



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

SISTEMATIZACION Y MANEJO DE INFORMACION VIA UN
BANCO DE DATOS ALMACENADOS EN UNA COMPUTADORA

T E S I S

que para obtener el título de

F I S I C O

p r e s e n t a

LETICIA GALLEGOS CAZARES

Septiembre

1979

1 ejempl.

13

6587



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

I N D I C E

1.- INTRODUCCION	Pág. 1
2.- CAPITULO 1 ESTRUCTURA DE ARBOL	3
Definición y notación usual	3
Formas de representación	5
Conceptos generales sobre minimización	13
Búsqueda en forma natural para la estructura de árbol	40
Búsqueda por niveles	44
3.- CAPITULO 2 ESTRUCTURA DE ANILLO	48
Conceptos generales sobre anillos	48
Búsqueda de información en la estructura de anillo	53
Anillos para representar estructuras de árbol	55
4.- CAPITULO 3 PROGRAMACION HEURISTICA	58
Método de Dantzing-Vanne para soluciones enteras	58
Método de arborescencia para soluciones enteras	65
Método de Gomory para soluciones enteras	70
5.- CAPITULO 4 APLICACIONES Y CONCLUSIONES	80
6.- BIBLIOGRAFIA	92

INTRODUCCION.-

El crecimiento de la sociedad actual requiere cada vez con mayor necesidad la obtención rápida de información, que le ayuden a vislumbrar el panorama general de aquello que deseen analizar o desarrollar, de tal manera que su nivel de conocimiento pudiese empezar de lo que o troc han comunicado.

Es verdad que la información no es todo lo necesario para seguir adelante, es ello precisamente, la superioridad del hombre sobre la máquina, pero es verdad también que aquél que tiene acceso a mayor información puede evitar caer en errores en que otros han caído, siguiendo adelante sobre la base que ellos establecen.

Ahora bien, el hombre organiza y condiciona un sistema, cualquiera que éste sea, para poder extraer de él alguna información, ésta es almacenada de tal manera que la persona que deseara revisar dicha información pudiese siempre hacerlo, esto es muy evidente en las bibliotecas, el almacenaje de la información debe establecerse por tanto ordenadamente, ya que de otra manera podría decirse que no se tiene información alguna por la complejidad de su obtención.

En la actualidad, el desarrollo tecnológico permite que una gran cantidad de personas tenga fácil acceso a una computadora, es por ello que, personas dedicadas al estudio de éste problema se han valido de ellas para el manejo de información, ya que por su capacidad de memoria una sola de ellas puede almacenar gran cantidad de información, sin embargo, el costo del tiempo de uso de una computadora es muy elevado, por tanto, el investigador debe recurrir a formas de búsqueda que minimicen este tiempo. Es ante el objetivo primordial del trabajo desarrolla

do a continuación, analizando dos formas de organización de datos y varios métodos de búsqueda de los mismos. Así, en el capítulo 1 se discutirá una estructura de árbol, métodos de minimización entre vértices, donde los vértices representan datos y dos formas de búsqueda; en el capítulo 2 se analiza la estructura de anillo y algunos métodos de búsqueda; en el capítulo 3 métodos de obtención de datos en programación heurística y por último, en el capítulo 4 aplicaciones para una estructura de árbol de un método de programación heurística.

CAPITULO 1.-

ESTRUCTURA DE ARBOL.

En este capítulo se analizará una de las formas de organización de datos, lo que se conoce con el nombre de árbol. La razón por la cual se le considera de gran importancia se basa fundamentalmente en el ahorro de tiempo y por tanto en el costo necesario para la búsqueda de algún determinado dato o información. Es claro, que la recuperación de información alcanza un nivel preponderante para el desarrollo técnico y científico, ya que al tener la información en un corto intervalo de tiempo, la eficiencia debe incrementarse. Así pues, este capítulo estará enfocado a las diversas formas de arreglos de datos que permitan una rápida manipulación de los mismos.

Definición y notación usual.

Cualquier organización de datos puede ser representada por una gráfica, donde por gráfica se entiende un conjunto de puntos finito o infinito y numerable a los que se denomina vértices y que se encuentran conectados por líneas orientadas a las que se designa arcos. Luego entonces, una gráfica puede representar estructuras de la más diversa naturaleza.

En las gráficas es posible distinguir varias características generales que permiten clasificarlas, por el momento, se definirán los conceptos necesarios para llegar al objetivo deseado, definir lo que se entiende por árbol.

Así entonces, se definirá por camino una serie de arcos adyacentes que conduzca de un vértice a otro; por circuito un camino en el cual los vértices inicial y final coinciden, es decir, el camino para un circuito es una trayectoria cerrada; por lazo, un circuito con un solo vértice; por longitud de camino, el número de arcos de conexión; y en el caso de que dos vértices se encontraran conectados

por arcos en una y/o en la otra dirección se dirá que se presenta una ligadura, siendo una cadena una serie de ligaduras consecutivas.

Como se ve, no existe restricción en cuanto a las conexiones entre vértices, por lo que una gráfica se encuentra conectada siempre que exista entre dos vértices una cadena y fuertemente conectada si existe siempre un camino entre los vértices considerados.

Basándose en lo anterior, se define árbol como una gráfica fuertemente ligada que no contiene un solo ciclo. Esto nos indica que se trata de una gráfica que parte de un vértice al que se llamará raíz o nodo padre, ramificándose al conectarse con otros vértices y que finaliza en un conjunto de vértices a los que se denomina nodos terminales u hojas.

Una representación gráfica de la estructura de árbol se muestra en la figura 1.1.

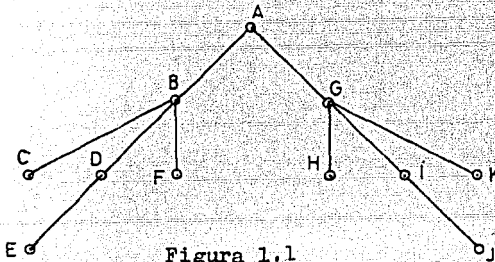


Figura 1.1

En la figura se observa que el vértice A corresponde a la raíz o nodo padre y representa un almacén de datos, es decir, el total de información se encuentra ahí contenida. La raíz se conecta con dos vértices (B y G) por medio de arcos o ramas. La rama B se divide en tres arcos conectándose nuevamente por arcos orientados a otros vértices o nodos (C, D y F). Ob-sérvese que los nodos C y F no vuelven a ramificarse, esto indica que son los nodos terminales u

hojas de dichas ramas. El análisis para las restantes ramas es similar.

Se puede también, clasificar los vértices por niveles de ramificación, se dice entonces que la raíz A tiene nivel 0, los siguientes: nodos B y G conectados a A nivel 1, los vértices C, D y F conectados a B, así como los vértices H e I conectados a G, nivel 2 y así sucesivamente, hasta agotarlos todos.

La razón por la cual a este tipo de gráfica se le conoce como árbol, estriba en su gran parecido con un árbol natural invertido. Es esta la causa por la que la terminología usada corresponde a la empleada para designar las partes de un árbol natural.

Hay varios autores que encuentran similitud entre este tipo de gráficas y los parentescos o relaciones familiares, considerando así a un árbol como una familia. Se tendrá así que la raíz es el padre, los nodos del nivel 1 los hijos, los del nivel 2 los nietos, y así sucesivamente. Este tipo de notación es muy usual por lo que se han propuesto ciertas variaciones, de esta manera se usa la relación madre, hija, nieta, etc., o también la forma neutral, como es la siguiente: padres, descendientes, etc.; todos estos términos muy apropiados para denotar una relación que corresponde a una estructura de árbol de varios niveles.

Una característica importante, es el hecho de no haber circuitos, esto implica que en este tipo de estructura no puede presentarse un cruce de ramas. Así, si el mismo nodo es necesario para dos ramas, cada rama debe tener su vértice correspondiente, aún cuando estos sean los mismos.

Formas de representación.

Hasta ahora se han dado descripciones de la estructura, sin embargo, es necesario una vez establecido el len-

guaje, dar una representación matemática o bien simbólica de un árbol.

Antes de iniciar la explicación de las formas de representación que se conocen, obsérvese, que este tipo de estructura es un método de numeración de datos, ya que establece un orden de aparición y ejecución de los mismos.

Se ve que dada la estructura, fijemos una cierta secuencia en la aparición de nodos, esto sugiere un tipo de representación secuencial, que puede estar dada por ramas recorridas, o bien, por diferentes ramas correspondientes a un mismo nivel. Así entonces, se dará en el primer caso ene-adas ordenadas, donde el primer término sería la raíz, el segundo el nodo del siguiente nivel y así sucesivamente por ejemplo, para el árbol de la figura 1.1 se tiene:

- 1.- (A, B, C)
- 2.- (A, B, D, E)
- 3.- (A, G, H)
- 4.- (A, G, I, J)

De este tipo de representación el número de niveles corresponde al número de coordenadas y el número de ramas equivale al número de relaciones coordenadas encontradas. Si en dos o más relaciones se repite la misma ene-ada indica, que de ellas parten, o bien se puede entender como los padres de los subárboles contenidos en el nivel n al que corresponden.

Si se recorren distintas ramas de un mismo nivel, en él, se encuentra que el primer término vuelve a ser la raíz, el segundo, el nodo de nivel 1 de la rama 1 (numerando las ramas de izquierda a derecha), el tercero, el nodo o vértice del nivel 1 de la segunda rama y así sucesivamente. Por ejemplo, este tipo de representación para la figura 1.1 corresponde a las siguientes ene-adas ordenadas:

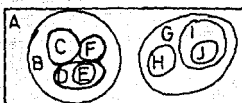
- 1.- (A)

- 2.- (B, G)
 3.- (C, D, F, H, I)
 4.- (E, J)

Esta representación no es lo suficientemente clara ya que no pueden determinarse de ellas las relaciones entre padres, hijos, nietos del árbol, es por ello que no se usa comúnmente.

Otra forma que se presenta muy frecuentemente consiste en hacer uso de la notación y representación gráfica en teoría de conjuntos. En cuanto a la notación, se considerará como el conjunto universo a la raíz (ya que todos los nodos o vértices subsiguientes se encuentran contenidos en ella) y cada nodo padre contenido en él, como un elemento del conjunto universal que está formado por otros conjuntos a su vez. Con el fin de dar un ejemplo de este tipo de representación se muestra en la figura 1.2 el diagrama de Venn y la notación de conjuntos para el árbol de la figura 1.1:

Figura 1.2



$$\{A \{B \{C, D \{E, F\}, G \{H, I \{J\}\}\}\}$$

A primera vista en la figura 1.2 se puede decir que este tipo de notación establece un orden de contención y por tanto en un diagrama de árbol la conexión de sus ramas orientadas se representa por ella.

Se hablará ahora para finalizar, de una forma matricial que represente las conexiones presentes entre los distintos vértices, se llamará a una matriz que cumpla con esta característica, matriz adjunta o asociada a una gráfica.

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Figura 1.3

Nótese que en la figura 1.3 los vértices iniciales corresponden a los renglones y los finales a las columnas, de tal manera que aquellos renglones cuyos elementos son todos cero representan vértices que no tienen conexión alguna con otros, por lo que se ajustan a la definición de nodos terminales u hojas. Esta información será de gran ayuda en secciones posteriores, cuando se analice un recorrido para un diagrama de esta forma.

Ahora bien, se podría pensar en encontrar una matriz asociada que dé arcos de longitud 2 existente entre dos vértices, asociándole a cada elemento el valor resultante de la suma de todos los caminos presentes entre dos vértices de longitud 2. La tabla 1.2 muestra si existen o no este tipo de conexiones o arcos. Para la gráfica de la figura 1.1, la figura 1.4 muestra la matriz asociada.

Tabla 1.2

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
Del A			✓	✓		✓		✓	✓	
B					✓					
C										
D										
E										
F										
G										
H										
I										
J										

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Figura 1.4

Cabría preguntarse entonces si existe una relación entre la matriz anterior C y ésta. Para matrices se han definido varias operaciones y teniendo en mente el hecho de que la gráfica representada en L es una subgráfica de la representada en C, es claro que no puede tratarse de una suma ya que esto equivaldría a la unión de gráficas, en cuanto al producto es muy posible que corresponda a la operación indicada ya que se representará por la composición de gráficas que dará la conexión de longitud mayor o igual que 2. Analizando el producto se verá:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b & c & d & e & f & g & h & i & j \\ a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, \\ a_1, b_1, c_1, d_1, e_1, f_1, g_1, h_1, i_1, j_1 \\ a_2, b_2, c_2, d_2, e_2, f_2, g_2, h_2, i_2, j_2 \\ a_3, b_3, c_3, d_3, e_3, f_3, g_3, h_3, i_3, j_3 \\ a_4, b_4, c_4, d_4, e_4, f_4, g_4, h_4, i_4, j_4 \\ a_5, b_5, c_5, d_5, e_5, f_5, g_5, h_5, i_5, j_5 \\ a_6, b_6, c_6, d_6, e_6, f_6, g_6, h_6, i_6, j_6 \\ a_7, b_7, c_7, d_7, e_7, f_7, g_7, h_7, i_7, j_7 \\ a_8, b_8, c_8, d_8, e_8, f_8, g_8, h_8, i_8, j_8 \\ a_9, b_9, c_9, d_9, e_9, f_9, g_9, h_9, i_9, j_9 \\ a_{10}, b_{10}, c_{10}, d_{10}, e_{10}, f_{10}, g_{10}, h_{10}, i_{10}, j_{10} \end{bmatrix}$$

$$a_1 + a_2 = 0$$

$$b_1 + b_2 = 0$$

$$c_1 + c_2 = 1$$

$$d_1 + d_2 = 1$$

$$e_1 + e_2 = 0$$

$$f_1 + f_2 = 1$$

$$g_1 + g_2 = 0$$

$$h_1 + h_2 = 1$$

$$i_1 + i_2 = 1$$

$$j_1 + j_2 = 0$$

$$a_2 + a_3 + a_4 = 0$$

$$b_2 + b_3 + b_4 = 0$$

$$c_2 + c_3 + c_4 = 0$$

$$d_2 + d_3 + d_4 = 0$$

$$e_2 + e_3 + e_4 = 1$$

$$f_2 + f_3 + f_4 = 0$$

$$g_2 + g_3 + g_4 = 0$$

$$h_2 + h_3 + h_4 = 0$$

$$i_2 + i_3 + i_4 = 0$$

$$j_2 + j_3 + j_4 = 0$$

$$a_5 + a_6 = 0$$

$$b_5 + b_6 = 0$$

$$c_5 + c_6 = 0$$

$$d_5 + d_6 = 0$$

$$e_5 + e_6 = 0$$

$$f_5 + f_6 = 0$$

$$g_5 + g_6 = 0$$

$$h_5 + h_6 = 0$$

$$i_5 + i_6 = 0$$

$$j_5 + j_6 = 1$$

$$a_7 = 0$$

$$b_7 = 0$$

$$c_7 = 0$$

$$d_7 = 0$$

$$e_7 = 0$$

$$f_7 = 0$$

$$g_7 = 0$$

$$h_7 = 0$$

$$i_7 = 0$$

$$j_7 = 0$$

$$a_8 = 0$$

$$b_8 = 0$$

$$c_8 = 0$$

$$d_8 = 0$$

$$e_8 = 0$$

$$f_8 = 0$$

$$g_8 = 0$$

$$h_8 = 0$$

$$i_8 = 0$$

$$j_8 = 0$$

Resolviendo esta serie de ecuaciones resultantes del producto anterior, se encuentra la siguiente matriz buscada:

$$\begin{bmatrix}
 a & b & c & d & e & f & g & h & i & j \\
 e & b & c & d & e & f & g & h & i & j \\
 a & b & c & d & e & f & g & h & i & j \\
 e & b & c & d & e & f & g & h & i & j \\
 a & b & c & d & e & f & g & h & i & j \\
 a & b & c & d & e & f & g & h & i & j \\
 a & b & c & d & e & f & g & h & i & j \\
 a & b & c & d & e & f & g & h & i & j \\
 a & b & c & d & e & f & g & h & i & j \\
 a & b & c & d & e & f & g & h & i & j
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{bmatrix}$$

Lo que implica que una matriz adjunta de longitud 2 es igual a $C \cdot C = C^2$.

Anteriormente se mencionó que el producto representa gráficamente una composición, así si se analiza vértice por vértice se encontrará (la operación de conexión entre vértices está representada por $\sqrt{\quad}$):

Entonces $\sqrt{\quad}(x)$ = Operación en la gráfica sobre el vértice x

De donde

$$\sqrt{\quad}(x) = \{ \text{vértices conectados con } x \}$$

Por tanto

$$[M_1] \cdot [M_2] = [\sqrt{\quad}] \rightarrow G = (x, \sqrt{2} \circ \sqrt{1})$$

Y como

$$\sqrt{2} \circ \sqrt{1}(x) = \sqrt{2}(\sqrt{1}(x))$$

Y

$$\begin{aligned} \sqrt{2} &= \sqrt{1} = \sqrt{\quad} \\ \sqrt{\quad} \circ \sqrt{\quad}(x) &= \sqrt{\quad}(\sqrt{\quad}(x)) \end{aligned}$$

Así, para el vértice A, B, C, D, E, F, G, H, I, y J de la figura 1.1 se tiene:

$$\sqrt{\quad}(\sqrt{\quad}(A)) = \sqrt{\quad}(B, G) = \{ J, D, F, H, I \}$$

$$\sqrt{\quad}(\sqrt{\quad}(B)) = \sqrt{\quad}(C, D, F) = \{ E \}$$

$$\sqrt{\quad}(\sqrt{\quad}(G)) = \sqrt{\quad}(H, I) = \{ J \}$$

$$\sqrt{\quad}(\sqrt{\quad}(J)) = \sqrt{\quad}(\emptyset) = \emptyset$$

$$\sqrt{\quad}(\sqrt{\quad}(D)) = \sqrt{\quad}(E) = \emptyset$$

$$\sqrt{\quad}(\sqrt{\quad}(F)) = \sqrt{\quad}(\emptyset) = \emptyset$$

$$\sqrt{\quad}(\sqrt{\quad}(H)) = \sqrt{\quad}(\emptyset) = \emptyset$$

$$f(f(I)) = f(J) = \emptyset$$

$$f(f(E)) = f(\emptyset) = \emptyset$$

$$f(f(J)) = f(\emptyset) = \emptyset$$

Por tanto los únicos elementos con arcos de longitud 2 son:

$$A \longrightarrow J$$

$$A \longrightarrow D$$

$$A \longrightarrow F$$

$$A \longrightarrow H$$

$$A \longrightarrow I$$

$$B \longrightarrow E$$

$$G \longrightarrow J$$

que son los vértices con valor 1 en la matriz de la figura 1.4.

Si se generaliza lo que se ha visto, una matriz de arcos de longitud 3, 4, 5, ... será dada por las potencias de la matriz C que originalmente se organizó.

Así pues, las matrices resultantes de las potencias de C corresponden al número de arcos presentes de longitud igual a la potencia de la matriz asociada.

Se debe aclarar, que no todas las matrices de las gráficas tienen gran cantidad de ceros como ha sido el del caso que se ha tratado. Para el tipo de estructura de árbol se tendrá presente una matriz similar a la anterior a la que se llamará "difusa" y que servirá como punto de distinción de entre otras gráficas, cuya matriz adjunta resulta ser "completa".

Conceptos generales sobre minimización.

En las secciones anteriores se han analizado algunos conceptos generales para gráficas, centrándose en un tipo de estructura muy específica como es un árbol. En esta sección se analizará para gráficas el problema de la minimización de caminos entre vértices.

Para iniciar este desarrollo se dará una definición de minimización. Como su nombre lo indica, el minimizar es considerar el menor de una serie de valores establecidos, así:

$$\min(a, b, c) = \text{el menor entre } a, b \text{ y } c$$

esta función claramente se observa que es simétrica, ya que:

$$\min(a, b) = \min(b, a)$$

es decir, es equivalente a comparar los dos o más elementos bajo cualquier orden, basándose en esta característica se podrán dar algunas propiedades de esta función, por ejemplo:

$$\min(a, b, c, \dots, n) = \min(a, \min(b, c, \dots, n))$$

o bien

$$\min(a, b, c, \dots, n) = \min(b, \min(a, c, \dots, n))$$

en este tipo de características se nota que es posible simplificar las expresiones tomando mínimos entre un cierto conjunto de números y después volver a aplicar la misma función, equivaliendo su resultado final a tomar la función mínima para el total de puntos manejados.

Se propone entonces, una minimización entre las trayectorias posibles de un vértice a otro de una gráfica. Su póngase que la gráfica a analizar es la que se presente en la figura 1.5. Todas las trayectorias posibles que se encuentran presentes entre los vértices serán los siguientes:

- | | | |
|-----------|-----------|-----------|
| 1.- 1 → 2 | 2.- 2 → 1 | 3.- 3 → 1 |
| 1 → 3 | 2 → 3 | 3 → 2 |
| 1 → 4 | 2 → 4 | 3 → 4 |

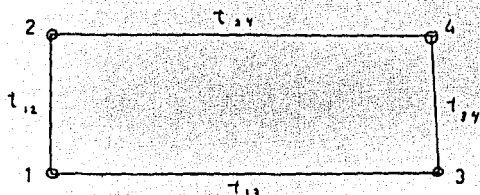


Figura 1.5

Si se propone ahora que el vértice al cual se desea llegar es el número 4, es decir, que fijemos un extremo de nuestra trayectoria y el otro el inicio lo dejemos libre, las trayectorias posibles ahora serían:

- 1.- $1 \rightarrow 3 \rightarrow 4$ 2.- $2 \rightarrow 4$ 3.- $3 \rightarrow 4$
 $1 \rightarrow 2 \rightarrow 4$ $2 \rightarrow 1 \rightarrow 3 \rightarrow 4$ $3 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 4$

Los árboles lógicos para estas trayectorias se muestran en las figuras 1.6A, B y C. Se quiere encontrar de las trayectorias que se presentan en cada caso (cada vértice) la que sea mínima, en cuanto al tiempo recorrido, ya que se conoce que para ir de $1 \rightarrow 2$ tardará $t_{1,2}$, para $2 \rightarrow 4$ tardará $t_{2,4}$ y así sucesivamente para los 4 arcos. Entonces considerando las trayectorias y bajo la notación de una función mínima, se tendrá para el vértice 1:

$$f_1 = \min(\text{camino entre 1 y 4}) = \min(t_{1,2} + t_{2,4}, t_{1,3} + t_{3,4})$$

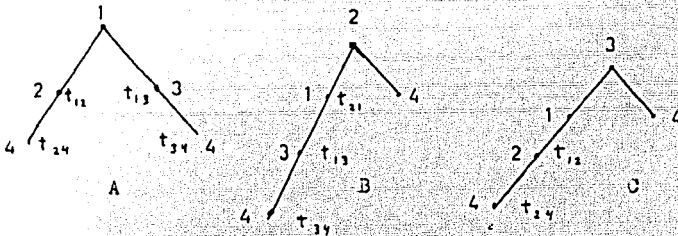


Figura 1.6

para el vértice 2:

$$f_2 = \min(t_{2,1} + t_{1,4}, t_{2,4})$$

para el vértice 3:

$$f_3 = \min(t_{3,1} + t_{1,2} + t_{2,4}, t_{3,4})$$

Evidentemente es posible escribir una cuarta función mínima para el vértice final cuyo valor es cero (0) ya que no existe tiempo de recorrido para el mismo vértice, así:

$$f_4 = 0$$

De esta manera se define:

f_i = tiempo mínimo de recorrido entre el vértice i y el de destino N .

Si se reúnen las tres gráficas con todas sus posibles formas se encontrarán las tres siguientes gráficas de la figura 1.7A, B y C.

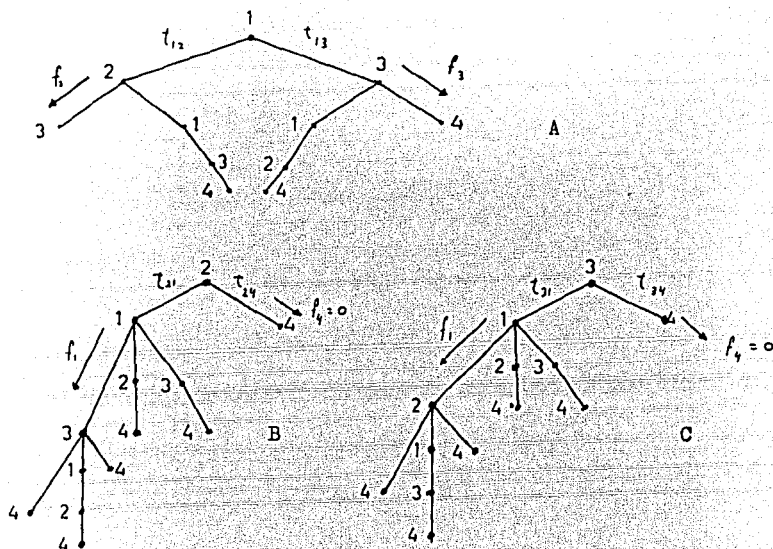


Figura 1.7

De la figura 1.7A se ve que en el vértice 2 debe escogerse la función mínima para el 2 y para el vértice 3 entonces se podría reducir el camino buscado, de la manera siguiente:

$$f_1 = \min (t_{1,2} + f_2, t_{1,3} + f_3)$$

similarmente para las figuras 1.7B y C.

$$f_2 = \min (t_{2,3} + f_3, t_{2,4})$$

donde en el primer vértice (vértice 1) se escoge la función mínima.

$$f_3 = \min (t_{3,1} + f_1, t_{3,4})$$

Basándose en lo anterior, se puede generalizar entonces la función mínima para cualquier vértice de i a j , ya que las funciones escogidas tanto para f_1 como para f_2 y f_3 son las mismas, exceptuando la final cuyo valor es:

$$f_N = 0$$

por lo tanto

$$f_i = \min_j (t_{ij} + f_j)$$

$$i = 0, 1, \dots, N-1$$

$$f_N = 0$$

$$(1.1)$$

Teniendo en cuenta de esta manera, las funciones correspondientes a las trayectorias mínimas en el recorrido de un árbol lógico. Con ello se presenta entonces, una forma matemática que será de suma utilidad posteriormente en la representación de este tipo de estructuras.

Es evidente entonces, que puede ser establecido un método de minimización en cuanto a las trayectorias seguidas en el análisis de un árbol.

Un método matemático muy usado en la resolución de algunos problemas en física y matemáticas es el llamado método de aproximaciones sucesivas. Este método consiste en que dada una función determinada que se establece para la solución de un problema en general, se obtenga mediante un proceso iterativo de sus soluciones aquel cuyo valor sea su límite de convergencia, en donde este límite encontrado es el valor esperado como óptima solución. El dominio de la función, depende estrictamente del problema que se ataca. Ahora bien, la consideración de los valores iniciales de dicha función es de gran importancia, ya que de ellos depende la rapidez de convergencia y aún simplemente la convergencia de las soluciones de la función.

En este caso la función en cuestión es una función de minimización dada por la ecuación 1.1. Luego entonces, la aproximación cero vendrá siendo este valor inicial y será

$$f_i''' = \min_{j'} (t_{ij} + f_j)$$

$$i = 1, 2, \dots, N-1$$

$$f_N^{(0)} = 0$$

donde f_j = los valores iniciales establecidos

La primera aproximación

$$\begin{aligned} f_1^{(1)} &= \min_{i,j} (t_{i,j} + f_j^{(0)}) & i = 1, 2, \dots, N-1 \\ f_N^{(1)} &= 0 \end{aligned}$$

para la segunda

$$\begin{aligned} f_1^{(2)} &= \min_{i,j} (t_{i,j} + f_j^{(1)}) & i = 1, 2, \dots, N-1 \\ f_N^{(2)} &= 0 \end{aligned}$$

Obsérvese que el valor obtenido inicialmente es utilizado para su cálculo en la primera aproximación que es el requerimiento del método sugerido. Para la siguiente el valor calculado en esta función corresponde al valor antes obtenido, así, para la k-ésima aproximación se tendrá:

$$\begin{aligned} f_1^{(k)} &= \min_{i,j} (t_{i,j} + f_j^{(k-1)}) & i = 1, 2, \dots, N-1 \\ f_N^{(k)} &= 0 & k = 1, 2, \dots \quad (1.2) \end{aligned}$$

donde en la relación 1.2, k toma valores desde 1 ya que el cálculo inicial es la aproximación cero, luego entonces la primera aproximación obtenida será f_1 .

El fundamento matemático del método de aproximaciones sucesivas para funciones de este tipo ha sido desarrollado por Bellman¹ proponiendo los siguientes teoremas y su respectiva demostración:

TEOREMA 1.1

La ecuación

$$\begin{aligned} f_1 &= \min_{i,j} (t_{i,j} + f_j) & i = 1, 2, \dots, N-1 \\ f_N &= 0 \end{aligned}$$

tiene al menos una solución.

¹Bellman, Cooke, Lockett. Algorithms, Graphs and Computers, Academic Press, New York, 1977, Pág. 123 - 137.

Demostración.

La función de la que se habla corresponde al valor mínimo de una trayectoria entre el vértice i y el vértice terminal N en una gráfica. Se sabe también que existe un número finito de caminos presentes entre los dos vértices pasando por algún otro de la gráfica y sin pasar dos veces por ninguno de ellos. Este es el único tipo de recorrido que interesa. El problema de determinar el recorrido mínimo, es por lo tanto el de encontrar la longitud mínima (bajo consideraciones de tiempo empleado en el recorrido entre vértices) es decir, el menor de los valores obtenidos de los recorridos propuestos. Considérese, que existe un camino mínimo que depende del vértice inicial i y del vértice final N , siendo este valor denominado por g_i con $i = 1, 2, \dots, N-1$ y $g_N = 0$, ya que no se indica en el n -ésimo vértice que exista recorrido alguno.

De lo anterior la trayectoria entre i y cualquier vértice j será

$$g_i = t_{i,j} + g_j$$

donde $t_{i,j}$ = tiempo entre i y j

g_j = valor del recorrido mínimo entre j y N .

Como g_i es el mínimo tiempo requerido para ir entre i y N , j debe ser escogido como el valor mínimo en $t_{i,j} + g_j$ por lo tanto

$$g_i = \min_{j \neq i} (t_{i,j} + g_j) \quad i = 1, 2, \dots, N-1$$

$$g_N = 0$$

que es lo que se desea demostrar.

TEOREMA 1.2

El empleo del método de aproximaciones sucesivas de la ecuación 1.1 converge a las soluciones deseadas.

Demostración.

Se sabe que aplicando el método de aproximaciones su-

ce:ivas a la ecuación 1.1 se obtiene una relación de recurrencia siguiente:

$$f_i^{(k)} = \min_{(i,j)} (t_{i,j} + f_j^{(k-1)})$$

$$i = 1, 2, \dots, N-1$$

$$f_N^{(k)} = 0$$

$$k = 1, 2, \dots$$

Supóngase que la aproximación cero, es igual al tiempo empleado en ir desde i hasta N , en donde las funciones iniciales del problema en cada vértice j es cero entonces

$$f_i^{(0)} = t_{i,N}$$

$$f_N^{(0)} = 0$$

$$i = 1, 2, \dots, N-1$$

Por tanto para $k = 1$ se tendrá como $f_i^{(1)}$ el mínimo tiempo requerido cuando se tiene a lo más un vértice intermedio entre i y N . Generalizando entonces $f_i^{(k)}$ significará el mínimo tiempo requerido cuando a lo más existen k vértices intermedios.

Dado que el camino de tiempo requiere a lo más $N-2$ vértices intermedios, es claro, que los números $f_i^{(k)}$ deberán empezar a repetirse, por tanto para un valor k se tendrá:

$$f_i^{(k)} = f_i^{(k+1)} = f_i^{(k+2)} = \dots$$

De donde se ve que la repetición de los valores de la función de aproximación k para valores mayores que $k = N-1$ por lo tanto podremos afirmar que, el método de aproximaciones sucesivas empleado aquí converge en un número finito de pasos a la solución deseada.

TEOREMA 1.3

Las soluciones obtenidas por la ecuación 1.1 forman un conjunto monótonamente creciente.

Demostración.

Se sabe que:

$$f_i^{(k)} = \min_{(i,j)} (t_{i,j} + f_j^{(k-1)}) < t_{i,N} = f_i^{(0)}$$

$$i = 1, 2, \dots, N-1$$

(1.3)

$$f_{i,i}^{(0)} = 0$$

y se encontraría también que:

$$f_{i,i}^{(k)} = \min_{j \neq i} (t_{i,j} + f_j^{(k-1)}) \leq \min_{j \neq i} (t_{i,j} + f_j^{(k)}) = f_{i,i}^{(k)}$$

inductivamente se puede demostrar que:

$$f_{i,i}^{(k)} \leq f_{i,i}^{(k-1)} \quad \text{para } k > 1 \quad i = 1, 2, \dots, N-1$$

$$f_{i,i}^{(k)} \leq f_{i,i}^{(k-1)}$$

para $k = 0 + 1$

$$i = 1, 2, \dots, N-1$$

$$D \leq N-1$$

$$f_{i,i}^{(k+1)} = \min_{j \neq i} (t_{i,j} + f_j^{(k+1)}) = \min_{j \neq i} (t_{i,j} + f_j^{(k)}) \\ \leq \min_{j \neq i} (t_{i,j} + f_j^{(k)}) = f_{i,i}^{(k)}$$

por lo tanto

$$f_{i,i}^{(k+1)} \leq f_{i,i}^{(k)}$$

entonces

$$f_{i,i}^{(k)} \leq f_{i,i}^{(k-1)}$$

Para demostrar que $f_{i,i}^{(k)} > f_{i,i}$ donde $f_{i,i}$ es el valor solución de la función para cada k , se procede inductivamente otra vez y se tendrá que:

$$f_{i,i} = \min_{j \neq i} (t_{i,j} + f_j) \leq t_{i,N} = f_{i,i}^{(0)}$$

$$f_{i,i} = 0$$

entonces

$$f_{i,i} < f_{i,i}^{(0)}$$

por lo tanto

$$f_{i,i} = \min_{j \neq i} (t_{i,j} + f_j) \leq \min_{j \neq i} (t_{i,j} + f_j^{(0)}) = f_{i,i}^{(0)}$$

por tanto hay que demostrar por inducción que:

$$f_{i,i} < f_{i,i}^{(k)} \quad \forall k > 0$$

Supongamos que $i = 0$

$$f_0 = \min_{j \neq 0} (t_{0,j} + f_j) \leq \min_{j \neq 0} (t_{0,j} + f_j^{(0)}) = f_0^{(0)}$$

por lo tanto

$$f_0 < f_0^{(0)}$$

$$i = 1$$

$$f_1 = \min_{j \neq 1} (t_{1,j} + f_j) \leq \min_{j \neq 1} (t_{1,j} + f_j^{(0)}) = f_1^{(0)}$$

entonces

$$f_1 \leq f_1''$$

$$i = M + 1$$

$$f_{M+1} = \min_{i,j} (t_{i,j} + f_j) < \min_{i,j} (t_{i,j} + f_j^{(0)}) = f_{M+1}^{(0)}$$

por lo tanto

$$f_{M+1} < f_{M+1}''$$

así que

$$f_1'' \geq f_1''' \geq f_1^{(4)} \geq \dots \geq f_1^{(k)} \geq f_1$$

TEOREMA 1.4

La solución de la ecuación 1.2 tiene un límite superior.

Demostración.

Supongamos que g_1 denota cualquier solución de la ecuación 1.1 entonces $f_1 \geq g_1$ $i = 1, 2, \dots, N-1$ como

$$g_1 = \min_{i,j} (t_{i,j} + g_j) \leq t_{i,N} \quad i \neq N$$

$$g_N = 0$$

entonces

$$g_1 \leq f_1'' \quad \text{dado que} \quad f_1'' = \min_{i,j} (t_{i,j} + f_j'')$$

entonces

$$g_1 = \min_{i,j} (t_{i,j} + g_j) < \min_{i,j} (t_{i,j} + f_j'') = f_1''$$

por lo tanto, inductivamente

$$g_1 \leq f_1^{(k)}$$

y dado que $f_1^{(k)} = f_1$ se tendrá así, un límite superior f_1 . $k = 0, 1, 2, \dots$

TEOREMA 1.5

De la ecuación 1.2 se obtiene una solución mínima.

Demostración.

Por el método de aproximaciones sucesivas se tiene:

$$F_1^{(0)} = \min_{i,j} t_{i,j}$$

$$i = 1, 2, \dots, N-1$$

$$F_1^{(0)} = 0$$

$$F_i^{(k)} = \min_{j \neq i} (t_{i,j} + F_j^{(k)}) \quad i = 1, 2, \dots, N-1$$

$$F_N^{(k)} = 0$$

generalizando para $k + 1$

$$F_i^{(k+1)} = \min_{j \neq i} (t_{i,j} + F_j^{(k)}) \quad i = 1, 2, \dots, N-1$$

$$F_N^{(k+1)} = 0$$

y se ha demostrado que:

$$F_i^{(0)} \leq F_i^{(1)} \leq \dots \leq F_i^{(k)} \leq F_i^{(k+1)} \leq \dots$$

Supóngase una función g_i solución de 1.2 entonces

$$F_i^{(k)} \leq g_i \quad \text{para cada } k$$

por lo tanto

$$F_i^{(k)} = \min_{j \neq i} t_{i,j} \leq \min_{j \neq i} (t_{i,j} + g_j) = g_i$$

Se sabe también que $\{F_i^{(k)}\}$ converge en un número finito de pasos, monótonamente creciente. Si denotamos a F_i como el valor encontrado de esa sucesión para $i = 1, 2, \dots, N-1$ es posible establecer entonces que

$$F_i \leq g_i$$

para cualquier otra solución $g_i > 0$

por tanto cualquier solución no negativa g_i

$$F_i \leq g_i \leq f_i$$

TEOREMA 1.6

La solución de la ecuación 1.1 es única.

Demostración.

Supóngase la existencia de dos soluciones diferentes

g_i y h_i con $i = 1, 2, \dots, N-1$

de la ecuación 1.1 se sabe que $g_N = 0$ y $h_N = 0$

como $g_i \neq h_i$ entonces $|g_i - h_i| \neq 0$

supóngase entonces que $g_i - h_i > 0$

entonces

$$g_1 - h_1 \geq g_1 - h_1$$

$$i = 2, 3, \dots, N$$

de acuerdo a 1.1

$$g_1 = \min_{j \neq 1} (t_{1,j} + g_j)$$

$$h_1 = \min_{j \neq 1} (t_{1,j} + h_j)$$

Ahora, si se supone que $j = 2, 3, \dots, N$, entonces

$$g_1 \leq t_{1,j} + g_j$$

$$h_1 = t_{1,1} + h_1$$

entonces

$$h_1 \leq t_{1,j} + h_j \quad \text{para } j = 3, 4, \dots, N$$

por lo tanto

$$g_1 - h_1 \leq (t_{1,1} + g_1) - h_1 = g_2 - h_2$$

$$\text{como } g_1 - h_1 \geq g_2 - h_2$$

entonces

$$g_1 - h_1 = g_2 - h_2$$

Repetiendo el mismo argumento se tendrá que

$$g_2 = \min_{i,j} (t_{i,j} + g_j)$$

$$h_2 = \min_{i,j} (t_{i,j} + h_j)$$

pero el valor mínimo en h_2 no puede ser para $j = 1$ ya que

$$t_{1,1} + h_1 = t_{1,1} + t_{1,1} + h_1 > h_1$$

de donde

$$j = 3, 4, \dots, N$$

por lo tanto

$$g_2 \leq t_{1,j} + g_j \quad j = 1, 2, \dots, N$$

$$h_2 = t_{1,1} + h_1$$

$$h_2 \leq t_{1,j} + h_j$$

entonces

$$g_1 - h_1 = g_2 - h_2 \leq t_{1,1} + g_1 - h_1 = g_3 - h_3$$

como

$$g_1 - h_1 \geq g_1 - h_1 \quad i = 2, 3, \dots, N$$

$$g_1 - h_1 \geq g_3 - h_3$$

entonces

$$g_1 - h_1 = g_3 - h_3$$

por lo tanto

$$g_1 - h_1 = g_2 - h_2 = g_3 - h_3$$

Si se efectúa el mismo procedimiento $N - 1$ veces se tendrá entonces que

$$g_1 - h_1 = g_2 - h_2 = \dots = g_i - h_i \quad i = 1, 2, \dots, N - 1$$

de donde la solución obtenida es la misma y por tanto la

solución de la ecuación 1.2 es la misma y por tanto única.

TEOREMA 1.7

$F_i^{(k)}$ es el mínimo tiempo requerido para realizar k iteraciones en el método de aproximaciones sucesivas.

Demostración.

Se ha definido como límite inferior de las soluciones de la ecuación 1.1 a:

$$\begin{aligned} F_i^{(0)} &= \min_{j \neq i} t_{ij} & i &= 1, 2, \dots, N-1 \\ F_N^{(0)} &= 0 \end{aligned} \quad (1.4)$$

proponiéndose la ecuación iterativa

$$\begin{aligned} F_i^{(k+1)} &= \min_{j \neq i} (t_{ij} + F_j^{(k)}) & i &= 1, 2, \dots, N-1 \\ F_N^{(k+1)} &= 0 \end{aligned} \quad (1.5)$$

como solución.

De la ecuación 1.4 se observa que $F_i^{(0)}$ es el tiempo mínimo para un camino de longitud 1 originado en i ; esto es, el camino desde i al vértice adyacente que pueda ser alcanzado más rápidamente desde él.

Si se define $C_i^{(k)}$ como el conjunto de todos los caminos originados en i y que también:

- tienen exactamente longitud k y no contienen internamente el vértice N o también
- tienen el vértice N poco después de un arco de longitud k y sin el vértice N interno.

Ahora se define $g_i^{(k)}$ como el tiempo mínimo entre todos los caminos en la clase $C_i^{(k)}$ y $g_N^{(k)} = 0$ para $k = 1, 2, \dots$ se tendrá que $C_i^{(1)}$ y $g_i^{(0)} = F_i^{(0)}$ y para $g_i^{(k)}$ las siguientes relaciones de recurrencia:

$$\begin{aligned} g_i^{(k+1)} &= \min_{j \neq i} (t_{ij} + g_j^{(k)}) & i &= 1, 2, \dots, N-1 \\ g_N^{(k)} &= 0 \end{aligned}$$

Considérese $i \neq N$ y $k > 0$ y sea P un camino de clase $C_i^{(k+1)}$ con un tiempo mínimo de $g_i^{(k+1)}$

Se tienen 2 casos a analizar entonces:

- Sea $j = N$

Entonces P termina en N y el tiempo requerido será:

$$t_{iN} = t_{ij} + g_N^{(k)}$$

ii) Sea $j \neq N$

Entonces el tiempo requerido por P es t_{ij} más el tiempo para algún camino en $C_j^{(k+1)}$, donde de hecho este último debe ser óptimo, será $g_j^{(k)}$ ya que de otra forma P no sería óptima; por tanto para alguna j se tendrá

$$g_i^{(k+1)} = t_{ij} + g_j^{(k)}$$

así que

$$g_i^{(k+1)} \geq \min_{j \neq i} (t_{ij} + g_j^{(k)})$$

de donde para algún vértice J

$$g_i^{(k+1)} > t_{ij} + g_j^{(k)}$$

lo que indica que existe un camino que va de i a J , que está en la clase $C_i^{(k+2)}$ y que toma el menor valor en P . Esto contradice la definición de P y por tanto

$$g_i^{(k+1)} = \min_{j \neq i} (t_{ij} + g_j^{(k)})$$

por otra parte se sabe que

$$F_i^{(k)} = g_i^{(k)}$$

de donde, la interpretación de $g_i^{(k)}$ como el mínimo tiempo requerido para trayectorias de clase $C_i^{(k+1)}$ se aplica a $F_i^{(k)}$. Esto es, la iteración $F_i^{(k)}$ de la menor solución definida en las ecuaciones 1.4 y 1.5 es el menor tiempo obtenible de todas las trayectorias de clase $C_i^{(k+1)}$ y donde $i = 1, 2, \dots, N-1$ y $k = 0, 1, 2, \dots$

Supóngase ahora, que se tiene un conjunto $\tilde{C}_i^{(k)}$ de todos los caminos que se originan en el vértice i y también:

- tienen exactamente k ligaduras o bien
- terminan en el vértice N poco después de k ligaduras.

Por su definición, todos los caminos deben pasar por el vértice N , sin embargo, se puede obtener un camino más rápido parando en N cuando sea alcanzado, el resultado de esto sería que el camino más rápido se encuentra en la clase $\tilde{C}_i^{(k)}$, pero también en la clase $C_i^{(k)}$. Por tanto se reconoce que el camino o trayectoria óptima con respecto a $C_i^{(k)}$ es también óptima con respecto a $\tilde{C}_i^{(k)}$, o en otras palabras $F_i^{(k)}$ es también el mínimo tiempo entre todos los caminos

de clase $\hat{C}_1^{(k+1)}$.

Por último, podría proponerse también un nuevo conjunto $\hat{C}_1^{(k+1)}$, donde $\hat{C}_1^{(k)}$ es el conjunto de todos los caminos originados en i y que también:

- tienen exactamente k ligaduras y no tienen a N como un vértice interno; o bien
- termina en el vértice N después de más de k ligaduras y no contiene

Las implicaciones, son similares a las anteriores y concluyen en el hecho de que $F_i^{(k)}$ es el mínimo tiempo entre todos los caminos en $\hat{C}_1^{(k)}$.

TEOREMA 1.8

La solución en el método de aproximaciones sucesivas debe presentarse después de a lo más $(T/Z) - 1$ iteraciones.

Demostración.

De acuerdo a lo analizado anteriormente, es posible definir un conjunto T como límite superior sobre el tiempo requerido por una trayectoria de un máximo de $N-1$ ligaduras y ningún circuito, terminando en el vértice N .

El tiempo óptimo f_1 , deberá cumplir con la siguiente desigualdad

$$f_1 \leq T$$

Ahora, el camino óptimo de i a N , donde se tiene un máximo de $N-1$ ligaduras, debe ser de clase $\hat{C}_1^{(k)}$, y de hecho en $\hat{C}_1^{(k)}$ para $k \geq N-1$. En consecuencia, el tiempo óptimo para un camino en $\hat{C}_1^{(k)}$, el cual es $F_i^{(k)}$ no puede exceder a f_1 .

Por otra parte si suponemos que $F_i^{(k-1)}$ es menor que f_1 , debe entonces existir un camino en $\hat{C}_1^{(k-1)}$ con tiempo $F_i^{(k-1)}$ el cual es más rápido que el óptimo, este camino no puede alcanzar a N , dado que se tendría una rute mejor que la óptima.

Si la transición entre dos vértices es mínima entonces

$$\tau = \min_{(k,j)} t_{i,j}$$

luego el camino, requiere $k\tau$ de tiempo, ya que se tiene un camino de k ligaduras y así el tiempo $F_1^{(k)}$ es por lo menos $k\tau$, entonces

$$k\tau \leq F_1^{(k)} < f_1 < T$$

o bien

$$k\tau < T/\tau \quad \text{y} \quad k \geq N-1$$

para cualquier k que satisfaga que $k \geq T/\tau$ y

$k \geq N-1$ no puede suceder lo antes descrito, ya que $F_1^{(k)}$ no puede ser diferente de f_1 , por tanto

$$F_1^{(k)} = f_1$$

Dado que $T > (N-1)\tau$ la condición $k \geq T/\tau$ implica $k \geq N-1$; por tanto se concluye que la iteración para una política inicial de

$$F_1^{(i)} = \min_{(i,j)} t_{i,j}$$

$$i = 1, 2, \dots, N$$

debe ser

$$F_1^{(k)} = f_1$$

$$\text{para } k \geq (T/\tau) - 1$$

Luego entonces, la respuesta correcta debe producirse después de cuando mucho $(T/\tau) - 1$ iteraciones.

Regresando a la ejecución del método de aproximaciones sucesivas, es conveniente señalar que existen varias técnicas para su realización. Hay que apuntar, antes de continuar que este método es un proceso algorítmico que puede ser fácilmente realizado por una computadora, cuya capacidad de memoria es variable y depende de la técnica de ejecución empleada.

Como primer punto se tendrá el cálculo directo de las ecuaciones 1.1 lo que implica el desarrollo del algoritmo que se dá a continuación. En adelante se presenta la relación o ecuación que se trata, el algoritmo a seguir y un diagrama de flujo para ser implementado en una computadora.

ALGORITMO 1.1

$$f_i^{(k)} = \min_{i \neq j} (t_{i,j} + f_j^{(k-1)}) \quad i = 1, 2, \dots, N-1$$

$$f_i^{(k)} = 0 \quad k = 2, 3, \dots$$

1.- Datos de entrada: N, número de vértices; T(I, J), matriz de tiempos de conexión; F1(J), elementos iniciales del vector FK(J).

2.- Calcular para I = 1, 2, ..., N-1

$$FMIN(I) = \min (T(I, J) + FH(J))$$

donde H = K - 1 y K = 2, 3, ...

3.- Verificar si existe algún cambio en los valores obtenidos del vector FMIN(I), en caso de no ser iguales al punto 2, de otra forma registrar este valor como el mínimo de la trayectoria buscada.

Diagrama de Flujo.

Ver figura 1.8.

Como segunda forma para la obtención por el método de aproximaciones sucesivas se hará uso del concepto que se manejó con anterioridad en cuanto a las matrices asociadas a una gráfica. Existe, como se ha visto una relación entre éstas y la longitud del camino o trayectoria, es por ello que puede establecerse una conexión entre los elementos de dicha matriz y los tiempos respectivos de conexión entre vértices; considerando lo anterior es posible asociar a cada elemento de la matriz $c_{i,j}$ los siguientes valores de la nueva matriz de tiempo W, así:

$$w_{i,j} = t_{i,j} \quad \text{si} \quad c_{i,j} = 1$$

$$w_{i,j} = 0 \quad \text{si} \quad c_{i,j} = 0$$

y donde $w_{i,i} = 0$ ya que corresponde al tiempo empleado para ir del vértice i al mismo, lo que implica que no habría rg corrido alguno.

Se sabe también que por la ecuación 1.2

$$f_i^{(k)} = \min_{i \neq j} (t_{i,j} + f_j^{(k-1)})$$

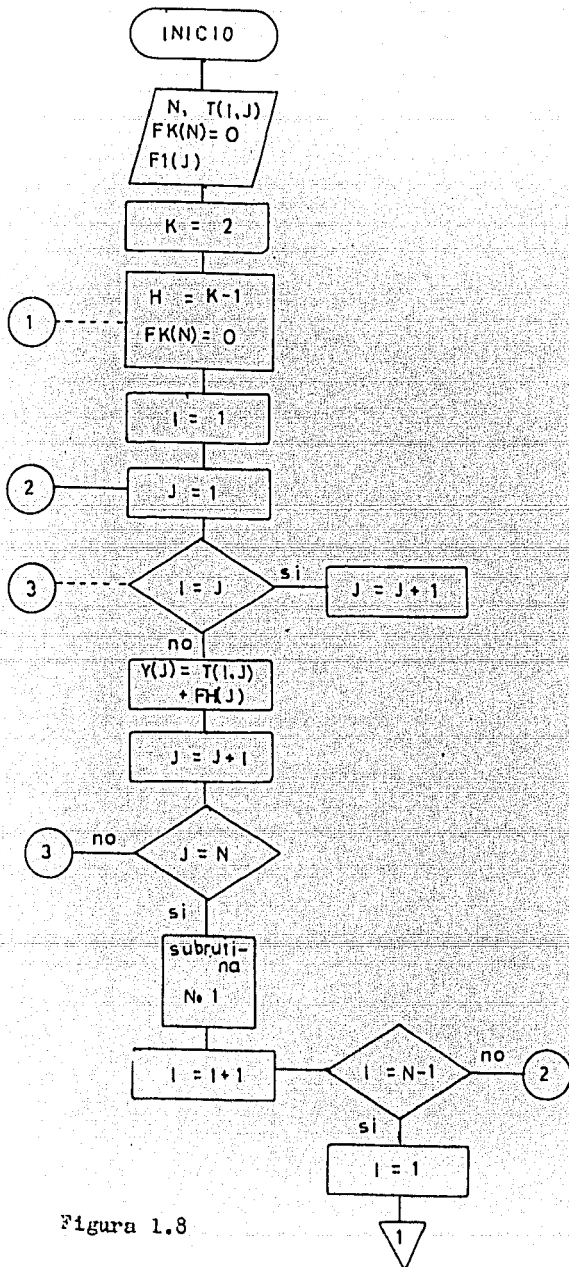


Figura 1.8

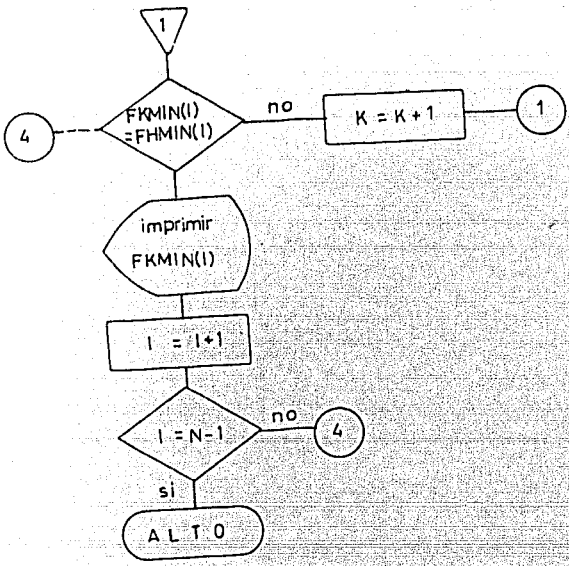


Figura 1.8

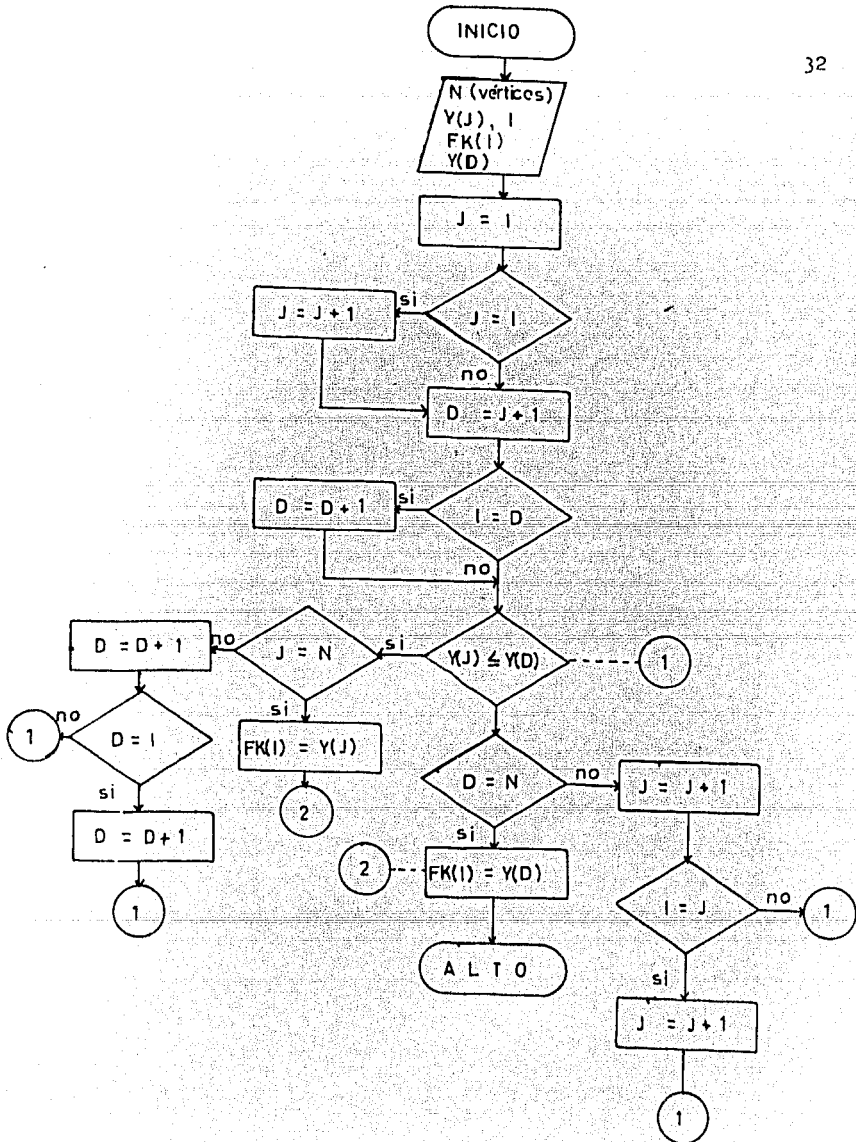


Figura 1.8
Subrutina Núm. 1

$$f_N^{(k)} = 0$$

si $K = k + 1$ se tendrá

$$f_i^{(k+1)} = \min_{i \neq j} (t_{i,j} + f_j^{(k)})$$

$$f_N^{(k+1)} = 0$$

sustituyendo $t_{i,j}$ por los elementos de la matriz W se llega

a

$$f_i^{(k+1)} = \min_{i \neq j} (w_{i,j} + f_j^{(k)})$$

$$f_N^{(k+1)} = 0$$

ésta es la relación de recurrencia de una matriz asociada a una gráfica.

ALGORITMO 1.2.

$$f_i^{(k+1)} = \min_{i \neq j} (w_{i,j} + f_j^{(k)})$$

$$f_N^{(k+1)} = 0$$

Este algoritmo y su respectivo diagrama de flujo es i gual al anterior si se sustituye $t_{i,j}$ por $w_{i,j}$.

Otra manera de considerar el problema será la aplicación de arcos ficticios. Este método consiste en suponer que para todos los vértices existe una conexión directa asignándoseles a los mismos las funciones de la primera aproximación un valor infinito, exceptuando el último vértice cuyo valor es conocido y es igual a cero.

De lo anterior, este método se puede expresar como

$$f_i^{(0)} = \infty \quad i = 1, 2, \dots, N-1$$

$$f_N^{(0)} = 0$$

y

$$f_i^{(k)} = \min_{i \neq j} (t_{i,j} + f_j^{(k-1)}) \quad i = 1, 2, \dots, N-1$$

$$f_N^{(k)} = 0 \quad k = 2, 3, \dots$$

ALGORITMO 1.3

$$f_i^{(0)} = \infty \quad i = 1, 2, \dots, N-1$$

$$f_N^{(0)} = 0$$

y

$$f_i^{(k)} = \min_{i \neq j} (t_{i,j} + f_j^{(k-1)}) \quad i = 1, 2, \dots, N-1$$

$$f_N^{(k)} = 0 \quad k = 2, 3, \dots$$

1.- Datos de entrada: N , número de vértices; $F1(I) = \infty$ (o bien un número sumamente grande) y $F1(N) = 0$ como valores iniciales.

2.- Calcúlense con estos valores

$$FMIN(I) = \min (T(I, J) + FH(J))$$

donde

$$i = 1, 2, \dots, N-1$$

$$H = K - 1$$

$$K = 2, 3, \dots$$

3.- Supóngase que se presentan cambios en los valores obtenidos de las funciones mínimas, de ser así, regrese al punto 2, en caso contrario registre este valor como el óptimo esperado.

Diagrama de Flujo.

Ver figura 1.9.

Otra forma de clasificación, que resulta también en algunos casos de gran utilidad, consiste en seleccionar de la gráfica presentada una serie de conjuntos de tal manera que los elementos del primero estén contenidos en el segundo, los de éste en el tercero y así sucesivamente, hasta tener el conjunto de todos los elementos de los vértices.

El algoritmo y diagrama de flujo útiles en este caso es el 1.1 donde en los datos iniciales se han escogido los conjuntos.

Por último, cabría señalar que en el método de aproximaciones sucesivas es posible encontrar un método que permite acelerar el proceso de convergencia hacia la solución buscada. En los casos anteriores se han calculado todas las funciones solución basándose en los anteriores valores obtenidos, la idea que en este proceso se maneja es la de utilizar no tan sólo los valores obtenidos antes de la k -ésima aproximación, sino los correspondientes a ésta para valores menores que i y que deben de haber sido ya calculados. Con esto en mente la convergencia a un valor solución

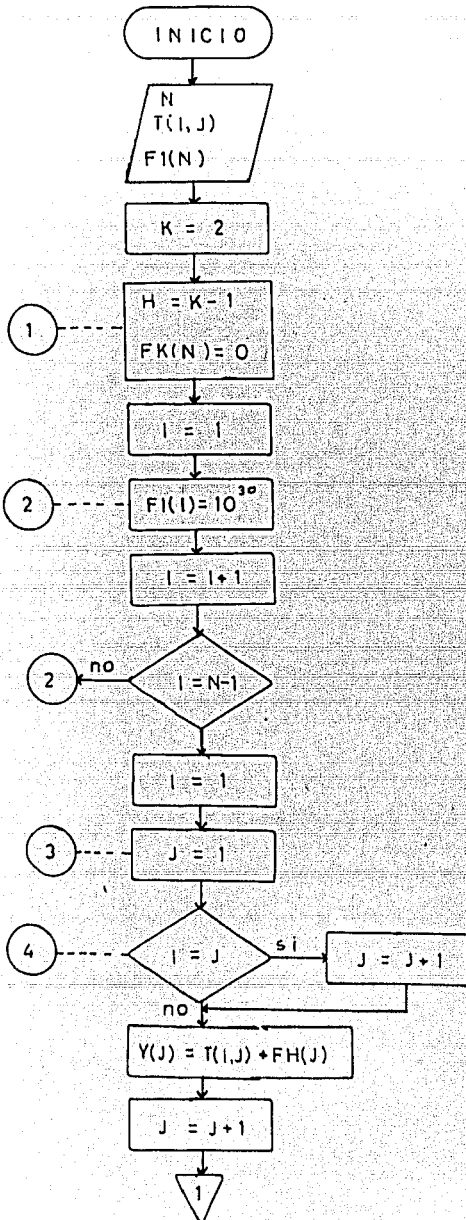


Figura 1.9

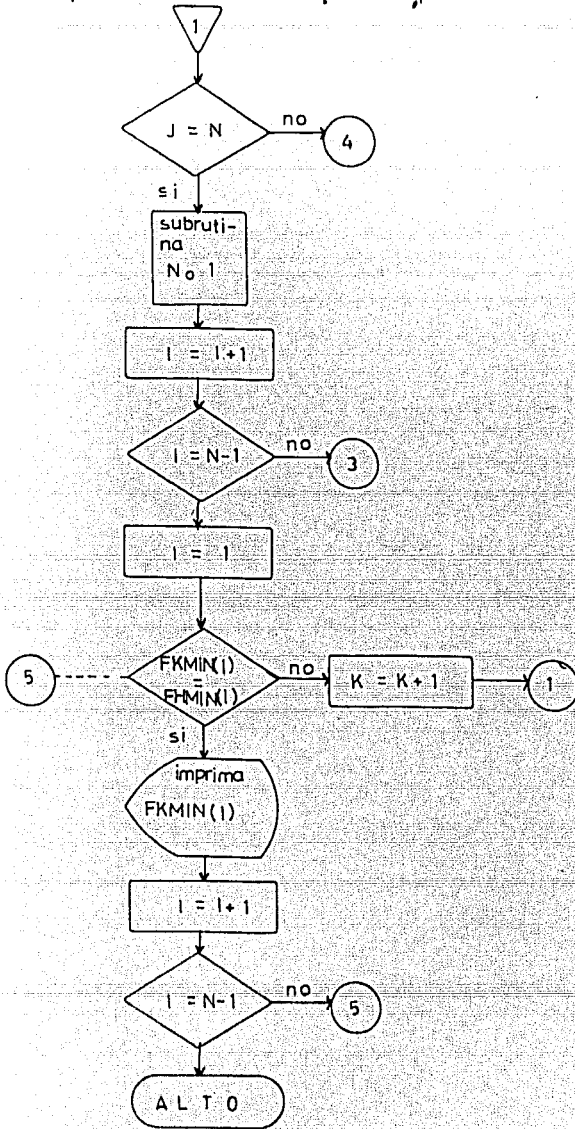


Figure 1.9

dado se obtiene acercando la solución por dos curvas diferentes, las de aproximaciones menores que i en la k -ésima aproximación y las superiores para la aproximación anterior $k + 1$, así la ecuación por resolver será:

$$f_i^{(k)} = \min (t_{i,i} + f_i^{(k)}, \dots, t_{i,i-1} + f_{i-1}^{(k)}, t_{i,i+1} + f_{i+1}^{(k-1)}, \dots, t_{i,N-1} + f_{N-1}^{(k-1)}, t_{i,N})$$

donde

$$f_N^{(k)} = 0$$

El orden en que deben considerarse los vértices debe ser inverso al empleado con anterioridad ya que de no ser así éste método resulta de igual velocidad de convergencia que los anteriores. Esta característica tiene sentido si se piensa que los vértices finales son los más cercanos a N que se ha fijado como fin de la trayectoria.

ALGORITMO 1.4

$$f_i^{(k)} = \min (t_{i,i} + f_i^{(k)}, \dots, t_{i,i-1} + f_{i-1}^{(k)}, t_{i,i+1} + f_{i+1}^{(k-1)}, \dots, t_{i,N-1} + f_{N-1}^{(k-1)}, t_{i,N})$$

- 1.- Escoja el orden de los vértices que se va a considerar (de lo anterior se ve que el orden debe ser inverso al empleado comunmente, por tanto $i = N, N-1, \dots, 2, 1$).
- 2.- Datos almacenados: N , número de vértices; $T(I, J)$, matriz de tiempos de conexión.
- 3.- Asígnese a los valores iniciales (primera aproximación) de la función $F1(I) = \infty$ y $F1(N) = 0$.
- 4.- Para cada vértice i calcúlese la relación $FK(I)$, suponga el mínimo como $FMIN(I)$.
- 5.- Observe si se presenta algún cambio en los valores de esta función, en caso de ser cierto regrese al punto 4, de otra forma registre este valor como el óptimo para cada vértice.

Diagrama de Flujo.

Ver figura 1.10

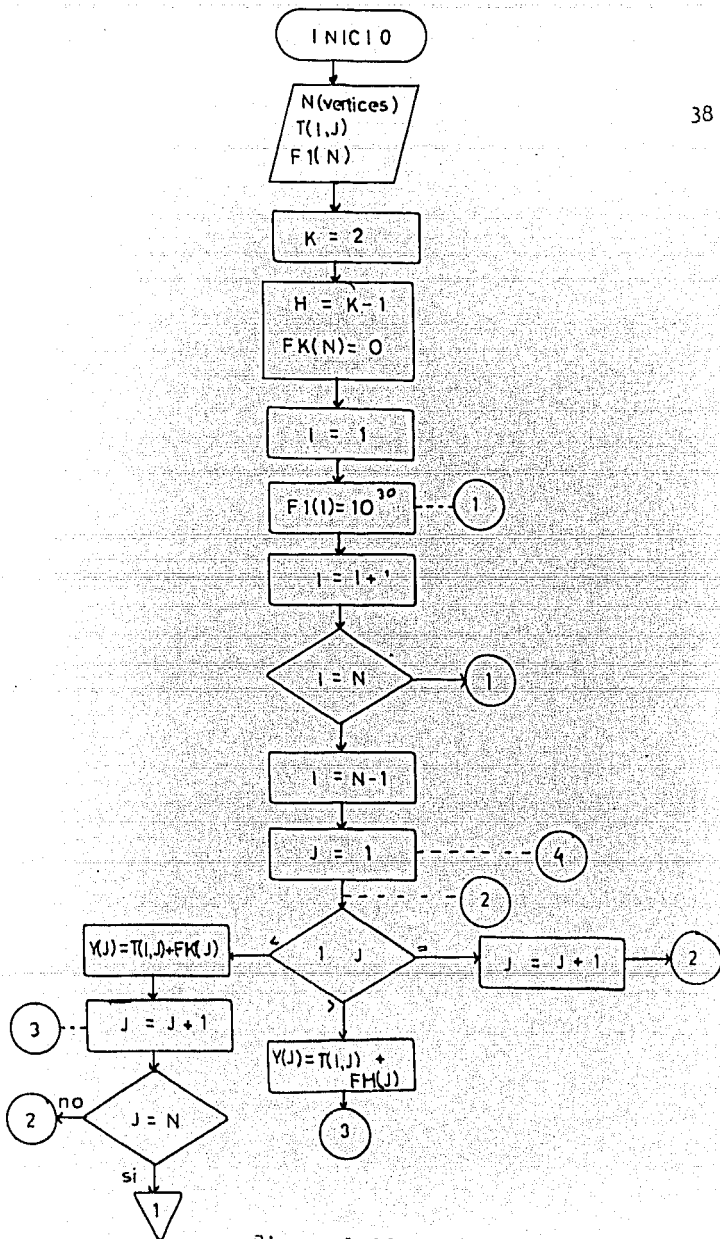


Figura 1.10

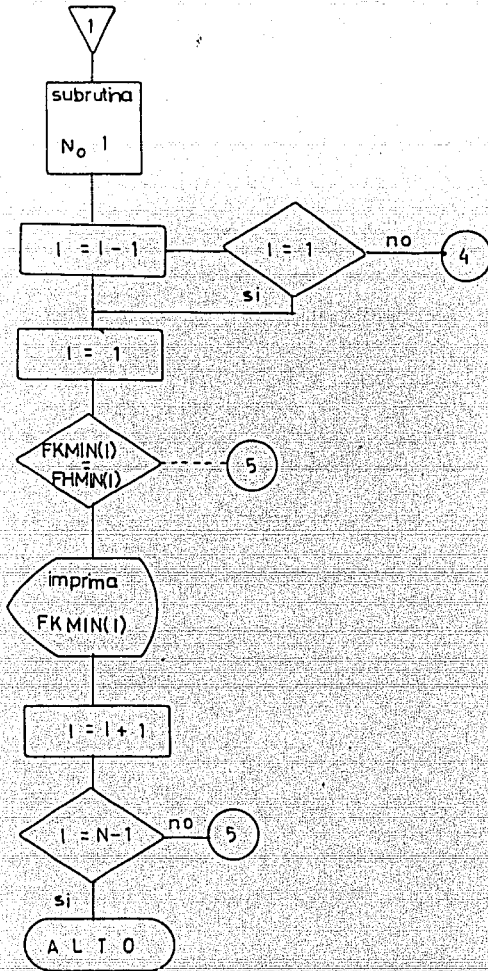


Figura 1.10

Búsqueda en orden natural para la estructura de árbol.

Una vez que se ha comprendido la estructura de árbol es necesario encontrar métodos que permitan el análisis de los mismos con el fin de extraer alguna información contenida en un nodo o bien inclusive, para la modificación del mismo.

La búsqueda en orden natural consiste en efectuar un recorrido por ramas hasta encontrar las hojas o nodos terminales y regresar al nodo padre del subárbol que se encuentre el término de la primera rama de la estructura. La primera rama por recorrer será la que se encuentre más a la izquierda. La búsqueda continuará por la siguiente rama de izquierda a derecha del subárbol localizado hasta localizar nuevamente las hojas. Este proceso se efectúa continuamente hasta encontrar el nodo deseado donde se suspende el recorrido y se extrae la información, es posible que no se encuentre la información buscada en el árbol entonces, se terminará la búsqueda al regresar nuevamente a la raíz y el árbol habrá sido recorrido en orden natural.

Para la figura 1.11 se tendrá entonces el recorrido completo de la siguiente manera: $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow E \rightarrow F \rightarrow G \rightarrow H \rightarrow I \rightarrow J \rightarrow A$.

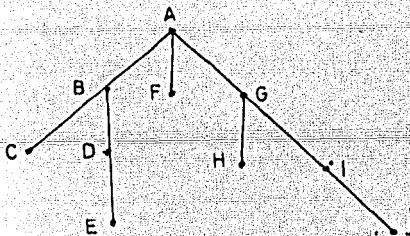


Figura 1.11

Como se vió en secciones anteriores existe una matriz asociada a toda gráfica que en el caso de la figura 1.11 se representará en la figura 1.12.

$$3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Figura 1.12

Si se ve la matriz asociada se ve que los nodos que los nodos que corresponden a una misma columna son los nodos buscados, tratando de encontrar así cual es la trayectoria mínima entre la raíz y el nodo deseado. En el caso de que se localice un solo nodo del tipo requerido la trayectoria será única. Un punto importante por aclarar, es el hecho de que el mismo nodo se encuentre en igual nivel y bajo el mismo padre, esta circunstancia no tiene sentido y se prohíbe en este tipo de gráficas ya que se formaría un circuito.

Es factible hacer uso de una computadora, como se ha visto, para realizar este tipo de recorrido. A continuación se muestra en el siguiente diagrama de flujo que es la ejecución del algoritmo descrito anteriormente.

Obsérvese que la primera columna de la matriz asociada tiene valor igual a cero ya que corresponde a la raíz.

Diagrama de flujo para la búsqueda en orden natural.

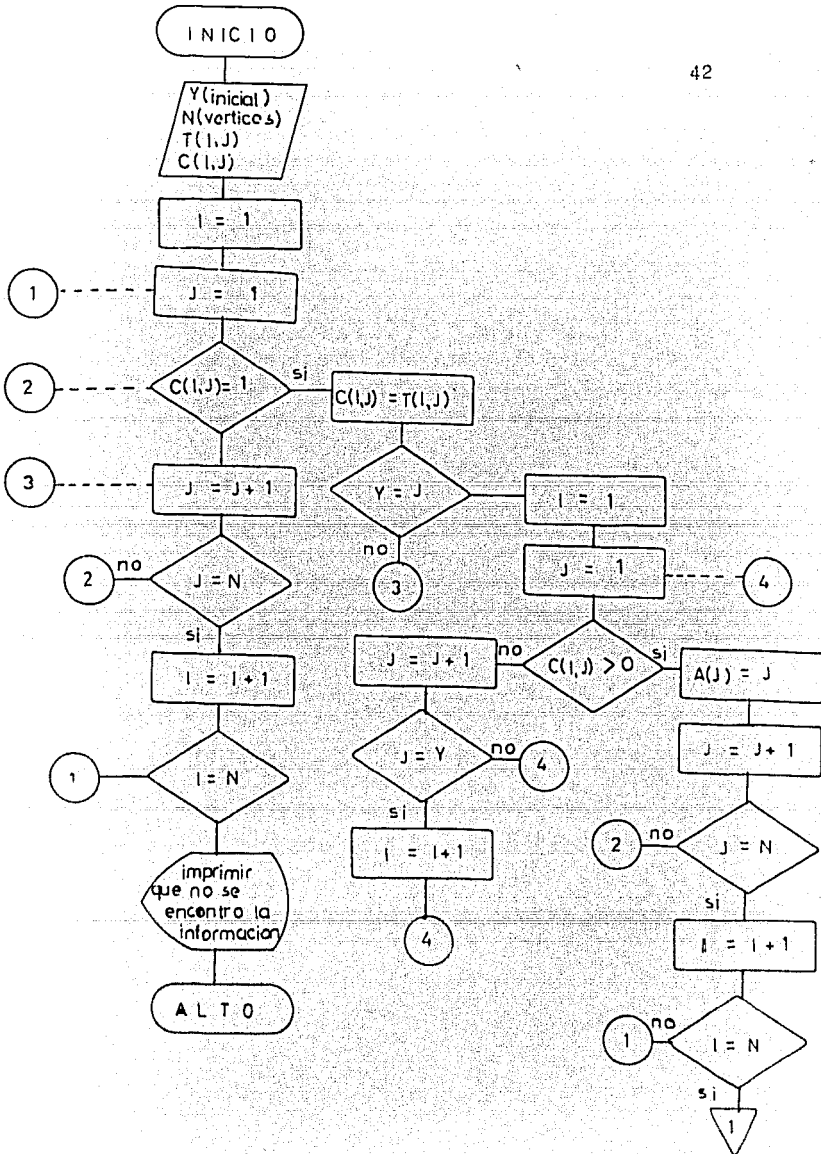


Figura 1.12

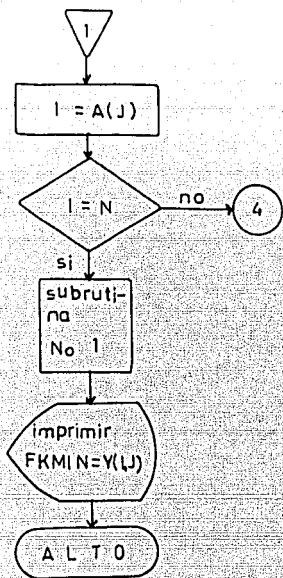


Figura 1.12

Búsqueda por niveles para la estructura de árbol.

En gran cantidad de casos se presenta que es mucho más sencillo analizar una estructura nivel por nivel ya que si el nodo buscado se encuentra en la última rama en el primer nivel, la búsqueda en orden natural implica el haber recorrido todas las ramas en todos los niveles y la suspensión de la búsqueda en el nivel 1 de la n-ésima rama, esto lleva un mayor consumo de tiempo de búsqueda que si el análisis se realizara nivel por nivel y de izquierda a derecha.

El tipo de árbol a analizar por este método puede ser aquél cuyos nodos son todos diferentes o bien aquellos arreglos de estructura en el cual no se forme ningún circuito.

Se analizará el árbol de la figura 1.11 y su respectiva matriz asociada proporciona información y una estructura de recorrido.

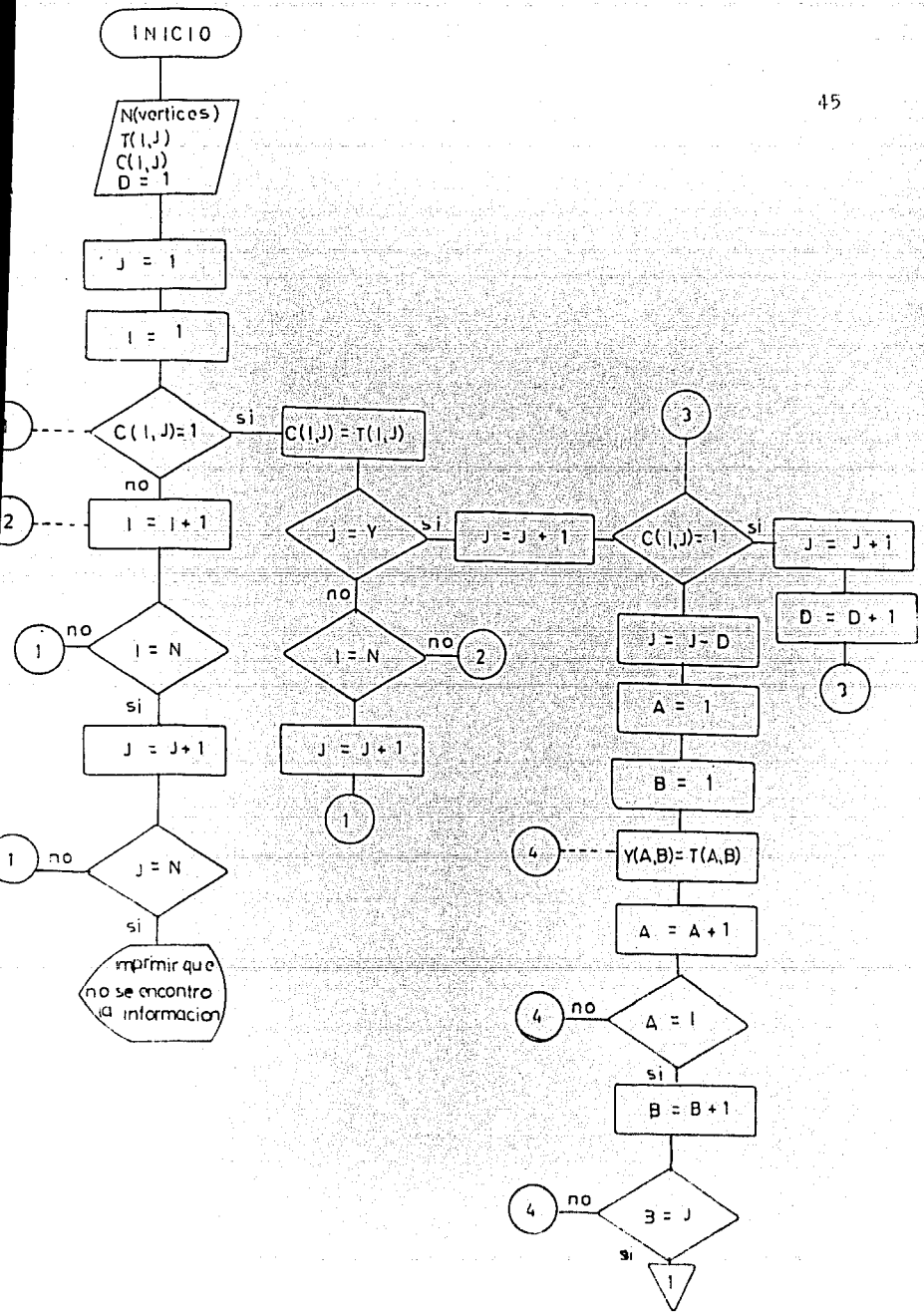
El recorrido nivel por nivel será entonces: $A \rightarrow B \rightarrow F \rightarrow G \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow H \rightarrow I \rightarrow E \rightarrow J \rightarrow A$.

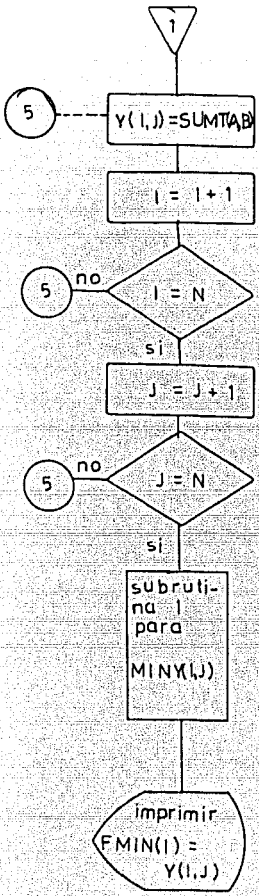
Si el recorrido finaliza nuevamente en la raíz, la búsqueda habrá terminado y se registrará que no se ha encontrado el nodo requerido, en caso contrario se hará el registro en la salida y se calculará siguiendo este procedimiento la trayectoria mínima.

Se analiza el primer renglón y en seguida los renglones de igual valor a la columna inicial siguiendo este procedimiento hasta encontrar el valor del nodo deseado o bien localizar el vértice $c_{n,n}$ donde se registrará en la salida que la búsqueda ha sido infructuosa.

A continuación se da el siguiente diagrama de flujo que ejecuta el algoritmo anterior.

Diagrama de flujo para la búsqueda por niveles.





Con ésto se ha descrito una estructura de árbol, que es la más usual y dos formas de búsqueda. Como se ha visto, este método es muy lento y por tanto conveniente solamente para sistemas de pocos datos, o bien, para análisis de datos que se encuentren en las primeras ramas si la búsqueda es por ramas o en los primeros niveles si la búsqueda es por niveles.

CAPITULO 2.-

ESTRUCTURA DE ANILLO

En el capítulo anterior se analizó la estructura de árbol, con lo que se encontró un tipo de organización secuencial, numerable y rígida, así mismo, se estudiaron dos formas de búsqueda para la misma, un recorrido en orden natural y el otro nivel por nivel, eligiendo en cada caso, que se tuviera una estructura de este tipo, el recorrido más conveniente.

En éste capítulo se analizará similarmente una nueva estructura que se conoce como anillo. Desde el punto de vista de teoría de gráficas, un anillo es una gráfica fuertemente conectada que presenta por lo menos un circuito. Al vértice donde termina e inicia el circuito se le reconoce como cabeza del anillo, que como la raíz en un árbol, contiene toda la información necesaria para iniciar o dar por terminada la búsqueda.

De lo anterior, se entiende entonces que, en una estructura de anillo no existe repetición de vértices, ya que en principio todo el anillo debe ser recorrido. La imagen más simple que se encuentra para un anillo es la de un sólo circuito, es decir, los arcos de unión entre los vértices tienen todos, la misma orientación; la figura 2.1 muestra un anillo de ésta forma.

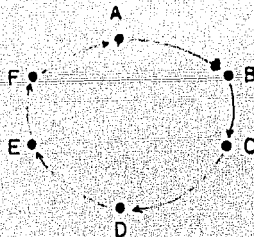


Figura 2.1

El problema que en esta estructura se ve, consiste en el hecho de que si alguno de los vértices se pierde, la información total contenida en el anillo también se pierde, ya que la única conexión que cada vértice presenta es con el siguiente.

Este problema podría ser resuelto si cada uno de los vértices tuviera como segunda opción regresar nuevamente a la cabeza, de esta forma al menos uno de los vértices podrá recuperarse; la figura 2.2 muestra lo anteriormente expuesto.

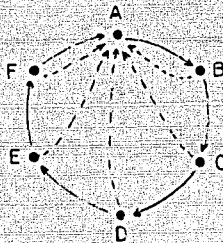


Figura 2.2

Se observa de esta figura que el último vértice, es el único que tiene como única conexión el arco de unión entre él y la cabeza del anillo. Sin embargo, aunque la pérdida de información no es total, en caso de perderse la información de un vértice, la recuperación de información no es eficiente, por ello consideramos de suma importancia un anillo con arcos bidimensionales, es decir, que exista siempre entre los vértices un arco de ida y otro de regreso, de esta manera si se destruye alguno de los vértices del anillo, los demás siguen siendo accesibles; la figura 2.3 muestra un anillo de este tipo.

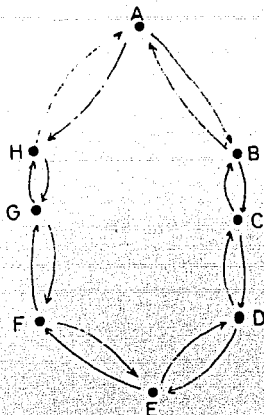


Figura 2.3

El tiempo empleado en la recuperación continúa siendo considerable, sin embargo la información almacenada es siempre recuperable.

Las dos últimas formas de conexión contienen a la primera, es decir al anillo simple, pero aseguran la obtención de información, de tal manera que será posible realizar una combinación entre ellas para mejorar la estructura establecida. De tal manera que tendremos una estructura llamada anillo coral que aporta las ventajas de las anteriores; la figura 2.4 muestra un anillo coral.

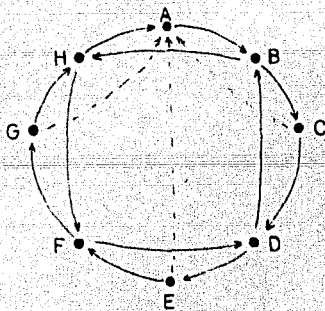


Figura 2.4

En este tipo de estructura están contenidos varios circuitos, uno externo, otro interno, y otros que se dirigen siempre a la cabeza y corresponden a aquellos que no han sido relacionados con el circuito interno.

Una de las principales desventajas presentes en estructuras de anillo es el tiempo empleado en la búsqueda que generalmente es muy largo. Si en una cadena (o anillo) existen N_0 ítems (vértices) y cada ítem tiene la misma probabilidad que los demás de ser requerido, el número medio de registros que han de ser examinados antes de hallar el buscado es:

$$N = \sum_{k=1}^{N_0} k \frac{1}{N_0} = \frac{N_0 + 1}{2}$$

donde N = Número medio de registros que deben ser examinados antes de localizar el buscado.

k = Numeración de los registros examinados.

$1/N_0$ = Probabilidad de que el k -ésimo requisito examinado sea el buscado.

ya que

$$\begin{aligned} N &= \sum_{k=1}^{N_0} k \frac{1}{N_0} = \frac{1}{N_0} + 2 \frac{1}{N_0} + 3 \frac{1}{N_0} + \dots + \frac{N_0}{N_0} \\ &= \frac{1}{N_0} (1 + 2 + 3 + \dots + N_0) \end{aligned}$$

ahora bien se sabe que

$$1 + 2 + 3 + \dots + N_0 = \frac{N_0 (N_0 + 1)}{2}$$

por tanto

$$N = \frac{1}{N_0} \left(\frac{N_0 (N_0 + 1)}{2} \right) = \frac{N_0 + 1}{2}$$

lo que implica que más de la mitad de los vértices deben ser recorridos antes de localizar el valor deseado, esto implica un consumo de tiempo en la recuperación de registros.

En cuanto a su representación, podemos recurrir nuevamente a las matrices asociadas a una gráfica, así para las figuras 2.1 a 2.4 su representación matricial se da en la figura 2.5 a b c d respectivamente.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = C \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = C$$

(a) (b)

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = C \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = C$$

(c) (d)

Figure 2.5

Se observa que en las matrices, se encuentra presente siempre una diagonal de unos, lo cual nos indica que la primera estructura de anillo se encuentra siempre presente.

Búsqueda de Información en la Estructura de Anillo.

Como en el capítulo anterior se ha visto que es necesaria la creación de algunas técnicas o métodos de análisis que disminuyen el tiempo requerido para la localización de algún registro (vértice) dado.

En éste caso, se estudiará el método de exploración por salteo. Este consiste como su nombre lo indica en realizar la búsqueda saltando o pasando por alto varios registros, lo cual se consigue dividiendo el anillo en varios grupos de registros y donde la búsqueda se efectuará en sentido igual al de la secuencia de ellos.

Así por ejemplo, en un anillo se tendrá la siguiente búsqueda: (fig. 2.6).

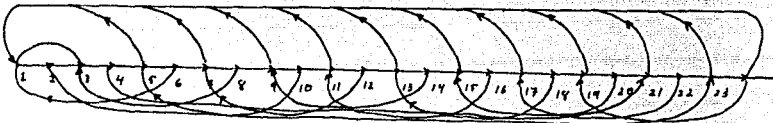


Figura 2.6

podría preguntarse cuál será el número de elementos por grupo óptimo para que el recorrido sea mínimo, a continuación se muestra el procedimiento seguido por J. Martin¹ para encontrar dicha longitud.

Sea N_c el número de registros de una cadena de exploración saltada (ya que como puede observarse en la figura 2.6 un anillo puede representarse como una cadena) y N_g el número de registros de los grupos saltados.

El número medio de grupos que deben ser examinados para dar con el registro buscado es:

$$N_1 = \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{N_c}{N_g} \rfloor} k \cdot \frac{1}{\left(\frac{N_c}{N_g}\right)} = \frac{\left(\frac{N_c}{N_g}\right) + 1}{2}$$

donde $\frac{1}{\left(\frac{N_c}{N_g}\right)}$ = probabilidad de que el k -ésimo grupo contenga el registro buscado.

Una vez localizado el grupo que contiene el registro requerido, la exploración continúa el recorrido por todos los elementos de ese grupo, ya analizado el primer registro el número restante que queda por analizar es como máximo $N-1$ de tal manera que el número medio de registros por examinar es:

$$N_2 = \sum_{k=0}^{N_g-1} k \cdot \frac{1}{N_g} + \frac{N_g - 1}{2}$$

Si N_c es el número de registros que deben ser examinados en total al explorar la cadena y $E(N_c)$ es el número medio de ellos. Entonces, éste último debe ser la suma del medio de grupos examinados N_1 y el número de registros que dentro de un grupo se examinan, por lo tanto

$$\begin{aligned}
 E(Nc) &= \frac{\frac{Nc}{Na} + 1}{2} + \frac{Na - 1}{2} \\
 &= \frac{\frac{Nc}{Na}}{2} + \frac{1}{2} + \frac{Na}{2} - \frac{1}{2} \\
 &= \left(\frac{Nc}{Na}\right) + \frac{Na}{2}
 \end{aligned}$$

Si se minimiza la expresión para obtener el mínimo número de registros por grupo se tiene:

$$\begin{aligned}
 \frac{dE(Nc)}{dNa} &= -\frac{Nc}{2Na^2} + \frac{1}{2} = 0 \\
 \Rightarrow \frac{Nc}{2Na^2} &= \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

por lo tanto

$$Na = \sqrt{Nc}$$

De donde el número óptimo de registros por grupo del anillo es igual a la raíz cuadrada del número total de registros del mismo. Por tanto, el número de registros del anillo que deben analizarse si hay elementos en cada grupo es:

$$\begin{aligned}
 E(Nc) &= \frac{1}{2} \left(\frac{Nc}{\sqrt{Nc}}\right) + \frac{\sqrt{Nc}}{2} \\
 &= \frac{1}{2}\sqrt{Nc} + \frac{1}{2}\sqrt{Nc} = \sqrt{Nc}
 \end{aligned}$$

Anillos para representar estructuras de árbol.

De las estructuras que se han visto podría ahora preguntarse si es posible pasar de una a otra, es decir, si es posible que un árbol se represente como anillo y a la inversa.

En el primer caso, si se tiene una estructura de árbol como el de la figura 2.7, es posible representarla como una estructura de anillo.

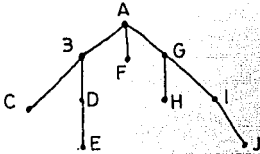


Figura 2.7

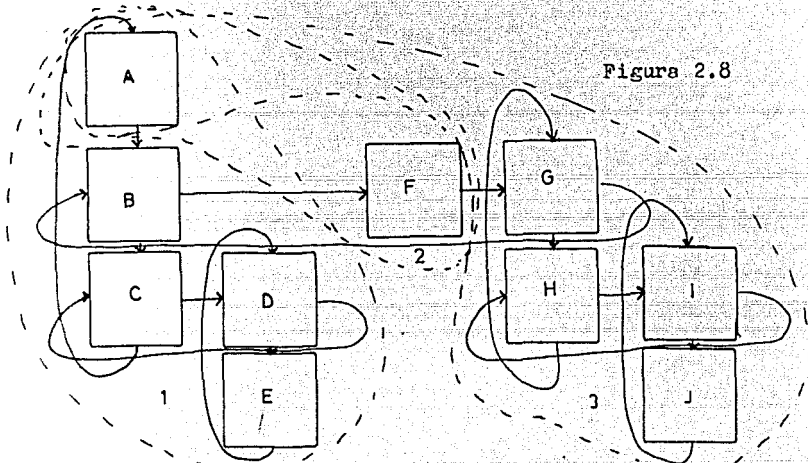


Figura 2.8

Para ellos, se conectarán los nodos del mismo nivel y del mismo padre considerando como subcabeza de cada nivel del anillo el elemento de más a la izquierda. La raíz, se coloca sobre la subcabeza del siguiente nivel de la primera rama de más a la izquierda. Cada anillo se conecta con su padre respectivo, como lo muestra la figura 2.8.

De la figura 2.8, la sección 1 corresponde a la rama n° 1; la sección 2 a la rama n° 2, y la sección 3 a la rama n° 3. Cada nivel está interconectado si corresponde al mismo padre existiendo un anillo que relaciona

las ramas correspondientes, las subramas se conectan con el padre respectivo sin llegar a conectarse directamente con él si se trata de la rama secundaria.

La segunda forma tendría repetición continua de la raíz y de algunos vértices en su estructura y el recorrido implicaría un mayor tiempo, por tanto no tiene sentido alguno su realización.

Con esto se ha dado un esbozo general de los tipos de organización de datos que generalmente se utilizan, y algunas de las formas de recuperación de ellos que se conocen. En capítulos posteriores se hará uso de la información hasta ahora recopilada, y se compararán los métodos antes mencionados con los de programación neurística que se desarrolla en el capítulo 3.

CAPITULO 3.-

PROGRAMACION HEURISTICA.

En el capítulo que a continuación se desarrolla, se tratarán algunos métodos de programación heurística, que serán de gran utilidad en el análisis de estructuras como los que en capítulos anteriores se han desarrollado. El porqué, de la necesidad del empleo de éstos métodos puede resumirse en la reducción de tiempo empleado en su selección y por tanto en el incremento de la eficiencia del mismo.

En los tres métodos que se describen, el proceso a seguir es el acotamiento del conjunto convexo formado por las ecuaciones que describen el plano de soluciones de la estructura que se analiza. Este acotamiento se efectúa en varios procesos de disminución del conjunto solución por restas de pendiente variable.

El primer método por discutir será el de Dantzing -- Manne.

Dado el conjunto convexo de soluciones se tiene un programa de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 1) \quad & [\text{MIN}] f = [c]_{1 \times n} [x]_{n \times 1} \\
 2) \quad & [a]_{m \times n} [x]_{n \times 1} \geq [b]_{m \times 1} \\
 3) \quad & [x]_{n \times 1} \geq [0]_{n \times 1} \\
 4) \quad & [x]_{n \times 1} \in \mathbb{Z}^n
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

en donde los puntos de intersección de los n planos generados de los $m + n$ condiciones del programa son puntos extremos del conjunto convexo solución del que se habla, esto indica que

$[a]_{m \times n} [x]_{n \times 1} = [b]_{m \times 1}$
 genera m hiperplanos y que

$[x]_{n \times 1} = [0]_{n \times 1}$
 en n restantes.

Si en el algoritmo expresado por la ecuación 3.1 se desean en los espacios mínimos considerados, es posible establecer la igualdad con la ayuda de las llamadas variables de desviación que se denotan en esta sección como S_i , obviamente la cantidad necesaria para efectuar lo anterior, de variables S_i es igual a $m + n$, de tal manera que:

$$[a]_{m \times n} [x]_{n \times 1} - S_i = [b]_{m \times 1}$$

y por tanto

$$S_i \in \mathbb{R}^+ \quad i = 1, 2, \dots, m+n$$

aún más es posible restringir este conjunto si se sabe que el algoritmo 3.1 cumple con

$$[a]_{m \times n} \quad \text{y} \quad [b]_{m \times 1} \in \mathbb{Z}$$

y ya que $[x]_{n \times 1}$ son variables enteras, se tiene por tanto que

$$S_i \in \mathbb{N} \quad i = 1, 2, \dots, m+n$$

por lo que n de las $m+n$ variables de desviación son nulas, al satisfacer que

$$[x]_{n \times 1} = [0]_{n \times 1}$$

y dado que la condición del algoritmo es

$$[x]_{n \times 1} \geq [0]_{n \times 1}$$

para satisfacer la desigualdad

$$[x]_{n \times 1} > [0]_{n \times 1}$$

al menos una de las variables de desviación debe ser 1 de donde si para la n -ésima ecuación se tienen n variables se pueden expresar como

$$S_{i_1} + S_{i_2} + \dots + S_{i_n} \geq 1 \quad \text{con} \quad S_{i_\alpha} \geq 0 \quad \text{y} \quad \alpha = 1, 2, \dots, n \quad (3.2)$$

$$\text{por lo tanto} \quad \sum_{\alpha=1}^n S_{i_\alpha} \geq 1$$

en donde al menos una $S_{i_\alpha} > 0$

Por otra parte es evidente que la solución de

$[x]_{n \times 1}$ depende de las condiciones (2) y (3) del algoritmo 3.1 y por tanto estas variables de desviación también deben depender de las variables del programa, así:

$$S_i = S_i [x] \quad i = 1, 2, \dots, m+n$$

Si de la ecuación 3.2 se desea obtener su límite, se añade una nueva variable de desviación $t_p [x]$, de tal manera que:

$$\sum_{k=1}^n s_{\lambda k}^{(p)} [x] - t_p [x] = 1 \quad 3.3$$

esta es la restricción que en el método de Dantzing - Manne se propone para encontrar la solución del programa lineal que se ha planteado.

Cabría ahora, preguntar si éste método es siempre válido, es decir, si en un número finito de pasos es factible la obtención de la solución buscada. La respuesta evidentemente depende de la convergencia de las soluciones bajo el empleo de éste método. Así a continuación se enuncian dos teoremas y un lema que son de gran importancia en cuanto a la convergencia de la solución.

Lema 3.1

Tómese un punto $[x]_{n \times 1}$ que satisface las condiciones siguientes:

$$[a]_{m \times n} [x]_{n \times 1} \geq [b]_{m \times 1}$$

y

$$[x]_{n \times 1} \geq [0]_{n \times 1}$$

Calcúlese los valores de las $m+n$ variables de desviación $s_i [\bar{x}]$ con $i = 1, 2, \dots, m+n$.

Considérese que $s_{\lambda k}^{(p)} [\bar{x}]$ con $k = 1, 2, \dots, n-1, n, n+1, \dots, n+m$ son las mismas variables de desviación

ordenadas de tal manera que:

$$s_{\lambda_1}^{(p)} [\bar{x}] \leq s_{\lambda_2}^{(p)} [\bar{x}] \leq \dots \leq s_{\lambda_{n-1}}^{(p)} [\bar{x}] \leq s_{\lambda_n}^{(p)} [\bar{x}] \leq s_{\lambda_{n+1}}^{(p)} [\bar{x}] \leq \dots \leq s_{\lambda_{n+m}}^{(p)} [\bar{x}]$$

por lo que si

$$\left(\sum_{k=1}^{n-1} s_{\lambda k}^{(p)} [\bar{x}] \geq 1 \right)$$

entonces

$$\left(t_p [\bar{x}] \geq s_{\lambda_{n-1}}^{(p)} [\bar{x}] \right) \quad p = 1, 2, \dots$$

Teorema 3.1

Si $[\bar{x}]_{n \times 1}$ es un punto de la solución entera óptima del algoritmo 3.1, entonces el método de Dantzing - Manne converge solamente si los $(n-1)$ valores más pequeños de las variables de desviación $S; [\bar{x}]$ $i = 1, 2, \dots, m+n$ son 0.

Teorema 3.2

Sea $[x^*]$ un punto elemento de un poliedro convexo

$$[a]_{m \times n} [x]_{n \times 1} \geq [b]_{m \times 1}$$

$$[x]_{n \times 1} \geq [0]_{n \times 1}$$

que tiene al menos una componente no entera y suponga que

$$[c]' [x^*] < [c]' [\bar{x}]$$

donde $[\bar{x}]$ es la solución mínima entera del programa 3.1

entonces

$$\sum_{k=1}^{m+n} s_{Ak}^{(1)} [x^*] < 1$$

es una condición necesaria para que se cumpla la convergencia en el método de Dantzing - Manne.

A continuación se presenta un ejemplo que muestra la solución de un algoritmo por éste método.

Ejemplo 3.1

Supóngase el siguiente programa lineal:

$$1) \text{ [MAX] } z = x_1 + x_2 + x_3$$

$$2) x_1 + x_2 \leq 1$$

$$3) x_1 + x_3 \leq 1$$

$$4) x_2 + x_3 \leq 1$$

$$5) x_i \geq 0 \quad i = 1, 2, 3$$

si se añaden a las desigualdades las variables de desviación respectivas $s_1, s_2, s_3 \geq 0$ el algoritmo anterior se presenta como:

$$1) \text{ [MAX] } z = x_1 + x_2 + x_3$$

$$2) x_1 + x_2 + s_1 = 1$$

$$3) x_1 + x_3 + s_2 = 1$$

$$4) x_2 + x_3 + s_3 = 1$$

$$5) x_i \geq 0 \quad i = 1, 2, 3$$

propóngase $s_1 = s_2 = s_3 = 0$, entonces

$$x_1 + x_2 = 1$$

$$x_1 + x_3 = 1$$

$$x_2 + x_3 = 1$$

la solución por éste sistema es:

$$(x_1, x_2, x_3) = (1/2, 1/2, 1/2)$$

que no es una solución entera, por tanto si se añade la restricción de Dantzing - Manne t_1 se tendrán la siguiente ecuación:

$$s_1 + s_2 + s_3 - t_1 = 1 \quad t_1 \geq 0$$

entonces

$$s_1 = 1 + t_1 - s_2 - s_3$$

si se sustituye en (2) del algoritmo y se reduce con ayuda de (3) y (4) se tendrá

$$x_1 + x_2 + 0 + t_1 - s_2 - s_3 = 0$$

$$x_1 + 0 + x_3 + 0 + s_2 + 0 = 1$$

$$0 + x_2 + x_3 + 0 + 0 + s_3 = 1$$

por tanto

$$2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + t_1 = 2$$

esta ecuación es un plano de restricción generado por la condición de Dantzing-Manne. Luego entonces, debe buscarse si la intersección de este plano con los otros tres da una solución entera, en caso de que las tres soluciones fuesen enteras se selecciona la que produzca un máximo en la función de costo. Así, analizando los tres casos se tiene:

a) Si $t_1 = s_2 = s_3 = 0$

entonces

$$2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 2$$

$$x_1 + x_2 = 1$$

$$x_1 + x_3 = 1$$

de donde

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}} = 1$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}} = 0$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}} = 0$$

por tanto

$$(x_1, x_2, x_3) = (1, 0, 0)$$

$$z = 1$$

b) Si $t_1 = s_1 = s_2 = 0$

$$2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 2$$

$$x_1 + x_2 = 1$$

$$x_2 + x_3 = 1$$

entonces

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}} = 0$$

$$x_2 = \begin{array}{|c|} \hline 2 & 2 & 2 \\ \hline 1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 1 \\ \hline \end{array} = 1$$

$$x_3 = \begin{array}{|c|} \hline 2 & 2 & 2 \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 1 \\ \hline \end{array} = 0$$

por tanto

$$(x_0, x_1, x_2) = (0, 1, 0)$$

$$z = 1$$

c) Si $t_1 = s_2 = s_3 = 0$

$$2x_0 + 2x_1 + 2x_2 = 2$$

$$x_0 + x_1 = 1$$

$$x_1 + x_2 = 1$$

entonces

$$x_0 = \begin{array}{|c|} \hline 2 & 2 & 2 \\ \hline 1 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array} = 0$$

$$x_1 = \begin{array}{|c|} \hline 2 & 2 & 2 \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 1 \\ \hline \end{array} = 0$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}} = 1$$

por tanto

$$(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 1)$$

$$z = 1$$

de donde el óptimo se alcanza en cualquiera de las tres soluciones encontradas, por lo que las soluciones óptimas son:

$$(1, 0, 0); (0, 1, 0); (0, 0, 1)$$

Otro método que es de gran utilidad es el llamado mé todo de arborescencia para ecuaciones lineales pseudo-booleanas, del tipo

$$A_1 x_1 + B_1 \bar{x}_1 + A_2 x_2 + B_2 \bar{x}_2 + \dots + A_n x_n + B_n \bar{x}_n = k$$

donde \bar{x}_i con $i = 1, 2, \dots, n$ es la negación de x_i ; y $x_i \in \{0, 1\}$; $k, A_i, B_i \in \mathbb{R}$

para el análisis de esta ecuación pueden presentarse dos casos:

i) Si $A_i = B_i$,

entonces

$$A_i x_i + B_i \bar{x}_i = A_i (x_i + \bar{x}_i) = A_i$$

que se reduce a un polinomio del álgebra común.

ii) Si $A_i \neq B_i$,

podría tenerse entonces que

$$y_i = x_i, \text{ si } A_i > B_i, \quad y_i = \bar{x}_i, \text{ si } B_i > A_i,$$

por lo que

$$A_i x_i + B_i \bar{x}_i = |A_i - B_i| y_i + (A_i \wedge B_i) \quad i = 1, \dots, n$$

donde $(A_i \wedge B_i)$ es el menor entre A_i y B_i ,

$$\text{Si } C_i = |A_i - B_i|$$

entonces

$$\sum_{i=1}^n A_i x_i + B_i \bar{x}_i = \sum_{i=1}^n C_i y_i + \sum_{i=1}^n (A_i \wedge B_i) = k$$

$$\text{si } D = k - \sum_{i=1}^n (A_i \wedge B_i) \\ \sum_{i=1}^n C_i y_i = D$$

recomodando los coeficientes de tal manera que

$$C_1' \geq C_2' \geq \dots \geq C_n' \quad \text{y } u_i = y_i$$

entonces

$$\sum_{i=1}^n C_i' u_i = D$$

por lo que se tienen las siguientes soluciones

Si $D < 0$

no existe solución

(3.4)

Si $D = 0$

la única solución es

$$u_1 = u_2 = \dots = u_n = 0$$

(3.5)

Si $D > 0$ y $C_1' \geq C_2' \geq \dots \geq C_p' > D \geq C_{p+1}' \geq \dots > C_n'$

entonces

$$u_1 = u_2 = \dots = u_p = 0 \quad \text{y} \quad \sum_{j=p+1}^n C_j' u_j = D \quad (3.6)$$

Si $D > 0$ y $C_1' = C_2' = \dots = C_p' = D \geq C_{p+1}' \geq \dots \geq C_n'$

entonces

$$a) \quad \forall_{k=1, \dots, p} \quad u_k = 1 \quad \text{y} \quad u_1 = \dots = u_{k-1} = u_{k+1} = \dots = u_n = 0$$

es una solución

b) en cualquier otro caso

$$u_1 = \dots = u_p = 0 \quad \text{y} \quad \sum_{j=p+1}^n C_j' u_j = D \quad (3.7)$$

Si $D > 0$; $C_1' < D$ y $\sum_{i=1}^n C_i' < D$

entonces no hay solución

(3.8)

Si $D > 0$; $C_1' < D$ $i = 1, 2, \dots, n$ y $\sum_{i=1}^n C_i' = D$

entonces la única solución es

$$u_1 = u_2 = u_3 = \dots = u_n = 1 \quad (3.9)$$

Si $D > 0$; $C_1' < D$ $i = 1, 2, \dots, n$; $\sum_{i=1}^n C_i' > D$ y $\sum_{j=1}^n C_j' < D$

entonces

$$u_1 = 1 \quad \text{y} \quad \sum_{j=2}^n C_j' u_j = D - C_1' \quad (3.10)$$

Si $D > 0$; $C_1' < D$ $i = 1, 2, \dots, n$; $\sum_{i=1}^n C_i' > D$ y $\sum_{j=2}^n C_j' < D$

entonces

$$\begin{aligned} u_i &= 1 & \text{y} & \sum_{j=1}^n C_j u_j = D - C_i & \text{o bien} \\ u_i &= 0 & \text{y} & \sum_{j=1}^n C_j u_j = D \end{aligned} \quad (3.11)$$

Como muestra de este desarrollo se presenta el siguiente ejemplo:

Ejemplo 3.2

Se analizará un algoritmo que ha sido desarrollado por Kaufmann y que muestra claramente que no se cumple la condición del teorema 3.2 y que por tanto no puede ser resuelto por el método de Dantzing Mann, sin embargo, se da una solución del mismo por el método de arborescencia antes visto.

Considérese el siguiente algoritmo

- 1) [MIN] $f = -4x_1 - 3x_2 - 3x_3$,
- 2) $3x_1 + 4x_2 + 4x_3 \leq 6$
- 3) $0 \leq x_1 \leq 1$
- 4) $0 \leq x_2 \leq 1$
- 5) $0 \leq x_3 \leq 1$
- 6) $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{N}$

Es posible comprobar que la solución mínima estará dada por $[1, 0, 0] = [\bar{x}]$, de donde la función de costo es igual a menos cuatro, del teorema 3.1 se tiene que las $n-1$ primeras variables de desviación deben ser igual a cero, por lo que las condiciones del problema cumplen con éste.

En cuanto al segundo propóngase

$$[\bar{x}^*] = [1/2, 1/2, 1/2] \quad \text{entonces } f = -5$$

Si

- 1) $3x_1 + 4x_2 + 4x_3 + s_1 = 6$
- 2) $x_1 + s_2 = 1$
- 3) $x_2 - s_3 = 1$
- 4) $x_3 - s_4 = 1$
- 5) $x_1 + s_5 = 0$
- 6) $x_2 + s_6 = 0$

$$7) x_3 + s_7 = 0$$

entonces

$$s_1 [x^*] = 1/2 \quad s_5 [x^*] = 1/2$$

$$s_2 [x^*] = 1/2 \quad s_6 [x^*] = 1/2$$

$$s_3 [x^*] = 1/2 \quad s_7 [x^*] = 1/2$$

$$s_4 [x^*] = 1/2$$

de las cuales las dos menores deben ser igual a cero, lo cual no se cumple y aún más se tiene que

$$\sum_{k=1}^{n-1} s_{\lambda k}^{(1)} [x^*] = (1/2) + (1/2) = 1$$

y donde se debería tener que

$$\sum_{k=1}^{n-1} s_{\lambda k}^{(1)} [x^*] < 1$$

ya que

$$[c]' [x^*] < [c]' [\bar{x}]$$

$$[c]' [x^*] = [-4 \ -3 \ -3] \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

$$= -5$$

$$[c]' [\bar{x}] = [-4 \ -3 \ -3] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= -4$$

de donde

$$-5 < -4$$

con lo que no se cumple la condición del teorema 3.2 y por tanto este problema no tiene solución por el método de Dantzing-Menne.

Una forma de resolver este problema es por el método de arborescencia así:

$$3x_1 + 4x_2 + 4x_3 \leq 6 \quad \text{con } x_i \in \{0, 1\}$$

y donde

$$\bar{x}_i = 0$$

entonces

$$B_i = 0$$

por tanto

$$C_1 = 3 \quad C_2 = 4 \quad C_3 = 4 \quad y$$

$$(A, \wedge B,) = 0 \quad i = 1, 2, 3$$

entonces

$$3x_1 + 4x_2 + 4x_3 = 3y_1 + 4y_2 + 4y_3 \leq 6$$

ahora bien

$$D = 6 - \sum_{i=1}^3 (A, \wedge B,) = 6$$

y como

$$C_1 \geq C_2 \geq C_3$$

entonces

$$3u_1 + 4u_2 + 4u_3 \leq 6$$

dado que

$$D_1 = 6 > 0 \quad ; \quad C_1 = 3 < 6 \quad ; \quad C_2 = C_3 = 4 < 6 \quad ;$$

$$\sum_{i=1}^3 C_i = 3 + 4 + 4 = 11 > 6 \quad y \quad \sum_{j=1}^3 C_j = 4 + 4 = 8 > 6$$

entonces

$$u_1 = 1 \quad y \quad \sum_{j=2}^3 C_j u_j = 4u_2 + 4u_3 \leq D - C_1 = 6 - 3 = 3$$

por tanto

$$4u_2 + 4u_3 \leq 3$$

$$y \text{ si } u_1 = 0 \quad y \quad \sum_{j=2}^3 C_j u_j = 4u_2 + 4u_3 \leq D = 6$$

por tanto

$$4u_2 + 4u_3 \leq 6$$

para la primera se tiene

$$D' = 3 > 0 \quad y \quad C_2 = C_3 = 4 > 3$$

de donde

$$u_2 = u_3 = 0$$

para la segunda se tiene

$$D' = 6 > 0 \quad ; \quad C_2 = C_3 = 4 < 6 \quad ; \quad \sum_{i=2}^3 C_i = 4 + 4 = 8$$

$$y \quad \sum_{i=2}^3 C_i = 4 < 6 = D$$

de donde la solución será

$$u_2 = 1 \quad y \quad 4u_3 \leq 6 - 4 = 2$$

por último para ésta se tiene

$$D = 2 > 0 \quad y \quad C_3 = 4 > 2$$

entonces

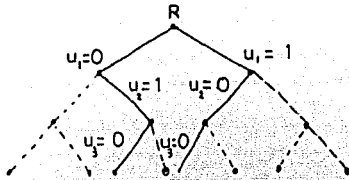
$$u_3 = 0$$

por tanto las dos soluciones que se obtienen son:

$$[u_1, u_2, u_3] = [0, 1, 0]$$

$$[u_1, u_2, u_3] = [1, 0, 0]$$

el árbol de soluciones se muestra en seguida, con líneas continuas se representan las soluciones obtenidas anteriormente.



como $u_1 = y_1 = x_1$; $u_2 = y_2 = x_2$; $u_3 = y_3 = x_3$,
por lo tanto

$$[x_1, x_2, x_3] = [0, 1, 0]$$

$$[x_1, x_2, x_3] = [1, 0, 0]$$

De estas soluciones se escoge aquella que sea mínima, por lo que la solución buscada es:

$$[x_1, x_2, x_3] = [1, 0, 0]$$

ya que $f = -4$

con lo que se resuelve el algoritmo satisfactoriamente.

Otro método útil en la resolución de algoritmos lineales cuya solución sea entera es el de las cortaduras de Gomory.

Similarmente al método de Dantzing-Manne, éste propone ciertas restricciones que se conocen como cortaduras de Gomory para el acotamiento del conjunto convexo de soluciones.

Supóngase el siguiente programa lineal

$$1) \text{ [MAX] } g = [c]_{1 \times n} [x]_{n \times 1}$$

$$2) [A]_{m \times n} [x]_{n \times 1} \leq [b]_{m \times 1}$$

$$3) [x]_{n \times 1} \in \mathbb{Z}^n \quad (3.4)$$

$$4) [x]_{n \times 1} \geq [0]_{n \times 1}$$

en donde $[a]$, $[b]$ y $[c]$ son matrices enteras.

En principio se ignora la cuarta restricción del algoritmo 3.4, en tal caso para que

$$[x]_{n \times 1} \in \mathbb{Z}^n$$

se cumpla pueden tenerse dos casos:

- i) que la solución $[x]_{n \times 1}$ sea entera, en cuyo caso la solución máxima del algoritmo se ha encontrado
- ii) que la solución $[x]_{n \times 1}$ no sea entera, en este caso es factible el empleo de algún método como es el del caso de Dantzing-Mann en seguida por otro lado el de Gomory. Este es el caso que se discutirá.

Como en el caso anterior es posible añadir ciertas restricciones al conjunto solución, que en el método de Gomory se conocen como cortaduras.

Ahora bien, es posible añadir al conjunto solución variables de desviación u , de tal manera que se obtenga el máximo conjunto posible, entonces:

$$[a]_{m \times n} [x]_{n \times 1} + [1]_{m \times n} [u]_{n \times 1} = [b]_{m \times 1}$$

si se designa por:

$[x_B]_{m \times 1}$ = variables consideradas de $[x]_{n \times 1}$ y $[u]_{m \times 1}$ todas elementos de la base

$[x_N]_{r \times 1}$ = variables consideradas de $[x]_{n \times 1}$ y $[u]_{m \times 1}$ todas no elementos de la base

$[B]_{m \times m}$ = coeficientes $[a]_{m \times n}$ y $[1]_{m \times m}$, todos elementos de la base

$[N]_{m \times n}$ = coeficientes $[a]_{m \times n}$ y $[1]_{m \times m}$, todos no elementos de la base.

El algoritmo 3.4 se expresa como:

$$\begin{aligned} 1) [\text{MAX}]_E &= [c]_{1 \times m} [x_B]_{m \times 1} + [c]_{1 \times n} [x_N]_{n \times 1} \\ 2) [B]_{m \times m} [x_B]_{m \times 1} + [N]_{m \times n} [x_N]_{n \times 1} &= [b]_{m \times 1} \\ 3) [x_B]_{m \times 1} &\in \mathbb{Z}^m \quad [x_N]_{n \times 1} \in \mathbb{Z}^n \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$4) [x_B]_{m \times 1} \geq [0]_{m \times 1} \quad \text{y} \quad [x_N]_{n \times 1} \geq [0]_{n \times 1}$$

Como $[B]_{m \times m}$ es regular, debe existir $[B]_{m \times m}^{-1}$

entonces para la segunda condición:

$$[B]_{m \times m}^{-1} [B]_{m \times m} [x_B]_{m \times 1} + [B]_{m \times m}^{-1} [N]_{m \times n} [x_N]_{n \times 1} = [B]_{m \times m}^{-1} [b]_{m \times 1}$$

por tanto

$$[x_B]_{m \times 1} = [B]_{m \times m}^{-1} [b]_{m \times 1} - [B]_{m \times m}^{-1} [N]_{m \times n} [x_N]_{n \times 1}$$

si se denota por

$$[\mathcal{L}]_{m \times n} = [B]_{m \times m}^{-1} [N]_{m \times n}$$

donde $\bar{a}_{i,j}$ con $i = 1, 2, \dots, m$ y $j = 1, 2, \dots, n$ es un elemento de $[\mathcal{L}]_{m \times n}$

y por \bar{b}_i con $i = 1, 2, \dots, m$ al elemento de la i -ésima línea de la matriz $[B]_{m \times m}^{-1} [b]_{m \times 1}$, se tendrá que para la i -ésima línea:

$$x_{\theta_i} = \bar{b}_i - \sum_{j=1}^n \bar{a}_{i,j} x_{N_j} \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (3.6)$$

Como x_{θ_i} debe ser entera por definición bajo la operación de congruencia, módulo p se reduce la ecuación 3.6 a

$$\bar{b}_i - \sum_{j=1}^n \bar{a}_{i,j} x_{N_j} = 0 \quad \text{mod. } 1 \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (3.7)$$

si se denomina por

$$\langle \bar{a}_{i,j} \rangle = \text{mayor entero menor que } \bar{a}_{i,j} \quad i = 1, 2, \dots, m \\ j = 1, 2, \dots, n$$

entonces

$$\{\bar{a}_{i,j}\} = \bar{a}_{i,j} - \langle \bar{a}_{i,j} \rangle \quad i = 0, 1, \dots, m \\ j = 1, 2, \dots, n$$

donde se ve claramente que

$$0 \leq \{\bar{a}_{i,j}\} < 1$$

por tanto

$$\bar{b}_i = \{\bar{b}_i\} + \langle \bar{b}_i \rangle$$

$$\bar{a}_{i,j} = \{\bar{a}_{i,j}\} + \langle \bar{a}_{i,j} \rangle$$

sustituyendo en 3.7

$$\{\bar{b}_i\} + \langle \bar{b}_i \rangle - \sum_{j=1}^n \{\bar{a}_{i,j}\} x_{N_j} - \sum_{j=1}^n \langle \bar{a}_{i,j} \rangle x_{N_j} = 0 \quad \text{mod. } 1 \quad (3.9)$$

como se desean encontrar las condiciones necesarias y suficientes para que soluciones no enteras lo sean, los valores enteros de 3.9 no contribuyen y por tanto

$$\{ \bar{b}_i \} - \sum_{j=1}^n \{ \bar{a}_{i,j} \} x_{N_j} = 0$$

ya que

$$x_{N_j} \geq 0 \quad \text{y} \quad \sum_{j=1}^n \{ \bar{a}_{i,j} \} x_{N_j} \geq 0$$

y bajo la suposición de que $\{ x_B \}$ es no entera se tiene que

$$0 < \{ \bar{b}_i \} < 1$$

entonces

$$\{ \bar{b}_i \} - \sum_{j=1}^n \{ \bar{a}_{i,j} \} x_{N_j} < 0 \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (3.9)$$

Donde la ecuación 3.9 representa la restricción buscada y es conocida como cortaduras de Gomory.

Es posible expresar lo anterior en función de los elementos de la base con el fin de facilitar el empleo de las mismas, para ello regrésese a la expresión obtenida para $\{ x_B \}_{m \times 1}$,

$$\{ x_B \}_{m \times 1} = [B]_{m \times m}^{-1} \{ b \}_{m \times 1} - [B]_{m \times m}^{-1} [N]_{m \times n} \{ x_N \}_{n \times 1}$$

por tanto

$$x_{B_i} = [B]_{i,m}^{-1} \{ b \}_{m \times 1} - [B]_{i,m}^{-1} [N]_{m \times n} \{ x_N \}_{n \times 1}$$

si x_{B_i} es solución óptima debe entonces ser un entero y ya que cualquier combinación lineal formada por enteros como coeficientes proporciona enteros; si se define $\{ \alpha \}_{i,m}$ con

$$\alpha_i \in \mathbb{Z} \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$\{ \alpha \}_{i,m} \{ x_B \}_{m \times 1} = \text{un entero}$$

por tanto

$$\begin{aligned} \{ \alpha \}_{i,m} \{ x_B \}_{m \times 1} &= \{ \alpha \}_{i,m} [B]_{i,m}^{-1} \{ b \}_{m \times 1} - \{ \alpha \}_{i,m} [B]_{i,m}^{-1} [N]_{m \times n} \{ x_N \}_{n \times 1} \\ &= \text{un entero} \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} &\langle \{ \alpha \}_{i,m} [B]_{i,m}^{-1} \{ b \}_{m \times 1} \rangle + \{ \{ \alpha \}_{i,m} [B]_{i,m}^{-1} \{ b \}_{m \times 1} \} - \langle \{ \alpha \}_{i,m} [B]_{i,m}^{-1} [N]_{m \times n} \{ x_N \}_{n \times 1} \rangle \\ &- \{ \{ \alpha \}_{i,m} [B]_{i,m}^{-1} [N]_{m \times n} \{ x_N \}_{n \times 1} \} = \text{un entero} \end{aligned}$$

como en este caso los enteros no contribuyen

$$\{ \{ \alpha \}_{i,m} [B]_{i,m}^{-1} \{ b \}_{m \times 1} \} - \{ \{ \alpha \}_{i,m} [B]_{i,m}^{-1} [N]_{m \times n} \{ x_N \}_{n \times 1} \} = \text{un entero}$$

y ya que

$$0 \leq \{ \{ \alpha \}_{i,m} [B]_{i,m}^{-1} \{ b \}_{m \times 1} \} < 1$$

y

$$\{ \{ \alpha \}_{i,m} [B]_{i,m}^{-1} [N]_{m \times n} \{ x_N \}_{n \times 1} \} \gg 0$$

entonces

$$\{[a]_{1 \times m} [B]_{m \times m}^{-1} [b]_{m \times 1}\} - \{[a]_{1 \times m} [P]_{m \times m}^{-1} [r]_{m \times 1}\} [x]_{m \times 1} \leq 0$$

que es la ecuación de las cortaduras de Gomory en función de los elementos de la base.

Es fácil demostrar que el conjunto \mathcal{I} de cortaduras bajo la operación $*$ forma un grupo abeliano, simplemente observando que es un espacio homomórfico del grupo $(A, +)$ y aún más se puede demostrar que las cortaduras de Gomory bajo ciertas condiciones forma un grupo cíclico.

Un ejemplo que ilustra el empleo de las cortaduras de Gomory es el siguiente

Ejemplo 3.3

Considérese el siguiente algoritmo lineal

- 1) $[\text{MAX}]g = 3x_1 - x_2$
- 2) $3x_1 - 2x_2 \leq 3$
- 3) $-5x_1 - 4x_2 \leq -10$
- 4) $2x_1 + x_2 \leq 5$
- 5) $x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \quad x_i \geq 0 \quad i = 1, 2$

añadiendo las respectivas variables de desviación se tiene que

- 1) $[\text{MAX}]g = 3x_1 - x_2$
- 2) $3x_1 - 2x_2 + u_1 = 3$
- 3) $-5x_1 - 4x_2 + u_2 = -10$
- 4) $2x_1 + x_2 + u_3 = 5$
- 5) $x_i \in \mathbb{Z} \quad x_i \geq 0 \quad i = 1, 2$

de donde surge la siguiente tabla

		1	2	3	4	5	6
	g	x ₁	x ₂	u ₁	u ₂	u ₃	u ₄
0	g	0	1	3	-1	0	0
1	u ₁	3	0	3	-2	1	0
2	u ₂	10	0	-5	-4	0	1
3	u ₃	5	0	2	1	0	0

La primera columna representa las variables básicas y las siguientes los coeficientes de las variables del algoritmo que se analiza. Empleando el método dual-simplex la solución g no es máxima ya que la línea cero tiene elementos negativos, es posible entonces calcular elementos de una nueva tabla considerando que en la columna tres

$$\min (3/(-2), -10/-4, 5/1) = -3/2$$

entonces tomando como elemento de pivoteo el elemento de la línea $r = 1$ y la columna $s = 3$ se puede calcular la tabla siguiente sabiendo que:

$$b_r^* = \bar{b} / \bar{a}_{r,s} \quad a_{r,j}^* = \bar{a}_{r,j} / \bar{a}_{r,s}$$

$$b_i^* = \bar{b}_i - \bar{a}_{i,s} b_r^* \quad a_{i,j}^* = \bar{a}_{i,j} - \bar{a}_{i,s} a_{r,j}^*$$

$$c_j^* = \bar{c}_j - \bar{c}_s a_{r,j}^*$$

		1	2	3	4	5	6
	g	x ₁	x ₂	u ₁	u ₂	u ₃	u ₄
0	g	30/7	1	0	0	5/7	0
1	x ₁	13/7	0	1	0	1/7	0
2	u ₁	31/7	0	0	0	-3/7	1
3	x ₂	9/7	0	0	1	-2/7	0

que provee una solución $x_1 = 13/7$ $x_2 = 9/7$ $g = 30/7$

$$u_1 = u_2 = 0 \quad u_3 = 31/7$$

que no es una solución entera por lo que es posible generar una cortadura de Gomory que ayude a la solución del problema, de la tabla se ve que

$$x_1 = 13/7 - u_1/7 - 2u_2/7$$

de donde

$$\langle 13/7 \rangle = 1$$

$$\langle 1/7 \rangle = 0$$

$$\langle 2/7 \rangle = 0$$

$$\{13/7\} = (13/7) - 1 = 6/7$$

$$\{1/7\} = (1/7) - 0 = 1/7$$

$$\{2/7\} = (2/7) - 0 = 2/7$$

la cortadura generada será

$$\{13/7\} - \{1/7\} u_1 - \{2/7\} u_2 \leq 0$$

$$6/7 - u_1/7 - 2u_2/7 \leq 0$$

$$6 - u_1 - 2u_2 \leq 0$$

o bien

$$u_1 + 2u_2 \geq 6$$

ya que

$$u_1 = 3 - 3x_1 + 2x_2,$$

$$u_2 = 5 - 2x_1 - x_2,$$

entonces

$$\begin{aligned} u_1 + 2u_2 &= 3 - 3x_1 + 2x_2 + 2(5 - 2x_1 - x_2) \\ &= 13 - 7x_1 \geq 6 \end{aligned}$$

entonces

$$-7x_1 \geq 6 - 13 = -7$$

por tanto

$$x_1 \leq 1$$

que es la cortadura de Gomory generada, si añadimos su variable de desviación se tendrá

$$x_1 + u_4 = 1 \quad \text{con } u_4 \geq 0$$

introduciendo ésta en las restricciones del algoritmo original, o bien, como

$$-u_1/7 - 2u_2/7 + u_4 = -6/7$$

que se propone en otra tabla para la resolución del sistema por el método dual-simplex, así:

	1	2	3	4	5	6	7
g	x_1	x_2	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5
0 g	30/7	1	0	0	5/7	0	3/7
1 x_1	13/7	0	1	0	1/7	0	2/7
2 u_1	31/7	0	0	0	-3/7	122/7	0
3 x_2	9/7	0	0	1	-2/7	0	3/7
4 u_4	-6/7	0	0	0	-1/7	0	-2/7

nuevamente por el método de pivoteo se selecciona en este caso el renglón $r = 4$ y la columna $s = 6$, donde el elemento de pivoteo es $-2/7$, lo que genera la siguiente tabla

	1	2	3	4	5	6	7
g	x_1	x_2	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5
0 g	3	1	0	0	1/2	0	0
1 x_1	1	0	1	0	0	0	1
2 u_1	-5	0	0	0	-2	1	0
3 x_2	0	0	0	1	-1/2	0	0
4 u_2	3	0	0	0	1/2	0	1

que no proporciona una solución ya que $u_2 = -5 < 0$, entonces utilizando éste renglón y a -2 como pivote se obtiene la siguiente tabla

	1	2	3	4	5	6	7
g	x_1	x_2	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5
0 g	7/4	1	0	0	0	1/4	0
1 x_1	1	0	1	0	0	0	1
2 u_1	0/4	0	0	0	1-2/4	0-22/4	
3 x_2	5/4	0	0	1	0-1/4	0-5/4	
4 u_2	7/4	0	0	0	0	1/4	1-3/4

que no da una solución entera, pero como todos los elementos son mayores que cero se puede generar una nueva cortadura de Gomory, así, para u_1 se tiene

$$u_1 = 7/4 - u_2/4 + 3u_4/4$$

$$\langle 7/4 \rangle = 1 \quad \langle 1/4 \rangle = 0 \quad \langle -3/4 \rangle = -1$$

por tanto

$$\{7/4\} = (7/4) - 1 = 3/4$$

$$\{1/4\} = (1/4) - 0 = 1/4$$

entonces

$$\{-3/4\} = -3/4 - (-1) = (-3/4) + 1 = 1/4$$

por lo tanto

$$\{7/4\} - \{1/4\}u_2 - \{-3/4\}u_4 \leq 0$$

$$3/4 - u_2/4 - u_4/4 \leq 0$$

$$3 - u_2 - u_4 \leq 0$$

por tanto

$$u_2 + u_4 \geq 3$$

como

$$u_2 = -10 + 5x_1 + 4x_2$$

$$u_4 = -7/3 + u_2/3 + 4u_3/3$$

o bien

$$u_4 = 1 - x_1$$

entonces

$$\begin{aligned} u_2 + u_4 &= -10 + 5x_1 + 4x_2 + 1 - x_1 \\ &= -9 + 4x_1 + 4x_2 \geq 3 \end{aligned}$$

de donde

$$4x_1 + 4x_2 \geq 12$$

por lo tanto

$$x_1 + x_2 \geq 3$$

añadiendo su variable de desviación $u_5 > 0$ se presenta como

$$x_1 + x_2 - u_5 = 3$$

o bien

$$-u_2/4 - u_4/4 + u_5 = -3/4$$

con esta restricción más se puede generar la siguiente tabla

	1	2	3	4	5	6	7	8
	g	x_1	x_2	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5
0 g	7/4	1	0	0	1/4	0	17/4	0
1 x_1	1	0	1	0	0	0	1	0
2 u_1	10/4	0	0	1	-2/4	0	-22/4	0
3 x_2	5/4	0	0	1	-1/4	0	-5/4	0
4 u_3	7/4	0	0	0	1/4	1	-3/4	0
5 u_5	-3/4	0	0	0	-1/4	0	-1/4	1

utilizando el renglón de u_3 como línea de pivoteo y a $-1/4$ de u_5 como pivote se tiene la siguiente tabla:

		1	2	3	4	5	6	7	8
	Σ	x_1	x_2	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6
0	Σ	1	1	0	0	0	0	0	1 4
1	x_1	1	0	1	0	0	0	0	0 1
2	u_1	4	0	0	0	1	0	0	2 -5
3	x_2	2	0	0	1	0	0	0	1 -1
4	u_3	1	0	0	0	0	0	1	-1 -1
5	u_2	3	0	0	0	0	1	0	-4 1

que da la siguiente solución

$$x_1 = 1 \quad x_2 = 2 \quad g = 1 \quad u_1 = 4 \quad u_2 = 3 \quad u_3 = 1 \\ u_4 = u_5 = 0$$

que cumple con las restricciones del problema y es por tanto la solución óptima del mismo.

Con éste se concluye la síntesis de los métodos de programación heurística, que pueden ser de gran utilidad en la resolución de algoritmos lineales con soluciones enteras, por la facilidad de su manejo, en el capítulo siguiente para la resolución de los algoritmos formulados el método de las cortaduras de Gomory.

CAPITULO 4.-

APLICACIONES Y CONCLUSIONES.

Una vez analizados diversos métodos de solución en programación heurística se puede preguntar si son éstos aplicables a las estructuras de información vistos en los primeros capítulos. En especial, la atención se centrará en las estructuras de árbol y se comparará con las formas de búsqueda que en el primer capítulo se desarrollaron.

El primer problema que se presenta es el establecimiento de ecuaciones que correspondan a una estructura de árbol. Así, para ello pártase de la gráfica de la figura 4.1.

Recordando las dos formas de recorrido que se estudia, se pueden formular ecuaciones por rama y por nivel, así, suponiendo que los nodos son las variables y considerando que la longitud entre cada vértice es igual a 1, se pueden proponer las siguientes ecuaciones:

Por ramas:

$$\text{Rama 1 } x_1 + x_2 \leq 2$$

$$\text{rama 2 } x_1 + x_2 + x_3 \leq 3$$

$$\text{rama 3 } x_1 + x_2 \leq 2$$

$$\text{rama 4 } x_1 + x_2 \leq 2$$

$$\text{rama 5 } x_1 + x_2 + x_3 \leq 3$$

Por niveles:

$$\text{Nivel 1 } x_1 + x_2 + x_3 \leq 1$$

$$\text{nivel 2 } x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \leq 2$$

$$\text{nivel 3 } x_4 + x_5 \leq 3$$

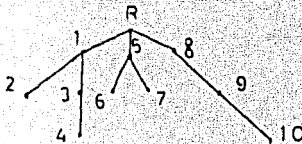


Figura 4.1

Estos sistemas de ecuaciones forman el espacio de soluciones de la estructura de árbol antes mencionada. Ahora bien, puede establecerse una función de costo mínima por cada vértice, probándose entonces que el vértice que se de sea localizar sea el sexto, para éste se tendrá entonces las siguientes ecuaciones:

1) por ramas:

$$1) [\text{MIN}] z = x_5 + x_6$$

$$2) x_1 + x_2 \leq 2$$

$$3) x_1 + x_3 + x_4 \leq 2$$

$$4) x_5 + x_6 \leq 2$$

$$5) x_5 + x_7 \leq 2$$

$$6) x_8 + x_9 + x_{10} \leq 3$$

$$7) x_i \in \mathbb{Z} \quad i = 1, 2, \dots, 10$$

$$8) x_i \geq 0 \quad i = 1, 2, \dots, 10$$

Para resolverlo se propondrá $u_i \geq 0$, con $i = 1, 2, \dots, 5$, variables de desviación, el sistema de ecuaciones resultaría entonces ser:

$$[\text{MIN}] z = x_5 + x_6$$

$$x_1 + x_2 + u_1 = 2$$

$$x_1 + x_3 + x_4 + u_2 = 2$$

$$x_5 + x_6 + u_3 = 2$$

$$x_5 + x_7 + u_4 = 2$$

$$x_8 + x_9 + x_{10} + u_5 = 3$$

si $x_i = 0 \quad i = 1, 2, \dots, 10$

entonces $u_1 = 2 \quad u_2 = 2 \quad u_3 = 2 \quad u_4 = 2 \quad u_5 = 3$

es posible entonces proponer la siguiente tabla:

	z	u ₁	u ₂	u ₃	u ₄	u ₅	x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	x ₅	x ₆	x ₇	x ₈	x ₉	x ₁₀	
0 z	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1 u ₁	2	0	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
2 u ₂	3	0	0	1	0	0	0	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0
3 u ₃	2	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0
4 u ₄	2	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0
5 u ₅	3	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1

Como en el renglón 0 se tienen valores negativos la solución no es óptima, por tanto el menor valor en la columna 2 corresponde al renglón 3, considerando $r = 3$, $s = 12$, $a_{r,s} = a_{3,12} = 1$ como elemento de pivoteo se puede obtener, como se ha explicado en el capítulo anterior, la siguiente tabla:

	z	u ₁	u ₂	u ₃	u ₄	u ₅	x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	x ₅	x ₆	x ₇	x ₈	x ₉	x ₁₀	
z	2	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
u ₁	2	0	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
u ₂	3	0	0	1	0	0	0	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0
x ₆	2	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0
u ₄	2	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0
u ₅	3	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1

por tanto la mínima solución será

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = x_7 = x_8 = x_9 = x_{10} = x_{11} = 2$$

$$z = 2 \quad u_1 = 2 \quad u_2 = 3 \quad u_3 = 0 \quad u_4 = 2 \quad u_5 = 3$$

que por ser entera y positiva no requiere de métodos restrictivos más complicados.

Observando esta solución se ve que la elección se ha efectuado de tal manera que el recorrido mínimo sea alcanzado, lo que implica que para encontrar el sexto nodo no es necesario las dos primeras ramas anteriores para su localización, de hecho con lo anterior se establece que exis

te un camino de longitud 2 que encuentra el nodo buscado.

ii) por nivel:

El sistema de ecuaciones formulado por niveles es usado en este caso y la función mínima para encontrar el sexto nodo deberá ser $\text{MIN } z = x_1 + x_2$, por tanto

$$1) [\text{MIN}] z = x_1 + x_2$$

$$2) x_1 + x_5 + x_6 \leq 1$$

$$3) x_2 + x_3 + x_4 + x_7 + x_8 \leq 2$$

$$4) x_9 + x_{10} \leq 3$$

$$5) x_i \in \mathbb{Z} \quad i = 1, 2, \dots, 10$$

$$6) x_i \geq 0 \quad i = 1, 2, \dots, 10$$

añadiendo para compensar la desigualdad las variables de desviación $u_i \geq 0$, con $i = 1, 2, 3$, el algoritmo anterior se transforma en:

$$1) [\text{MIN}] z = x_1 + x_2$$

$$2) x_1 + x_5 + x_6 + u_1 = 1$$

$$3) x_2 + x_3 + x_4 + x_7 + x_8 + u_2 = 2$$

$$4) x_9 + x_{10} + u_3 = 3$$

si $x_i = 0 \quad i = 1, 2, \dots, 9$ entonces $u_1 = 1 \quad u_2 = 2$

$u_3 = 3$

y por tanto la tabla encontrada será:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
	z	u_1	u_2	u_3	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}
0 z	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0
1 u_1	1	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0
2 u_2	2	0	0	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	1
3 u_3	3	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1

como la solución no es óptima escójase a $r = 2 \quad s = 10$

$a_{r,s} = a_{2,10} = 1$

desarrollando con este elemento como pivote se obtiene

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
	z	u ₁	u ₂	u ₃	x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	x ₅	x ₆	x ₇	x ₈	x ₉	x ₁₀
0 z	2	1	0	1	0	0	1	1	0	-1	0	1	0	1
1 u ₁	1	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0
2 x ₁	2	0	0	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	1
3 u ₃	3	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1

ya que la solución sigue siendo no óptima se considerará a hora que $r = 1$ $s = 9$ $a_{1r} = 1$ considerando a éste como pivote se obtiene la siguiente tabla:

	z	u ₁	u ₂	u ₃	x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	x ₅	x ₆	x ₇	x ₈	x ₉	x ₁₀
z	3	1	0	1	0	1	1	1	0	0	0	1	1	1
x ₁	1	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0
x ₁	2	0	0	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	1
u ₃	3	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1

por tanto la solución óptima será:

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = x_6 = x_7 = x_8 = x_9 = x_{10} = 0 \quad x_r = 1$$

$$x_1 = 2 \quad z = 3 \quad u_1 = u_2 = 0 \quad u_3 = 3$$

en este caso la información obtenida será que existe un camino de longitud 2 para el punto 6 y que debe éste pasar por otro vértice, en este caso x_1 , cuya longitud (tomada desde la raíz) es igual a 1. Por tanto nuevamente por este medio se ha localizado el camino de menor longitud y los puntos del recorrido que deben seguirse.

Al proponerse que la longitud de conexión entre nodos sea igual para todos se está de hecho estableciendo que la probabilidad de alcanzar cualquiera de los vértices siguientes es la misma. Supóngase entonces que la probabilidad de encontrar cada camino no es igual, para ello analícese el espacio de soluciones generado de las ecuaciones del árbol de la figura 4.2, las ecuaciones generadas por rema quedan como:

- 1) $2x_1 + 3x_2 \leq 2$
 - 2) $2x_1 + 3x_3 \leq 2$
 - 3) $3x_4 \leq 1$
 - 4) $x_5 + 4x_6 \leq 2$
 - 5) $x_7 + 2x_8 + 3x_9 \leq 3$
- (4.1)

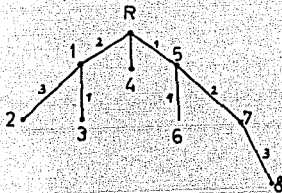


Figura 4.2

escogiendo la función mínima para el vértice 7, como $[MIN]z = x_7 + 2x_8$, y añadiendo las variables de desviación correspondientes al sistema de ecuaciones anteriores se tiene que:

- 1) $[MIN]z = x_7 + 2x_8$,
- 2) $2x_1 + 3x_2 + u_1 = 2$
- 3) $2x_1 + 3x_3 + u_2 = 2$
- 4) $3x_4 + u_3 = 1$
- 5) $x_5 + 4x_6 + u_4 = 2$
- 6) $x_7 + 2x_8 + 3x_9 + u_5 = 3$

el sistema resultante anterior se expresa en la siguiente tabla:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
	z	u ₁	u ₂	u ₃	u ₄	u ₅	x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	x ₅	x ₆	x ₇	x ₈
0 z	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	2
1 u ₁	2	0	1	0	0	0	0	2	3	0	0	0	0	0
2 u ₂	2	0	0	1	0	0	0	2	0	3	0	0	0	0
3 u ₃	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	3	0	0	0
4 u ₄	2	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	4	0
5 u ₅	3	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	2

como el renglón cero tiene elementos negativos la solución no es óptima y es necesario aplicar nuevamente el método de pivoteo, de acuerdo con él se tiene que $r = 5$ $s = 13$
 $a_{r,s} = a_{5,13} = 2$
donde $a_{r,s} = a_{5,13} = 2$ es el pivote que genera la siguiente tabla:

	z	u ₁	u ₂	u ₃	u ₄	u ₅	x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	x ₅	x ₆	x ₇	x ₈
z	3	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	3
u ₁	2	0	1	0	0	0	0	2	3	0	0	0	0	0
u ₂	2	0	0	1	0	0	0	2	0	3	0	0	0	0
u ₃	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	3	0	0	0
u ₄	2	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	4	0
x ₅	3/2	0	0	0	0	0	1/2	0	0	0	0	1/2	0	3/2

de donde la solución óptima será:

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = x_6 = x_7 = x_8 = 0 \quad x_9 = 3/2 \quad z = 3$$

$$u_1 = 2 \quad u_2 = 2 \quad u_3 = 1 \quad u_4 = 2 \quad u_5 = 0$$

sin embargo, ya que los vértices representan puntos enteros en el espacio de soluciones, la solución obtenida anteriormente no es válida para este caso. Así entonces, será necesario hacer uso de los métodos discutidos en el capítulo 3, como ha sido fácil observar el de mayor facilidad de manejo es el de cortaduras de Gomory, para ello de la tabla anterior damos la ecuación para x_5 :

$$x_5 + 1/2u_5 + 1/2x_9 + 3/2x_{10} = 3/2$$

por lo tanto $x_7 = 3/2 - 1/2u_5 - 1/2x_8 - 3/2x_9$
 como $\langle 1/2 \rangle = 0$ $\langle 3/2 \rangle = 1$
 entonces $\{2/3\} = (2/3) - 0 = 2/3$
 $\{1/2\} = 1/2$

y la ecuación de la cortadura de Gomory será por tanto:

$$\{3/2\} - \{1/2\}u_5 - \{1/2\}x_8 - \{3/2\}x_9 \leq 0$$

$$1/2 - (1/2)u_5 - (1/2)x_8 - (1/2)x_9 \leq 0$$

cue añadiendo su respectiva variable de desviación resulta ser:

$$1/2 - (1/2)u_5 - (1/2)x_8 - (1/2)x_9 + u_6 = 0$$

por tanto

$$-(1/2)u_5 - (1/2)x_8 - (1/2)x_9 + u_6 = -1/2$$

aumentando esta nueva ecuación de restricción a la tabla anterior se tiene:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
	z	u ₁	u ₂	u ₃	u ₄	u ₅	x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	x ₅	x ₆	x ₇	x ₈	u ₆
0 z	3	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	3
1 u ₁	2	0	1	0	0	0	0	2	3	0	0	0	0	0	0
2 u ₂	2	0	0	1	0	0	0	2	0	3	0	0	0	0	0
3 u ₃	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	3	0	0	0	0
4 u ₄	2	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	4	0	0
5 x ₁	3/2	0	0	0	0	0	1/2	0	0	0	0	1/2	0	1	3/2
6 u ₆	-1/2	0	0	0	0	0	-1/2	0	0	0	0	-1/2	0	0	-1/2

en donde el elemento de pivoteo está dado por $r = 6$

$$s = 11 \quad a_{r,s} = a_{6,11} = -1/2$$

realizando las operaciones necesarias se obtiene la siguiente tabla:

	z	u ₁	u ₂	u ₃	u ₄	u ₅	x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	x ₅	x ₆	x ₇	x ₈	u ₆
z	3	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
u ₁	2	0	1	0	0	0	0	2	3	0	0	0	0	0	0
u ₂	2	0	0	1	0	0	0	2	0	3	0	0	0	0	0
u ₃	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	3	0	0	0	0
u ₄	1	0	0	0	0	1	-1	0	0	0	0	0	4	0	-1
x ₁	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1
x ₅	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	-2

encontrando entonces que

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_6 = x_8 = 0 \quad x_5 = 1 \quad x_7 = 1$$

$$z = 3 \quad u_1 = 2 \quad u_2 = 2 \quad u_3 = 1 \quad u_4 = 1 \quad u_5 = 0 =$$

$$u_6 = 0$$

que por ser entera es la óptima solución para el espacio generado por el algoritmo 4.1. Esto establece que el mínimo recorrido necesario para encontrar el séptimo vértice debe ser x_5 seguido de x_7 , ambos de longitud 1, el valor de la función de costo es la suma de las probabilidades que existen entre ambos vértices. De lo anterior, nuevamente se observa que la búsqueda de vértices (datos) ha disminuido a un mínimo su recorrido y por tanto su tiempo.

El análisis anterior puede efectuarse también para las ecuaciones por nivel, así el sistema de que se parte será:

- 1) [MIN] $z = x_5 + 2x_7$
- 2) $2x_1 + 3x_4 + x_6 \leq 1$
- 3) $3x_2 + x_3 + 4x_6 + 2x_8 \leq 2$
- 4) $3x_7 \leq 3$
- 5) $x_i \in \mathbb{Z} \quad x_i \geq 0 \quad i = 1, 2, \dots, 8$

de donde se tiene la siguiente tabla si $x_i = 0$ con $i = 1, 2, \dots, 8$ y $u_1 = 1 \quad u_2 = 2 \quad u_3 = 3$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
z	u ₁	u ₂	u ₃	x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	x ₅	x ₆	x ₇	x ₈	x ₉
0 z	0	1	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	2
1 u ₁	1	0	1	0	0	2	0	0	0	3	1	0
2 u ₂	2	0	0	1	0	0	3	1	0	0	4	2
3 u ₃	3	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	3

ya que la solución no es óptima $r = 2$ $s = 11m$

$$a_{r,s} = a_{1,11} = 2$$

y por tanto

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
z	u ₁	u ₂	u ₃	x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	x ₅	x ₆	x ₇	x ₈	x ₉
0 z	2	1	0	1	0	0	3	1	0	-1	4	0
1 u ₁	1	0	1	0	0	2	0	0	3	1	0	0
2 x ₁	1	0	0	1/2	0	0	3/2	1/2	0	0	2	1
3 u ₃	3	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	3

nuevamente la solución no es óptima y entonces $r = 1$

$$s = 9 \quad a_{r,s} = a_{1,9} = 1$$

	z	u ₁	u ₂	u ₃	x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	x ₅	x ₆	x ₇	x ₈	x ₉
z	3	1	1	1	0	2	3	1	3	0	4	0	0
x ₁	1	0	1	0	0	2	0	0	3	1	0	0	0
x ₇	1	0	0	1/2	0	0	3/2	1/2	0	0	2	1	0
u ₃	3	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	3

la solución óptima es

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = x_6 = 0 \quad x_7 = 1 \quad x_8 = 1$$

$$z = 3 \quad u_1 = u_2 = 0 \quad u_3 = 3$$

es la mínima solución encontrada y que coincide con la anterior encontrada y es por tanto el camino óptimo para llegar al vértice 7.

De lo anteriormente expuesto, se puede observar que el empleo de los métodos para soluciones enteras en programación heurística dan trayectorias mínimas, por lo que el recorrido se efectúa en un tiempo menor que el requeri-

do, empleando algunos de los otros métodos de búsqueda para la estructura de árbol que se estudiaron en el capítulo 1. Debe recordarse que estos métodos acotan, por medio de planos de pendiente variable, el espacio de soluciones generadas por el algoritmo y por ello hacen converger la solución, dada una función de costo, a un punto entero.

Cualquiera de los cuatro métodos discutidos en el capítulo 3 puede ser empleado en la resolución de algoritmos de este tipo, sin embargo, aquel cuyas ecuaciones de restricción son fácilmente obtenibles es el de las cortaduras de Gomory, es esta la razón por la cual se ha hecho uso de del mismo en el ejemplo anterior.

Otro punto que debe notarse es el hecho de que si las probabilidades de conexión entre vértices son iguales para una estructura de árbol, no es necesario el empleo de ninguno de dichos métodos, ya que la solución es obtenida directamente de la aplicación del método de pivoteo presentado en programación lineal, esto se debe a que las tablas generadoras de soluciones están formadas de los coeficientes de las variables que al ser todas iguales proveen de una solución siempre entera bajo la aplicación de este método.

Por último, como ya se sabe la elección de la función de costo depende del problema particular que se trate, que en el caso de la estructura de árbol debe ser la de su trayectoria mínima, la elección de otra función de costo emplearía un mayor tiempo en la selección de la trayectoria mínima, pero es siempre (que se cumplan las condiciones de convergencia) factible la localización de la misma. Estos métodos de programación heurística y lineal pueden ser implementados en una computadora, ya que como se observa todos son trabajos de tipo matricial a los que se imponen

ciertas restricciones que dependen del método que se use.

B I B L I O G R A F I A . -

- 1.- Bellman, Cooke y Lockett, Algorithms, Graphs and Computers, Academic Press, New York, 1967.
- 2.- Forsythe, Keenan, Organick y Stenberg, Lenguajes de Diagramas de Flujo, Limusa-Wiley, México, 1973.
- 3.- A. Kaufmann, La Ciencia y el Hombre de Acción, Ediciones Guadarrama, S. A., Madrid, 1967.
- 4.- A. Kaufmann, Graphs, Dynamic, Programming and Finite Games, Academic Press, New York, 1967.
- 5.- A. Kaufmann y A. Henry-Labordere, Integer and Mixed Programming: Theory and Applications, Academic Press, New York, 1977.
- 6.- Donald E. Knuth, The Art of Computer Programming: Fundamental Algorithms, Vol. 1, Addison-Wesley, Massachusetts, 1973.
- 7.- A. I. Máltsev, Fundamentos de Algebra Lineal, Mir, Moscú, 1972.
- 8.- James Martin, Organización de las bases de Datos, Prentice Hall International, Madrid, 1977.