UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

TEORIA DE FLUIDOS RELATIVISTAS

T E S I S

que para optar por el título de

F I S I C O

p r e s e n t a :

VICTOR ALEJANDRO SALCIDO GONZALEZ

1 ejem.
42

1979

6617

TEORIA DE FLUIDOS RELATIVISTAS

INTRODUCCION GENERAL

A pesar de que durante un largo periodo de tiempo se pensó que la mecánica del medio contínuo, y en particular la mecánica de fluidos, había quedado completamente formulada con los trabajos de Euler, Stokes, Navier y Saint Venant, entre otros, recientes investigaciones acerca de materiales distintos a los fluidos stokesianos y sólidos elásticos lineales han motivado, de nueva cuenta, el interés en los fundamentos de la mecánica clásica de los medios contínuos. Muchos investigadores, entre los que se cuentan Noll, Truesdell, y Coleman, se han preocupado por establecer de manera axiomática esta teoría, intentando así clarificar sus fundamentos.

Por otro lado, desde el punto de vista de la teoría de relatividad, la investigación realizada en esa dirección es prácticamente nula, no obstante su importancia en la astrofísica y en la física de plasmas, entre otras ramas de la ciencia.

Con este trabajo se pretende sentar las bases para la formulación, a partir de un esquema axiomático básico, de la mecánica del medio contínuo invariante de Lorentz.

En los dos primeros capítulos se presentan los conceptos y resultados principales de la mecánica clásica de los medios contínuos y la teoría especial de la relatividad, a fin de ubicar al lector dentro del tema y tener puntos de referencia al formular, en los capítulos 3 y 4, la teoría del contínuo invariante de Lorentz.

En el capítulo 3, los cuerpos se consideran como espacios topológicos modelados en el espacio-tiempo llano de Minkowski, y su evolución se describe usando el tiempo propio de un observador inercial cualquiera, como parámetro de evolución. Las hipótesis introducidas en este capítulo, permiten obtener ecuaciones de balance para la masa y el cuadrimomento lineal.

En el capítulo 4, además de generalizarse las ideas del capítulo 3, se hace notar la necesidad de construir una teoría constitutiva que sea consistente con los postulados de la teoría especial de la relatividad.

C A P I T U L O 1

LOS FLUIDOS VISCOSOS

1.0 INTRODUCCION

En el presente capítulo se exponen los conceptos básicos de la mecánica de fluidos desde el punto de vista de la mecánica de los medios contínuos. Aqui, un fluido es considerado como una distribución contínua de materia de la cual se ignora su estructura molecular y en la cual, supuestamente, no hay espacios vacíos. Las funciones que se utilizan en la descripción de las propiedades de un medio contínuo se suponen contínuas y diferenciables al menos localmente, es decir, en las regiones de interés.

En la mecánica de los medios contínuos se requieren dos hipótesis más acerca de la naturaleza del material, a saber, que es homogéneo e isotrópico. Sin embargo, estas últimas suposiciones no serán necesarias sino hasta las ecuaciones constitutivas (relaciones entre deformaciones y esfuerzos).

La teoría de los medios contínuos se divide en dos partes: (1) los principios generales, es decir, las suposiciones y consecuencias aplicables a todos los medios contínuos, y (2) las ecuaciones constitutivas que definen el material considerado en particular.

1.1 LAS DESCRIPCIONES DEL MOVIMIENTO

Existen dos formas, esencialmente diferentes, para describir el movimiento de un fluido: la descripción Lagrangiana y la descripción Euleriana.

En la descripción Lagrangiana, el movimiento de los fluidos es tratado en forma análoga al movimiento de partículas; se considera un elemento de volumen particular en el fluido, y se siguen su movimiento y deformaciones el transcurrir el tiempo. Aquí, el movimiento del fluido es asociado con una transformación geométrica representada por una función

$$\vec{x} = \vec{x}(\vec{X},t) \tag{1.1}$$

que da los vectores de posición $\vec{x}$, del elemento de fluido identificado por la "etiqueta" $\vec{X}$, en función del tiempo. La etiqueta $\vec{X}$ puede escogerse como el vector de posición del elemento de fluido en algún instante inicial $t = t_o$ que, en particular, puede ser $t = 0$. Así pues, en esta descripción, las componentes X_1, X_2, X_3, de $\vec{X}$, se consideran como variables independientes, y el tiempo t como parámetro.

En la descripción Euleriana no se consideran elementos de fluido directamente, sino sus velocidades. Aquí, el movimiento del fluido se describe en términos de un campo de velocidades

$$\vec{v} = \vec{v}(\vec{x},t) \tag{1.2}$$

que es considerado como un campo primitivo, y no como obtenido por diferenciación con respecto al tiempo de algún vector de posición[1]. De hecho, $\vec{x}$ y t son considerados ahora como variables independientes y, por consiguiente, $\partial x_i/\partial t = 0$, es decir, $\vec{x}$ es meramente un punto fijo del espacio, en tanto que en la descripción Lagrangiana denota la posición instantanea del elemento de fluido considerado. En la imagen Euleriana, las propiedades físicas pertenecen, por así decirlo, a los puntos del espacio. Así pues, puede decirse que un elemento de fluido toma el valor local del campo de velocidades.

Claramente, puesto que el comportamiento de un fluido es independiente de la forma en que se le describa, ambas descripciones son completamente equivalentes.

A las variables X_1, X_2, X_3 se les llama coordenadas materiales, y coordenadas espaciales a las variables x_1, x_2, x_3. Con frecuencia también se les llama, aunque incorrectamente, coordenadas Lagrangianas a las primeras, y coordenadas Eulerianas a las últimas [2].

Si se conoce la transformación

$$\vec{x} = \vec{x}(\vec{X}, t)$$

que, en la descripción Lagrangiana, se asocia al movimiento del fluido considerado, la velocidad de un elemento de volumen pequeño de fluido puede calcularse tomando la derivada parcial respecto al tiempo de $\vec{x} = \vec{x}(\vec{X}, t)$ manteniendo $\vec{X}$ fijo; es decir,

$$\vec{v} = \frac{\partial}{\partial t}\,\vec{x}(\vec{X}, t) = \left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial t}\right)_X \tag{1.3}$$

Similarmente, la aceleración es

$$\vec{a} = \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}\right)_X = \frac{\partial^2}{\partial t^2}\,\vec{x}(\vec{X}, t). \tag{1.4}$$

En la descripción Euleriana, aunque, como ya se mencionó, el movimiento de un fluido se describe en términos de un campo de velocidades

$$\vec{v} = \vec{v}(\vec{x}, t),$$

siempre puede suponerse la existencia de una función del tipo $\vec{x} = \vec{x}(\vec{X},t)$ monovaluada y diferenciable que defina al movimiento [3]. En estas condiciones puede escribirse

$$\vec{v} = \vec{v}(\vec{x}(\vec{X},t),t)$$

que, de acuerdo con la regla de la cadena del cálculo, permite escribir, en componentes,+

$$\left(\frac{\partial v_i}{\partial t}\right)_X = \left(\frac{\partial v_i}{\partial t}\right)_x + \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\left(\frac{\partial x_j}{\partial t}\right)_X \qquad (1.5)$$

Ahora bien, aunque puede no conocerse la función $\vec{x} = \vec{x}(\vec{X},t)$, conociendo el campo de velocidades $\vec{v} = \vec{v}(\hat{x},t)$, se conoce la distribución de las derivadas $(\partial x_j/\partial t)_X$ dado que, de acuerdo con la Ec.(1.3),

$$v_j = \left(\frac{\partial x_j}{\partial t}\right)_X.$$

Así pues, usando esta última ecuación en (1.5), se obtiene una expresión para las componentes a_i de la aceleración, la que únicamente contiene cantidades calculables a partir del campo de velocidades $\vec{v} = \hat{v}(\hat{x},t)$:

$$a_i = \left(\frac{\partial v_i}{\partial t}\right)_X = \left(\frac{\partial v_i}{\partial t}\right)_x + v_j\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right). \qquad (1.6)$$

Es conveniente, para evitar confusiones, usar la notación d/dt en lugar de $(\partial/\partial t)_X$, y usar simplemente $\partial/\partial t$ en lugar de $(\partial/\partial t)_x$. En forma vectorial, la Ec.(1.6) puede escribirse como

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \vec{v}.\text{grad }\vec{v}$$

+ De aquí en adelante se adopta la convención de Einstein para la suma y, además, todo índice latino tomará los valores 1,2,3, a menos que otra cosa se especifique.

Al operador

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v_* \frac{\partial}{\partial x_*} \tag{1.7}$$

se le conoce como el operador derivada material o derivada hidrodinámica, y puede aplicarse a funciones escalares, vectoriales, o tensoriales dependientes de la posición espacial $\vec{x}$ y el tiempo t. El primer término, $\partial/\partial t$, da la rapidez de cambio de la función en cuestión en la vecindad del lugar $\vec{x}$, en tanto que el segundo término da la rapidez de cambio convectiva de esa función en la vecindad de una partícula de fluido, a medida que se mueve a un lugar al que le corresponde un valor diferente de dicha función. El primer término se anula en un flujo estacionario, mientras que el segundo término se anula en un flujo uniforme.

1.2 DEFORMACIONES

En un cuerpo rígido, la distancia entre cualquier par de sus puntos es constante e independiente del estado de movimiento del cuerpo. En un fluido (cuerpo deformable), ésto no ocurre así; de hecho, durante su movimiento, cada punto P en el fluido se "transforma" en un nuevo punto P', y puntos vecinos P y Q se transforman en puntos vecinos P' y Q'.

Considérese una partícula P en un fluido que, al tiempo t = 0, ocupa una región B. Sean X^j las coordenadas que, respecto a un sistema de referencia inercial K, especifican la posición de la partícula P en la región B. Después que han ocurrido deformaciones, las partículas de fluido que, en $t = 0$, se encontraban en B, pasan, al tiempo t, a otra región B'. En la región B', la nueva posición P' de la partícula de fluido P está dada, como ya se mencionó, por la transformación

$$x^i = x^i(X^J, t) \tag{1.8}$$

asociada al movimiento del fluido, y que se supone es suave (monovaluada, continua, y diferenciable) al menos localmente. La existencia de la transformación inversa (una exigencia de carácter físico) requiere que

$$j = \det \| \partial x^i / \partial X^J \|, \tag{1.9}$$

el determinante Jacobiano de la transformación, sea no-singular; es decir, que $0 < j < \infty$. Así, cada punto P' en B' viene de un punto P en B. Estas suposiciones expresan la indestructibilidad de la materia. Ninguna región de volumen finito puede ser deformada en otra de volumen cero o infinito. Expresan también la impenetrabilidad de la materia: mediante la transformación (1.8), toda región es transformada en una región, toda superficie en una superficie, y toda curva en una curva. Una porción de materia nunca penetra en otra [4].

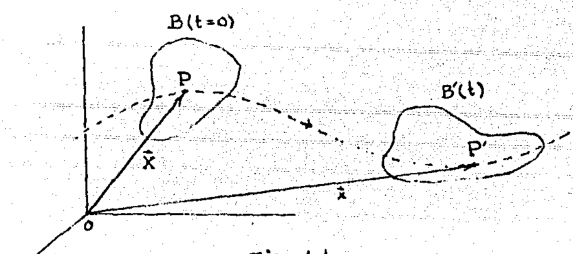

Fig. 1.1

El elemento diferencial de línea sufre, en particular, un cambio en virtud de la deformación. Sean ds y ds' los elementos diferenciales de línea en B y B' respectivamente; el invariante

$$ds'^2 - ds^2 \tag{1.10}$$

es una medida de la deformación sufrida por el fluido [5]. En particular, si $ds'^2 - ds^2 = 0$ para todos los puntos, el movimiento corresponde a un movimiento de cuerpo rígido.

A partir de la Ec.(1.8) se obtienen

$$dx^i = x^i{}_{,m} dX^m \qquad dX^m = X^m{}_{,i}\, dx^i \tag{1.11}$$

donde

$$x^i{}_{,m} = \frac{\partial x^i}{\partial X^m} \qquad X^m{}_{,i} = \frac{\partial X^m}{\partial x^i} \tag{1.12}$$

son los llamados gradientes de deformación. Entonces pueden escribirse

$$\begin{aligned} ds'^2 &= \delta_{ij}\, dx^i dx^j = C_{mn} dX^m dX^n \\ ds^2 &= \delta_{mn} dX^m dX^n = c_{ij}\, dx^i dx^j \end{aligned} \tag{1.13}$$

donde

$$\begin{aligned} C_{mn}(\vec{X},t) &= \delta_{ij}\, x^i{}_{,m}\, x^j{}_{,n} \\ c_{ij}(\vec{x},t) &= \delta_{mn}\, X^m{}_{,i}\, X^n{}_{,j} \end{aligned} \tag{1.14}$$

son, respectivamente, el tensor de deformación de Green y el tensor de deformación de Cauchy [4]. Claramente, ambos tensores son simétricos. De las Ecs.(1.13) se obtiene

$$ds'^2 - ds^2 = 2E_{mn} dX^m dX^n = 2e_{ij}\, dx^i dx^j \tag{1.15}$$

donde

$$\begin{aligned} E_{mn} &= E_{nm} = \tfrac{1}{2}(C_{mn} - \delta_{mn}) \\ e_{ij} &= e_{ji} = \tfrac{1}{2}(\delta_{ij} - c_{ij}) \end{aligned} \tag{1.16}$$

son los tensores Lagrangiano y Euleriano, respectivamente, de deformaciones finitas.

Si la deformación es suficientemente pequeña, puede asociársele una transformación infinitesimal tal que

$$x^i = X^i + u^i \tag{1.17}$$

donde los u^i son infinitésimos de primer orden que costituyen las componentes de un vector $\vec{u}$ llamado vector de desplazamientos. Este, se define como el vector que se extiende desde una partícula de fluido en B, hasta la misma partícula en B' [4]. En tales condiciones

$$\begin{aligned} x^i{}_{,m} &= \frac{\partial x^i}{\partial X^m} = \delta^i{}_m + U^i{}_{,m} \\ X^m{}_{,i} &= \frac{\partial X^m}{\partial x^i} = \delta^m{}_i - u^m{}_{,i} \end{aligned} \tag{1.18}$$

donde

$$\begin{aligned} U^i{}_{,m} &= \frac{\partial u^i}{\partial X^m} \\ u^m{}_{,i} &= \frac{\partial u^m}{\partial x^i}, \end{aligned} \tag{1.19}$$

y entonces las Ecs.(1.16) pueden escribirse, despreciando los términos no lineales, como

$$\begin{aligned} \tilde{E}_{mn} &= \tfrac{1}{2}(U_{m,n} + U_{n,m}) \\ \tilde{e}_{ij} &= \tfrac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \end{aligned} \tag{1.20}$$

Estos son, respectivamente, los tensores Lagrangiano y Euleriano de deformaciones infinitesimales.

En virtud de la deformación, el elemento de volumen sufre también un cambio dado por la expresión

$$dV' = j\,dV \tag{1.21}$$

que en el caso de deformaciones infinitesimales puede escribirse como

$$dV' = (1 + \mathrm{tr}\tilde{E})\, dV \qquad (1.22)$$

puesto que, de acuerdo con la Ec. (1.18),

$$j = \det\|\partial x^i/\partial X^r\| \approx 1 + \frac{\partial u^i}{\partial X^i} \qquad (1.23)$$

Así pues, la traza del tensor de deformaciones infinitesimales describe los cambios de volumen, sin cambios de forma; esto es, expansiones o compresiones.

En la teoría de deformaciones infinitesimales se introducen también los tensores antisimétricos cuyas componentes son

$$\begin{aligned} \tilde{R}_{mn} &= \tfrac{1}{2}(U_{m,n} - U_{n,m}) \\ \tilde{r}_{ij} &= \tfrac{1}{2}(u_{i,j} - u_{j,i}) \end{aligned} \qquad (1.24)$$

llamados tensores de rotaciones infinitesimales Lagrangiano y Euleriano respectivamente [4].

En la teoría lineal para fluidos viscosos son importantes el tensor rapidez de deformación y el tensor de spin o vorticidad, cuyas componentes Cartesianas serán definidas en términos de las componentes del campo de velocidades

$$\vec{v} = \vec{v}(\vec{x}, t).$$

Considérense, ahora, dos partículas de fluido P y Q en la región B, y éstas mismas en la región B'. Como ya se mencionó, la posición de la partícula P relativa a la partícula Q será distinta, en general, de una región a otra debido a que las partículas P y Q tomarán, a un mismo tiempo t, valores diferentes del campo de velocidades, pues el valor de este último varía de punto a punto en el espacio.

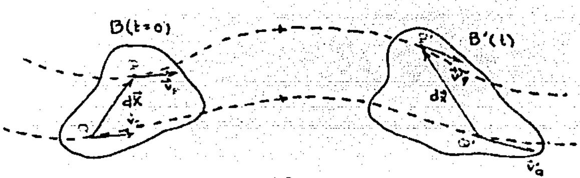

Fig. 1.2

Así pues, es claro que las deformaciones sufridas por el fluido estén directamente relacionadas con los cambios, de punto a punto, del valor del campo de velocidades. En consecuencia, es natural considerar a los gradientes del campo de velocidades como una medida de la rapidez con que ocurren las deformaciones en un fluido. Los gradientes de las componentes del campo de velocidades

$$v_{i,j} = \frac{\partial}{\partial x_j} v_i(\vec{x}, t),$$

constituyen las componentes de un tensor de segundo rango, y pueden escribirse como la suma de una parte simétrica y otra antisimétrica; es decir,

$$v_{i,j} = \epsilon_{ij} + \omega_{ij} \qquad (1.25)$$

donde

$$\epsilon_{ij} \equiv v_{(i,j)} = \frac{1}{2}(v_{i,j} + v_{j,i}) \qquad (1.26)$$

$$\omega_{ij} \equiv v_{[i,j]} = \frac{1}{2}(v_{i,j} - v_{j,i}) \qquad (1.27)$$

Se definen el tensor rapidez de deformación ϵ y el tensor de vorticidad ω, como aquellos cuyas componentes son ϵ_{ij} y ω_{ij}, respectivamente. En un flujo irrotacional, las componentes ω_{ij} del tensor de vorticidad son todas cero.

1.3 EL TENSOR DE ESFUERZOS

Considérese un fluido que, al tiempo t, ocupa una región B′ en el espacio. Sea $\mathcal{P}$ una porción de ese fluido, $V(\mathcal{P})$ el volumen de $\mathcal{P}$, y $\partial V(\mathcal{P})$ la frontera que separa a $\mathcal{P}$ del resto del fluido (o en parte del resto del fluido y en parte de otros medios diferentes). Las fuerzas+ que actúan sobre $\mathcal{P}$ son clasificadas, desde el punto de vista de la mecánica de los medios contínuos, en dos tipos: (1) las Fuerzas de Cuerpo y (2) las Fuerzas Superficiales [3].

Las fuerzas de cuerpo son acciones a distancia debidas a efectos externos y actúan sobre cada uno de los puntos materiales de $\mathcal{P}$. Estas fuerzas son denotadas por $\vec{f}_c$ y son funciones absolutamente contínuas del volumen [2]. Esta última propiedad permite definir la fuerza de cuerpo específica o densidad de fuerza de cuerpo $\vec{b}$, de modo que la fuerza de cuerpo total sobre $\mathcal{P}$ sea obtenida como

$$\vec{f}_c = \int_{V(\mathcal{P})} \rho \vec{b} \, dV \qquad (1.28)$$

donde ρ es la masa por unidad de volumen de $\mathcal{P}$.

Las fuerzas superficiales son fuerzas de contacto que actúan sobre la frontera ∂V de $\mathcal{P}$. Estas fuerzas se denotan por $\vec{f}_s$ y son funciones absolutamente contínuas del área [2]. En virtud de esto último, se puede definir la fuerza superficial por unidad de área $\vec{t}$, llamada tracción o vector de esfuerzos, tal que la fuerza superficial total sobre $\mathcal{P}$ sea

---

+ En la mecánica del medio contínuo, al igual que en la mecánica Newtoniana de partículas, las fuerzas son consideradas como elementos primitivos y son dadas a priori [2].

obtenida como

$$\vec{f}_s = \int_{\partial V(\mathcal{P})} \hat{t}\; dS \qquad (1.29)$$

En otras palabras, el vector de esfuerzos $\vec{t}(\vec{x},t,\hat{n})$ sobre el elemento de superficie $\Delta S(\hat{n})$ de $\partial V(\mathcal{P})$ cuya normal unitaria exterior es $\hat{n}$, está definido como

$$\vec{t}(\vec{x},t,\hat{n}) = \lim \frac{\Delta \vec{f}_s}{\Delta S(\hat{n})} = \frac{d\vec{f}_s}{dS(\hat{n})} \qquad (1.30)$$

donde $\Delta\vec{f}_s$ es la fuerza superficial que actúa sobre $\Delta S(\hat{n})$. En términos de esta definición, es claro que el vector de esfuerzos es una entidad de campo típica, la cual depende, además de la posición $\vec{x}$ y el tiempo t, de la normal unitaria $\hat{n}$ del elemento de superficie seleccionado [6].

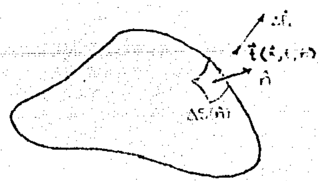

Fig. 1.3

Respecto a la dependencia del vector de esfuerzos con la normal unitaria $\hat{n}$, se demuestra [2] que, el vector de esfuerzos es una función vectorial lineal homogénea de la normal unitaria $\hat{n}$; es decir, que existe un tensor simétrico de segundo rango $T(\vec{x},t)$, llamado tensor de esfuerzos, tal que

$$\vec{t}(\vec{x},t,\hat{n}) = T(\vec{x},t)\cdot\hat{n} \qquad (1.31)$$

o bien

$$t_i(\vec{x},t,\hat{n}) = T_{ij}(\vec{x},t)\, n_j \tag{1.31}$$

donde las T_{ij} y n_j son las componentes cartesianas del tensor de esfuerzos y de la normal unitaria, respectivamente. La ec.(1.31) establece que si se conocen los elementos T_{ij} del tensor de esfuerzos en un lugar dado, el vector de esfuerzos correspondiente puede ser determinado en el mismo lugar. A los tres elementos T_{ij}, con i = j, del tensor de esfuerzos, se les llama, si son positivos, tensiones o esfuerzos normales; y presiones, si son negativos. A los elementos T_{ij} con i ≠ j, se les llama esfuerzos cortantes o tangenciales [6].

1.4 LAS ECUACIONES DE BALANCE

Como ya se mencionó, la teoría de los medios contínuos se construye a partir de un conjunto de principios generales y de una teoría constitutiva. Los principios generales consisten en un conjunto de suposiciones inferidas a partir del experimento y que son válidas para todos los medios contínuos, independientemente del tipo de material del que esten constituidos. Tradicionalmente, los principios generales se presentan en la forma de ecuaciones de balance para la masa, el ímpetu lineal, el ímpetu angular, la energía y la entropía.

Aunque con frecuencia la frase "ecuaciones de balance" es utilizada como sinónimo de la frase "leyes de conservación", es necesario hacer notar que tal equivalencia no es válida en general; pues, si bien es cierto que la masa es un invariante [4], y por lo tanto puede hablarse de una ley de conservación para ésta, el ímpetu lineal, el ímpetu angular, la energía y la entropía son cantidades que no se conservan en general. En consecuencia, es necesario relacionar los cambios en estas cantidades con los de otras variables (no necesariamente conocidas) si no se quiere aceptar la posibilidad de creación (o destrucción), de estas cantidades, a partir de (o en) la nada. A este tipo de relaciones son a las que se les llama Ecuaciones de Balance.

En la mecánica de los medios contínuos, las ecuaciones de balance para la masa, el ímpetu lineal, el ímpetu angular y la energía se obtienen a partir de cuatro postulados fundamentales que serán discutidos a continuación.

1.5 LA MASA Y LA ECUACION DE CONTINUIDAD

En la mecánica clásica, con cada cuerpo se asocia una masa. Esta es un número real no-negativo y cumple con las siguientes propiedades [7]:

1. La masa de un cuerpo es la suma de las masas de sus partes; es decir, la masa es una medida;

2. La masa de un cuerpo es independiente de su estado de movimiento; es decir, es un invariante bajo el movimiento;

3. La masa de un cuerpo no está determinada por el tamaño de éste; esto es, su dimensión física es independien-

te de las dimensiones de longitud y tiempo.

En la mecánica de los medios contínuos se supone, además, que la masa es una función absolutamente continua relativa al volumen del cuerpo [7]. Así pues, existe una función densidad ρ, llamada Densidad de Masa, que es positiva y acotada. De esta manera, la masa total del cuerpo está dada por

$$m = \int_V \rho \, dV \tag{1.32}$$

donde m y V representan, respectivamente, la masa y el volumen del cuerpo.

La invariancia de la masa bajo el movimiento (primer postulado fundamental de la mecánica de los medios contínuos) conduce, al usar la descripción Euleriana, a la ecuación

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\rho v^k)_{,k} = 0 \tag{1.33}$$

que es conocida como la Ecuación de Continuidad [3].

Al vector cuyas componentes son

$$J^k = \rho v^k \tag{1.34}$$

se le conoce como la Densidad de Corriente y, físicamente, él es el responsable del transporte de masa.

1.6 LOS BALANCES DE IMPETU LINEAL, IMPETU ANGULAR, Y ENERGIA

El Impetu Lineal de un medio contínuo que, al tiempo t, ocupa un volumen V se define como el vector cuyas componentes son

$$p^k = \int_V \rho(x^i,t)\ v^k(x^i,t)\ dV \qquad (1.35)$$

donde $\rho(x^i,t)$ y $\vec{v}(x^i,t)$ representan, respectivamente, la densidad de masa y la velocidad del cuerpo en la posición $\vec{x}$ al tiempo t. Claramente, de acuerdo con la Ec.(1.34), esta última ecuación también puede escribirse en la forma

$$p^k = \int_V J^k(x^i,t)\ dV. \qquad (1.36)$$

El Impetu Angular, relativo a un punto $\vec{O}$, de un cuerpo que ocupa un volumen V está definido como el vector cuyas componentes estan dadas por

$$L_i = \int_V \epsilon_{ijk}(x^j - O^j)J^k dV \qquad (1.37)$$

donde las J^k son las componentes del vector densidad de corriente definido por la Ec.(1.34).

La Energía Cinética de un medio contínuo que ocupa un volumen V es definida como

$$K = \frac{1}{2}\int_V \rho\ v^k v_k\, dV \qquad (1.38)$$

Al principio de conservación de la masa son agregados, en la mecánica de los medios contínuos, otros tres postulados fundamentales.

El Principio de Balance de Impetu Lineal.- La rapidez de cambio del ímpetu lineal es, en un marco de referencia inercial, igual a la resultante de las fuerzas que actúan sobre el cuerpo. Esto es

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \tag{1.39}$$

o bien, de acuerdo con las Ecs.(1.28), (1.29) y (1.31),

$$\int_{\partial V} T^{ij} n_j \, dS + \int_V \rho b^i \, dV = \frac{d}{dt} \int_V \rho v^i \, dV \tag{1.40}$$

donde ∂V representa la superficie cerrada que contiene al volumen V. Así pues, usando el teorema de Gauss de la divergencia y la ecuación de continuidad, la Ec.(1.40) conduce a

$$\frac{\partial T^{ij}}{\partial x^j} + \rho b^i = \rho \frac{dv^i}{dt} \tag{1.41}$$

que constituyen las ecuaciones de balance de ímpetu lineal. A estas ecuaciones tambien se les conoce como la Primera Ley de Movimiento de Cauchy [3].

El Principio de Balance de Impetu Angular.- La rapidez de cambio del ímpetu angular en torno a un punto fijo $\vec{O}$ es, en un marco de referencia inercial, igual a la torca resultante $\vec{N}$ en torno a $\vec{O}$. Esto es

$$\vec{N} = \frac{d\vec{L}}{dt} \tag{1.42}$$

o bien

$$\int_{\partial V} \epsilon_{ijk}(x^j - O^j)T^{kl}n_l\,dS + \int_V \epsilon_{ijk}(x^j - O^j)\rho b^k\,dV = \frac{d}{dt}\int_V \epsilon_{ijk}(x^j - o^j)\,J^k\,dV$$

De esta última ecuación, mediante el uso del teorema de la divergencia, la ecuación de continuidad y las ecuaciones de balance de ímpetu lineal, se obtiene

$$T^{ij} = T^{ji} \qquad (1.43)$$

Esta relación, conocida como la Segunda Ley de Cauchy, establece la simetría del tensor de esfuerzos. Este es un resultado que se obtiene sin necesidad de suponer uniformidad en la distribución de los esfuerzos, ni el equilibrio estático del medio [3].

El Principio de Conservación de la Energía.- La rapidez de cambio de la energía cinética mas la energía interna es igual a la suma de la potencia desarrollada por las fuerzas externas y todos los otros tipos de energía que entran o salen del cuerpo por unidad de tiempo. Es decir,

$$\frac{d}{dt}(\ K + U\ ) = P + \sum_A E_A \qquad (1.44)$$

donde U y P representan, respectivamente, la energía interna y la potencia desarrollada por las fuerzas externas, y E_A representa el equivalente mecánico del A-ésimo tipo de energía por unidad de tiempo (por ejemplo, energía térmica, energía eléctrica, energía química, etc.) [4]. La Ec.(1.44), al igual que las Ecs.(1.39) y (1.42), es una ecuación de balance. En un problema físico dado, las cantidades P, E , y desde luego la energía cinética K, están bien definidas en general. Así pues, la energía interna U puede interpretarse como la cantidad que balancea la Ec.(1.44) .

En el caso de sistemas termomecánicos+ el balance de energía queda expresado por

$$\frac{d}{dt}(K + U) = P + Q \qquad (1.45)$$

donde Q representa el equivalente mecánico de la cantidad de calor que el sistema absorbe o cede en cada unidad de tiempo. Esta cantidad de calor proviene, en general, de fuentes internas en el cuerpo y de la transferencia de calor entre el cuerpo y sus alrededores. Así pues, puede escribirse

$$Q = \int_V \rho h \, dV + \int_{\partial V} \vec{q}\cdot\vec{n} \, dS \qquad (1.46)$$

donde h representa el calor generado por unidad de masa por las fuentes internas, y $\vec{q}\cdot\vec{n}dS$ representa el flujo de calor a través del elemento de superficie dS. Al vector $\vec{q}$ se le conoce como el vector de flujo de calor.

Usando las Ecs.(1.38) y (1.46), y escribiendo la potencia P en términos de las fuerzas de cuerpo y superficiales, la Ec.(1.45) toma la forma

$$\frac{d}{dt}\left[\int_V\left(\frac{1}{2}\rho v^i v_i + \rho\epsilon\right)dV\right] = \int_V \rho b^i v_i \, dV + \int_{\partial V} T^{ij} v_i n_j \, dS + \int_V \rho h \, dV + \int_{\partial V} q^i n_i \, dS$$

+ Un sistema termomecánico es aquel en el cual, además de la energía mecánica, solo se considera a la energía térmica.

donde la energía interna U ha sido expresada en términos de la energía interna por unidad de masa ϵ. De esta última relación es facil ver que el balance de energía, para sistemas termomecánicos, también puede escribirse como

$$\rho \frac{d\epsilon}{dt} = T^{ij} v_{i,j} + q^{i}_{,i} + \rho h . \qquad (1.47)$$

A esta ecuación también se le conoce como la forma local de la primera ley de la termodinámica [5].

1.7 LA DESIGUALDAD DE CLAUSIUS - DUHEM

Junto con la temperatura absoluta θ, se considera a la entropía como una propiedad fundamental de todos los sistemas termodinámicos. La entropía, al igual que la energía, solo es importante a través de sus cambios, los cuales se consideran, tradicionalmente, como una cota superior de la cantidad Q/θ. En la mecánica de los medios contínuos se supone, además, que la entropía es absolutamente contínua con respecto a la masa. En consecuencia, existe una función de densidad η, llamada la Entropía Específica o Entropía por Unidad de Masa, tal que

$$H = \int_V \rho\eta dV \qquad (1.48)$$

donde ρ y H representan, respectivamente, la densidad de masa y la entropía del cuerpo en cuestión.

Igualmente, en el caso de medios contínuos, se supone que el cambio total en la entropía por unidad de tiempo puede surgir, no solo por cambios en H, sino también por el flujo de entropía a través de las fronteras del cuerpo, mas, posiblemente, el suministro de entropía por fuentes dentro del cuerpo [5]. La Producción de Entropía Total del cuerpo se define como

$$\Gamma = \frac{dH}{dt} - \int_{\partial V} \vec{e}\cdot\vec{n}\, dS - \int_V \rho s\, dV \qquad (1.49)$$

donde $\vec{e}$ es el vector de flujo de entropía y s es el suministro de entropía por unidad de masa por unidad de tiempo debido a fuentes internas.

El postulado siguiente es un axioma básico de la termodinámica [5].

El Principio de Balance de Entropía o la Desigualdad de Clausius-Duhem.- La rapidez de cambio de la entropía total H nunca es menor que la suma del flujo de entropía a través de la superficie del cuerpo y la producción de entropía por fuentes internas. Es decir,

$$\Gamma \geqslant 0 . \qquad (1.50a)$$

o bien

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho\eta\, dV \geqslant \int_{\partial V} \vec{e}\cdot\vec{n}\, dS + \int_V \rho s\, dV, \qquad (1.50b)$$

de la cual se sigue que

$$\rho \frac{d\eta}{dt} \geqslant \rho s + e_{i,i} \qquad (1.50c)$$

Esta última expresión, conocida como la Desigualdad de Clausius - Duhem en forma local, puede escribirse como

$$\rho\theta \frac{d\eta}{dt} \geq \rho h + q^{i}_{,i} - \frac{q^{i}}{\theta}\frac{\partial\theta}{\partial x^{i}} \qquad (1.51)$$

en el caso de procesos termomecánicos simples, es decir, procesos para los cuales [8]

$$\vec{e} = \frac{\vec{q}}{\theta} \qquad y \qquad s = \frac{h}{\theta} \qquad (1.52)$$

donde las cantidades $\vec{q}$ y h tienen el mismo significado que en la Ec.(1.46).

1.8 ECUACIONES CONSTITUTIVAS

Los principios básicos de conservación de la masa, balance de los ímpetus lineal y angular, balance de energía, y la desigualdad de Clausius - Duhem, son válidos para todos los medios contínuos. Sin embargo, no son suficientes para determinar, de manera única, las incógnitas involucradas. De hecho, como ya se mostró, tales principios conducen a ocho ecuaciones con diecinueve incógnitas. Esta situación es físicamente clara si se considera que, tal como la experiencia lo demuestra, cuerpos de diferente material responden de manera diferente ante los mismos agentes externos, aun teniendo la misma geometría y distribución de masa. La constitución interna de la materia es la responsable de estas diferencias [4].

Un axioma que caracteriza las propiedades materiales particulares de un cuerpo se llama una Hipótesis Constitutiva. Las hipótesis constitutivas restringen la clase de procesos dinámicos que un cuerpo puede realizar. Para la mecánica de los medios contínuos, son de gran importancia las hipótesis constitutivas que pueden expresarse en la forma de relaciones funcionales entre el tensor de esfuerzos y las deformaciones. Tales relaciones se llaman Ecuaciones Constitutivas.[9].

Las hipótesis constitutivas estan sujetas a ciertas restricciones generales que son, entre otras:

1. El Principio de Objetividad. Si un proceso dinámico es compatible con una hipótesis constitutiva, entonces todos los procesos equivalentes a él deben ser también compatibles con esta hipótesis constitutiva. Esto significa, en otras palabras, que las ecuaciones constitutivas, y por consiguiente, las propiedades materiales de un cuerpo, deben ser invariantes bajo transformaciones de marco de referencia.

2. El Principio de Determinismo. El comportamiento de un punto material X que ocupa la posición $\vec{x}$ al tiempo t, está determinado por la historia pasada de una vecindad arbitrariamente pequeña de X.

3. El Principio de Equipresencia. Todas las ecuaciones constitutivas del mismo material deben contener las mismas variables independientes.

1.9 EL FLUIDO DE STOKES

Se define el Fluido de Stokes como un medio contínuo tal que [4]

(ST1) Admite una ecuación constitutiva de la forma

$$T_{ij} = f_{ij}(\epsilon_{kl}) \qquad (1.53)$$

donde T_{ij} y ϵ_{kl} son las componentes de los tensores de esfuerzos y rapidez de deformación, respectivamente.

(ST2) El tensor de esfuerzos no depende explícitamente de la posición $\vec{x}$ (homogeneidad espacial).

(ST3) La función de respuesta f es independiente de la orientación de los ejes de coordenadas (objetividad material).

(ST4) Cuando $\epsilon_{ij} = 0$, la Ec.(1.53) se reduce a

$$T_{ij} = -\pi\,\delta_{ij} \qquad (1.54)$$

donde π es una función escalar, llamada presión termodinámica, definida como

$$\pi = -\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \nu}\right)_{\eta} \qquad (1.55)$$

donde ε , ν , y η son, respectivamente, la energía interna, el volumen, y la entropía, expresados por unidad de masa.

Usando los cuatro postulados anteriores, se demuestra que las relaciones constitutivas para el fluido de Stokes son equivalentes a [4]

$$T^i{}_j = (-\pi + \alpha_0)\delta^i_j + \alpha_1\epsilon^i{}_j + \alpha_2\epsilon^i{}_k\,\epsilon^k{}_j \qquad (1.56)$$

donde
$$\alpha_A = \alpha_A(I_\epsilon, II_\epsilon, III_\epsilon)$$
$$\alpha_0(0,0,0) = 0, \tag{1.57}$$

siendo I_ϵ, II_ϵ, y III_ϵ los invariantes del tensor rapidez de deformación.

De acuerdo con la Ec. (1.55), la presión termodinámica π no está definida para un fluido incompresible ($I_\epsilon = \epsilon^k{}_k = 0$). En este caso, puesto que π sólo entra en las ecuaciones constitutivas en la combinación $-\pi + \alpha_0$, la cantidad

$$-p = -\pi + \alpha_0$$

puede considerarse como incógnita básica en lugar de π. Así pues, las ecuaciones constitutivas para un fluido incompresible pueden expresarse como

$$T^i{}_j = -p\delta^i{}_j + \alpha_1\epsilon^i{}_j + \alpha_2\epsilon^i{}_k\epsilon^k{}_j \tag{1.58}$$

donde α_1 y α_2 solo dependen, en este caso, de los invariantes II_ϵ y III_ϵ.

En virtud de las relaciones constitutivas (1.56), el tensor de esfuerzos puede escribirse como la suma de dos partes: una parte no-disipativa

$$-\pi\delta^i{}_j$$

y una parte disipativa

$$D^i{}_j = \alpha_0\delta^i{}_j + \alpha_1\epsilon^i{}_j + \alpha_2\epsilon^i{}_k\epsilon^k{}_j \tag{1.59}$$

la cual, por consistencia con la desigualdad de Clausius-Duhem, debe satisfacer

$$D^i_j \epsilon^j_i \geq 0. \qquad (1.60)$$

Al producto en el miembro izquierdo de esta desigualdad se le conoce como la Función de Disipación.

Por otra parte, cuando los coeficientes α_A aceptan expanciones en series de potencias de los invariantes del tensor rapidez de deformación, se encuentra [4] que

1. En la aproximación de orden cero

$$\alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_2 = 0 \qquad (1.61)$$

y, por consiguiente, $D^i_j = 0$, con lo que el tensor de esfuerzos completo se reduce a

$$T^i_j = -\Pi \delta^i_j \qquad (1.62)$$

que corresponde al caso de fluidos No-Viscosos. Aquí la presión Π puede ser una función de la densidad ρ y la temperatura θ, esto es,

$$\Pi = \Pi(\rho, \theta). \qquad (1.63)$$

En particular, si $\Pi = \Pi(\rho)$ los fluidos se llaman barotrópicos; y en el caso de fluidos incompresibles, Π = const. y se tienen los llamados fluidos no-viscosos ideales.

2. En la aproximación a primer orden (fluidos stokesianos lineales) se tiene

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \lambda_v I_\epsilon \\ \alpha_1 &= 2\mu_v \qquad (1.64) \\ \alpha_2 &= 0 \end{aligned}$$

donde λ_v y μ_v, los llamados coeficientes de viscosidad cinemática y dinámica, respectivamente, son funciones de las variables termodinámicas ρ y θ, y pueden ser determinados experimentalmente. En este caso, las ecuaciones constitutivas para el tensor de esfuerzos se reducen a

a) Fluidos Compresibles:

$$T^i{}_j = (-\pi + \lambda_v I_e)\delta^i{}_j + 2\mu_v \epsilon^i{}_j \qquad (1.65a)$$

b) Fluidos Incompresibles:

$$T^i{}_j = -\pi\delta^i{}_j + 2\mu_v \epsilon^i{}_j. \qquad (1.65b)$$

En estas condiciones, es claro que la función de disipación correspondiente es

$$D^i{}_j \epsilon^j{}_i = \lambda_v I_e^2 + 2\mu_v \epsilon^i{}_j \epsilon^j{}_i, \qquad (1.66)$$

y puede demostrarse [4] que: Una condición necesaria y suficiente para que la función de disipación de un fluido compresible lineal sea no-negativa es que

$$3\lambda_v + 2\mu_v \geqslant 0 \qquad \mu_v \geqslant 0. \qquad (1.67)$$

A partir de la Ec.(1.65a), es fácil mostrar que la presión termodinámica π y la presión mecánica $\bar{p}$, definida como

$$\bar{p} = -\frac{1}{3} T^k{}_k, \qquad (1.68)$$

coinciden cuando se satisface la llamada Condición de Stokes:

$$3\lambda_v + 2\mu_v = 0. \qquad (1.69)$$

Finalmente, usando las Ecs.(1.26), (1.41), y (1.65a), se obtienen las llamadas ecuaciones de Navier-Stokes para fluidos viscosos compresibles:

$$-\nabla\pi + (\lambda_v+\mu_v)\nabla(\nabla\cdot\vec{v}) + \mu_v\nabla^2\vec{v} + \rho\vec{b} = \rho\frac{d\vec{v}}{dt} \qquad (1.70)$$

las que, para fluidos viscosos incompresibles, se reducen a la expresión

$$-\nabla\pi + \mu_v\nabla(\nabla\cdot\vec{v}) + \mu_v\nabla^2\vec{v} + \rho\vec{b} = \rho\frac{d\vec{v}}{dt} \qquad (1.71)$$

Naturalmente, en el caso de fluidos no-viscosos las ecuaciones de Navier-Stokes se reducen a las conocidas ecuaciones de Euler:

$$\rho\vec{b} - \nabla\pi = \rho\frac{d\vec{v}}{dt}\,. \qquad (1.72)$$

C A P I T U L O 2

LA TEORIA ESPECIAL DE RELATIVIDAD

2.0 INTRODUCCION

En el presente capítulo se tratan los principios fundamentales y las consecuencias cinemáticas y dinámicas de la teoría especial de relatividad de Einstein. Esta rama de la teoría de relatividad tiene un rango de aplicación restringido, pues en ella se trabaja solo con la intercomparación de las medidas hechas por obsevadores inerciales, y que se encuentran en una región del espacio y el tiempo donde la acción gravitacional puede ser despreciada.

La teoría especial de relatividad está basada en tres postulados fundamentales que encabezan este capítulo.

2.1 LOS POSTULADOS FUNDAMENTALES

El primer postulado de la teoría especial de la relatividad consiste en aceptar la validez de la primera ley de Newton. Esta,afirma la existencia de sistemas de referencia inerciales. Un sistema inercial se define como aquel en el cual una partícula libre, sí no esté en reposo, se mueve uniformemente describiendo una trayectoria patrón, es decir, la trayectoria de un rayo de luz en el vacío.

El segundo postulado establece: no es posible realizar experimento alguno que permita detectar el movimiento absoluto de un sistema de referencia inercial. Esto significa que solo tiene sentido hablar de la velocidad relativa entre sistemas de referencia inerciales y que, por consiguiente, la expresión velocidad absoluta carece de significado.

Como consecuencia del segundo postulado, es claro que las leyes generales de acuerdo a las cuales ocurren los fenómenos de la naturaleza deben ser exactamente las mismas en todos los sistemas de referencia inerciales. Esto debe ser así , pues si las leyes de la física no fueran independientes de la velocidad del sistema de referencia usado en particular, tales leyes tomarían una forma particularmente simple en aquel sistema que estuviese absolutamente en reposo, lo cual sería, en contradicción con el segundo postulado, una forma de detectar el movimiento absoluto.

La teoría especial de relatividad requiere, además, de un tercer postulado. Este establece que la luz en el vacío se propaga siempre con la misma velocidad, independientemente del estado de movimiento de la fuente luminosa. Esto quiere decir que para todos los observadores inerciales la velocidad de la luz en el vacío es la misma no importando la velocidad relativa de la fuente luminosa y los observadores.

A la combinación de los tres postulados fundamentales suele llamársele principio de relatividad de Einstein (o simplemente principio de relatividad).

Una de las principales consecuencias del principio de relatividad de Einstein es que el tiempo pierde el carácter de absoluto que poseía en la mecánica Newtoniana. Así que, para la toría especial de relatividad, el tiempo transcurre diferentemente en distintos sistemas de referencia. En particular, los eventos que son simultáneos en un sistema de referencia no lo serán en otro [10].

2.2 EL ESPACIO-TIEMPO PLANO DE MINKOWSKI

Todos los acontecimientos en la naturaleza involucran invariablemente lugares y tiempos en combinación. Se define un evento como un acontecimiento que no tiene extensión ni duración, es decir, un evento es una entidad completamente definida por la posición y el instante en que ocurre. Así, para identificar un evento se requieren cuatro números, uno de los cuales fija el evento en el tiempo, en tanto que los tres restantes fijan su posición en el espacio. Entonces, un evento puede ser caracterizado por una tetrada (t,x,y,z) donde t denota el tiempo en que ocurre el evento y (x,y,z) son las coordenadas Cartesianas del lugar de ocurrencia. En general, para definir un evento, basta con especificar cuatro funciones de las coordenadas espaciales (x,y,z) y el tiempo t,

$$x^{\mu} = x^{\mu}(x,y,z,t)$$

a las cuales se les llama las coordenadas del evento [11]. De esta manera, los eventos pueden representarse, geométricamente, como puntos en un hiperespacio de cuatro dimensiones al que se conoce como espacio-tiempo. Es importante señalar que siempre es posible determinar métodos operacionales para asignar las coordenadas x^{μ} a los eventos en el espacio-tiempo y que, si a un mismo evento se le asignan dos conjuntos de coordenadas, x^{μ} y x'^{μ}, mediante dos métodos diferentes, entonces debe existir una transformación de coordenadas que permita pasar de un conjunto al otro [12], es decir,

---

De aquí en adelante todo índice griego tomará los valores 0,1,2,3 y todo índice latino tomará los valores 1,2,3.

$$x'^{\mu} = x'^{\mu}(x^{\nu})$$

o bien

$$x^{\mu} = x^{\mu}(x'^{\nu}).$$

Los conceptos de evento y partícula estan relacionados entre sí por el hecho de que la historia de una partícula consiste en una sucesión de eventos. Así, a cada partícula le corresponde, en el espacio-tiempo, una, y sólo una, línea llamada línea de mundo, cuyos puntos determinan las coordenadas espaciales de la partícula en todos los instantes de tiempo; es decir, la historia de una partícula es una curva en el espacio-tiempo que, paramétricamente, puede expresarse por cuatro ecuaciones del tipo

$$x^{\mu} = x^{\mu}(\epsilon)$$

donde ϵ es algún parámetro de curva.

La geometría asociada al espacio-tiempo debe ser tal que permita expresar en forma consistente las conclusiones obtenidas a partir del principio de relatividad. La geometría que resulta adecuada para la teoría especial de relatividad es aquella en la cual el intervalo entre dos eventos (x_1, y_1, z_1, t_1) y (x_2, y_2, z_2, t_2), definido como

$$s^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2 \qquad (2.1)$$

donde c es la velocidad de la luz en el vacío y $\Delta t = t_2 - t_1$, $\Delta x = x_2 - x_1$, $\Delta y = y_2 - y_1$, y $\Delta z = z_2 - z_1$, es el mismo en todos los sistemas de referencia inerciales, es decir, es un invariante con respecto a las transformaciones de las coordenadas espaciales y el tiempo, de un sistema inercial a otro. Esta invariancia es la expresión matemática del tercer postulado de la relatividad especial [10].

Si los eventos están infinitesimalmente separados, el intervalo ds entre ellos es tal que

$$ds^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

el cual, definiendo

$$x^0 = ct, \; x^1 = x, \; x^2 = y, \; x^3 = z, \qquad (2.2)$$

puede escribirse en la forma

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu \qquad (2.3)$$

donde las $\eta_{\mu\nu}$ son las componentes covariantes de un tensor de segundo rango llamado tensor métrico y cuyos valores son

$$\begin{aligned} \eta_{00} = 1, \; \eta_{11} = \eta_{22} = \eta_{33} = -1 \\ \eta_{\mu\nu} = 0 \quad \text{para} \quad \mu \neq \nu. \end{aligned} \qquad (2.4)$$

Al espacio Riemanniano cuya métrica es (2.3) se le conoce como el espacio-tiempo llano de Minkowski. Es llano porque las componentes del tensor métrico son constantes.

A partir de las componentes covariantes del tensor métrico pueden obtenerse las llamadas componentes contravariantes como

$$\eta^{\mu\nu} = (\text{Cofactor de } \eta_{\mu\nu} \text{ en } \eta)/\eta \qquad (2.5)$$

donde η es el determinante de las componentes $\eta_{\mu\nu}$. Entonces, por la ley de multiplicación de determinantes, es claro que

$$\eta^{\alpha\mu}\eta_{\alpha\nu} = \delta^\mu{}_\nu \qquad (2.6)$$

donde $\delta^\mu{}_\nu$ es una delta de Kronecker.

Sean A y B un par de eventos separados infinitesimalmente. Se dice que el intervalo entre ellos es: temporaloide si $ds^2 > 0$, espacialoide si $ds^2 < 0$, y luminoide si $ds^2 = 0$. El carácter temporaloide, espacialoide, o luminoide de un intervalo es, en virtud de su invariancia, independiente del sistema de referencia.

Si el intervalo entre dos eventos es temporaloide, existe un sistema de referencia en el que éstos coinciden espacialmente. Si el intervalo es espacialoide, existe un sistema de referencia en el cual los eventos son simultáneos. Finalmente, si el intervalo es luminoide, dichos eventos son uno mismo o la separación espacial entre ellos es tal que sólo una señal luminosa puede unirlos.

Si cualquier desplazamiento ds a lo largo de una curva dada en el espacio-tiempo, es temporaloide, se dice que la curva es una línea de mundo temporaloide. Si, en particular, la línea de mundo es una geodésica, se tiene una geodésica temporaloide. Análogamente se definen las líneas de mundo y las geodésicas espacialoides y luminoides. A las geodésicas luminoides se les llama también geodésicas nulas.

Por otra parte, es conveniente mencionar que, además del principio de relatividad, es necesario exigir, en la teoría especial de relatividad, la invariancia absoluta de la relación causa-efecto para todos los sistemas físicos; es decir, que si un evento A es causa de un evento B, entonces en ningún sistema de referencia el evento B puede ocurrir antes que el evento A. Como consecuencia del requisito de causalidad, puede demostrarse que, la velocidad de propagación de cualquier señal portadora de la información que conecta causa y efecto, debe ser menor o igual a la velocidad de la luz. Así pues, la velocidad de la luz es la velocidad límite para la propagación de las interacciones.

De esta manera, es fácil ver que dos eventos solo pueden estar relacionados causalmente uno al otro si el intervalo entre ellos es temporaloide. De hecho, son precisamente estos eventos para los cuales tienen significado los conceptos de "antes" y "después", lo que es una condición necesaria para que tenga sentido hablar de causa y efecto.

Sea O un evento cualquiera. Respecto a O, el espacio-tiempo se divide en regiones distintas. La totalidad de geodésicas nulas que pasan por el evento O, constituyen una hipersuperficie, el cono de luz de O, sobre la cual se encuentran todos los eventos que pueden ser conectados a O mediante una señal luminosa (véase la Fig. 2.1). La totalidad de líneas de mundo temporaloides llenan el interior del cono de luz de O, constituyendo dos regiones en el espacio-tiempo: el futuro de O, y el pasado de O. Todos los eventos para los cuales, respecto a O, $\Delta x^{0} > 0$, forman el futuro de O; mientras que todos aquellos para los que $\Delta x^{0} < 0$, forman el pasado de O. La totalidad de eventos que se encuentran sobre las líneas de mundo espacialoides que pasan por el evento O, forman otra región en el espacio-tiempo: el presente de O.

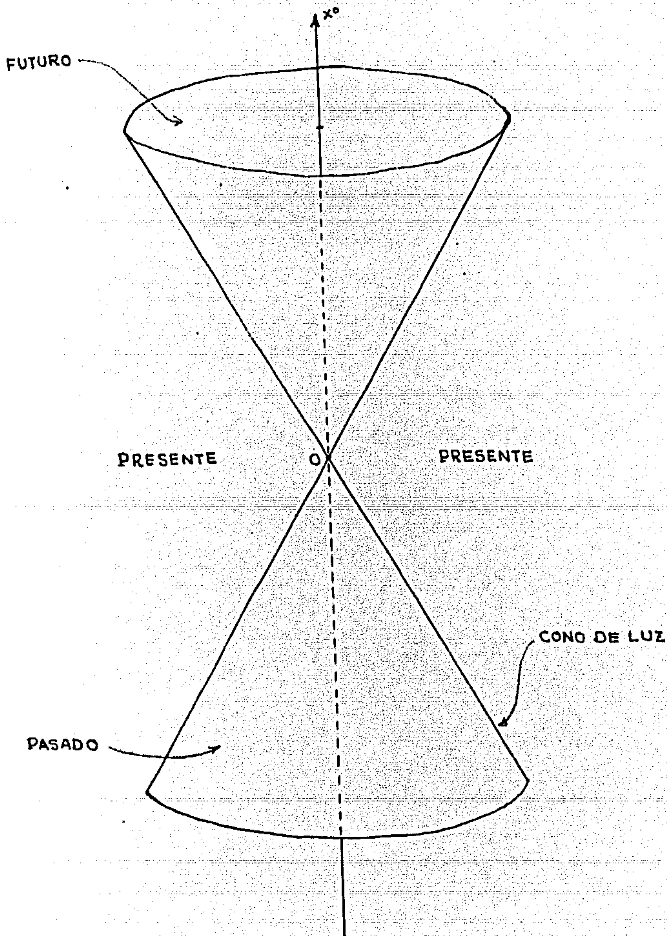

Fig. 2.1

2.3 EL GRUPO DE TRANSFORMACIONES DE LORENTZ

El grupo de transformaciones de la mecánica de Newton es el de las transformaciones de Galileo. Las transformaciones Galileanas son lineales en las cuatro coordenadas x, y, z, t; son ortogonales en las tres primeras, y dejan invariante a la coordenada temporal, correspondiendo a la idea de Newton de un espacio y un tiempo absolutos.

Claramente, dado que la única velocidad invariante bajo el grupo de Galileo es una con magnitud infinita, la teoría especial de relatividad no puede admitir al grupo de Galileo como grupo de transformaciones. El grupo de transformaciones que resulta ser consistente con el principio de relatividad de Einstein es el de las transformaciones de Lorentz. Las transformaciones de Lorentz son aquellas transformaciones lineales homogéneas

$$x^\mu \longrightarrow x'^\mu = \Lambda_\nu{}^\mu x^\nu \qquad (2.7)$$

que dejan invariante la métrica de Minkowski $\eta_{\mu\nu}$ y que, por lo tanto, satisfacen

$$\Lambda_\alpha{}^\mu \Lambda_\beta{}^\nu \eta_{\mu\nu} = \eta_{\alpha\beta} \qquad (2.8)$$

Al grupo de transformaciones del tipo (2.7) se le llama también Grupo Homogéneo de Lorentz, para distinguirlo del Grupo Inhomogéneo de Lorentz, o Grupo de Poincaré, cuyas transformaciones involucran traslación y que, por consiguiente, son de la forma

$$x'^\mu = \Lambda_\nu{}^\mu x^\nu + a^\mu. \qquad (2.9)$$

Tomando el determinante de ambos lados de la Ec.(2.8) se encuentra

$$(\det \Lambda)^2 = 1$$

de modo que

$$\det \Lambda = \pm 1. \qquad (2.10)$$

Además, haciendo $\alpha = \beta = 0$ en la Ec.(2.8), se obtiene

$$\Lambda_0^{\ \mu} \Lambda_0^{\ \nu} \eta_{\mu\nu} = 1$$

que implica la desigualdad

$$(\Lambda_0^{\ 0})^2 = 1 + \sum_{\mu=1}^{3} (\Lambda_0^{\ \mu})^2 \geq 1$$

de la cual se sigue que

$$\Lambda_0^{\ 0} \geq 1$$

o

$$\Lambda_0^{\ 0} \leq -1.$$

Entonces, el grupo homogéneo de Lorentz tiene cuatro piezas desconectadas:

1. Las Transformaciones de Lorentz Ortócronas Propias: $\det \Lambda = +1$, signo $\Lambda_0^{\ 0} = +1$. Este subconjunto contiene a la transformación identidad I

$$\mathrm{I}: (x^0, x^\mu) \longrightarrow (x^0, x^\mu).$$

2. Las Transformaciones de Lorentz Ortócronas Impropias: $\det \Lambda = -1$, signo $\Lambda_0^{\ 0} = +1$. Este subconjunto contiene

un elemento I_s tal que

$$I_s: (x^0, x^k) \longrightarrow (x^0, -x^k).$$

3. Las Transformaciones de Lorentz Antícronas Impropias: det $\Lambda = -1$, signo $\Lambda^0_{\ 0} = -1$. Este subconjunto contiene un elemento I_t tal que

$$I_t: (x^0, x^k) \longrightarrow (-x^0, x^k).$$

4. Las Transformaciones de Lorentz Antícronas Propias: det $\Lambda = +1$, signo $\Lambda^0_{\ 0} = -1$. En este subconjunto se encuentra el elemento $I_{st} = I_s I_t$ con la propiedad

$$I_{st}: (x^0, x^k) \longrightarrow (-x^0, -x^k).$$

Las transformaciones I_s e I_t realizan las operaciones de inversión en el espacio y en el tiempo, respectivamente.

Las transformaciones de Lorentz ortócronas propias forman un subgrupo, el grupo de las transformaciones restringidas de Lorentz. Este, es un grupo contínuo 6-paramétrico, así que cualquier transformación perteneciente a este subgrupo puede obtenerse partiendo de la identidad e integrando una serie de transformaciones infinitesimales de la forma

$$x'^{\mu} = (\delta_{\nu}^{\ \mu} + \epsilon_{\nu}^{\ \mu})x^{\nu} \qquad (2.11)$$

donde $\epsilon_{\mu\nu} = \eta_{\mu\kappa}\,\epsilon_{\nu}^{\ \kappa} = -\epsilon_{\nu\mu}$ son parámetros infinitesimales [13].

Un elemento del grupo de transformaciones ortócronas propias, es la transformación que deja invariantes dos coor denadas espaciales, por ejemplo x^2 y x^3, y transforma a x^0 y x^1. Esta, es la transformación de un sistema de referencia inercial K a otro K' que se mueve, respecto a K, con velocidad V a lo largo del eje x^1.

La matriz de transformación de Lorentz es, en este caso particular,

$$\|\Lambda_\nu^{\ \mu}\| = \begin{Vmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \tag{2.12}$$

donde

$$\beta = \frac{V}{c} \tag{2.13a}$$

y

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{2.13b}$$

En este caso, las ecuaciones de transformación

$$x'^\mu = \Lambda_\nu^{\ \mu} x^\nu$$

pueden escribirse, explicitamente, como

$$\begin{aligned} x'^0 &= \gamma(x^0 - \beta x^1) \\ x'^1 &= \gamma(x^1 - \beta x^0) \\ x'^2 &= x^2 \\ x'^3 &= x^3. \end{aligned} \tag{2.14}$$

2.4 CUADRITENSORES

Las coordenadas x^μ asociadas a un evento en algún sistema de referencia inercial, pueden considerarse como componentes contravariantes de un vector de posición en el espacio-tiempo de Minkowski. En general, una colección de cuatro cantidades

$$A^\mu = (A^0, A^1, A^2, A^3)$$

que, bajo transformaciones de Lorentz, se transforman de acuerdo a la ley

$$A'^\mu = \Lambda_\nu{}^\mu A^\nu, \qquad (2.15)$$

constituyen las componentes contravariantes de un cuadritensor de rango uno, o cuadrivector; en tanto que una colección de cuatro cantidades

$$A_\mu = (A_0, A_1, A_2, A_3)$$

constituyen las componentes covariantes de un cuadritensor de rango uno, o cuadrivector, si se transforman de acuerdo a la ley

$$A'_\mu = (\Lambda^{-1})_\mu{}^\nu A_\nu \qquad (2.16)$$

Ambos tipos de componentes de un cuadrivector se relacionan como

$$A_\mu = \eta_{\mu\nu} A^\nu \qquad (2.17)$$

La componente A^0 o A_0 de un cuadrivector se llama componente temporal; y las componentes A^1, A^2, A^3 o A_1, A_2, A_3, se llaman componentes espaciales.

La propiedad fundamental (2.8) de las transformaciones de Lorentz implica que el producto

$$\mathbb{A}\cdot\mathbb{B} = \eta_{\mu\nu}A^{\mu}B^{\nu} \qquad (2.18)$$

de dos cuadrivectores es un escalar (cuadritensor de rango cero); es decir, dicho producto es una cantidad cuyo valor es independiente del sistema de referencia.

Una colección de dieciseis cantidades $T^{\mu\nu}$, $T_{\mu\nu}$, o $T^{\mu}{}_{\nu}$, constituyen las componentes contravariantes, covariantes, o mixtas, de un cuadritensor de rango dos, si se transforman como

$$T'^{\mu\nu} = \Lambda_{\alpha}{}^{\mu}\Lambda_{\beta}{}^{\nu}T^{\alpha\beta}, \qquad (2.19)$$

$$T'_{\mu\nu} = (\Lambda^{-1})_{\mu}{}^{\alpha}(\Lambda^{-1})_{\nu}{}^{\beta}T_{\alpha\beta}, \qquad (2.20)$$

o

$$T'^{\mu}{}_{\nu} = \Lambda^{\mu}{}_{\alpha}(\Lambda^{-1})^{\beta}{}_{\nu}T^{\alpha}{}_{\beta}, \qquad (2.21)$$

respectivamente. De manera análoga se definen las componentes contravariantes, covariantes, o mixtas de cuadritensores de rango superior.

Existen dos tensores que son invariantes bajo transformaciones de Lorentz, es decir, que tienen las mismas componentes en todos los sistemas de referencia. El primero es el tensor métrico, cuyas componentes, contravariantes, covariantes y mixtas, son $\eta^{\mu\nu}$, $\eta_{\mu\nu}$ y $\delta^{\mu}{}_{\nu}$, respectivamente; el segundo es el tensor completamente antisimétrico ϵ, cuyas componentes, $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$, se definen como

$$\epsilon^{0123} = +1$$

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\begin{cases}\text{es antisimétrico ante el intercambio}\\ \text{de cualquier par de índices.}\end{cases} \qquad (2.22)$$

Las componentes covariantes $\epsilon_{\mu\nu\rho\tau}$ de ϵ forman, también, un arreglo de números completamente antisimétrico, pero

$$\epsilon_{0123} = -1 \,. \qquad (3.23)$$

2.5 LA DINAMICA RELATIVISTA

La historia de una partícula, como ya se mencionó, consiste en una sucesión de eventos que define una, y sólo una, trayectoria en el espacio-tiempo llano de Minkowski. Esta trayectoria es la línea de mundo de la partícula. Paramétricamente, las ecuaciones de la trayectoria pueden escribirse como

$$x^\alpha = x^\alpha(\lambda)$$

donde λ es algún parámetro invariante.

Las componentes del cuadrivector que representa la velocidad de la partícula, la cuadrivelocidad, se definen como

$$u^\alpha = \frac{dx^\alpha}{ds} = \dot{x}^\alpha \frac{d\lambda}{ds} \qquad (2.24)$$

donde $\dot{x}^\alpha = dx^\alpha/d\lambda$ y $ds^2 = dx^\alpha dx_\alpha$ es el intervalo entre eventos infinitesimalmente separados. Las Ecs. (2.24), en virtud de que

$$ds = c\,dt\sqrt{1 - v^2/c^2} \qquad (2.25)$$

pueden escribirse como

$$u^\alpha = \frac{dx^\alpha}{ds} = \left(\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \,,\; \frac{v^k}{c\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right) \qquad (2.26)$$

donde v y v^k son la magnitud y las componentes, respectivamente, de la velocidad ordinaria tridimensional. Geométricamente, la cuadrivelocidad es un vector unitario tangente a la línea de mundo de la partícula. Claramente, las componentes de la cuadrivelocidad no son independientes, puesto que

$$u^{\alpha}u_{\alpha} = 1. \tag{2.27}$$

El cuadrimomento (o 4-ímpetu) de una partícula se define como el cuadrivector, colineal a la cuadrivelocidad, cuyas componentes contravariantes son

$$p^{\alpha} = m_o c u^{\alpha} \tag{2.28}$$

donde m_o es la masa en reposo de la partícula. Usando la Ec.(2.26), para v suficientemente pequeña en comparación con c, las componentes del cuadrimomento pueden escribirse aproximadamente como

$$\begin{aligned} p^o &= m_o c + \tfrac{1}{2} m_o \frac{v^2}{c} \\ p^k &= m_o v^k. \end{aligned} \tag{2.29}$$

Esto permite identificar a la componente temporal del cuadrimomento con la energía de la partícula

$$E = p^o c \approx m_o c^2 + \tfrac{1}{2} m_o v^2, \tag{2.30}$$

la cual, salvo por el término constante $E_o = m_o c^2$, conocido como la energía en reposo de la partícula, corresponde a la energía cinética ordinaria de la partícula. Las componentes espaciales corresponden, claramente, a las componentes del ímpetu ordinario tridimensional. Así pues,

$$p^{\alpha} = \left(\frac{E}{c} , \vec{p} \right) \tag{2.31}$$

En la mecánica relativista, al igual que en la mecánica Newtoniana, los cambios en el cuadrimomento de una partícula son asociados con la presencia de agentes externos que la afectan. Las fuerzas que actúan sobre la partícula, y los correspondientes cambios en el cuadrimomento, estan relacionados por

$$f^{\alpha} = \frac{dp^{\alpha}}{ds} = \frac{d}{ds}(m_o c u^{\alpha}) \tag{2.32}$$

Las f^{α} constituyen las componentes de la llamada cuadrifuerza de Minkowski. En términos de la fuerza ordinaria tridimensional [13]

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\frac{m_o \vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right],$$

las componentes de la cuadrifuerza pueden escribirse como

$$f^{\alpha} = \left(\frac{\vec{F}\cdot\vec{v}}{c^2\sqrt{1 - v^2/c^2}} , \frac{\vec{F}}{c\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right) \tag{2.33}$$

La componente temporal, f^{o}, de la cuadrifuerza puede, en esta forma, interpretarse como la rapidez con que se realiza trabajo sobre la partícula.

Las Ecs.(2.32) son las ecuaciones de movimiento de la partícula. De ellas se sigue, inmediatamente, que la cuadrivelocidad de una partícula libre es constante.

Por otra parte, puesto que la trayectoria de una partícula libre puede asociarse con una geodésica temporaloide [13], las ecuaciones de movimiento, para tal partícula, se pueden obtener a partir de un principio variacional con una acción W dada por [10]

$$W = -m_0 c\int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} ds \qquad (2.34)$$

donde ε_1 y ε_2 son un par de eventos por los que pasa la partícula. Así pues, dado que

$$ds^2 = dx^\alpha dx_\alpha$$

entonces la acción (2.34) puede escribirse como

$$W = -m_0 c\int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} u^\alpha dx_\alpha .$$

Ahora bien, de acuerdo con el Principio de Hamilton, de entre todas las trayectorias dinámicamente posibles que pasan por ε_1 y ε_2, la trayectoria real correspondiente a la partícula, es aquella para la cual la acción tiene un valor extremo. Esto significa, en otras palabras, que las ecuaciones de movimiento asociadas con la acción W, se obtienen a partir de la condición $\delta W = 0$. Efectuando las variaciones se obtiene

$$\delta W = -m_0 c\int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} u^\alpha d(\delta x_\alpha) ,$$

la cual, mediante una integración por partes, puede escribirse en la forma

$$\delta W = m_0 c \int_{\epsilon_1}^{\epsilon_2} \frac{du^\alpha}{ds} \delta x_\alpha ds. \qquad (2.35)$$

En consecuencia, δW será cero solo si

$$(du^\alpha/ds) = 0 , \qquad (2.36)$$

es decir, la cuadrivelocidad de una partícula libre es constante.

Usando la Ec.(2.25), la acción puede escribirse, de nueva cuenta, como

$$W = \int_{t_1}^{t_2} L\, dt = - m_0 c^2 \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 - v^2/c^2}\, dt,$$

lo que permite escribir la Lagrangiana de la partícula libre como

$$L = - m_0 c^2 \sqrt{1 - v^2/c^2} \qquad (2.37)$$

En la mecánica de Newton, si sobre una partícula actúan fuerzas derivables de un potencial U, la Lagrangiana, para esta partícula, es L = T - U. En la relatividad especial, como acaba de verse, la Lagrangiana clásica para una partícula libre,

$$L = T = \frac{1}{2} mv^2,$$

se convierte en la expresión dada en (2.37).

A continuación se considera la parte de la acción que corresponde a la energía potencial U:

$$- \int_{t_1}^{t_2} U \, dt \, . \qquad (2.38)$$

Considerando a U como un escalar en el espacio-tiempo de Minkowski, es decir, como un invariante de Lorentz:

$$U = U(x^{\mu}), \qquad (2.39)$$

es necesario modificar (2.38) para obtener una integral que tenga significado cuadridimensional. Esto puede conseguirse remplazando dt por el elemento de tiempo propio $d\tau$ definido como

$$d\tau = ds/c \qquad (2.40)$$

y que corresponde al tiempo medido por un reloj que se mueve con la partícula [14]. Así pues, en relatividad especial, la Ec.(2.38) se convierte en

$$- \int_{t_1}^{t_2} \frac{U}{c} \, ds, \qquad (2.41)$$

y, por consiguiente, la acción relativista para esta partícula resulta ser

$$W = - c \int_{t_1}^{t_2} (m_0 + \frac{U}{c^2}) ds. \qquad (2.42)$$

De esta última expresión es claro que la presencia de una energía potencial escalar es equivalente a un incremento de la masa de la partícula por la cantidad U/c^2. En este caso, la variación de la acción conduce a

$$\delta W = -c\int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2}\left[m_o u^\alpha \frac{d}{ds}(\delta x_\alpha) + \frac{1}{c^2}\frac{\partial U}{\partial x_\alpha}\delta x_\alpha\right]ds$$

lo que, mediante una integración por partes del primer término y recordando que las δx_α se anulan en ε_1 y ε_2, se reduce a

$$\delta W = c\int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2}\left[m_o\frac{du^\alpha}{ds} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial U}{\partial x_\alpha}\right]\delta x_\alpha ds. \tag{2.43}$$

De esta manera, aplicando la condición $\delta W = 0$ se obtiene

$$m_o c\,\frac{du^\alpha}{ds} = \frac{1}{c}\frac{\partial U}{\partial x_\alpha} \tag{2.44}$$

las que, identificando

$$f^\alpha = \frac{1}{c}\frac{\partial U}{\partial x_\alpha}, \tag{2.45}$$

pueden escribirse como

$$f^\alpha = \frac{d}{ds}(m_o c u^\alpha) = \frac{dp^\alpha}{ds} \tag{2.46}$$

que son las ecuaciones de movimiento (2.32) que ya se habían obtenido.

2.6 SISTEMAS DE MUCHAS PARTICULAS

A pesar de que en relatividad especial no existen planos de simultaneidad absoluta, es posible formular una acción para un sistema de muchas partículas en interacción. La acción para tal sistema es [13]

$$W = \sum_i \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \left[-m_{oi}c + \sum_{j\neq i} \frac{1}{c} \int_{(\sigma_1)}^{(\sigma_2)} U_{ij} ds_j \right] ds_i \qquad (2.47)$$

En esta expresión, el primer término corresponde a lo que sería la acción si las partículas en el sistema fuesen libres. En este término, las integrales se toman a lo largo de aquellas partes de las trayectorias de las partículas que estan entre dos superficies espacialoides σ_1 y σ_2 que no se intersecan (véase la Fig. 2.2). El segundo término representa la parte de interacción entre pares de partículas. Aquí, las integrales se extienden suficientemente más alla de σ_1 y σ_2, para incluir todos los efectos de cualquier partícula sobre las partes de las trayectorias de las otras partículas que esten entre σ_1 y σ_2. Los límites de estas integrales dependen, por consiguiente, no solo de σ_1 y σ_2, sino también del potencial de interacción U_{ij}. Esta dependencia se indica con la notación (σ_1) y (σ_2).

Las ecuaciones de movimiento del sistema se obtienen a partir del principio de Hamilton, de acuerdo al cual, la variación de la funcional de acción debe anularse para variaciones de las trayectorias que se anulen fuera de la región acotada por σ_1 y σ_2. El uso del intervalo diferencial ds

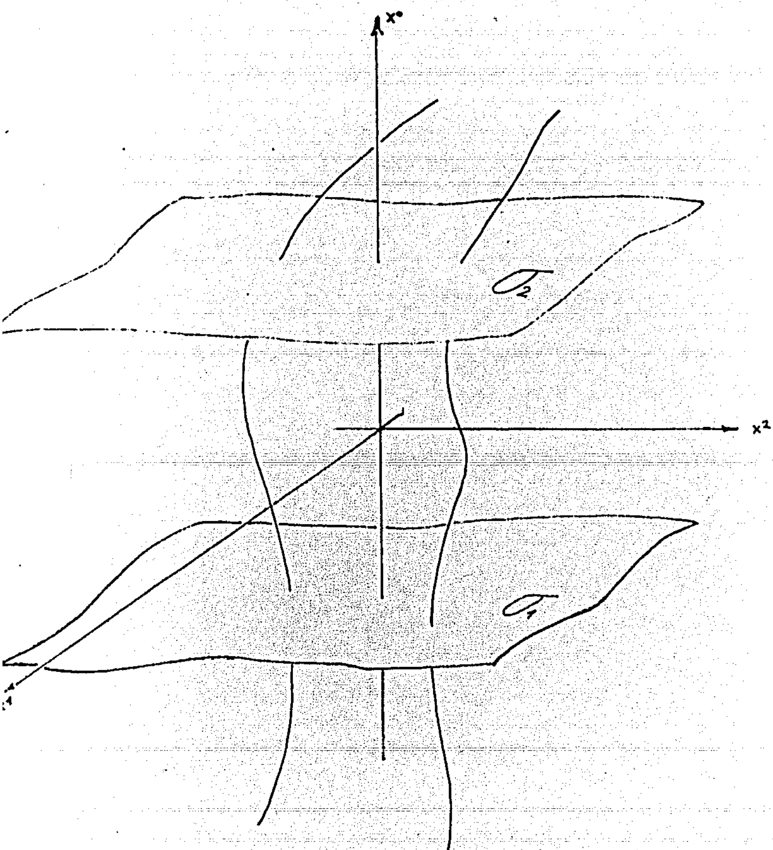

Fig. 2.2

en las integrales que entran en la funcional de acción restringe las variaciones a aquellas que sean compatibles con la condición $u^{\alpha}u_{\alpha} = 1$. Por ésto, es conveniente introducir un conjunto de parámetros λ_i, uno para cada partícula, tales que

$$ds_i^2 = \eta_{\alpha\beta}\dot{x}_i^{\alpha}\dot{x}_i^{\beta}d\lambda_i^2, \qquad (2.48)$$

donde $\dot{x}_i^{\alpha} = dx_i^{\alpha}/d\lambda_i$. De esta manera la funcional de acción puede escribirse como

$$W = \sum_i \int_{\sigma_i}^{\sigma_2} \left[- m_{oi}c\sqrt{\eta_{\alpha\beta}\dot{x}_i^{\alpha}\dot{x}_i^{\beta}} + \sum_{j\neq i}\frac{1}{c}\int_{(\sigma_1)}^{(\sigma_2)} U_{ij}d\lambda_j \right] d\lambda_i \qquad (2.49)$$

donde los factores

$$\sqrt{\eta_{\alpha\beta}\dot{x}_i^{\alpha}\dot{x}_i^{\beta}} \quad \text{y} \quad \sqrt{\eta_{\mu\nu}\dot{x}_j^{\mu}\dot{x}_j^{\nu}} \, ,$$

en la segunda integral, se han incluido en el potencial de interacción U_{ij}.

Definiendo

$$L_i(x_i^{\alpha}, \dot{x}_i^{\alpha}, \lambda_i) \equiv - m_{oi}c\sqrt{\eta_{\alpha\beta}\dot{x}_i^{\alpha}\dot{x}_i^{\beta}} + \sum_{j\neq i}\frac{1}{c}\int_{(\sigma_1)}^{(\sigma_2)} U_{ij}d\lambda_j \qquad (2.50)$$

la Ec.(2.49) puede escribirse en la forma

$$W = \sum_i \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} L_i d\lambda_i \, , \qquad (2.51)$$

y el requisito $\delta W = 0$ conduce a las ecuaciones de movimiento

$$\frac{d}{d\lambda_i}\frac{\partial L_i}{\partial \dot{x}_i^{\alpha}} - \frac{\partial L_i}{\partial x_i^{\alpha}} = 0 \qquad (2.52)$$

o bien

$$m_{oi} c \frac{du_i^{\kappa}}{ds_i} + \sum_{j \neq i} \frac{1}{c} \int_{(\sigma_i)}^{(\sigma_1)} \left[\frac{\partial U_{ij}}{\partial x_{\kappa i}} - \frac{d}{ds_i} \frac{\partial U_{ij}}{\partial u_{\kappa i}} \right] ds_j = 0 \qquad (2.53)$$

donde los parámetros λ_i se han escogido, ahora, como los intervalos s_i a lo largo de las trayectorias.

Como puede observarse, las ecuaciones de movimiento relativistas (2.53) son ecuaciones integro-diferenciales debido a las integrales que en ellas aparecen. Claramente, esto dificulta la formulación de un problema de valores iniciales, bien definido, para estas ecuaciones [13].

C A P I T U L O 3

LA MECANICA DEL MEDIO CONTINUO INVARIANTE DE LORENTZ BAJO EL PUNTO DE VISTA DE UN OBSERVADOR INERCIAL

3.0 INTRODUCCION

Este capítulo constituye un primer intento de formulación de una mecánica de fluidos invariante de Lorentz. Aquí, un fluido es tratado desde el punto de vista macroscópico y, por consiguiente, es ignorada su estructura molecular y considerado como en medio contínuo. Este, a su vez, se supone equipado con una estructura topológica, modelado en el espacio-tiempo llano de Minkowski y, sobre el cual, se define una medida no-negativa; la masa.

Los puntos del espacio-tiempo, como ya se mencionó en el capítulo 2, son considerados como elementos primitivos a los que se les llama eventos y que son, supuestamente, todos equivalentes. El espacio-tiempo es meramente una colección de puntos dotada con ciertas propiedades, entre las que se encuentran sus propiedades topológicas que son, por así decirlo, aquellas que no son afectadas por deformaciones arbitrarias del espacio-tiempo [13]. Claramente, la topología del espacio-tiempo está restringida, hasta cierto punto, por el tipo de geometría que se le imponga. En relatividad, se supone que, localmente, la topología del espacio-tiempo es la inducida por la estructura métrica del espacio-tiempo llano de Minkowski; es decir, que localmente son válidas las leyes de la teoría especial de relatividad. En consecuencia, es posible mapear uno a uno y en forma bicontínua los puntos de cualquier región pequeña, pero finita, del espacio-tiempo sobre los puntos de una región co rrespondiente del espacio-tiempo llano de Minkowski. Esta propiedad del espacio-tiempo es equivalente a suponer que sus puntos constituyen una variedad; la variedad espacio-tiempo. Así mismo, ésto hace posible la asignación de coordenadas a los puntos del espacio-tiempo.

Aquí, de nueva cuenta, se supone que los observadores son inerciales y la no existencia de efectos gravitacionales. Así pues, puede suponerse que globalmente la topología del espacio-tiempo es equivalente a la del espacio-tiempo llano de Minkowski y, por consiguiente, basta con un sistema de coordenadas para cubrir todo el espacio-tiempo. En otras palabras, aquí la mecánica de fluidos es enmarcada dentro de la teoría especial de relatividad.

Por otro lado, los cuerpos, los movimientos, y las fuerzas son considerados aquí, al igual que en la mecánica clásica de los medios contínuos, como elementos primitivos y, se supone, son dados a priori.

3.1 PRELIMINARES

Aquí se presentan, brevemente, algunos de los conceptos y resultados matemáticos que, con frecuencia, serán utilizados en las secciones siguientes.

ANILLO DE CONJUNTOS.

A todo conjunto cuyos elementos son, en sí, ciertos conjuntos se le llama Sistema de Conjuntos.+

+ Si no se especifica lo contrario, solo serán considerados sistemas cuyos elementos son cada uno un subconjunto de un cierto conjunto fijado X.

Un sistema no vacío de conjuntos $\mathfrak{R}$ se llama Anillo si de $A \in \mathfrak{R}$ y $B \in \mathfrak{R}$ se deduce $A \Delta B \in \mathfrak{R}$ y $A \cap B \in \mathfrak{R}$, donde

$$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A),$$

es la llamada Diferencia Simétrica, y donde A – B es la colección de aquellos elementos de A que no pertenecen a B.

Puesto que para cualesquiera dos conjuntos A y B

$$A \cup B = (A \Delta B) \Delta (A \cap B)$$

y

$$A - B = A \Delta (A \cap B),$$

resulta que si $A \in \mathfrak{R}$ y $B \in \mathfrak{R}$, también pertenecen a $\mathfrak{R}$ los conjuntos $A \cup B$ y $A - B$. Consecuentemente, un anillo de conjuntos es un sistema de conjuntos invariante respecto a las operaciones de unión, intersección, diferencia, y diferencia simétrica. Es obvio que todo anillo es, además, invariante respecto a la operación de toda unión o intersección finitas.

Un conjunto E se llama Unidad del sistema de conjuntos $\mathfrak{D}$, si pertenece a $\mathfrak{D}$ y si, además, para todo $A \in \mathfrak{D}$ se verifica la igualdad

$$A \cap E = A.$$

Así pues, la unidad de un sistema de conjuntos $\mathfrak{D}$ no es otra cosa que el conjunto maximal de este sistema que contiene a todos los demás conjuntos que figuran en $\mathfrak{D}$.

Un anillo de conjuntos provisto de la unidad se denomina Algebra de conjuntos.

Directamente de la definición de un anillo de conjuntos se desprenden los teoremas siguientes:

Teorema 1. La intersección $\mathfrak{R}=\bigcap_i \mathfrak{R}_i$ de un conjunto cualquiera de anillos es tambien un anillo.

Teorema 2. Cualquiera que sea el sistema no vacío de conjuntos $\mathfrak{P}$ existe un anillo y sólo uno, $\mathfrak{R}(\mathfrak{P})$ que contiene $\mathfrak{P}$ y esté contenido en cualquier anillo $\mathfrak{R}$ que contiene $\mathfrak{P}$.+

Al anillo $\mathfrak{R}(\mathfrak{P})$ se le llama anillo minimal sobre el sistema $\mathfrak{P}$.

ALGEBRAS DE BOREL.

En varios problemas, en la teoría de la medida, en particular, es preciso considerar la unión e intersección de una cantidad numerable, y no solo finita, de conjuntos. Por eso conviene introducir los siguientes conceptos, además del de anillo de conjuntos.

Un anillo de conjuntos se llama σ-anillo si junto con toda la sucesión de conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ contiene la unión

$$S = \bigcup_n A_n.$$

Un anillo de conjuntos se llama δ-anillo si junto con toda la sucesión de conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ contiene la intersección

$$D = \bigcap_n A_n.$$

+ La demostración de este teorema puede verse en la referencia [15].

Es natural llamar σ-algebra a todo σ-anillo con unidad y δ-algebra a todo δ-anillo con unidad. Sin embargo, estos dos conceptos coinciden: toda σ-algebra es a la vez una δ-algebra y toda δ-algebra, una σ-algebra [15].

Las δ-algebras o, que es lo mismo, las σ-algebras suelen llamarse Algebras de Borel o, simplemente, B-algebras.

El ejemplo más sencillo de una B-algebra es la totalidad de los subconjuntos de un conjunto A.

ESPACIOS METRICOS Y TOPOLOGICOS.

Una Métrica sobre un conjunto X es una función que a cada pareja de elementos $x, y \in X$ hace corresponder un número real positivo $s(x,y)$, y que tiene las propiedades siguientes:

(M1) $s(x,y) = 0$ si, y sólo si, $x = y$.

(M2) Axioma de simetría: $s(x,y) = s(y,x)$.

(M3) Desigualdad del Triángulo: $s(x,z) \leq s(x,y) + s(y,z)$

Un conjunto provisto de una métrica se llama Espacio Métrico, sus elementos se llaman puntos y a $s(x,y)$ se le llama la distancia o el intervalo entre los puntos x e y.

Si x_0 es un punto de X y $\epsilon > 0$, entonces al conjunto

$$\mathcal{U}_\epsilon = \{x \mid s(x, x_0) < \epsilon\},$$

de todos los puntos x con $s(x, x_0) < \epsilon$ se le llama la vecindad esférica de x_0 de radio ϵ o, simplemente, la ϵ-vecindad de x_0.

Una vecindad esférica es simplemente un caso particular de una vecindad general definida como sigue:

Se dice que un subconjunto U de X es una vecindad del punto x si contiene una vecindad esférica de x.

Una estructura más general que la de espacio métrico es la de espacio topológico.

Una topología sobre un conjunto X se define haciendo corresponder a cada punto $x \in X$ una colección V(x) de subconjuntos de X de manera que se verifiquen los axiomas siguientes:

(V1) Si $U \in V(x)$ y W es un conjunto que contiene a U, entonces $W \in V(x)$.

(V2) Si $U \in V(x)$ y $W \in V(x)$, entonces $U \cap W \in V(x)$.

(V3) Para cada $U \in V(x)$, se tiene $x \in U$.

(V4) Para cada $U \in V(x)$, existe $W \in V(x)$ tal que para todo $y \in W$, el conjunto U pertenece a V(y).

Un conjunto X junto con una topología definida sobre él se llama un Espacio Topológico, y se dice que X está equipado con la topología. Los conjuntos que pertenecen a la colección V(x) se llaman las vecindades del punto x.

Puede demostrarse [16] que las vecindades de los puntos de un espacio métrico satisfacen los axiomas (V1)-(V4). En consecuencia, todo espacio métrico es también un espacio topológico. Una métrica sobre un conjunto X induce, sobre él, una topología. Aunque toda métrica da lugar a una topología, no puede establecerse, recíprocamente, que toda topología surge de alguna métrica. En este sentido, se dice que un espacio topológico X es metrizable si existe una métrica sobre X que induce la topología de X.

Sea M un subconjunto de un espacio topológico X. Entonces se dice que

(1) Un punto $x \in X$ es un punto interior de M, si existe una vecindad V de x tal que $V \subset M$. El conjunto de todos los puntos interiores de M se llama el interior de M y se denota por $\underline{M}$.

(2) Un punto $x \in X$ es un punto exterior de M, si existe una vecindad V de x tal que $V \cap M = \emptyset$. El conjunto de todos los puntos exteriores de M se llama el exterior de M.

(3) Un punto $x \in X$ es un punto frontera de M, si toda vecindad de x contiene puntos que pertenecen a M y puntos que no pertenecen a M. El conjunto de todos los puntos frontera de M se llama la frontera de M y se denota por ∂M.

Se dice que un subconjunto M de un espacio topológico es abierto, si $M = \underline{M}$. En virtud del axioma (V3), se tiene siempre $\underline{M} \subset M$.

A los miembros del σ-anillo minimal que contiene a los conjuntos abiertos de un espacio topológico X, se les llama Conjuntos de Borel de X.

Sea X un espacio topológico y $\mathcal{A}$ la colección de todos los subconjuntos abiertos de X. Se puede demostrar que [47]

(1) El subconjunto vacío de X y X mismo pertenecen a $\mathcal{A}$

(2) Si A y B son dos conjuntos que pertenecen a $\mathcal{A}$, entonces $A \cap B$ pertenece a $\mathcal{A}$.

(3) Si $\{A_i\}$ es una familia arbitraria de conjuntos de $\mathcal{A}$, entonces $\bigcup_i A_i$ pertenece a $\mathcal{A}$.

Por otro lado, se dice que un punto x de un espacio topológico X es adherente al conjunto $M \subset X$, si cada vecindad de x contiene por lo menos un punto de M. El conjunto de todos los puntos adherentes a M se llama la adherencia (o cerradura) de M y se denota por $\bar{M}$. Un subconjunto A de X es cerrado si $A = \bar{A}$.

En virtud del axioma (V3), se tiene siempre $M \subset \bar{M}$. Es claro que los puntos adherentes a M son los puntos interiores de M y los puntos frontera de M.

Obsérvese que, tal como se han definido, los conceptos de "abierto" y "cerrado" no son cotradictorios. De hecho, por ejemplo, los conjuntos Ø y X son abiertos y cerrados a la vez, lo cual puede verificarse aplicando las definiciones. Estos conjuntos se llaman abierto-cerrados.

HOMEOMORFISMOS.

Sean A y B dos conjuntos. Un mapeo f asigna a cada elemento $a \in A$ un elemento bien definido $b \in B$. Los conjuntos A y B se llaman, respectivamente, el dominio de definición y el rango de variación de f. Simbólicamente se escribe

$$f : A \rightarrow B,$$

o bien

$$b = f(a).$$

El elemento b se llama la imagen de a, y el elemento a se llama la pre-imagen de b. Cada $a \in A$ tiene exactamente una imagen, pero un elemento $b \in B$ puede tener varias pre-imágenes. Si $M \subset A$, entonces $f(M) = N$ denota el conjunto de las imágenes de los elementos de M. Puede ocurrir que f(A) sea un subconjunto de B.

Si f tiene la propiedad de que $f(A) = B$ y, en consecuencia, cada elemento de B es una imagen, entonces se dice que f es un Mapeo Epimórfico o un mapeo sobre B. Si f tiene la propiedad de que cada elemento b posée a lo mas una preimagen y, por consiguiente, que $f(a_1) = f(a_2)$ implica $a_1 = a_2$, entonces se dice que f es un Mapeo Monomórfico (o uno a uno) de A en B. Si f es epimórfico y monomórfico, entonces se dice que f es un Mapeo Isomórfico de A sobre B. En este caso, y sólo en este caso, existe un mapeo inverso

$$f^{-1} : B \longrightarrow A,$$

que mapea isomórficamente B sobre A.

Se dice que dos espacios topológicos X y Y son Homeomórficos si existe un mapeo isomórfico f de X sobre Y por el cual el sistema de los conjuntos abiertos de X corresponde al sistema de los conjuntos abiertos de Y. El mapeo f se llama, en este caso, un Homeomorfismo de X sobre Y.

Dos espacios homeomórficos son, por lo tanto, indistinguibles como estructuras topológicas; a través de f, las dos topologías coinciden completamente.

Continuidad Local: Sea $f: X \rightarrow Y$ un mapeo del espacio topológico X en el espacio topológico Y y sea x un punto de X y $y = f(x)$. Se dice que f es contínuo en x si se satisface cualquiera de las siguientes condiciones equivalentes:

(1) Para cada vecindad $U \in V(y)$ existe una vecindad $W \in V(x)$ tal que $f(W) \subset U$.

(2) Para cada vecindad $U \in V(y)$ se tiene que $f^{-1}(U) \in V(x)$.

Continuidad Global: Sea $f: X \to Y$ un mapeo del espacio topológico X en el espacio topológico Y. Se dice que el mapeo f es contínuo, o más precisamente contínuo sobre Y, si se satisface cualquiera de las siguientes condiciones equivalentes: [16]

(1) f es contínuo para cada $x \in X$.

(2) El conjunto pre-imagen $f^{-1}(B)$ de cada conjunto abierto $B \subset Y$ es abierto.

(3) El conjunto pre-imagen $f^{-1}(C)$ de cada conjunto cerrado $C \subset Y$ es cerrado.

Teorema 3. Si los mapeos $f: X \to Y$ y $g: Y \to Z$ son contínuos, entonces el mapeo compuesto $h = g \cdot f: X \to Z$ también es contínuo.

Teorema 4. Un mapeo uno a uno f de un espacio topológico X sobre un espacio topológico Y, para el cual f al igual que f^{-1} son contínuos, es un homeomorfismo. Recíprocamente, si f es un homeomorfismo de X sobre Y, entonces tanto f como f^{-1} son contínuos.

Las demostraciones de estos teoremas pueden verse en la referencia [16].

EL CONCEPTO DE MEDIDA.

Un concepto más general que el de anillo es el de semianillo de conjuntos. Este concepto desempeña un papel importante en la teoría de la medida.

Un sistema de conjuntos $\mathcal{S}$ se llama Semianillo si contiene el conjunto vacío $\emptyset$, está cerrado respecto a la operación de intersección y cumple la siguiente propiedad: Si A y $A_1 \subset A$ pertenecen a S, se puede representar el conjunto A en la forma

$$A = \bigcup_{k=1}^{n} A_k ,$$

donde A_k son conjuntos de S disjuntos dos a dos y el primero de ellos es el conjunto dado A_1.

Todo sistema de conjuntos disjuntos dos a dos A_1, A_2, A_3, ..., A_n cuya unión es el conjunto dado A se llama una Descomposición Finita del conjunto A.

Una función $m(A)$ de conjunto se llama Medida cuando [15]

(1) el campo de definición S_m de la función $m(A)$ es un semianillo de conjuntos;

(2) los valores de la función $m(A)$ son reales y no-negativos;

(3) $m(A)$ es aditiva, esto es, para cualquier descomposición finita

$$A = A_1 \cup \cdots \cup A_n$$

de un conjunto $A \in S_m$ en conjuntos $A_k \in S_m$ se verifica la igualdad

$$m(A) = \sum_{k=1}^{n} m(A_k).$$

Nótese que, de la descomposición $\emptyset = \emptyset \cup \emptyset$ se deduce que $m(\emptyset) = 2m(\emptyset)$, es decir, $m(\emptyset) = 0$.

3.2 LOS CUERPOS

Se define un cuerpo como un conjunto $\mathfrak{B}$ de elementos primitivos X, Y, ... , llamados partículas o puntos materiales, y dotado con una estructura definida por los siguientes axiomas:

(C1) El conjunto $\mathfrak{B}$ está equipado con una estructura topológica; es decir, $\mathfrak{B}$ es un espacio topológico[49].

(C2) Existe un conjunto Ψ de mapeos $\varphi, \psi, \ldots$, cada uno de los cuales asigna a cada partícula $X \in \mathfrak{B}$ uno de los puntos de un espacio Euclideano tridimensional E_3.

(C3) Todo mapeo $\psi \in \Psi$ es uno a uno.

(C4) Para cada $\psi \in \Psi$, la imagen espacial $B = \psi(\mathfrak{B})$ es una región en el espacio Euclideano E_3.+

(C5) Si χ es un homeomorfismo suave de E_3 en E_3 y $\psi \in \Psi$, entonces el mapeo $\chi \circ \psi \in \Psi$.++

(C6) Si $\varphi, \psi \in \Psi$, el mapeo $\psi \circ \varphi^{-1}$ de $\varphi(\mathfrak{B})$ en $\psi(\mathfrak{B})$ es un homeomorfismo suave.+++

(C7) Existe una medida invariante M, real y no-negativa definida para todos los subconjuntos de Borel $\mathcal{C}$ de $\mathfrak{B}$.

(C8) Para cada $\psi \in \Psi$, la medida $m_\psi = M \circ \psi^{-1}$ inducida por M sobre la región espacial $B = \psi(\mathfrak{B})$, es absolutamente contínua, relativa a la medida de Lebesgue en B. Entonces, de acuerdo con el teorema de Radon-Nikodym, existe una densi-

---

+ Se llama región a un conjunto compacto con fronteras suaves (o al menos, suaves a pedazos).
++ El símbolo $\circ$ denota la composición de mapeos.
+++ El -1 superpuesto denota el inverso de un mapeo.

dad μ_ψ tal que

$$M(\mathcal{C}) = \int_{\psi(\mathcal{C})} \mu_\psi(x^i)dV \qquad (3.1)$$

donde la integral es una integral de Lebesgue, y V es la medida de Lebesgue en E_3 -el volumen tridimensional ordinario.

(C9) Para cada $\psi\in\Psi$ la densidad μ_ψ es positiva y acotada.

Los mapeos $\psi\in\Psi$ se llaman las configuraciones del cuerpo $\mathfrak{B}$, y el punto $x^i = \psi^i(X)$ (i = 1,2,3), la posición espacial de la partícula X en la configuración ψ. La función M es la distribución de masa del cuerpo $\mathfrak{B}$, y el número $M(\mathcal{C})$ es la masa del conjunto $\mathcal{C}\subset\mathfrak{B}$. La densidad μ_ψ se llama la densidad de masa del cuerpo $\mathfrak{B}$ en la configuración ψ.

Todo subconjunto compacto $\mathcal{C}$ de $\mathfrak{B}$ con fronteras suaves a pedazos se llama una parte de $\mathfrak{B}$. Una parte $\mathcal{C}$ de un cuerpo $\mathfrak{B}$ puede ser considerada, a su vez, como un cuerpo cuyas configuraciones son las restricciones a $\mathcal{C}$ de las configuraciones de $\mathfrak{B}$, y cuya distribución de masa es la restricción de la distribución de masa de $\mathfrak{B}$ a los subconjuntos de $\mathcal{C}$ [9].

3.3 CINEMATICA, EL PARAMETRO DE EVOLUCION, MOVIMIENTOS, Y DEFORMACIONES

Al describir la evolución de los cuerpos, es necesario presuponer la existencia de un sistema de referencia y la de un observador estacionario en él. Los sistemas de referencia en los que se basa la Teoría Especial de Relatividad son, como es bien conocido, los llamados Sistemas Inerciales [10]. En consecuencia, dado que aquí la mecánica de fluidos es enmarcada dentro de la relatividad especial, se suponen inerciales los sistemas de referencia que se utilicen.

En un sistema inercial K, un evento que ocurre en un punto P al tiempo t está caracterizado, como se mencionó en el capítulo 2, por cuatro números; a saber, por las tres coordenadas que especifican el punto P donde el evento ocurre, y el tiempo t al que ocurre. Estos cuatro números se llaman las coordenadas espacio-tiempo del evento. En particular, si se usa un sistema Cartesiano de coordenadas en el sistema inercial K, se acostumbra, como anteriormente se ha mencionado, denotar por (ct, x, y, z) o, equivalentemente, por (x^0, x^1, x^2, x^3) las coordenadas espacio-tiempo del evento. Las coordenadas espaciales x, y, z se encuentran midiendo, con una regla estandar en reposo respecto a K, las proyecciones del vector de posición $\vec{r}$ de P sobre los ejes cartesianos, en tanto que el tiempo t, el tiempo local, es leído en un reloj estandar colocado en reposo en el punto P.

En la mecánica clásica, donde se supone infinita la velocidad de propagación de las interacciones, existe una clara distinción entre espacio y tiempo. Estas dos entidades no estan conectadas y el tiempo corresponde, de una manera natural, al parámetro de evolución de las ecuaciones de movimiento. Además, este parámetro es un escalar frente el grupo de transformaciones de la mecánica clásica; a saber, el grupo de Galileo.

En la formulación Minkowskiana de la mecánica relativista de una partícula, el tiempo local constituye, como se mencionó anteriormente, la coordenada cero de cada uno de los eventos de la partícula considerada. Puesto que la velocidad de propagación de las interacciones es en realidad finita, no es posible considerar, en este caso, al espacio y al tiempo como entidades separadas. De hecho, la imagen física es ahora bastante diferente a la del caso Newtoniano, y el candidato más natural para ocupar el lugar del parámetro de evolución es el intervalo s entre los eventos de la partícula (o bien, el tiempo propio de la partícula definido como $\tau = s/c$, donde c es la velocidad de la luz en el vacío). Claramente, la elección del tiempo propio como parámetro de evolución está justificada por la suposición física de que el ritmo del reloj "propio", el reloj que se mueve siguiendo a la partícula, no se altera por efecto de su aceleración relativa a cualquier sistema inercial [11].

En una generalización a un sistema de N partículas (o a un medio contínuo) aparecerían, sin embargo, tantos intervalos entre eventos (o tiempos propios) como partículas contenga el sistema. En estas condiciones, la descripción de la evolución del sistema se dificulta desde un principio, pues surge el problema de la comparación de todos los relojes propios entre ellos. No obstante, es posible introducir un único parámetro de evolución si se recuerda que, después de todo, es inevitable la interacción entre el sistema en cuestión y un observador inercial que ha de ser testigo de la evolución de dicho sistema.

Sea O un observador en reposo respecto a un sistema inercial K, y (cT, X, Y, Z) las coordenadas espacio-tiempo de O. Supóngase que O observa, al tiempo T, un evento cuyas coordenadas son (ct, x, y, z). En estas condiciones, es claro que

$$c^2 (T - t)^2 = (X - x)^2 + (Y - y)^2 + (Z - z)^2 ,$$

donde c es la velocidad de la luz en el vacío. Claramente, de esta ecuación y el principio de causalidad se sigue que O puede observar, al tiempo T, todos aquelos eventos cuyas coordenadas espacio-tiempo satisfacen la ecuación

$$t = T - \frac{R}{c} , \qquad (3.2)$$

donde

$$R = \sqrt{(X - x)^2 + (Y - y)^2 + (Z - z)^2}$$

o

$$R = \left[\delta_{ij} (X^i - x^i)(X^j - x^j) \right]^{1/2}$$

con $i, j = 1, 2, 3$, es la distancia espacial entre la posición de O y el lugar donde el evento ocurre. En palabras, O puede observar todos aquellos eventos que "ocurren" sobre la parte inferior de su cono de luz. En virtud de que el observador O debe poder ver en todo momento el cuerpo que estudia y, en consecuencia, que las coordenadas espacio-tiempo de los eventos de todas las partículas del cuerpo deben satisfacer la Ec. (3.2), parece natural considerar el tiempo local T del observador inercial O como el paráme tro de evolución para el cuerpo que O estudia. Claramente, puesto que, por hipótesis, el observador O se encuentra en reposo respecto al sistema inercial K, el intervalo diferencial entre eventos de O es, en este sistema de referencia,

$$ds(O) = c\,dT. \qquad (3.3)$$

En consecuencia, el tiempo T representa, igualmente, el tiempo propio del observador O.

Teniendo en cuenta las anteriores consideraciones, a continuación se define lo que, para un observador inercial, constituye un movimiento de un cuerpo.

Sea O un observador inercial. Una familia uno-paramétrica $\{\Psi_T\}$ de configuraciones de un cuerpo $\mathfrak{B}$ constituye un movimiento de $\mathfrak{B}$, si se satisfacen los axiomas siguientes:

(M1) El parámetro de evolución T es real, monótonamente creciente, y representa el tiempo propio del observador inercial O.

(M2) Para cada $\Psi_T \in \{\Psi_T\}$ y toda partícula $X \in \mathfrak{B}$, la coordenada temporal $x^o = ct$ de la partícula X está determinada por la relación de causalidad [18]

$$t(X;T) = T - \frac{R(O,X;T)}{c}, \qquad (3.2)$$

donde R(O,X;T) representa la distancia espacial entre el observador O y la partícula X en la configuración Ψ_T.

(M3) Para cada partícula $X \in \mathfrak{B}$, el intervalo entre cualquier par de sus eventos es un intervalo temporaloide.

(M4) Todo miembro de la familia $\{\Psi_T\}$ posée derivadas, hasta de segundo orden, inclusive, con respecto a T. Siendo la primera derivada una función contínua en X y T, y suave en X; y la segunda derivada al menos contínua a pedazos en X y T.

Los axiomas (M1), (M2) y (M3) son exigencias de caracter físico necesarias en la teoría. Los dos primeros expresan la necesidad de un observador inercial que sea testigo de la evolución del cuerpo a fin de poder describir su comportamiento; y el tercer axioma señala, como fué mencionado en el capítulo 2, que cualquier par de eventos pertenecientes a la historia (línea de mundo) de una partícula deben estar relacionados causalmente. Así pues, un movimiento de un cuerpo $\mathfrak{B}$ constituye una congruencia (contínua) de líneas de mundo temporaloides cada una de las cuales tiene, exactamente, un punto de intersección con la parte inferior del cono de luz del observador O, al tiempo T. Esta congruencia de lineas de mundo constituye lo que se llama un tubo de mundo temporaloide $\mathcal{T}(\mathfrak{B})$. Claramente, el tubo de mundo $\mathcal{T}(\mathfrak{B})$ representa la evolución, con respecto al tiempo propio de O, del cuerpo $\mathfrak{B}$ en el espacio-tiempo llano de Minkowski; es decir, el tubo de mundo $\mathcal{T}(\mathfrak{B})$ es la historia de $\mathfrak{B}$. En la Fig. 3.1 se muestra la evolución del cuerpo $\mathfrak{B}$ según el observador O.

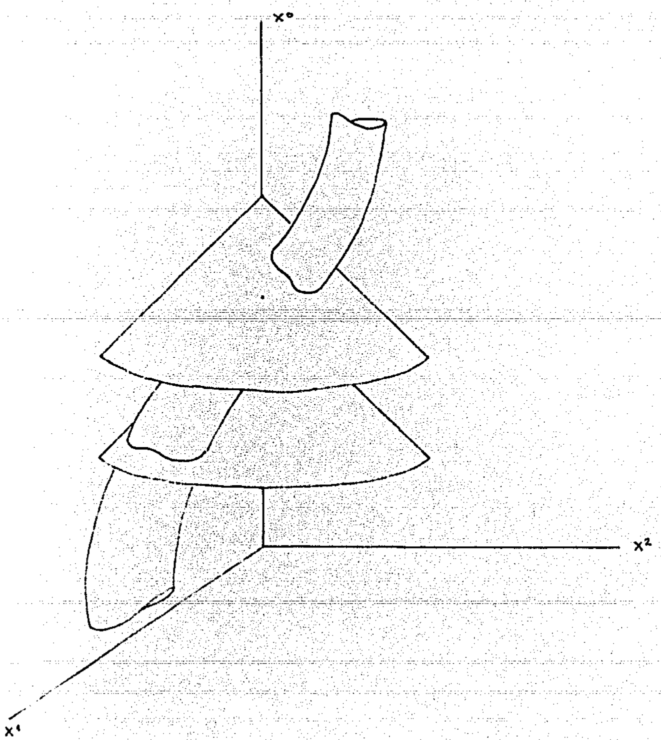

Fig. 3.1

Por otra parte, asignando al observador inercial O un sistema Cartesiano de coordenadas, las coordenadas espacio-tiempo de la partícula $X \in \mathcal{B}$ en la configuración $\psi(\mathcal{B};T)$ que O observa al tiempo T, estan dadas por

$$x^{\mu}(X;T) = \begin{cases} x^{0}(X;T) = ct(x^{i}(X;T),T) = cT - R(x^{i}(X;T)) \\ x^{i}(X;T) = \psi^{i}(X;T) \end{cases} \tag{3.4}$$

donde

$$R(x^{i}(X;T)) = (\delta_{ij}\, x^{i}(X;T)x^{j}(X;T))^{1/2} \tag{3.5}$$

es la distancia de separación (espacial) entre el observador O y la posición $x^{i}(X;T) = \psi^{i}(X;T)$ de la partícula $X \in \mathcal{B}$. De la misma manera, en la configuración $\psi(\mathcal{B};T')$ de $\mathcal{B}$ que O observa al tiempo T', las coordenadas espacio-tiempo de la misma partícula X son

$$x^{\mu}(X;T') = \begin{cases} x^{0}(X;T') = ct(x^{i}(X;T'),T') = cT' - R(x^{i}(X;T')) \\ x^{i}(X;T') = \psi^{i}(X;T') \end{cases}$$

donde, ahora,

$$R(x^{i}(X;T')) = (\delta_{ij}\, x^{i}(X;T')x^{j}(X;T'))^{1/2}.$$

Además, puesto que ψ_{T}^{-1} existe, definida al menos sobre $\psi_{T}(\mathcal{B})$,+ puede escribirse

$$x^{i}(X;T') = \chi^{i}(x^{j}(X;T),T') \tag{3.6}$$

donde $\chi = \psi_{T'} \circ \psi_{T}^{-1}$ es, de acuerdo con el axioma (C6), un homeomorfismo suave. Así pues, si $T' = T + \Delta T$ con $\Delta T \ll T$, es

---

+ Los símbolos $\psi_{T}(\ )$ y $\psi(\ ;T)$ se usarán indistintamente.

claro que, mediante un desarrollo de las χ^i en series de Taylor en torno a $x^i(X;T)$, también puede escribirse

$$x^i(X;T+\Delta T) = x^i(X;T) + \dot{\chi}^i(x^j(X;T),T)\Delta T + o(\Delta T)$$

donde $o(\Delta T)$ representa todos los términos de orden superior en ΔT, y el punto $(\cdot)$ superpuesto denota la derivada con respecto a T manteniendo X fija. De la misma manera, usando esta última relación, la coordenada temporal $x^o(X;T')$ puede escribirse como

$$x^o(X;T+\Delta T) = x^o(X;T) + c\left[1 - \frac{\delta_{ij}x^i\dot{\chi}^j}{Rc}\right]\Delta T + o(\Delta T).$$

Compactamente, estas dos últimas relaciones pueden resumirse como

$$x^\mu(X;T+\Delta T) = x^\mu(X;T) + U^\mu(x^i(X;T),T)\,\Delta T + o(\Delta T),$$

donde se han definido

$$U^i = \frac{dx^i}{dT} = \dot{\chi}^i(x^j(X;T),T) \qquad (3.7a)$$

$$U^o = \frac{dx^o}{dT} = c\left[1 - \frac{\delta_{ij}x^iU^j}{Rc}\right]. \qquad (3.7b)$$

Físicamente, la parte espacial U^i de U^μ representa la velocidad ordinaria tridimensional que, al tiempo T, el observador inercial O mide para la partícula X del cuerpo; en tanto que la parte temporal, U^o de U^μ, representa la rapidez con que, según el observador O, cambia la coordenada temporal de la partícula X. Nótese que el cambio en la coordenada temporal de cualquier partícula $X \in \mathfrak{B}$ puede surgir por dos razones: (1) por el tiempo dT transcurrido según el observador O y (2) por el incremento $dR = \delta_{ij} x^i dx^j/R$ en la distancia de separación entre O y la partícula X, durante el intervalo de tiempo dT. De la Ec.(3.7b) es claro que, para cada partícula $X \in \mathfrak{B}$, si la velocidad U^i es suficientemente pequeña en comparación con la velocidad c de la luz en el vacío, $dt \approx dT$. Además, si la partícula X se mueve sobre una superficie (espacial) esférica con centro en O, $dt = dT$ pues en tal caso $\delta_{ij} x^i dx^j = 0$; es decir, la distancia R que separa el observador O de la partícula X permanece constante.

Claramente, de acuerdo con las Ecs.(3.7), el intervalo ds entre los eventos $x^\mu(X;T)$ y $x^\mu(X;T + dT)$ de la partícula X está dado por

$$ds^2(X;T) = \eta_{\mu\nu} U^\mu U^\nu dT^2 \equiv U^2 dT^2, \qquad (3.8a)$$

de donde es inmediato que los intervalos de tiempo propio dT y $d\tau$ del observador O y la partícula X, respectivamente, estan relacionados por

$$d\tau(X;T) = \frac{U}{c}\, dT. \qquad (3.8b)$$

En consecuencia, para cada partícula $X \in \mathfrak{B}$, la cuadrivelocidad $u^\mu = dx^\mu/ds$ y la velocidad $U^\mu = dx^\mu/dT$ respecto al observador O, estan relacionadas a través de

$$u^\mu = \frac{U^\mu}{U}. \qquad (3.9)$$

Por otra parte, un observador colocado, en reposo respecto a O, en la posición instantanea de la partícula x^α_B, mide, para esta partícula, una velocidad v^α dada por

$$v^\alpha \equiv c\,\frac{dx^\alpha}{dx^0}, \qquad (3.10)$$

que, de acuerdo con las Ecs.(3.7), está relacionada con la velocidad U^α que mide el observador O como

$$v^\alpha = c\,\frac{U^\alpha}{U^0} = \frac{U^\alpha}{\left[1 - \dfrac{\delta_{ij} x^i U^j}{Rc}\right]} \qquad (3.11)$$

Además, usando la Ec.(3.10), es fácil mostrar que

$$ds = c\,dt\sqrt{1 - v^2/c^2} \qquad (3.12)$$

y que

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{ds} = \left(\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\,,\ \frac{v^i}{c\sqrt{1 - v^2/c^2}}\right) \qquad (3.13)$$

donde $v^2 = \delta_{ij} v^i v^j$. En esta forma, de las Ecs.(3.9), (3.11) y (3.13), es claro que

$$u^\alpha = \frac{\gamma}{c}\,v^\alpha = \frac{U^\alpha}{U}, \qquad (3.14)$$

donde

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \qquad (3.15)$$

Claramente, de acuerdo con las Ecs.(3.8c), (3.12), y (3.14), se satisfacen las igualdades siguientes:

$$d\tau = \frac{U}{c}\,dT = \frac{U}{U'}\,dt = \frac{1}{\gamma}\,dt$$

y, en consecuencia, también se satisfacen

$$\frac{d}{d\tau} = \frac{c}{U}\frac{d}{dT} = \frac{U'}{U}\frac{d}{dt} = \gamma\,\frac{d}{dt} \qquad (3.16)$$

Esta última es una expresión que, para cada partícula $X \in \mathcal{B}$, relaciona entre sí las derivadas totales con respecto a los tiempos τ, T, y t que, como ya se mencionó, representan el tiempo propio de la partícula X, el tiempo propio del observador inercial O, y la coordenada temporal de la partícula X, respectivamente. Además, usando la segunda igualdad en (3.16) y la Ec.(3.11), fácilmente puede mostrarse que

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{c}{U'}\frac{\partial}{\partial T}\,. \qquad (3.17)$$

Como se verá en las secciones siguientes, las Ecs.(3.16) y (3.17) serán de utilidad en este trabajo.

3.4 DEFORMACIONES

Considérense dos partículas X e Y pertenecientes a un cuerpo $\mathcal{B}$, y sean $x^\mu(X;T)$ y $x^\mu(Y;T)$, respectivamente, las coordenadas espacio-tiempo de sus eventos correspondientes, cuando $\mathcal{B}$ se encuentra en la configuración $\Psi(\mathcal{B};T)$ que O observa al tiempo T. Se dice que las partículas X e Y son "cercanas" en la configuración $\psi(\mathfrak{B};T)$, si sus eventos son tales que

$$x^\mu(Y;T) = x^\mu(X;T) + h^\mu(X,Y;T) \qquad (3.18)$$

con $|h^\mu(X,Y;T)| \ll |x^\mu(X;T)|$.

En virtud del axioma (M4), si las partículas X e Y $\in \mathfrak{B}$ son cercanas en la configuración $\psi(\mathfrak{B};T)$, también serán cercanas en la configuración $\psi(\mathfrak{B};T')$ si T' no difiere mucho de T. Así pues, si las coordenadas espacio-tiempo de las partículas X e Y satisfacen la Ec.(3.18) al tiempo T, al tiempo $T' = T + dT$ se cumplirá que

$$x^\mu(Y;T') = x^\mu(X;T') + h^\mu(X,Y;T') \qquad (3.19)$$

donde $|h^\mu(X,Y;T')| \ll |x^\mu(X;T')|$. Además, de acuerdo con las Ecs.(3.7), los eventos, de cada una de las partículas de $\mathfrak{B}$, a los tiempos T y $T' = T + dT$ estan relacionados a través de

$$x^\mu(Y;T') = x^\mu(Y;T) + U^\mu(x^\alpha(Y;T),T)dT. \qquad (3.20)$$

De esta manera, usando las Ecs.(3.18) y (3.19) y desarrollando U^μ en series de Taylor en torno a $x^\mu(X;T)$, es fácil mostrar que $h^\mu(X,Y;T)$ y $h^\mu(X,Y;T')$ estan relacionados por

$$h^\mu(X,Y;T+dT) = (\delta^\mu_\alpha + U^\mu{}_{,\alpha}\, dT)\, h^\alpha(X,Y;T). \qquad (3.21)$$

Así pues, si en particular $U^\mu{}_{,\alpha} = 0$, entonces

$$h^\mu(X,Y;T+dT) = h^\mu(X,Y;T);$$

es decir, las partículas X e Y se encuentran igualmente cercanas en las configuraciones $\Psi(\mathcal{B};T)$ y $\Psi(\mathcal{B};T + dT)$. En otras palabras, si al tiempo T se tiene $U^{\mu}{}_{,\alpha} = 0$ en un punto dado, en la localidad de ese punto el cuerpo no se deforma al pasar de la configuración $\Psi(\mathcal{B};T)$ a la configuración $\Psi(\mathcal{B};T + dT)$. Así pues, es natural considerar a los términos $(\delta^{\mu}{}_{\alpha} + U^{\mu}{}_{,\alpha}\, dT)$ como las cantidades fundamentales en el análisis de las propiedades locales de la deformación.

Ahora bien, sean

$$\delta s^2(X,Y;T) = \eta_{\mu\nu}\, h^{\mu}(X,Y;T)\, h^{\nu}(X,Y;T)$$

$$\text{y} \qquad \delta s^2(X,Y;T') = \eta_{\mu\nu}\, h^{\mu}(X,Y;T')\, h^{\nu}(X,Y;T') \tag{3.22}$$

los intervalos entre los pares de eventos $x^{\mu}(X;T)$ y $x^{\mu}(Y;T)$ y $x^{\mu}(X;T')$ y $x^{\mu}(Y;T')$, respectivamente. Aunque el intervalo entre eventos es un invariante frente a transformaciones de Lorentz de coordenadas, los intervalos $\delta s(X,Y;T)$ y $\delta s(X,Y;T')$ no serán iguales en general, pues la transformación (3.20) no representa una transformación de coordenadas sino la evolución del cuerpo respecto al tiempo propio del observador inercial O.

La cantidad

$$\delta s^2(X,Y;T') - \delta s^2(X,Y;T), \tag{3.23}$$

que efectivamente es un invariante frente a transformaciones de Lorentz de coordenadas, puede considerarse como una medida de la deformación que sufre el cuerpo $\mathcal{B}$ al pasar de la configuración $\psi(\mathcal{B};T)$ a la configuración $\psi(\mathcal{B};T')$. Cuando $T' = T + dT$, usando las ecuaciones (3.21) y (3.22), puede escribirse, a primer orden en dT,

$$\delta s'^2 - \delta s^2 = 2E_{\alpha\beta} h^\alpha h^\beta dT \qquad (3.24)$$

donde se han escrito

$$\delta s = \delta s(X,Y;T)$$

y

$$\delta s' = \delta s(X,Y;T'),$$

y se han definido las cantidades

$$E_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(U_{\alpha;\beta} + U_{\beta;\alpha}). \qquad (3.25)$$

De las Ecs. (3.24) y (3.25) es claro que los responsables de las deformaciones que sufre el cuerpo son los gradientes $U_{\alpha;\beta}$, o más precisamente, la parte simétrica de $U_{\alpha;\beta}$. Físicamente, las cantidades $E_{\alpha\beta}$ constituyen una medida de la rapidez con que el cuerpo se deforma al pasar de una configuración a otra (infinitesimalmente próxima). Así pues, estas cantidades constituyen una entidad análoga al tensor rapidez de deformación obtenido en el capítulo 1.

3.5 EL BALANCE DE MASA

Sea $\mathcal{B}$ un cuerpo y $\{\psi_T\}$ un movimiento de $\mathcal{B}$ relativo a un observador inercial O. De acuerdo con el axioma (C7), todo cuerpo $\mathcal{B}$ tiene una propiedad invariante, llamada masa y denotada por $M(\mathcal{B})$, la cual es real y no-negativa. La invariancia de la masa el cuerpo $\mathcal{B}$ puede expresarse, usando el axioma (C8), en la forma

$$\int_{\psi(\mathcal{B},T)} \mu \, dV = \int_{\psi(\mathcal{B},T')} \mu' dV' \qquad (3.26)$$

donde μ y μ' son las densidades de masa de $\mathcal{B}$ en las configuraciones ψ_T y $\psi_{T'}$, en tanto que V y V′ son los volúmenes (tridimensionales ordinarios), según el observador O, de las regiones espaciales $\psi(\mathcal{B};T)$ y $\psi(\mathcal{B};T')$, respectivamente.

Aquí, al igual que en la mecánica clásica de los medios contínuos, la masa es considerada como un concepto primitivo y su dimensión física se supone independiente de las dimensiones cinématicas de longitud y tiempo.+

Puesto que la transformación que relaciona las configuraciones $\psi(\mathcal{B};T)$ y $\psi(\mathcal{B};T')$ es, de acuerdo con el axioma (C6), un homeomorfismo suave, entonces, cuando $T' = T + \Delta T$ con ΔT suficientemente pequeño comparado con T, usando la expresión

$$x^\mu(X;T + \Delta T) = x^\mu(X;T) + U^\mu(x^i(X;T),T)\,\Delta T + o(\Delta T),$$

obtenida anteriormente, las cantidades μ' y dV' pueden escribirse como

$$\mu' = \mu + \left(\frac{\partial\mu}{\partial T} + \frac{\partial\mu}{\partial x^i} U^i\right)\Delta T + o(\Delta T)$$

y

$$dV' = (1 + U^i{}_{,i}\,\Delta T + o(\Delta T))\,dV \qquad (3.27)$$

En consecuencia, a primer orden en ΔT, la Ec.(3.26), que

+ Junto con estas suposiciones deberían proporcionarse métodos para medir masas; sin embargo, tal problema no será discutido en este trabajo.

expresa la invariancia de la masa, puede escribirse como

$$\int_{\Psi(\mathcal{B},T)} \left[\frac{\partial\mu}{\partial T} + \frac{\partial}{\partial x^i}(\mu U^i)\right]\Delta T\, dV = 0 \qquad (3.28a)$$

o bien

$$\frac{\partial\mu}{\partial T} + \frac{\partial}{\partial x^i}(\mu U^i) = 0, \qquad (3.28b)$$

puesto que ΔT, aunque arbitrariamente pequeño, es distinto de cero, y la Ec.(3.28a) ha de ser válida para toda configuración $\Psi(\mathcal{B};T)$. Esta última expresión constituye la ecuación de balance de masa (o ecuación de continuidad) para el observador inercial O.

Sea V una región del espacio fija. Entonces, de acuerdo con la Ec.(3.28b),

$$\int_V \frac{\partial\mu}{\partial T}\, dV = -\int_V \frac{\partial}{\partial x^i}(\mu U^i)\, dV$$

la cual, dado que V es, en este caso, independiente de T y de acuerdo con el teorema de la divergencia, tambien puede escribirse en la forma

$$\frac{d}{dT}\int_V \mu\, dV = -\int_{\partial V} \mu\delta_{ij} U^i n^j\, da ,$$

donde las n^j son, en E_3, las componentes de la normal unitaria exterior del elemento de superficie da de la frontera ∂V de la región V. Esta última ecuación expresa que el cambio con el tiempo de la masa contenida en una región fija V, ocurre por virtud del flujo de masa a través de su frontera.

Por otra parte, usando las ecuaciones (3.11), (3.16), y (3.17), la ecuación de continuidad para el observador O puede escribirse en la forma

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x^i}(\mu v^i) = - \mu v^i \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\ln \frac{U^\circ}{c}\right) \qquad (3.28c)$$

y, además, puede mostrarse que

$$U^\circ = \frac{c}{\left(1 + \frac{\delta_{ij} x^i v^j}{Rc}\right)} . \qquad (3.29)$$

En estas condiciones, es claro que si el cuerpo $\mathfrak{B}$ se mueve de tal manera que las distancias entre el observador O y las partículas de $\mathfrak{B}$ permanecen constantes durante el movimiento, entonces la Ec.(3.28c) se reduce a

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x^i}(\mu v^i) = 0,$$

pues en ese caso $\delta_{ij} x^i v^j = 0$ para cada una de las partículas de $\mathfrak{B}$. Esta misma ecuación, que corresponde a la ecuación de continuidad de la mecánica clásica de los medios contínuos, se satisface aproximadamente si v es lo suficientemente pequeña comparada con c de modo que $U^\circ \approx c$. Naturalmente, lo mismo ocurre si el observador O estudia una región del espacio suficientemente pequeña por donde $\mathfrak{B}$ pasa y él se localiza, pues en tal caso, de acuerdo con la Ec.(3.2), $t \approx T$ y, en consecuencia, $U^\circ \approx c$.

3.6 EL 4-MOMENTO LINEAL

Por analogía con la mecánica clásica de los medios continuos, el Cuadrimomento Lineal de un cuerpo $\mathfrak{B}$ en la configuración $\Psi(\mathfrak{B};T)$ se define como el 4-vector cuyas componentes son

$$P^{\alpha}(\mathfrak{B};T) = \int_{\Psi(\mathfrak{B},T)} \mu\, c u^{\alpha} dV \qquad (3.30)$$

donde $\mu = \mu(x^i, T)$ es la densidad de masa de $\mathfrak{B}$ en la configuración $\Psi(\mathfrak{B};T)$, u^{α} es la cuadrivelocidad del elemento de masa $dM = \mu dV$, y V es el volumen tridimensional ordinario tal como lo mide el observador O.

Por la forma en que se ha definido el 4-momento lineal, cada una de sus componentes puede considerarse como una medida real definida para todos los subconjuntos de Borel de $\mathfrak{B}$, absolutamente contínua relativa al volumen de $\Psi(\mathfrak{B};T)$, y con una densidad $J^{\alpha} = \mu c u^{\alpha}$. De acuerdo con la Ec.(3.14), la densidad de 4-momento lineal también puede escribirse en la forma

$$J^{\alpha} = \mu c u^{\alpha} = \gamma \mu v^{\alpha} = \mu c \frac{U^{\alpha}}{U} \cdot \qquad (3.31)$$

Claramente, de acuerdo con la Ec.(3.15), para velocidades v suficientemente pequeñas en comparación con c (la velocidad de la luz en el vacío), puede escribirse

$$J^{0} c = \frac{\mu c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \approx \mu c^2 + \frac{1}{2}\mu v^2 \qquad (3.32)$$

Esta última expresión representa, para el observador O, la densidad de energía cinética del cuerpo $\mathfrak{B}$ en la configuración $\Psi(\mathfrak{B};T)$.

Por otra parte, al pasar de la configuración $\Psi(\mathfrak{B};T)$ a la configuración $\Psi(\mathfrak{B};T')$ el cuerpo sufre, en general, un cambio en el 4-momento lineal. Este cambio esta dado por

$$\Delta P^{\alpha} = \int_{\Psi(\mathfrak{B},T')} \mu' c u'^{\alpha} dV' - \int_{\Psi(\mathfrak{B},T)} \mu c u^{\alpha} dV.$$

Además, si $T' = T + dT$, siendo dT un incremento infinitesimal en T, es fácil mostrar que la expresión anterior conduce a

$$dP^{\alpha} = \int_{\Psi(\mathfrak{B},T)} \mu c U^{\beta} u^{\alpha}{}_{,\beta}\, dV dT, \tag{3.33}$$

la cual, dado que $U^{\beta} = dx^{\beta}/dT$, también puede escribirse en la forma

$$dP^{\alpha} = \int_{\Psi(\mathfrak{B};T)} \mu c dx^{\beta} u^{\alpha}{}_{,\beta}\, dV, \tag{3.34a}$$

de donde se sigue que

$$dP^{\alpha} = \int_{\Psi(\mathfrak{B},T} \mu c u^{\beta} u^{\alpha}{}_{,\beta}\, ds dV, \tag{3.34b}$$

o bien

$$dP^{\alpha} = \int_{\Psi(\mathfrak{B};T)} \mu c v^{\beta} u^{\alpha}{}_{,\beta}\, dt dV. \tag{3.34c}$$

Naturalmente, estas últimas cuatro expresiones son completamente equivalentes. Sin embargo, conviene hacer notar que en las expresiones (3.34b) y (3.34c) las diferenciales ds y dt no pueden salir de las integrales pues, en una misma configuración, s y t tienen valores diferentes para diferentes partículas del cuerpo y, por consiguiente, son funciones de las coordenadas. Esto no ocurre con la ecuación (3.33), pues T, el tiempo propio del observador O, es un parámetro independiente de las coordenadas.

3.7 EL BALANCE DE 4-MOMENTO LINEAL

Los cambios en el momento lineal de un cuerpo ocurren por virtud de la acción de agentes externos. La intensidad con que los agentes externos urgen al cuerpo se llama fuerza. Como se mencionó en el capítulo 1, desde el punto de vista de los medios contínuos, las fuerzas que actúan sobre un cuerpo pueden clasificarse en dos grupos: (1) las Fuerzas de Cuerpo y (2) las Fuerzas de Superficie.

LAS FUERZAS DE CUERPO.

Un sistema de fuerzas de cuerpo para un cuerpo $\mathfrak{B}$ es una familia $\{\vec{\mathfrak{F}}_c\}$ de funciones cuyos valores son vectores en el espacio ordinario y sujetas a los axiomas siguientes:

(FC1) Para toda $\vec{\mathfrak{F}}_c \in \{\vec{\mathfrak{F}}_c\}$, cada una de las componentes $\mathfrak{F}_c^i$ es una medida de valores reales definida sobre los subconjuntos de Borel de $\mathfrak{B}$.

(FC2) Para cada $\Psi \in \Psi$, la medida $\vec{\mathfrak{F}}_c \circ \Psi^{-1}$, inducida por $\vec{\mathfrak{F}}_c$ sobre la región espacial $B = \Psi(\mathfrak{B})$, es absolutamente contínua relativa al volumen de B. En consecuencia, tiene una densidad $\vec{F}$ tal que

$$\vec{\mathfrak{F}}_c(\mathfrak{B}) = \int_{\psi(\mathfrak{B})} \vec{F}\, dV. \qquad (3.35)$$

(FC3) Las componentes de la densidad de fuerza de cuerpo son acotadas.

LAS FUERZAS DE SUPERFICIE.

Un sistema de fuerzas de superficie para un cuerpo $\mathfrak{B}$ es una familia $\{\vec{\mathfrak{F}}_s\}$ de funciones de valores vectoriales tales que

(FS1) Para toda $\vec{\mathfrak{F}}_s \in \{\vec{\mathfrak{F}}_s\}$, cada una de las componentes $\mathfrak{F}_s^i$ es una medida de valores reales definida sobre los subconjuntos de Borel de $\mathfrak{B}$.

(FS2) Si $\mathfrak{C} \subset \mathfrak{B}$ y $\partial\mathfrak{B}$ es la frontera de $\mathfrak{B}$, entonces

$$\vec{\mathfrak{F}}_s(\mathfrak{C}) = \vec{\mathfrak{F}}_s(\mathfrak{C} \cap \partial\mathfrak{B}).$$

(FS3) Si $\psi \in \Psi$ y $\partial B = \psi(\partial\mathfrak{B})$, entonces la medida inducida $\vec{\mathfrak{F}}_s \cdot \psi^{-1}$, restringida a los subconjuntos de Borel de la frontera ∂B de $B = \psi(\mathfrak{B})$, es absolutamente contínua relativa al área de la superficie espacial ∂B y tiene una densidad $\mathbb{T}$ tal que

$$\vec{\mathfrak{F}}_s(\mathfrak{B}) = \int_{\psi(\partial\mathfrak{B})} \mathbb{T} \cdot d\vec{A} \qquad (3.36)$$

donde $d\vec{A}$ es un elemento diferencial de superficie de la frontera ∂B de B, y $\mathbb{T}$ es un tensor ordinario de segundo rango y simétrico que, como se mencionó en el capítulo 1, se llama el Tensor de Esfuerzos del cuerpo $\mathcal{B}$ en la configuración Ψ.

(FS4) Las componentes del tensor de esfuerzos son acotadas.

En términos de las Ecs.(3.35) y (3.36), la resultante de las fuerzas de cuerpo y de superficie que actúan sobre el cuerpo $\mathcal{B}$ en la configuración $\Psi(\mathcal{B})$ puede escribirse en la forma

$$\vec{\mathfrak{F}}(\mathcal{B}) = \int_{\Psi(\mathcal{B})} (\vec{F} + \operatorname{div}\mathbb{T})\, dV \qquad (3.37)$$

puesto que, de acuerdo con el teorema de Gauss de la divergencia,

$$\int_{\partial B} \mathbb{T}\cdot d\hat{A} = \int_{B} \operatorname{div}\mathbb{T}\, dV.$$

Adicionalmente, se define el Impulso que la fuerza total $\vec{\mathfrak{F}}(\mathcal{B})$ comunica al cuerpo $\mathcal{B}$, como

$$\vec{\mathfrak{I}}(\mathcal{B}) = \int_{\Psi(\mathcal{B})} (\vec{F} + \operatorname{div}\mathbb{T})\, dt\, dV \qquad (3.38)$$

y se propone, por analogía con la mecánica Newtoniana, que

$$\vec{\mathfrak{I}} = d\vec{P} \qquad (3.39)$$

donde $\vec{P}$ es la parte espacial del 4-vector de momento lineal definido por la Ec.(3.30).

Naturalmente, como puede esperarse, el impulso no tiene propiedades de transformación simples. Sin embargo, es posible introducir un 4-vector de impulso I^α definido como

$$I^\alpha = \int_{\Psi(\mathcal{P})} f^\alpha ds dV = dP^\alpha \tag{3.40}$$

donde f^α es la densidad de 4-fuerza asociada con la densidad de fuerza $(\vec{F} + \mathrm{div}\,\mathbb{T})$ y cuyas componentes, como se verá enseguida, son

$$(f^\alpha) = \left(\frac{(\vec{F} + \mathrm{div}\,\mathbb{T})\cdot\vec{v}}{c^2\sqrt{1 - v^2/c^2}}\,,\, \frac{(\vec{F} + \mathrm{div}\,\mathbb{T})}{c\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right). \tag{3.41}$$

En efecto, de acuerdo con las Ecs.(3.34b) y (3.40), se tiene que

$$f^\alpha = \mu c u^\beta u^\alpha{}_{,\beta} \tag{3.42a}$$

o bien
$$f^\alpha = \mu c \frac{du^\alpha}{ds} = \gamma \mu \frac{du^\alpha}{dt} \tag{3.42b}$$

En consecuencia, usando (3.14), pueden escribirse

$$f^0 = \gamma \mu \frac{d\gamma}{dt} \qquad \text{y} \qquad f^i = \gamma \mu \frac{d}{dt}(\gamma v^i/c) \tag{3.42c}$$

Sin embargo, como es claro de las Ecs.(3.34c), (3.38) y (3.39), se tiene

$$(\vec{F} + \mathrm{div}\,\mathbb{T}) = \mu \frac{d}{dt}(\gamma\vec{v}) \tag{3.43}$$

y, por consiguiente,

$$(\vec{F} + \mathrm{div}\,\mathbb{T})\cdot\vec{v} = \mu\,\vec{v}\cdot\frac{d}{dt}(\gamma\vec{v})$$

o bien $$(\vec{F} + \mathrm{div}\,\mathbb{T})\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}\,\frac{\mu c^2}{\gamma}\,\frac{d}{dt}(\gamma^2 v^2/c^2)$$

$$= \mu c^2 \frac{d\gamma}{dt} \qquad (3.44)$$

puesto que, como puede verificarse fácilmente,

$$\frac{d}{dt}(\gamma^2 v^2/c^2) = \frac{d\gamma^2}{dt}.$$

Entonces, comparando las ecuaciones (3.43) y (3.44) con las ecuaciones (3.42c) se obtiene (3.41).

Así pues, finalmente tenemos que las Ecuaciones de Balance de 4-Momento Lineal son

$$f^\alpha = \mu c\, u^\beta u^\alpha{}_{,\beta} \qquad (3.45)$$

donde

$$f^\alpha = \left(\frac{(\vec{F} + \mathrm{div}\,\mathbb{T})\cdot\vec{v}}{c^2\sqrt{1 - v^2/c^2}}\, ,\; \frac{(\vec{F} + \mathrm{div}\,\mathbb{T})}{c\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right) \qquad (3.46)$$

Claramente, ambos miembros de la Ec.(3.45) son cuadrivectores por unidad de volumen tridimensional ordinario, tal como se mide en el marco de referencia de un observador inercial cualquiera.

Por otra parte, observando que, de acuerdo con las ecuaciones (3.30) y (3.32), la energía cinética del cuerpo $\mathfrak{B}$ en la configuración $\Psi(\mathfrak{B};T)$ puede escribirse como

$$E = P^0 c, \qquad (3.47)$$

es claro que la parte temporal de las Ecs.(3.45),

$$(\vec{F} + \mathrm{div}\,\mathbb{T})\cdot\vec{v} = \mu c^2 \frac{d\gamma}{dt}\,, \qquad (3.48)$$

corresponde al balance de energía cinética del cuerpo $\mathfrak{B}$; en tanto que la parte espacial,

$$(\vec{F} + \mathrm{div}\,\mathbb{T}) = \mu \frac{d}{dt}(\gamma\vec{v})\,, \qquad (3.49)$$

corresponde al análogo relativista de la Primera Ley de Movimiento de Cauchy.

C A P I T U L O 4 .

LA MECANICA DEL MEDIO CONTINUO INVARIANTE DE LORENTZ USANDO UN PARAMETRO DE EVOLUCION ARBITRARIO

4.0 INTRODUCCION

Este capítulo constituye una generalización del anterior. Aquí, las configuraciones de un cuerpo no se interpretan como las regiones del espacio ordinario que, según un observador inercial, el cuerpo ocupa; sino como regiones sobre las hipersuperficies del espacio-tiempo llano de Minkowski que contienen a todo el espacio ordinario. De hecho, las configuraciones del cuerpo se consideran como las regiones formadas por las intersecciones de las líneas de mundo de las partículas del cuerpo, con aquellas hipersuperficies del espacio-tiempo de Minkowski que contienen a todo el espacio ordinario.

La evolución del cuerpo se describe mediante un parámetro arbitrario, el parámetro de evolución, al que, como único requisito, se le pide que sea real, suave y monótonamente creciente.

Como una consecuencia de las hipótesis introducidas, se obtiene una ecuación para el balance de masa cuya forma depende de la elección del parámetro de evolución. No obstante, mediante una elección adecuada de dicho parámetro, esta ecuación se reduce a la ecuación de continuidad ordinaria. Las ecuaciones de balance para el 4-momento lineal, aquí obtenidas, resultan, al igual que en el capítulo anterior, independientes de la elección del parámetro de evolución.

Finalmente, se hace notar que, a fin de determinar la estructura del tensor de esfuerzos, es necesaria la elaboración de una teoría constitutiva que sea Lorentz invariante.

4.1 LOS CUERPOS Y SUS CONFIGURACIONES

En esta sección se proporciona una generalización de los axiomas para cuerpos introducidos en el capítulo anterior.

Un cuerpo $\mathfrak{B}$ es un espacio topológico dotado con una estructura definida por

(a) Un conjunto Ψ de mapeos de $\mathfrak{B}$ en un espacio-tiempo llano de Minkowski M_4.

(b) Una función de conjunto M, definida sobre los subconjuntos de $\mathfrak{B}$, y cuyos valores son reales.

Los elementos del conjunto Ψ y la función M estan sujetos a las restricciones que imponen los axiomas siguientes:

$(\bar{C}1)$ Todo $\psi \in \Psi$ está constituido por dos partes: una parte espacial, $\vec{\psi} = (\psi^1, \psi^2, \psi^3)$, que define para cada uno de los puntos de $\mathfrak{B}$ una posición en el espacio ordinario E_3; y una parte temporal ψ^0 que asigna a cada uno de los puntos de $\mathfrak{B}$ un valor de tiempo.

$(\bar{C}2)$ Todo mapeo $\psi \in \Psi$ es uno a uno. En particular, la parte espacial de todo $\psi \in \Psi$ es uno a uno.

$(\bar{C}3)$ Para cada $\psi \in \Psi$, la imagen de $\mathfrak{B}$ en M_4, $B = \psi(\mathfrak{B})$, constituye una región sobre una de las hipersuperficies de M_4 que contiene a todo el espacio ordinario E_3. En particular, la parte espacial de cada $\psi \in \Psi$ mapea a $\mathfrak{B}$ en una región de E_3.

$(\bar{C}4)$ Si φ y ψ son elementos de Ψ, el mapeo $\chi = \psi \circ \varphi^{-1}$, de $\varphi(\mathfrak{B})$ en $\psi(\mathfrak{B})$, es un homeomorfismo suave. En particular, la parte espacial del mapeo $\chi = \psi \circ \varphi^{-1}$, se supone, es un homeomorfismo suave de $\vec{\varphi}(\mathcal{B})$ en $\vec{\psi}(\mathcal{B})$.

($\bar{C}5$) Si χ es un homeomorfismo suave de M_4 en M_4 y $\psi \in \Psi$ el mapeo $\chi \circ \psi$ es un elemento de Ψ. Además, si $\vec{\chi}$ es un homeomorfismo suave de E_3 en E_3 y $\psi \in \Psi$, el mapeo $\vec{\chi} \circ \vec{\psi}$ constituye la parte espacial de algún $\varphi \in \Psi$.

($\bar{C}6$) La función M es una medida invariante no-negativa, definida para todos los subconjuntos de Borel de $\mathcal{B}$.

($\bar{C}7$) Para cada $\psi \in \Psi$, la medida $m_\psi = M \circ \vec{\psi}^{-1}$, inducida por M sobre la región espacial $\vec{\psi}(\mathcal{B})$, es absolutamente contínua relativa a la medida de Lebesgue en $\vec{\psi}(\mathcal{B})$. En consecuencia, tiene una densidad μ_ψ tal que

$$M(\mathcal{C}) = \int_{\vec{\psi}(\mathcal{C})} \mu_\psi dV \tag{4.1}$$

($\bar{C}8$) Para cada $\psi \in \Psi$ la densidad μ_ψ es positiva y acotada.

Al igual que en el capítulo 3, a los mapeos $\psi \in \Psi$ se les llamará las configuraciones del cuerpo $\mathcal{B}$, los puntos $X \in \mathcal{B}$ se llaman las partículas de $\mathcal{B}$, y el punto $x^\alpha = \psi^\alpha(X)$ es el evento de la partícula X en la configuración ψ. La función M es la distribución de masa del cuerpo, y el número $M(\mathcal{C})$ es la masa del conjunto $\mathcal{C} \subset \mathcal{B}$. A μ_ψ se le llama la densidad de masa del cuerpo $\mathcal{B}$ en la configuración ψ.

Además, como en el capítulo anterior, todo subconjunto compacto $\mathcal{C}$ de $\mathcal{B}$ con fronteras suaves, a pedazos al menos, se llama una parte de $\mathcal{B}$. Una parte $\mathcal{C}$ de un cuerpo $\mathcal{B}$ puede ser considerada, a su vez, como un cuerpo cuyas configuraciones son las restricciones a $\mathcal{C}$ de las configuraciones de $\mathcal{B}$, y cuya distribución de masa es la restricción de la distribución de masa de $\mathcal{B}$ a los subconjuntos de $\mathcal{E}$.

En la Fig. 4.1 se muestran algunas de las configuraciones del cuerpo $\mathcal{B}$.

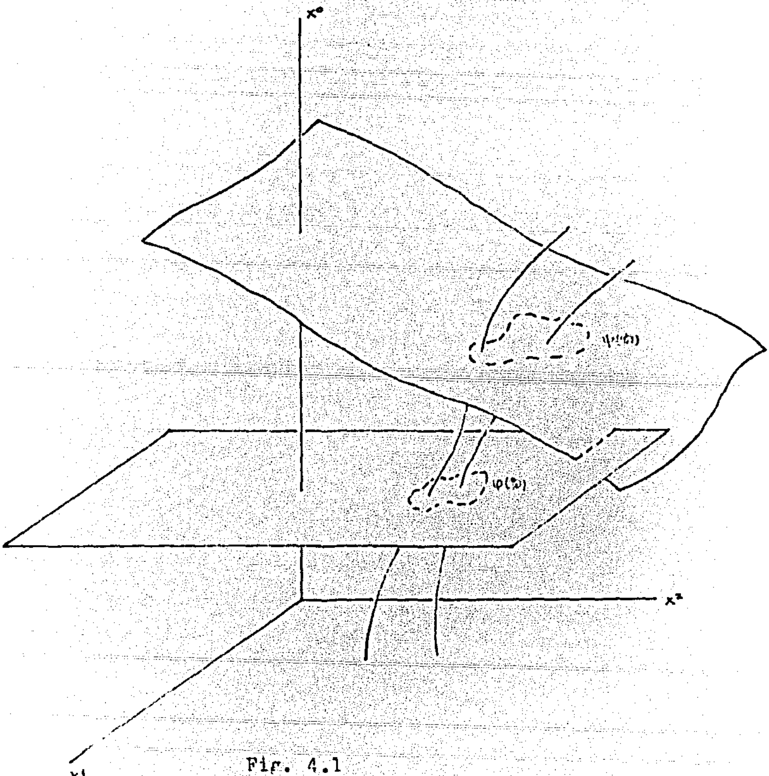

Fig. 4.1

Nótese que ahora, a diferencia del capítulo anterior, las configuraciones del cuerpo NO se interpretan como las regiones del espacio ordinario que, según un observador inercial, el cuerpo ocupa; sino como los conjuntos de eventos que constituyen las intersecciones de las líneas de mundo de las partículas del sistema con las hipersuperficies de M_4 que contienen a todo el espacio ordinario. En particular, la región que forman las intersecciones de las líneas de mundo de las partículas de un cuerpo $\mathcal{B}$ con la parte "inferior" del cono de luz de un observador inercial, constituye, desde este nuevo punto de vista, una de las configuraciones de este cuerpo.

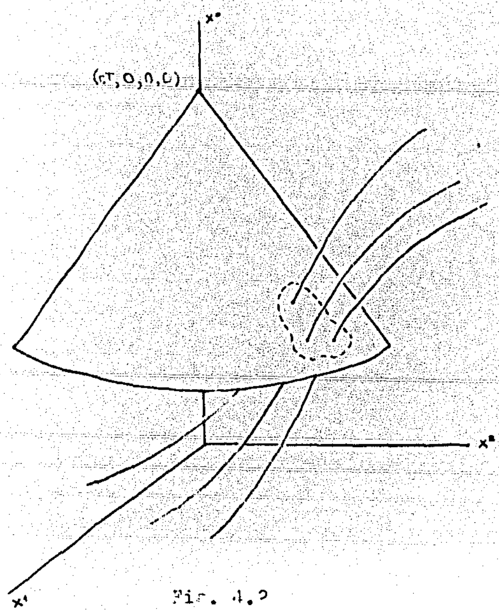

Fig. 4.2

4.2 LOS MOVIMIENTOS

Una familia uno-paramétrica $\{\Psi_\lambda\}$ de configuraciones de un cuerpo $\mathcal{B}$ constituye un movimiento de $\mathcal{B}$ si se satisfacen los requisitos siguientes:

($\bar{M}1$) El parámetro λ de la familia $\{\Psi_\lambda\}$ es real, suave y monótonamente creciente. Este parámetro, llamado Parámetro de Evolución, no necesariamente ha de ser invariante frente a transformaciones de Lorentz.

($\bar{M}2$) Las configuraciones que constituyen la familia $\{\Psi_\lambda\}$ son conjuntos (de eventos) ajenos dos a dos; es decir, si Ψ_λ y $\Psi_{\lambda'}$ son dos configuraciones cualesquiera en $\{\Psi_\lambda\}$, entonces $\Psi(\mathcal{B};\lambda) \cap \Psi(\mathcal{B};\lambda') = \phi$ a menos que $\lambda = \lambda'$, caso en el que, única y exclusivamente, debe satisfacerse que $\Psi(\mathcal{B};\lambda) = \Psi(\mathcal{B};\lambda')$.

($\bar{M}3$) Si Ψ_λ y $\Psi_{\lambda'} \in \{\Psi_\lambda\}$ y X es una partícula cualquiera de $\mathcal{B}$, entonces el intervalo entre los eventos $x^*(X;\lambda) = \Psi^*(X;\lambda)$ y $x^*(X;\lambda') = \Psi^*(X;\lambda')$ es temporaloide.

($\bar{M}4$) Ψ_λ posée derivadas, hasta de segundo orden, inclusive, con respecto a λ. Siendo la primera derivada una función contínua en X y λ, y suave en X; y la segunda derivada al menos contínua a pedazos en X y λ.

Como antes, los axiomas ($\bar{M}1$), ($\bar{M}2$) y ($\bar{M}3$) son exigencias de carácter físico necesarias en la teoría. El primero de ellos expresa la necesidad de un criterio que, establecido a priori, permita definir el orden en que "entran a escena" las configuraciones del cuerpo $\mathcal{B}$. El axioma ($\bar{M}2$)

expresa, por su parte, que sobre cada una de las hipersuperficies donde se encuentran configuraciones de la familia $\{\Psi_\lambda\}$ se localiza una, y sólo una, de las configuraciones que constituyen el movimiento $\{\Psi_\lambda\}$ de $\mathcal{B}$. Además, dichas hipersuperficies deben ser tales que, al menos en las regiones donde se encuentran configuraciones de $\mathcal{B}$, su intersección es vacía. El tercer axioma señala, como fué mencionado en el capítulo 2, que los eventos pertenecientes a la historia de una partícula deben estar relacionados causalmente.

Por otra parte, puesto que las configuraciones de $\mathcal{B}$ son regiones sobre hipersuperficies de M_4, para cada configuración Ψ_λ existe una función del tipo

$$G(x^\alpha,\lambda) = 0 \qquad (4.2)$$

que deben satisfacer las coordenadas espacio-tiempo de los eventos de todas las partículas de $\mathcal{B}$. De hecho, esta función define la hipersuperficie de M_4 sobre la que se encuentra la región $\Psi(\mathcal{B};\lambda)$. Así, por ejemplo, en el capítulo 3, donde se considera como parámetro de evolución al tiempo propio del observador inercial O, la función de la forma (4.2), correspondiente, es

$$t = T - \frac{R}{c}, \qquad (3.2)$$

la cual, para cada T, representa la hipersuperficie que constituye el cono de luz del observador O.

Ahora bien, si $x^{\alpha}(X;\lambda) = \psi^{\alpha}(X;\lambda)$ y $x^{\alpha}(X;\lambda') = \psi^{\alpha}(X;\lambda')$ son las coordenadas espacio-tiempo de la partícula $X \in \mathcal{B}$ en las configuraciones $\psi(\mathcal{B};\lambda)$ y $\psi(\mathcal{B};\lambda')$, respectivamente, entonces, de acuerdo con el axioma ($\bar{C}4$), puede escribirse

$$x^{\alpha}(X;\lambda') = \chi^{\alpha}(x^{\beta}(X;\lambda),\lambda'), \tag{4.3}$$

donde $\chi \equiv \psi_{\lambda'} \circ \psi_{\lambda}^{-1}$ es un homeomorfismo suave que mapea $\psi(\mathcal{B};\lambda)$ en $\psi(\mathcal{B};\lambda')$. Además, si $\lambda' = \lambda + \Delta\lambda$ con $\Delta\lambda \ll \lambda$, mediante un desarrollo en series de Taylor, la Ec.(4.3) se puede escribir como

$$x^{\alpha}(X;\lambda + \Delta\lambda) = x^{\alpha}(X;\lambda) + \Phi^{\alpha}(x^{\beta}(X;\lambda))\Delta\lambda + o(\Delta\lambda), \tag{4.4}$$

donde

$$\Phi^{\alpha}(x^{\beta}(X;\lambda)) = \frac{dx^{\alpha}}{d\lambda} = \frac{d}{d\lambda'}\chi^{\alpha}(x^{\beta}(X;\lambda),\lambda')\Big|_{\lambda'=\lambda} \tag{4.5}$$

Naturalmente, Φ^{α} representa la rapidez de cambio, respecto al parámetro λ, de las coordenadas espacio-tiempo de la partícula X considerada. A la función Φ^{α} se le llamará el Generador del Movimiento del cuerpo $\mathcal{B}$. En el caso de eventos de X infinitesimalmente separados se tiene

$$x^{\alpha}(X;\lambda + d\lambda) = x^{\alpha}(X;\lambda) + \Phi^{\alpha}(x^{\beta}(X;\lambda))d\lambda \tag{4.6}$$

de donde se sigue que, para cada partícula $X \in \mathcal{B}$, la cuadri velocidad u^{α} y el generador del movimiento Φ^{α} estan relacionados por

$$u^{\alpha}ds = \Phi^{\alpha}d\lambda. \tag{4.7}$$

donde, para cada partícula X, ds es el intervalo entre los eventos $x^\alpha(X;\lambda)$ y $x^\alpha(X;\lambda + d\lambda)$. A partir de esta última expresión es fácil mostrar que

$$\frac{d}{d\lambda} = \Phi^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha}. \tag{4.8}$$

Por otro lado, puesto que, de acuerdo con el axioma ($\bar{C}4$), la parte espacial del mapeo $\chi = \Psi_{\lambda'} \circ \Psi_\lambda^{-1}$ es, por su parte, un homeomorfismo suave de $\vec{\Psi}(\mathcal{B};\lambda)$ en $\vec{\Psi}(\mathcal{B};\lambda')$, entonces el Jacobiano de la parte espacial de la transformación (4.6) es no-singular, y está dado por

$$j = \det \| \partial x'^i/\partial x^j \| = 1 + \Phi^i_{;i}\, d\lambda \tag{4.9}$$

En consecuencia, el volumen de la región espacial $\vec{\Psi}(\mathcal{B};\lambda')$ está relacionado con el de la región espacial $\psi(\mathcal{B};\lambda)$ a través de

$$dV' = (\, 1 + \Phi^i_{;i}\, d\lambda\,)dV. \tag{4.10}$$

DEFORMACIONES.

Aquí, al igual que en el capítulo 3, se dice que las partículas X e Y son "cercanas" en la configuración $\psi(\mathcal{B};\lambda)$, si sus eventos, en esa configuración, son tales que

$$x^\alpha(Y;\lambda) = x^\alpha(X;\lambda) + h^\alpha(X,Y;\lambda), \tag{4.11}$$

donde, para cada coordenada, $|h^\alpha(X,Y;\lambda)| \ll |x^\alpha(X;\lambda)|$. En estas condiciones, procediendo de manera análoga al capítulo 3, puede mostrarse que en la configuración $\psi(\mathcal{B};\lambda + d\lambda)$, los eventos de las partícula X e Y estan relacionados por

$$x^{\alpha}(Y;\lambda') = x^{\alpha}(X;\lambda') + h^{\alpha}(X,Y;\lambda') \qquad (4.12)$$

donde, para $\lambda' = \lambda + d\lambda$,

$$h^{\alpha}(X,Y;\lambda + d\lambda) = (\delta^{\alpha}{}_{\beta} + \Phi^{\alpha}{}_{,\beta}\, d\lambda)\, h^{\beta}(X,Y;\lambda). \qquad (4.13)$$

Además, si

$$\delta s^2 = \delta s^2(X,Y;\lambda) = \eta_{\alpha\beta}\, h^{\alpha}(X,Y;\lambda)\, h^{\beta}(X,Y;\lambda)$$

$$(4.14)$$

y $\quad \delta s'^2 = \delta s^2(X,Y;\lambda') = \eta_{\alpha\beta}\, h^{\alpha}(X,Y;\lambda')\, h^{\beta}(X,Y;\lambda')$

son los intervalos entre los pares de eventos

$$x^{\alpha}(X;\lambda) \quad y \quad x^{\alpha}(Y;\lambda)$$

y $\quad x^{\alpha}(X;\lambda') \quad y \quad x^{\alpha}(Y;\lambda')$,

respectivamente, entonces, usando la Ec.(4.13), puede mostrarse que, a primer orden en $d\lambda$,

$$\delta s'^2 - \delta s^2 = 2E_{\alpha\beta}\, h^{\alpha} h^{\beta}\, d\lambda \qquad (4.15)$$

donde

$$E_{\alpha\beta} \equiv \tfrac{1}{2}\,(\Phi_{\alpha,\beta} + \Phi_{\beta,\alpha})\,. \qquad (4.16)$$

Puesto que, como se mencionó en el capítulo 3, la cantidad $\delta s'^2 - \delta s^2$ puede considerarse como una medida de la deformación que el cuerpo sufre al pasar de la configuración $\psi(\mathfrak{b};\lambda)$ a la configuración $\psi(\mathfrak{b};\lambda + d\lambda)$, es claro que los responsables de las deformaciones que el cuerpo sufre son los términos $E_{\alpha\beta}$; es decir, la parte simétrica de los gradientes del generador del movimiento. Nuevamente, las cantidades $E_{\alpha\beta}$ constituyen una medida de la rapidez, respecto al parámetro de evolución λ, con que el cuerpo se deforma al pasar de una configuración a otra.

4.3 EL CUADRIVECTOR DENSIDAD DE CORRIENTE Y EL BALANCE DE MASA

De acuerdo con el axioma ($\bar{C}6$), todo cuerpo $\mathcal{B}$ posée una propiedad invariante, su masa $M(\mathcal{B})$. Además, en virtud del axioma ($\bar{C}7$), para cada configuración $\Psi(\mathcal{B};\lambda)$ existe una densidad de masa μ tal que

$$M(\mathcal{B}) = \int_{\vec{\Psi}(\mathcal{B},\lambda)} \mu \, dV$$

donde $\vec{\Psi}(\mathcal{B};\lambda)$ es, de acuerdo con los axiomas ($\bar{C}3$) y ($\bar{C}7$), la región que, en el espacio ordinario E_3, la parte espacial del mapeo Ψ_λ asocia al cuerpo $\mathcal{B}$.

Por otra parte, dado que la masa $M(\mathcal{B})$ y, por lo tanto, el producto $\mu\, dV$ son escalares, es claro, entonces, que las cantidades

$$dMdx^\alpha = \mu\, dx^\alpha dV = \mu\, v^\alpha dVdt,$$

donde $v^\alpha = dx^\alpha/dt$, constituyen las componentes de un cuadrivector. Además, puesto que $d\Omega = cdVdt$, el elemento de hipervolumen, es un escalar, entonces μv^α es un cuadrivector, el Cuadrivector Densidad de Corriente:

$$j^\alpha = \mu v^\alpha. \tag{4.17}$$

La parte espacial de j^α forma un vector en el espacio ordinario,

$$j^i = \mu v^i,$$

que corresponde, como se vió en el capítulo 1, al vector densidad de corriente ordinario. La componente temporal de j^α es $j^0 = \mu c$.

Ahora bien, puesto que, como es fácil mostrar,

$$v^\alpha = \frac{c}{\gamma} u^\alpha = \frac{c}{\dot\phi^0} \dot\phi^\alpha, \tag{4.18}$$

entonces el 4-vector densidad de corriente también puede escribirse como

$$j^\alpha = \mu v^\alpha = \frac{c}{\gamma} \mu u^\alpha = \frac{c}{\dot\phi^0} \mu \dot\phi^\alpha, \tag{4.19}$$

de donde se sigue, claramente, que la cantidad μ/γ es un escalar bajo transformaciones de Lorentz de coordenadas.

EL BALANCE DE MASA.

La invariancia de la masa del cuerpo $\mathcal{B}$ puede expresarse en la forma

$$\int_{\vec\Psi(\mathcal{B},\lambda)} \mu\, dV = \int_{\vec\Psi(\mathcal{B};\lambda')} \mu'\, dV' \tag{4.20}$$

donde μ y μ' son las densidades de masa de $\mathcal{B}$ correspondientes a las configuraciones $\Psi(\mathcal{B};\lambda)$ y $\Psi(\mathcal{B};\lambda')$. Así pues, usando las Ecs.(4.6), (4.8) y (4.10), de la Ec.(4.20) se obtiene

$$\int_{\vec{\Psi}(\mathcal{B};\lambda)} \left[\Phi^{\alpha}\frac{\partial\mu}{\partial x^{\alpha}} + \mu\Phi^{i}{}_{,i}\right] d\lambda\, dV = 0 \qquad (4.21)$$

o bien

$$\Phi^{\alpha}\frac{\partial\mu}{\partial x^{\alpha}} + \mu\Phi^{i}{}_{,i} = 0 \qquad (4.22)$$

puesto que la Ec.(4.21) ha de ser válida para toda configuración $\Psi(\mathcal{B};\lambda)$. Esta última expresión constituye la Ecuación de Balance de Masa.

Usando, además, la Ec.(4.18), fácilmente se verifica que la ecuación de balance de masa, en términos del cuadrivector densidad de corriente, puede escribirse como

$$j^{\alpha}{}_{,\alpha} = -\, j^{i}\,\frac{\partial}{\partial x^{i}}\left(\ln\frac{\Phi^{0}}{c}\right) \qquad (4.23)$$

Naturalmente, puesto que la 4-divergencia de un 4-vector es un escalar, entonces, por su parte, el miembro derecho de la Ec.(4.23) es un escalar. En consecuencia, la ecuación (4.23) es una expresión covariante.

4.4 EL BALANCE DE 4-MOMENTO LINEAL

Al igual que en el capítulo 3, el Cuadrimomento Lineal de un cuerpo $\mathcal{B}$ en la configuración $\Psi(\mathcal{B};\lambda)$ se define como el cuadrivector que tiene por componentes las cantidades

$$P^{\alpha}(\mathcal{B};\lambda) = \int_{\vec{\Psi}(\mathcal{B};\lambda)} \mu c u^{\alpha}\, dV \qquad (4.24)$$

Así pues, de nueva cuenta, cada una de las componentes P^α del 4-momento lineal, puede considerarse como una medida real definida para todos los subconjuntos de Borel de $\mathcal{B}$. absolutamente continua relativa al volumen de la región espacial $\vec{\Psi}(\mathcal{B};\lambda)$, y con una densidad $J^\alpha = \mu c u^\alpha$.

En virtud de la Ec.(4.19), la densidad de 4-momento lineal, J^α, y el 4-vector densidad de corriente, j^α, estan relacionados por

$$J^\alpha = \gamma j^\alpha \tag{4.25}$$

Ahora bien, usando las Ecs.(4.6), (4.8), (4.10), y la ecuación de balance de masa, es fácil obtener que, al pasar de la configuración $\psi(\mathcal{B};\lambda)$ a la configuración $\psi(\mathcal{B};\lambda + d\lambda)$, el 4-momento lineal del cuerpo $\mathcal{B}$ sufre un cambio dado por

$$dP^\alpha = \int_{\vec{\Psi}(\mathcal{B};\lambda)} \mu c \Phi^\beta u^\alpha{}_{,\beta}\, d\lambda\, dV, \tag{4.26}$$

la cual, de acuerdo con la Ec.(4.7), también puede escribirse en la forma

$$dP^\alpha = \int_{\vec{\Psi}(\mathcal{B};\lambda)} \mu c u^\beta u^\alpha{}_{,\beta}\, ds\, dV, \tag{4.27}$$

o bien

$$dP^\alpha = \int_{\vec{\Psi}(\mathcal{B};\lambda)} \mu c v^\beta u^\alpha{}_{,\beta}\, dt\, dV. \tag{4.28}$$

En estas condiciones, introduciendo el 4-vector de impulso I^α, definido como

$$I^\alpha \equiv \int_{\vec{\Psi}(\mathcal{B};\lambda)} f^\alpha\, ds\, dV, \tag{4.29}$$

donde f^α representa, como ya se mencionó anteriormente, la densidad de cuadrifuerza ($f^\alpha dV$ es la cuadrifuerza total que actúa sobre el elemento de masa $dM = \mu dV$), y postulando nuevamente que

$$I^\alpha = dP^\alpha, \tag{4.30}$$

se obtienen las Ecuaciones de Balance de 4-Momento Lineal:

$$f^\alpha = \mu c u^\beta u^\alpha{}_{,\beta} \ . \tag{4.31}$$

Obviamente, estas son las mismas expresiones que se obtuvieron en el capítulo 3 para el balance del 4-momento lineal del cuerpo $\mathcal{B}$.

Claramente, de acuerdo con la Ec.(4.18), las ecuaciones (4.31) también pueden escribirse como

$$\frac{1}{\gamma} f^\alpha = \mu v^\beta u^\alpha{}_{,\beta} \ . \tag{4.32}$$

Suponiendo, además, la existencia de un cuadritensor de segundo rango, $T^{\alpha\beta}$, tal que

$$f^\alpha = \gamma T^{\alpha\beta}{}_{,\beta} \ , \tag{4.33}$$

entonces, en forma covariante, las ecuaciones de balance de 4-momento lineal pueden escribirse como

$$T^{\alpha\beta}{}_{,\beta} = j^\beta u^\alpha{}_{,\beta} \tag{4.34}$$

puesto que, por definición, $j^\beta = \mu v^\beta$. Al tensor $T^{\alpha\beta}$ se le llamará el Cuadritensor de Esfuerzos del cuerpo $\mathcal{B}$.

Claramente, los resultados obtenidos en el presente capítulo se reducen a los del capítulo anterior, cuando: (1) se considera como parámetro de evolución el tiempo propio, T, del observador inercial O, y (2) las configuraciones Ψ_T que constituyen el movimiento del cuerpo $\mathfrak{B}$, son aquellos elementos de Ψ que, para cada T, mapean a $\mathfrak{B}$ en regiones sobre las hipersuperficies de M_4 definidas por la ecuación (3.2).

Es interesante hacer notar que si la evolución del cuerpo $\mathfrak{B}$ se describe en términos de aquellas configuraciones $\psi \in \Psi$ que mapean a $\mathfrak{B}$ en regiones sobre los hiperplanos t = constante, entonces la coordenada temporal $x^0 = ct$, o simplemente el tiempo t, puede considerarse como parámetro de evolución y, en este caso, la ecuación de balance para la masa, Ec.(4.23), se reduce a

$$j^{\alpha}{}_{,\alpha} = 0 \; ; \qquad (4.35)$$

es decir, la 4-divergencia del 4-vector densidad de corriente es nula. Además, en este mismo caso, las ecuaciones de balance de 4-momento lineal pueden también escribirse en la forma

$$T^{\alpha\beta}{}_{,\beta} = (j^{\beta}u^{\alpha})_{,\beta}, \qquad (4.36)$$

permitiendo observar que la contraparte cinemática del 4-tensor de esfuerzos, $T^{\alpha\beta}$, es el 4-tensor de energía-momento, $\mathcal{E}^{\alpha\beta}$, definido como

$$\mathcal{E}^{\alpha\beta} \equiv \mu c v^{\beta} u^{\alpha} = \mu \gamma v^{\alpha} v^{\beta} \qquad (4.37)$$

El 4-tensor de energía-momento es un tensor simétrico de segundo rango. Sus componentes son

$$\mathcal{E}^{00} = \mu c^2 \gamma \approx \mu c^2 + \tfrac{1}{2}\mu v^2$$

$$\mathcal{E}^{0i} = \mathcal{E}^{i0} = \frac{v^i}{c}(\mu c^2 \gamma) \approx \frac{v^i}{c}(\mu c^2 + \tfrac{1}{2}\mu v^2)$$

$$\mathcal{E}^{ij} = \mathcal{E}^{ji} = \mu \gamma v^i v^j = J^i v^j \approx \frac{v^i v^j}{c^2}(\mu c^2 + \tfrac{1}{2}\mu v^2).$$

donde, en la última parte de cada una de estas tres expresiones, se han hecho aproximaciones para el caso $v \ll c$. Claramente, la componente $\mathcal{E}^{00}$ corresponde a la densidad de masa-energía cinética del cuerpo. Los términos $\mathcal{E}^{0i}$ constituyen las componentes del vector de flujo de masa-energía cinética; y $\mathcal{E}^{ij}$ es la componente j del vector de flujo de la componente i del momento lineal.

Ahora bien, como fué mencionado anteriormente, la cantidad μ/γ es un invariante bajo transformaciones de Lorentz y, por consiguiente, puede identificarse con la densidad de masa del cuerpo en reposo. Por lo tanto, la traza del 4-tensor de energía-momento,

$$\mathcal{E}^{\alpha}{}_{\alpha} = \mu c^2/\gamma \equiv \mu_0 c^2$$

corresponde a la densidad de energía en reposo del cuerpo. Este es el primero de los cuatro invariantes que posée el 4-tensor de energía-momento.

4.5 LAS ECUACIONES CONSTITUTIVAS

Una vez que han sido seleccionados el parámetro de evolución y el tipo de configuraciones en términos de las que ha de describirse la evolución de un cuerpo $\mathcal{B}$, existirán, en general, varios movimientos para el cuerpo considerado; es decir, varias familias uno-paramétricas de configuraciones que satisfacen los axiomas $(\bar{M}1)$, $(\bar{M}2)$, $(\bar{M}3)$, y $(\bar{M}4)$. Sin embargo, no todo movimiento corresponderá a un movimiento real del cuerpo.

La clase de movimientos que un cuerpo puede realizar está determinada por (1) las leyes dinámicas de la teoría y (2) un conjunto de axiomas que caracterizan las propiedades materiales particulares del cuerpo; esto es, un conjunto de hipótesis constitutivas.

Como se mencionó en el capítulo 1, las hipótesis constitutivas que pueden expresarse en la forma de relaciones funcionales entre el tensor de esfuerzos y el movimiento, se llaman ecuaciones constitutivas. Tales ecuaciones permiten determinar, para los materiales ideales que ellas definen, la estructura del tensor de esfuerzos. Dentro de la mecánica clásica de los medios contínuos se ha investigado una amplia variedad de ecuaciones constitutivas, y se ha desarrollado una teoría general para tales ecuaciones [9]. Sin embargo, en esta dirección, desde el punto de vista de la relatividad especial, la investigación realizada es prácticamente nula.

Las hipótesis constitutivas estan sujetas a ciertas restricciones de carácter general. El principio de objetividad es una de estas restricciones, tal vez la más importante. Este principio, para la mecánica de los medios continuos invariante de Lorentz, puede establecerse de la manera siguiente:

El Principio de Objetividad. " Las hipótesis constitutivas deben ser invariantes bajo transformaciones de Lorentz de sistemas de referencia ".

Esto significa, en particular, que las propiedades materiales de un cuerpo no dependen, de manera alguna, del observador. Naturalmente, a fin de que una ecuación constitutiva sea consistente con el principio de objetividad, es necesario que esté expresada en términos de 4-tensores.

CONCLUSIONES

CONCLUSIONES

En este trabajo, siguiendo las ideas de Noll [9], se ha introducido un esquema axiomático en el que se definen los conceptos de cuerpo y movimiento, quedando enmarcados dentro de la teoría especial de relatividad. A partir de las hipótesis introducidas se obtuvieron ecuaciones de balance para la masa,

$$j^{\alpha}{}_{,\alpha} = - j^{i} \frac{\partial}{\partial x^{i}} (\ln \frac{\Phi}{c}), \qquad (4.23)$$

y el 4-momento lineal,

$$T^{\alpha\beta}{}_{,\beta} = j^{\beta} u^{\alpha}{}_{,\beta}. \qquad (4.34)$$

Como puede observarse, en tanto que la ecuación para el balance de masa, Ec.(4.23), es una expresión que depende fuertemente de la elección del parámetro y el tipo de configuraciones que se utilicen al describir la evolución del cuerpo, las ecuaciones para el balance del 4-momento lineal, Ecs.(4.34), son expresiones independientes de tal elección.

Naturalmente, las ecuaciones (4.23) y (4.34) se vuelven expresiones completamente covariantes cuando, al describir la evolución de un cuerpo $\mathfrak{B}$, se usan aquellas configuraciones $\psi \in \Psi$ que mapean a $\mathfrak{B}$ en regiones sobre los hiperplanos t = constante. Así, en este caso, la ecuación que expresa el balance de masa toma la forma

$$j^{\alpha}{}_{,\alpha} = 0$$

que corresponde a la ecuación de continuidad ordinaria,

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x^i}(\mu v^i) = 0.$$

En este mismo caso, las ecuaciones de balance de 4-momento lineal pueden escribirse como

$$\mathcal{T}^{\alpha\beta}{}_{;\beta} = 0$$

donde, por definición,

$$\mathcal{T}^{\alpha\beta} \equiv T^{\alpha\beta} - \frac{1}{c}\mathcal{E}^{\alpha\beta}$$

es el 4-tensor de Esfuerzos-Energía-Momento.

Por otra parte, el formalismo obtenido en el capítulo 4 se reduce al del capítulo 3 cuando: (1) se considera como parámetro de evolución el tiempo propio del observador, y (2) las configuraciones, con las que ha de describirse la evolución del cuerpo $\mathfrak{B}$, son aquellos elementos $\psi \in \Psi$ que mapean a $\mathfrak{B}$ en regiones sobre las hipersuperficies definidas por la relación de causalidad

$$t = T - \frac{R}{c} \qquad (3.2)$$

En estas condiciones, a un observador inercial le es posible estudiar cuerpos para los que, en virtud de sus dimensiones y localización, no es posible usar la coordenada temporal como parámetro de evolución.

Naturalmente, las ecuaciones obtenidas en este caso no son completamente covariantes; sin embargo, las configuraciones del cuerpo están constituidas por eventos causalmente relacionados con el observador, lo cual no ocurre cuando las configuraciones son regiones sobre los hiperplanos t = constante.

Finalmente, aunque la determinación de la estructura del 4-tensor de esfuerzos requiere, como se mencionó al final del capítulo 4, de la elaboración previa de una teoría sobre ecuaciones constitutivas Lorentz invariantes, a continuación se propone un tensor de esfuerzos y se muestra que con él, y el uso de las Ecs.(4.34), se obtiene la generalización relativista de las ecuaciones de Euler. En esta forma se pretenden poner de manifiesto las enormes posibilidades de éxito del formalismo desarrollado en este trabajo.

Considérese un 4-tensor de esfuerzos de la forma

$$T^{\alpha\beta} = \frac{1}{c}\left[p\eta^{\alpha\beta} - (p + e)u^{\alpha}u^{\beta} \right] \qquad (C\text{-}1)$$

donde p y e son, respectivamente, la presión y la densidad de energía interna clásicas, medidas en el sistema de referencia propio. Usando este tensor de esfuerzos, las ecuaciones de balance de 4-momento lineal, Ecs.(4.34), toman la forma

$$hu^{\beta}u^{\alpha}{}_{,\beta} = \eta^{\alpha\beta}\frac{\partial p}{\partial x^{\beta}} - u^{\alpha}((p + e)u^{\beta})_{,\beta} \qquad (C\text{-}2)$$

donde

$$h = \mu_0 c^2 + e + p \qquad (C\text{-}3)$$

De la Ec.(C-2), multiplicando escalarmente por u_α, se obtiene la relación

$$u^\beta \frac{\partial p}{\partial x^\beta} - ((p + e)u^\beta)_{,\beta} = 0 \qquad \text{(C-4)}$$

y, por consiguiente,

$$u^\alpha u^\beta \frac{\partial p}{\partial x^\beta} = u^\alpha((p + e)u^\beta)_{,\beta}.$$

Usando esta última relación en la Ec.(C-2) se obtiene

$$h u^\beta u^\alpha{}_{,\beta} = \eta^{\alpha\beta} \frac{\partial p}{\partial x^\beta} - u^\alpha u^\beta \frac{\partial p}{\partial x^\beta}. \qquad \text{(C-5)}$$

Estas últimas ecuaciones constituyen la generalización relativista de las ecuaciones de Euler. Estas ecuaciones coinciden exáctamente con las obtenidas por Anderson [13] para fluidos no-viscosos. La cantidad h, definida en (C-3), corresponde a la entalpía por unidad de volumen propio, y la cantidad $\mu_0 c^2 + e$ corresponde a la energía interna relativista, expresada por unidad de volumen propio.

RECONOCIMIENTOS

Sinceramente quiero agradecer y reconocer, al menos en esta última página, la gran amistad y ayuda de valor incalculable que me han brindado los compañeros Armando C. Pérez Guerrero Noyola y Augusto Cabrera Manuel.

REFERENCIAS

1 JAUNZEMIS, W., Continuum Mechanics. New York: The Macmillan Company, 1967.

2 TRUESDELL, C., The Elements of Continuum Mechanics. New York: Springer-Verlag New York, Inc., 1965.

3 MALVERN, L.E., Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium. Prentice Hall, 1969.

4. ERINGEN, A.C., Nonlinear Theory of Continuous Media. McGraw-Hill, 1962.

5 ODEN, J.T., Finite Elements of Nonlinear Continua. McG McGraw-Hill, 1972.

6 GYARMATI, I., Non-equilibrium Thermodynamics. Springer-Verlag, N.Y., 1970.

7 TRUESDELL, C., and R. Toupin., The Classical Field Theories. Handbuch der Physik, Springer-Verlag. Berlin. 1960.

8 ERINGEN, A.C., Mechanics of Continua. John Wiley Sons, Inc., 1967.

9 NOLL, W., The Foundations of Mechanics and Thermodynamics. Springer-Verlag, N.Y., 1974.

10 LANDAU, L.D. and E.M. LIFSHITZ., The Classical Theory of Fields. Addison-Wesley, Reading, Mass., 1962.

11 MOLLER, C., The Theory of Relativity. Oxford Univ. Press. London; 1972.

12 TOLMAN, R.C., Relativity, Thermodynamics, and Cosmology. Clarendon Press, Oxford, 1934.

13 ANDERSON, J.L., Principles of Relativity Physics. Academic Press, New York, 1967.

14 LANCZOS, C., The Variational Principles of Mechanics. University of Toronto Press, 1970.

15 KOLMOGOROV, A.N. y S.V. FOMIN., Elementos de la Teoría de Funciones y del Análisis Funcional. Editorial Mir Moscu, 1975.

16 FRANZ, W., General Topology. Frederick Ungar Publishing Co., Inc., 1965.

17 HORVATH, J., Introducción a la Topología General. Unión Panamericana, Washington, D.C., 1975.

18 DR. FERMIN VINIEGRA HEBERLEIN. Comunicación Privada.

19 DR. CARLOS IMAZ JAHNKE. Comunicación Privada.