

DESARROLLO DE FUNCIONES DE ONDA DEL
CONTINUO EN ESTADOS RESONANTES

TRABAJO DE TESIS QUE PRESENTA
JOSE ALBERTO RUBIO MENDEZ
PARA OBTENER EL TITULO DE
F I S I C O
OCTUBRE - 1979

1 ejemplar
40

6615



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

I N D I C E

	Pág.
CAPITULO I.- INTRODUCCION.	1
CAPITULO II.- PRERREQUISITOS DE TEORIA DE DISPERSION.	
2.1 - Ondas Parciales.	4
2.2 - Extensión a p compleja.	17
2.3 - Polos de $S(p)$, resonancias y estados ligados.	21
CAPITULO III.- DESARROLLO DE LA FUNCION DE ONDA EN ESTADOS RESONANTES.	
3.1 - Definición de Estados Resonantes.	30
3.2 - Función de Green y normalización de las funciones U_n .	34
3.3 - Función de onda interna y Función de Green.	38
3.4 - Desarrollo de la función de onda Ψ_p en la región interna.	41
CAPITULO IV.- POTENCIAL DELTA	
4.1 - Introducción y solución exacta.	51
4.2 - Desarrollo de la solución en estados resonantes.	54
4.3 - Resultados	56
CAPITULO V.- POTENCIAL PICASSO	
5.1 - Solución exacta.	72
5.2 - Desarrollo de la solución en estados resonantes.	76
5.3 - Resultados	78
CAPITULO VI.- DISCUSION Y CONCLUSIONES	84

CAPITULO I

INTRODUCCION

Las funciones de onda asociadas a los llamados estados resonantes son soluciones de la ecuación de Schroedinger correspondientes a eigenvalores complejos de la energía.

Estos eigenvalores complejos son utilizados para describir una situación en la cual una partícula incidente sobre un potencial queda atrapada durante un tiempo finito en un estado metaestable del sistema y después decae. A esta situación física se le conoce como resonancia. Las eigenfunciones asociadas a estos estados que decaen, crecen exponencialmente con la distancia y en consecuencia los procedimientos usuales de normalización y desarrollos en términos de ellos, no son válidos. Por esta razón tales estados no fueron utilizados sino hasta recientemente en teorías de reacciones nucleares⁵⁾ a pesar de su conexión natural con las resonancias.

Recientemente se han sugerido^{11,18)} varios métodos de normalización para las eigenfunciones asociadas a los estados resonantes y también recientemente se ha trabajado sobre desarrollos utilizando como base esas eigenfunciones. G. García Calderón¹²⁾ propuso un desarrollo para las funciones de onda del continuo en términos de estados resonantes. García Calderón demuestra que para un potencial de alcance finito ($V(r)=0, r > a$) existe un desarrollo puramente discreto para la función de onda en la región $\{r < a\}$ y otro desarrollo, alternativo, que consta, además de una parte discreta, de dos sustracciones, válido en la región $\{r < a\}$. Posterior

mente J. Bang e. t al.¹⁷⁾ propuso un desarrollo para la función de onda con q sustracciones, el cual coincide con el de García Calderón cuando el número de sustracciones es dos.

El problema de investigar la convergencia de desarrollos para cantidades tales como la matriz S ha sido abordado en escasas ocasiones^{14,19)} y el problema análogo para desarrollos de las funciones de onda del continuo, nunca había sido atacado sino hasta muy recientemente por J. Bang et. al.¹⁷⁾ en 1978.

El objetivo de este trabajo es el de investigar la convergencia del desarrollo para la función de onda propuesto por García Calderón.

Para llevar a cabo tal investigación utilizamos dos potenciales para los cuales sea posible encontrar la función de onda exacta, de esta manera podremos comparar la función de onda obtenida a través del desarrollo con la función de onda exacta.

La distribución del material contenido en este trabajo es la siguiente:

El capítulo II contiene los elementos de teoría de dispersión que serán necesarios para el desarrollo de este trabajo. En la tercera sección (2.3) se discute brevemente la conexión entre polos de la matriz de dispersión S con las resonancias y estados ligados.

En el capítulo III se presenta el desarrollo para la función de onda que es nuestro objeto de estudio. En sus secciones iniciales se introducen los estados resonantes y se deriva el importante resultado de que los residuos de la función de Green en sus polos son precisamente las eigenfunciones asociadas a los estados resonantes, ligados y antiligados.

En los capítulos IV y V se establece el desarrollo presen

tado en el capítulo III para dos potenciales particulares, el delta y el picasso (pozo cuadrado unido a una delta de Dirac), se presentan los resultados numéricos obtenidos al considerar un número finito de términos en el desarrollo y se comparan con los valores exactos de la función de onda.

Finalmente en el capítulo VI se discuten los resultados y se presentan las conclusiones.

CAPITULO II

PRERREQUISITOS DE TEORIA DE DISPERSION

2.1 - Ondas Parciales

Con el propósito de que este trabajo sea, al menos aproximadamente, autocontenido, presentaremos en este capítulo una serie de resultados que resumen la teoría básica sobre la cual se asienta el contenido de los siguientes capítulos.

La forma más conveniente, por simplicidad, de presentar estos resultados es asociándolos a procesos de dispersión elásticos. Más concretamente, a procesos de dispersión de una partícula sin espín por un potencial fijo. En todo este trabajo trataremos con procesos de este tipo. Sin embargo, los resultados que presentaremos en este capítulo así como los que expondremos en el siguiente, se pueden generalizar a procesos de varios canales.

En esta primera sección, recordaremos los resultados más importantes que se obtienen del método de ondas parciales.

Como sabemos, este método es aplicable sólo cuando el potencial es esféricamente simétrico, que es el caso que nos interesa. Para un potencial de este tipo, la matriz de dispersión S conmuta con el momento angular L y puesto que en general S conmuta con el Hamiltoniano libre H^0 , tenemos que la matriz S es diagonal en la base $|E, l, m\rangle$ de eigenvectores de H^0 , L^2 y L_3 . Es decir, la matriz S en la base $|E, l, m\rangle$ tiene elementos de matriz

$$\langle E', \ell', m' | S | E, \ell, m \rangle = \delta(E' - E) \delta_{\ell \ell'} \delta_{m m'} S_1(p) \quad (2.1)$$

Donde $S_1(p)$ es el eigenvalor de S correspondiente al eigenvector $|E, \ell, m\rangle$. Puesto que S es unitario el número $S_1(p)$ debe ser de la forma

$$S_1(p) = e^{2i\delta_\ell(p)} \quad (2.1.1)$$

esta expresión define el corrimiento de fase $\delta_\ell(p)$ cuyo significado recordaremos más adelante.

Debido a que es posible desarrollar a los eigenestados del momento lineal, $|\vec{p}\rangle$ en función de los eigenestados del momento angular, $|E, \ell, m\rangle$, o equivalentemente a las ondas planas $\langle \vec{x} | \vec{p} \rangle$ en función de los armónicos esféricos $\langle \vec{x} | E, \ell, m \rangle$, es posible también encontrar expresiones de cantidades, conocidas en la base $|\vec{p}\rangle$, en función de la base $|E, \ell, m\rangle$. Para esto se utiliza la matriz de transformación

$$\langle \vec{p} | E, \ell, m \rangle = (mp)^{-\frac{1}{2}} \delta(E_p - E) Y_\ell^m(\hat{p}) \quad (2.1.2)$$

donde $Y_\ell^m(p)$ son los armónicos esféricos. Así, se encuentra* para la amplitud de dispersión

$$f(\vec{p}' \leftarrow \vec{p}) = \sum_{\ell} (2\ell+1) f_\ell(p) P_\ell(\hat{p}' \cdot \hat{p}) \quad (2.1.3)$$

donde $f_\ell(p)$ es la amplitud de onda parcial,

$$f_\ell(p) = \frac{S_\ell(p) - 1}{2ip} = \frac{e^{2i\delta_\ell(p)} \text{sen} \delta_\ell(p)}{p} \quad (2.1.4)$$

* Ver Ref.(1) p. 87.

y $P_\ell(\hat{p}' \cdot \hat{p})$ es el polinomio de Legendre ($\hat{p}' \cdot \hat{p} = \cos \theta$).

Usando (2.3) podemos escribir a la sección eficaz diferencial,

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f|^2 = \sum_{\ell'} \sum_{\ell} (2\ell'+1)(2\ell+1) f_{\ell'} f_{\ell} P_{\ell'} P_{\ell}$$

Al integrar esta expresión para obtener la sección eficaz total σ , debido a la ortogonalidad de los polinomios de Legendre se encuentra,

$$\sigma = \sum_{\ell} \sigma_{\ell}(p) \quad (2.1.5)$$

donde

$$\sigma_{\ell}(p) = 4\pi(2\ell+1) |f_{\ell}(p)|^2 \quad (2.1.6)$$

que en función del corrimiento de fase $\delta_{\ell}(p)$ es,

$$\sigma_{\ell}(p) = 4\pi(2\ell+1) \frac{\sin^2 \delta_{\ell}(p)}{p^2} \quad (2.1.7)$$

De aquí vemos que la contribución máxima de cualquier onda parcial a la sección total es la correspondiente a $\delta_{\ell} = (2\ell+1)\frac{\pi}{2}$ y entonces para cada ℓ tenemos

$$\sigma_{\ell}(p) \leq 4\pi \frac{(2\ell+1)}{p^2}$$

Cabe destacar aquí que la sección eficaz es uno de los conceptos más fundamentales de la teoría de dispersión, pues es la cantidad que se puede medir directamente en el experimento. La teoría de dispersión se encarga de conectar esta cantidad medible σ por distintas vías (matriz S, matriz T, etc.) con la información básica sobre el fenómeno físico, en el caso más simple, con el potencial. En particular, es el

comportamiento peculiar de la sección eficaz en función de la energía, observado en ciertos experimentos, lo que nos conduce a introducir el concepto de resonancia, el cual, en gran medida, es tema de este trabajo y a cuya descripción nos avocaremos más adelante.

De las ecuaciones (2.1.3) y (2.1.4) la amplitud se puede escribir como

$$f(\bar{p}' \leftarrow \bar{p}) = \sum_l (2l+1) (\cos \delta_l(p) + i \sin \delta_l(p)) \sin \delta_l(p) F_l$$

esta expresión, cuando $\bar{p}' = \bar{p}$, es decir, cuando el ángulo de dispersión es cero, se convierte en

$$f(\bar{p} \leftarrow \bar{p}) = \sum_l (2l+1) (\cos \delta_l \sin \delta_l + i \sin^2 \delta_l)$$

pues $P_l(\hat{p} \cdot \hat{p}) = P_l(1) = 1$. Comparando esto con las expresiones (2.1.5) y (2.1.7) para σ , obtenemos el teorema óptico

$$\sigma = \frac{4\pi}{p} \text{Im} f(\bar{p} \leftarrow \bar{p}) \quad (2.1.8)$$

Esta derivación no refleja la importancia y la generalidad que realmente tiene el teorema óptico. Existe otra derivación²⁾ basada en argumentos de conservación de flujo que evidencia su contenido físico que es precisamente la conservación del flujo, es decir, que la amplitud de la onda incidente debe disminuir para compensar el flujo removido por la dispersión. Esa disminución es producida por interferencia destructiva entre la onda incidente y la onda dispersada en la dirección de incidencia.

Las funciones de onda $\langle \bar{x} | E, l, m \rangle$ son eigenfunciones del Hamiltoniano libre H^0 y del momento angular L .

y, como es bien conocido son productos de armónicos esféricos y funciones radiales, es decir son de la forma,

$$\langle \bar{x} | E, l, m \rangle = \frac{y(r)}{r} Y_l^m(\hat{x}) \quad (2.1.9)$$

donde $y(r)$ satisface la ecuación radial libre de Schrödinger que en unidades de $\hbar = 1$ se puede escribir como

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + p^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] y(r) = 0 \quad (2.1.10)$$

Esta ecuación tiene dos soluciones linealmente independientes, pues es de segundo grado, una que se anula en el origen, la solución regular, y otra que no tiene esta propiedad, la irregular. La solución regular es la función de Riccati-Bessel* $\hat{J}_l(pr)$, cuya normalización está dada por

$$\int_0^\infty dr \hat{J}_l(p'r) \hat{J}_l(pr) = \frac{\pi}{2} \delta(p' - p) \quad (2.1.11)$$

Entonces, por la ortonormalidad de los armónicos esféricos Y_l^m , la función de onda $\langle \bar{x} | E, l, m \rangle$ normalizada es

$$\langle \bar{x} | E, l, m \rangle = i^l \left(\frac{2m}{\pi p} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{r} \hat{J}_l(pr) Y_l^m(\hat{x}) \quad (2.1.12)$$

La solución irregular en el origen es la función de Riccati-Neuman \hat{n}_l^* . Cuando $r \rightarrow \infty$ (el término centrífugo desapare-

* Ver Ref. (1) p. 182

ce) las soluciones deben ser combinaciones de $e^{\pm i p r}$. Las funciones que exhiben ese comportamiento asintóticamente, son las funciones de Riacatti-Hankel \hat{h}_l^{\pm} , definidas por,

$$\hat{h}_l^{\pm}(z) = \hat{h}_l(z) \pm i J_l(z) \quad (2.1.13)$$

Para terminar con la ecuación de Schrödinger libre y sus soluciones, recordemos el desarrollo de la onda plana $\langle \bar{x} | \bar{p} \rangle$ en términos de las funciones $\langle \bar{x} | E l m \rangle$. Esto puede obtenerse* de la matriz de transformación (2.1.2)

$$\langle \bar{x} | \bar{p} \rangle = (2\pi)^{\frac{3}{2}} \frac{1}{p_r} \sum (2l+1) i^l \hat{J}_l(p_r) P_l(\hat{x} \cdot \hat{p}) \quad (2.1.14)$$

Antes de discutir las soluciones de la ecuación radial completa de Schrödinger, hablaremos brevemente de los operadores de Müller, los cuales nos servirán para introducir dichas soluciones. Para un potencial razonable**, es decir, que tienda a cero más rápido que $\frac{1}{r^3}$ cuando $r \rightarrow \infty$ y que diverja en el origen menos que $\frac{1}{r^2}$, es válido lo siguiente: si $U(\tau) |\Psi\rangle$ representa la evolución de un experimento de dispersión, se tiene que, para tiempos muy anteriores $(\tau \rightarrow -\infty)$ al momento de la interacción, el paquete de ondas $U(\tau) |\Psi\rangle$ se encuentra muy lejos del potencial dispersor y, por tanto, se comporta como un paquete de ondas que evoluciona libremente, es decir como $U^0(\tau) |\Psi_{en}\rangle$, donde $U^0(\tau) = e^{-iH^0\tau}$ es el operador de evolución libre y

* Ver Ref. (1) p. 185

** Ver Ref. (1) p. 27.

$|\Psi_{en}\rangle$ cualquier vector apropiado, es decir, normalizable. Esto lo podemos escribir como

$$U(\tau)|\Psi\rangle \rightarrow U^0(\tau)|\Psi_{en}\rangle$$

Al paquete libre $U^0(\tau)|\Psi_{en}\rangle$ se le denomina asíntota de entrada del paquete real que describe la interacción $U(\tau)|\Psi\rangle$ y está determinada por el vector fijo $|\Psi_{en}\rangle$. De hecho, se demuestra* que para cada $|\Psi_{en}\rangle$ apropiado existe un estado $|\Psi\rangle$ tal que,

$$U(\tau)|\Psi\rangle \xrightarrow{\tau \rightarrow -\infty} U^0(\tau)|\Psi_{en}\rangle$$

o equivalentemente

$$|\Psi\rangle = \lim_{\tau \rightarrow -\infty} U^\dagger(\tau) U^0(\tau)|\Psi_{en}\rangle$$

si definimos un operador Ω_+ como

$$\Omega_+ = \lim_{\tau \rightarrow -\infty} U^\dagger(\tau) U^0(\tau)$$

el resultado de arriba se puede escribir como

$$|\Psi\rangle = \Omega_+ |\Psi_{en}\rangle \quad (2.1.15)$$

Esto expresa que el operador Ω_+ , llamado operador de Møller actuando sobre el vector fijo $|\Psi_{en}\rangle$ que determina la asíntota de entrada $U^0(\tau)|\Psi_{en}\rangle$ nos da el vector fijo $|\Psi\rangle$ que determina el estado real del sistema $U(\tau)|\Psi\rangle$. Simi-

* Ver ref. (1) p. 28.

larmente se establece una relación entre la asintota de salida

$|\Psi_{s21}\rangle$ y el vector real $|\Psi\rangle$

$$|\Psi\rangle = \Omega^{-1} |\Psi_{s21}\rangle.$$

De acuerdo al resultado arriba citado, a las ondas planas $|\bar{p}\rangle$ les podemos asociar* los estados $|\bar{p}\pm\rangle$ que describen la interacción efectiva mediante

$$|\bar{p}\pm\rangle = \Omega_{\pm} |\bar{p}\rangle \quad (2.1.16)$$

Es posible demostrar** que el Hamiltoniano libre H^0 , el Hamiltoniano completo H y los operadores Ω_{\pm} satisfacen la relación

$$H \Omega_{\pm} = \Omega_{\pm} H^0 \quad (2.1.17)$$

Como los vectores $|\bar{p}\rangle$ son eigenvectores de H^0 , supongamos con eigenvalor E_p , de la relación (2.1.17) se obtiene

$$H |\bar{p}\pm\rangle = H \Omega_{\pm} |\bar{p}\rangle = \Omega_{\pm} H^0 |\bar{p}\rangle = E_p \Omega_{\pm} |\bar{p}\rangle$$

o sea,

$$H |\bar{p}\pm\rangle = E_p |\bar{p}\pm\rangle \quad (2.1.18)$$

Es decir, los vectores $|\bar{p}\pm\rangle$ son eigenvectores del Hamiltoniano completo con el mismo eigenvalor que el de H^0 correspondiente a $|\bar{p}\rangle$. Esto significa que las funciones de onda

* El resultado se aplica a vectores apropiados, es decir, normalizables, por tanto, el resultado lo estamos aplicando no realmente a $|\bar{p}\rangle$ sino a los estados $|\Psi\rangle$ normalizables que se pueden formar por superposición de los estados $|\bar{p}\rangle$, $|\Psi\rangle = \int d^3p \Psi(p) |\bar{p}\rangle$, para una discusión más amplia ver Ref.(1) p. 165.

** Ver Ref. (1) p. 39

$\langle \bar{x} | p_{\pm} \rangle$ que describen la dispersión, satisfacen la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo.

De manera analoga introducimos los estados $|E, l, m_{\pm}\rangle$ a través de

$$|E, l, m_{\pm}\rangle = \Omega_{\pm} |E, l, m\rangle \quad (2.1.19)$$

que son eigenvectores del momento angular y del Hamiltoniano completo H con eigenvalor E igual al de H^0 correspondiente a $|E, l, m\rangle$.

En analogía con el caso libre (2.1.12), la función de onda $\langle \bar{x} | E, l, m_{+} \rangle$ tiene la forma,

$$\langle \bar{x} | E, l, m_{+} \rangle = i^l \left(\frac{2m}{\pi p} \right)^{1/2} \frac{1}{r} \Psi_{lp}(r) Y_l^m(\hat{x})$$

cuando $V = 0$ es claro que $\Psi_{lp}(r)$ se convierte en $J_l(pr)$. $\Psi_{lp}(r)$ es la solución de la ecuación radial completa, que en unidades de $\hbar = 2m = 1$ se puede escribir como

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + p^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} - V(r) \right] \Psi_{lp}(r) = 0 \quad (2.1.20)$$

La función $\Psi_{lp}(r)$ debe ser regular en el origen, es decir $\Psi_{lp}(0) = 0$. Los estados $|E, l, m_{+}\rangle$, por su construcción, tienen la misma normalización que los estados

$|E, l, m\rangle$ y, por tanto, tenemos la generalización de (2.1.11)

$$\int dr \Psi_{lp'}^*(r) \Psi_{lp}(r) = \frac{\pi}{2} \delta(p' - p) \quad (2.1.21)$$

A la función $\Psi_{\ell p}$ se le conoce como solución normalizada de la ecuación radial (o solución física).

La forma asintótica de $\Psi_{\ell p}(r)$ esta relacionada con la amplitud parcial $f_{\ell}(p)$. Para encontrar esta relación utilizamos la forma asintótica de la función de onda de la dispersión $\langle \bar{x} | \bar{p} + \rangle$, la cual se demuestra,* está dada por

$$\langle \bar{x} | \bar{p} + \rangle \xrightarrow{r \rightarrow \infty} (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \left[e^{i\bar{p} \cdot \bar{x}} + f(p\hat{x} \leftarrow \bar{p}) \frac{e^{ipr}}{r} \right] \quad (2.1.22)$$

Necesitamos también el desarrollo de $\langle \bar{x} | \bar{p} + \rangle$ en términos de $\langle \bar{x} | E, \ell, m + \rangle$, el cual se obtiene fácilmente a partir del desarrollo de la onda plana $\langle \bar{x} | \bar{p} \rangle$ en términos de $\langle \bar{x} | E, \ell, m \rangle$, aplicando a ambos lados de este último el operador Ω_+ . El resultado es

$$\langle \bar{x} | \bar{p} + \rangle = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{p r} \sum_{\ell} (2\ell+1) i^{\ell} \Psi_{\ell p}(r) P_{\ell}(\hat{x} \cdot \hat{p}) \quad (2.1.23)$$

Si introducimos en (2.1.22) el desarrollo (2.1.14) para $e^{i\bar{p} \cdot \bar{x}} = \langle \bar{x} | \bar{p} \rangle$ y la expresión (2.1.3) para $f(p\hat{x} \leftarrow \bar{p})$ y comparamos con (2.1.23), obtenemos

$$\Psi_{\ell p}(r) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \hat{J}_{\ell}(pr) + p f_{\ell} e^{i(pr - \ell\pi/2)} \quad (2.1.24)$$

lo cual, recordando el comportamiento asintótico de \hat{h}_{ℓ}^+ , $\hat{h}_{\ell}^+ \xrightarrow{r \rightarrow \infty} e^{i(pr - \ell\pi/2)}$ podemos reescribir como

$$\Psi_{\ell p}(r) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \hat{J}_{\ell}(pr) + p f_{\ell} \hat{h}_{\ell}^+ \quad (2.1.25)$$

* Ver Ref. (1) p. 170.

Este comportamiento de $\Psi_{l\rho}(r)$, corresponde a la forma (2.1.22) de la función de onda $\langle \bar{x} | \bar{p} \rangle$, con la interpretación de

$\hat{J}_l(\rho r)$ como la onda libre incidente y $P f_l \hat{h}_l^+$ como la onda dispersada saliente. Si en (2.1.24) sustituimos a $\hat{J}_l(\rho r)$ por su forma asintótica, $\hat{J}_l(\rho r) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \text{sen}(\rho r - l\pi/2)$, y escribimos a $P f_l$ en función de δ_l usando (2.1.4), es decir,

$$P f_l = e^{i\delta_l} \text{sen } \delta_l \quad \text{tenemos}$$

$$\Psi_{l\rho}(r) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} e^{i\delta_l(\rho)} \text{sen}(\rho r - l\pi/2 + \delta_l(\rho)) \quad (2.1.26)$$

Esta forma expresa el importante resultado de que la función de onda radial, a grandes distancias, difiere de la solución libre, $\hat{J}_l(\rho r) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \text{sen}(\rho r - \frac{l\pi}{2})$, solo en el corrimiento de fase $\delta_l(\rho)$.

Finalmente escribiremos a $\Psi_{l\rho}(r)$ en una forma que nos será útil más adelante. Si en la ecuación (2.1.25) escribimos a \hat{J}_l como $\frac{\hat{h}_l^+ - \hat{h}_l^-}{2i}$ y a $P f_l$ como $\frac{S_l - 1}{2i}$ obtenemos

$$\Psi_{l\rho}(r) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \frac{i}{2} [\hat{h}_l^-(\rho r) - S_l(\rho) \hat{h}_l^+(\rho r)] \quad (2.1.27)$$

La cual expresa, puesto que $|S_l| = 1$, que el flujo se conserva, ya que la solución libre $\hat{J}_l \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \frac{i}{2} [\hat{h}_l^- - \hat{h}_l^+]$ tiene el mismo flujo que (2.1.27), flujo cero, siempre y cuando $|S_l| = 1$.

La solución normalizada $\Psi_{l\rho}$ de la ecuación radial de Schrödinger queda determinada por las condiciones a la frontera $\Psi_{l\rho}(0) = 0$ y $\Psi_{l\rho}(r) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \hat{J}_l(\rho r) + P f_l \hat{h}_l^+$. Como se verá más adelante, es muy conveniente introducir otras

soluciones de la ecuación radial que esten determinadas por condiciones a la frontera que dependan de un solo punto. Estas soluciones son, la llamada solución regular $\phi_{\ell\rho}(\gamma)$ que es definida por su comportamiento en el origen y las soluciones $\chi_{\ell\rho}^{\pm}(\gamma)$ llamadas de Jost, que son determinadas por su comportamiento cuando $\gamma \rightarrow \infty$. En seguida discutiremos la solución regular $\phi_{\ell\rho}(\gamma)$ y, posteriormente, en la sección (2.1.3), donde la utilizaremos, lo haremos con $\chi_{\ell\rho}^{\pm}(\gamma)$.

La solución regular de la ecuación de Schrödinger $\phi_{\ell\rho}(\gamma)$, es una función proporcional a la solución normalizada $\Psi_{\ell\rho}(\gamma)$, que difiere de esta solo en su normalización, pero que posee propiedades matemáticas que hacen muy conveniente trabajar con ella.

La solución $\phi_{\ell\rho}(\gamma)$ de la ecuación radial* es aquella que se comporta exactamente como $\hat{J}_{\ell}(\rho\gamma)$ cuando $\gamma \rightarrow 0$. Es decir, $\phi_{\ell\rho}(\gamma) = \hat{J}_{\ell}(\rho\gamma)$ cuando $\gamma \rightarrow 0$. Existen en la literatura otras definiciones, por ejemplo Newton,** sin embargo, la presentada es más conveniente pues es la misma para toda l , a diferencia de la de Newton, quien presenta una parálisis = 0 y otra analoga pero distinta para $l > 0$.

Las ventajas de $\phi_{\ell\rho}$ sobre $\Psi_{\ell\rho}$ provienen de que las condiciones a la frontera que definen $\phi_{\ell\rho}$ son más simples que aquellas que definen a $\Psi_{\ell\rho}$. Además, $\phi_{\ell\rho}$ es real, pues la ecuación radial de Schrödinger es real y las condiciones a la frontera también lo son.

Como dijimos antes, $\phi_{\ell\rho}$ y $\Psi_{\ell\rho}$ son proporcionales, para encontrar la constante de proporcionalidad consideremos el

* Ver Rev. (1) p. 197.

** Ver Ref. (3) p. 330.

comportamiento de ambas a grandes distancias. Cuando $r \rightarrow \infty$ $\phi_{\ell p}$ debe ser una combinación de \hat{h}_ℓ^\pm (pues éstas son soluciones para $V = 0$), escribimos ésta, teniendo en cuenta que $\phi_{\ell p}$ es real, como sigue,

$$\phi_{\ell p}(r) = \frac{i}{2} [J_\ell(p) \hat{h}_\ell^-(pr) - J_\ell^*(p) \hat{h}_\ell^+(pr)] \quad (2.1.28)$$

Para $\Psi_{\ell p}$, sabemos que su comportamiento asintótico es (2.1.27)

$$\Psi_{\ell p}(r) = \frac{i}{2} [\hat{h}_\ell(pr) - S_\ell(p) \hat{h}_\ell^+(pr)]$$

comparando estas expresiones obtenemos

$$\phi_{\ell p}(r) = J_\ell(p) \Psi_{\ell p}(r) \quad (2.1.29)$$

y

$$S_\ell(p) = \frac{J_\ell^*(p)}{J_\ell(p)} \quad (2.1.30)$$

De esta última ecuación y recordando que $S_\ell = e^{2i\delta}$ obtenemos

$$J_\ell(p) = |J_\ell(p)| e^{-i\delta_\ell(p)} \quad (2.1.31)$$

Es decir, el cambio de fase $\delta_\ell(p)$ es la fase de $J_\ell(p)$ con el signo opuesto.

La función $J_\ell(p)$ definida por (2.1.28) es la llamada función de Jost y en el resto del capítulo jugará un papel muy destacado.

2.2.- Extensión a p compleja.

El tratamiento de las resonancias que se basa en el estudio de las propiedades analíticas de la función de Jost $J_\ell(\rho)$ o de la matriz de dispersión $S_\ell(\rho)$ en el plano complejo, es el punto de partida para establecer el formalismo, cosa que haremos en el próximo capítulo, que es objeto de estudio de este trabajo.

En esta sección presentaremos las propiedades analíticas de $J_\ell(\rho)$ y $S_\ell(\rho)$ que nos permitirán, en la siguiente, establecer la conexión de las resonancias y estados ligados con los ceros de $J_\ell(\rho)$ y los polos de $S_\ell(\rho)$.

Es posible demostrar* que la ecuación integral

$$\phi_{\ell p}(\rho, r) = J_\ell(\rho, r) + \int_0^r dr' g_{\ell p}(r, r') V(r') \phi_{\ell p}(r') \quad (2.2.1)$$

con la función de Green apropiada dada por

$$g_{\ell p}(r, r') = \frac{1}{\rho} [J_\ell(\rho r) \hat{N}_\ell(\rho r') - \hat{N}_\ell(\rho r) J_\ell(\rho r')] \quad (2.2.2)$$

es equivalente a la ecuación diferencial para la solución regular $\phi_{\ell p}(\rho, r)$ junto con sus condiciones a la frontera. Esto se puede hacer sustituyendo directamente la ecuación integral para $\phi_{\ell p}(\rho, r)$ en la ecuación radial de Schrödinger y verificar que la satisface junto con la condición a la frontera de $\phi_{\ell p}$ o bien, partiendo de que los estados $|E, \ell, m\rangle$ satisfacen la ecuación de Lippmann-Schwinger**

* Ver Ref. (1) p. 201.

** Ver. Ref. (1) p. 168 y 188.

$$|E, l, m+\rangle = |E, l, m\rangle + G^{\circ}(E + i0) V |E, l, m+\rangle$$

La integral (2.2.1) es cero para $r' > r$, las ecuaciones integrales de este tipo son conocidas como ecuaciones de Volterra y tienen la virtud de que pueden resolverse por iteración*. En consecuencia, la solución $\phi_{2p}(r)$ puede escribirse como

$$\phi_{2p}(r) = \sum_n \phi^n(r) \quad (2.2.3)$$

donde

$$\phi^{\circ}(r) = \hat{J}_2(p, r) \quad y$$

$$\phi^n(r) = \int dr' g_2(r, r') V(r') \phi^{n-1}(r')$$

Puesto que la serie (2.2.3) converge uniformemente* en cualquier región cerrada del plano complejo P y sus términos ϕ^n son funciones analíticas* para toda P , tenemos el importante resultado de que la solución regular $\phi_{2p}(r)$, es una función analítica de P en todo el plano complejo. Para que este resultado sea válido, es necesario solo que el potencial sea tal que

$$\int_0^{\infty} dr \, r |V(r)| < \infty$$

De la ecuación integral para $\phi_{2p}(r)$ (2.2.1) y la forma asintótica de $\phi_{2p}(r)$ (2.1.28), se deriva fácilmente una expresión integral para la función de Jost $J_2(p)$,

$$J_2(p) = 1 + \frac{1}{p} \int_0^{\infty} dr \, \hat{h}_2(p, r) V(r) \phi_{2p}(r) \quad (2.2.4)$$

* Ver ref. (1) p. 215 o ref. (3) p. 331.

Para valores grandes de $p r$, $\phi_{\ell p}(\tau)$ se comporta como $J_{\ell}(p) e^{i p r} - J_{\ell}^*(p) e^{-i p r}$, entonces, cuando $p r$ es complejo $\phi_{\ell p}(\tau)$ crece como $e^{|\operatorname{Im} p r|}$. La función $\hat{h}_{\ell}^+(p r)$ se comporta asintóticamente como $e^{i(p r - \ell \pi/2)}$, es decir, crece como $e^{-\operatorname{Im} p r}$. Según esto, vemos que la integral (2.2.4) diverge exponencialmente en la parte inferior del plano complejo, $\{\operatorname{Im} p < 0\}$, mientras que en la parte superior, $\{\operatorname{Im} p > 0\}$, la integral converge pues $e^{|\operatorname{Im} p r|}$ se cancela con $e^{-\operatorname{Im} p r}$. Puesto que $\phi_{\ell p}$ es analítica en todo el plano y el potencial es tal que la integral (2.2.4) converge uniformemente, tenemos que la función de Jost es analítica en la parte superior del plano complejo p y es continua en esta misma región más su frontera, es decir, el eje real.

Para p física, es decir, para p real y positiva, la matriz de dispersión es (2.1.30),

$$S_{\ell}(p) = \frac{J_{\ell}(p)^*}{J_{\ell}(p)} \quad (2.2.5)$$

Si extendemos este resultado a p compleja, tenemos que $S_{\ell}(p)$ no es analítica pues $J_{\ell}(p)^*$ tampoco lo es. Sin embargo, podemos escribir a $S_{\ell}(p)$ como cociente de dos funciones analíticas.

Utilizando la ecuación (2.2.4) para p real, y la relación*

$$\phi_{\ell p}(\tau) \hat{h}_{\ell}^+(-p r) = -\phi_{\ell p}(\tau) \hat{h}_{\ell}^+(p r)^*, \quad p \text{ real}$$

*Ver Ref. (1) p. 217.

obtenemos,

$$J_\lambda(-p) = [J_\lambda(p)]^* \quad (2.2.6)$$

Lo cual podemos escribir, puesto que p es real, también como,

$$J_\lambda(p) = [J_\lambda(-p^*)]^* \quad (2.2.7)$$

Se puede demostrar que si $J_\lambda(p)$ es analítica, también lo es $[J_\lambda(-p^*)]^*$. Por tanto, por el principio de reflexión de Schwartz,* el resultado (2.2.7) es válido en toda la región en que $J_\lambda(p)$ es analítica, y podemos escribir a la matriz $S_\lambda(p)$ ec. (2.2.5) como,

$$S_\lambda(p) = \frac{J_\lambda(p^*)^*}{J_\lambda(p)} = \frac{J_\lambda(-p)}{J_\lambda(p)} \quad (2.2.8)$$

Como habíamos adelantado, en cualquiera de estas dos formas, $S_\lambda(p)$ es el cociente de dos funciones analíticas. Sin embargo, mientras que $J_\lambda(p)$ es analítica en la parte superior del plano complejo p , $J_\lambda(-p)$ lo es en la parte inferior. En otras palabras, a pesar de ser el cociente de dos funciones analíticas, $S_\lambda(p)$ no es analítica, pues las regiones de analiticidad de las dos primeras no coinciden. A pesar de esto, es posible hacerlas coincidir.

De la expresión integral para $J_\lambda(p)$ (2.2.4), vemos que se puede extender la región de analiticidad de $J_\lambda(p)$ haciendo que el potencial tienda más rápidamente a cero cuando $r \rightarrow \infty$. En particular, si el potencial es cortado, es decir

* Ver Ref. (1) p. 214.

si $V = 0$ a partir de algun valor finito de r , la integral obviamente converge y por tanto, $J_\ell(p)$ es analítica para toda p . En consecuencia $S_\ell(p)$ es analítica en todo el plano complejo excepto en puntos donde posiblemente tenga polos ($J_\ell(p) = 0$), es decir, $S_\ell(p)$ es meromorfa. Puesto que este es el caso que nos interesa, interrumpiremos aquí la discusión sobre la analiticidad de $S_\ell(p)$.

2.3. Polos de $S_\ell(p)$, resonancias y estados ligados.

Las funciones $\chi_{\ell p}^\pm(r)$ llamadas soluciones de Jost, se definen como las soluciones de la ecuación radial de Schrödinger que se comportan como $\hat{h}_\ell^\pm(pr)$ cuando $r \rightarrow \infty$. Las propiedades analíticas de $\chi_{\ell p}^\pm$ son analogas a las de $J_\ell(p)$ y $J_\ell(-p)$. $\chi_{\ell p}^+(r)$ es analítica en la parte superior del plano complejo y $\chi_{\ell p}^-(r)$ lo es en la parte inferior; estas regiones pueden ser extendidas imponiendo mayores restricciones al potencial.

Puesto que $\phi_{\ell p}(r)$ puede ser expresado como combinación lineal de $\chi_{\ell p}^+(r)$ y $\chi_{\ell p}^-(r)$ (al menos para p real donde ambas existen), y estas se comportan como $\hat{h}_\ell^+(pr)$ y $\hat{h}_\ell^-(pr)$ respectivamente; recordando el comportamiento asintótico de $\phi_{\ell p}$ ec. (2.1.28), obtenemos

$$\phi_{\ell p}(r) = \frac{1}{2} [J_\ell(p) \chi_{\ell p}^-(r) - J_\ell(-p) \chi_{\ell p}^+(r)] \quad (2.3.1)$$

De esta expresión calculamos el Wronskiano de $\chi_{\ell p}^+$ y $\phi_{\ell p}$ que resulta ser,

$$W(\chi_{\ell p}^+, \phi_{\ell p}) = P J_{\ell}(P)$$

y de aquí,

$$J_{\ell}(P) = \frac{1}{P} W(\chi_{\ell P}^+, \phi_{\ell P}) \quad (2.3.2)$$

La validez de este resultado se extiende a toda la parte superior del plano pues $\phi_{\ell p}(\gamma)$ es analítica en todo el plano y $\chi_{\ell p}^+$ lo es en la parte superior.

De (2.3.2) vemos que si $J_{\ell}(P)$ tiene un cero en $P = \bar{P}$, esto puede ocurrir si y solo si $W(\chi_{\ell \bar{P}}^+, \phi_{\ell \bar{P}}) = 0$ lo cual quiere decir que $\phi_{\ell \bar{P}}(\gamma) = \text{const.} \chi_{\ell \bar{P}}^+(\gamma)$ y como $\chi_{\ell \bar{P}}^+$ es una función que decae exponencialmente en $\{ \text{Im } P > 0 \}$ esto es, su cuadrado es integrable, $\phi_{\ell p}(\gamma)$ es una eigenfunción apropiada del Hamiltoniano. En consecuencia, el eigenvalor correspondiente \bar{P}^2 debe ser real, es decir, \bar{P} debe estar en el eje imaginario y ser de la forma $\bar{P} = i\alpha$ con $\alpha > 0$. Tenemos pues, el importante resultado de que: 1°) todos los ceros de $J_{\ell}(P)$ en la parte superior del plano están sobre el eje imaginario y 2°) cada uno de estos ceros corresponde a un estado ligado del sistema con momento angular ℓ y energía $\bar{P}^2 = -\alpha$. Es posible demostrar, además que estos ceros de $J_{\ell}(P)$ son simples*.

Esta correspondencia uno a uno entre estados ligados y ceros de $J_{\ell}(P)$ en la parte superior del plano puede ser vista también, puesto que $S_{\ell}(P) = \frac{J_{\ell}(-P)}{J_{\ell}(P)}$, como correspondencia entre estados ligados y polos de $S_{\ell}(P)$ siempre y cuando el potencial sea tal que permita la continuación analítica

de $J_2(-p)$ a la parte superior del plano.

El número de estados ligados, o bien, de ceros de $J_2(p)$ en $\{ \text{Im} p > 0 \}$ es finito pues toda función analítica tiene un número finito de ceros en el interior de cualquier región finita y la región en que $J_2(p)$ tiene ceros es finita pues $\lim_{|p| \rightarrow \infty} J_2(p) = 1$ * en $\{ \text{Im} p > 0 \}$ es decir, siempre es posible encontrar un radio ρ lo suficientemente grande tal que $J_2(p) > 0$ para toda p en $\{ \text{Im} p > 0 \}$ cuya magnitud sea mayor que ρ , entonces, los ceros de $J_2(p)$ deben estar en la región finita de radio ρ .

Antes de discutir los ceros de $J_2(p)$ o polos de $S_2(p)$ en la parte inferior del plano, mostraremos que $J_2(p)$ no tiene ceros reales. Para p real la ecuación (2.3.1) para $\Phi_{2p}(r)$ puede escribirse como

$$\Phi_{2p}(r) = \frac{i}{2} [J_2(p) \chi_{2p}^-(r) - J_2^*(p) \chi_{2p}^+(r)]$$

Entonces si $J_2(p) = 0$, también $J_2^*(p) = 0$, lo cual implica que $\Phi_{2p}(r) \equiv 0$. Sin embargo, esto no puede suceder ya que por definición $\Phi_{2p}(r) \xrightarrow{r \rightarrow 0} J_2(pr)$ y $J_2(pr) \xrightarrow{r \rightarrow 0} (pr)^{l+1}$ es decir, si $p \neq 0$, Φ_{2p} no puede ser idénticamente cero. Para $p = 0$ se puede demostrar** que: 1°) Si $l=0$ no existen estados ligados y 2°) si $l > 0$ sí puede haber estados ligados y estos corresponden a ceros de $J_2(p)$ en $p = 0$ es decir, tienen energía cero.

Los ceros de $J_2(p)$, o polos de $S_2(p)$, que se encuentran en la parte inferior del plano complejo no tienen la misma interpretación que los ceros de la parte superior.

* Ver Ref. (1) p. 227

**Ver Ref. (1) p. 232.

Aunque, análogamente al caso anterior, si $J_2(\bar{p}) = 0$ entonces $\phi_{\ell\bar{p}}(\gamma) = \text{const.} \cdot \chi_{\ell\bar{p}}^+(\gamma)$, ahora $\chi_{\ell\bar{p}}^+$ crece exponencialmente y por tanto $\phi_{\ell\bar{p}}$ no es normalizable. En consecuencia, \bar{p}^2 no es un eigenvalor del Hamiltoniano y \bar{p} no tiene por que ser imaginario puro.

Si \bar{p} no es imaginario, debido a que si $J_2(\bar{p}) = 0$ entonces $J_2(-p^*) = J_2^*(p) = 0$ los ceros de $J_2(p)$ ocurrirán simétricamente respecto al eje imaginario.

Estos ceros en $\{\text{Im } p < 0\}$ pueden ser asociados, bajo ciertas condiciones, a los fenómenos conocidos como resonancias. La manifestación más evidente de estos fenómenos se observa en las gráficas de sección eficaz total contra energía de algunos experimentos de dispersión, En ellas aparecen picos muy bien definidos para ciertos valores E_R de la energía, llamadas energías de resonancia.

Podemos describir el fenómeno de resonancia y su conexión con los ceros de $J_2(p)$ en $\{\text{Im } p < 0\}$ brevemente. Para que la descripción que sigue sea válida, es necesario que el potencial sea tal que permita la continuación analítica de $J_2(p)$ a la parte inferior del plano, en particular es válida para potenciales de alcance finito.

Supongamos que $J_2(p)$ tiene un cero simple en $\bar{p} = p_R - i p_I$ entonces podemos aproximar en una vecindad de \bar{p} a $J_2(p)$ como

$$J_2(p) \approx \left(\frac{dJ_2}{dp} \right)_{\bar{p}} (p - \bar{p}) \quad (2.3.3.)$$

Si \bar{p} se encuentra cerca del eje real, la aproximación (2.3.3) será válida en un intervalo real centrado en P_R . De la ecuación (2.1.31) obtenemos,

$$\begin{aligned} \delta_x(p) &= -\arg J_x(p) = -\arg \left[\left(\frac{dJ_x}{dp} \right)_{\bar{p}} (p - \bar{p}) \right] \\ &= -\arg \left(\frac{dJ_x}{dp} \right)_{\bar{p}} - \arg (p - \bar{p}) = \delta_{bg} + \delta_{res}(p) \end{aligned} \quad (2.3.4)$$

donde

$$\delta_{res}(p) = -\arg (p - \bar{p}) \quad (2.3.5)$$

δ_{bg} es llamada corrimiento de fase de fondo y $\delta_{res}(p)$ la parte resonante del corrimiento de fase. El ángulo δ_{res} es el que se muestra en la figura 1.

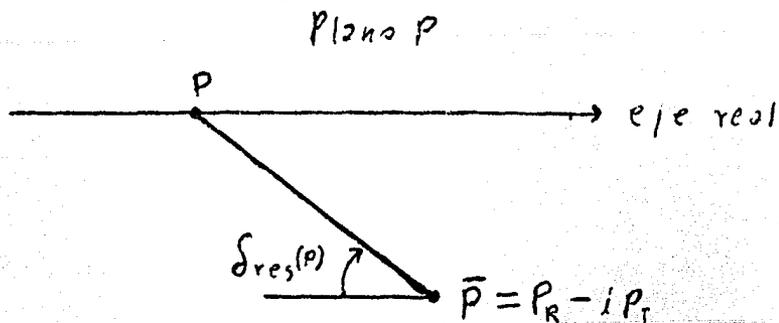


Fig. 1

Vemos en la figura que cuando p recorre el eje real físico $p > 0$ cruzando el valor P_R , $\delta_{res}(p)$ se incrementa aproximadamente de cero a π y este cambio es más repentino mientras más cerca está el cero \bar{p} del eje real. Este cambio abrupto de la fase es lo que define a las resonan-

cias y es el responsable de los picos que se observan en la sección eficaz. La forma precisa de ésta, depende del valor de δ_{bg} que puede ser cualquiera. El caso más simple, cuando $\delta_{bg} = 0$ da lugar a un pico centrado en P_R , pues este punto corresponde a $\delta_\ell(p) = \pi/2$, que es donde la sección parcial

$$\sigma_\ell(p) \approx \text{sen}^2 \delta_\ell(p)$$

Alcanza su máximo. Este tipo de resonancia se conoce como resonancia de Breit Wigner.

La descripción anterior se puede repetir, paso por paso, en función de la energía. Para esto se aproxima a $J_\ell(p)$ como

$$J_\ell(E) \approx \left(\frac{dJ_\ell}{dE} \right)_{\bar{E}} (E - \bar{E})$$

Donde $\bar{E} = E_R - i\Gamma/2$ es el cero de $J_\ell(E)$ en el plano de la energía y como $E = \bar{p}^2$,

$$E_R = P_R^2 - P_I^2 \quad \Gamma = 4P_R P_I \quad (2.3.6)$$

La figura correspondiente para δ_{res} en el plano E se obtiene de la Fig. 1 sustituyendo E por p , E_R por P_R y \bar{E} por \bar{p} . De ella se obtiene por trigonometría elemental

$$\text{Sen}(\delta_{res}(p)) = \frac{\Gamma/2}{[(E - E_R)^2 + (\Gamma/2)^2]^{1/2}}$$

sustituyendola en la expresión para σ_ℓ , para el caso en que

$$\delta_{bg} = 0, \text{ se obtiene}$$

$$\sigma_l(E) = \frac{4\pi(2l+1)}{E} \frac{(\Gamma/2)^2}{(E-E_R)^2 + (\Gamma/2)^2} \quad (2.3.7)$$

Esta es la conocida fórmula de Breit Wigner, de la cual se observa que σ_l tiene un pico en $E = E_R$ (el factor $1/E$ recorre el pico hacia la izquierda) de anchura Γ pues cuando $E = E_R \pm \Gamma/2$, $\sigma_l(E)$ disminuye a la mitad de su valor máximo.

Si se hace el estudio del fenómeno de resonancia usando paquetes de onda (es decir, usando la descripción dependiente del tiempo) se encuentra* un resultado analogo al caso usual en el que la amplitud de dispersión f varía lentamente en función de la energía. La diferencia entre ambos casos es que en el primero, cuando f es resonante, la onda dispersada viaja una distancia

$$\xi = \frac{d\delta_l}{dP} = v_0 \frac{d\delta_l}{dE}, \quad v_0 = \frac{P_R}{m}$$

atrás de la onda no dispersada, es decir, la onda dispersada es retrasada un tiempo

$$\tau = \xi/v_0 = \frac{d\delta_l}{dE} \quad (v_0 = P_R/m) \quad (2.3.8)$$

respecto a la onda no dispersada que evoluciona libremente. Es por esta razón que se interpreta la ocurrencia de una resonancia como la captura temporal del proyectil incidente en un estado meta estable del sistema, el cual decae y rechaza al proyectil después de un tiempo τ . Este tiempo es más grande mientras

* Ver Ref. (1) p. 249.

más definida sea la resonancia según lo afirma (2.3.8). La resonancia a su vez, es más definida conforme más fuerte sea la barrera de potencial que mantiene atrapado al proyectil. En el caso límite en que la barrera es infinitamente ancha, la resonancia se convierte en estado ligado. Por otro lado si la parte atractiva del potencial se varía, haciéndolo más profundo, la energía (positiva) de la resonancia se tornará menor cada vez, hasta llegar al punto en que el potencial sea lo suficientemente profundo para aceptar un estado ligado. En este punto, la resonancia se convierte en estado ligado. Este proceso, observado en función de los ceros de $J_\ell(\rho)$, o equivalentemente, de los polos de $S_\ell(\rho)$, indica que si el potencial es lo suficientemente atractivo, tendremos un cero de $J_\ell(\rho)$ en el eje imaginario positivo. Cuando el potencial se hace menos atractivo, el cero se moverá hacia abajo y cruzará el eje real a través del origen para convertirse, o bien en una resonancia si $\ell > 0$ o bien en un estado antiligado si $\ell = 0$ (o bien resonancia si el potencial tiene su propia barrera repulsiva), es decir, en un cero en la parte derecha de $\{\text{Im } \rho < 0\}$ con su cero simétrico en la parte izquierda, o bien en un cero sobre el eje imaginario negativo. Cuando $\ell > 0$, en realidad, hay dos ceros a bajas energías, debido a que el cero en el origen, $\rho = 0$, es doble. Uno de ellos está en el eje imaginario positivo y el otro en el negativo representan respectivamente, un estado ligado y un estado antiligado. Cuando el potencial se hace menos atractivo, los dos ceros se moverán hacia el origen y al coincidir allí, darán lugar a un estado liga-

do de energía cero. Si el potencial continua haciéndose más repulsivo, los ceros dejarán el origen tangencialmente, uno hacia la parte derecha de $\{ \text{Im } p < 0 \}$ y el otro hacia la parte izquierda. Un estudio completo del movimiento de los ceros de $J_n(p)$ o polos de $S_e(p)$ se puede encontrar en la Ref. (4)

CAPITULO III

DESARROLLO DE LA FUNCION DE ONDA EN ESTADOS RESONANTES

3.1.- Definición de Estados Resonantes

En esta sección introduciremos los llamados estados resonantes, con los cuales construiremos, en el resto del capítulo, un desarrollo para la función de onda en la parte interna de un potencial de corto alcance.

Los estados resonantes, pese a que solo recientemente han sido estudiados exhaustivamente y utilizados sistemáticamente⁵⁾, no son nuevos, de hecho su antigüedad se remonta hasta 1928 cuando Gamow⁶⁾ los utilizó en sus estudios sobre decaimiento α . La definición que de ellos daremos tampoco es nueva, ésto fue introducido por Siegert⁷⁾ en 1939.

En el resto de este trabajo nos limitaremos, por simplicidad, al caso de momento angular cero, el caso más general sigue a lo largo de las mismas líneas. Consideremos la ecuación radial de Schrödinger

$$\frac{d^2 U(r)}{dr^2} + [P^2 - V(r)] U(r) = 0 \quad (3.1.1)$$

La solución $U(r)$ satisface la condición usual de regularidad en el origen

$$U(0) = 0 \quad (3.1.2)$$

y si suponemos que el potencial $V(r)$ es de alcance finito

es decir que $V(r) = 0; r > a$

La solución $U(r)$ se comportará para $r > a$ como una combinación de e^{ipr} y e^{-ipr} . Ahora bien, el estado resonante es un estado que decae; es decir, la función de onda correspondiente debe contener solo ondas salientes pues no hay partículas incidentes. Esta condición de ausencia de ondas entrantes se puede escribir como

$$\frac{dU(r)}{dr} - ipU(r) = 0; r \geq a \quad (3.1.3)$$

Denotaremos por P_n a los eigenvalores del momento p para los cuales la ecuación (3.1.1) tenga una solución que satisfaga la condición (3.1.3) y por U_n a la función de onda correspondiente. Si recordamos la ecuación (2.3.2)

$$J(P) = \frac{1}{P} W(\chi_P^+, \phi_P)$$

Vemos que la definición de los estados resonantes a través de la condición (3.1.3), es equivalente a exigir que la función de Jost tenga un cero en P_n .

$$J(P_n) = 0 \quad (3.1.4)$$

Pues solo cuando esto sucede, la solución regular ϕ_P consta exclusivamente de ondas salientes, es decir

$$\phi_{P_n}^i = \text{const.} \chi_{P_n}^+(r) \quad (3.1.5)$$

De la discusión presentada en el capítulo anterior sobre la conexión de los ceros de la función de Jost $J(p)$ con los estados ligados y las resonancias, sabemos que los ceros asociados a estados resonantes son los que están en la parte inferior del plano complejo pues los de la parte superior corresponden a estados ligados. Aunque los estados ligados satisfacen la misma condición a la frontera (3.1.3) que los estados resonantes, existe entre ellos una diferencia básica. Los primeros representan eigenfunciones apropiadas (normalizables) del Hamiltoniano mientras que las eigenfunciones de los segundos no son normalizables en el sentido usual y tampoco son estacionarios. Sin embargo es posible dar a estos últimos una interpretación física:

Estado Resonante propio es aquel para el cual

$P_{nR} > P_{nI} > 0$, donde P_{nR} y $-P_{nI}$ son las partes real e imaginaria del cero de $J(p)$ correspondiente a ese estado es decir, $\bar{P}_n = P_{nR} - iP_{nI}$. Para esta clase de estados, las cantidades E_{nR} y Γ_n , definidas en el capítulo anterior a través de

$$\bar{E}_n = P_n^2 = E_{nR} - i \frac{\Gamma_n}{2} = P_{nR}^2 - P_{nI}^2 - 2i P_{nR} P_{nI}$$

son ambas positivas. Consideremos la forma asintótica de la función de onda $\psi_n(r)$ multiplicada por el factor de tiempo correspondiente,

$$U_n(r) e^{-i\bar{E}_n T} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} e^{i(\bar{P}_n r - \bar{E}_n T)}$$

que podemos escribir como

$$e^{i(P_{nR} r - E_{nR} T)} e^{-\frac{\Gamma_n}{2} T} e^{P_{nI} r} \quad (3.1.6)$$

El primer factor de esta expresión representa una onda saliente de momento P_{nR} asociada a un estado de energía positiva E_{nR} . El segundo factor muestra que este estado decae con el tiempo y el tercero que crece exponencialmente con r , lo que sabemos desde el capítulo anterior. Puesto que la velocidad de las partículas salientes es

$$v_n = \frac{P_{nR}}{1/2} = 2 P_{nR} \quad (3.1.7)$$

(pues usamos unidades en que $2m = 1$)

Las partículas que se observan a una distancia r y tiempo T cuando la amplitud es

$$e^{-\frac{\Gamma_n T}{2}} e^{P_{nI} r}$$

salieron del centro dispersor decayente ($r=0$) cuando el tiempo tenía el valor $T - r/v_n$ y la amplitud era

$$e^{-\frac{\Gamma_n}{2} \left(T - \frac{r}{v_n} \right)} e^0 = e^{\frac{\Gamma_n r}{2v_n}} e^{-\frac{\Gamma_n T}{2}}$$

sustituyendo el valor de v_n (3.1.7) y Γ_n por $4P_{nR} P_{nI}$ esta amplitud es

$$e^{-\frac{\Gamma_n T}{2}} e^{P_{nI} r}$$

la misma que en el tiempo T y distancia r . Por tanto el crecimiento exponencial con r de la función de onda del estado resonante, se explica por que encontramos a la distancia r , las partículas que fueron emitidas en un tiempo anterior en el cual la emisión de partículas era más intensa. Y lo era precisamente para el factor $e^{p_{nr} r}$, el mismo por el que las partículas a la distancia r son más abundantes.

Para finalizar esta sección, notemos que en el caso de estados ligados la expresión (3.1.6), puesto que $p_{nr} = 0$, se convierte en

$$e^{i p_{nr}^2 T} e^{-p_{nr} r}$$

que representa un estado estacionario de energía negativa $-p_{nr}^2$ que decae exponencialmente con r como era de esperarse.

3.2.- Función de Green y normalización de las funciones U_n

La función de Green saliente asociada a la ecuación (3.1.1) juega un papel central en el desarrollo para la función de onda interna que construimos. En esta sección mostraremos que los residuos de la función de Green en sus polos son proporcionales al producto $U_n(r) U_n(r')$, donde $U_n(r)$ denota tanto a funciones de onda asociadas a estados resonantes como estados ligados y antiligados. También obtendremos una normalización para los estados de energía compleja que se reduce a la normalización usual para los estados ligados.

La función de Green asociada a la ecuación (3.1.1) satisface la ecuación

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} G(r, r'; P) + [P^2 - V(r)] G(r, r'; P) = \delta(r - r') \quad (3.2.1)$$

y las condiciones a la frontera, de regularidad en el origen

$$G(0, r'; P) = 0 \quad (3.2.2)$$

y de onda saliente

$$\left[\frac{\partial}{\partial r} G(r, r'; P) - iP G(r, r'; P) \right]_{r=a_+, r' \leq a} \quad (3.2.3)$$

Donde $a_+ = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} a + \epsilon$, $\epsilon > 0$. En la vecindad de un polo simple P_n , la función de Green puede escribirse como

$$G(r, r'; P) = \frac{e_n(r, r')}{P - P_n} + \mathcal{F}(r, r'; P) \quad (3.2.4)$$

Donde $e_n(r, r')$ es el residuo de $G(r, r'; P)$ en P_n y $\mathcal{F}(r, r'; P)$ es regular en P_n . Sustituyamos (3.2.4) en (3.2.1). Acomodando los términos obtenemos

$$\frac{1}{P - P_n} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial r^2} e_n(r, r') + [P^2 - V(r)] e_n(r, r') \right\} + \left\{ \frac{\partial^2}{\partial r^2} \mathcal{F}(r, r'; P) + [P^2 - V(r)] \mathcal{F}(r, r'; P) - \delta(r - r') \right\} = 0 \quad (3.2.5)$$

sumando y restando $\frac{P_n^2}{P - P_n} e_n(r, r')$ se obtiene

$$\frac{1}{P-P_n} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial r^2} e_n(r, r') + [P_n^2 - V(r)] e_n(r, r') \right\} + \left\{ \frac{\partial^2}{\partial r^2} f(r, r'; P) + [P^2 - V(r)] f(r, r'; P) + (P+P_n) e_n(r, r') - \delta(r-r') \right\} = 0$$

Si tomamos el limite de esta expresi3n cuando $P \rightarrow P_n$ el t3rmino multiplicado por $1/(P-P_n)$ y el otro deben anularse separadamente, es decir

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} e_n(r, r') + [P_n^2 - V(r)] e_n(r, r') = 0 \quad (3.2.6)$$

y

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} f(r, r'; P_n) + [P_n^2 - V(r)] f(r, r'; P_n) + 2P_n e_n(r, r') - \delta(r-r') = 0 \quad (3.2.7)$$

tenemos ahora ecuaciones diferenciales para $e_n(r, r')$ y $f(r, r'; P_n)$, para conocer las respectivas condiciones a la frontera sustituimos (3.2.4) en (3.2.2) y (3.2.3). Procediendo como arriba se obtiene, en el origen,

$$e_n(0, r') = 0 \quad (3.2.8)$$

$$f(0, r'; P) = 0 \quad (3.2.9)$$

y en $r = a_+$

$$\left[\frac{\partial}{\partial r} e_n(r, r') - i P_n e_n(r, r') \right]_{r=a_+} = 0, \quad r' \leq a \quad (3.2.10)$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial r} f(r, r'; P) - i P_n f(r, r'; P_n) \right]_{r=a_+} = i \left[e_n(r, r') \right]_{r=a_+} \quad (3.2.11)$$

Observamos de estas expresiones que $\mathcal{E}_n(r, r')$ satisface la misma ecuación (3.2.6) y condiciones a la frontera (3.2.8) y (3.2.10) que la función $U_n(r)$, respectivamente ecs. (3.1.1), (3.1.2) y (3.1.3) por tanto \mathcal{E}_n y U_n deben ser proporcionales, es decir

$$\mathcal{E}_n(r, r') = U_n(r) P(r') \quad (3.2.12)$$

Para encontrar el factor de proporcionalidad $P(r')$ usamos la fórmula de Green entre las ecuaciones (3.1.1) y (3.2.7), es decir, multiplicamos (3.2.7) por U_n , (3.1.1) por \mathcal{E} , restamos las ecuaciones así obtenidas e integramos de $r=0$ a $r=a$ el resultado es

$$\begin{aligned} U_n(a) \mathcal{E}'(a, r'; P_n) - \mathcal{E}(a, r'; P_n) U_n'(a) + 2P_n \int_0^a P(r') U_n^2(r) dr &= \\ &= \int_0^a U_n \delta(r-r') dr \end{aligned}$$

Para llegar a esto utilizamos las condiciones en $r=0$, (3.1.2) y (3.2.9) y la ec. (3.2.12). Evaluando las derivadas en $r=a$ con las condiciones (3.1.3) y (3.2.11) y despejando $P(r')$ se obtiene

$$P(r') = \frac{U_n(r')}{2P_n \left\{ \int_0^a U_n^2(r) dr + i \frac{U_n^2(a)}{2P_n} \right\}} \quad (3.2.13)$$

En consecuencia, el residuo de la función de Green en el polo P_n es

$$\mathcal{E}_n(r, r') = \frac{U_n(r) U_n(r')}{2P_n \left\{ \int_0^a U_n^2(r) dr + i \frac{U_n^2(a)}{2P_n} \right\}} \quad (3.2.14)$$

que tiene la forma que habíamos anticipado. La expresión entre parentesis del denominador de $e_n(r, r')$ (3.2.14) sugiere como normalización para las U_n la condición

$$\int_0^a U_n^2(r) dr + \frac{i U_n^2(a)}{2 P_n} = 1 \quad (3.2.15)$$

La presencia de a en esta expresión no es importante, de hecho, cualquier valor de a lo suficientemente grande para que el potencial se anule, puede ser escogido. Para estados ligados podemos tomar el límite $a \rightarrow \infty$, entonces $U_n^2(a) \rightarrow 0$ y la condición (3.2.15) se convierte en la normalización usual

$$\int_0^{\infty} U_n^2(r) dr = 1$$

3.3.- Función de onda interna y Función de Green.

El desarrollo que estamos en proceso de construir para la función de onda física o normalizada ψ_p en la región $r < a$, se basa en la conexión que derivaremos en esta sección, de ψ_p con la función de Green saliente del problema.

La función de onda ψ_{sp} satisface la ecuación (2.1.20) que en onda S se convierte en

$$\frac{d^2}{dr^2} \psi_p(r) + [p^2 - V(r)] \psi_p(r) = 0 \quad (3.3.1)$$

también satisface la condición en el origen

$$\psi_p(0) = 0 \quad (3.3.2)$$

Y, como estamos usando un potencial cortado en $r = a$ su comportamiento asintótico (2.1.27) es

$$\psi_p(r) = \frac{1}{2} i \left[e^{-ipr} - s e^{ipr} \right], \quad r \geq a \quad (3.3.3)$$

Para escribir (3.3.3) utilizamos el hecho de que las funciones

$$\hat{h}_p^\pm(pr) \quad \text{para } l=0 \text{ son } e^{\pm ipr}.$$

Para encontrar la conexión entre $\psi_p(r)$ y $G(r, r'; p)$ usamos la fórmula de Green entre las ecuaciones (3.3.1) y (3.2.1).

Integrando de $r = 0$ a $r = a_+$ obtenemos

$$\left[\psi_p(r) G'(r, r'; p) - G(r, r'; p) \psi_p'(r) \right]_{r=0}^{r=a_+} = \psi_p'(r')$$

Utilizando las condiciones de regularidad en el origen de ψ_p y G ecs. (3.3.2) y (3.2.2) y la condición de onda saliente de G ec. (3.2.3), así como la propiedad de simetría de la función de Green, la expresión de arriba se convierte en

$$\psi_p(r) = G(r, a_+; p) \left[i p \psi_p(a_+) - \psi_p'(a_+) \right], \quad r \leq a \quad (3.3.4)$$

Donde cambiamos r' por r . Para evaluar la expresión entre parentesis de la ec. (3.3.4), que depende solo del punto $r = a$, utilizamos la forma asintótica de ψ_p ec. (3.3.3) haciendo esto se obtiene

$$\psi_p(r) = -G(r, a; p) P e^{-i p a}, \quad r \leq a \quad (3.3.5)$$

Esta es la relación entre la función de onda interna y la función de Green saliente. De ella vemos que si obtenemos un desarrollo para la función de Green estaremos obteniendo también un desarrollo para ψ_p en la región $r \leq a$. Si desarrollamos a la función de Green en términos de sus polos en el plano de la energía o del momento, obtendremos un desarrollo para ψ_p en términos de las eigenfunciones $U_n(r)$ asociadas a los estados resonantes, ligados y antiligados pues, como vimos en la sección anterior los residuos de la función de Green en sus polos, son precisamente las funciones $U_n(r)$.

En la próxima sección obtendremos este desarrollo de ψ_p en términos de las funciones U_n . Antes de proceder a ello, obtendremos una relación entre la matriz S y la función de Green valuada en $r = a$, que nos será útil más adelante. Esta relación fue derivada por Bloch⁸⁾ y se obtiene inmediatamente sustituyendo la expresión (3.3.3) valuada en $r = a$ en la ecuación (3.3.5),

$$S = [1 - 2i p G(a, a; p)] e^{-2i p a} \quad (3.3.6)$$

Esta expresión nos dice que para determinar la matriz S basta conocer la función de Green en $r = r' = a$.

La función de Green $G(r, r'; p)$, para la mayoría de los potenciales de interés, tiene la misma distribución de polos que la matriz S y, puesto que $S = \frac{f(-p)}{f(p)}$, los

polos de la función de Green son los ceros de la función de Jost $J(\rho)$. En particular, la expresión (3.3.6) indica que esto es cierto para el caso que estamos considerando.

3.4.- Desarrollo de la función de onda ψ_ρ en la región interna.

El desarrollo de la función de Green en términos de sus polos surge de una simple aplicación del teorema del residuo* . Este teorema afirma que si $f(z)$ es una función analítica en una región R y C es una trayectoria simple, cerrada, contenida en R y en cuyo interior existe solo un número finito de puntos singulares, entonces

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C f(z) dz = \begin{cases} \text{suma de los residuos de } f(z) \text{ en los} \\ \text{puntos singulares encerrados por } C \end{cases} \quad (3.4.1)$$

Para una gran clase de potenciales la función de Green es meromorfa en el plano P , es decir, analítica excepto en el conjunto formado por los polos. Ciertamente lo es para el potencial que estamos considerando, pues como ya vimos, si el potencial es nulo a partir de cierto valor de r , la función de Jost es analítica en todo el plano, en consecuencia, la matriz S y la función de Green, también lo son excepto en los puntos en que la función de Jost se anula. Además, como toda función analítica tiene solo un número finito de ceros en cualquier región finita, la función de Green tendrá un número finito de polos en cualquier región finita. Tomando esto en cuenta, podemos aplicar el teorema del residuo a la integral

* Ver Ref. (9) p. 130.

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{G(r, a; P')}{P' - P} dP' \quad (3.4.2)$$

Donde C es un círculo grande de radio R con centro en el origen. Según el teorema del residuo la integral (3.4.2) es

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{G(r, a; P')}{P' - P} dP' = \begin{cases} \text{suma de los residuos de } \frac{G(r, a; P)}{P' - P} \\ \text{en los polos encerrados por } C \end{cases} \quad (3.4.3)$$

Los polos del integrando encerrados por C son un número finito, digamos N , de polos de la función de Green $G(r, a; P)$ y el punto $P' = P$. Los residuos del integrando en los primeros ya los calculamos antes, Sec. 3.2. El residuo del integrando en el polo $P' = P$ es

$$\text{Res} \left\{ \frac{G(r, a; P')}{P' - P} \right\}_{P'=P} = \lim_{P' \rightarrow P} (P' - P) \frac{G(r, a; P')}{P' - P}$$

es decir

$$\text{Res} \left\{ \frac{G(r, a; P')}{P' - P} \right\}_{P'=P} = G(r, a; P) \quad (3.4.4)$$

sustituyendo este valor en (3.4.3) tenemos

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{G(r, a; P')}{P' - P} dP' = \sum_{n=1}^N \frac{\epsilon_n}{P_n - P} + G(r, a; P) \quad (3.4.5)$$

Donde ϵ_n son los residuos de G calculados antes ec. (3.2.14)

los cuales, considerando la normalización (3.2.15), podemos es-

cribir como

$$e_n(r, a) = \frac{U_n(r) U_n(a)}{2 P_n} \quad (3.4.6)$$

combinando las ecs. (3.4.6) y (3.4.5) obtenemos

$$G(r, a; P) = \sum_{n=1}^N \frac{U_n(a) U_n(r)}{2 P_n (P - P_n)} + \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{G(r, a; P')}{P' - P} dP' \quad (3.4.7)$$

Sustituyendo esta expresión en la ec. (3.3.5) obtenemos para la función de onda ψ_P en la región $r \leq a$

$$\psi_P(r) = \sum_{n=1}^N c_n U_n(r) + \frac{P e^{-ipa}}{2\pi i} \int_C \frac{G(r, a; P')}{P - P'} dP' \quad (3.4.8)$$

Donde el coeficiente c_n es

$$c_n = \frac{P e^{-ipa} U_n(a)}{2 P_n (P_n - P)} \quad (3.4.9)$$

Como podemos ver en (3.4.8), el desarrollo obtenido para la función de onda en la región interna $\{r \leq a\}$, consta de un número finito de términos discretos y de un término integral. El número N de términos discretos, claramente es función del radio R de la trayectoria C de integración pues a mayor tamaño de R corresponde un mayor número de polos de $G(r, a, P)$ contenidos en el interior de C . Puesto que el número de polos de $G(r, a; P)$ para un potencial de alcance finito, es infinito*, si hacemos tender R a infinito tendremos un número infinito de términos dis-

*Ver Ref. (3) p. 361.

cretos en el desarrollo de ψ_P . Para tener un desarrollo puramente discreto, la contribución integral en (3.4.8) debe desaparecer en el límite $R \rightarrow \infty$, para que esto suceda es suficiente que

$$G(r, a; P) \rightarrow 0 \text{ cuando } |P| \rightarrow \infty$$

por tanto, para saber en que casos desaparece el término integral, debemos investigar el comportamiento de $G(r, a; P)$ cuando el momento tiende a infinito. Para esto aprovecharemos los resultados obtenidos por Peierls¹⁰⁾ al estudiar el comportamiento de la matriz S cuando P tiende a infinito. Vale la pena hacer notar que los resultados obtenidos por Peierls se refieren a potenciales cortados cuyo valor en el punto de corte es distinto de cero. La mayoría de los potenciales de interés satisfacen esa condición, además, todos los potenciales de largo alcance se pueden cortar de acuerdo a ella.

Para utilizar los resultados de Peierls haremos uso de la relación entre la matriz S y la función de Green valuada en $r = r' = a$, $G(a, a; P)$ obtenida anteriormente ec. (3.3.6)

$$G(a, a; P) = \frac{1}{2\pi i} \left[1 - S(P) e^{2ipa} \right] \quad (3.4.10)$$

De la ecuación (3.3.5) obtenemos otra relación que nos será muy útil,

$$G(r, a; P) = G(a, a; P) \frac{\psi_P(r)}{\psi_P(a)}, \quad r \leq a \quad (3.4.11)$$

Los resultados citados obtenidos por Peierls para potenciales de alcance finito son que la matriz $S(P)$ se comporta para grandes valores de P como $4P^2 e^{-2iPa}$ en la parte inferior del plano P y como $e^{-2iPa}/4P^2$ en la parte superior. De lo anterior y la ec. (3.4.10) resulta que $G(a, a; P)$ para P grande, es proporcional a P en la parte inferior del plano P mientras que en la parte superior es proporcional a $1/P$. Además, puesto que para P real $S(P)$ tiende a la unidad* cuando P tiende a infinito, de la ec. (3.4.10) vemos que $G(a, a; P)$ tiende a cero cuando $P \rightarrow \infty$ a lo largo del eje real.

Necesitamos ahora conocer el comportamiento del factor $\psi_P(r)/\psi_P(a)$ de la expresión (3.4.11) para obtener el comportamiento de $G(r, a; P)$. Debido a que según la ec. (2.2.29)

$$\frac{\psi_P(r)}{\psi_P(a)} = \frac{\phi_P(r)}{\phi_P(a)} \quad (3.4.12)$$

Podemos utilizar el comportamiento de $\phi_P(r)/\phi_P(a)$ cuando $P \rightarrow \infty$ para conocer el de $\psi_P(r)/\psi_P(a)$. Esto resulta muy conveniente gracias a la analiticidad de ϕ_P en el plano P . La expresión integral para $\phi_P(r)$ ec. (2.2.1) para el caso de ondas S se convierte en

$$\phi_P(r) = \text{Sen } Pr + \int_0^r dr' \text{Sen } P(r-r') V(r') \phi_P(r') \quad (3.4.13)$$

* Ver Ref. (1) p. 192.

Es posible demostrar* que cuando $|P| \rightarrow \infty$ la integral, que describe el efecto de la interacción, tiende a cero (esto es válido para potenciales más generales que el que estamos considerando), es decir, que $\phi_p(r)$ tiende a su valor en ausencia de interacción

$$\phi_p(r) = \text{Sen } Pr, \quad |P| \rightarrow \infty \quad (3.4.14)$$

sustituyendo (3.4.14) en (3.4.12) tenemos

$$\frac{\psi_p(r)}{\psi_p(a)} = \frac{\text{Sen } Pr}{\text{Sen } Pa} \quad r \leq a \quad (3.4.15)$$

Para el caso $r < a$, escribiendo $\text{Sen } Pr$ y $\text{Sen } Pa$ como exponenciales, se encuentra que en la parte superior del plano, $\{ \text{Im } P > 0 \}$,

$$\frac{\psi_p(r)}{\psi_p(a)} \xrightarrow{|P| \rightarrow \infty} e^{-\text{Im } P(a-r)}$$

y en la parte inferior, $\{ \text{Im } P < 0 \}$,

$$\frac{\psi_p(r)}{\psi_p(a)} \xrightarrow{|P| \rightarrow \infty} e^{\text{Im } P(a-r)}$$

Es decir, tanto en la mitad superior como inferior del plano \mathcal{P} , el factor $\psi_p(r)/\psi_p(a)$ decae a cero exponencialmente. Es claro también que esta cantidad oscila indefinidamente a lo largo del eje real. Puesto que $G(a, a; P)$ divergía sólo como P en la parte inferior del plano \mathcal{P} , tenemos que a lo largo de

* Ver Ref. (3) p. 332.

cualquier dirección en el plano \mathcal{P} la función de Green

$G(r, a; p)$ tiende a cero cuando el momento tiende a infinito, es decir,

$$G(r, a; p) \rightarrow 0 \quad \text{cuando} \quad |p| \rightarrow \infty \quad \text{y} \quad r < a \quad (3.4.16)$$

Y por tanto la contribución integral de la expresión (3.4.8) desaparece cuando el radio R de la trayectoria tiende a infinito.

En consecuencia tenemos el resultado

$$\psi_p(r) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n U_n(r) \quad r < a \quad (3.4.17)$$

Donde los coeficientes c_n están dados por la ec. (3.4.9). Este desarrollo para ψ_p en estados resonantes, ligados y anti-ligados es válido sólo para $r < a$ como explícitamente se indica en (3.4.16) y (3.4.17).

En el caso $r = a$ la expresión (3.4.8) se puede escribir como

$$\psi_p(a) = \sum_{n=1}^N c_n U_n(a) + \frac{p e^{-i p a}}{2 \pi i} \int_C \frac{G(a, a; p')}{p - p'} dp' \quad (3.4.18)$$

Como encontramos arriba, la función de Green $G(a, a; p')$ diverge como p' en la parte inferior del plano \mathcal{P} lo cual implica que si tratamos de incluir un número infinito de polos en la suma de (3.4.18) a través de hacer tender el radio R de la trayectoria de integración a infinito, la integral de (3.4.18) divergirá. Por tanto, si queremos obtener un desarrollo puramente

discreto de ψ_p en $r = a$ debemos introducir un factor de convergencia proporcional a $1/p^2$ en la integral para que ésta converja a cero al hacer tender p a infinito, es decir, debemos introducir dos substracciones.

El desarrollo de ψ_p con dos substracciones se obtiene mediante el procedimiento ya descrito partiendo del teorema del residuo. La integral que debemos evaluar ahora es

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{1}{p'^2} \frac{G(r, a; p')}{p' - p} dp' \quad (3.4.19)$$

Donde hemos introducido ya el factor apropiado para que el integrando converja a cero también en $r = a$. Como antes, el integrando tiene polos en los polos de $G(r, a; p')$ y en el punto $p' = p$ pero ahora tenemos adicionalmente un polo doble en $p' = 0$. Con el método utilizado antes para evaluar los residuos obtenemos,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{1}{p'^2} \frac{G(r, a; p')}{p' - p} &= \sum_{n=1}^N \frac{e_n}{p_n^2 (p_n - p)} + \frac{G(r, a; p)}{p'} + \\ &+ \text{Res} \left\{ \frac{G(r, a; p')}{p'^2 (p' - p)} \right\}_{p'=0} \end{aligned} \quad (3.4.20)$$

En esta expresión, e_n , el residuo de la función de Green, está dado por la ec. (3.4.6) y el último término no se puede evaluar por el método que hemos utilizado porque el polo es do-

A PARTIR DE

ESTA PAGINA

**FALLA
DE
ORIGEN**

ble, por tanto, lo haremos utilizando la expresión general* para los residuos

$$\operatorname{Res} \left\{ \frac{G(r, a; p')}{p'^2(p' - p)} \right\}_{p'=0} = \int_{C_0} \frac{G(r, a; p')}{p'^2(p' - p)} \quad (3.4.21)$$

donde C_0 es una trayectoria pequeña que contiene el punto $p' = 0$. La integral que aparece en (3.4.21) se evalúa utilizando la conocida fórmula integral para la derivada** según la cual

$$f'(z_c) = \frac{1}{2\pi i} \int_K \frac{f(z)}{(z - z_c)^2} dz$$

Aplicando este resultado a la integral (3.4.21) obtenemos

$$\int_{C_0} \frac{G(r, a; p')}{p'^2(p' - p)} = \frac{d}{dp'} \left[\frac{G(r, a; p')}{p' - p} \right]_{p'=0} \quad (3.4.22)$$

Calculando la derivada y evaluandola en $p' = 0$, tenemos finalmente

$$\int_{C_0} \frac{G(r, a; p')}{p'^2(p' - p)} = - \frac{G(r, a; 0)}{p^2} = - \frac{G'(r, a; 0)}{p} \quad (3.4.23)$$

El resultado (3.4.23) nos dá las dos substracciones que contendrá el nuevo desarrollo para $\psi_F(r)$. Sustituyendo (3.4.23) en la ec. (3.4.20) y ésta a su vez en la ec. (3.3.5) obtenemos

* Ver Ref. (9) p. 130

** Ver Ref. (9) p. 62.

CAPITULO IV

POTENCIAL DELTA

4.1 Introducción y solución exacta.

En el capítulo anterior quedo establecido que existe un desarrollo para la función de onda ψ_p en la región interna de un potencial de alcance finito, consistente en una suma discreta e infinita de eigenfunciones correspondientes a estados resonantes* multiplicados por los coeficientes apropiados.

En este capítulo y el siguiente nos proponemos investigar si además de su interés teórico, el anterior resultado tiene también algún interés práctico. Concretamente estudiaremos la posibilidad de que el mencionado resultado nos proporcione un método de aproximar la función de onda en la región interna de un potencial de alcance finito. Para ello, aplicaremos el resultado, considerando un número finito de términos en la suma, a dos potenciales exactamente solubles con el fin de poder comparar la función de onda exacta con la función de onda obtenida mediante la suma finita. En este capítulo estudiaremos el potencial delta y en el próximo, el potencial picasso**. Expondremos en estos dos capítulos los resultados numéricos respectivos y en el capítulo VI los discutiremos y presentaremos las conclusiones.

En lo que resta de esta sección obtendremos la función de onda exacta en la región interna para el potencial Delta, es decir, para el potencial

* También a estados ligados y antiligados, si los hay.

** Forma breve de designar al potencial consistente en un pozo cuadrado entre $r = 0$ y $r = a$ y una delta de Dirac en $r=a$.

$$V = \lambda \delta(r-a) \quad (4.1.1)$$

Podemos obtener la función de onda ψ_p en la región interna $\{r < a\}$ en la forma convencional, es decir, resolviendo la ecuación radial de Schrödinger en la región interna y externa del potencial y uniendo las soluciones así obtenidas y sus derivadas* en $r = a$ para conocer los coeficientes correspondientes. Sin embargo, resulta más económico obtener ψ_p aprovechando lo visto en el capítulo II. Primero obtenemos la solución regular ϕ_p . La ecuación radial para la región $\{r < a\}$, en la cual el potencial se anula, es

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + p^2 \right] \phi_p(r) = 0 \quad (4.1.2)$$

La solución general de esta ecuación es una combinación de $\text{Sen}(pr)$ y $\text{Cos}(pr)$ pero, por definición, la solución regular se comporta, cerca del origen, exactamente como \hat{J}_0 (la función de Riccati-Bessel correspondiente a $l = 0$). Puesto que $\hat{J}_0(pr) = \text{Sen } pr$ tenemos que

$$\phi_p(r) = \text{Sen } pr, \quad r < a \quad (4.1.3)$$

Ahora, utilizando la ec. (2.2.4) calculamos la función de Jost J para el potencial delta. Puesto que $\hat{h}_0^+ = e^{ipr}$ tenemos

* En realidad, debido a que el potencial es discontinuo en $r = a$, la condición a satisfacer en este punto por la derivada de la función de onda es

$$\psi_p'(a_+) - \psi_p'(a_-) = \lambda \psi_p(a)$$

$$J(p) = 1 + \frac{\lambda}{p} \int_0^{\infty} dr e^{ipr} \lambda \delta(r-a) \operatorname{sen} pr \quad (4.1.4)$$

Por las propiedades de la función delta de Dirac inmediatamente obtenemos de (4.1.4)

$$J(p) = 1 + \frac{\lambda}{p} e^{ipa} \operatorname{sen} pa \quad (4.1.5)$$

Finalmente, haciendo uso de la ec. (2.1.29) tenemos la solución física ψ_p exacta

$$\frac{\psi(r)}{p} = \frac{\phi_p(r)}{J(p)} = \frac{1}{1 + \frac{\lambda}{p} e^{ipa} \operatorname{sen} pa} \operatorname{sen} pr, \quad r \leq a \quad (4.1.6)$$

Conociendo la función de Jost (4.1.5) podemos encontrar inmediatamente la matriz S y la función de Green $G(a, a; p)$ del problema. De la ec. (2.1.30) tenemos

$$S(p) = \frac{J(-p)}{J(p)} = \frac{1 + \frac{\lambda}{p} e^{-ipa} \operatorname{sen} pa}{1 + \frac{\lambda}{p} e^{ipa} \operatorname{sen} pa}$$

que puede escribirse también como

$$S(p) = \frac{-ip - p \cot pa - \lambda}{ip - p \cot pa - \lambda} e^{-2ipa} \quad (4.1.7)$$

De la ecuación (3.3.6) tenemos, para la función de Green,

$$G(a, a; p) = \frac{1}{ip - p \cot pa - \lambda} \quad (4.1.8)$$

$$\psi_p(r) = -p e^{-ipa} \left[G(r, a; 0) + P G'(r, a; 0) \right]$$

$$\sum_{n=1}^N \frac{p^2 e_n}{P_n^2 (P - P_n)} + \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{G(r, a; p')}{p'^2 (p' - p)} dp'$$

Haciendo tender el radio R de la trayectoria de integración a infinito, la anterior expresión se convierte en

$$\psi_p(r) = -p e^{-ipa} \left[G(r, a; 0) + P G'(r, a; 0) + p^3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n(a) U_n(r)}{2P_n^3 (P - P_n)} \right] \quad (3.4.24)$$

Donde sustituimos el valor (3.4.6) de f_n . El desarrollo (3.4.24) para $\psi_p(r)$ es válido para $r < a$ sin embargo queremos recalcar que para $r < a$ no son necesarias las substracciones y en esta región el desarrollo más sencillo (3.4.17) es suficiente.

El material expuesto en este capítulo es básicamente el contenido de los artículos citados como referencias (11) y (12), principalmente éste último.

La ecuación que satisfacen los ceros P_n de la función de Jost, o equivalentemente, la ecuación que satisfacen los polos de la matriz S y la función de Green G , de las expresiones anteriores vemos que es

$$iP_n - P_n \cot P_n a - \lambda \quad (4.1.9)$$

4.2.- Desarrollo de la solución en estados resonantes.

En esta sección estableceremos el desarrollo obtenido en el capítulo 3 para la solución ψ_p correspondiente al potencial que estamos considerando. El desarrollo es el siguiente

$$\psi_p(r) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{P e^{-ipa} U_n(a) U_n(r)}{2P_n(P_n - P)}, \quad r < a \quad (4.2.1)$$

En el caso particular que estamos considerando las funciones $U_n(r)$ satisfacen la ecuación

$$\frac{d^2}{dr^2} U_n(r) + P_n^2 U_n(r) = 0, \quad r < a \quad (4.2.2)$$

pues en la región $r < a$ el potencial es nulo. La solución de esta ecuación es una combinación de seno y coseno pero como la función $U_n(r)$ es regular en el origen, la solución de (4.2.2) es

$$U_n(r) = A_n \text{Sen } P_n r, \quad r \leq a \quad (4.2.3)$$

El eigenvalor P_n es tal que la función (4.2.3) satisface la condición de onda saliente (3.1.3) o equivalentemente, P_n es una solución de la ecuación (4.1.9).

El coeficiente A_n que aparece en (4.2.3), se fija de manera que la función $U_n(r)$ satisfaga la normalización (3.15), que en nuestro caso significa lo siguiente

$$\int_0^a A_n^2 \text{Sen}^2 P_n r dr + \frac{i A_n^2 \text{Sen}^2 P_n a}{2 P_n} = 1 \quad (4.2.4)$$

Resolviendo la integral y después de un poco de álgebra se llega a la ecuación

$$\frac{A_n^2}{2 P_n} \left[P_n a - \text{Sen} P_n a e^{-i P_n a} \right] = 1 \quad (4.2.5)$$

factorizando el término $\text{Sen} P_n a$ y utilizando el hecho de que P_n satisface la ec. (4.1.9) se llega finalmente a

$$A_n^2 = \frac{-2 P_n}{(\lambda e^{i P_n a} + e^{-i P_n a}) \text{Sen} P_n a} \quad (4.2.6)$$

utilizando (4.2.6) en (4.2.3) encontramos que

$$U_n(a) U_n(r) = A_n^2 \text{Sen} P_n a \text{Sen} P_n r = \frac{-2 P_n}{\lambda e^{i P_n a} + e^{-i P_n a}} \text{Sen} P_n r \quad (4.2.7)$$

Finalmente, sustituyendo el resultado (4.2.7) en el desarrollo (4.2.1) obtenemos

$$\Psi_p(r) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{P e^{-i p r} \text{Sen} P_n r}{(P - P_n) (\lambda e^{i P_n a} + e^{-i P_n a})}, \quad r < a \quad (4.2.8)$$

Este resultado evidentemente es exacto si se toma un número infinito de términos en la suma, sin embargo, si la suma (4.2.8) converge lo suficientemente rápido, un número finito de términos de la suma nos dará una buena aproximación para $\psi_p(r)$. Como anunciamos al principio del capítulo, consideremos sumas finitas (parciales) de (4.2.8) para comparar con ψ_p exacta y así encontrar las condiciones bajo las cuales ψ_p puede ser aproximada mediante sumas finitas de (4.2.8). Esto lo haremos en la siguiente sección.

4.3.- Resultados

Antes de proceder a evaluar las sumas finitas de (4.2.8) es necesario que conozcamos los polos P_n que aparecen en ellas. Los polos P_n satisfacen la ecuación (4.1.9)

$$iP_n - P_n \cot P_n - \lambda = 0 \quad (4.3.1)$$

En la cual hemos escogido $a = 1$. Esta ecuación no puede ser resuelta exactamente para P_n pero existen métodos para aproximar sus raíces tanto como se quiera. El método usado en este trabajo es el de Newton-Raphson¹³⁾ que es un proceso iterativo que nos da la N - esima aproximación de P_n en términos de la N-1-esima mediante

$$P_n^N = P_n^{N-1} - \frac{F(P_n^{N-1})}{F'(P_n^{N-1})} \quad (4.3.2)$$

Donde $F(P_n^{N-1})$ es la parte izquierda de la ec. (4.3.1) evaluada en P_n^{N-1} y $F'(P_n^{N-1})$ es su derivada. El proceso iterativo se inicia cuando sustituimos una primera aproximación P_n^0 , encontrada por algún medio, en (4.3.2) la cual nos da P_n^1 éste, a su vez, se sustituye en (4.3.2) para obtener P_n^2 , etc.

Con el método esbozado arriba calcumos 100 polos de la matriz S para el potencial delta correspondiente a $\lambda = 100$. Estos 100 polos se encuentran en el cuarto cuadrante del plano p . Puesto que los polos de la parte inferior del plano p son simétricos respecto al eje imaginario, podemos obtener otros 100 polos reflejando a través del eje imaginario los 100 polos ya calculados.

La precisión con que fueron calculados los polos es de 9 decimales y como valores iniciales utilizamos los obtenidos en la ref. (14) siguiendo las líneas indicadas por Nussenzweig¹⁴⁾. Estos valores están dados por

$$P_n^0 = P_{Rn}^0 - i P_{In}^0 = \frac{n\pi}{a} + \frac{1}{2} \tan^{-1} \left(\frac{\frac{-2n\pi}{\lambda}}{1 - \frac{2P_{In}^0}{\lambda}} \right) - i P_{In}^0 \quad (4.3.3)$$

Donde P_{In}^0 resulta a su vez de otro proceso de iteración propuesto por Bruijn¹⁵⁾, según el cual,

$$P_{In}^{0(r)} = \frac{1}{4a} \ln \left[\left(\frac{2n\pi}{\lambda} \right)^2 + \left(1 - 2P_{In}^{0(r-1)} \right)^2 \right] \quad (4.3.4)$$

y el primer valor $P_{rn}^{(0)}$ para este proceso es,

$$P_{rn}^{(0)} = \frac{1}{a} \ln \left(\frac{2n\pi}{\lambda} \right) \quad (4.3.5)$$

Bastan muy pocas iteraciones para obtener una buena aproximación de $P_{rn}^{(0)}$ por este método.

En la tabla 4.1 se muestran los primeros 25 polos del cuarto cuadrante. Como mencionamos antes, reflejando éstos a través del eje imaginario, se obtienen 25 polos situados en el tercer cuadrante.

Sustituyendo los valores calculados de los polos P_n en (4.2.8) podemos evaluar sumas parciales de (4.2.8) de distintos órdenes, es decir, podemos aproximar $\psi_p(r)$ por sumas finitas que contengan distintos números de términos. Por otro lado, conocemos exactamente a $\psi_p(r)$, ec. (4.1.6). En las tablas 4.2, 4.3 y 4.4, comparamos los valores exactos de ψ_p con las aproximaciones dadas por las sumas finitas de (4.2.8) a las cuales denotaremos por ψ_p aprox. Cada tabla está calculada para un valor del momento p , tres valores de la posición τ , y cuatro valores de N , el número de términos que incluye la suma finita. Cada término de la suma corresponde evidentemente a un polo P_n , en estas tres tablas los polos están ordenados alternadamente, es decir, el primer término de cada suma corresponde al primer polo derecho P_1 , el segundo término corresponde al primer polo izquierdo $P_2 = -P_1^*$, etc.

Como podemos ver en la tabla 4.1, la tabla 4.4 fué calculada para el valor del momento correspondiente a la primera resonancia, es decir, al valor $P = P_{1R} = 3.1105268$.

Es interesante también construir tablas análogas a las anteriores considerando solo términos correspondientes a polos derechos pues, observando la construcción del desarrollo para ψ_p hecha en el capítulo III, resulta claro que podemos repetirla de manera que en el desarrollo resultante solo aparezcan polos derechos, por ejemplo integrando $\frac{G(r, a; p')}{p-p'}$ a lo largo de la trayectoria que se muestra en la figura 2.

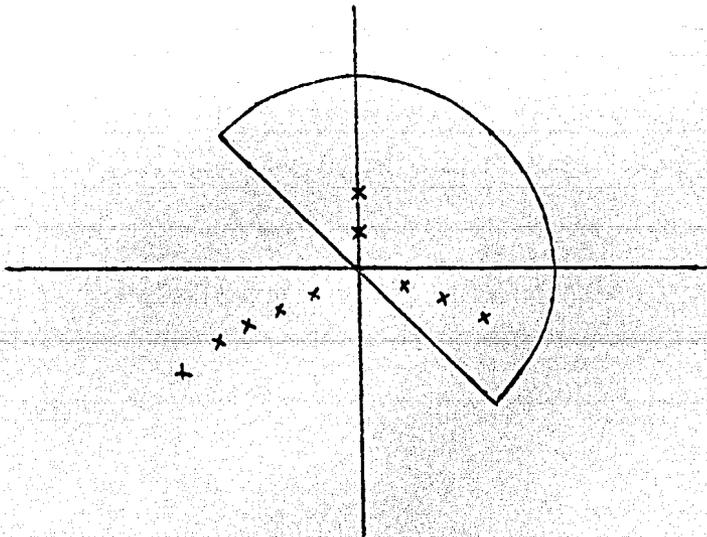


Fig. 2

Puesto que el interior de esta trayectoria no incluye a ningún polo izquierdo, el desarrollo de $G(r, a; p)$ no contendrá términos correspondientes a ellos. El interés de las tablas arriba mencionadas es conocer cual de los dos desarrollos, es decir el que contiene polos derechos e izquierdos alternados o el que solo contiene polos derechos, converge más rápidamente. Las tablas 4.5, 4.6 y 4.7 comparan a ψ_p exacta con ψ_p aprox. considerando polos derechos únicamente.

En las tablas 4.4 y 4.7 hemos considerado el comportamiento de Ψ_P aprox. para el momento correspondiente a la primera resonancia. Esta resonancia es la más definida de todas las posibles para el sistema bajo estudio pues, el polo al cual está asociada es el más cercano al eje real. Es probable que el comportamiento de Ψ_P aprox. para valores de P correspondientes a resonancias menos definidas, más anchas, difiera del comportamiento de Ψ_P aprox. en la primera resonancia. Para estudiar esta posibilidad, en la tabla 4.8 comparamos Ψ_P aprox. con Ψ_P exacta para el valor de P correspondiente a la tercera resonancia. El primer término de Ψ_P aprox. corresponde no al primer polo sino al tercero, que es el asociado a la tercera resonancia.

Para finalizar este capítulo, utilizaremos Ψ_P aprox. para evaluar una cantidad de interés físico. La cantidad que utilizaremos es

$$\int_0^a dr |\Psi_P(r)|^2 \quad (4.3.6)$$

Esta cantidad, interesante en sí misma puesto que es proporcional a la probabilidad de que la partícula incidente se encuentre en la región interna $\{r < a\}$, aparece también en expresiones que nos dan otras cantidades de interés, por ejemplo, (4.3.6) aparece en la expresión para el tiempo de demora τ , durante el cual la partícula incidente es atrapada en un estado meta estable para ser reemitida una vez transcurrido ese tiempo. Esta expresión es

$$\tau = \frac{1}{v_0} \frac{d\delta}{dP} = \frac{2}{v_0} \int_0^a dr |\psi_p'(r)|^2 - a + \frac{1}{2P} \text{Sen } 2(Pa + \delta) \quad (4.3.7)$$

Si sustituimos en (4.3.6) el desarrollo completo para ψ_p' (4.2.8) que podemos escribir como

$$\psi_p'(r) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n'(r), \quad r < a \quad (4.3.8)$$

donde

$$\psi_n'(r) = \frac{P e^{-iPa} \text{Sen } P_n r}{(P - P_n)(\lambda e^{iP_n a} + e^{-iP_n a})} \quad (4.3.9)$$

Obtenemos

$$\int_0^a dr |\psi_p'(r)|^2 = \int_0^a dr \sum_n \psi_n'(r) \psi_n'^*(r) + \int_0^a dr \sum_{n \neq m} \psi_n'(r) \psi_m'^*(r) \quad (4.3.10)$$

Como vemos en (4.3.10) la integral (4.3.6) es la suma de dos contribuciones, para examinar el peso relativo de cada una de ellas debemos evaluarlas. Evaluar las dos contribuciones que aparecen a la derecha de (4.3.10) es considerablemente más difícil que evaluar el primer término de ese miembro y el miembro izquierdo de la misma ecuación, el cual podemos evaluar utilizando ψ_p' exacta. Hecho lo anterior, el segundo término del miembro derecho de (4.3.10) que llamaremos de interferencia, se obtendría simplemente calculando la diferencia de los otros términos ya evaluados, es decir,

$$\int_0^a dr \sum_{n \neq m} \psi_n'(r) \psi_m'^*(r) = \int_0^a dr |\psi_p'(r)|^2 - \int_0^a dr \sum_n \psi_n'(r) \psi_n'^*(r) \quad (4.3.11)$$

Sustituyendo exacta, ec.(4.1.6), en la primera integral del lado derecho de (4.3.11) y evaluando directamente se obtiene para $a = 1$

$$\int_0^1 dr |\psi_p'(r)|^2 = \frac{2P - \text{Sen } 2P}{4 [P + \lambda (\text{Sen } 2P + \lambda \text{Sen}^2 P/\rho)]} \quad (4.3.12)$$

La segunda integral del lado derecho de (4.3.11) se puede escribir, intercambiando la suma y la integral y utilizando (4.3.9), como

$$\int_0^1 dr \sum_n \psi_n'(r) \psi_n'^*(r) = \sum_n \frac{P^2}{|P - P_n|^2 |\lambda e^{iP_n} + e^{-iP_n}|^2} \int_0^1 |\text{Sen } P_n r|^2 \quad (4.3.13)$$

Haciendo uso del resultado¹⁶⁾

$$|\text{Sen } P_n r|^2 = \text{Sen}^2 X_n r + \text{Senh}^2 Y_n r,$$

en el cual $P_n = X_n + iY_n$, evaluamos (4.3.13) obteniendo

$$\int_0^1 dr \sum_n \psi_n'(r) \psi_n'^*(r) = \sum_n \frac{P^2 \left[\frac{\text{Senh } 2Y_n}{Y_n} - \frac{\text{Sen } 2X_n}{X_n} \right]}{4 |P - P_n|^2 |\lambda e^{iP_n} + e^{-iP_n}|^2} \quad (4.3.14)$$

Evaluando numéricamente la integral exacta (4.3.12), la contribución (4.3.14), y el término de interferencia (4.3.11) para $\lambda = 100$ y considerando un número finito de términos en la suma (4.3.14), obtenemos la tabla 4.9. En ella aparecen las cantidades evaluadas para tres diferentes valores del momento p y para cuatro valores de N .

TABLA 4.1.- POLOS DE S PARA EL POTENCIAL DELTA

	$Re P_n$	$Im P_n$
1.	.311052682722E+01	-.956145590968E-03
2.	.622128589288E+01	-.380333005225E-02
3.	.933249932504E+01	-.847933052840E-02
4.	.124443700988E+02	-.148853298223E-01
5.	.155570749238E+02	-.228925124700E-01
6.	.186707595815E+02	-.323500071231E-01
7.	.217855368332E+02	-.430932373058E-01
8.	.249014866723E+02	-.549518480029E-01
9.	.280186584519E+02	-.677565947888E-01
10.	.311370743108E+02	-.815448436576E-01
11.	.342567333230E+02	-.955645721072E-01
12.	.373776158761E+02	-.110276948905E+00
13.	.404996879128E+02	-.125357687462E+00
14.	.436229047849E+02	-.140697422181E+00
15.	.467472145931E+02	-.156201363614E+00
16.	.498725609631E+02	-.171788464202E+00
17.	.529988852710E+02	-.187390286974E+00
18.	.561261283680E+02	-.202949726432E+00
19.	.592542318696E+02	-.218419689605E+00
20.	.623831390864E+02	-.233761811112E+00
21.	.655127956568E+02	-.248945248280E+00
22.	.686431499520E+02	-.263945581844E+00
23.	.717741533120E+02	-.278743833489E+00
24.	.749057601312E+02	-.295325601280E+00
25.	.780379278704E+02	-.307680308175E+00

NOTA: $E \pm n = 10^{\pm n}$

TABLA 4.2

COMPARACION DE Ψ_p EXACTA CON Ψ_p APROX. PARA EL POTENCIAL DELTA.

P = 1		POLOS ALTERNADOS			
N = 1	r	Ψ_p exacta		Ψ_p aproximada	
	0.2	.1286989E-02	-.1961230E-02	.1545440E-02	-.2252023E-02
	0.4	.2522671E-02	-.3844273E-02	.2512327E-02	-.3689884E-02
	0.6	.3657781E-02	-.5574056E-02	.2538660E-02	-.3655851E-02
N = 10	0.2	.1286989E-02	-.1961230E-02	.1189198E-02	-.1811818E-02
	0.4	.2522671E-02	-.3844273E-02	.2741758E-02	-.4178948E-02
	0.6	.3657781E-02	-.5574056E-02	.3244815E-02	-.4943414E-02
N = 60	0.2	.1286989E-02	-.1961230E-02	.1278021E-02	-.1947334E-02
	0.4	.2522671E-02	-.3844273E-02	.2502007E-02	-.3812267E-02
	0.6	.3657781E-02	-.5574056E-02	.3616531E-02	-.5510214E-02
N = 160	0.2	.1286989E-02	-.1961230E-02	.1284581E-02	-.1957478E-02
	0.4	.2522671E-02	-.3844273E-02	.2517012E-02	-.3835459E-02
	0.6	.3657781E-02	-.5574056E-02	.3646117E-02	-.5555899E-02

NOTA: Las columnas izquierda y derecha bajo Ψ_p contienen respectivamente los valores de $\operatorname{Re} \Psi_p$ y $\operatorname{Im} \Psi_p$.

TABLA 4.3

P = 4.5					
N = 1	r	Ψ_p exacta		Ψ_p aproximada	
	0.2	.9066124E-02	-.3450688E-01	.4471883E-02	-.1812556E-01
	0.4	.1127118E-01	-.4289964E-01	.7272222E-02	-.2945860E-01
	0.6	.4946439E-02	-.1882681E-01	.7354274E-02	-.2975207E-01
N = 10	0.2	.9066124E-02	-.3450688E-01	.9282246E-02	-.3534693E-01
	0.4	.1127118E-01	-.4289964E-01	.1078731E-01	-.4102189E-01
	0.6	.4946439E-02	-.1882681E-01	.5856001E-02	-.2234684E-01
N = 60	0.2	.9066124E-02	-.3450688E-01	.9082602E-02	-.3457963E-01
	0.4	.1127118E-01	-.4289964E-01	.1130929E-01	-.4306718E-01
	0.6	.4946439E-02	-.1882681E-01	.5023005E-02	-.1916097E-01
N = 160	0.2	.9066124E-02	-.3450688E-01	.9070343E-02	-.3452650E-01
	0.4	.1127118E-01	-.4289964E-01	.1128112E-01	-.4294573E-01
	0.6	.4946439E-02	-.1882681E-01	.4967006E-02	-.1892175E-01

TABLA 4.4

P = 3.1105268

N = 1	r	Ψ_p exacta		Ψ_p aproximada	
	0.2	.1152364E+01	-.1871735E+02	.1147395E+01	-.1871784E+02
	0.4	.1872945E+01	-.3042148E+02	.1869040E+01	-.3042197E+02
	0.6	.1891746E+01	-.3072681E+02	.1897149E+01	-.3072678E+02
N = 10	0.2	.1152364E+01	-.1871735E+02	.1152938E+01	-.1871732E+02
	0.4	.1872945E+01	-.3042148E+02	.1871661E+01	-.3042151E+02
	0.6	.1891746E+01	-.3072681E+02	.1894160E+01	-.3072667E+02
N = 60	0.2	.1152364E+01	-.1871735E+02	.1152416E+01	-.1871735E+02
	0.4	.1872945E+01	-.3042148E+02	.1873064E+01	-.3042143E+02
	0.6	.1891746E+01	-.3072681E+02	.1891983E+01	-.3072680E+02
N = 160	0.2	.1152364E+01	-.1871735E+02	.1152378E+01	-.1871735E+02
	0.4	.1872945E+01	-.3042148E+02	.1872978E+01	-.3042143E+02
	0.6	.1891746E+01	-.3072681E+02	.1891813E+01	-.3072681E+02

TABLA 4.5

COMPARACION DE Ψ_p EXACTA CON Ψ_p APROX. PARA EL POTENCIAL
DELTA. POLOS DERECHOS

P = 1

N = 1	r	Ψ_p exacta		Ψ_p aproximada	
	0.2	.1286989E-02	-.1961230E-02	.1545440E-02	-.2252023E-02
	0.4	.2522671E-02	-.3844273E-02	.2512327E-02	-.3659884E-02
	0.6	.3657781E-02	-.5574056E-02	.2538660E-02	-.3695851E-02
N = 10	0.2	.1286989E-02	-.1961230E-02	.8988878E-03	-.1356275E-02
	0.4	.2522671E-02	-.3844273E-02	.1720777E-02	-.2593487E-02
	0.6	.3657781E-02	-.5574056E-02	.2376583E-02	-.3572362E-02
N = 60	0.2	.1286989E-02	-.1961230E-02	.9258307E-03	-.1382476E-02
	0.4	.2522671E-02	-.3844273E-02	.1781915E-02	-.2652633E-02
	0.6	.3657781E-01	-.5574056E-02	.2495054E-02	-.3685961E-02

TABLA 4.6

P = 4.5

N = 1	r	Ψ_0 exacta		Ψ_p aproximada	
	0.2	.9066124E-02	-.3450688E-01	.4471883E-02	-.1812556E-01
	0.4	.1127118E-01	-.4289964E-01	.7272222E-02	-.2945860E-01
	0.6	.4946439E-02	-.1882681E-01	.7354274E-02	-.2975207E-01
N = 10	0.2	.9066124E-02	-.3450688E-01	.9426089E-02	-.3601716E-01
	0.4	.1127118E-01	-.4289964E-01	.1205296E-01	-.4617419E-01
	0.6	.4946439E-02	-.1882681E-01	.6322768E-02	-.2457982E-01
N = 60	0.2	.9066124E-02	-.3450688E-01	.9343889E-02	-.3584271E-01
	0.4	.1127118E-01	-.4289964E-01	.1186577E-01	-.4577989E-01
	0.6	.4946439E-02	-.1882681E-01	.5957951E-02	-.2382138E-01

TABLA 4.7

P = 3.1105268

N = 1	r	Ψ_ρ exacta	Ψ_ρ aproximada
	0.2	.1152364E+01 - .1871735E+02	.1147395E+01 - .1971784E+02
	0.4	.1872945E+01 - .3042148E+02	.1869040E+01 - .3042197E+02
	0.6	.1891746E+01 - .3072681E+02	.1897149E+01 - .3072678E+02
N = 10	0.2	.1152364E+01 - .1871735E+02	.1153709E+01 - .1871729E+02
	0.4	.1872945E+01 - .3042148E+02	.1875824E+01 - .3042131E+02
	0.6	.1891746E+01 - .3072681E+02	.1896673E+01 - .3072659E+02
N = 60	0.2	.1152364E+01 - .1871735E+02	.1153587E+01 - .1871732E+02
	0.4	.1872945E+01 - .3042148E+02	.1875549E+01 - .3042138E+02
	0.6	.1891746E+01 - .3072681E+02	.1896141E+01 - .3072674E+02

TABLA 4.8

COMPARACIÓN DE Ψ_p EXACTA CON Ψ_p APROX. PARA EL MOMENTO
CORRESPONDIENTE A LA TERCERA RESONANCIA

P = 9.3324993

N = 1	r	Ψ_p exacta		Ψ_p aproximada	
	0.2	.1878915E+01	-.1016650E+02	.1884500E+01	-.1016646E+02
	0.4	-.1095081E+01	-.5925299E+01	-.1065351E+01	.5931401E+01
	0.6	-.1240674E+01	.6713082E+01	-.1282829E+01	.6706029E+01
N = 10	0.2	.1878915E+01	-.1016650E+02	.1881335E+01	-.1016607E+02
	0.4	-.1095081E+01	-.5925299E+01	-.1100429E+01	.5924349E+01
	0.6	-.1240674E+01	.6713082E+01	-.1230899E+01	.6714834E+01
N = 60	0.2	.1878915E+01	-.1016650E+02	.1879071E+01	-.1016648E+02
	0.4	-.1095081E+01	-.5925299E+01	-.1094724E+01	.5925340E+01
	0.6	-.1240674E+01	.6713082E+01	-.1239963E+01	.6713167E+01
N = 160	0.2	.1878915E+01	-.1016650E+02	.1878957E+01	-.1016649E+02
	0.4	-.1095081E+01	-.5925299E+01	-.1094983E+01	.5925308E+01
	0.6	-.1240674E+01	.6713082E+01	-.1240474E+01	.6713101E+01

TABLA 4.9

		$\int_0^1 \Psi_p(r) ^2 dr$ exacta	$\int_0^1 dr \sum_n \Psi_n^* \Psi_n$	$\int_0^1 dr \sum_{n \neq m} \Psi_n^* \Psi_m$
P = 1	N = 1	.3801595E-04	.1109331E-04	.2692264E-04
	N = 10	.3801595E-04	.1894995E-04	.1906600E-04
	N = 60	.3801595E-04	.2021265E-04	.1780330E-04
	N = 160	.3801595E-04	.2029757E-04	.1771837E-04
P = 4.5	N = 1	.9897567E-03	.5182836E-03	.4714731E-03
	N = 10	.9897567E-03	.9565180E-03	.3323869E-04
	N = 60	.9897567E-03	.9844261E-03	.5330566E-05
	N = 160	.9897567E-03	.9861519E-03	.3604832E-05
P = 3.1105268	N = 1	.5229429E+03	.5229532E+03	-.1034018E-01
	N = 10	.5229429E+03	.5229533E+03	-.1043389E-01
	N = 60	.5229429E+03	.5229533E+03	-.1044657E-01
	N = 160	.5229429E+03	.5229533E+03	-.1044737E-01

CAPITULO V

POTENCIAL PICASSO

5.1 Solución exacta.

En el presente capítulo estableceremos el desarrollo (3.4.17) para la función de onda en la región interna del potencial Picasso a fin de compararlo, con la función de onda exacta. El propósito de hacer este estudio para el potencial Picasso es el de detectar posibles diferencias de comportamiento respecto del observado en el capítulo anterior, para el potencial Delta ya que el potencial Picasso es un ejemplo de potencial más realista a cuando menos no tan ideal como el potencial Delta.

En esta sección obtendremos la función de onda exacta ψ_p de manera distinta a como lo hicimos para el caso del potencial Delta. El potencial Picasso se puede escribir como

$$V(r) = \begin{cases} -V_0 + \lambda \delta(r-a) & r < a \\ \lambda \delta(r-a) & r \geq a \end{cases} \quad (5.1.1)$$

donde V_0 es una constante. Como lo muestra (5.1.1) el potencial Picasso consiste en lo siguiente: es un pozo cuadrado de profundidad V_0 en la región interna $\{0 \leq r \leq a\}$, en el punto $r=a$ esta colocado el pico de una delta de Dirac y es cero en la región externa $\{r > a\}$.

La forma en que obtendremos ψ_p exacta es a través

de la función de Green $G(a, a; P)$ La solución regular ϕ_P en el caso que estamos considerando satisface la ecuación

$$\frac{d}{dr^2} \phi_P + [P^2 + V_0] \phi_P = 0, \quad r < a \quad (5.1.2)$$

Esta ecuación es idéntica en forma a la correspondiente al potencial Delta, por tanto la solución es

$$\phi_P(r) = \text{Sen } q r, \quad q = \sqrt{P^2 + V_0}, \quad r \leq a \quad (5.1.3)$$

La función de Green $G(r, a; P)$ como hemos visto, ecs. (3.2.1), (3.2.2) y (3.2.3), satisface la ecuación

$$\frac{d^2}{dr^2} G(r, a; P) + [P^2 - V(r)] G(r, a; P) = \delta(r-a) \quad (5.1.4)$$

con las condiciones a la frontera,

$$\left[\frac{d}{dr} G(r, a; P) - iP G(r, a; P) \right]_{r=a+} = 0 \quad (5.1.5)$$

$$G(0, a; P) = 0 \quad (5.1.6)$$

Si integramos la ec. (5.1.4) para el potencial Picasso entre $a-\epsilon$ y $a+\epsilon$ obtenemos

$$G'(a+\epsilon, a; P) - G(a-\epsilon, a; P) + P^2 \int_{a-\epsilon}^{a+\epsilon} G(r, a; P) dr - \int_{a-\epsilon}^{a+\epsilon} V(r) G(r, a; P) dr = 1 \quad (5.1.7)$$

Al tomar el límite cuando ϵ tiende a cero en (5.1.7) ésta se convierte en

$$G'(a_+, a; P) - G'(a_-, a; P) - \lambda G(a, a; P) = 1 \quad (5.1.8)$$

Ahora bien, en la región interna $\{r < a\}$ la ec. diferencial para la función de Green es idéntica a aquella para ϕ_P , como además $G(r, a; P)$ satisface la condición (5.1.6) tenemos

$$G(r, a; P) = \text{const.} \text{Sen } qr, \quad r \leq a \quad (5.1.9)$$

derivando $G(r, a; P)$ respecto a r se tiene

$$G'(r, a; P) = q \text{const.} \text{Cos } qr, \quad r < a \quad (5.1.10)$$

Tomando el límite de (5.1.10) cuando $r \rightarrow a_-$ tenemos

$$G'(r, a_-; P) = q \text{const.} \text{Cos } qa$$

lo cual podemos escribir, teniendo en cuenta a (5.1.9) como

$$G'(r, a_-; P) = q \cot qa G(a, a; P) \quad (5.1.11)$$

Sustituyendo (5.1.11) y (5.1.5) en la ec. (5.1.8) obtenemos después de despejar a $G(a, a; P)$,

$$G(a, a; P) = \frac{1}{iP - q \cot qa - \lambda} \quad (5.1.12)$$

Haciendo uso de la relación (3.3.5) y del hecho de que ψ_P y ϕ_P son proporcionales ec. (2.1.29) se tiene

$$G(r, a; P) = G(a, a; P) \frac{\phi_P(r)}{\phi_P(a)} \quad (5.1.13)$$

Sustituyendo en esta ecuación a la función de Green (5.1.12) y a la función $\phi_P(r)$ ec. (5.1.3) obtenemos

$$G(r, a; P) = \frac{\text{Sen } \varphi r / \text{Sen } \varphi a}{iP - \varphi \cot \varphi a - \lambda}, \quad r \leq a \quad (5.1.14)$$

y volviendo a hacer uso de (3.3.5) tenemos finalmente a la solución exacta

$$\psi_P(r) = \frac{-P \text{Sen } Pr e^{-iPa}}{iP \text{Sen } \varphi a - \varphi \cos \varphi a - \lambda \text{Sen } \varphi a}, \quad r \leq a \quad (5.1.15)$$

De la expresión para la función de Green (5.1.12) tenemos la ecuación para sus polos

$$iP_n - \varphi_n \cot \varphi_n a - \lambda = 0 \quad (5.1.16)$$

y utilizando la relación de Bloch ec. (3.3.6) tenemos a la matriz S

$$S = \frac{-iP - \varphi \cot \varphi a - \lambda}{iP - \varphi \cot \varphi a - \lambda} e^{-2iPa} \quad (5.1.17)$$

5.2.- Desarrollo de la solución en estados resonantes.

Procediendo como en el capítulo anterior establecemos el desarrollo para Ψ_P para el potencial bajo consideración. El desarrollo para el caso general es

$$\Psi_P(r) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{P e^{-iPa} U_n(a) U_n(r)}{2P_n(P_n - P)} \quad r < a \quad (5.2.1)$$

Para el potencial Picasso las funciones $U_n(r)$ satisfacen la misma ecuación que aquella para el potencial Delta reemplazando P por q , así tenemos

$$U_n(r) = A_n \text{Sen } q_n r, \quad q_n = \sqrt{P_n^2 + V_0}, \quad r \leq a \quad (5.2.2)$$

El coeficiente A_n está determinado por la normalización

$$\int_0^a U_n^2(r) dr + \frac{i U_n^2(a)}{P_n} = 1 \quad (5.2.3)$$

Sustituyendo (5.2.2) en (5.2.3) y evaluando la integral que es muy similar a la correspondiente al caso Delta, se obtiene

$$A_n^2 = \frac{2P_n q_n}{P_n q_n a - \text{Sen } q_n a (P_n \cos q_n a - i q_n \text{Sen } q_n a)} \quad (5.2.4)$$

y de (5.2.4) se tiene

$$U_n(a) U_n(r) = \frac{2P_n q_n \text{Sen } q_n a \text{Sen } q_n r}{P_n q_n a - \text{Sen } q_n a (P_n \cos q_n a - i q_n \text{Sen } q_n a)} \quad (5.2.5)$$

tando V_c y usando como primeros valores los polos correspondientes al valor anterior de V_0 se obtienen los polos para el potencial Picasso. El valor de V_0 para el cual fueron calculados es $V_0 = 2$. Al usar el método anterior para calcular los polos obtuvimos la información adicional de que al hacer más atractivo el pozo, es decir al incrementar el valor de V_0 , los polos se mueven aproximadamente a lo largo de una recta paralela al eje real. Como sabemos, al hacerse más atractivo un potencial los polos correspondientes a resonancias se moverán hacia el eje imaginario para convertirse en estados antiligados y si el proceso de profundización del potencial continuo, se moverán a lo largo del eje imaginario hasta cruzar el origen y convertirse en estados ligados. En el caso particular que estamos considerando, observamos que al variar la profundidad del pozo desde $V_c = 0$ hasta $V_0 = 9.671$, el primer polo se mueve sobre una recta paralela al eje real, la parte imaginaria del polo correspondiente a $V_0 = 0$ es $-.9561E-03$ y la correspondiente a $V_0 = 9.670$ es $-.9570E-03$, como podemos ver, la diferencia es muy pequeña y el movimiento sobre la recta $y = -.956E-03$ es bastante aproximado. Este primer polo llega al eje imaginario, es decir, corresponde a un estado antiligado para un valor de V_0 entre $V_0 = 9.671$ y $V_0 = 9.672$.

En la tabla 5.1 se muestran los primeros 25 polos correspondientes a $V_c = 2$ y $\lambda = 100$.

En las tablas 5.2, 5.3 y 5.4 se presentan los resultados de evaluar Ψ_P exacta ec. (5.1.15) y Ψ_P aprox. a través de considerar un número finito de términos en la suma (5.2.6).

Sustituyendo el resultado (5.2.5) en el desarrollo (5.2.1) obtenemos

$$\psi_P(r) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{P e^{-iPa} q_n \operatorname{Sen} q_n a \operatorname{Sen} q_n r}{(P_n - P) P_n q_n a - \operatorname{Sen} q_n a (P_n \cos q_n a - i q_n \operatorname{Sen} q_n a)}, \quad r < a \quad (5.2.6)$$

5.3.- Resultados

Antes de presentar los resultados correspondientes al potencial Picasso hablaremos un poco del cálculo de los polos de S para este caso. La ecuación para los polos de S ec. (5.1.16) es

$$i P_n - q_n \cot q_n - \lambda = 0, \quad q_n = \sqrt{P_n^2 + V_0} \quad (5.2.7)$$

Esta ecuación al igual que la correspondiente al potencial delta se puede resolver por el método de Newton-Raphson el cual describimos brevemente en el capítulo anterior. En el presente caso, a diferencia del anterior, no usamos expresiones aproximadas para polos P_n como primeros valores P_n^0 . En cambio, aprovechando que ya conocemos los polos del caso delta, le damos a V_0 , la profundidad del pozo, un valor pequeño y usamos los polos del caso delta como primeros valores. El método de Newton Raphson usado así converge rápidamente pues si V_0 es pequeño la diferencia entre potencial delta y Picasso también es pequeña. Repitiendo el proceso, es decir, incremen-

Estas tablas fueron calculadas para tres valores del momento \mathcal{P} y cuatro valores de N . La tabla 5.4 corresponde al valor del momento de la primera resonancia.

TABLA 5.1
 POLOS DE S PARA EL POTENCIAL PICASSO

1.-	.277044031291E+01	-.956330635704E-03
2.-	.605840320208E+01	-.380405940069E-02
3.-	.922470676464E+01	-.848093217832E-02
4.-	.123637282853E+02	-.148880837901E-01
5.-	.154926342784E+02	-.228966392840E-01
6.-	.186170906763E+02	-.323556623262E-01
7.-	.217395503953E+02	-.431005114942E-01
8.-	.248612567784E+02	-.549607715307E-01
9.-	.279829032482E+02	-.677671457312E-01
10.-	.311048975076E+02	-.813569575208E-01
11.-	.342274835984E+02	-.955781520560E-01
12.-	.373508050278E+02	-.110291875554E+00
13.-	.404749405645E+02	-.125373827528E+00
14.-	.435999260928E+02	-.140714635785E+00
15.-	.467257687359E+02	-.156219510056E+00
16.-	.498524563663E+02	-.171807406257E+00
17.-	.529799641813E+02	-.187409894044E+00
18.-	.561082593304E+02	-.202969876480E+00
19.-	.592373041880E+02	-.218440270377E+00
20.-	.623670586648E+02	-.233782720679E+00
21.-	.654974818384E+02	-.248966395034E+00
22.-	.686285330776E+02	-.263966884249E+00
23.-	.717601727984E+02	-.278765219569E+00
24.-	.748923629680E+02	-.293347007955E+00
25.-	.780250674024E+02	-.307701680569E+00

TABLA 5.2

COMPARACION DE Ψ_p EXACTA CON Ψ_p
 APROX. PARA EL POTENCIAL PICASSO
 POLOS ALTERNADOS

P = 1					
N = 1	r	Ψ_p exacta		Ψ_p aproximada	
	0.2	.1892734E-02	-.2883740E-02	.2058962E-02	-.3021079E-02
	0.4	.3560603E-02	-.5424878E-02	.3347047E-02	-.4909777E-02
	0.6	.4805455E-02	-.7321515E-02	.3381996E-02	-.4958156E-02
N = 10	0.2	.1892734E-02	-.2883740E-02	.1794178E-02	-.2733160E-02
	0.4	.3560603E-02	-.5424878E-02	.3781361E-02	-.5762104E-02
	0.6	.4805455E-02	-.7321515E-02	.4389545E-02	-.6686381E-02
N = 60	0.2	.1892734E-02	-.2883740E-02	.1883764E-02	-.2869841E-02
	0.4	.3560603E-02	-.5424878E-02	.3539935E-02	-.5392866E-02
	0.6	.4805455E-02	-.7321515E-02	.4764195E-02	-.7257658E-02
N = 160	0.2	.1892734E-02	-.2883740E-02	.1890326E-02	-.2879988E-02
	0.4	.3560603E-02	-.5424878E-02	.3554944E-02	-.5416064E-02
	0.6	.4805455E-02	-.7321515E-02	.4793791E-02	-.7303357E-02

TABLA 5.3

P = 4.5

N = 1	r	Ψ_p exacta	Ψ_p aproximada
	0.2	.9265519E-02 -.3520258E-01	.3982211E-02 -.1636321E-01
	0.4	.1087846E-01 -.4133067E-01	.6475570E-02 -.2659448E-01
	0.6	.3506683E-02 -.1332297E-01	.6547865E-02 -.2685972E-01
N = 10	0.2	.9265519E-02 -.3520258E-01	.9483453E-02 -.3604963E-01
	0.4	.1087846E-01 -.4133067E-01	.1039065E-01 -.3943770E-01
	0.6	.3506683E-02 -.1332297E-01	.4423144E-02 -.1686950E-01
N = 60	0.2	.9265519E-02 -.3520258E-01	.9282001E-02 -.3527534E-01
	0.4	.1087846E-01 -.4133067E-01	.1091658E-01 -.4149825E-01
	0.6	.3506683E-02 -.1332297E-01	.3583266E-02 -.1365721E-01
N = 160	0.2	.9265519E-02 -.3520258E-01	.9269738E-02 -.3522220E-01
	0.4	.1087846E-01 -.4133067E-01	.1088840E-01 -.4137676E-01
	0.6	.3506683E-02 -.1332297E-01	.3527250E-02 -.1341792E-01

TABLA 5.4

$P = 2.7704403$

$N = 1$	r	Ψ_p exacta		Ψ_p aproximada	
	0.2	.7271323E+01	-.1728366E+02	.7267913E+01	-.1728529E+02
	0.4	.1181814E+02	-.2809128E+02	.1181603E+02	-.2809249E+02
	0.6	.1193680E+02	-.2837332E+02	.1194236E+02	-.2837131E+02
$N = 10$	0.2	.7271323E+01	-.1728366E+02	.7271796E+01	-.1728347E+02
	0.4	.1181814E+02	-.2809128E+02	.1181709E+02	-.2809172E+02
	0.6	.1193680E+02	-.2837332E+02	.1193879E+02	-.2837249E+02
$N = 60$	0.2	.7271323E+01	-.1728366E+02	.7271367E+01	-.1728365E+02
	0.4	.1181814E+02	-.2809128E+02	.1181824E+02	-.2809124E+02
	0.6	.1193680E+02	-.2837332E+02	.1193699E+02	-.2837324E+02
$N=160$	0.2	.7271323E+01	-.1728366E+02	.7271335E+01	-.1728366E+02
	0.4	.1181814E+02	-.2809128E+02	.1181817E+02	-.2809127E+02
	0.6	.1193680E+02	-.2837332E+02	.1193685E+02	-.2837329E+02

CAPITULO VI

DISCUSION Y CONCLUSIONES

Observando los valores que toma ψ_p aprox. para los distintos valores de N y de P en las tablas 4.2, 4.3 y 4.4 obtenemos la primera conclusión. El desarrollo de la función de onda ψ_p en estados resonantes en la región $\{r < a\}$ converge más rápidamente para valores del momento P cercanos a la P de resonancia. De hecho, para la P de resonancia, tabla 4.4, el primer término da la principal contribución al desarrollo de ψ_p . En cambio, para los otros valores de P considerados aunque la convergencia es evidente, ésta es notablemente más lenta. Este resultado físicamente plausible, se debe a la forma del coeficiente del desarrollo, el cual está dado por

$$C_n = \frac{P e^{-iPa} U_n(a)}{2P_n(P_n - P)}$$

y su magnitud por

$$|C_n| \approx \frac{P}{|P_n - P|}$$

de estas dos expresiones vemos que $|C_n|$ exhibe un pico para valores de P en la vecindad de P_n , es decir para valores de P en la vecindad de la parte real de P_n y es más grande conforme la parte imaginaria de P_n sea menor. En realidad, el pico de $|C_n|$ no está centrado en $P = P_{nR}$ ($P_{nR} = \text{Re} P_n$) sino un poco a la derecha de este valor debido a la presencia del factor P en el numerador de $|C_n|$.

Otra conclusión importante se deriva al comparar los desarrollos que incluyen solo polos derechos. Tablas 4.5, 4.6 y 4.7 con aquellos que incluyen derechos e izquierdos, tablas 4.2, 4.3 y 4.4. Con excepción del desarrollo correspondiente a la P de resonancia cuya contribución principal proviene del primer polo como ya vimos, los desarrollos que incluyen solo polos derechos muestran una convergencia más lenta. El caso $P=1$, tabla 4.5, exhibe esta característica más evidentemente. Concluimos pues, que exceptuando los casos de energías cercanas a las de resonancia, la contribución de los polos izquierdos al desarrollo de la función de onda es necesaria para que éste converja. Un argumento a favor de este resultado podría ser el hecho de que tanto el polo derecho como su simétrico izquierdo están asociados a un mismo estado resonante⁵⁾ ya que el estado resonante correspondiente a un polo derecho y aquél correspondiente a su simétrico están relacionados entre sí por una inversión temporal, es decir, la contribución al desarrollo proveniente de un estado resonante es debida a los dos polos, uno izquierdo y otro derecho, a los cuales está asociado.

Cuando la parte imaginaria de un polo de la matriz S crece, la resonancia correspondiente se hace menos definida, más ancha. También la magnitud del coeficiente $|c_n|$ del desarrollo de la función de onda muestra un pico menos definido alrededor de la P de resonancia. La tabla 4.8 estudia numéricamente este fenómeno. En ella observamos efectivamente una convergencia menos fuerte que aquella para la primera resonancia, tabla 4.4, aunque la diferencia no es muy notable. Por ejemplo para

la primera resonancia en $N=10$ y $T=0.2$ las partes reales de ψ_p exacta y ψ_p aprox. coinciden en los primeros cuatro dígitos mientras que en el mismo caso para la tercera resonancia coinciden en los primeros tres.

La tabla 4.9 nos muestra, como era de esperarse después de los resultados discutidos hasta este momento, que para evaluar la integral del modulo cuadrado de la función de onda ψ_p podemos utilizar el desarrollo finito para ψ_p siempre y cuando lo hagamos para energías o momentos cercanos a resonancia, mientras más cerca estemos de resonancia menos términos necesitaremos considerar, de hecho, para el momento de resonancia vemos que podemos tomar solo el primer término y obtener un resultado bastante razonable. Consecuentemente a medida que nos acercamos al momento de resonancia, el término de interferencia toma valores más pequeños.

Discutiremos ahora nuestros resultados en relación a los obtenidos por J. Bang et.al. para un problema similar. J. Bang utilizó el teorema de Mittag-Leffler para desarrollar la función de onda ψ^G , esta función difiere de la función de onda ψ_p por el factor $P e^{-iP}$, es decir,

$$\psi^G(r) = -G(r, a; P)$$

Bang obtiene para ψ^G un desarrollo en estados resonantes más $q+1$ subtracciones dado por la siguiente expresión

$$\psi_p^G(P, r) = \sum_{i=0}^q \psi_p^G(0, r) \frac{P^i}{i!} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{P}{P_n}\right)^{q+1} \frac{c_n P_n(r)}{P - P_n}$$

$$T \approx 0 \quad (6.1.1)$$

Bang utiliza, al igual que nosotros, un potencial delta para estudiar la convergencia de (6.1.1), para este potencial los desarrollos con una y dos sustracciones son

$$\Psi^I(p, r) = \frac{r}{1+V_0 r} - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p}{p_n} \frac{\varphi_n(a) \varphi_n(r)}{p_n (p - p_n)} \quad (6.1.2)$$

$$\Psi^{II}(p, r) = \frac{r}{1+V_0 a} + \frac{i p r a}{(1+V_0 a)^2} - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{p}{p_n} \right)^2 \frac{\varphi_n(a) \varphi_n(r)}{p_n (p - p_n)} \quad (6.1.3.)$$

donde las funciones φ_n son las eigenfunciones Un correspondientes a los estados resonantes. y $V_0 = \lambda$ es la intensidad de la delta.

Los desarrollos para la función de onda con sustracciones, en el caso general de un potencial de alcance finito, se obtienen también utilizando el procedimiento presentado en el capítulo III, el cual fue propuesto por primera vez por G. García Calderón ¹²⁾ y en donde además, se demuestra que dos sustracciones son suficientes para que el desarrollo converja en $\{r \leq a\}$ y ninguna es necesaria para la convergencia en $\{r > a\}$.

Bang compara Ψ^C exacta con las aproximaciones dadas por Ψ^I y Ψ^{II} considerando un número finito de términos. De sus resultados numéricos J. Bang concluye que con pocos términos, su desarrollo reproduce bastante bien a la función de onda exacta, sin embargo Bang no especifica cuál es la contribución del desarrollo propiamente dicho, es decir de las sumas en (6.1.2) y (6.1.3.), y cuál la de las sustracciones. Para contestar a esta interrogante, hemos reproducido los cálculos de Bang, los cuales fueron hechos para $\lambda = 40$, y en la tabla 6.1 comparamos para un solo caso $P=1$ y $r=0.2$, sus resultados para Ψ^I , con la sustracción explícitamente evaluada, con los nuestros.

Puesto que la primera sustracción solo contribuye a la parte real de la función de onda, en la tabla 6.1 solo mostramos las partes reales. ψ^G aprox. designa tanto al desarrollo nuestro como al de Bang

TABLA 6.1

COMPARACION DEL DESARROLLO DE BANG CON EL NUESTRO
MOSTRANDO EL PESO DE LA SUSTRACCIÓN DE BANG. SE
MUESTRAN SOLO PARTES REALES

$P = 1 \quad r = .2$

$N = 14$

	ψ^G exacta	ψ^G aprox.	sustracción
Desarrollo de Bang	.5806E-02	.5804E-02	.4878E-02
Desarrollo sin sustracciones (nuestro)	.5806E-02	.4981E-02	0

$N = 44$

Desarrollo de Bang	.5806E-02	.5806E-02	.4878E-02
Desarrollo sin sustracciones	.5806E-02	.5647E-02	0

Las dos primeras columnas de la tabla 6.1 muestran que el desarrollo de Bang aproxima mejor a la función de onda ψ^G , sin embargo la tercera columna muestra que la contribución más importante al valor de ψ^I es la debida a la sustracción, de hecho, la sustracción contribuye en más de 80% al valor de ψ^I . Esto significa lo siguiente: puesto que las sustracciones constituyen información sobre el problema que debemos dar de entrada, la aproximación de Bang ψ^I a la función de onda ψ^G es en realidad pobre pues la principal contribución proviene de la información de entrada que se tiene que calcular por otros medios. En cambio el desarrollo sin sustracciones ψ^G aprox. estudiado en este trabajo no requiere de ninguna información de entrada. Teniendo esto en consideración podemos concluir que el desarrollo presentado en el capítulo III es de mayor utilidad que el de Bang ψ^I .

Debido a que las sustracciones del desarrollo de Bang dada por

$$\psi^o(0, r) = \frac{r}{1 + v_0 a} \quad (6.1.4)$$

no dependen del momento P , o sea que para una r fija $\psi^o(0, r)$ es constante, la contribución de ella al desarrollo ψ^I será relativamente menor para valores de P para los cuales la función de onda ψ^G tome valores más grandes. Puesto que los valores de P a los cuales corresponden mayores valores de ψ^G en $\{r < a\}$ son los cercanos a la P de resonancia, observamos que en el desarrollo de Bang ψ^I cuando P se aproxima a resonancia la contribución principal al valor de ψ^I es la

debida a la suma sobre estados resonantes lo cual concuerda con los resultados obtenidos sobre la convergencia de ψ_p aprox. en función del valor de P .

El desarrollo de Bang con dos sustracciones ψ^{II} exhibe un comportamiento similar al de ψ^I . Debido a que la segunda sustracción es puramente imaginaria,

$$\psi^{II}(0,r) = \frac{i r P a}{(1 + \sqrt{6} a)^2} \quad (6.1.5)$$

su contribución solo afecta a la parte imaginaria de ψ^{II} . Los resultados numéricos muestran, análogamente al caso anterior, que la contribución de la segunda sustracción a la parte imaginaria de ψ^{II} es función del valor de P , siendo más importante para valores de P relativamente lejanos de resonancia y menos importante para valores de P cercanos a resonancia.

Las tablas 5.2, 5.3 y 5.4 nos muestran que para un potencial un poco más real, es decir el potencial picasso el cual tiene una parte atractiva, son válidos todos los resultados obtenidos para el potencial Delta.

Resumiendo los resultados obtenidos, podemos decir que el desarrollo en estados resonantes presentados en el capítulo III para la función de onda ψ_p en la región $\{r < a\}$ nos dá una aproximación de ésta cuando consideramos un número finito de términos en el desarrollo. El número de términos necesarios para reproducir razonablemente la función de onda, depende del valor del momento P . Siendo este número menor para valores de P cercanos a resonancia y mayor a medida que P se aleja de resonancia.

REFERENCIAS

1. John R. Taylor, Scattering Theory (John Wiley, 1972)
2. Leonard S. Rodberg and R.M. Thaler, Introduction to the Quantum Theory of Scattering (Academic Press, 1967).
3. Roger G. Newton, Scattering Theory of Waves and Particles (Mc Graw-Hill, 1966).
4. H. M. Nussenzveig, Nucl. Phys. 11 (1959) 499.
5. J. Humblet and L. Rosenfeld, Nucl. Phys. 26 (1961) 529.
6. G. Gamow, Z. Phys. 51 (1928) 204.
7. A.J.F. Siegert, Phys. Rev. 56 (1939) 750.
8. C. Bloch, Nucl. Phys. 4 (1957) 503.
9. K. Knopp, Theory of Functions Part I (Dover, 1945).
10. R.E. Peierls, Proc. Roy. Soc. A 253 (1959) 16.
11. Gastón García Calderón and Rudolf Peierls, Nucl. Phys. A265 (1976) 443.
12. G. García Calderón, Nucl. Phys. A261 (1976) 130.
13. Mc Craken y Dorn, Métodos Numéricos y Programación Fortran (Limusa-Wiley).
14. J.J. Herrera Mote, Tesis de maestría, Fac. de Ciencias, UNAM
15. N.G. de Bruijn, Asymptotic Methods in Analysis (North Holland Publishing Company, Amsterdam, 1958) p. 25.
16. G. Arfken, Mathematical Methods for Physicists (Academic Press, 1970). p. 301 ejercicio 6.1.8.
17. J.Bang, F.A. Gareev et.al. Nucl. Phys. A309 (1978) 381
18. Ya.B. Zel'dovich, JETP (Sov. Phys.) 12 (1961) 542.
19. H.A. Weidenmüller, Ann. of Phys. 28 (1964) 60.