j \neq 0$

Donde el símbolo \cong significa "tiende al valor".

Por lo tanto, el valor asintótico de la reactividad es:

$$P(t) \cong \frac{\langle N_0^+ | \hat{H} | N_0 \rangle + \sum_{i=1}^6 \langle C_{i00}^+ | \hat{M}_i | N_0 \rangle + \sum_{i=1}^6 \lambda_i \langle N_0^+ - C_{i00} | C_{i00} \rangle}{\langle N_0^+ | \hat{M}_0 | N_0 \rangle + \sum_{i=1}^6 \langle C_{i00}^+ | \hat{M}_i | N_0 \rangle} \quad \text{(VII.2.5)}$$

Lo que podemos deducir de esta expresión es que el coeficiente de reactividad tiene un comportamiento temporal transitorio tendiendo asintóticamente al coeficiente de reactividad del modo fundamental dado por la ecuación (VI.4.6)

Antes de seguir con el próximo parámetro podemos observar que la ecuación (VII.2.1) puede ponerse como

$$\rho(t) = \frac{\sum_{n,m=0}^{\infty} \sum_{l,j=0}^6 P_{nl}(t) P_{mj}^{\dagger}(t) \langle \vec{\Phi}_{mj}^{\dagger} | \hat{K} \vec{\Phi}_{nl} \rangle}{\sum_{n,m=0}^{\infty} \sum_{l,j=0}^6 P_{nl}(t) P_{mj}^{\dagger}(t) \langle \vec{\Phi}_{mj}^{\dagger} | \hat{P} \vec{\Phi}_{nl} \rangle} \dots (\text{VII.2.6})$$

y ahora, utilizando la ecuación de eigenvalores (VI.2.36) y la propiedad de ortogonalidad de los eigenvectores, se tiene que

$$\rho(t) = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{L=0}^6 P_{nL}(t) P_{nL}^{\dagger}(t) \langle \vec{\Phi}_{nL}^{\dagger} | \hat{K} \vec{\Phi}_{nL} \rangle}{\sum_{n,m=0}^{\infty} \sum_{l,j=0}^6 P_{nl}(t) P_{mj}^{\dagger}(t) \langle \vec{\Phi}_{mj}^{\dagger} | \hat{P} \vec{\Phi}_{nl} \rangle} \dots (\text{VII.2.7})$$

si cada término del numerador se multiplica y divide por $\langle \vec{\Phi}_{nL}^{\dagger} | \hat{P} \vec{\Phi}_{nL} \rangle$ tenemos

$$\rho(t) = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{L=0}^6 P_{nL}(t) P_{nL}^{\dagger}(t) \langle \vec{\Phi}_{nL}^{\dagger} | \hat{P} \vec{\Phi}_{nL} \rangle \frac{\langle \vec{\Phi}_{nL}^{\dagger} | \hat{K} \vec{\Phi}_{nL} \rangle}{\langle \vec{\Phi}_{nL}^{\dagger} | \hat{P} \vec{\Phi}_{nL} \rangle}}{\sum_{n,m=0}^{\infty} \sum_{l,j=0}^6 P_{nl}(t) P_{mj}^{\dagger}(t) \langle \vec{\Phi}_{mj}^{\dagger} | \hat{P} \vec{\Phi}_{nl} \rangle} \dots (\text{VII.2.8})$$

y recordando la definición de reactividad modal dada en (VI.4.6) - tenemos que

$$\rho(t) = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{l=0}^6 P_{nl}(t) P_{nl}^{\dagger}(t) \langle \vec{\Phi}_{nl}^{\dagger} | \hat{P} \vec{\Phi}_{nl} \rangle P_{nl}}{\sum_{n,m=0}^{\infty} \sum_{l,j=0}^6 P_{nl}(t) P_{mj}^{\dagger}(t) \langle \vec{\Phi}_{mj}^{\dagger} | \hat{P} \vec{\Phi}_{nl} \rangle} \dots (\text{VII } 2.9)$$

con lo cual se vuelve obvio que el coeficiente de reactividad es una combinación lineal de los coeficientes de reactividad modales y que los coeficientes de dicha combinación son funciones del tiempo.

b) FACTOR DE MULTIPLICACION EFECTIVO

El factor de multiplicación efectivo fué definido en (V.5.2) como -

$$K_{eff}(t) \equiv \frac{\langle \psi^{\dagger} | \hat{M}_0 \psi \rangle + \sum_{i=1}^6 \langle \theta_i^{\dagger} | \hat{M}_i \psi \rangle}{\sum_{i=1}^6 \lambda_i \langle \theta_i^{\dagger} - \psi^{\dagger} | \theta_i \rangle - \langle \psi^{\dagger} | \hat{L} \psi \rangle}$$

y por los mismos argumentos dados en el inciso anterior se llega a que su valor tiende a

$$K_{eff}(t) \cong \frac{\langle N_0^{\dagger} | \hat{M}_0 N_0 \rangle + \sum_{i=1}^6 \langle C_{i0}^{\dagger} | \hat{M}_i N_0 \rangle}{\sum_{i=1}^6 \lambda_i \langle C_{i0}^{\dagger} - N_0^{\dagger} | C_{i0} \rangle - \langle N_0^{\dagger} | \hat{L} N_0 \rangle} \dots (\text{VII } 2.10)$$

que es la expresión para el factor de multiplicación en el modo fundamental obtenido de la ecuación (VI.4.9)

La relación del factor de multiplicación efectivo (así como de los demás parámetros) con los factores de multiplicación modales no es simplemente una combinación lineal de ellos con coeficientes que son -

funciones del tiempo sólomente, sino una expresión más complicada en la cual existen términos que toman en cuenta la interacción entre los diferentes modos.

c) TIEMPO DE GENERACION DE NEUTRONES

Su definición fue dada en la expresión (V.4.2) como :

$$L(t) \equiv \frac{\langle \Psi^\dagger | \Psi \rangle}{\langle \Psi^\dagger | \hat{M}_0 | \Psi \rangle + \sum_{i=1}^6 \langle \Theta_i^\dagger | \hat{M}_i | \Psi \rangle}$$

y por un análisis igual a los anteriores se llega a que :

$$L(t) \equiv \frac{\langle N_0^\dagger | N_0 \rangle}{\langle N_0^\dagger | \hat{M}_0 | N_0 \rangle + \sum_{i=1}^6 \langle C_{i\infty}^\dagger | \hat{M}_i | N_0 \rangle} \dots (\text{VII.2.11})$$

que es la expresión para el tiempo de generación de neutrones en el modo fundamental, obtenida de la expresión (VI.5.7)

d) FRACCION EFECTIVA DE NEUTRONES RETARDADOS definida en (IV.4.3):

$$\bar{\beta}_{ieff}(t) \equiv \frac{\langle \Theta_i^\dagger | \hat{M}_i | \Psi \rangle}{\langle \Psi^\dagger | \hat{M}_0 | \Psi \rangle + \sum_{j=1}^6 \langle \Theta_j^\dagger | \hat{M}_j | \Psi \rangle}$$

Sustituyendo las funciones de forma propuestos y por un análisis similar al de la reactividad se llega a que :

$$\bar{\beta}_{iaeff}(t) \equiv \frac{\langle C_{i\infty}^\dagger | \hat{M}_i | N_0 \rangle}{\langle N_0^\dagger | \hat{M}_0 | N_0 \rangle + \sum_{j=1}^6 \langle C_{j\infty}^\dagger | \hat{M}_j | N_0 \rangle} \dots (\text{VII.2.12})$$

que es también la expresión para la fracción efectiva de neutrones retardados del i -ésimo grupo en el modo fundamental, (ecuación (VI.5.8)).

e) FACTOR $W_1(t)$

El factor $W_1(t)$ definido en (V.3.4) es

$$W_1(t) \equiv \frac{\langle \psi^\dagger | \frac{\partial \psi}{\partial t} \rangle + \sum_{i=1}^6 \lambda_i \langle \psi^\dagger - \theta_i^\dagger | \theta_i \rangle}{\langle \psi^\dagger | \hat{M}_0 \psi \rangle + \sum_{i=1}^6 \langle \theta_i^\dagger | \hat{M}_i \psi \rangle}$$

para analizarlo necesitamos la relación

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{1}{P(t)} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{l=0}^6 P_{nl}(t) N_n \right\} \quad \dots \text{(VII.2.13)}$$

que desarrollada es:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = - \frac{\dot{P}(t)}{P^2(t)} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{l=0}^6 P_{nl}(t) N_n + \frac{1}{P(t)} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{l=0}^6 \dot{P}_{nl} N_n \quad \dots \text{(VII.2.14)}$$

Así, sustituyendo en la definición de $W_1(t)$, se tiene

$$W_1(t) = \frac{\sum_{m,n=0}^{\infty} \sum_{l,j=0}^6 \left\{ - \frac{\dot{P}(t)}{P^2(t) P^{\dagger}(t)} P_{nl} P_{mj}^{\dagger} \langle N_m^{\dagger} | N_n \rangle + \frac{\dot{P}_{nl} P_{mj}^{\dagger}}{P(t) P^{\dagger}(t)} \langle N_m^{\dagger} | N_n \rangle \right\}}{\sum_{m,n=0}^{\infty} \sum_{l,j=0}^6 \left\{ \frac{P_{nl} P_{mj}^{\dagger}}{P(t) P^{\dagger}(t)} \langle N_m^{\dagger} | \hat{M}_0 N_n \rangle + \right.}$$

$$+ \left. \sum_{i=1}^6 \frac{P_{nl} P_{mj}^{\dagger}}{P(t) P^{\dagger}(t)} \lambda_i \langle N_m^{\dagger} - C_{imj}^{\dagger} | C_{iml} \rangle \right\}} + \sum_{i=1}^6 \frac{P_{nl} P_{mj}^{\dagger}}{P(t) P^{\dagger}(t)} \langle C_{imj}^{\dagger} | \hat{M}_i N_n \rangle \quad \dots \text{(VII.2.15)}$$

Ahora, utilizando (VI.3.18) con $S_{nl} = 0$, o sea :

$$\dot{P}_{nl}(t) = \omega_{nl} P_{nl}(t) \quad \dots \text{(VII.2.16)}$$

y dado que

$$P(t) = \sum_{j=0}^6 P_{0j}(t)$$

$$\frac{\dot{P}(t)}{P(t)} = \frac{\sum_{j=0}^6 \omega_{0j} P_{0j}(t)}{\sum_{j=0}^6 P_{0j}(t)} \quad \dots \text{(VII.2.17)}$$

y como ω_{00} es eigenvalor fundamental se tiene que :

$$\frac{\dot{P}(t)}{P(t)} \approx \omega_{00} \quad \dots \text{(VII.2.18)}$$

Por lo tanto sustituyendo (VII.2.16) en (VII.2.15) se tiene

$$W_1(t) = \frac{\sum_{m,n=0}^6 \sum_{l,j=0}^6 \left\{ (\omega_{nl} - \frac{\dot{P}(t)}{P(t)}) \langle N_m^+ | N_n \rangle + \sum_{i=1}^6 \lambda_i \langle N_m^+ - C_{im}^+ | C_{in} \rangle \right\} P_{mj} P_{nl}}{\sum_{m,n=0}^6 \sum_{l,j=0}^6 \left\{ \langle N_m^+ | \hat{M}_0 N_n \rangle + \sum_{i=1}^6 \langle C_{im}^+ | \hat{M}_i N_n \rangle \right\} P_{mj} P_{nl}} \quad \dots \text{(VII.2.19)}$$

dividiendo numerador y denominador por $P_{00}(t) P_{00}^+(t)$ y

por los argumentos usados en los incisos anteriores se llega a

$$W_1(t) \approx \frac{(\omega_{00} - \frac{\dot{P}(t)}{P(t)}) \langle N_0^+ | N_0 \rangle + \sum_{i=1}^6 \lambda_i \langle N_0^+ - C_{i0}^+ | C_{i0} \rangle}{\langle N_0^+ | \hat{M}_0 N_0 \rangle + \sum_{i=1}^6 \langle C_{i0}^+ | \hat{M}_i N_0 \rangle} \quad \dots \text{(VII.2.20)}$$

y utilizando (VII.2.18) la expresión se reduce a

$$W_2(t) \cong \frac{\sum_{i=1}^6 \lambda_i \langle N_0^+ - C_{i00}^+ | C_{i00} \rangle}{\langle N_0^+ | \hat{M}_0 | N_0 \rangle + \sum_{i=1}^6 \langle C_{i00}^+ | \hat{M}_i | N_0 \rangle} \dots \text{(VII.2.21)}$$

Además, dado que de (VI.5.32)

$$C_{i00}^+ = \frac{\lambda_i N_0^+}{\lambda_i + \omega_{00}^*}$$

resulta :

$$W_1(t) \cong \frac{\sum_{i=1}^6 \frac{\omega_{00} \lambda_i}{\lambda_i + \omega_{00}} \langle N_0^+ | N_0 \rangle}{\langle N_0^+ | \hat{M}_0 | N_0 \rangle + \sum_{i=1}^6 \langle C_{i00}^+ | \hat{M}_i | N_0 \rangle} \dots \text{(VII.2.22)}$$

de manera que para $|\omega_{00}| \approx 0$

$$W_1(t) \cong 0 \dots \text{(VII.2.23)}$$

Es decir para reactividades pequeñas, el término $W_1(t)$, que toma en cuenta la diferencia de importancias entre los neutrones y precursores y además la variación temporal de la función de forma de la densidad de neutrones, tiende a cero.

f) El factor $b_i(t)$, dado en (V.3.6) es

$$b_i(t) \equiv \frac{\langle \Psi^+ | \theta_i \rangle}{\langle \theta_i^+ | \theta_i \rangle}$$

Este factor puede expresarse como

$$b_i(t) = \frac{\sum_{m,n} \sum_{j,l} P_{nr} P_{mj}^+ \langle N_m^+ | C_{inr} \rangle}{\sum_{m,n} \sum_{j,l} P_{nr} P_{mj}^+ \langle C_{imj}^+ | C_{inr} \rangle} \dots \text{(VII.2.24)}$$

Su comportamiento asintótico es :

$$b_i(t) \cong \frac{\langle N_0^+ | C_{i00} \rangle}{\langle C_{i00}^+ | C_{i00} \rangle} \dots \text{(VII.2.25)}$$

y de nuevo utilizando

$$C_{i00}^+ = \lambda_i \frac{N_0^+}{\lambda_i + \omega_{00}^*}$$

se tiene

$$b_i(t) \cong \frac{\langle N_0^+ | C_{i00} \rangle}{\frac{\lambda_i}{\lambda_i + \omega_{00}} \langle N_0^+ | C_{i00} \rangle}$$

ó sea

$$b_i(t) \cong \frac{\lambda_i + \omega_{00}}{\lambda_i} \dots \text{(VII.2.26)}$$

que de nuevo si $|\omega_{00}| \gg \lambda_i$

$$b_i(t) \cong 1$$

Este factor $\beta_i(t)$, que pesa la relación de la importancia de los - neutrones a la de los precursores tiende a **1** para reactividades pequeñas, es decir las importancias son prácticamente iguales para un reactor muy cercano a su estado crítico. Esto concuerda con el resultado del inciso anterior.

g) FACTOR $W_{\beta_i}(t)$; de (V.3.14) :

$$W_{\beta_i}(t) \equiv \frac{\langle \frac{\partial}{\partial t} (\theta_i^+) | \theta_i \rangle}{\lambda E(t) \langle \theta_i^+ | \theta_i \rangle} \quad \text{ó}$$

$$W_{\beta_i}(t) \equiv \frac{\langle \frac{\partial \theta_i^+}{\partial t} | \theta_i \rangle}{\langle \theta_i^+ | \theta_i \rangle} - \frac{\frac{d}{dt} \langle \psi^+ | \psi \rangle}{\langle \psi^+ | \psi \rangle}$$

por lo que

$$W_{\beta_i}(t) \equiv \frac{\langle \frac{\partial \theta_i^+}{\partial t} | \theta_i \rangle}{\langle \theta_i^+ | \theta_i \rangle} - \frac{\langle \frac{\partial \psi^+}{\partial t} | \psi \rangle}{\langle \psi^+ | \psi \rangle} - \frac{\langle \psi^+ | \frac{\partial \psi}{\partial t} \rangle}{\langle \psi^+ | \psi \rangle} \dots \text{(VIII.2.27)}$$

Analícemos cada uno de estos términos.

De (VII.1.30) se tiene que :

$$\theta_i^+(\bar{r}, \mu, \underline{d}, t) = \frac{1}{\Gamma^+(t)} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{j=0}^6 \dot{P}_{mj}^+ C_{imj}^+(\bar{r}, \mu, \underline{d})$$

de donde

$$\frac{\partial \theta_i^+}{\partial t} = - \frac{\dot{\Gamma}^+(t)}{\Gamma^+(t)} \theta_i^+ + \frac{1}{\Gamma^+(t)} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{j=0}^6 \dot{P}_{mj}^+(t) C_{imj}^+(\bar{r}, \mu, \underline{d})$$

lo cual puede ponerse, usando (VI.3.19) como :

$$\frac{\partial \theta_i^+}{\partial t} = - \frac{\dot{P}^+(t)}{P^+(t)} \theta_i^+ - \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{j=0}^G \omega_{mj} \frac{P_{mj}^+}{P^+(t)} C_{imj}^+ \dots \text{(VII .2.28)}$$

por lo que

$$\frac{\langle \frac{\partial \theta_i^+}{\partial t} | \theta_i^+ \rangle}{\langle \theta_i^+ | \theta_i^+ \rangle} = - \left(\frac{\dot{P}^+(t)}{P^+(t)} \right)^* - \frac{\sum_{m,n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^G \omega_{mj}^* \frac{P_{mj}^{+*}}{P^+(t)} \frac{P_{nl}}{P(t)} \langle C_{imj}^+ | C_{inl} \rangle}{\sum_{m,n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^G \frac{P_{mj}^+(t)}{P^+(t)} \frac{P_{nl}(t)}{P(t)} \langle C_{imj}^+ | C_{inl} \rangle} \text{(VII .2.29)}$$

y cuando t crece:

$$\frac{\langle \frac{\partial \theta_i^+}{\partial t} | \theta_i^+ \rangle}{\langle \theta_i^+ | \theta_i^+ \rangle} \approx \omega_{00}^* - \omega_{00}^* = 0 \dots \text{(VII .2.30)}$$

De manera análoga puede demostrarse que

$$\frac{\langle \frac{\partial \psi^+}{\partial t} | \psi^+ \rangle}{\langle \psi^+ | \psi^+ \rangle} \approx 0 \dots \text{(VII .2.31)}$$

y

$$\frac{\langle \psi^+ | \frac{\partial \psi}{\partial t} \rangle}{\langle \psi^+ | \psi \rangle} \approx 0 \dots \text{(VII .2.32)}$$

por lo tanto

$$W_{3i}(t) \approx 0 \dots \text{(VII .2.33)}$$

Es decir el término $W_{3i}(t)$ que toma en cuenta las variaciones tem-

porales de las funciones de importancia de los precursores del i -ésimo grupo y de los neutrones, tiende asintóticamente a cero.

Esto es una consecuencia de que en este formalismo, la población de neutrones y de precursores tienden a distribuirse en una cierta forma, que llamamos modo fundamental, el cual es una característica del tipo y propiedades del reactor en que estamos interesados y del hecho de que para reactividades pequeñas, la importancia de los neutrones y precursores son prácticamente iguales.

VII.3 DISCUSION SOBRE LA INCLUSION DE FUENTES EXTERNAS DE NEUTRONES

Las conclusiones obtenidas en el sección anterior son válidas también si están presentes fuentes externas de neutrones, aunque su existencia puede excitar los diferentes modos, como veremos a continuación.

Así pues, con $S(\bar{r}, \mu, \underline{g}) \neq 0$ tenemos que los coeficientes modales tienen un comportamiento temporal dado por :

$$P_{n\alpha}(t) = P_{n\alpha}(0) e^{\omega_{n\alpha} t} + \frac{S_{n\alpha}}{\omega_{n\alpha}} [e^{\omega_{n\alpha} t} - 1] \dots (\text{VII.3.1})$$

y

$$P_{nj}^+(t) = P_{nj}^+(\pi) e^{\omega_{nj}(\pi-t)} \dots (\text{VII.3.2})$$

De modo que el producto $P_{n\alpha}(t) P_{mj}^+(t)$ queda como :

$$P_{n\ell}(t) P_{mj}^+(t) = P_{n\ell}(0) P_{mj}^+(\tau) e^{\omega_{n\ell} t} e^{\omega_{mj}(\tau-t)} + \frac{P_{mj}^+(\tau)}{\omega_{n\ell}} S_{n\ell} [e^{\omega_{n\ell} t} - 1] e^{\omega_{mj}(\tau-t)}$$

... (VII.3.3)

y para el modo fundamental, $n=m=l=j=0$ se tiene

$$P_{00}(t) P_{00}^+(t) = P_{00}(0) P_{00}^+(\tau) e^{\omega_{00} t} e^{\omega_{00}(\tau-t)} + \frac{P_{00}^+(\tau)}{\omega_{00}} S_{00} [e^{\omega_{00} t} - 1] e^{\omega_{00}(\tau-t)}$$

... (VII.3.4)

y el cociente $\frac{P_{n\ell}(t) P_{mj}^+(t)}{P_{00}(t) P_{00}^+(t)}$ es dado por:

$$\frac{P_{n\ell}(t) P_{mj}^+(t)}{P_{00}(t) P_{00}^+(t)} = \frac{P_{n\ell}(0) P_{mj}^+(\tau) e^{\omega_{n\ell} t} e^{\omega_{mj}(\tau-t)} + \frac{P_{mj}^+(\tau)}{\omega_{n\ell}} S_{n\ell} [e^{\omega_{n\ell} t} - 1] e^{\omega_{mj}(\tau-t)}}{P_{00}(0) P_{00}^+(\tau) e^{\omega_{00} t} e^{\omega_{00}(\tau-t)} + \frac{P_{00}^+(\tau)}{\omega_{00}} S_{00} [e^{\omega_{00} t} - 1] e^{\omega_{00}(\tau-t)}}$$

... (VII.3.5)

Como ω_{00} es el eigenvalor fundamental supongamos 3 casos:

- $\omega_{00} > 0$
- $\omega_{00} = 0$
- $\omega_{00} < 0$

Así con $\omega_{n\ell} < 0$ para $\omega_{n\ell} \neq \omega_{00}$ es decir suponiendo

- $\omega_{00} > 0$ y $\omega_{n\ell}, \omega_{mj} < 0$, para $\omega_{n\ell}, \omega_{mj} \neq \omega_{00}$ cuando t crece

$$\frac{P_{n\ell}(t) P_{mj}^+(t)}{P_{00}(t) P_{00}^+(t)} \rightarrow \frac{-\frac{P_{mj}^+(\tau)}{\omega_{n\ell}} S_{n\ell} e^{\omega_{mj}(\tau-t)}}{[P_{00}(0) + \frac{S_{00}}{\omega_{00}}] P_{00}^+(\tau) e^{\omega_{00} t} e^{\omega_{00}(\tau-t)}}$$

... (VII.3.6)

y dado que la cantidad $P_{00}^+(\tau) e^{\omega_{00}(\tau-t)}$

siempre está acotada:

$$\frac{P_{n\ell}(t) P_{mj}^+(t)}{P_{00}(t) P_{00}^+(t)} \approx 0$$

... (VII.3.7)

- $\omega_{00} = 0$; $\omega_{n\ell}, \omega_{mj} \neq \omega_{00}$.

Por lo que (VII.3.5) queda, cuando t aumenta como:

$$\frac{P_{n\lambda}(t) P_{m_j}^+(t)}{P_{00}(t) P_{00}^+(t)} \rightarrow \frac{-\frac{P_{m_j}^+(\tau) S_{n\lambda}}{\omega_{n\lambda}} e^{\omega_{m_j}(\tau-t)}}{\omega_{n\lambda}} \dots (\text{VII.3.8})$$

y de nuevo

$$\frac{P_{n\lambda}(t) P_{m_j}^+(t)}{P_{00}(t) P_{00}^+(t)} \approx 0 \dots (\text{VII.3.9})$$

c) ω_{00} , $\omega_{n\lambda}$, $\omega_{m_j} \neq \omega_{00}$

cuando t aumenta

$$\frac{P_{n\lambda}(t) P_{m_j}^+(t)}{P_{00}(t) P_{00}^+(t)} \rightarrow \frac{-\frac{P_{m_j}^+(\tau) S_{n\lambda}}{\omega_{n\lambda}} e^{\omega_{m_j}(\tau-t)}}{-\frac{P_{00}^+(\tau) S_{00}}{\omega_{00}} e^{\omega_{00}(\tau-t)}} \dots (\text{VII.3.10})$$

por lo que

$$\frac{P_{n\lambda}(t) P_{m_j}^+(t)}{P_{00}(t) P_{00}^+(t)} \approx \frac{\omega_{00} S_{n\lambda} P_{m_j}^+(\tau)}{\omega_{n\lambda} S_{00} P_{00}^+(\tau)} \dots (\text{VII.3.11})$$

Esta cantidad debe ser muy pequeña para que la contribución de los - modos más altos que el fundamental sea despreciable y poder concluir que los diversos factores tienden a su valor en el estado fundamental como lo indica el hecho de que los modos diferentes del fundamental - decaen, sin la fuente más rápidamente que éste. Por lo que es de esperar que las poblaciones tiendan a un cierto valor asintótico debido a la presencia de fuentes externas .

VII.4 INTERPRETACION DE LA FUNCION ADJUNTA

Como ya discutimos en el Capítulo IV la elección del evento característico, al ^{cual} dan origen neutrones y precursores da lugar a las diversas interpretaciones de la función adjunta. Así pues, consideremos como evento característico, por ejemplo, el número total de fisiones por unidad de tiempo (1).

Supongamos que se inyectan Q neutrones en un reactor al tiempo $t=0$ en un punto $(\bar{r}', \mu', \underline{\Omega}')$ del espacio fase.

Suponiendo que no hay neutrones ni precursores en este instante, ni existen fuentes externas de neutrones, queremos determinar la densidad de neutrones $n(\bar{r}, \mu, \underline{\Omega})$ como función de $(\bar{r}', \mu', \underline{\Omega}')$ para todos los tiempos y en particular cuando $t \rightarrow \infty$.

Para esto se tienen las ecuaciones de transporte dadas por (II.3.19) y (II.3.20) con $S(\bar{r}, \mu, \underline{\Omega}) = 0$. Es decir

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \hat{H} n + \sum_{i=1}^6 \lambda_i C_i$$

$$\frac{\partial C_i}{\partial t} = \hat{M}_i n - \lambda_i C_i$$

Donde hemos suprimido los argumentos de las funciones $n(\bar{r}, \mu, \underline{\Omega}, t)$ y $C_i(\bar{r}, \mu, \underline{\Omega}, t)$ en las ecuaciones, por simplicidad.

Estas ecuaciones deben ser resueltas con las condiciones de contorno temporales $n(\bar{r}, \mu, \underline{\Omega}, t=0) = Q \delta(\bar{r}-\bar{r}') \delta(\mu-\mu') \delta(\underline{\Omega}-\underline{\Omega}')$

$$C_i(\bar{r}, \mu, \underline{\Omega}, 0) = 0 \quad \dots (\text{VII.4.1}'')$$

Como ya vimos, las ecuaciones de transporte pueden ser expresadas - por las ecuaciones (VI.2.31) como :

$$\frac{\partial \vec{n}}{\partial t} = \hat{K} \vec{n}$$

Ahora utilizando los eigenvectores del operador \hat{K} desarrollamos $n(\bar{r}, \mu, \underline{\Omega}, t)$ de acuerdo con (VI.3.1) - como :

$$\vec{n}(\bar{r}, \mu, \underline{\Omega}, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\Omega=0}^{\infty} P_{n\Omega}(t) \vec{\Phi}_{n\Omega} \quad \dots (\text{VII.4.2})$$

Como ya vimos, para un sistema sin fuentes externas

$$P_{n\Omega}(t) = P_{n\Omega}(0) e^{\omega_{n\Omega}(t)}$$

y por lo tanto

$$\vec{n}(\bar{r}, \mu, \underline{\Omega}, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\Omega=0}^{\infty} P_{n\Omega}(0) e^{\omega_{n\Omega} t} \vec{\Phi}_{n\Omega}(\bar{r}, \mu, \underline{\Omega}) \quad \dots (\text{VII.4.3})$$

y ahora utilizando la condición inicial

$$\vec{n}(\bar{r}, \mu, \underline{\Omega}, 0) = \begin{bmatrix} Q \delta(\bar{r}-\bar{r}') \delta(\mu-\mu') \delta(\underline{\Omega}-\underline{\Omega}') \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \dots (\text{VII.4.4})$$

como además

$$\vec{n}(\vec{r}, \mu, \underline{\Omega}, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\Omega=0}^6 a_{n\Omega} \vec{\Phi}_{n\Omega}(\vec{r}, \mu, \underline{\Omega}) \dots (\text{VII.4.5})$$

y utilizando la propiedad de biortonormalidad de los eigenvectores -
y sus adjuntos tenemos:

$$a_{n\Omega} = \langle \vec{\Phi}_{n\Omega}^+ | \vec{n}(\vec{r}, \mu, \underline{\Omega}, 0) \rangle \dots (\text{VII.4.6})$$

y dado que

$$\vec{\Phi}_{n\Omega}^+ = \begin{pmatrix} N_n^+(\vec{r}, \mu, \underline{\Omega}) \\ C_{1n\Omega}^+(\vec{r}, \mu, \underline{\Omega}) \\ \vdots \\ C_{6n\Omega}^+(\vec{r}, \mu, \underline{\Omega}) \end{pmatrix} \dots (\text{VII.4.7})$$

junto con (VII.4.4.) tenemos

$$a_{n\Omega} = Q N_n^+(\vec{r}', \mu', \underline{\Omega}') \dots (\text{VII.4.8})$$

y comparando con (VII.4.5) junto con (VII.4.3.) para $t=0$ tenemos que :

$$P_{n\Omega}(0) = a_{n\Omega} \dots (\text{VII.4.9})$$

por lo tanto

$$\vec{n}(\vec{r}, \mu, \underline{\Omega}, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\Omega=0}^6 Q N_n^+(\vec{r}', \mu', \underline{\Omega}') e^{i\omega_{n\Omega} t} \vec{\Phi}_{n\Omega}(\vec{r}, \mu, \underline{\Omega}) \dots (\text{VII.4.10})$$

por lo que la densidad de neutrones queda como :

$$n(\bar{r}, \mu, \underline{\Omega}, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{l=0}^6 Q N_n^+(\bar{r}, \mu, \underline{\Omega}^l) e^{\omega_{nl} t} N_n(\bar{r}, \mu, \underline{\Omega}) \quad \dots (\text{VII.4.11})$$

Ahora, como nos interesa el número de fisiones producidas, multiplicando ambos miembros de (VII.4.11) por $v(\mu) \Sigma_f(\bar{r}, \mu)$

e integrando a todo el espacio fase se tiene :

$$\Gamma(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{l=0}^6 Q N_n^+(\bar{r}, \mu, \underline{\Omega}^l) e^{\omega_{nl} t} \iiint d^3r d\mu d\underline{\Omega} v(\mu) \Sigma_f(\bar{r}, \mu) N_n(\bar{r}, \mu, \underline{\Omega}) \quad \dots (\text{VII.4.12})$$

donde

$$\Gamma(t) = \iiint d^3r d\mu d\underline{\Omega} v(\mu) \Sigma_f n(\bar{r}, \mu, \underline{\Omega}, t) \quad (\text{VII.4.13})$$

ya que el miembro izquierdo de (VII.4.12) es el número total de fisiones, podemos interpretar a

$$Q N_n^+(\bar{r}, \mu, \underline{\Omega}^l) e^{\omega_{nl} t} \iiint d^3r d\mu d\underline{\Omega} v(\mu) \Sigma_f(\bar{r}, \mu) N_n(\bar{r}, \mu, \underline{\Omega}) \equiv \Gamma_{nl}(\bar{r}, \mu, \underline{\Omega}^l; t) \quad \dots (\text{VII.4.14})$$

como el número total de fisiones por unidad de tiempo producidos en el modo (n, l) .

Repetiendo el proceso, pero ahora para Q neutrones inyectados en

$$(\bar{r}^u, \mu^u, \underline{\Omega}^u) \quad \text{tenemos}$$

$$QN_n^+(\bar{r}', \mu', \underline{\Omega}') e^{\omega_n t} \iiint d^3r d\mu d\underline{\Omega} v(\mu) \Sigma_f(\bar{r}, \mu) N_n(\bar{r}, \mu, \underline{\Omega}) = \Gamma_{n\lambda}(\bar{r}', \mu', \underline{\Omega}', t) \dots (\text{VII} . 4.15)$$

Ahora, dividiendo entre sí (VII.4.14) y (VII.4.15) obtenemos

$$\frac{N_n^+(\bar{r}', \mu', \underline{\Omega}')}{N_n^+(\bar{r}'', \mu'', \underline{\Omega}'')} = \frac{\Gamma_{n\lambda}(\bar{r}', \mu', \underline{\Omega}', t)}{\Gamma_{n\lambda}(\bar{r}'', \mu'', \underline{\Omega}'', t)} \dots (\text{VII} . 4.16)$$

Lo que se desprende de lo anterior es que la importancia asociada a los neutrones que "pertenecen" al modo (n, λ) , es la misma para cualquier valor de λ desde 0 hasta 6, si n está fija.

Dado que ω_{00} es el eigenvalor fundamental se tiene que :

$$\Gamma(\bar{r}', \mu', \underline{\Omega}', t) \approx QN_0^+(\bar{r}', \mu', \underline{\Omega}') e^{\omega_{00} t} \iiint d^3r d\mu d\underline{\Omega} v(\mu) \Sigma_f(\bar{r}, \mu) N_0(\bar{r}, \mu, \underline{\Omega}) \dots (\text{VII} . 4.17)$$

por lo tanto, utilizando (VII.4.16) para el modo fundamental, y como

$$\frac{\Gamma(\bar{r}', \mu', \underline{\Omega}', t)}{\Gamma(\bar{r}'', \mu'', \underline{\Omega}'', t)} \approx \frac{\Gamma_{00}(\bar{r}', \mu', \underline{\Omega}', t)}{\Gamma_{00}(\bar{r}'', \mu'', \underline{\Omega}'', t)} \dots (\text{VII} . 4.18)$$

tenemos

$$\frac{\Gamma(\bar{r}', \mu', \underline{\Omega}', t)}{\Gamma(\bar{r}'', \mu'', \underline{\Omega}'', t)} \approx \frac{N_0^+(\bar{r}', \mu', \underline{\Omega}')}{N_0^+(\bar{r}'', \mu'', \underline{\Omega}'')} \dots (\text{VII} . 4.19)$$

Por lo tanto, transcurriendo un tiempo suficiente para que los modos más altos decaigan, la potencia total de sistema será prácticamente debida al modo fundamental.

Esto nos proporciona un método experimental para determinar los valores relativos de las funciones de importancia del modo fundamental, aún sin conocer los detalles estructurales del núcleo del reactor.

Por lo tanto, en este caso, el valor de la función de importancia, de los neutrones en un punto del espacio fase se puede interpretar como el número total de fisiones (ó potencia del reactor) producida en promedio por un neutrón situado en ese punto. La misma conclusión es válida para la función de importancia de los precursores.

Resumiendo, lo que se hizo en este capítulo fué aplicar el método de eigenvectores al análisis de algunos parámetros involucrados en las ecuaciones cinéticas puntuales, y se observa que en caso de no existir fuentes externas de neutrones, los valores de los parámetros tienden al valor del estado fundamental.

Después analizamos la utilidad e interpretación de la función de importancia en un ejemplo particular.

En el próximo capítulo se obtienen algunas soluciones aproximadas de las ecuaciones cinéticas puntuales.

CAPITULO VIII

SOLUCION APROXIMADA DE LAS ECUACIONES CINÉTICAS PUNTUALES

VIII.1 INTRODUCCION

En éste Capítulo se obtienen algunas soluciones-análíticas aproximadas y se comparan con soluciones obtenidas por métodos analógicos (usando una computadora-analógica), de las ecuaciones cinéticas puntuales en el modelo de un grupo de neutrones retardados, con fuente efectiva de la forma $S(t) = \bar{S}_0 [u(t) - u(t-T_0)]$ (donde $u(t)$ es la función de Heaviside) y se comparan ambas soluciones. Es importante recordar que la fuente externa con la que trabajamos es la fuente efectiva, la cual es, como vimos en el Capítulo V, un promedio pesado de la fuente externa real con las funciones de forma de la densidad de neutrones y su función de importancia.

Una solución analítica rigurosa de las ecuaciones cinéticas puntuales obtenidas en el Capítulo V, se vuelve prácticamente imposible de obtener, por el grado de complejidad que se tiene.

Aún en el caso de un solo grupo de neutrones retardados, la solución rigurosa es sumamente difícil de obtener, dado que los parámetros de las ecuaciones cinéticas son funciones del tiempo.

Así pues, se obtienen algunas soluciones de las ecuaciones cinéticas puntuales en el modelo de un sólo grupo de neutrones retardados, con la aproximación de que los parámetros involucrados en dichas ecuaciones sean independientes del tiempo.

VIII.2 ECUACIONES CINÉTICAS PUNTUALES APROXIMADAS.

Empezaremos por hacer aproximaciones sobre las ecuaciones cinéticas puntuales para el caso de 6 grupos de neutrones retardados, para que en la siguiente sección particularicemos al caso de un solo grupo de neutrones retardados.

Las ecuaciones cinéticas puntuales fueron obtenidas en (V.3.8) y (V.3.15) y son

$$\dot{P}(t) = P(t) \frac{\rho(t) - \beta_e(t) - W_0(t)}{\lambda(t)} + \sum_{i=1}^6 \lambda_i b_i(t) \bar{C}_i(t) + \bar{S}(t)$$

$$\dot{\bar{C}}_i(t) = \frac{\beta_{ie}(t)}{\lambda(t)} P(t) - (\lambda_i - W_{3i}(t)) \bar{C}_i(t)$$

$i=1, 2, \dots, 6.$

Ahora, el hecho de encontrar la solución rigurosa de las ecuaciones anteriores implica un conocimiento de las funciones de forma (CAPITULO V), el cual es logrado sólo si conocemos explícitamente los eigenvectores $\vec{\Phi}_{n, \epsilon}$

sus eigenvalores ω_{n_6} y sus correspondientes adjuntos. En pocas palabras la solución depende del conocimiento de la solución rigurosa de las ecuaciones de eigenvalores (CAPÍTULO VI), lo cual es, para todos los casos prácticos, imposible y se tiene que hacer una aproximación sobre los parámetros $P(t)$, $\beta_{ie}(t)$, $l(t)$, $w_1(t)$, $w_{3i}(t)$ y $b_i(t)$.

Como se discutió en el Capítulo anterior, todos los parámetros anteriores tienen un comportamiento temporal transitorio, tendiendo asintóticamente hacia un valor constante, por lo que si despreciamos éste el comportamiento transitorio y tomamos los valores de éstos parámetros como constantes en el tiempo e iguales a su valor en el estado fundamental, reducimos la complejidad del problema en una forma considerable.

Así pues, con éstas aproximaciones las ecuaciones cinéticas puntuales quedan como:

$$\dot{P}(t) = P(t) \frac{P - P_e - W_1}{l} + \sum_{i=1}^6 k_i b_i \bar{C}_i(t) + \bar{S}(t) \dots \text{(VIII.2.1)}$$

$$\dot{\bar{C}}_i(t) = \frac{\beta_{ie}}{l} P(t) - (k_i - W_{3i}) \bar{C}_i(t) \dots \text{(VIII.2.2)}$$

$$i = 1, 2, \dots, 6.$$

Los cuales llamaremos ecuaciones cinéticas puntuales aproximadas. En la siguiente sección nos reduciremos a tratar el caso de un grupo de neutrones retardados con esta aproximación de parámetros constantes.

VIII.3. SOLUCION ANALITICA PARA EL MODELO CON UN GRUPO DE NEUTRONES RETARDADOS.

En ésta sección encontramos, algunas soluciones particulares de las ecuaciones cinéticas puntuales en el modelo de 1 grupo de neutrones retardados. Este modelo - consiste en suponer que todos los neutrones retardados - forman parte de un solo grupo, siendo la constante λ asociada a ese grupo, un promedio pesado de los constantes de decaimiento pertenecientes al caso de 6 grupos de neutrones retardados; y la fracción β_e para este grupo es (la suma de las β_i en el caso de 6 grupos

Para ésta situación las ecuaciones cinéticas puntuales aproximados (VIII.2.1) y (VIII.2.2) quedan como:

$$\left. \begin{aligned} \dot{P}(t) &= \frac{\rho - \beta_e - W_1}{\lambda} P(t) + \lambda b_0 \bar{c}(t) + \bar{S}(t) \\ \dot{\bar{c}}(t) &= \frac{\beta_e}{\lambda} P(t) - (\lambda - W_3) \bar{c}(t) \end{aligned} \right\} \text{(VIII.3.1)}$$

Los cuales pueden ponerse en forma matricial como:

$$\begin{pmatrix} \dot{P}(t) \\ \dot{C}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{P - P_e - W_1}{\lambda} & \lambda b_0 \\ P_e/\lambda & -\lambda + W_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P(t) \\ C(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \bar{S}(t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

... (VIII.3.2)

Ecuación que es de la forma

$$\dot{\vec{X}}(t) = A \vec{X}(t) + \vec{S}(t) \quad \dots \text{(VIII.3.3)}$$

donde

$$\vec{X}(t) = \begin{pmatrix} P(t) \\ C(t) \end{pmatrix} \quad \dots \text{(VIII.3.4)}$$

y

$$A = \begin{pmatrix} \frac{P - P_e - W_1}{\lambda} & \lambda b_0 \\ P_e/\lambda & -\lambda + W_3 \end{pmatrix} \quad \dots \text{(VIII.3.5)}$$

$$\mathbb{X}(s) = (s\mathbb{I} - A)^{-1} \vec{x}(0^+) + (s\mathbb{I} - A)^{-1} R(s)$$

... (VIII.3.8)

De manera que la solución queda como:

$$\vec{x}(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ (s\mathbb{I} - A)^{-1} \right\} \vec{x}(0^+) + \mathcal{L}^{-1} \left\{ (s\mathbb{I} - A)^{-1} R(s) \right\}$$

... (VIII.3.9)

Donde $\mathcal{L}^{-1} \{ \}$ denota la transformada inversa de Laplace.

ce. Usando (10) :

$$(s\mathbb{I} - A)^{-1} = \frac{\text{Adjunta}(s\mathbb{I} - A)}{\det(s\mathbb{I} - A)} \quad \dots \text{(VIII.3.10)}$$

Y como

$$s\mathbb{I} - A = \begin{pmatrix} s - \frac{\rho - \rho e - W_1}{\rho} & -k b_0 \\ -\rho e / \rho & s + k - W_3 \end{pmatrix}$$

Tenemos:

$$|s\mathbb{I} - A| = (s + k - W_3) \left(s - \frac{\rho - \rho e - W_1}{\rho} \right) - \frac{k \rho e b_0}{\rho} \quad \dots \text{(VII.3.11)}$$

y

$$\text{Adj}(s\mathbb{I}-A) = \begin{pmatrix} s+k-W_3 & \lambda b_0 \\ \beta e/\lambda & s - \frac{\rho - \beta e - W_1}{\lambda} \end{pmatrix} \quad (\text{VIII.3.12})$$

De modo que

$$(s\mathbb{I}-A)^{-1} = \frac{\begin{pmatrix} s+k-W_3 & \lambda b_0 \\ \beta e/\lambda & s - \frac{\rho - \beta e - W_1}{\lambda} \end{pmatrix}}{s^2 + s\left(\lambda - W_3 - \frac{\rho - \beta e - W_1}{\lambda}\right) - \frac{\lambda}{\lambda}[\rho - \beta e(1-b_0) - W_1] + W_3 \frac{\rho - \beta e - W_1}{\lambda}} \quad \dots (\text{VIII.3.13})$$

Y sustituyendo en (VIII.3.9) :

$$\vec{X}(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\begin{pmatrix} s+k-W_3 & \lambda b_0 \\ \beta e/\lambda & s - \frac{\rho - \beta e - W_1}{\lambda} \end{pmatrix}}{s^2 + s\left(\lambda - W_3 - \frac{\rho - \beta e - W_1}{\lambda}\right) + \frac{\lambda}{\lambda}[\rho - \beta e(1-b_0) - W_1] + W_3 \frac{\rho - \beta e - W_1}{\lambda}} \right\} \vec{X}(0^+)$$

$$+ \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\begin{pmatrix} s+k-W_3 & \lambda b_0 \\ \beta e/\lambda & s - \frac{\rho - \beta e - W_1}{\lambda} \end{pmatrix} \mathcal{R}(s)}{s^2 + s\left(\lambda - W_3 - \frac{\rho - \beta e - W_1}{\lambda}\right) - \frac{\lambda}{\lambda}[\rho - \beta e(1-b_0) - W_1] + W_3 \frac{\rho - \beta e - W_1}{\lambda}} \right\}$$

Como mencionamos antes, vamos a proponer que :

$$\vec{S}(t) = \begin{pmatrix} \bar{S}_0 [\mu(t) - \mu(t - \tau_0)] \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{VIII.3.15})$$

Donde $u(t)$ es la función de Heaviside, definida por

$$\mu(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

De manera que (Ver Apéndice A parte 2)

$$\mathbb{R}(s) = \begin{pmatrix} \frac{\bar{S}_0}{s} [1 - e^{-\tau_0 s}] \\ 0 \end{pmatrix} \quad \dots (\text{VIII.3.16})$$

tal que

$$(s\mathbb{I} - A)^{-1} \mathbb{R}(s) = \begin{pmatrix} \frac{(s + \lambda - W_3) [1 - e^{-\tau_0 s}]}{s \left[s^2 + s(\lambda - W_3 - \frac{\rho - \rho_c - W_1}{\lambda}) - \frac{\lambda}{\lambda} \left[\rho - \beta_c(1 - b_c) - W_1 \right] + W_3 \frac{\rho - \beta_c - W_1}{\lambda} \right]} \\ \frac{\frac{\rho_c}{\lambda} [1 - e^{-\tau_0 s}]}{s \left[s^2 + s(\lambda - W_3 - \frac{\rho - \beta_c - W_1}{\lambda}) - \frac{\lambda}{\lambda} \left[\rho - \beta_c(1 - b_c) - W_1 \right] + W_3 \frac{\rho - \beta_c - W_1}{\lambda} \right]} \end{pmatrix} \quad \dots (\text{VIII.3.17})$$

Factorizando el denominador

$$\begin{aligned}
 & s \left\{ s^2 + s \left(\lambda - W_3 - \frac{p - p_e - W_1}{\alpha} \right) - \frac{\lambda}{\alpha} [p - p_e(1 - b_0) - W_1] + W_3 \frac{p - p_e - W_1}{\alpha} \right\} = \\
 & = s \left\{ s + \frac{\left(\lambda - W_3 - \frac{p - p_e - W_1}{\alpha} \right) - \sqrt{\left(\lambda - W_3 - \frac{p - p_e - W_1}{\alpha} \right)^2 + 4 \left[\frac{\lambda}{\alpha} [p - p_e(1 - b_0) - W_1] + W_3 \frac{p - p_e - W_1}{\alpha} \right]}}{2} \right\} \\
 & \times \left\{ s + \frac{\left(\lambda - W_3 - \frac{p - p_e - W_1}{\alpha} \right) + \sqrt{\left(\lambda - W_3 - \frac{p - p_e - W_1}{\alpha} \right)^2 + 4 \left[\frac{\lambda}{\alpha} [p - p_e(1 - b_0) - W_1] + W_3 \frac{p - p_e - W_1}{\alpha} \right]}}{2} \right\} \\
 & \dots \text{(VIII.III.18)}
 \end{aligned}$$

Y para simplificar la escritura definimos

$$\begin{aligned}
 a & \equiv \frac{\left(\lambda - W_3 - \frac{p - p_e - W_1}{\alpha} \right) + \sqrt{\left(\lambda - W_3 - \frac{p - p_e - W_1}{\alpha} \right)^2 + 4 \left[\frac{\lambda}{\alpha} [p - p_e(1 - b_0) - W_1] + W_3 \frac{p - p_e - W_1}{\alpha} \right]}}{2} \\
 b & \equiv \frac{\left(\lambda - W_3 - \frac{p - p_e - W_1}{\alpha} \right) - \sqrt{\left(\lambda - W_3 - \frac{p - p_e - W_1}{\alpha} \right)^2 + 4 \left[\frac{\lambda}{\alpha} [p - p_e(1 - b_0) - W_1] + W_3 \frac{p - p_e - W_1}{\alpha} \right]}}{2} \\
 & \dots \text{(VIII.3.19)}
 \end{aligned}$$

De manera que la solución (VIII.III.13) queda co-

$$\text{mo: } \vec{X}(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \begin{pmatrix} \frac{s + \lambda - W_3}{s(s+a)(s+b)} & \frac{\lambda b_0}{s(s+a)(s+b)} \\ \frac{p_0/\alpha}{s(s+a)(s+b)} & \frac{s - \frac{p - p_e - W_1}{\alpha}}{s(s+a)(s+b)} \end{pmatrix} \right\} \vec{X}(0^+)$$

$$+ \mathcal{L}^{-1} \left\{ \begin{pmatrix} \frac{(s + \lambda - W_3) [1 - e^{-T_0 s}]}{s(s+a)(s+b)} \\ \frac{p_0/\alpha [1 - e^{-T_0 s}]}{s(s+a)(s+b)} \end{pmatrix} \right\}$$

... (VIII.3.20)

Finalmente, con ayuda del Apéndice A y recordando

que

$$\vec{X}(t) = \begin{pmatrix} P(t) \\ \bar{c}(t) \end{pmatrix}$$

La solución es:

$$\begin{aligned} P(t) = & P(0^+) \frac{1}{b-a} \left[(\lambda - W_3 - a) e^{-at} - (\lambda - W_3 - b) e^{-bt} \right] \\ & + \bar{c}(0^+) \frac{\lambda b a}{b-a} (e^{-at} - e^{-bt}) \\ & + \bar{S}_0 \mu(t) \left[\frac{\lambda - W_3}{a b} - \frac{\lambda - W_3 - a}{a(b-a)} e^{-at} - \frac{\lambda - W_3 - b}{b(a-b)} e^{-bt} \right] \\ & - \bar{S}_0 \mu(t - T_0) \left[\frac{\lambda - W_3}{a b} - \frac{\lambda - W_3 - a}{a(b-a)} e^{-a(t-T_0)} - \frac{\lambda - W_3 - b}{b(a-b)} e^{-b(t-T_0)} \right] \end{aligned}$$

(VIII.3.21)

y

$$\begin{aligned} \bar{c}(t) = & P(0^+) \frac{P_0/l}{b-a} (e^{-at} - e^{-bt}) + \bar{c}(0^+) \frac{1}{b-a} \left[(b + \frac{P_0 - W_1}{l}) e^{-at} \right. \\ & \left. - (a + \frac{P_0 - W_1}{l}) e^{-bt} \right] + \bar{S}_0 \frac{P_0}{l} \mu(t) \left[\frac{1}{a b} - \frac{e^{-at}}{a(b-a)} - \frac{e^{-bt}}{b(a-b)} \right] \\ & - \bar{S}_0 \frac{P_0}{l} \mu(t - T_0) \left[\frac{1}{a b} - \frac{e^{-a(t-T_0)}}{a(b-a)} - \frac{e^{-b(t-T_0)}}{b(a-b)} \right] \end{aligned}$$

... (VIII.3.22)

Con "a" y "b" constantes definidos por las expresiones (VIII.3.19).

Veamos ahora como se comportan las soluciones para tres casos distintos:

- a) Para $\rho = 0$, b) Para $\rho < 0$ con $|\rho| \ll \beta_e$ y
c) para $\rho > 0$ con $\rho \ll \beta_e$

La restricción en la magnitud de la reactividad se debe a que, como vimos en el Capítulo anterior, para reactividades pequeños $w_1(t) \approx 0$, (VII.2.24) y $b_i(t) \approx 1$ (VII.2.27).

Por lo tanto, si tomamos los valores asintóticos de los parámetros $w_1(t)$, $b_i(t)$ y $w_{3i}(t)$, con la condición de que la reactividad sea pequeña (condición que nos dice que las importancias de neutrones y precursores son practicamente iguales), tenemos:

$$\left. \begin{array}{l} w_{3i}(t) \approx 0 \\ w_1(t) \approx 0 \\ b_i(t) \approx 1 \end{array} \right\} \dots \text{(VIII.3.23)}$$

Con lo cual $b_0 = 1$, $w_3 = 0$.

Sustituyendo estos valores en las soluciones (VII,3,20) y (VIII,3.21), podemos ahora proceder a analizar cada uno de los casos mencionados antes.

Trabajaremos primero con un sistema crítico y procederemos en la forma siguiente: primero, el sistema está

inicialmente en potencia cero y elevamos la potencia --
introduciendo una fuente externa de neutrones y segundo,
consideraremos inicialmente crítico con un cierto modelo
de potencia constante, sin fuentes externas y cambiare--
mos súbitamente la reactividad.

Así pues, sea:

$$a) \quad \rho = 0$$

De las definiciones (VIII.3.18) con $w_{31}=w_3 = \rho = 0$

y $b_0=1$, ver apéndice A.2

$$a = \lambda + \beta e/\lambda$$

$$b = 0$$

De manera que las ecuaciones (VIII.3.20) y (VIII.
3.21) quedan como:

$$\begin{aligned} P(t) = & P(0^+) \frac{1}{\lambda + \beta e/\lambda} \left[\lambda + \frac{\beta e}{\lambda} e^{-(\lambda + \beta e/\lambda)t} \right] + \\ & + \bar{C}(0^+) \frac{\lambda}{\lambda + \beta e/\lambda} \left[1 - e^{-(\lambda + \beta e/\lambda)t} \right] \\ & + \frac{\bar{S}_0}{\lambda + \beta e/\lambda} \left\{ \frac{\beta e}{\lambda} \left[u(t) \left[1 - e^{-(\lambda + \beta e/\lambda)t} \right] - u(t - \tau_0) \left[1 - e^{-(\lambda + \beta e/\lambda)(t - \tau_0)} \right] \right] \right\} \\ & + \lambda \left\{ t \left[u(t) - u(t - \tau_0) \right] + \tau_0 u(t - \tau_0) \right\} \end{aligned}$$

(VIII.3.24)

Y

$$\begin{aligned} \bar{C}(t) = & P(0^+) \frac{P_e}{\lambda} [1 - e^{-(\lambda + P_e/\rho)t}] + \frac{\bar{C}(0^+)}{\lambda + P_e/\rho} \left[\lambda e^{-(\lambda + P_e/\rho)t} - P_e/\rho \right] \\ & + \bar{S}_0 \frac{P_e}{\lambda} u(t) \left[\frac{e^{-(\lambda + P_e/\rho)t}}{(\lambda + P_e/\rho)^2} + \frac{t}{\lambda + P_e/\rho} - \frac{1}{(\lambda + P_e/\rho)^2} \right] \\ & - \bar{S}_0 \frac{P_e}{\lambda} u(t - \tau_0) \left[\frac{e^{-(\lambda + P_e/\rho)(t - \tau_0)}}{(\lambda + P_e/\rho)^2} + \frac{t - \tau_0}{\lambda + P_e/\rho} - \frac{1}{(\lambda + P_e/\rho)^2} \right] \end{aligned}$$

... (VIII.3.25)

Las gráficas de éstas soluciones son mostrados -- en la figura VIII.1, para la situación $P(0^+) = \bar{C}(0^+) = 0$

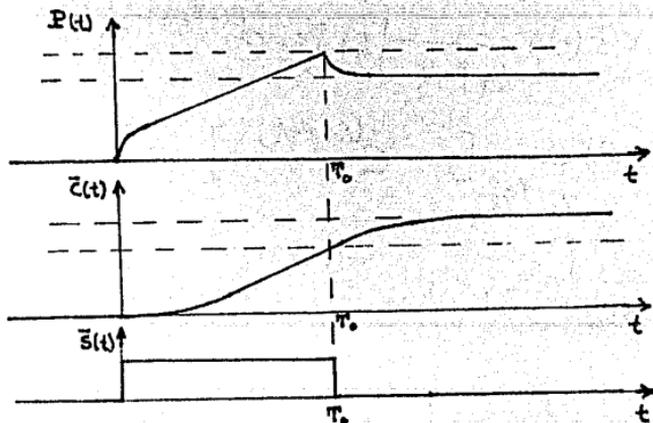


Fig. VIII.1 Grafica de las ecuaciones (VIII.3.24) y (VIII.3.25) para el caso de que $P(0^+) = 0$ y $\bar{C}(0^+) = 0$.

La explicación física del comportamiento mostrado en la figura VIII.1 es la siguiente.

En este caso el sistema es crítico, inicialmente no existen neutrones ni precursores, e insertamos una fuente externa de neutrones al tiempo $t=0$ y la extraemos al tiempo $t=T_0$. Mediante la inserción de la fuente podemos elevar el nivel de potencia del reactor al punto deseado.

Las ecuaciones cinéticas puntuales para éste caso son:

$$\left. \begin{aligned} \dot{P}(t) &= \frac{\beta_e}{\lambda} P(t) + \lambda \bar{C}(t) + S_0(t) \\ \dot{\bar{C}}(t) &= \frac{\beta_e}{\lambda} P(t) - \lambda \bar{C}(t) \end{aligned} \right\} \text{(VIII.3.26)}$$

Se puede observar de éstas ecuaciones que la suma de las razones de producción de neutrones y precursores es una función igual a la magnitud de la fuente. Esto es lógico puesto que el sistema es crítico y la producción neta de neutrones y precursores debe ser igual a la magnitud de la fuente externa.

Las ecuaciones (VIII.3.26), al ser evaluados en $t=0$, nos dan la razón de producción de neutrones y precursores a ese tiempo; que son:

$$\left. \begin{aligned} \dot{P}(t) \Big|_{t=0} &= \bar{S}_0 \\ \dot{C}(t) \Big|_{t=0} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots (\text{VIII.3.27})$$

Y éstos son los pendientes de los curvos $P(t)$ y $C(t)$ en $t=0$. respectivamente.

Esto es de esperarse debido a que; a) no hay neutrones antes de $t=0$, ó sea, antes de la introducción de la fuente externa y b) al hecho de que los precursores son formados con un cierto tiempo de retraso.

A un tiempo Δt posterior, el valor de estas funciones es:

$$\left. \begin{aligned} P(\Delta t) &= \bar{S}_0 \Delta t \\ C(\Delta t) &= 0 \end{aligned} \right\} (\text{VIII.3.28})$$

Y las razones de producción , es decir, los pendientes de los curvas, son ahora:

$$\left. \begin{aligned} \dot{P}(t) \Big|_{t=\Delta t} &= -\frac{\beta_e}{\lambda} \bar{S}_0 \Delta t + \bar{S}_0 \\ \dot{C}(t) \Big|_{t=\Delta t} &= \frac{\beta_e}{\lambda} \bar{S}_0 \Delta t \end{aligned} \right\} \dots (\text{VIII.3.29})$$

Con lo cual vemos que, debido al efecto de neutrones retardados, la razón de producción de neutrones, se ve disminuída por la formación de precursores y por lo tanto la razón de formación de precursores se incrementa. Como consecuencia , podemos pensar que el factor β_e/λ es la velocidad de producción de precursores--

res por unidad de "densidad" de neutrones $P(t)$. Así pues, al transcurrir, el tiempo la pendiente de $P(t)$ disminuirá y la de $\bar{C}(t)$ aumentará, ambos hasta un cierto límite; éste límite se debe a que la producción de precursores aumenta en forma proporcional a la "densidad" de neutrones $P(t)$, y si esta disminuye la densidad de precursores también disminuirá, aunque con retraso.

Por lo tanto, una vez, alcanzado éste límite las razones de producción de neutrones y de precursores serán constantes. Esto es mostrado en la gráfica en la -- parte en la cual las funciones $P(t)$ y $\bar{C}(t)$ aumentan linealmente.

En el instante $t=T_0$, en el cual se extrae la -- fuente externa de neutrones, dado que el sistema es crítico, no hay producción neta de neutrones y precursores, y utilizando el hecho de que la extracción de la fuente no afecta inmediatamente la producción de precursores, -- debido al tiempo de retraso, pero la razón de producción de neutrones si se ve afectada, y dado que la suma de las razones de producción es cero, si la razón de producción de precursores es la misma, ahora la razón de producción de neutrones debe ser negativa y, por lo tanto, la densidad de neutrones decaerá, mientras que la de precursores aumentará hasta el punto en el cual la razón de decaimiento de los precursores sea igual a la razón de su producción a partir del cual $P(t)$ y $\bar{C}(t)$ serán constan

tes.

$$b) \rho < 0 ; |P| \ll \beta e$$

De las definiciones (VIII.3.19), (ver apéndice

A.2), tenemos:

$$a \approx \frac{(\lambda + \frac{\beta e + |P|}{\lambda}) + \sqrt{(\lambda + \frac{\beta e + |P|}{\lambda})^2 - \frac{4\lambda|P|}{\lambda}}}{2} \approx \lambda + \frac{\beta e + |P|}{\lambda}$$

$$b \approx \frac{(\lambda + \frac{\beta e + |P|}{\lambda}) - \sqrt{(\lambda + \frac{\beta e + |P|}{\lambda})^2 - \frac{4\lambda|P|}{\lambda}}}{2} \approx \frac{\lambda|P|}{\lambda} \frac{1}{\lambda + \frac{\beta e + |P|}{\lambda}}$$

Para lo que $a > 0$ y $b > 0$ y

De manera que (VIII.3.21) que da como:

$$P(t) = P(\sigma) \frac{(\lambda + \frac{\beta e + |P|}{\lambda})}{[(\lambda + \frac{\beta e + |P|}{\lambda})^2 - \frac{\lambda|P|}{\lambda}]} \left\{ \frac{\beta e + |P|}{\lambda} e^{-\frac{(\lambda + \frac{\beta e + |P|}{\lambda})}{\lambda} t} + \right. \\ \left. + \lambda \left[1 - \frac{|P|/\lambda}{\lambda + \frac{\beta e + |P|}{\lambda}} \right] e^{-\frac{\lambda|P|}{\lambda} \frac{1}{\lambda + \frac{\beta e + |P|}{\lambda}} t} \right\} + \\ + \frac{\lambda^2|P|}{\lambda} \frac{\bar{C}(\sigma)}{[(\lambda + \frac{\beta e + |P|}{\lambda})^2 - \frac{\lambda|P|}{\lambda}]} \left\{ e^{-\frac{\lambda|P|}{\lambda} \frac{1}{\lambda + \frac{\beta e + |P|}{\lambda}} t} - e^{-\frac{(\lambda + \frac{\beta e + |P|}{\lambda})}{\lambda} t} \right\}$$

-183-

$$\begin{aligned}
 & + \bar{S}_0 \mu(t) \left[\frac{\lambda}{|\rho|} + \frac{\frac{\rho e + |\rho|}{\lambda} e^{-\left(\lambda + \frac{\rho e + |\rho|}{\lambda}\right)t}}{\left[\left(\lambda + \frac{\rho e + |\rho|}{\lambda}\right)^2 - \frac{\lambda |\rho|}{\lambda}\right]} - \frac{\frac{\lambda}{|\rho|} \left[1 - \frac{\lambda |\rho| / \lambda}{\lambda + \frac{\rho e + |\rho|}{\lambda}}\right] e^{-\frac{\lambda |\rho| / \lambda} \lambda t}}{\left[1 - \frac{\lambda |\rho| / \lambda}{\left(\lambda + \frac{\rho e + |\rho|}{\lambda}\right)^2}\right]} \right] \\
 & - \bar{S}_0 \mu(t - \tau_0) \left[\frac{\lambda}{|\rho|} + \frac{\frac{\rho e + |\rho|}{\lambda} e^{-\left(\lambda + \frac{\rho e + |\rho|}{\lambda}\right)(t - \tau_0)}}{\left[\left(\lambda + \frac{\rho e + |\rho|}{\lambda}\right)^2 - \frac{\lambda |\rho|}{\lambda}\right]} \right]
 \end{aligned}$$

... (VIII.3.30)

Y para la ecuación (VIII.3.22) queda como:

$$\begin{aligned}
 \bar{z}(t) &= P(\sigma^+) \frac{\frac{\rho e}{\lambda} \left[\lambda + \frac{\rho e + |\rho|}{\lambda}\right]}{\left[\left(\lambda + \frac{\rho e + |\rho|}{\lambda}\right)^2 - \frac{\lambda |\rho|}{\lambda}\right]} \left\{ e^{-\frac{\lambda |\rho| / \lambda}{\lambda + \frac{\rho e + |\rho|}{\lambda}} t} - e^{-\left(\lambda + \frac{\rho e + |\rho|}{\lambda}\right) t} \right\} \\
 &- \bar{z}(\sigma^+) \frac{\left[\lambda + \frac{\rho e + |\rho|}{\lambda}\right]}{\left[\left(\lambda + \frac{\rho e + |\rho|}{\lambda}\right)^2 - \frac{\lambda |\rho|}{\lambda}\right]} \left\{ \lambda e^{-\left(\lambda + \frac{\rho e + |\rho|}{\lambda}\right) t} - \left[\frac{\lambda |\rho| / \lambda}{\lambda + \frac{\rho e + |\rho|}{\lambda}} + \lambda - \frac{\rho e + |\rho|}{\lambda} \right] e^{-\frac{\lambda |\rho| / \lambda}{\lambda + \frac{\rho e + |\rho|}{\lambda}} t} \right\} \\
 &+ \bar{S}_0 \frac{\rho e}{\lambda} \mu(t) \left\{ \frac{\lambda}{\lambda |\rho|} + \frac{e^{-\left(\lambda + \frac{\rho e + |\rho|}{\lambda}\right)t}}{\left[\left(\lambda + \frac{\rho e + |\rho|}{\lambda}\right)^2 - \frac{\lambda |\rho|}{\lambda}\right]} - \frac{\lambda}{\lambda |\rho|} \frac{e^{-\frac{\lambda |\rho| / \lambda}{\lambda + \frac{\rho e + |\rho|}{\lambda}} t}}{\left[1 - \frac{\lambda |\rho| / \lambda}{\left(\lambda + \frac{\rho e + |\rho|}{\lambda}\right)^2}\right]} \right\} \\
 &- \bar{S}_0 \frac{\rho e}{\lambda} \mu(t - \tau_0) \left\{ \frac{\lambda}{\lambda |\rho|} + \frac{e^{-\left(\lambda + \frac{\rho e + |\rho|}{\lambda}\right)(t - \tau_0)}}{\left[\left(\lambda + \frac{\rho e + |\rho|}{\lambda}\right)^2 - \frac{\lambda |\rho|}{\lambda}\right]} - \frac{\lambda}{\lambda |\rho|} \frac{e^{-\frac{\lambda |\rho| / \lambda}{\lambda + \frac{\rho e + |\rho|}{\lambda}} (t - \tau_0)}}{\left[1 - \frac{\lambda |\rho| / \lambda}{\left(\lambda + \frac{\rho e + |\rho|}{\lambda}\right)^2}\right]} \right\}
 \end{aligned}$$

... (VIII.3.31)

Las gráficas de éstas soluciones son mostrados en la figura VIII.2, para el caso $P(0^+) = \bar{c}(0^+) = 0$

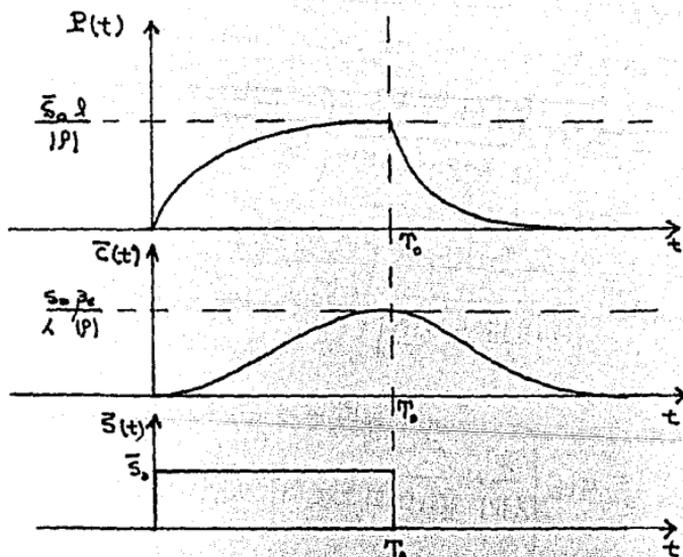


Figura VIII.2. Gráfica de las ecuaciones (VIII.3.30) y (VIII.3.31) para el caso de que $P(0^+) = \bar{c}(0^+) = 0$.

Físicamente, el comportamiento mostrado en la gráfica VIII.2 se explica en la forma siguiente.

En éste caso el sistema es subcrítico al introducir la reactividad negativa y los ecuaciones cinéticas que describen ese comportamiento son

$$\left. \begin{aligned} \dot{P}(t) &= -\frac{|P| + \beta_e}{\lambda} P(t) + \lambda \bar{C}(t) + \bar{S}_0 \\ \dot{\bar{C}}(t) &= \frac{\beta_e}{\lambda} P(t) - \lambda \bar{C}(t) \end{aligned} \right\} \dots (\text{VIII.3.32})$$

El coeficiente $\frac{\beta_e}{\lambda}$ se puede entender de la misma manera que en inciso (a); el coeficiente $-\frac{|P|}{\lambda}$ lo entenderemos como la rapidez de pérdida neta de neutrones por unidad de "densidad" de neutrones, $P(t)$.

El aumento de la densidad de neutrones en $t=0$ es debido a la introducción de la fuente externa. Conforme transcurre el tiempo, la pendiente de la curva $P(t)$ se hace cada vez menos pronunciada debido tanto a los neutrones que son retardados como a la pérdida neta de ellos debido a que el sistema es subcrítico; pero la densidad de neutrones aumentará mientras que las pérdidas netas sean inferiores a la cantidad de neutrones introducidos por la fuente externa; en la instante en el cual se igualen estas dos cantidades la población de neutrones se mantendrá constante.

Así pues, este nivel se alcanza con:

$$-\frac{|P|}{\lambda} P(t) + \bar{S}_0 = 0$$

Es decir, la población asintótica, estacionaria será:

$$P(t) = \frac{\lambda}{|P|} \bar{S}_0$$

En el instante en que quitamos la fuente los períodos debidos a que el sistema es subcrítico hacen que disminuya la densidad de neutrones tendiendo asintóticamente a cero.

$$c) \quad 0 < \rho \ll \beta_e$$

Para este caso (Ver apéndice A.2)

$$a \approx \lambda + \frac{\beta_e - \rho}{\lambda}$$

$$b \approx - \frac{\lambda \rho / \lambda}{\lambda + \frac{\beta_e - \rho}{\lambda}} \quad y$$

$$a - b \approx \frac{(\lambda + \frac{\beta_e - \rho}{\lambda}) + \lambda \rho / \lambda}{\lambda + \frac{\beta_e - \rho}{\lambda}}$$

De manera que las soluciones $P(t)$ y $\bar{Z}(t)$ quedan --

como:

$$P(t) = P(0^+) \frac{\lambda + \frac{\beta_e - \rho}{\lambda}}{(\lambda + \frac{\beta_e - \rho}{\lambda}) + \frac{\lambda \rho}{\lambda}} \left\{ \frac{\beta_e - \rho}{\lambda} e^{-\left(\lambda + \frac{\beta_e - \rho}{\lambda}\right)t} + \frac{\lambda \rho / \lambda}{\lambda + \frac{\beta_e - \rho}{\lambda}} e^{-\frac{\lambda \rho / \lambda}{\lambda + \frac{\beta_e - \rho}{\lambda}} t} \right\}$$

$$+ \bar{Z}(0^+) \frac{\lambda \rho / \lambda}{(\lambda + \frac{\beta_e - \rho}{\lambda}) + \frac{\lambda \rho}{\lambda}} \left\{ e^{-\left(\lambda + \frac{\beta_e - \rho}{\lambda}\right)t} - e^{-\frac{\lambda \rho / \lambda}{(\lambda + \frac{\beta_e - \rho}{\lambda})} t} \right\}$$

$$+ \bar{S}_0 \frac{\beta_e}{\lambda} u(t) \left\{ -\frac{\rho}{\lambda} + \frac{\beta_e - \rho}{\lambda} \frac{e^{-\left(\lambda + \frac{\beta_e - \rho}{\lambda}\right)t}}{\left[(\lambda + \frac{\beta_e - \rho}{\lambda}) + \frac{\lambda \rho}{\lambda}\right]} + \frac{\rho}{\lambda} \frac{\left[1 + \frac{\rho / \lambda}{(\lambda + \frac{\beta_e - \rho}{\lambda})}\right]}{\left[1 + \frac{\lambda \rho / \lambda}{(\lambda + \frac{\beta_e - \rho}{\lambda})}\right]} e^{-\frac{\lambda \rho / \lambda}{\lambda + \frac{\beta_e - \rho}{\lambda}} t} \right\}$$

$$\bar{S}_0 \frac{\bar{P}e}{\lambda} u(t-T_0) \left\{ -\frac{\lambda}{\rho} + \frac{\bar{P}e - \rho}{\lambda} \frac{e^{-(\lambda + \frac{\bar{P}e - \rho}{\lambda})(t-T_0)}}{[(\lambda + \frac{\bar{P}e - \rho}{\lambda})^2 + \frac{\lambda \rho}{\lambda}]} + \frac{\lambda}{\rho} \frac{[1 + \frac{\rho/\lambda}{(\lambda + \frac{\bar{P}e - \rho}{\lambda})}] e^{\frac{\lambda \rho/\lambda}{\lambda + \frac{\bar{P}e - \rho}{\lambda}}(t-T_0)}}{[1 + \frac{\lambda \rho/\lambda}{(\lambda + \frac{\bar{P}e - \rho}{\lambda})^2]} \right\}$$

... (VIII.3.33)

y la concentración de precursores queda:

$$\bar{C}(t) = P(0^+) \frac{\bar{P}e \left[\lambda + \frac{\bar{P}e - \rho}{\lambda} \right]}{(\lambda + \frac{\bar{P}e - \rho}{\lambda})^2 + \frac{\lambda \rho}{\lambda}} \left\{ e^{\frac{\lambda \rho/\lambda}{\lambda + \frac{\bar{P}e - \rho}{\lambda}} t} - e^{-(\lambda + \frac{\bar{P}e - \rho}{\lambda}) t} \right\}$$

$$+ \bar{C}(0^+) \frac{\lambda + \frac{\bar{P}e - \rho}{\lambda}}{(\lambda + \frac{\bar{P}e - \rho}{\lambda})^2 + \frac{\lambda \rho}{\lambda}} \left\{ \lambda e^{-(\lambda + \frac{\bar{P}e - \rho}{\lambda}) t} + \frac{\lambda \bar{P}e \rho (\frac{\bar{P}e - \rho}{\lambda})^2}{\lambda + \frac{\bar{P}e - \rho}{\lambda}} e^{\frac{\lambda \rho/\lambda}{\lambda + \frac{\bar{P}e - \rho}{\lambda}} t} \right\}$$

$$+ \bar{S}_0 \frac{\bar{P}e}{\lambda} u(t) \left\{ -\frac{\lambda}{\lambda \rho} + \frac{e^{-(\lambda + \frac{\bar{P}e - \rho}{\lambda}) t}}{[\frac{\lambda \rho}{\lambda} + (\lambda + \frac{\bar{P}e - \rho}{\lambda})^2]} + \frac{\lambda}{\lambda \rho} \frac{e^{\frac{\lambda \rho/\lambda}{\lambda + \frac{\bar{P}e - \rho}{\lambda}} t}}{[1 + \frac{\lambda \rho/\lambda}{(\lambda + \frac{\bar{P}e - \rho}{\lambda})^2]} \right\}$$

$$+ \bar{S}_0 \frac{\bar{P}e}{\lambda} u(t-T_0) \left\{ -\frac{\lambda}{\lambda \rho} + \frac{e^{-(\lambda + \frac{\bar{P}e - \rho}{\lambda})(t-T_0)}}{[\frac{\lambda \rho}{\lambda} + (\lambda + \frac{\bar{P}e - \rho}{\lambda})^2]} + \frac{\lambda}{\lambda \rho} \frac{e^{\frac{\lambda \rho/\lambda}{\lambda + \frac{\bar{P}e - \rho}{\lambda}}(t-T_0)}}{[1 + \frac{\lambda \rho/\lambda}{(\lambda + \frac{\bar{P}e - \rho}{\lambda})^2]} \right\}$$

... (VIII.3.34)

Las gráficas de estas soluciones son mostradas-

en la figura VIII.3 para el caso $P(0) = \bar{C}(0) = 0$

FIGURA VIII.3

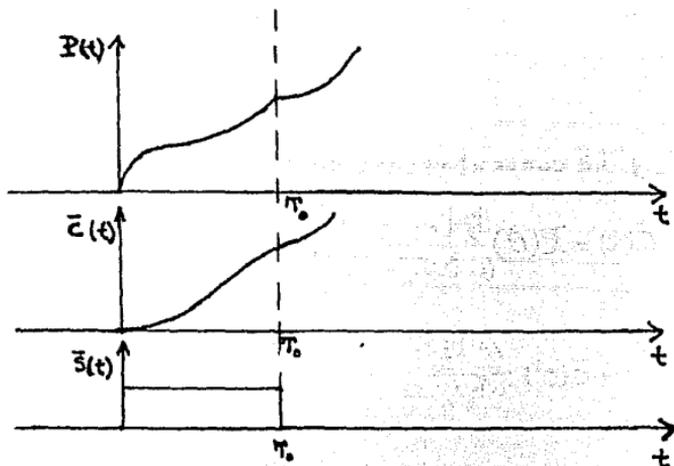


Figura VIII.3.- Gráfica de las soluciones(VIII.3.33) y - (VIII.3.34) para el caso $P(0^+) = \bar{C}(0^+) = 0$

El análisis del comportamiento temporal para éste caso se sigue del análisis de los casos anteriores.

Para éste caso el sistema es supercrítico y las -- ecuaciones cinéticas que describen éste comportamiento son

$$\left. \begin{aligned} \dot{P}(t) &= \frac{\beta - \beta_e}{\lambda} P(t) + \lambda \bar{C}(t) + \bar{S}_0 \\ \dot{\bar{C}}(t) &= \frac{\beta_e}{\lambda} P(t) - \lambda \bar{C}(t) \end{aligned} \right\} \dots (VIII.3.35)$$

En este caso $\frac{\beta}{\lambda}$ se puede entender como la rapidez de ganancia neta de neutrones por unidad de "densi-

dad" de neutrones $P(t)$.

El cambio en la densidad de neutrones en $t=0$ se debe de nuevo a la presencia de la fuente externa. La curva sufre después una pequeña disminución en la pendiente, debido a que la ganancia de neutrones es menor que la fracción de los neutrones que son retrardados; posteriormente, debido al decaimiento de los precursores, la curva tiende a levantarse, pero ya no tiende a un valor asintótico pues la ganancia neta de neutrones empieza a jugar un papel dominante, haciendo que la curva sea una exponencial creciente. En el instante $t=T_0$, en el cual extraemos la fuente, la razón de producción se ve disminuída, lo cual hace que la curva -- presente un repentino cambio de pendiente, posteriormente el factor de ganancia neta provoca de nuevo el levantamiento de la curva, tendiendo de nuevo a una exponencial creciente.

Si consideramos ahora el análisis de las ecuaciones para el caso en el cual el sistema esté libre de fuentes externas de neutrones y que sea crítico antes de $t=0$ y en ese instante el sistema cambia repentinamente ya sea a supercrítico o a subcrítico tendremos que las soluciones tienen el comportamiento que es ilustrado en los siguientes figuras.

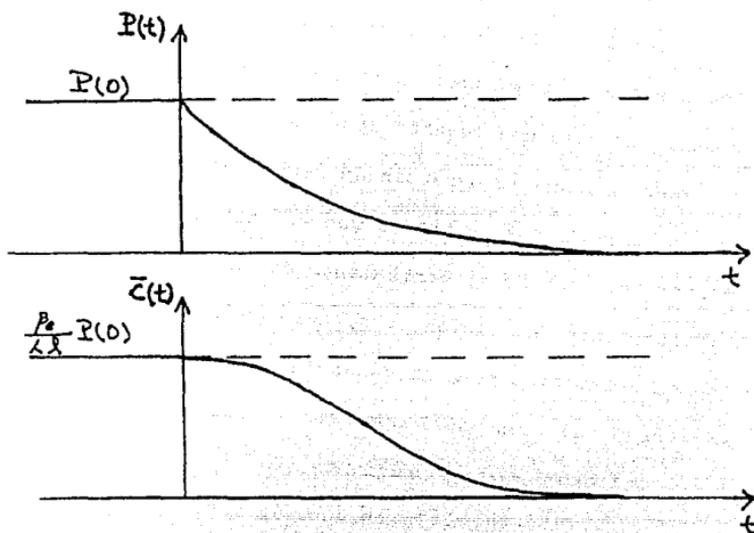


FIGURA VIII.4.- GRAFICAS DE LAS SOLUCIONES (VIII.3.30) y (VIII.3.31) para el caso de $\bar{S}_0 = 0$, si $\rho = 0$ para $T < 0$ y $\rho < 0$ para $T > 0$.

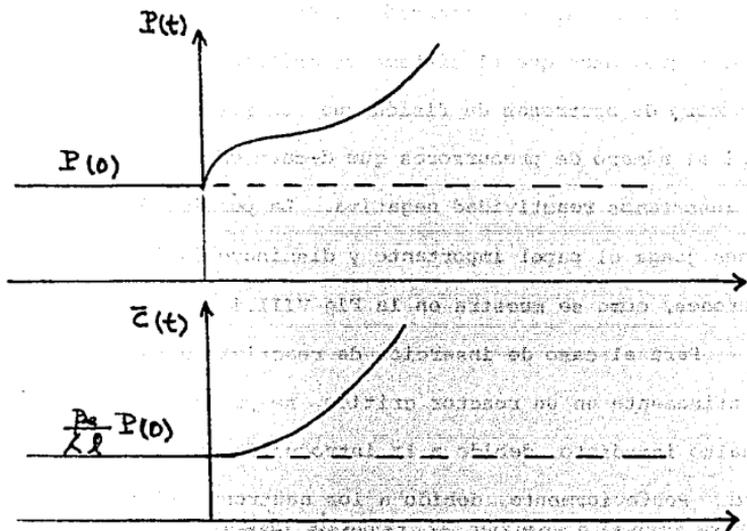


FIGURA VIII.5.- GRAFICAS DE LAS SOLUCIONES (VIII.3.30) y (VIII.3.31) para el caso de $\bar{S}_0 = \epsilon$, si $\rho = 0$ para $T < 0$ y $\rho > 0$ para $T > 0$

Para el caso de inserción de REACTIVIDAD NEGATIVA - tenemos que, dado que el sistema es crítico antes de $t=0$, - el número de neutrones de fisión que son retardados es - igual al número de precursores que decaen en momento en -- que insertamos reactividad negativa. La pérdida de neu- - trones juega el papel importante y disminuye la densidad - neutrones, como se muestra en la Fig VIII.4.

Para el caso de inserción de reactividad positiva - repentinamente en un reactor crítico, se produce el llama- do salto inmediato, debido a la introducción de la reacti-- vidad. Posteriormente, debido a los neutrones retardados la curva empieza a disminuir su pendiente hasta que los neutrones provenientes del decaimiento de los precursores empiezan a incremen- tar de nuevo la pendiente de la curva, volviéndose ésta -- asintóticamente exponencial.

VIII.4 METODO DE SOLUCION ANALOGICA

En esta sección se obtienen, usando metodos analó-- gicos, algunas soluciones de las ecuaciones cinéticas pun- tuales dados en (VIII.3.1). Las soluciones analógicas- presentan el comportamiento de una manera cualitativa y -- tienen la ventaja de que podemos observar el comportamien- to temporal de las soluciones, de una manera rápida. Se - llama metodo analógico puesto que hace uso de procesos - - eléctricos para realizar operaciones matemáticas, como - - suma, resta integración, etc.. Y las soluciones son obteni

dos observando el comportamiento temporal de voltajes en ciertas etapas del proceso.

Fijemos nuestra atención al caso que nos preocupa - por el momento, es decir encontrar las soluciones de las ecuaciones (VIII.3.1) en $W_1=0$, $b_0 = 1$ y, $W_3 = 0$ es decir -

$$\dot{P}(t) = \frac{\beta - \beta_e}{\lambda} P(t) + \lambda \bar{C}(t) + \bar{S}(t)$$

$$\dot{\bar{C}}(t) = \frac{\beta_e}{\lambda} P(t) - \lambda \bar{C}(t) + W_3 \bar{C}(t)$$

Primeramente tenemos que construir un "diagrama en bloque" (análogo a un diagrama de flujo en computación digital) del proceso, por medio del cual obtendremos las soluciones.

El "diagrama de bloques" que representa a las ecuaciones diferenciales (VIII.3.1) es el siguiente :

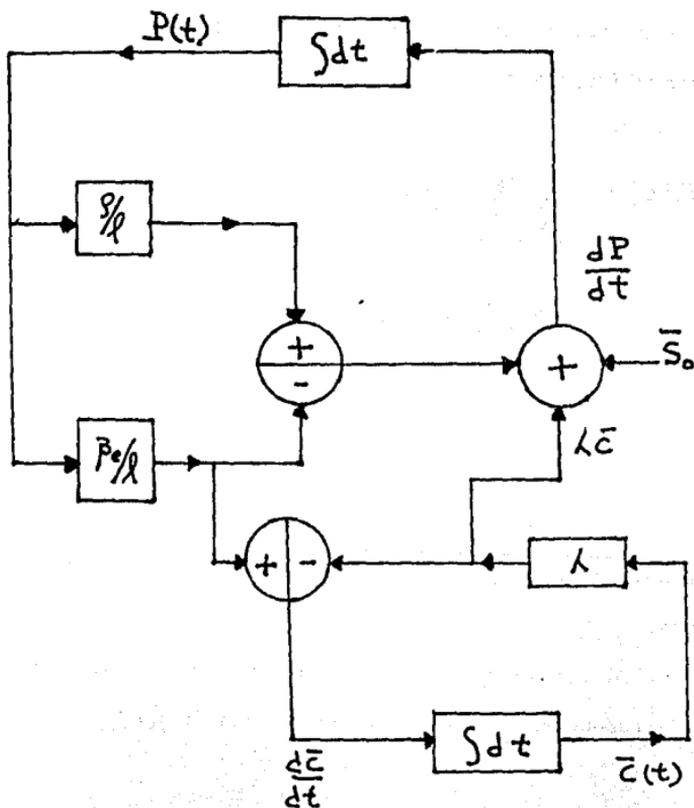
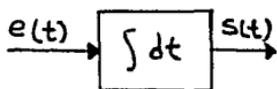


FIGURA VIII. 7 "Diagrama de bloque" de las Ecuaciones - -
(VIII.3.I)

En donde los "bloques" pueden ser entendidos como operadores, los cuales realizan la operación indicada en-

ellos, sobre la señal ó señales que entran a éstos y las flechas indican las direcciones ó caminos que deben tomar las señales.

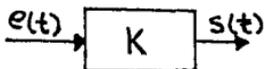
Explicaremos el significado de cada bloque



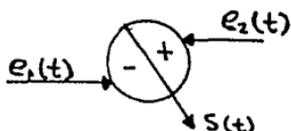
Es un bloque en el cual la señal de entrada es $e(t)$ y la de salida es $s(t)$; la relación entre $e(t)$ y $s(t)$ es la siguiente

$$s(t) = \int e(t) dt$$

Este bloque se llama ntegrador

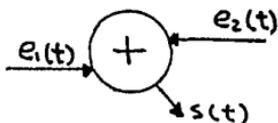


Este bloque se lla multiplicador donde $s(t) = ke(t)$



Este bloque realiza la siguiente operación

$$s(t) = e_2(t) - e_1(t)$$



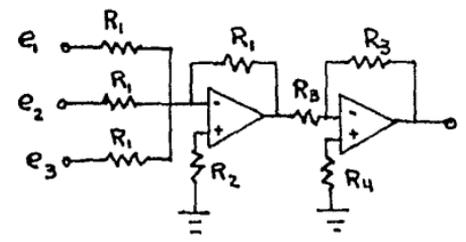
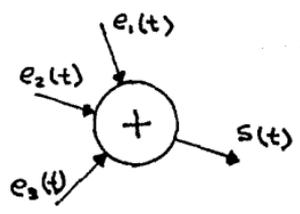
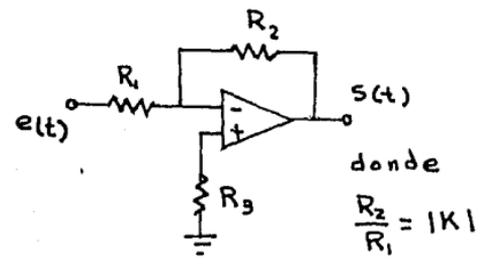
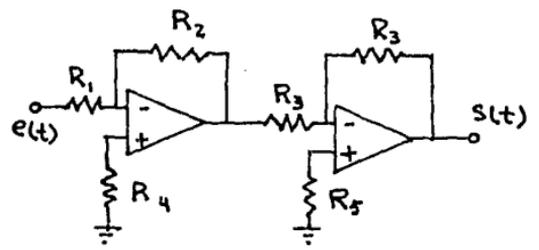
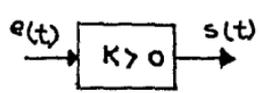
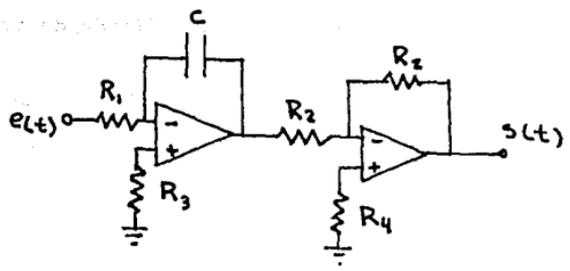
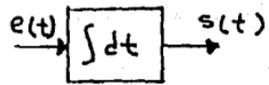
Este bloque se denomina sumador y realiza la siguiente operación -

$$s(t) = e_1(t) + e_2(t)$$

Para obtener soluciones de las ecuaciones(VIII:3I) se contruyó electrónicamente el diagrama de la Fig VIII.7 utilizando el equivalente electrónico de los siguientes bloques (Apéndice B).

bloque

Equivalente electrónico



En donde el símbolo  significa amplificador operacional (Apéndice B).

Utilizando éstas equivalentes electrónicos para --
los bloques, el diagrama de la Fig VIII.7 queda como

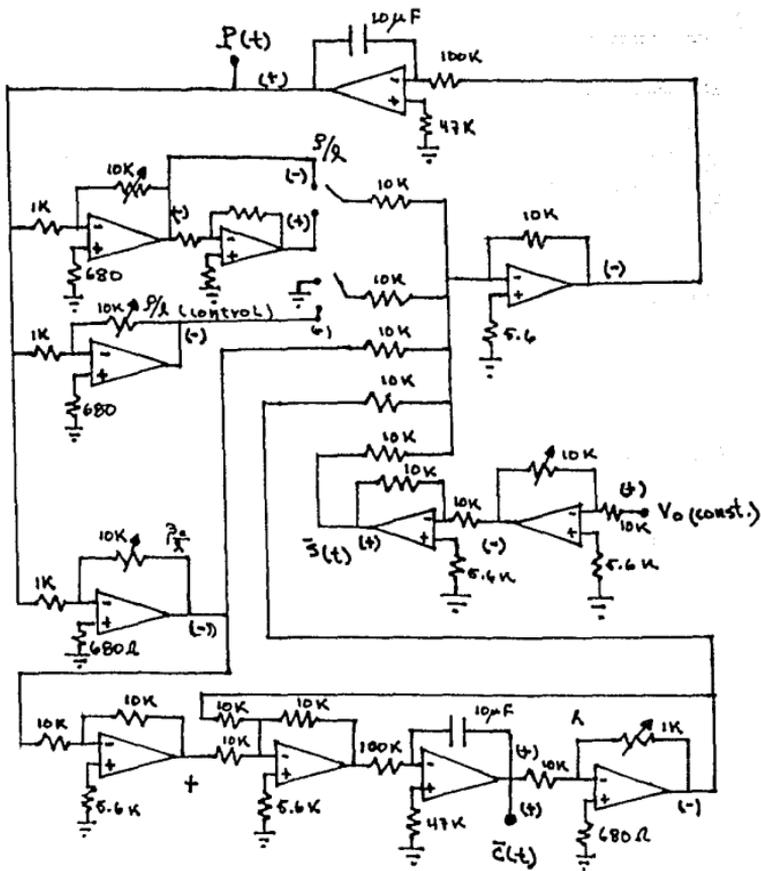


FIGURA VIII.8 - EQUIVALENTE ELECTRONICO DEL
DIAGRAMA VIII.7

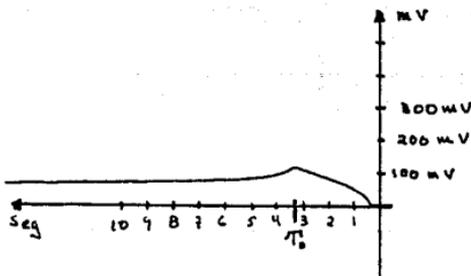
Se construyó en el laboratorio el diagrama de la Fig VIII.8, y se realizaron los experimentos con los valores $\beta_a = 0.0065$, $\rho = 0.001$

$\lambda = 10^3$ seg, $\lambda = 0.077$ seg⁻¹; de manera -
que ajustando los potenciómetros se obtuvieran en forma lo más aproximada posible los valores

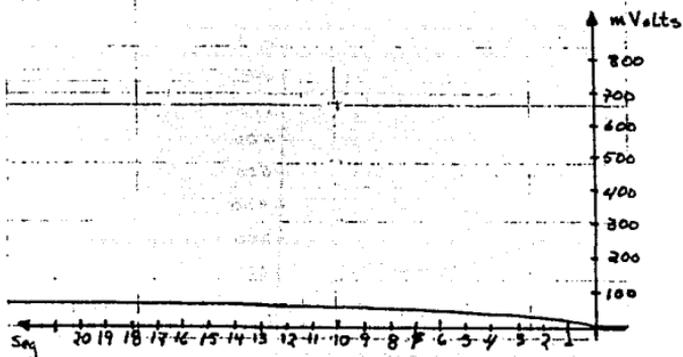
$$\frac{\beta_a}{\lambda} = 6.5 \text{ y } \lambda = 0.077 \text{ seg}^{-1}.$$

Se analizaron los casos discutidos en la sección anterior, es decir: primero un reactor crítico a cero potencia, insertando una fuente de neutrones durante un cierto intervalo de tiempo, para los 3 casos de $\rho = 0$, $\rho < 0$ y $\rho > 0$; segundo para un reactor crítico en un cierto nivel de potencia, insertando repentinamente reactividad -- negativa.

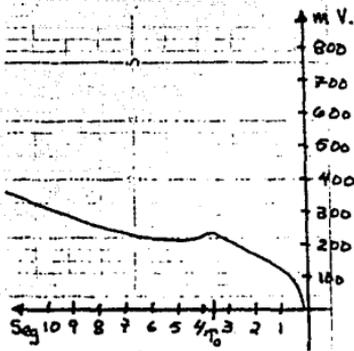
Así pues, partiendo de potencia cero, en un reactor crítico, con $\rho=0$, insertando una fuente externa de neutrones, obtuvimos.



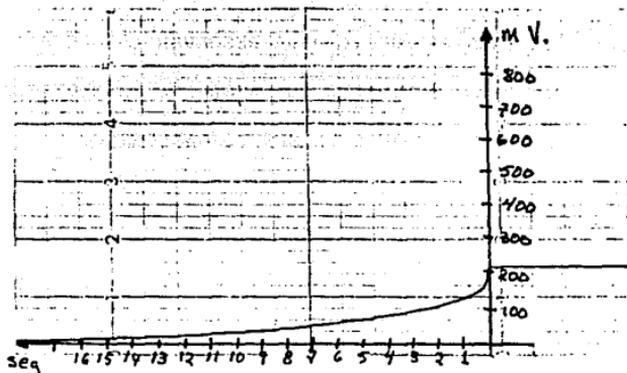
De la misma manera, partiendo de potencia cero, -- pero esta vez en un reactor subcrítico ($\rho < 0$) insertando fuente de neutrones externa se obtuvo.



Ahora, para el caso de un reactor supercrítico - -
($\beta > 0$) partiendo de potencia cero, insertando una fuente
externa de neutrones.



Ahora, partiendo de un reactor crítico a un cierto
nivel de potencia y libre de fuentes externas de neutro -
nes, insertando repentinamente reactividad negativa, se -
obtuvo



Estas graficas concuerdan con los resultados obtenidos en la seccion anterior.

Con esto se termina el caso simplificado del modelo con un solo grupo de neutrones retardados. En la siguiente se discute el diagrama de bloques para el caso del modelo con 6 grupos de neutrones retardados.

VIII.5 DIAGRAMA PROPUESTO PARA RESOLVER LAS ECUACIONES
CINETICAS PUNTUALES CON 6 GRUPOS DE NEUTRONES -
RETARDADOS USANDO EL METODO ANALOGICO.

Usando el valor asintótico de el factor W_{3i} , -
el cual es $W_{3i} = 0$, las ecuaciones (VIII.2.1) y (VIII.2.2)
quedan como:

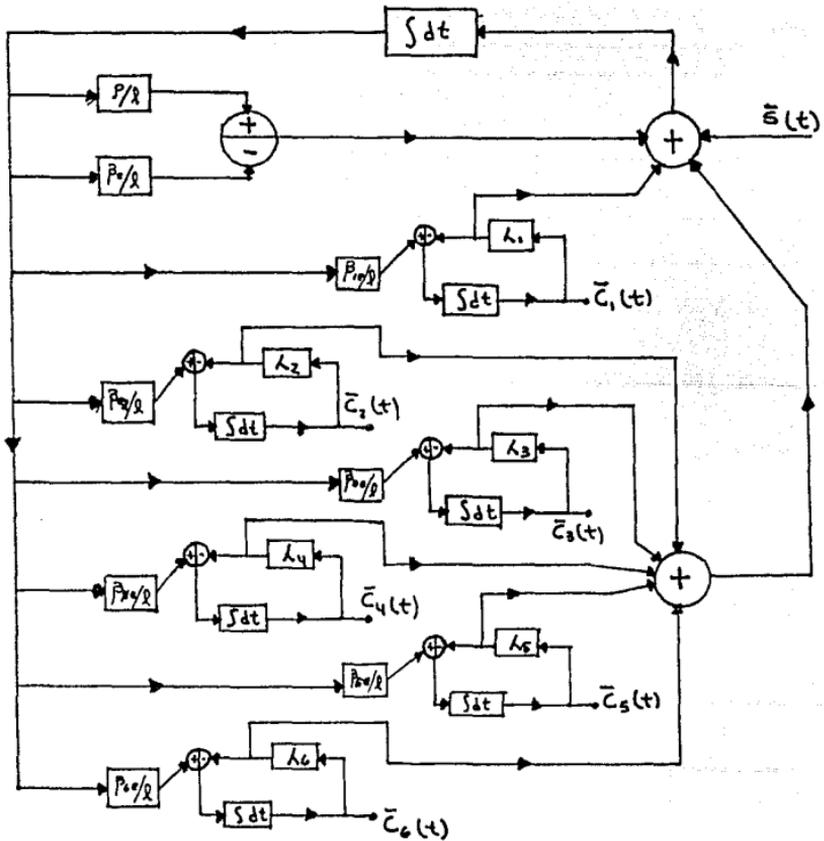
$$\dot{P}(t) = \frac{\rho - \beta_e}{\ell} P(t) + \sum_{i=1}^6 \lambda_i \bar{C}_i(t) + \bar{S}(t) \quad \dots \text{(VIII.5.1)}$$

$$\dot{\bar{C}}_i(t) = \frac{\beta_{ie}}{\ell} P(t) - \lambda_i \bar{C}_i(t) \quad \dots \text{(VIII.5.2)}$$

$$i = 1, \dots, 6.$$

• y el diagrama de bloques para su solución usando una computadora analógica es:

FIGURA VIII.9



Este modelo no se construyó pues el realizarlo, - con la precisión adecuada para poder observar los detalles finos de la influencia de los 6 grupos de neutrones retardados, implica utilizar amplificadores operacionales que son difíciles de obtener en el mercado, siendo necesario importarlos con la consecuente pérdida de tiempo.

CONCLUSIONES.

En este trabajo se han presentado algunos aspectos importantes del comportamiento espacial y temporal de la población de neutrones y de precursores en reactores nucleares.

Se utilizó un principio variacional en base al cual se dedujeron las ecuaciones cinéticas que gobiernan el comportamiento de lo que se llama funciones de importancia. De las discusiones presentadas en el trabajo se pone de manifiesto un hecho que, desde mi punto de vista, es muy importante: el hecho de que las importancias de los neutrones sean, en general diferentes de las importancias de los precursores.

Estas funciones de importancia, se puso también de manifiesto, tienen un significado físico muy importante, relacionado con eventos característicos del funcionamiento de un reactor nuclear.

Posteriormente se dedujeron lo que se llamó las ecuaciones cinéticas puntuales generalizadas, en las cuales están involucrados coeficientes de reactividad, fracción efectiva de neutrones retardados, tiempo de generación de neutrones, etc., que son factores generalizados, en el sentido de que involucran la diferencia de importancia de los neutrones y los precursores y que juegan un papel primordial en la operación de un reac--

tor.

Después, usando eigenvectores y eigen-valores de un cierto operador matricial, se hizo un análisis del comportamiento temporal de los factores mencionados antes y se demostró que tienden a valores asintóticos, que son los característicos del reactor en regímenes no transitorios.

En ségunda se obtuvieron algunas soluciones aproximadas, analíticas y analógicas de las ecuaciones cinéticas puntuales y se compararon las soluciones las soluciones obtenidas por éstos metodos observandose concordancia en ambos tipos de soluciones.

Como comentarios finales, el análisis de los eigen valores mencionados, no se ha hecho en forma general y rigurosa y solo se han considerado algunos casos particulares en la literatura (11). El cálculo y la determinación de los valores relativos de las funciones de importancia de los neutrones, en el estado fundamental, de un reactor nuclear son problemas que todavía están abiertos.

Por último, el diseño y construcción del circuito analógico para obtener soluciones cualitativos de los -- ecuaciones de las ecuaciones cinéticas puntuales para el caso de 6 grupos de neutrones retardados, que no se pudo realizar en éste trabajo, por la falta de material adecuado, se vé como un trabajo util para los laboratorios-

avanzados de la Facultad; otra posibilidad más accesible sería la realización de una simulación digital utilizando los servicios de un centro de cómputo, para comparar las soluciones en los casos de 1 grupo de neutrones retardados y 6 grupos de neutrones retardados.

APENDICE A

A.1 TRANSFORMADA DE LAPLACE

(12) , (13) , (14) .

Dada una función $f(t)$, la cual satisface la condición.

$$\int_0^{\infty} |f(t) e^{-\sigma t}| dt < \infty \quad \dots (A.1.1)$$

Para algún real finito σ , la transformada de Laplace de $f(t)$ se define como

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt \quad \dots (A.1.2)$$

Que es denotada por

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} \quad \dots (A.1.3)$$

Siendo s , en general, una variable compleja, esto es

$$s = \sigma + j\omega \quad \text{con } j = \sqrt{-1}$$

La operación de obtener $f(t)$ de la transformada $F(s)$, se llama, transformación inversa de Laplace; que es denotada por

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} \quad \dots (A.1.4)$$

Y está dada por

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s) e^{st} ds \quad \dots (A.1.5)$$

Donde a es una constante real más grande que todas las partes reales de las singularidades de $F(s)$.

Una tabla de transformadas utilizadas en el Capítulo VIII es:

TABLA A.1

$f(t)$	$F(s)$
$u(t)$	$\frac{1}{s}$
$u(t-t_0)$	$\frac{1}{s} e^{-st_0}$
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
$u(t-t_0) e^{-a(t-t_0)}$	$\frac{1}{s+a} e^{-st_0}$

Para una función vectorial (12), tal como

$$\vec{X}(t) = \begin{pmatrix} P(t) \\ \bar{c}(t) \end{pmatrix} \quad \dots \text{ (A.1.6)}$$

definimos la transformada de Laplace

$$\mathbb{X}(s) = \mathcal{L} \{ \vec{X}(t) \} \quad \text{como:}$$

$$\mathcal{L} \{ \vec{X}(t) \} = \begin{pmatrix} \mathcal{L} \{ P(t) \} \\ \mathcal{L} \{ \bar{c}(t) \} \end{pmatrix} \quad \dots \text{ (A.1.7)}$$

Y en general, si

$$A(t) = \begin{pmatrix} f_{11}(t) & \dots & f_{1n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ f_{n1}(t) & \dots & f_{nn}(t) \end{pmatrix} \dots (A.1.8)$$

entonces

$$\mathcal{L}\{A(t)\} = \begin{pmatrix} \mathcal{L}\{f_{11}(t)\} & \dots & \mathcal{L}\{f_{1n}(t)\} \\ \vdots & & \vdots \\ \mathcal{L}\{f_{n1}(t)\} & \dots & \mathcal{L}\{f_{nn}(t)\} \end{pmatrix} \dots (A.1.9)$$

En forma análoga se definen los transformados --
inversas de Laplace.

Una Tabla de los transformados inversos utilizados en el Capítulo VIII es la siguiente

TABLA A.2

$F(s)$	$f(t)$
$\frac{s + \lambda - W_3}{s(s+a)(s+b)}$	$\frac{\lambda - W_3}{ab} u(t) - \frac{\lambda - W_3 - a}{a(b-a)} e^{-at} - \frac{\lambda - W_3 - b}{b(a-b)} e^{-bt}$
$\frac{\lambda b_0}{s(s+a)(s+b)}$	$\frac{\lambda b_0}{ab} u(t) - \frac{\lambda b_0}{a(b-a)} e^{-at} - \frac{\lambda b_0}{b(a-b)} e^{-bt}$
$\frac{p_0/l}{s(s+a)(s+b)}$	$\frac{p_0/l}{ab} u(t) - \frac{p_0/l}{a(b-a)} e^{-at} - \frac{p_0/l}{b(a-b)} e^{-bt}$
$\frac{s - \frac{p-p_0-W_1}{l}}{s(s+a)(s+b)}$	$-\frac{p-p_0-W_1}{abl} u(t) + \frac{(p-p_0-W_1)/l + a}{a(b-a)} e^{-at} + \frac{(p-p_0-W_1)/l + b}{b(a-b)} e^{-bt}$

$F(s)$	$f(t)$
$\frac{s+\lambda-w_3}{s(s+a)(s+b)} e^{pt}$	$\mu(t-t_0) \left\{ \frac{\lambda-w_3}{ab} - \frac{\lambda-w_3-a}{a(b-a)} e^{-a(t-t_0)} - \frac{\lambda-w_3-b}{b(a-b)} e^{-b(t-t_0)} \right\}$
$\frac{pe/l}{s(s+a)(s+b)} e^{pt}$	$\mu(t-t_0) \left\{ \frac{pe/l}{ab} - \frac{pe/l}{a(b-a)} e^{-a(t-t_0)} - \frac{pe/l}{b(a-b)} e^{-b(t-t_0)} \right\}$

A.2

En seguida se presenta la obtención de los -- constantes "a. y "b" utilizados en los diversos casos -- del CAPITULO VIII. Además se presentan la obtención de -- P(t) y C(t) para esos casos.

caso 1

$$a) \quad p = 0$$

Las constanes a y b dados en (VIII.3.19) con $p = 0$ y $w_3=0$, $w_1=0$ y $w_0=1$ quedan como:

$$a = \frac{1}{2} \left\{ \lambda + \frac{pe}{l} + \sqrt{\left(\lambda + \frac{pe}{l}\right)^2} \right\}$$

$$b = \frac{1}{2} \left\{ \lambda + \frac{pe}{l} - \sqrt{\left(\lambda + \frac{pe}{l}\right)^2} \right\}$$

De tal manera que

$$\left. \begin{aligned} a &= \lambda + pe/l \\ b &= 0 \end{aligned} \right\} \dots (A.2.1)$$

con estos valores la ecuación (VIII.3.21) queda como:

$$\begin{aligned}
P(t) = & P(0^+) \left\{ -\frac{1}{\lambda + \beta e/\alpha} \left[-\frac{\beta e}{\alpha} e^{-(\lambda + \beta e/\alpha)t} - \lambda \right] \right\} \\
& + C(0^+) \left\{ -\frac{\lambda}{\lambda + \beta e/\alpha} (e^{-(\lambda + \beta e/\alpha)t} - 1) \right\} \\
& + \bar{S}_0 u(t) \left\{ -\frac{\beta e/\alpha}{(\lambda + \beta e/\alpha)^2} e^{-(\lambda + \beta e/\alpha)t} + \lim_{b \rightarrow 0} \left(\frac{\lambda}{ab} - \frac{\lambda - b}{b(a-b)} e^{-bt} \right) \right\} \\
& - \bar{S}_0 u(t - t_0) \left\{ -\frac{\beta e/\alpha}{(\lambda + \beta e/\alpha)^2} e^{-(\lambda + \beta e/\alpha)(t - t_0)} + \lim_{b \rightarrow 0} \left(\frac{\lambda}{ab} - \frac{\lambda - b}{b(a-b)} e^{-b(t - t_0)} \right) \right\} \\
& \dots (A.2.2)
\end{aligned}$$

Y desarrollando en serie la función exponencial

$$\begin{aligned}
\lim_{b \rightarrow 0} \left(\frac{\lambda}{ab} - \frac{\lambda - b}{b(a-b)} e^{-bt} \right) &= \lim_{b \rightarrow 0} \left(\frac{\lambda}{ab} - \frac{\lambda - b}{b(a-b)} + \frac{(\lambda - b)bt}{b(a-b)} - \dots \right) \\
&= -\frac{\lambda - a}{a^2} + \frac{\lambda t}{a} \dots (A.2.3)
\end{aligned}$$

De manera analoga:

$$\lim_{b \rightarrow 0} \left(\frac{\lambda}{ab} - \frac{\lambda - b}{b(a-b)} e^{-b(t - t_0)} \right) = -\frac{\lambda - a}{a^2} + \frac{\lambda(t - t_0)}{a} \dots (A.2.3)$$

Por lo tanto, sustituyendo "a", (A.2.2) queda como:

$$P(t) = P(0^+) \left\{ -\frac{1}{\lambda + \beta e/\alpha} \left[-\frac{\beta e}{\alpha} e^{-(\lambda + \beta e/\alpha)t} - \lambda \right] \right\}$$

$$\begin{aligned}
& + \bar{c}(0^+) \left\{ -\frac{\lambda}{\lambda + \beta e/\lambda} \left(e^{-(\lambda + \beta e/\lambda)t} - 1 \right) \right\} \\
& + \bar{S}_0 \mu(t) \left\{ -\frac{\beta e/\lambda}{(\lambda + \beta e/\lambda)^2} e^{-(\lambda + \beta e/\lambda)t} + \frac{\beta e/\lambda}{(\lambda + \beta e/\lambda)^2} + \frac{\lambda t}{(\lambda + \beta e/\lambda)} \right\} \\
& - \bar{S}_0 \mu(t - \tau_0) \left\{ -\frac{\beta e/\lambda}{(\lambda + \beta e/\lambda)^2} e^{-(\lambda + \beta e/\lambda)(t - \tau_0)} + \frac{\beta e/\lambda}{(\lambda + \beta e/\lambda)^2} + \frac{\lambda(t - \tau_0)}{(\lambda + \beta e/\lambda)} \right\}
\end{aligned}$$

De manera que si $P(0^+) = \bar{c}(0^+) = 0$

$$P(t) = \bar{S}_0 \left\{ \frac{\beta e/\lambda}{(\lambda + \beta e/\lambda)^2} \left(1 - e^{-(\lambda + \beta e/\lambda)t} \right) + \frac{\lambda t}{\lambda + \beta e/\lambda} \right\} \quad 0 \leq t \leq \tau_0$$

... (A.2.6)

y

$$P(t) = \bar{S}_0 \left\{ \frac{\beta e/\lambda}{(\lambda + \beta e/\lambda)^2} \left[e^{-(\lambda + \beta e/\lambda)(t - \tau_0)} - e^{-(\lambda + \beta e/\lambda)t} \right] + \frac{\lambda \tau_0}{\lambda + \beta e/\lambda} \right\}$$

para $t \geq \tau_0$

... (A.2.7)

Ahora el comportamiento temporal de los precursores de neutrones retardados, con los valores de "a" y "b" dados en (A.2.1) la expresión (VIII.3.22) queda como:

$$\begin{aligned}
\bar{c}(t) = & P(0^+) \frac{\beta e}{\lambda} \left[1 - e^{-(\lambda + \beta e/\lambda)t} \right] + \frac{\bar{c}(0^+)}{\lambda + \beta e/\lambda} \left[\lambda e^{-(\lambda + \beta e/\lambda)t} - \beta e/\lambda \right] \\
& + \bar{S}_0 \frac{\beta e}{\lambda} \mu(t) \left[\frac{e^{-(\lambda + \beta e/\lambda)t}}{(\lambda + \beta e/\lambda)^2} + \lim_{b \rightarrow 0} \left(\frac{1}{ab} - \frac{e^{-bt}}{b(a-b)} \right) \right] \\
& - \bar{S}_0 \frac{\beta e}{\lambda} \mu(t - \tau_0) \left[\frac{e^{-(\lambda + \beta e/\lambda)(t - \tau_0)}}{(\lambda + \beta e/\lambda)^2} + \lim_{b \rightarrow 0} \left(\frac{1}{ab} - \frac{e^{-b(t - \tau_0)}}{b(a-b)} \right) \right]
\end{aligned}$$

... (A.2.8)

y de nuevo, como lo hicimos anteriormente, desarrollando en serie la exponencial:

$$\lim_{b \rightarrow 0} \left(\frac{1}{ab} - \frac{e^{-bt}}{b(a-b)} \right) = -\frac{1}{a^2} + \frac{t}{a} \quad (\text{A.2.9})$$

Análogamente:

$$\lim_{b \rightarrow 0} \left(\frac{1}{ab} - \frac{e^{-b(t-t_0)}}{b(a-b)} \right) = -\frac{1}{a^2} + \frac{t-t_0}{a} \quad (\text{A.2.10})$$

Por lo tanto, sustituyendo "a". (A.2.8) queda como:

$$\bar{c}(t) = F(0^+) \frac{\beta e}{\lambda} \left[1 - e^{-(\lambda + \beta e/\lambda)t} \right] + \frac{C(0^+)}{\lambda + \beta e/\lambda} \left[e^{-(\lambda + \beta e/\lambda)t} - \frac{\beta e}{\lambda} \right]$$

$$+ \bar{s}_0 \frac{\beta e}{\lambda} u(t) \left[\frac{e^{-(\lambda + \beta e/\lambda)t}}{(\lambda + \beta e/\lambda)^2} - \frac{1}{(\lambda + \beta e/\lambda)^2} + \frac{t}{\lambda + \beta e/\lambda} \right]$$

$$- \bar{s}_0 \frac{\beta e}{\lambda} u(t-t_0) \left[\frac{e^{-(\lambda + \beta e/\lambda)(t-t_0)}}{(\lambda + \beta e/\lambda)^2} - \frac{1}{(\lambda + \beta e/\lambda)^2} + \frac{t-t_0}{\lambda + \beta e/\lambda} \right]$$

... (A.2.11)

De manera que si $F(0^+) = \bar{c}(0^+) = 0$

$$\bar{c}(t) = \bar{s}_0 \frac{\beta e}{\lambda} \left[\frac{e^{-(\lambda + \beta e/\lambda)t}}{(\lambda + \beta e/\lambda)^2} + \frac{t}{\lambda + \beta e/\lambda} - \frac{1}{(\lambda + \beta e/\lambda)^2} \right]$$

para $0 \leq t \leq t_0$... (A.2.12)

y

$$\bar{c}(t) = \frac{\bar{S}_0 \beta_e}{\lambda} \left[\frac{\tau_0}{\lambda + \beta_e/\lambda} + \frac{1}{\lambda + \beta_e/\lambda} \left(e^{-(\lambda + \beta_e/\lambda)t} - e^{-(\lambda + \beta_e/\lambda)(t - \tau_0)} \right) \right]$$

para $t \geq \tau_0$... (A.2.13)

Ahora cuando t

$$\left. \begin{aligned} P(t \rightarrow \infty) &= \frac{\bar{S}_0 \lambda \tau_0}{\lambda + \beta_e/\lambda} \\ \bar{c}(t \rightarrow \infty) &= \frac{\bar{S}_0 \beta_e}{\lambda} \frac{\tau_0}{\lambda + \beta_e/\lambda} \end{aligned} \right\} \dots (A.2.14)$$

y por lo tanto

$$\bar{c}(t \rightarrow \infty) = \frac{\beta_e}{\lambda \lambda} P(t \rightarrow \infty)$$

Lo cual concuerda perfectamente con las ecuaciones cinéticas para $\dot{P} = \dot{\bar{c}} = 0$ y $\rho = \bar{S}(t) = 0$

dados en (VII.3.1) con $W_1 = W_3 = 0$ y $b_0 = 1$

CASO 2

b) $\rho < 0$ con $|\rho| \ll \beta_e$

Sea $b_0 = 1$, $W_3 = 0$ y $W_1 = 0$

Las expresiones (VIII.3.19) pueden ponerse como

$$\begin{aligned}
 a &\approx \frac{(\lambda + \frac{\beta e + |\rho|}{\rho}) + \sqrt{(\lambda + \frac{\beta e + |\rho|}{\rho})^2 - \frac{4\lambda|\rho|}{\rho}}}{2} \\
 b &= \frac{(\lambda + \frac{\beta e + |\rho|}{\rho}) - \sqrt{(\lambda + \frac{\beta e + |\rho|}{\rho})^2 - \frac{4\lambda|\rho|}{\rho}}}{2}
 \end{aligned}
 \quad (A.2.15)$$

Ahora si $\frac{4\lambda|\rho|}{\rho} \ll (\lambda + \frac{\beta e + |\rho|}{\rho})$

$$\sqrt{(\lambda + \frac{\beta e + |\rho|}{\rho})^2 - \frac{4\lambda|\rho|}{\rho}} \approx (\lambda + \frac{\beta e + |\rho|}{\rho}) - \frac{2\lambda|\rho|/\rho}{(\lambda + \frac{\beta e + |\rho|}{\rho})} \quad (A.2.16)$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned}
 a &\approx (\lambda + \beta e/\rho) \\
 b &\approx \frac{\lambda|\rho|/\rho}{(\lambda + \beta e/\rho)}
 \end{aligned}
 \quad (A.2.17)$$

De manera que

$$a - b = \left[(\lambda + \frac{\beta e + |\rho|}{\rho})^2 - \frac{\lambda|\rho|}{\rho} \right] / (\lambda + \frac{\beta e + |\rho|}{\rho})$$

y para $P(0^+) = \bar{c}(0^+) = 0$

$$P(t) = \bar{S}_0 u(t) \left[\frac{\rho}{|\rho|} + \frac{\frac{\beta e + |\rho|}{\rho} e^{-(\lambda + \frac{\beta e + |\rho|}{\rho})t}}{[(\lambda + \frac{\beta e + |\rho|}{\rho})^2 - \frac{\lambda|\rho|}{\rho}]} - \frac{(\lambda + \frac{\lambda|\rho|/\rho}{(\lambda + \frac{\beta e + |\rho|}{\rho})}) e^{-\frac{\lambda|\rho|/\rho}{(\lambda + \frac{\beta e + |\rho|}{\rho})}t}}{\frac{\lambda|\rho|}{\rho} [1 - \frac{\lambda|\rho|/\rho}{(\lambda + \frac{\beta e + |\rho|}{\rho})^2}]} \right]$$

$$-\bar{S}_0 u(t-T_0) \left[\frac{\frac{\lambda}{|\rho|} + \frac{\rho e + |\rho|}{\lambda} e^{-(\lambda + \frac{\rho e + |\rho|}{\lambda})(t-T_0)}}{[(\lambda + \frac{\rho e + |\rho|}{\lambda})^2 - \frac{\lambda |\rho|}{\lambda}]} - \frac{(\lambda + \frac{\lambda |\rho|/\lambda}{(\lambda + \frac{\rho e + |\rho|}{\lambda})}) e^{-\frac{\lambda |\rho|/\lambda (t-T_0)}}}{(\lambda + \frac{\rho e + |\rho|}{\lambda})} \right] \dots (A.2.18)$$

$$-\frac{\lambda |\rho|}{\lambda} \left[1 - \frac{\lambda |\rho|/\lambda}{(\lambda + \frac{\rho e + |\rho|}{\lambda})^2} \right]$$

Y

$$\bar{c}(t) = \frac{\bar{S}_0 \rho e}{\lambda} u(t) \left[\frac{\frac{\lambda}{|\rho|} + \frac{e^{-(\lambda + \rho e/\lambda)t}}{[-\frac{\lambda \rho}{\lambda} + (\lambda + \frac{\rho e + |\rho|}{\lambda})^2]} - \frac{e^{-\frac{\lambda |\rho|/\lambda t}}{(\lambda + \frac{\rho e + |\rho|}{\lambda})}}{\frac{\lambda |\rho|}{\lambda} \left[1 - \frac{\lambda |\rho|/\lambda}{(\lambda + \frac{\rho e + |\rho|}{\lambda})^2} \right]} \right]$$

$$-\frac{\bar{S}_0 \rho e}{\lambda} u(t-T_0) \left[\frac{\frac{\lambda}{|\rho|} + \frac{e^{-(\lambda + \rho e/\lambda)(t-T_0)}}{[(\lambda + \frac{\rho e + |\rho|}{\lambda})^2 - \frac{\lambda |\rho|}{\lambda}]} - \frac{e^{-\frac{\lambda |\rho|/\lambda (t-T_0)}}{(\lambda + \frac{\rho e + |\rho|}{\lambda})}}{\frac{\lambda |\rho|}{\lambda} \left[1 - \frac{\lambda |\rho|/\lambda}{(\lambda + \frac{\rho e + |\rho|}{\lambda})^2} \right]} \right] \dots (A.2.19)$$

CASO 3.

c) $\rho > 0$; $\rho e > \rho$

Las expresiones (VIII.3.19) quedan como:

$$a = \frac{(\lambda + \frac{\rho e - \rho}{\lambda}) + \sqrt{(\lambda + \frac{\rho e - \rho}{\lambda})^2 - \frac{4\lambda \rho}{\lambda}}}{2}$$

$$b = \frac{(\lambda + \frac{\rho e - \rho}{\lambda}) - \sqrt{(\lambda + \frac{\rho e - \rho}{\lambda})^2 - \frac{4\lambda \rho}{\lambda}}}{2}$$

y desarrollando las raíces, suponiendo que $\frac{4\lambda \rho}{\lambda} \ll \lambda + \frac{\rho e - \rho}{\lambda}$

$$\left. \begin{aligned} a &\approx \lambda + \frac{\rho e - \rho}{\lambda} \\ b &\approx -\frac{\lambda \rho / \lambda}{(\lambda + \frac{\rho e - \rho}{\lambda})} \end{aligned} \right\} \dots (A.2.20)$$

Por lo tanto, con $P(0^+) = \bar{c}(0^+) = 0$,

Las expresiones para $P(t)$ y $\bar{c}(t)$ dadas en (VIII.3.21)

y (VIII.3.22) quedan como

$$P(t) = \bar{S}_0 \mu(t) \left\{ -\frac{\lambda}{\rho} + \frac{\frac{\rho - \rho}{\lambda} e^{-(\lambda + \frac{\rho - \rho}{\lambda})t}}{\left[\left(\lambda + \frac{\rho - \rho}{\lambda} \right)^2 + \frac{\lambda \rho}{\lambda} \right]} + \frac{\frac{\lambda}{\rho} \left(1 + \frac{\rho/\lambda}{\left(\lambda + \frac{\rho - \rho}{\lambda} \right)} \right) e^{\frac{\lambda \rho}{\lambda} t}}{1 + \frac{\lambda \rho/\lambda}{\left(\lambda + \frac{\rho - \rho}{\lambda} \right)^2}} \right\}$$

$$-\bar{S}_0 \mu(t - \tau_0) \left\{ -\frac{\lambda}{\rho} + \frac{\frac{\rho - \rho}{\lambda} e^{-(\lambda + \frac{\rho - \rho}{\lambda})(t - \tau_0)}}{\left[\left(\lambda + \frac{\rho - \rho}{\lambda} \right)^2 + \frac{\lambda \rho}{\lambda} \right]} + \frac{\frac{\lambda}{\rho} \left(1 + \frac{\rho/\lambda}{\left(\lambda + \frac{\rho - \rho}{\lambda} \right)} \right) e^{\frac{\lambda \rho/\lambda}{\lambda} (t - \tau_0)}}{1 + \frac{\lambda \rho/\lambda}{\left(\lambda + \frac{\rho - \rho}{\lambda} \right)^2}} \right\}$$

Y la concentración efectiva de precursores queda como

$$\bar{c}(t) = \bar{S}_0 \frac{\rho e}{\lambda} \mu(t) \left\{ -\frac{\lambda}{\lambda \rho} + \frac{e^{-(\lambda + \frac{\rho - \rho}{\lambda})t}}{\left[\frac{\lambda \rho}{\lambda} + \left(\lambda + \frac{\rho - \rho}{\lambda} \right)^2 \right]} + \frac{\frac{\lambda}{\lambda \rho} e^{\frac{\lambda \rho/\lambda}{\lambda} t}}{\left[\frac{\lambda \rho}{\lambda} + \left(\lambda + \frac{\rho - \rho}{\lambda} \right)^2 \right] / \left(\lambda + \frac{\rho - \rho}{\lambda} \right)} \right\}$$

$$-\bar{S}_0 \frac{\rho e}{\lambda} \mu(t - \tau_0) \left\{ -\frac{\lambda}{\lambda \rho} + \frac{e^{-(\lambda + \frac{\rho - \rho}{\lambda})(t - \tau_0)}}{\left[\frac{\lambda \rho}{\lambda} + \left(\lambda + \frac{\rho - \rho}{\lambda} \right)^2 \right]} + \frac{\frac{\lambda}{\lambda \rho} e^{\frac{\lambda \rho/\lambda}{\lambda} (t - \tau_0)}}{\left[\frac{\lambda \rho}{\lambda} + \left(\lambda + \frac{\rho - \rho}{\lambda} \right)^2 \right] / \left(\lambda + \frac{\rho - \rho}{\lambda} \right)} \right\}$$

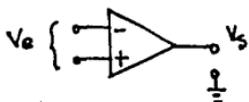
... (A.2.22)

APENDICE B

B.1. AMPLIFICADORES OPERACIONALES.

Un amplificador operacional es un "ente" electrónico (15), el cual, como su nombre lo indica, es un amplificador de voltaje.

Su símbolo es:



Donde las entradas + y - las llamaremos así, entrada + y entrada -; V_s es el voltaje de salida y V_e es el voltaje de entrada y es dado por:

$$V_e = V_{e+} - V_{e-} \quad \text{B.1.1}$$

Donde V_{e+} y V_{e-} dan respectivamente los voltajes en la entrada + y en la entrada -.

La característica esencial de los amplificadores operacionales es que su factor de amplificación es positivo y de valor muy alto, idealmente es infinito.

Es decir, el voltaje de salida y el de entrada están relacionados por $V_s = K V_e$... (B.1.2)

Con lo cual podemos observar que

$$\left. \begin{array}{l} \text{a) } V_s < 0 \quad \text{si } V_{e-} > V_{e+} \\ \text{b) } V_s > 0 \quad \text{si } V_{e+} > V_{e-} \end{array} \right\} \dots \text{(B.1.3)}$$

Esta es la razón por la cual la entrada es llamada la entrada inversora y la entrada +, la entrada no -

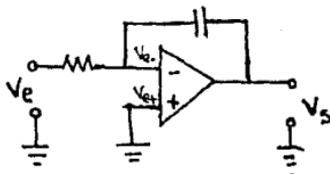
inversora

Otra de las características importantes es que la resistencia entre la entrada + y la entrada - es idealmente infinita; por lo cual no fluye corriente entre las entradas + y la -. En la práctica la impedancia de entrada es muy grande, pero finita del orden de 10 M Ω ó mayor dependiendo del tipo de amplificador operacional usado. (16)

La implementación de integradores, sumadores y de amplificadores con ganancia finita (predeterminada) es realizada mediante arreglos de resistencias y condensadores entre las entradas y la salida de los amplificadores operacionales.

A continuación mostraremos y explicaremos las configuraciones necesarias para obtener integradores, sumadores e inversores, suponiendo que los amplificadores operacionales son ideales. Para un análisis más riguroso ver Ref. 15.

B.2. CONFIGURACION DE INTEGRADOR IDEAL.



Supongamos que el amplificador operacional tiene ganancia K , y luego hagamos tender $K \rightarrow \infty$.

La corriente que atraviesa la resistencia R está dada por

$$I = \frac{V_e - V_{e-}}{R} \quad \dots \text{ (B.2.1.)}$$

Ahora, sabemos que el voltaje entre las terminales de un condensador está dado por

$$V = \frac{q}{C} \quad \dots \text{ (B.2.2.)}$$

donde C es la capacitancia y q es la carga almacenada en el condensador, así pues

$$V_{e-} - V_s = \frac{q(t)}{C} \quad \dots \text{ (B.2.3.)}$$

donde

$$q(t) = \int_0^t I(t) dt \quad \dots \text{ (B.2.4.)}$$

Así
$$V_{e-} - V_s = \frac{1}{C} \int_0^t I(t) dt \quad \dots \text{ (B.2.5)}$$

sustituyendo (B.2.1.) en (B.2.5)

$$V_{e-} - V_s = \frac{1}{RC} \int_0^t (V_e - V_{e-}) dt \quad \dots \text{ (B.2.6)}$$

y utilizando el factor de amplificación que nos dice --

$$\text{que } V_s = K (V_e - V_{e-}) \quad \dots \text{ (B.2.7.)}$$

tenemos que,

como $V_{e+} = 0$,

$$V_{e-} = -\frac{1}{K} V_s \quad \dots \text{ (B.2.8.)}$$

Así pues, cuando $K \rightarrow \infty$

$$V_{e-} = 0$$

y sustituyendo en (B.2.6.) obtenemos

$$V_s(t) = -\frac{1}{RC} \int_0^t V_e(t) dt \quad \dots (B.2.9)$$

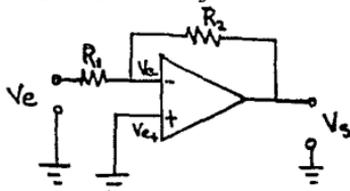
Donde RC es un factor de escala. Por ejemplo, -
si $RC = 1$ seg:

$$V_s(t) = - \int_0^t V_e(t) \frac{dt}{1 \text{ seg}} \quad \dots (B.2.10)$$

Para los fines que perseguimos este factor de es
cala nos permite acelerar ó hacer más lento un proceso.

B.3. AMPLIFICADOR IDEAL DE GANANCIA A.

Sea la configuración



sabemos que la corriente que fluye por la resistencia R_1
está dada por

$$\frac{V_e - V_{e-}}{R_1} = I \quad \dots (B.3.1)$$

y dado que no fluye corriente entre las entradas + y -,
la corriente que pasa por la resistencia R_2 está dada-
por

$$V_e - V_s = \frac{R_2}{R_1} (V_e - V_{e-}) \quad \dots (B.3.2)$$

y como

$$V_s = K (V_{e+} - V_{e-})$$

y dado que

$$V_{e+} = 0 \Rightarrow V_{e-} = -\frac{1}{K} V_s$$

por lo cual cuando $K \rightarrow \infty$

$$V_{e-} = 0$$

Así pues, sustituyendo en (B.3.2.) se tiene:

$$-V_s = \frac{R_2}{R_1} V_e$$

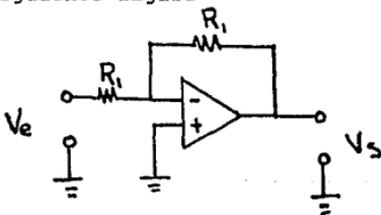
o sea:

$$V_s = - \frac{R_2}{R_1} V_e \quad (\text{B.3.3.})$$

de lo cual se deduce que para la configuración presentada la ganancia es:

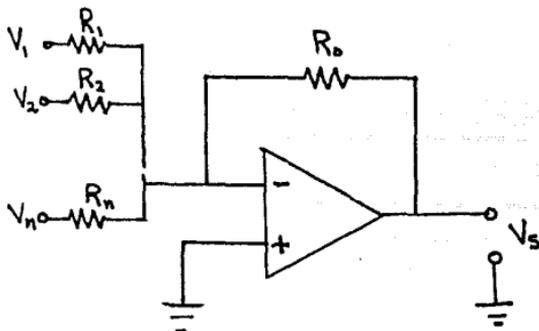
$$A = - \frac{R_2}{R_1} \quad (\text{B.3.4.})$$

Una vez que se tienen estos resultados es inmediato que la configuración de bloque inversor (es decir $A = -1$ y por lo tanto, $R_2 = R_1$) debe ser la mostrada en la siguiente figura



B.4.- SUMADOR IDEAL DE N ENTRADAS.

Sea la siguiente configuración



Aplicando la ley de Kirchoff al nodo de la entrada - tenemos

$$\sum_{i=1}^n \frac{(V_i - V_e)}{R_i} = \frac{V_e - V_s}{R_o} \quad (B.4.1.)$$

tomando el límite cuando $V_e \rightarrow 0$, se tiene que

$$V_s = - \sum_{i=1}^n \frac{R_o}{R_i} V_i \quad B.4.2.$$

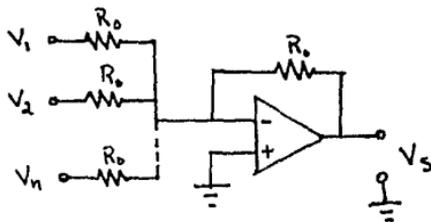
Ahora, ésto significa que el voltaje de salida - es una combinación lineal de los voltajes de entrada; - para que sea simplemente la suma de los voltajes de entrada necesitamos que

$$R_o = R_i \text{ para toda } i \quad (B.4.3.)$$

con lo cual

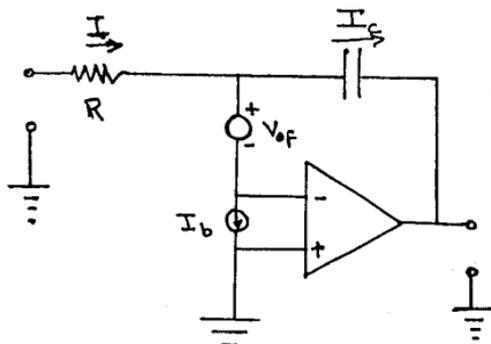
$$V_s = - \sum_{i=1}^n V_i$$

y la configuración queda como



B.5. INTEGRADOR REAL.

Un modelo más real de un integrador analógico es el siguiente (15).



donde $\bigoplus V_{of}$ simboliza una fuente de voltaje de magnitud V_{of} (llamado voltaje de "offset")

y $\bigoplus I_b$ simboliza una fuente de corriente de magnitud I_b (llamada corriente de "Polarización").

El análisis del circuito nos proporciona

$$I = \frac{V_e - V_{of}}{R} \quad \dots (B.5.1)$$

y dado que

$$I = I_b + I_c \quad \dots (B.5.2)$$

o sea:

$$I_c = I - I_b$$

Se tiene, por lo tanto, que:

$$V_{of} - V_s = \frac{1}{C} \int_0^t \left\{ \left(\frac{V_e - V_{of}}{R} \right) - I_b \right\} dt \quad (B.5.3.)$$

de donde se sigue que:

$$V_s = -\frac{1}{RC} \int_0^t V_e dt + \frac{1}{RC} \int_0^t V_{of} dt + \frac{1}{C} \int_0^t I_b dt + V_{of} \quad (B.5.4.)$$

que difiere de (B.2.9.) en los últimos tres términos, - los términos extras son llamados términos de error.

Como podemos observar, el término de error debido al voltaje de "offset" incrementa linealmente y su -

signo depende de la polaridad del voltaje de "offset".- Además de este voltaje "rampa" de error el voltaje "offset" crea un voltaje de salida igual a su valor.

La corriente I_b también incrementa el voltaje de error en forma lineal.

Debido a estos voltajes de error que aumentan linealmente, el tiempo de integración se debe limitar a intervalos suficientemente pequeños, para que el error sea despreciable.

Los efectos de la corriente I_b pueden ser reducidos insertando una resistencia R' entre la entrada + y tierra, con lo cual se reduce la corriente.

El seguir estas recomendaciones, el funcionamiento de un integrador real se acerca bastante al de un integrador ideal.

El mismo tipo de análisis, con recomendaciones semejantes, se sigue para los otros tipos de amplificador configuraciones discutidas.

B.6.- TIPO DE AMPLIFICADOR USADO EN ESTE TRABAJO.

El tipo de amplificador del circuito de la Fig. VIII.8, fue el 741 y el 747 (el cual contiene dos amplificadores 741). Estos amplificadores tienen "grandes" voltaje de "offset" y corrientes de polarización. Se usaron estos amplificadores debido a su disponibilidad en el laboratorio de Electrónica de la Facultad de Ciencias.

cias.

Las características de estos amplificadores operacionales pueden ser encontradas recurriendo a los manuales correspondientes, (16).

BIBLIOGRAFIA

- 1) Akcasu, Lellouche, Shotkin.- "Mathematical Methods in Nuclear Reactor Dynamics".- Academic --- Press (1971)
- 2) Lamarsh, John R.- "Nuclear Reactor Theory" Adison Wesley (1966).
- 3) Pomraning, G.C.- "A Variational description of dissipative proceses".- Journal of Nuclear Energy Parts A/B, 617 (1966).
- 4) Becker, M.- "A generalized formulation of Point Nuclear Reactor Kinetics Equations".- Nucl., - Sci., Eng.: 31,458 (1968).
- 5) Lewins, J.- "The time-dependent Importance of neutrons and Precursors".- Nucl., Sci., Eng.: - 7,268, (1960).
- 6) Sweifel, P.- "Reactor Physics".- McGraw-Hill (1973).
- 7) Gozani, Von T.- "The concept of reactivity and its application to kinetic Measurements".- Nukleonik: 5,55 (1963)
- 8) Henry, A.F.- "The Application of Inhour modes to the description of Nonseparable Reactor Transients". Nucl., Sci., Eng.: 20,238 (1964).
- 9) Kaplan, .- "The property of finality and the Analysis of problems in Reactor Space-Time Kinetics by various Modal Expansions".- Nucl., Sci., Eng.: 9,357 (1961).
- 10) Glasstone S. and Sesonske A.- "Ingeniería de Reactores Nucleares". Reverté (1968).
- 11) Devooght J.- "Spectrum of the Multigroup Multipoint Diffusion Operator with Delayed Neutrons".- Nucl. Sci., Eng.: 67,147 (1978)
- 12) Kuo, B.C.- "Automatic Control Systems".- Prentice - Hall (1975).
- 13) Distefano J., Subberud A., Williams I.- "Retroalimentación y Sistemas de Control". Mc Graw - Hill (1972).

- 14) Arfken, G.- "Mathematical Methods for Physicist".- Academic Press (1971).
- 15) Graeme, Tobey and Huelsman.- "Operational Amplifiers Design and Applications.- Mc Graw-Hill (1971).
- 16) Linear Data Book.- National, junio (1976)