

28 No 5



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

**RECONOCIMIENTO DE LETRAS MAYUSCULAS
MANUSCRITAS**

TESIS PROFESIONAL

que para obtener el título de

F I S I C O

p r e s e n t a :

SUSANA BLUMOVICZ PERELBERG

México, D. F.

1982



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

C O N T E N I D O

| | |
|--|-----------|
| Notación. | 3 |
| Introducción. | 5 |
| Capítulo 1. Generalidades: Inteligencia Artificial y | 10 |
| Conjuntos Borrosos. | |
| 1. Inteligencia Artificial | 10 |
| 2. Conjuntos Borrosos. | 19 |
| Capítulo 2. Nociones Básicas para la Estructuración del | |
| Algoritmo de Reconocimiento de Letras Mayúsculas | |
| Manuscritas. | 24 |
| 1. Patrones. | 24 |
| 2. Reconocimiento de Patrones. | 24 |
| 3. Gramática. | 31 |
| 4. Conjuntos Borrosos. | 38 |
| Capítulo 3. Métodos Existentes de Reconocimiento de Pa- | |
| trones. | 60 |
| 1. Ishikawa y Mieno. | 60 |
| 2. Kickert y Koppelaar. | 66 |
| 3. G. F. De Palma y S. S. Yau. | 70 |
| 4. Kaufmann | 71 |

| | |
|--|-------------|
| Capítulo 4. Método Propuesto. | .73 |
| 1. Algoritmo de Reconocimiento | .73 |
| 2. Reconocimiento Manual | .78 |
| 3. Reconocimiento Automatizado | .81 |
| 4. Rutinas Constitutivas del Algoritmo de Reconocimiento. | .81 |
| Capítulo 5. Resultados Obtenidos. | 97 |
| 1. Material. | 97 |
| 2. Reconocimiento Manual. | 98 |
| Capítulo 6. Conclusiones. | .116 |
| Referencias. | .118 |

NOTACION

Lista de símbolos principales, Kaufmann⁽¹¹⁾, (12).

| | |
|--------------------------|---|
| A | conjunto o subconjunto ordinario |
| \underline{A} | subconjunto borroso |
| \in | símbolo de pertenencia |
| \notin | símbolo de no pertenencia |
| \subset | subconjunto de (inclusión) |
| \cup | unión |
| \cap | intersección |
| \bar{A} | complemento de A |
| $E_1 \times E_2$ | producto cartesiano |
| \Rightarrow | implicación |
| \Leftrightarrow | equivalencia lógica |
| $\exists x$ | cuantificador existencial |
| $\forall x$ | cuantificador universal |
| \oplus | suma disyuntiva |
| $x \leq y$ | relación de orden |
| $x < y$ | relación estricta de orden |
| R | conjunto de números reales |
| $[a, b]$ | intervalo cerrado por la izquierda y por la derecha $\{x \mid a \leq x \leq b\}$ |
| $\mu_{\underline{A}}(x)$ | función de pertenencia del elemento x al subconjunto borroso \underline{A} . |

$\max(x, y)$ máximo de x y y (también, $x \vee y$)

$\min(x, y)$ mínimo de x y y (también, $x \wedge y$)

$\mu_{\mathcal{R}}(x, y)$ función de pertenencia de la pareja (x, y)
para la relación borrosa \mathcal{R} .

I N T R O D U C C I O N

El objetivo de esta tesis es efectuar un reconocimiento de letras mayúsculas manuscritas utilizando técnicas borrosas y su finalidad, aportar un método para la identificación de señales mioeléctricas. Esta identificación es uno de los problemas que se necesita resolver en el diseño de una prótesis inteligente de miembro superior derecho, proyecto que actualmente se desarrolla en el Centro de Instrumentos de la Universidad Nacional Autónoma de México.

Motivación.- La electricidad juega un papel importante en la medicina, tanto los efectos eléctricos generados dentro del cuerpo como las aplicaciones de la electricidad a la superficie del mismo. La generada en el interior del cuerpo interviene en el control y la activación de nervios, músculos y órganos. Las fuerzas de los músculos se deben a la atracción y repulsión de cargas eléctricas. La acción del cerebro es básicamente eléctrica y todas las señales nerviosas hacia y desde el cerebro se deben al flujo de corrientes eléctricas.

El sistema nervioso tiene un papel fundamental en casi cada función del cuerpo. Básicamente una computadora central (el cerebro) recibe señales internas y externas y (por lo general) -

da una respuesta adecuada⁽²³⁾. La información se transmite como señales eléctricas vía los nervios. Este sistema eficiente de comunicación es capaz de manejar millones de canales de información a la vez con una gran velocidad.

Al realizar las funciones especiales del cuerpo, se generan muchas señales eléctricas, que son el resultado de la acción electroquímica de ciertos tipos de células. Al medir las señales -deseadas (sin perturbar el cuerpo) se puede obtener información clínica útil acerca de sus funciones particulares. Algunas de estas señales son: los potenciales eléctricos de la transmisión nerviosa y las señales eléctricas observadas en el electromiograma del músculo (EMG), el electrocardiograma obtenido del corazón (ECG) y el electroencefalograma obtenido del cerebro (EEG).

El sistema nervioso central consiste en el cerebro, médula espinal y nervios periféricos (fibras nerviosas y neuronas) que transmiten información sensorial al cerebro o médula y fibras nerviosas que transmiten información del cerebro o médula hacia músculos y glándulas.

La unidad estructural básica del sistema nervioso es la neurona, célula nerviosa que se especializa en la recepción, interpretación y transmisión de mensajes eléctricos.

Uno de los medios que permite obtener información de los múscu

los es la medición de su actividad eléctrica. El registro de los potenciales producidos por los músculos durante el movimiento se denomina electromiograma.

En el desarrollo de prótesis humanas, la mano ocupa un lugar especial, por ser la herramienta fundamental de la que se vale el hombre para realizar sus actividades, entre otras, la de escribir y, la investigación que se realiza en el CIUNAM para el diseño de la prótesis que funcione vía señales mioeléctricas requiere de un método para el reconocimiento de estas señales. El método que aquí se propone tiene una aplicación particular al reconocimiento de letras, pero con algunas variaciones, se puede utilizar para el de señales.

Contenido.- En la primera parte se presenta una somera recopilación de conceptos de inteligencia, aprendizaje e inteligencia artificial, sin llegar a profundizar formalmente sobre ninguno de ellos ya que no es ésta la finalidad del presente trabajo. En sí, cada uno sería motivo de un estudio muy elaborado y mayor aun que la propia tesis, pues están interrelacionados con psicología, genética, lingüística, etc. y básicamente se desea dar una idea general de estos términos por formar parte del concepto prótesis inteligente, que es un sistema que recibiendo información del medio que le rodea es capaz de alterar tanto el medio como los estados internos de él.

En el resto de este capítulo se introduce el concepto de conjunto borroso, pues los métodos matemáticos empleados en el desarrollo de este trabajo no son los que se tratan clásicamente.

En la segunda parte se exponen nociones generales de conceptos que servirán para la elaboración del algoritmo de reconocimiento de patrones, los métodos generales de reconocimiento, la gramática que se emplea y la definición, las propiedades y las operaciones fundamentales de los conjuntos borrosos.

En la tercera parte se indican algunos de los métodos que ya han sido empleados en el reconocimiento de patrones y que se encuentran en la literatura.

En el Capítulo 4 se establece el algoritmo de reconocimiento de letras mayúsculas manuscritas proponiendo un reconocimiento sintáctico en el que se especifican: los segmentos ideales, los reales que forman las letras cuando el área que ocupan se divide en 16 subáreas iguales y las reglas sintácticas. Se propone una forma de asignar valores a la función de pertenencia de cada subárea según la forma y longitud del segmento que ahí se encuentre y la caracterización de la letra completa con la proyección global de la relación borrosa formada por sus 16 funciones de pertenencia.

Se indica en qué forma se efectúa el reconocimiento manual y - se presenta una esquematización para el automatizado.

Se proponen diagramas de flujo de un programa principal que efectúa las mismas instrucciones para todas las letras y de las cuatro subrutinas a las que el principal llama.

En el Capítulo 5 se presenta la forma en que se llevó a cabo el reconocimiento manual así como los resultados obtenidos en el mismo y por último, en el Capítulo 6 se exponen las conclusiones.

CAPITULO 1

Generalidades: Inteligencia Artificial y Conjuntos Borrosos

1. Inteligencia Artificial.- Thomas Logsdon⁽¹⁴⁾ describe como Shaky "la primera persona electrónica", al alimentársele desde una computadora, una instrucción en su "cerebro": QUITA EL BLOQUE DE LA PLATAFORMA, recorre los salones del Instituto de Investigaciones de Stanford, se detiene en cada puerta abierta, inspecciona el salón y se aleja hasta llegar al que tiene un bloque en una plataforma y "piensa" como quitarlo. Este es el comportamiento de una máquina inteligente.

En su artículo expresa la opinión de que Shaky puede "ver", "entender", "aprender" y, en general, ha demostrado "que una máquina puede pensar".

Gran parte del trabajo original en inteligencia artificial (IA) se ha llevado a cabo en la Universidad de Stanford y en el Instituto Tecnológico de Massachusetts.

"Marvin Minsky en 1968⁽¹⁴⁾, director del grupo de IA del MIT, hace una evaluación de las máquinas inteligentes:

En un principio las máquinas tenían palancas simples. Pronto tendrán articulaciones fantásticamente graciosas. Los ojos de las computadoras podían sentir sólo una perforación en una -- tarjeta. Ahora pueden reconocer formas sobre fondos simples. En el futuro competirán con el análisis que hace el hombre de su medio ambiente. Antes los programas de la computadora simplemente sumaban columnas de cifras. Ahora pueden efectuar -- juegos, entender conversaciones simples, pesar muchos factores en la toma de decisiones, ¿qué será después?".

"En la actualidad, las máquinas resuelven problemas básicamente según los principios que les interconstruimos. En un futuro próximo podremos aprender cómo hacerlas funcionar sobre el problema muy especial de mejorar su capacidad para resolver problemas".

Según Logsdon no es fácil definir "inteligencia", pero aun cuando no se pueda formular una definición funcional, se puede reconocer a una persona inteligente por la forma en que se comporta. Indica que probablemente estaríamos de acuerdo en que uno de sus primos de 17 años es "inteligente" cuando se nos explicase que habla francés, que saca buenas calificaciones en cálculo y que ha aprendido a vencer, a la mayoría de las personas de su ciudad, en damas y ajedrez. ¿Qué es lo que nos convence de que es inteligente?. La mayoría de sus características están contenidas en la siguiente definición, adaptada a --

nuestros fines, de una versión que apareció en la edición de 1976 de la Enciclopedia de la Ciencia de la Computación:

"Una persona inteligente es capaz de entender relaciones entre hechos, descubrir significados y reconocer la verdad. También se adapta a situaciones nuevas y presenta la habilidad de aprender; es decir, mejorar su nivel de conducta con base en sus experiencias anteriores."

Las palabras clave son "entender", "adaptarse" y "mejorar".

En la Enciclopedia Colliers se encuentran los mismos conceptos fundamentales en una definición algo diferente. Las características que considera como indicativas de la inteligencia humana son:

1. La habilidad de manejar símbolos abstractos, conceptos y relaciones.
2. Aprender, o la habilidad de beneficiarse con la experiencia.
3. La habilidad de adaptarse a situaciones nuevas, o la resolución de problemas en su sentido más amplio.

En la práctica, no se repasa cada punto de esta lista para decidir si una persona es inteligente. Los juicios se pueden basar en la puntuación que se obtiene en una determinada prueba de I.Q.* "

* I.Q.- Intelligence Quotient, cociente intelectual.

Se le puede hacer una prueba a una persona, pero ¿cómo se puede medir la inteligencia de un animal o de una máquina? ¿se les puede considerar como entes inteligentes? ¿es la inteligencia un tratamiento exclusivamente humano?.

En una exposición de la inteligencia animal "La Enciclopedia Científica de Van Nostrand" propone la siguiente definición:

"La habilidad de adaptarse a variaciones de las condiciones ambientales a través de cambios en el comportamiento".

Con esta medida, es claro que los animales presentan al menos cierto grado de inteligencia. No obstante, aun los primates altamente evolucionados como los chimpancés rara vez sobrepasan el nivel de actitudes de un niño de tres años. Entonces, si fueran seres humanos adultos estaríamos forzados a clasificarlos como idiotas.

Algunos animales han presentado en ocasiones patrones de comportamiento espontáneo que sugerirían que son razonablemente inteligentes aun comparándolos con adultos maduros. En 1925 W. Kohler publicó un estudio en el que estima los niveles de inteligencia de algunos primates. Cuando se suspendía fruta más allá de su alcance, un mono jalaba una caja sobre la que se podía parar para poder alcanzar el alimento. Otro mono vió unos plátanos suspendidos fuera de su jaula y logró acercarlos, des

pués de manifestar signos de gran dificultad, insertando una rama de bambú en uno de ellos.

Se les ha enseñado a los chimpancés a utilizar el lenguaje en formas razonablemente efectivas. Como no pueden hablar ni balbucear como los infantes humanos, el mejor método es enseñarles un lenguaje de signos o uno de "oprimir botones" utilizando una consola de computadora. Con estas dos técnicas, dos psicólogos de la Universidad de Nevada, Beatrice y Robert Gardner, han podido enseñar a ciertos chimpancés seleccionados, a usar y comprender más de 100 palabras del vocabulario. Estos construyen oraciones completas como "por favor máquina da jugo a Lana" y ocasionalmente llegan a inventar una composición de palabras en situaciones nuevas. Después de probar sandía por primera vez una chimpancé llamada Lucy la describió como "bebida-dulce".

En los experimentos realizados se les enseñó a los chimpancés a comunicarse con humanos o con máquinas. Pero en pruebas más recientes, conducidas en el Yerkes Regional Primate Research Center de Atlanta, algunos chimpancés han aprendido a comunicarse entre sí.

De lo anteriormente expuesto, es fácil aceptar el hecho de que los animales pueden ser considerados criaturas inteligentes. Pero por alguna razón existe la tendencia a resistir que una persona atribuya los mismos poderes intelectuales a una máqui-

na inanimada.

Tal vez la forma de evitar este dilema es no hablar de "inteligencia" de las máquinas sino de su "IA".

Muchos investigadores han adoptado el convenio propuesto por primera vez por Marvin Minsky quien define la "IA" de la forma siguiente:

"La ciencia de lograr que las máquinas hagan cosas que requerirían inteligencia si fueran hechas por hombres"

Aceptando esta definición se atribuye "IA" a una máquina inanimada, como lo es el primo a que se refiere Logsdon en un principio, que no es una persona sino una computadora IBM.

Es fácil perderse con las semejanzas superficiales entre función cerebral y procesamiento de computadora. Aun cuando la computadora no se parezca en todo al cerebro humano podría eventualmente llegar a ser una máquina pensante, al igual que no se parecen un helicóptero a un coleóptero y sin embargo los dos vuelan.

Minsky⁽¹⁵⁾ en un ensayo en el que expone algunos problemas y promesas que surgen de la perspectiva de IA, indica que la ciencia de la computación permite manipular ideas como si fueran cosas.

Si se rechaza el concepto de una cualidad o sustancia definible llamada inteligencia, se puede uno preguntar qué sentido tiene la calificación en una prueba de inteligencia, tal como una de I.Q. Evidentemente una buena puntuación indica que el sujeto puede resolver rápidamente una variedad de problemas, dicha -- prueba está integrada por determinados problemas y, el procedimiento de calificación refleja la evaluación de las soluciones propuestas a juicio del punto de vista del diseñador de dicha prueba. Según Minsky una puntuación alta indicaría que el sujeto ha acumulado el conocimiento y los procedimientos necesarios para "resolver problemas sin pensar mucho" y considerando que esto requiere varios años, la calificación indica que la persona probablemente ha adquirido con anterioridad cierta variedad de procesos para construir procedimientos. Entonces, dicha calificación del I.Q. no refleja una cualidad generalizada de la mente del sujeto en ese momento, sino una explotación con éxito de sus sistemas de construcción de conocimiento de años anteriores.

La ciencia de la computación ha introducido muchas formas nuevas para describir procesos, lo que nos hace sentirnos mucho menos interesados en "medirlos" simplemente.

Ser inteligente, entre otras cosas, es ser capaz de resolver rápidamente problemas difíciles. Un experto resuelve problemas, que otros consideran difíciles en poco tiempo o con poco esfuerzo.

zo. El sentido común indica que esto se debe a que "sabe como resolverlos". En este sentido ser inteligente no es una actividad del momento sino que se debe haber acumulado el conocimiento (procedimientos) necesario para el logro de las actitudes.

Si la inteligencia depende principalmente de los procedimientos predesarrollados, éstos deben haberse aprendido:

recordando y seleccionando (decidir qué memorias o procedimientos anteriores se deben utilizar en la situación actual)

observando o escuchando (verificar para ver si el procedimiento propuesto funciona adecuadamente),

diagnosticando (describir una falla lo suficientemente claro como para sugerir qué tipo de reparación se necesita hacer),

discurriendo (aplicar el "conocimiento depurador" para sugerir los cambios necesarios) y

recordando (colocar algo en la memoria que permita "la próxima vez" que las cosas salgan mejor).

Para aprender lo anterior se necesitan adquirir programas que descubran, clasifiquen y remedien errores en los procesos propios. Una vez obtenidos, se pueden aplicar no sólo para otras actividades sino para ampliar nuestra habilidad misma de auto-

programación.

La investigación en IA ha manifestado un patrón curioso de regresión hacia la infancia. En 1961 se ve un programa para resolver problemas de cálculo universitario, en 1964, un programa para álgebra de preparatoria y a principios de los años 70 se ven las máquinas jugando con cubos en una parodia del niño preescolar. Esta regresión refleja un fenómeno real. Fué mucho más fácil simular un conocimiento "experto" que hacer teorías buenas para el razonamiento de sentido común de tipo infantil, debido a que el razonamiento de sentido común en tanto que con frecuencia es lógicamente bastante superficial, implica la manipulación de una mayor variedad de representaciones de distintas clases de conocimiento. En las etapas iniciales de la ciencia de la computación, sólo se podía manejar una representación a la vez.

Otro punto de vista del concepto de inteligencia lo presenta Tosio Kitagawa (20(d)) quien comparte el de J. Piaget e indican que: 1) la inteligencia constituye el estado de equilibrio hacia el que tienden todas las adaptaciones sucesivas de naturaleza sensitivo-motor y cognoscitiva así como todas las interacciones de asimilación y acomodación entre el organismo y el medio ambiente, de que 2) la inteligencia misma no consiste en una clase aislada y bien diferenciada de procesos cognoscitivos y de que 3) el mecanismo de transición de un nivel de in-

teligencia a otro es un proceso de equilibrio. Introduce la no ción de inteligencia biológica además de la inteligencia humana y de la mecánica.

2. Conjuntos Borrosos.- Cuando los procesos cognoscitivos de percibir, pensar, recordar, entender un lenguaje; actuar y aprender se integran en un sistema, Uhr^{(20(●))}, surge inevitablemente una variedad de problemas borrosos.

En 1965 Lofti A. Zadeh inicia el estudio de conjuntos borrosos y desde entonces, la teoría y sus aplicaciones han alcanzado importantes avances en una gran diversidad de temas.

"Durante las tres décadas pasadas, Zadeh⁽²¹⁾, el desarrollo en la teoría de redes y en la teoría de sistemas, se ha encontrado bajo la influencia y contribuciones de E. Guillemin, N. Wiener, R. Bellman, R. Kalman et al." "Entre las técnicas existentes para el análisis de sistemas lo que aun falta, y en forma aguda, son métodos para tratar sistemas que son demasiado complejos o definidos en forma imprecisa para admitir análisis preciso. Este tipo de sistemas se encuentran en ciencias sociales, filosofía, economía, psicología, etc. Además se encuentran en campos en los que la complejidad de un sistema elimina la posibilidad de analizarlos con medios matemáticos tradicionales ya sea con o sin la ayuda de computadoras. Ejemplos de estos sistemas se pueden encontrar entre los de control de tráfico en gran escala,

reconocimiento de patrones, procesamiento de información, redes neuronales y juegos como el ajedrez y las damas."

Tal vez el motivo principal de la ineficiencia de las técnicas matemáticas clásicas reside en su fracazo cuando alcanzan puntos de borrosidad, esto es, imprecisión que parte no del azar sino de la falta de transición determinada de pertenencia en una clase a no pertenencia en la misma. Este es el tipo de imprecisión que surge cuando se menciona por ejemplo la clase de números reales mucho mayores que 10, puesto que éstos no se pueden dividir dicotómicamente en aquellos mucho mayores que 10 y en aquellos que no lo son.

Otro ejemplo ilustrativo sería la clase de "hombres altos", pues altos no tiene una definición precisa.

Goguen^{(20(c))} toma por un hecho la idea de que la mayoría de las palabras tienen una borrosidad inherente, pues no se pueden determinar fronteras rígidas para su uso. Esto se aclara con los colores, ya que hay un continuo lineal de matices entre el rojo y el amarillo; en ningún punto existe una separación determinada y, declarar que los valores intermedios son anaranjados tampoco ayudaría puesto que las fronteras del anaranjado son igualmente imprecisas.

Realmente, la mayoría de las clases que se encuentran en el --

mundo real son de este tipo borroso o definidas en forma imprecisa. Lo que separa a estas clases de las clases bien definidas en el sentido matemático tradicional, es la borrosidad de sus fronteras. En el caso de una clase con frontera borrosa, un objeto puede tener un grado de pertenencia que se encuentra entre la pertenencia total y la no pertenencia .

Una clase que admite la posibilidad de pertenencia parcial se denomina conjunto borroso.

La borrosidad es muy importante en la complejidad de un sistema porque independientemente de su naturaleza, cuando su complejidad excede cierto umbral, se vuelve impráctico o computacionalmente no factible de hacer afirmaciones precisas acerca de él (como por ejemplo, la determinación del siguiente movimiento - óptimo dadas las posiciones de las piezas en un tablero de ajedrez). Una afirmación significativa acerca del funcionamiento de dicho sistema necesariamente debe ser de naturaleza borrosa, con un grado de borrosidad que crece con la complejidad del sistema.

Se necesita comprender cómo utilizar los conjuntos borrosos dentro del marco de la matemática clásica, así como desarrollar métodos nuevos para tratar la borrosidad en una forma sistemática, pero no necesariamente cuantitativa.

Las clases de pensamiento diario de todos nosotros se caracterizan por una interacción íntima entre percibir, deducir, investigar, recordar y actuar con una retroalimentación constante. Esporádicamente se hacen deducciones profundas o difíciles, o se recuerdan conceptos sorprendentes o profundos. Más bien, se conduce una especie de "conversación" ligera y difusa con el medio ambiente, una que encuentra y utiliza los aspectos relevantes de un conjunto pequeño de posibilidades. Ejemplos de estos procesos podrían ser: la forma en que se decide qué hacer en una fiesta y realmente cómo se llevan a cabo todos los pasos necesarios para realizarla; la elección de una comida; la preparación de un pastel; etc.

Conviene resaltar que a pesar de su simplicidad superficial, dichos procesos son bastante más complicados que cualquier intento que se haya hecho con los programas de IA. (20(●)).

La mayoría de los problemas cognoscitivos son borrosos. En el momento que se le pide a un sistema que maneje una variedad de funciones cognoscitivas al mismo tiempo, que es el proceso típico que siguen los humanos adultos y aun los infantes y los animales superiores, esto es, encontrar, tomar y preparar alimentos, lo estamos forzando a que tome decisiones borrosas.

Existen varios niveles de equilibrios de inteligencia en los que los modelos matemáticos auténticos actuales no se adaptan para

proporcionar alguna descripción adecuada. Se puede considerar que la noción de borrosidad debida a Zadeh⁽²⁰⁾ es una solución a este problema.

En el mundo real existen muchas instrucciones borrosas que queremos que una máquina traduzca y ejecute. La ejecución de dichas instrucciones es de gran interés y muy útil en una variedad de problemas relacionados con reconocimiento de patrones.

C A P I T U L O 2

Nociones Básicas Para la Estructuración del Algoritmo de Reconocimiento de Letras Mayúsculas Manuscritas

1. Patrones.- N. Wiener⁽⁷⁾ afirma que uno de los aspectos más interesantes de la concepción del mundo, es que puede considerarse que está formado por patrones; los cuales son esencialmente arreglos que se caracterizan por el orden de sus elementos y no por la naturaleza intrínseca de los mismos. Se puede decir también que un patrón es una descripción estructural o cuantitativa de un objeto. Bellman⁽²⁾ emplea "patrón" como otro nombre que se le da a un punto de Ω , donde $\Omega = \{x\}$ es un espacio; $\Omega = R^1$ es el caso más simple, en otros casos de interés práctico Ω es un conjunto de patrones lineales en R^2 como por ejemplo letras, números, etc.

Al conjunto de patrones que comparten ciertas propiedades comunes se le denomina "clase de patrones".

2. Reconocimiento de Patrones.- Las motivaciones para la investigación en materia de máquinas inteligentes, son simples: desde el punto de vista socioeconómico lo que interesa es el incremento de productividad y servicios a un costo reducido; en

las áreas de exploración espacial el interés reside en el desarrollo de sistemas cuyo grado de complicación y alcance de funcionamiento sólo pueden lograrse utilizando máquinas con capacidades autónomas para tomar decisiones. Entre las herramientas más importantes que se emplean en el campo de máquinas inteligentes se encuentran las técnicas de reconocimiento de patrones.

El problema del reconocimiento de patrones por lo general implica una clasificación de un conjunto de objetos o de procesos y, este reconocimiento se puede definir por la jerarquización de datos de entrada en clases identificables vía la extracción de características importantes de los datos.

Se considera que el reconocimiento es un atributo de los seres humanos y de otros organismos vivos; de hecho, los seres humanos efectúan la tarea de reconocer patrones en casi todos los niveles del sistema nervioso y en cada instante de su vida.

Según la naturaleza de los patrones que se van a reconocer podemos dividir nuestros actos de reconocimiento en dos tipos:

- 1) reconocimiento de objetos concretos que nos rodean (sensorial), por ejemplo caracteres o fotografías
- 2) reconocimiento de objetos abstractos (conceptual), por ejemplo la solución a un problema sin recurrir a estímulos externos.

El estudio de los problemas del reconocimiento de patrones se divide en dos categorías:

- 1) el estudio de la capacidad que tienen los seres humanos y otros organismos vivos para reconocer patrones
- 2) establecer teoría y técnicas prácticas para la implementación de una tarea de reconocimiento para una máquina; esta área está en el dominio de las matemáticas aplicadas, la ingeniería, la computación, la física médica, etc.

Recientemente⁽³⁾ científicos e ingenieros han empezado a abordar el problema de la construcción de máquinas que reconozcan patrones, para lo cual se han diseñado o programado máquinas - que lean caracteres impresos, que clasifiquen electrocardiogramas, ondas sísmicas, etc. y que reconozcan palabras habladas, caracteres manuscritos, diagnósticos médicos, etc.

Las técnicas matemáticas que se emplean para resolver el problema del reconocimiento de patrones se agrupan en dos métodos generales: el estadístico o de decisión-teórica y el sintáctico, lingüístico o estructural.

2.1 Método Estadístico.- En el método de decisión-teórica, se extraen de los patrones iniciales un conjunto de mediciones particulares denominadas "características". El reconocimiento de

cada patrón se efectúa por una partición del espacio de "características". En la figura 2.1-1 se presenta un diagrama de bloque simplificado de un sistema de reconocimiento de patrones.

La clasificación se basa en un conjunto de mediciones características que se suponen invariantes o menos sensibles con respecto a las variaciones que suelen encontrarse comunmente.

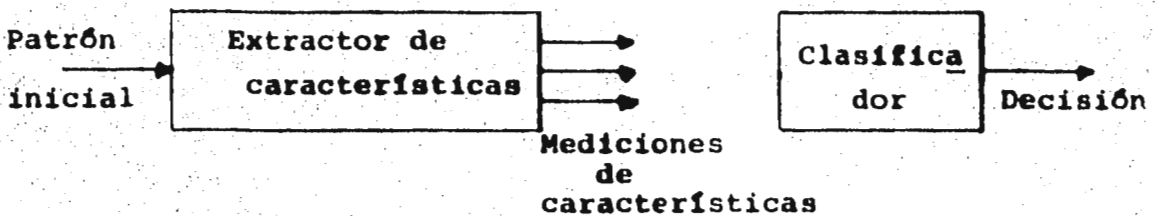


Figura 2.1-1 Sistema de reconocimiento de patrones.

En este caso, el reconocimiento consiste en dos subproblemas:

- 1) la selección de las mediciones que han de extraerse de los patrones iniciales
- 2) la clasificación misma, o sea, tomar una decisión respecto a la asignación de clase para los patrones iniciales.

La mayor parte de las investigaciones realizadas, durante la década pasada, sobre el reconocimiento de patrones está relacionada con este método y, entre sus aplicaciones se encuentran los diagnósticos médicos, la clasificación de electrocardiogramas, etc.

2.2 Método Sintáctico.- En algunos problemas de reconocimiento es importante la información estructural que describe cada patrón y el proceso de reconocimiento incluye además de la capacidad de asignar el patrón a una clase particular (clasificarlo), la de describir aspectos que lo hagan no elegible para -- ser asignado a otra clase. Un ejemplo típico de este reconocimiento es el de una fotografía.

Como estos patrones suelen ser bastante complejos y el número necesario de características muy grande, resulta atractiva la idea de describirlo en términos de una composición jerárquica de subpatrones cada vez más simples. Conviene destacar que cuando los patrones son complejos y el número posible de descripciones grande, es poco práctico considerar cada descripción como definidora de una clase, como en el caso de identificación de huellas digitales, caracteres Chinos, etc. En consecuencia, el reconocimiento sólo puede satisfacerse mediante una descripción para cada patrón y no mediante una clasificación simple.

Para representar la información estructural jerárquica del pa-

trón, Fu⁽⁶⁾,⁽⁴⁾ propone el método sintáctico de reconocimiento denominado también estructural o lingüístico, ya que se basa en conceptos de la teoría de lenguajes formales. Este método presenta una analogía entre la estructura de patrones y la sintaxis de lenguajes.

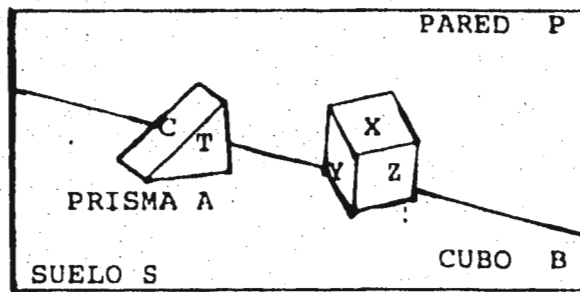


Figura 2.2-1 Patrón pictórico de la Escena E

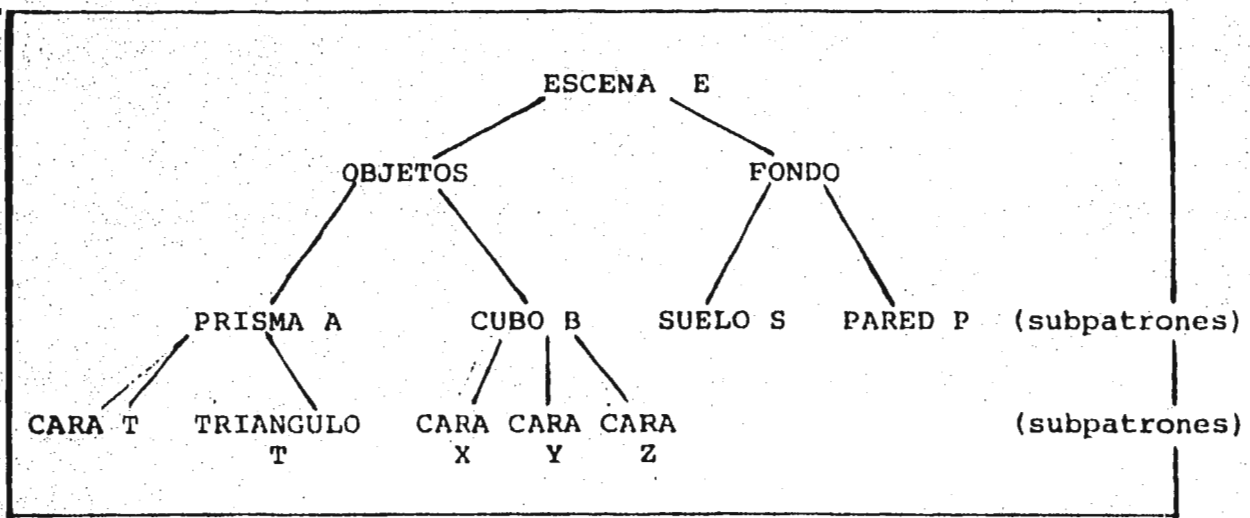


Figura 2.2-2 Descripciones jerárquicas estructurales de la Escena E.

En la figura 2.2-1 se observa que los patrones pictóricos se pueden describir en términos de las estructuras jerárquicas de la figura 2.2-2.

Los patrones se encuentran formados por subpatrones compuestos de varias formas al igual que las frases y oraciones se construyen concatenando letras.

Para que este método tenga utilidad, los subpatrones más simples seleccionados o "primitivos", deberán reconocerse con mayor facilidad que los patrones mismos. El lenguaje que proporciona la descripción estructural de patrones en términos de sus primitivos se denomina lenguaje de descripción de patrones. Las reglas de sintaxis que rigen la composición de primitivos para formar un patrón se determinan por la "gramática" del lenguaje de descripción de patrones.

2.3 Selección de Primitivos.- La determinación del conjunto de primitivos está influenciada por la naturaleza de los datos, la aplicación específica en cuestión y la tecnología disponible para implementar el sistema. No existe una solución general para el problema de la selección de primitivos, pero podrían servir de guía los siguientes requisitos:

- 1) los primitivos deberán ser elementos básicos que proporcionen una descripción compacta pero adecuada de los datos en términos de las relaciones estructura

les especificadas (por ejemplo, relación de concatenación)

2) los primitivos deberán extraerse fácilmente o ser reconocidos por métodos no lingüísticos, puesto que son patrones simples cuya información estructural es irrelevante

Para describir escritura manuscrita se sugieren como primitivos los segmentos (trazos).

El método lingüístico proporciona la capacidad de describir un gran conjunto de patrones complejos utilizando conjuntos pequeños de primitivos y reglas gramaticales. La utilidad práctica de este método depende de la habilidad para reconocer dichos primitivos y sus relaciones.

Ya resuelto satisfactoriamente el problema de la selección de primitivos, es necesario construir una gramática que genere un lenguaje para describir los patrones que se van a estudiar (en la mayoría de los casos el diseñador construye la gramática basándose en el conocimiento a priori disponible y en su experiencia) y, efectuar un análisis de sintaxis que produzca una descripción estructural del patrón.

3. Gramática formal, tratamiento. (González⁽⁷⁾, Fu⁽⁵⁾, (6), (3), Kaufmann⁽¹¹⁾, (12), Hopcroft⁽⁹⁾, Tou⁽¹⁸⁾).

3.1 Definiciones y conceptos.- Alfabeto o vocabulario V es un conjunto finito de símbolos formado por: dígitos, letras, símbolos especiales ($\#$, $\&$), etc. Oración x sobre un alfabeto V es una cadena de longitud finita formada por símbolos de V (aquí oración es sinónimo de cadena o de palabra). V^* representa el conjunto de todas las cadenas de longitud finita incluyendo la nula, que se forman con símbolos de V . La cadena nula, de longitud 0, no tiene elementos y se representa por λ . El símbolo V^+ representa el conjunto de oraciones $V^* - \lambda$.

Un lenguaje es un conjunto (no necesariamente finito) de oraciones sobre un alfabeto. Como sucede en los lenguajes naturales, un estudio serio de la teoría de lenguajes formales debe enfocarse hacia las gramáticas y sus propiedades.

Una gramática comprende las reglas de sintaxis y contiene cuatro conceptos:

- 1) Categorías sintácticas, de las que se derivan cadenas de palabras formadas por objetos denominados "variables no terminales".
- 2) Las palabras mismas o "constantes terminales".
- 3) Las relaciones que existen entre las diversas cadenas de variables no terminales y constantes terminales o "producciones".
- 4) Un símbolo inicial o "no terminal distinguido" generador de las cadenas de terminales.

3.2 Definición.- Una gramática formal es un cuadruplete

$$G = (V_N, V_T, P, S) \quad (3.2-1)$$

donde

- V_N : conjunto finito de no terminales;
- V_T : conjunto finito de terminales;
- P : conjunto finito de reglas o producciones;
- S : símbolo inicial de la oración.

Se considera que S pertenece al conjunto V_N y que, V_N y V_T son conjuntos ajenos. El alfabeto V es la unión de los conjuntos V_N y V_T . Como ejemplos simples para ilustrar las definiciones y conceptos anteriores se pueden citar los siguientes:

1. Dado un alfabeto $\{0, 1\}$, son oraciones válidas las siguientes: $\{0, 1, 00, 01, 10, \dots\}$.
2. Dado un alfabeto $V = \{a, b\}$, se tiene que $V^* = \{\lambda, a, b, aa, ab, bb, \dots\}$ y $V^+ = \{a, b, aa, ab, bb, \dots\}$.
3. Comparando la definición de gramática formal (3.2-1) con los conceptos usuales de gramática para familiarizarse con la terminología, se considerará la oración "El niño corre". La estructura de árbol de esta oración se presenta en la figura 3.2-1.

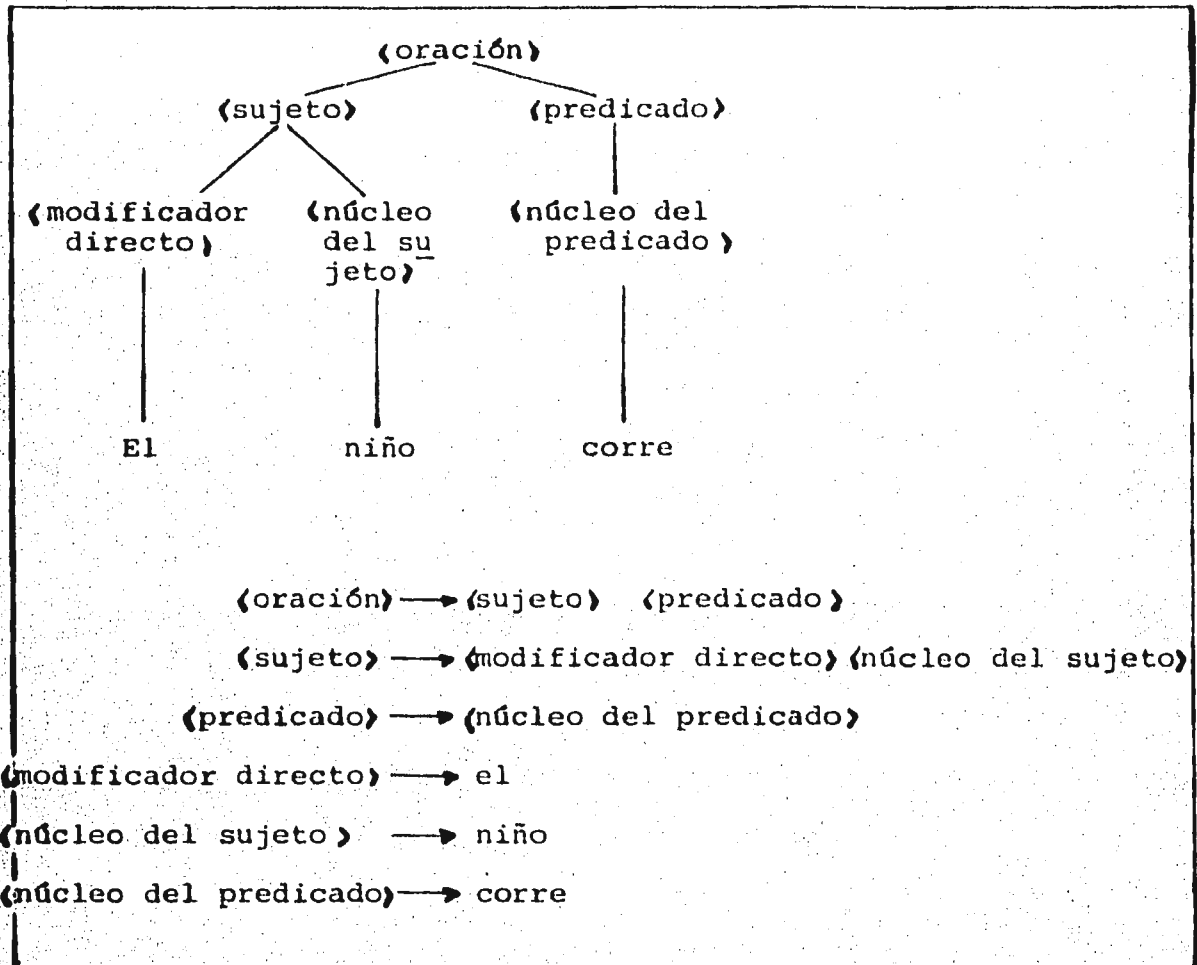


Figura 3.2-1 Producciones utilizadas en la generación de la oración "El niño corre" y árbol semántico correspondiente (Tou y González⁽¹⁸⁾).

La oración se genera con un concepto abstracto llamado <oración>. Por ahora <oración> es sólo un concepto sintáctico que representa todas las oraciones correctas en el idioma español. Luego se sustituye <oración> por <suje<u>to> más <predicado>. En la teoría

de lenguajes formales se principia con el símbolo S. Las producciones de la gramática G en la ecuación (3.2-1) corresponden en español a la sustitución de, por ejemplo, <oración> por < sujeto > más < predicado > . Al continuar aplicando las producciones o reglas < sujeto > se reduce a < modificador directo > más < núcleo del sujeto > y, < predicado > se reduce a < núcleo del predicado > . Finalmente, aplicando las producciones que mapean < modificador directo > en "El", < núcleo del sujeto > en "niño" y < núcleo del predicado > en "corre" se tiene como resultado la oración deseada. Las no terminales de G corresponden a las categorías sintácticas < sujeto > , < predicado > , < modificador directo > , < núcleo del sujeto > , etc., en tanto que las terminales corresponden a las palabras "El", "niño" y "corre". En otras palabras, las no terminales juegan el papel de las variables y las terminales, el de las constantes.

El lenguaje generado por G se representa por $L(G)$ y es el conjunto de cadenas que satisfacen dos condiciones: 1) cada cadena está formada sólo por terminales y 2) cada cadena se puede derivar de S por aplicaciones adecuadas de producciones del conjunto P. Generalmente las no terminales se representan por mayúsculas: S, A, B, ... y las terminales por minúsculas: a, b, c, ...; las cadenas de terminales por: v, w, x y las cadenas de combinaciones de terminales y no terminales por: $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \dots$.

El conjunto P de producciones está formado por expresiones de

la forma $\alpha \rightarrow \beta$; siendo α una cadena de V^+ y β una cadena de V^* .
 El símbolo \rightarrow indica la sustitución de α por β . El símbolo \xRightarrow{G} indica operaciones de la forma $\gamma \alpha \delta \xRightarrow{G} \gamma \beta \delta$ en la gramática G , esto es, la sustitución de α por β por medio de la producción $\alpha \rightarrow \beta$ quedando sin variar γ y δ .

4. Si en $G = (V_N, V_T, P, S)$, $V_N = \{S\}$, $V_T = \{a, b\}$ y $P = \{S \rightarrow aSb, S \rightarrow ab\}$, al aplicar la primera producción 3 veces se obtiene $S \rightarrow aSb \Rightarrow aaSbb \Rightarrow aaaSbbb$ (o sea, a^3Sb^3).

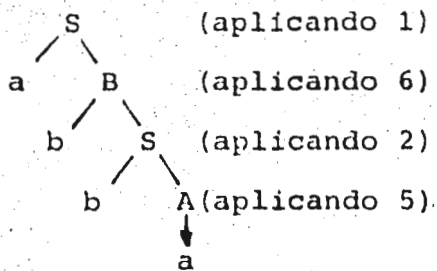
Si se aplica ahora la segunda producción se obtiene:

$$a^3Sb^3 \Rightarrow a^3abb^3 \quad \text{o sea, } a^3Sb^3 \Rightarrow a^4b^4.$$

5. Dada una $G = (V_N, V_T, P, S)$ con $V_N = \{S, A, B\}$, $V_T = \{a, b\}$

- y P :
- | | |
|------------------------|------------------------|
| 1) $S \rightarrow aB$ | 5) $A \rightarrow a$ |
| 2) $S \rightarrow bA$ | 6) $B \rightarrow bS$ |
| 3) $A \rightarrow aS$ | 7) $B \rightarrow aBB$ |
| 4) $A \rightarrow bAA$ | 8) $B \rightarrow b$ |

la derivación $S \Rightarrow abba$ se puede describir por



3.3 Tipos de Gramáticas.- A la gramática definida por (3,2-1), en la que no hay restricciones en sus producciones (por lo que es demasiado general para ser útil), se le denomina gramática tipo 0.

Con algunas restricciones sobre la naturaleza de sus producciones, Hopcroft⁽⁹⁾, Chomsky dividió las gramáticas de estructura de frase en:

Gramática tipo I o de contexto sensible si dada G , para cada producción de $\alpha \rightarrow \beta \in P$, $|\beta| \geq |\alpha|$, con $\alpha, \beta \in V^+$.

Gramática tipo II o de contexto libre, si además de ser tipo I, $\alpha \in V_N$.

Gramática tipo III o regular si cada producción de P es de la forma $A \rightarrow aB$ o bien, $A \rightarrow a$, donde $A, B \in V_N$ y $a \in V_T$.

Toda gramática regular es de contexto libre, toda gramática de contexto libre es de contexto sensible y toda gramática de contexto sensible es de tipo 0.

Además de utilizar una gramática para la descripción estructural se puede emplear para caracterizar los patrones que pertenezcan a una clase particular.

4. Conjuntos Borrosos.- Se expondrán primero algunas definiciones y conceptos básicos de la teoría de conjuntos ordinarios, posteriormente, los de subconjuntos borrosos propiamente dichos. La teoría de conjuntos ordinarios es un caso particular de la de subconjuntos borrosos.

4.1 Nociones de conjuntos ordinarios.- Sea E un conjunto de referencia y A un subconjunto de E :

$$A \subset E \quad (4.1-1)$$

Un elemento x de E pertenece a A , se indica por:

$$x \in A \quad (4.1-2)$$

Para indicar esta pertenencia, se puede utilizar el concepto de función característica $\mu_A(x)$ cuyo valor indica si x pertenece o no a A :

$$\begin{aligned} \mu_A(x) &= 1 & \text{si} & \quad x \in A \\ &= 0 & \text{si} & \quad x \notin A \end{aligned} \quad (4.1-3)$$

Por ejemplo, si se considera un conjunto finito de cuatro elementos

$$E = \{x_1, x_2, x_3, x_4\} \quad (4.1-4)$$

y un subconjunto de E

$$A = \{x_2, x_3, x_4\} \quad (4.1-5)$$

$$\begin{aligned} \text{entonces } \mu_A(x_1) &= 0, \mu_A(x_2) = 1, \mu_A(x_3) = 1, \\ &\mu_A(x_4) = 1 \end{aligned} \quad (4.1-6)$$

Esto permite expresar al subconjunto A acompañando los elementos de E del valor de su función característica respectiva,

$$A = \{(x_1, 0), (x_2, 1), (x_3, 1), (x_4, 1)\} \quad (4.1-7)$$

4.2 Repaso de algunas propiedades del álgebra Booleana.- Sea \bar{A} el complemento de A con respecto a E:

$$A \cap \bar{A} = \emptyset \quad (4.2-1)$$

$$A \cup \bar{A} = E \quad (4.2-2)$$

Si $x \in A, \quad x \notin \bar{A}: \quad (4.2-3)$

$$\mu_A(x) = 1 \quad \text{y} \quad \mu_{\bar{A}}(x) = 0 \quad (4.2-4)$$

Para el mismo caso (4.1-6 y 4.1-7):

$$\mu_{\bar{A}}(x_1) = 1, \mu_{\bar{A}}(x_2) = 0, \mu_{\bar{A}}(x_3) = 0, \mu_{\bar{A}}(x_4) = 0 \quad (4.2-5)$$

y $\bar{A} = \{(x_1, 1), (x_2, 0), (x_3, 0), (x_4, 0)\} \quad (4.2-6)$

Considerando ahora dos subconjuntos A, B y su intersección

$A \cap B:$

$$\begin{aligned} \mu_A(x) &= 1 & \text{si} & \quad x \in A & (4.2-7) \\ &= 0 & \text{si} & \quad x \notin A, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mu_B(x) &= 1 & \text{si} & \quad x \in B, & (4.2-8) \\ &= 0 & \text{si} & \quad x \notin B \end{aligned}$$

y $\mu_{A \cap B}(x) = 1 \quad \text{si} \quad x \in A \cap B \quad (4.2-9)$
 $= 0 \quad \text{si} \quad x \notin A \cap B$

Por lo anterior, se puede escribir

$$\mu_{A \cap B}(x) = \mu_A(x) \cdot \mu_B(x) \quad (4.2-10)$$

donde la operación (\cdot) corresponde al "producto booleano" representado en la siguiente tabla:

| | | |
|-----------|---|---|
| (\cdot) | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 |

Análogamente se define la unión $A \cup B$ para los mismos subconjuntos,

$$\begin{aligned} \mu_{A \cup B}(x) &= 1 & \text{si } x \in A \cup B \\ &= 0 & \text{si } x \notin A \cup B \end{aligned} \quad (4.2-11)$$

con la siguiente propiedad:

$$\mu_{A \cup B}(x) = \mu_A(x) \dot{+} \mu_B(x) \quad (4.2-12)$$

correspondiendo la operación $(\dot{+})$ a la suma booleana de la siguiente tabla

| | | |
|-------------|---|---|
| $(\dot{+})$ | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 |

4.3 Concepto de subconjunto borroso, Zadeh⁽¹⁹⁾, Kaufmann^{(11), (12)}.
 Sea E un espacio de puntos (objetos), en el que uno de sus elementos se representa por x.

Un conjunto borroso (clase) \tilde{A} de E se caracteriza por una función de pertenencia $\mu_{\tilde{A}}(x)$ que asocia con cada punto de E un número real del intervalo $[0,1]$, el valor de $\mu_{\tilde{A}}(x)$ de x representa el "grado de pertenencia" de x en \tilde{A} . Cuanto más próximo esté el valor de $\mu_{\tilde{A}}(x)$ a la unidad, tanto mayor será el grado de pertenencia de x en \tilde{A} . Cuando A es un conjunto en el sentido ordinario del término, su función de pertenencia sólo puede tomar los valores 0 y 1 según que x no pertenezca o pertenezca a A respectivamente.

Cuando esta función característica puede tomar cualquier valor del intervalo $[0, 1]$, un elemento $x \in \tilde{A}$ puede no pertenecer a A ($\mu_{\tilde{A}} = 0$), pertenecer un poco a A ($\mu_{\tilde{A}}$ cerca de 0), pertenecer bastante a A ($\mu_{\tilde{A}}$ vecino de 0 y de 1), pertenecer fuertemente a A ($\mu_{\tilde{A}}$ vecino de 1), pertenecer a A ($\mu_{\tilde{A}} = 1$).

Un subconjunto borroso A de E se representa por

$$\tilde{A} \subset E \quad \text{o bien,} \quad A \subseteq E \quad (4.3-1)$$

y su pertenencia se indica por

$$x \underset{0,2}{\in} \tilde{A}, \quad y \underset{1}{\in} \tilde{A}, \quad z \underset{0}{\in} \tilde{A} \quad (4.3-2)$$

El símbolo $\underset{1}{\epsilon}$ equivale a ϵ y, $\underset{0}{\epsilon}$ equivale a $\bar{\epsilon}$.

Cuando se separa el elemento genérico de su función de pertenencia, un subconjunto borroso A se representa por

$$\underline{A} = \{ (x_1 | 0,2), (x_2 | 0), (x_3 | 0,3), (x_4 | 1) \} \quad (4.3-3)$$

quedando formalmente definido el subconjunto \underline{A} por

$$\underline{A} = \{ x | \mu_{\underline{A}}(x) \} \quad \forall x \in E \quad (4.3-4)$$

Como $\mu_{\underline{A}}(x)$ es el grado de pertenencia de x en \underline{A} , cuando toma sus valores de un "conjunto de pertenencia" M , se dice que x toma sus valores de M a través de $\mu_{\underline{A}}(x)$ y se expresa por

$$x \rightsquigarrow M \quad \text{es la función de pertenencia} \quad (4.3-5)$$

Las funciones binarias booleanas para las que $M = \{ 0, 1 \}$, son casos particulares de las funciones de pertenencia de un subconjunto borroso \underline{A} .

Esta noción de subconjunto borroso está relacionada con la de conjunto ordinario y permite estudiar, por medio de estructuras matemáticas, los conceptos imprecisos.

4.4 Definiciones y operaciones con subconjuntos borrosos.-

Relación de dominancia: sean dos n -adas ordenadas $\mathcal{U} = (k_1, k_2, \dots, k_n)$, $\mathcal{U}' = (k'_1, k'_2, \dots, k'_n)$ en las que $k_i, k'_i \in K$ (K es un conjunto ordenado), \mathcal{U}' domina a \mathcal{U} se expresa

por: $\nu' \succ \nu \iff k'_1 \succ k_1,$

$$k'_2 \succ k_2, \dots, k'_n \succ k_n \quad (4.4-1)$$

ν' domina estrictamente a ν : $\nu' \succ \nu$ si $k'_1 \succ k_1,$

$$k'_2 \succ k_2, \dots, k'_n \succ k_n \text{ con al menos un } k'_i \text{ y un}$$

k_i entre los cuales existe una relación estricta. Todas las relaciones de dominancia introducen una relación de orden. Un conjunto borroso es vacío si y sólo si su función de pertenencia es idénticamente cero en E,

$$\underline{A} = \{x \mid \mu_{\underline{A}}(x)\} = \emptyset \iff \mu_{\underline{A}}(x) = 0 \quad \forall x \in E \quad (4.4-2)$$

Inclusión. \underline{A} está incluido en \underline{B} , $\underline{A} \subset \underline{B}$, si y sólo si $\forall x \in E$:

$$\mu_{\underline{A}}(x) \leq \mu_{\underline{B}}(x) \quad (4.4-3)$$

La inclusión estricta corresponde al caso en que al menos una relación de $\mu_{\underline{A}}(x) \leq \mu_{\underline{B}}(x)$ es estricta: $\underline{A} \subset \subset \underline{B}$.

Igualdad. \underline{A} y \underline{B} son iguales, $\underline{A} = \underline{B}$, si y sólo si $\forall x \in E$:

$$\mu_{\underline{A}}(x) = \mu_{\underline{B}}(x) \quad (4.4-4)$$

Si al menos una x de E es tal que no se satisfaga la igualdad anterior, $\underline{A} \neq \underline{B}$.

Complementación. \underline{A} y \underline{B} son complementarios, $\underline{B} = \overline{\underline{A}}$, si $\forall x \in E$:

$$\mu_{\underline{B}}(x) = 1 - \mu_{\underline{A}}(x), \text{ evidentemente } \overline{\overline{\underline{A}}} = \underline{A}. \quad (4.4-5)$$

Intersección. $\underline{A} \cap \underline{B}$, se define por el mayor subconjunto borroso

contenido al mismo tiempo en \underline{A} y en \underline{B} , $\forall x \in E$:

$$\mu_{\underline{A} \cap \underline{B}}(x) = \text{MIN}(\mu_{\underline{A}}(x), \mu_{\underline{B}}(x)) \quad (4.4-6)$$

Unión. $\underline{A} \cup \underline{B}$, se define por el menor subconjunto borroso que contiene a \underline{A} o a \underline{B} :

$$\forall x \in E: \mu_{\underline{A} \cup \underline{B}}(x) = \text{MAX}(\mu_{\underline{A}}(x), \mu_{\underline{B}}(x)) \quad (4.4.-7)$$

$$\forall x \in E: x \in \underline{A} \text{ o } x \in \underline{B} \Rightarrow x \in \underline{A} \cup \underline{B} \text{ (o borroso)}$$

Suma disyuntiva. Se define en términos de uniones e intersecciones:

$$\underline{A} \oplus \underline{B} = (\underline{A} \cap \bar{\underline{B}}) \cup (\bar{\underline{A}} \cap \underline{B}) \quad (4.4-8)$$

Diferencia. Se define por la relación

$$\underline{A} - \underline{B} = \underline{A} \cap \bar{\underline{B}}, \quad (4.4-9)$$

salvo en casos particulares,

$$\underline{A} - \underline{B} \neq \underline{B} - \underline{A}.$$

4.5 Representación visual de las definiciones anteriores utilizando diagramas de Venn-Euler.- Se va a considerar un rectángulo en el que en la abscisa están los elementos de E , en la ordenada, los valores de la pertenencia de cada elemento y en la parte sombreada, el subconjunto borroso definido.

La siguiente figura ilustra la representación del subconjunto borroso \underline{A} :

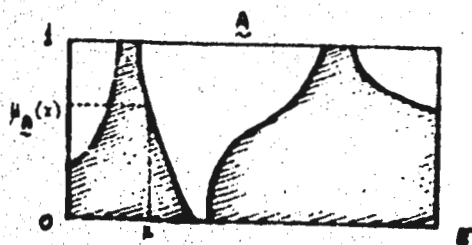
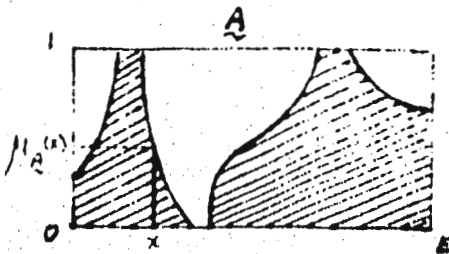
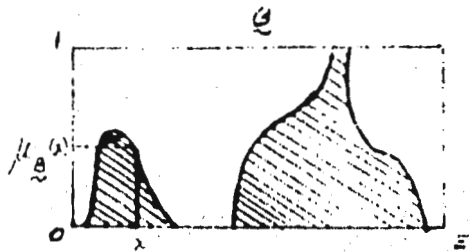
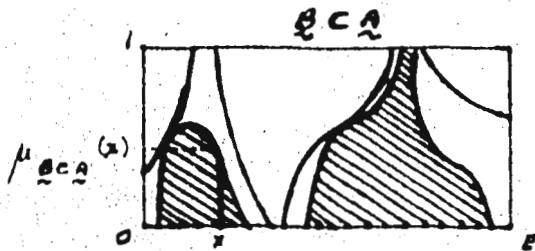


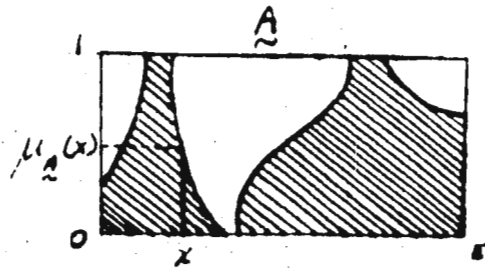
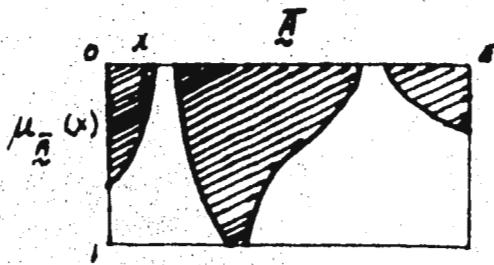
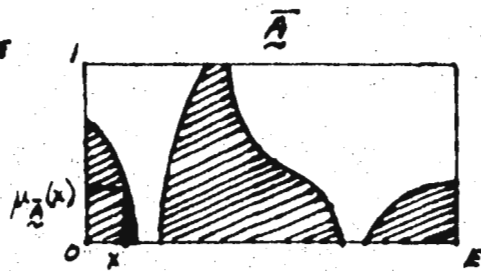
Fig. 4.5-1 \underline{A}

De esta manera, las operaciones simples de los subconjuntos borrosos se indican en las siguientes figuras.

La propiedad de inclusión: $\underline{A} \subset \underline{E}$, $\underline{B} \subset \underline{E}$ y $\underline{B} \subset \underline{A}$ se encuentra respectivamente en las figuras 4.5-2, 4.5-3 y 4.5-4:

Fig. 4.5-2 $A \subset E$ Fig. 4.5-3 $B \subset E$ Fig. 4.5-4 $B \subset A$

La complementación \bar{A} se representa en las figuras 4.5-6 y 4.5-7, dado el subconjunto borroso A en la 4.5-5:

Fig. 4.5-5 $\tilde{A} \subset E$ Fig. 4.5-6 $\bar{\tilde{A}}$ Fig. 4.5-7 $\bar{\tilde{A}}$

En las figuras 4.5-8, 4.5-9, 4.5-10 y 4.5-11 se han representado las propiedades de intersección y de unión respectivamente:

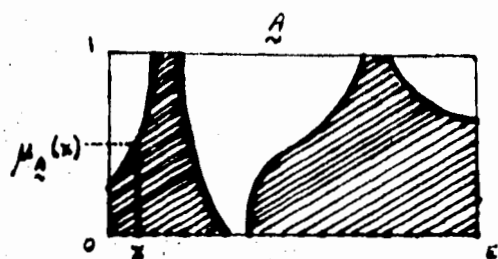


Fig. 4.5-8 A

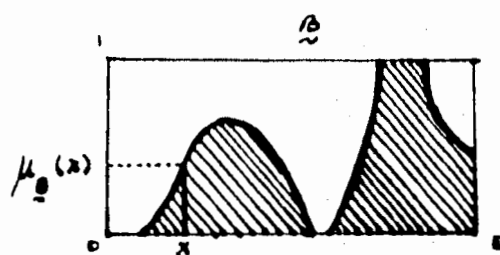
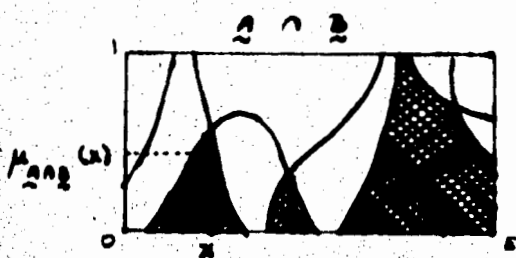
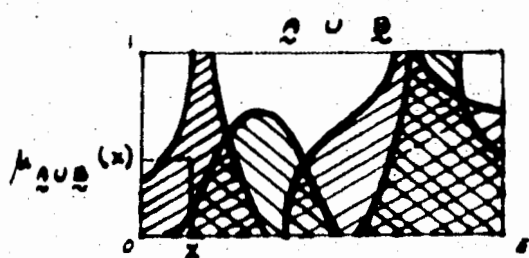


Fig. 4.5-9 B

Fig. 4.5-10 $\underline{A} \cap \underline{B}$ Fig. 4.5-11 $\underline{A} \cup \underline{B}$

Las propiedades de la diferencia $\underline{A} - \underline{B} = \underline{A} \cap \underline{\bar{B}}$ y de la suma disyuntiva $\underline{A} \oplus \underline{B} = (\underline{A} \cap \underline{\bar{B}}) \cup (\underline{\bar{A}} \cap \underline{B})$ se representan en las figuras 4.5-12 a 4.5-18 respectivamente:

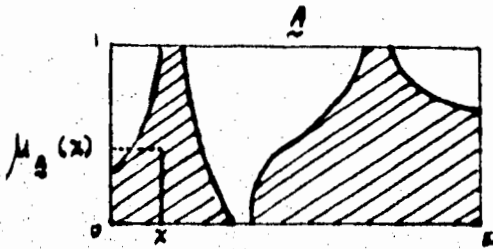


Fig. 4.5-12

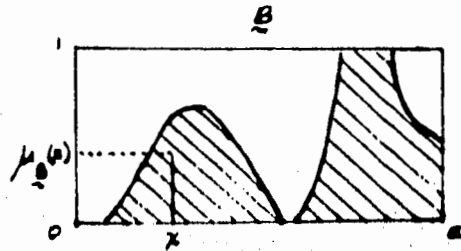


Fig. 4.5-13

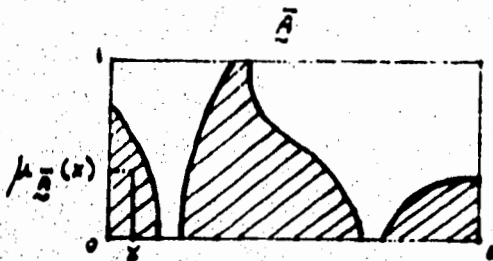


Fig. 4.5-14

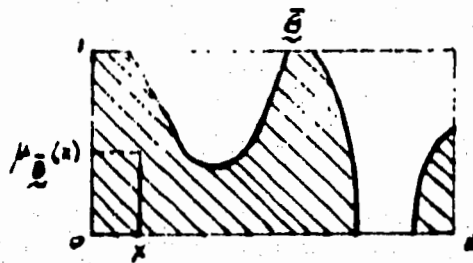


Fig. 4.5-15

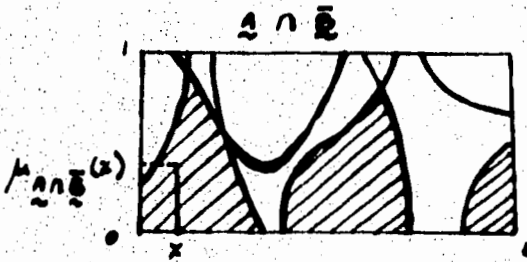


Fig. 4.5-16 $A \cap \bar{B}$
(diferencia $A - \bar{B}$)

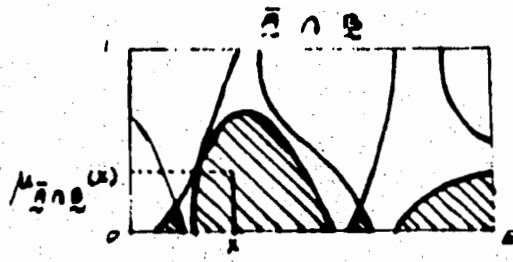


Fig. 4.5-17 $\bar{A} \cap B$

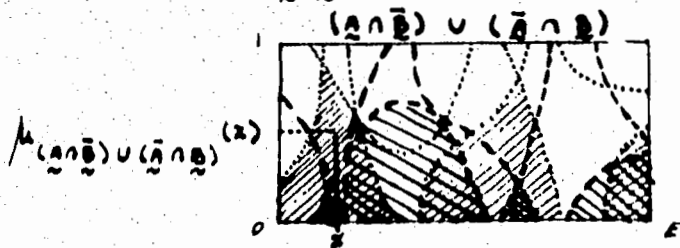


Fig. 4.5-18 Suma
disyuntiva

4.6 Propiedades del conjunto de subconjuntos borrosos.- Dado E, conjunto ordinario y, $A \subset E$, $B \subset E$, $C \subset E$; se tiene que:

$$\text{conmutativa} \quad \left\{ \begin{array}{l} A \cap B = B \cap A \\ A \cup B = B \cup A \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (4.6-1) \\ (4.6-2) \end{array}$$

$$\text{asociativa} \quad \left\{ \begin{array}{l} (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) \\ (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (4.6-3) \\ (4.6-4) \end{array}$$

$$\text{idempotencia} \quad \left\{ \begin{array}{l} A \cap A = A \\ A \cup A = A \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (4.6-5) \\ (4.6-6) \end{array}$$

Distributiva:
de intersección
respecto a la unión

$$\left\{ \begin{array}{l} A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \\ A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (4.6-7) \\ (4.6-8) \end{array}$$

de unión respecto a
la intersección

$$\text{sólo para ordina-} \quad \left\{ \begin{array}{l} A \cap \bar{A} = \emptyset \\ A \cup \bar{A} = E \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (4.6-9) \\ (4.6-10) \end{array}$$

rios

$$A \cap \emptyset = \emptyset \quad (4.6-11)$$

$$A \cup \emptyset = A \quad (4.6-12)$$

$$A \cap E = A \quad (4.6-13)$$

$$A \cup E = E \quad (4.6-14)$$

$$\text{involución} \quad \bar{(\bar{A})} = A \quad (4.6-15)$$

Teoremas de De Morgan

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B} \\ \overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (4.6-16) \\ (4.6-17) \end{array}$$

Estas propiedades se satisfacen para \underline{A} , \underline{B} , \underline{C} excepto las (4.6-9) y (4.6-10) que sólo se verifican para conjuntos ordinarios, como se puede ver en las figuras 4.6-1 y 4.6-2, considerando los conjuntos borrosos anteriores \underline{A} y $\bar{\underline{A}}$.

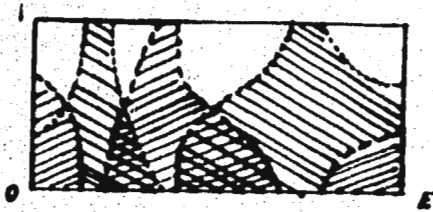


Fig. 4.6-1 $\underline{A} \cup \bar{\underline{A}} \neq E$



Fig. 4.6-2 $\underline{A} \cap \bar{\underline{A}} \neq \emptyset$

Para el conjunto de subconjuntos borrosos no se tiene un álgebra en el sentido de la teoría de conjuntos ordinarios; la estructura es la de una red vectorial.

4.7 Conjunto de subconjuntos borrosos para E y M finitos.

Sea $E = \{x_1, x_2, x_3\}$ un subconjunto ordinario cuyo cardinal es 3, $\text{card } E = 3$; como $M = \{0, 1\}$, $\text{card } M = 2$.

Un conjunto de potencias $\mathcal{P}(E)$ será:

$$\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{x_1\}, \{x_2\}, \{x_3\}, \{x_1, x_2\}, \{x_1, x_3\}, \{x_2, x_3\}, E\}$$

que contiene $2^3 = 8$ elementos. Si $E = \{x_1, \dots, x_n\}$ se definen 2^n elementos en forma análoga.

Si $E = \{x_1, x_2\}$ es un subconjunto borroso con $M = \{0, 1/2, 1\}$ por ejemplo, el conjunto de subconjuntos borrosos será:

$$\mathcal{P}(E) = \left\{ \{(x_1|0), (x_2|0)\}, \{(x_1|0), (x_2|0,5)\}, \{(x_1|0,5), (x_2|0)\}, \right. \\ \left. \{(x_1|0,5), (x_2|0,5)\}, \{(x_1|0), (x_2|1)\}, \{(x_1|1), (x_2|0)\}, \right. \\ \left. \{(x_1|1), (x_2|0,5)\}, \{(x_1|0,5), (x_2|1)\}, \{(x_1|1), (x_2|1)\} \right\}$$

$\text{card } E = 2$, $\text{card } M = 3$ que contiene $3^2 = 9$ elementos.

En general, si $\text{card } E = n$ y $\text{card } M = m$,

$$\text{card } \mathcal{P}(E) = m^n.$$

La card $\mathcal{P}(E)$ es finita $\Leftrightarrow m, n$ son finitas. Siempre se verifica que $\mathcal{P}(E) \subset \mathcal{P}(E)$.

La estructura de $\mathcal{P}(E)$ es una red booleana (distributiva y complementaria), la de $\mathcal{P}(E)$ es la de una red vectorial (distributiva pero no complementaria)

En las siguientes representaciones se indican redes booleanas (figs. 4.7-1 (a) y 4.7-1 (b)) y redes vectoriales (figs. 4.7-2 (a) y 4.7-2 (b)).

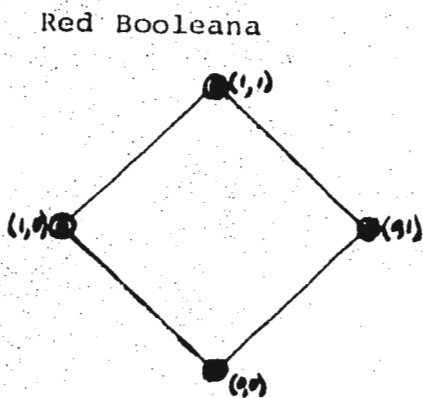


Fig. 4.7-1 (a)

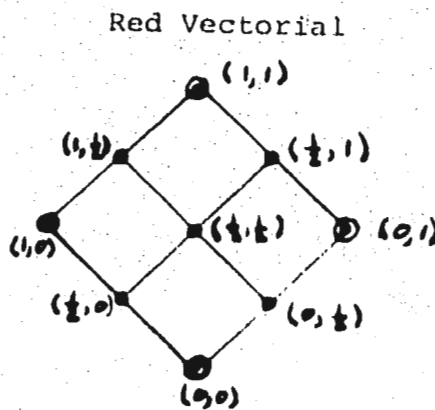
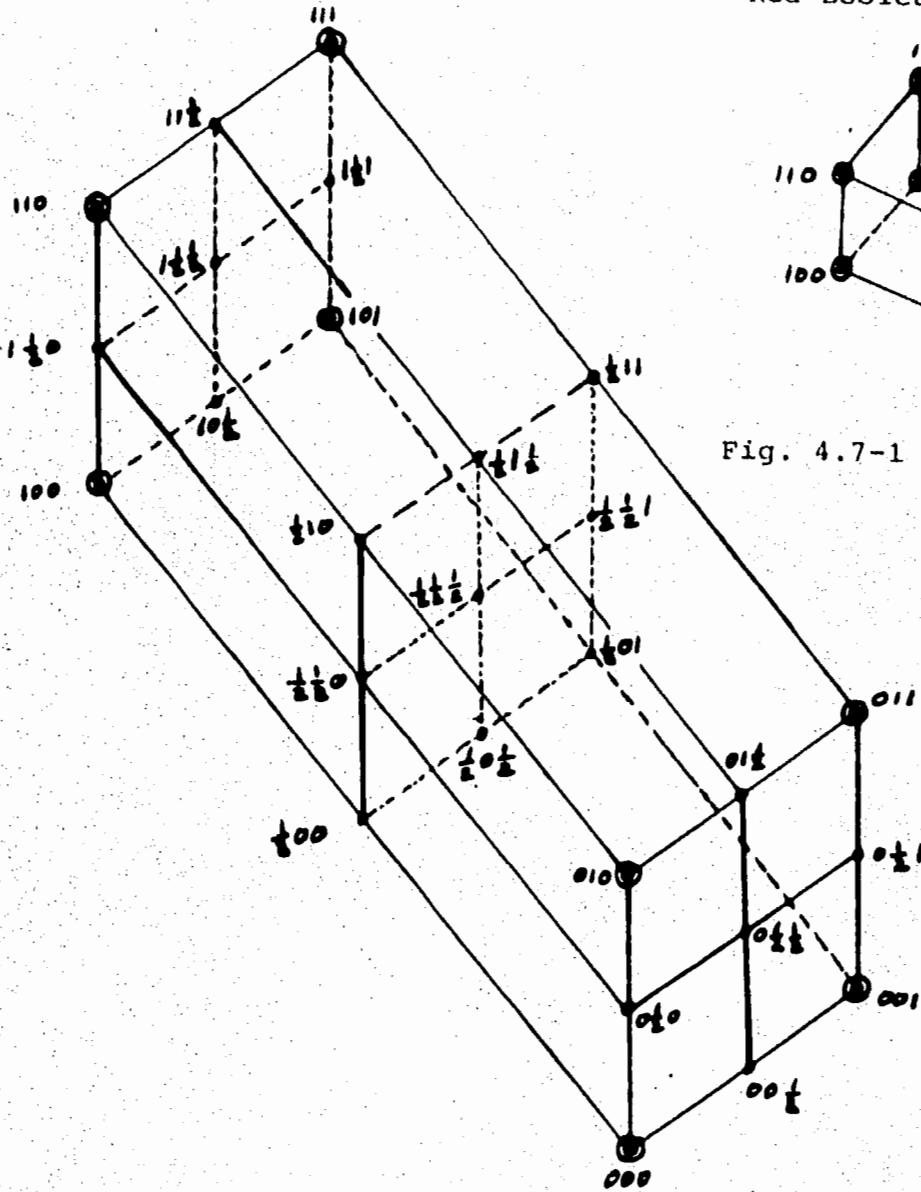


Fig. 4.7-2 (a)

Red Vectorial



Red Booleana

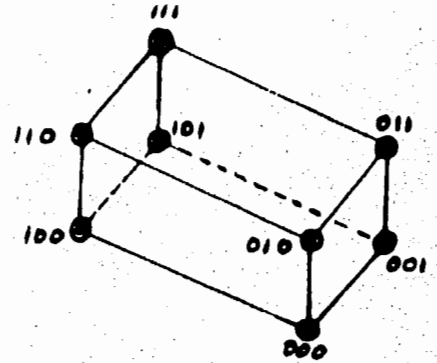


Fig. 4.7-1 (b)

Fig. 4.7-2 (b)

4.8 Gráficas borrosas.- Las nociones de gráfica, de correspondencia y de relación, juegan un papel fundamental en todas las aplicaciones de matemáticas. Se pueden generalizar a partir de la noción de subconjunto borroso. Es probable que las investigaciones sobre conceptos borrosos adquieran una importancia progresiva y permitan al menos describir muchos fenómenos complejos, reducidos a su especificación de todo o nada.

4.9 Definición de gráfica borrosa. Sean dos conjuntos E_1 , E_2 en los que x es un elemento de E_1 y y un elemento de E_2 . El conjunto de parejas (x, y) define el conjunto producto $E_1 \times E_2$.

El subconjunto borroso tal que:

$$\forall (x, y) \in E_1 \times E_2 : \mu_{E_1 \times E_2}(x, y) \in M,$$

se denomina gráfica borrosa G .

Por ejemplo, si $E_1 = \{x_1, x_2, x_3\}$ y $E_2 = \{y_1, y_2\}$

$$E_1 \times E_2 = \{(x_1, y_1), (x_1, y_2), (x_2, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_1), (x_3, y_2)\}$$

El "valor" de la pareja (x_i, y_j) con $i = 1, 2, 3$ $j = 1, 2$ será

$$\mu(x_i, y_j) = \mu_{E_1 \times E_2}(x_i, y_j)$$

$$\text{Si } \mu(x_1, y_1) = 0,3, \mu(x_1, y_2) = 0,7, \mu(x_2, y_1) = 1, \\ \mu(x_2, y_2) = 0, \mu(x_3, y_1) = 0,5, \mu(x_3, y_2) = 0,2$$

estas funciones definen el subconjunto borroso:

$$\tilde{G} = \{((x_1, y_1) | 0,3), ((x_1, y_2) | 0,7), ((x_2, y_1) | 1), ((x_2, y_2) | 0), \\ ((x_3, y_1) | 0,5), ((x_3, y_2) | 0,2)\}$$

que se representa por la matriz:

| | y_1 | y_2 |
|-------|-------|-------|
| x_1 | 0,3 | 0,7 |
| x_2 | 1 | 1 |
| x_3 | 0,5 | 0,2 |

Tabla 4.9-1 Representación matricial de Gráfica borrosa.

La gráfica $\tilde{G} \in E_1 \times E_2$ es una gráfica borrosa.

La figura 4.9-1 representa una gráfica borrosa en tanto que la 4.9-2, una gráfica ordinaria.

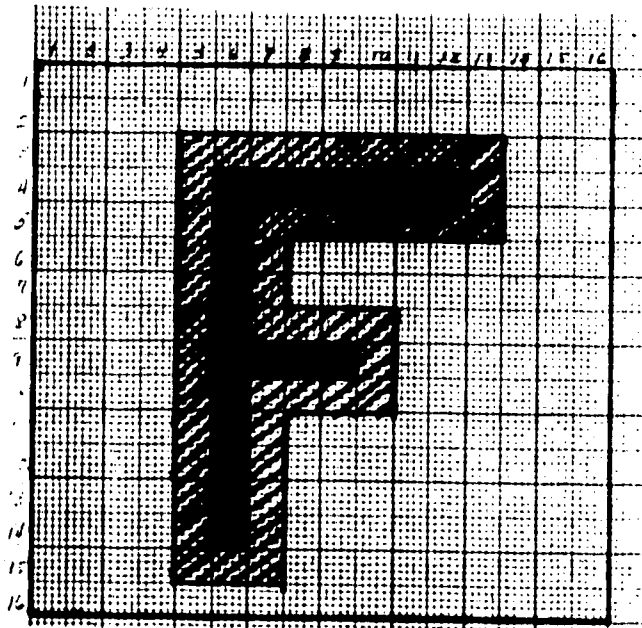


Figura 4.9-1 Gráfica Borrosa

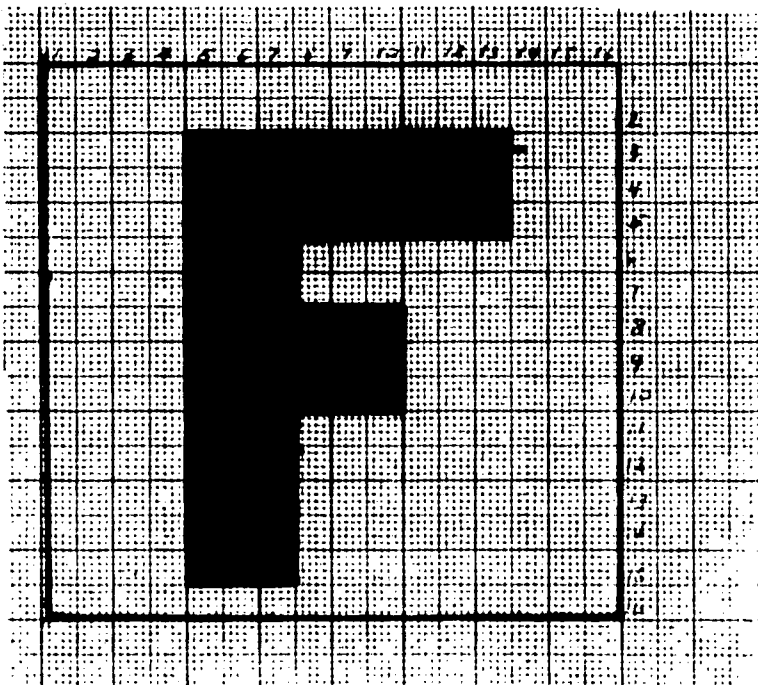


Figura 4.9-2 Gráfica ordinaria

4.10 Relación Borrosa. Una relación borrosa \tilde{R} de x a y es un subconjunto borroso del producto cartesiano $X \times Y$. En general si P es un conjunto producto de n -conjuntos y M su conjunto de pertenencia, una relación n -aria borrosa es un subconjunto borroso de P que toma sus valores de M . El rango de $\mu_{\tilde{R}}$ es $[0,1]$ y $\mu_{\tilde{R}}(x,y)$ es el grado de pertenencia de la relación entre x y y .

Una relación borrosa de $E_1 \times E_2$ en que $x \in E_1$, y $y \in E_2$, se expresa por: $x \tilde{R} y$.

\vee_x es el máximo respecto a un elemento o variable x ,

\wedge_x es el mínimo respecto a un elemento o variable x .

4.11 Proyección de una Relación Borrosa.- La función de pertenencia

$$\mu_{\tilde{R}}^{(1)}(x) = \vee_y \mu_{\tilde{R}}(x,y) \quad (4.11-1)$$

así definida, se denomina "primera proyección" de \tilde{R} .

En forma análoga, la función de pertenencia:

$$\mu_{\tilde{R}}^{(2)}(y) = \vee_x \mu_{\tilde{R}}(x,y) \quad (4.11-2)$$

se define por "segunda proyección" de \tilde{R} .

La segunda proyección de la primera proyección (o inversamente, la primera de la segunda) se denomina "proyección global de la relación borrosa" $h(\tilde{R})$ y se expresa por

$$h(\underline{R}) = \bigvee_x \bigvee_y \mu_{\underline{R}}(x,y) = \bigvee_y \bigvee_x \mu_{\underline{R}}(x,y) \quad (4.11-3)$$

Cuando $h(\underline{R}) = 1$, la relación es normal; si $h(\underline{R}) < 1$, es subnormal.

Por ejemplo:

| | y_1 | y_2 | y_3 | $\mu_{\underline{R}}^{(1)}$ 1a. proy. |
|---------------------------------------|-------|-------|-------|--|
| x_1 | 1 | 0,2 | 1 | 1 |
| x_2 | 0,6 | 0,8 | 0 | 0,8 |
| x_3 | 0 | 1 | 0,3 | 1 |
| $\mu_{\underline{R}}^{(2)}$ 2a. proy. | 1 | 1 | 1 | 1 |

proy. global
 $h(\underline{R})$.

5. Algoritmo.- Las nociones de patrón, gramática regular y proyecciones borrosas expuestas en este capítulo, se utilizarán para establecer el algoritmo de reconocimiento de letras mayúsculas que es el problema de este trabajo; en este algoritmo se emplearán el método de reconocimiento sintáctico y las proyecciones borrosas.

C A P I T U L O 3

Métodos existentes de reconocimiento de patrones

1. Ishikawa y Mieno⁽¹⁰⁾ aplican el concepto borroso y la entropía borrosa a un problema de reconocimiento de patrones, la impresión de un sello, para medir el valor subjetivo de la información en condiciones de insertidumbre. Introducen dos métodos uno de segmentación sucesiva y otro de segmentación directa en el reconocimiento de patrones para obtener el menos costoso y presentan un análisis paramétrico entre la función de pertenencia, la entropía borrosa y un nivel umbral.

Desde que Zadeh en 1965 describe el concepto borroso con base en los conjuntos borrosos que se presentan por mapeos de un conjunto al intervalo unidad en la recta de los reales, Goguen en 1966 define la entropía borrosa como los mapeos de conjuntos a redes Booleanas.

En este método se propone un sistema de interacción hombre-máquina, fig. 1-1, en el que las funciones de reconocimiento son:

F_s : función de segmentación de un campo (hombre)

F_o : función de observación de caracteres (máquina)

F_c : función de composición de patrones (máquina)

F_d : función toma de decisiones para una característica mediante la descomposición (hombre).

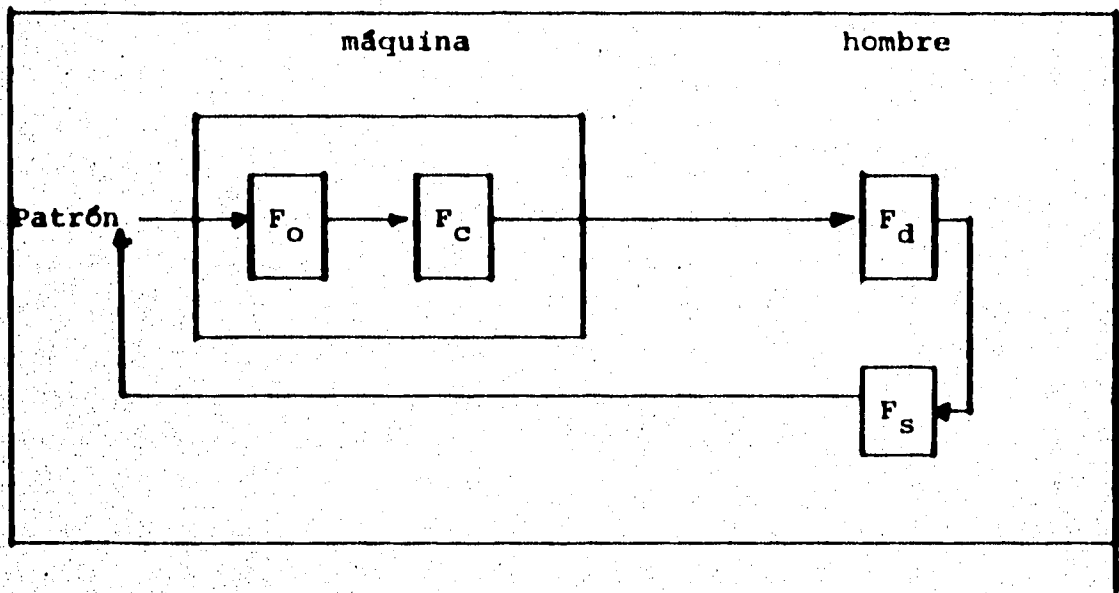


Fig. 1-1 Funciones de reconocimiento de patrón

El concepto de entropía se aplica para que el hombre identifique y mida F_d y F_s . Las medidas generales se utilizan para determinar el valor cuantitativo de la información de los métodos de segmentación. El valor cualitativo y subjetivo lo proporciona el hombre para tratar el problema cognitivo de percibir información pictórica y reconocer sus contenidos de información (patrón).

Se escriben los caracteres Chinos "YOSHIKAWA" en negro sobre fondo blanco. La naturaleza y características de la figura a reco-

nocer se pueden explicar por una teoría de conjuntos. El campo se forma por una malla de 32×32 celdas. Cada celda es un elemento a_i y el campo se expresa por el conjunto A ; $a_i \in A$, ($i=1, \dots, 32$).

Los caracteres de la celda son negros si a_i contiene figura y el fondo es blanco. El observador reconoce la figura al conocer todos los posibles caracteres descritos por dichas celdas. La probabilidad p de que un elemento de un subconjunto sea parte de la figura, es el valor medio en la escala de gris de cierto nivel de caracteres $f(a_i)$ de elementos a_i .

$$p = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m f(a_i)$$

donde m es el número de elementos (a_i) del subconjunto.

Con la entropía H se mide cuantitativamente el grado de presencia o ausencia en el subconjunto,

$$H = p \log p^{-1} + (1-p) \log(1-p)^{-1}$$

y, ésta se describe como una función del valor medio de $f(a_i)$. Esta entropía H se generalizará a la entropía borrosa H' y se analizará con el método de descomposición sucesiva.

Proponen un método de descomposición sucesiva por el que los

observadores reconocen un patrón partiendo de un nivel de no conocimiento a otro de conocimiento sucesivamente en virtud de un nivel de caracteres (un nivel de gris medio de todos los elementos del subconjunto y de un conjunto inicial).

Cuando el observador desea reconocer una figura no necesita mirar $f(a)$ con detalle sino que necesita observar un nivel L de cada subconjunto; si en su mente prevalece ambigüedad respecto al subconjunto, se descompone el campo. El subconjunto inicial se divide en dos que contienen el mismo número de elementos. Así, la descomposición sucesiva satisfará la naturaleza de la F_s : $1, 2 \times 2, \dots, 32 \times 32$.

En las siguientes figuras se presenta la segmentación sucesiva indicando gradualmente el nivel de gris

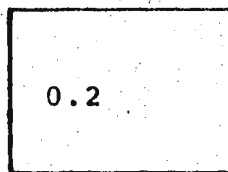


Fig. 1-2 Impresión de un sello

El número 0.2 indica el nivel de gris medio de todos los elementos de la figura del sello. El nivel umbral de H_0 introducido en la memoria de la computadora es de 0.09; por lo que debe continuar la segmentación para poder identificar el patrón.

| | |
|-----|-----|
| 0.1 | 0.4 |
| 0.1 | 0.3 |

Fig. 1-3 Primera segmentación
impresión de un sello

En esta figura hay cuatro subconjuntos pero no está clara la impresión del sello puesto que los valores son todavía mayores que el umbral establecido.

| | | | |
|-----|-----|-----|-----|
| 0.0 | 0.2 | 0.5 | 0.3 |
| 0.0 | 0.1 | 0.5 | 0.4 |
| 0.0 | 0.2 | 0.3 | 0.3 |
| 0.1 | 0.4 | 0.5 | 0.3 |

Fig. 1-4 Segunda segmentación
impresión de un sello

Algunos subconjuntos ya no se necesitan segmentar pero la mayoría todavía requiere otra subdivisión; continuandolas, en la segmentación 32 x 32 ya se presenta con claridad el patrón bien definido, que se muestra en la figura 1-5.

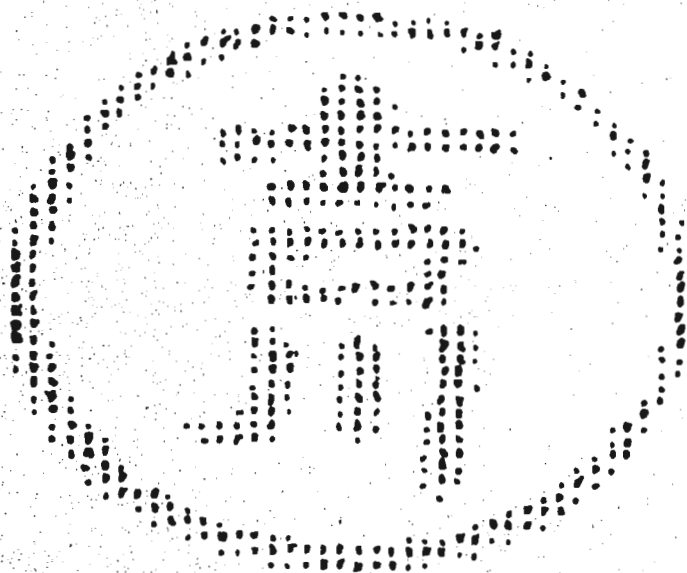


Fig. 1-5 Sello observado después de segmentar el patrón original.

2. Kickert y Koppelaar⁽¹³⁾ describen un algoritmo para reconocimiento automático de letras mayúsculas manuscritas en términos de gramáticas formales. El esquema de reconocimiento sintáctico se amplía introduciendo el concepto de conjuntos borrosos en lugar del método probabilista usual.

El hecho de que la variabilidad en escrituras es muy grande, fue el motivo para considerar una nueva proposición para el procedimiento de asignación de clases basado en conceptos de conjuntos borrosos.

El concepto de "vaguedad" se utiliza para describir la variabilidad de las letras. La teoría de conjuntos borrosos ofrece un formalismo matemático útil para la obtención de un procedimiento de clasificación basado en esta vaguedad.

Utilizando el método sintáctico, se observa cada mayúscula como formada por un conjunto de elementos básicos. La selección de primitivos es esencialmente heurística. En un extremo está la letra completa y en el otro, se ve la letra como una colección de pequeños trazos. Una elección intermedia sería cierta clase de rectas y arcos. En este método los segmentos ideales son seis:

— | / \ ()

y el proceso de composición de letras está regido por una gramática de contexto libre. El reconocimiento se efectúa secuen-

cialmente, barriendo el patrón de un segmento a otro y cada uno se reconoce por separado como miembro del conjunto de segmentos ideales definido previamente. Después de reconocer un segmento, continúa el barrido a los puntos extremos o medios del segmento ya clasificado. Las reglas de reconocimiento se dividen según las distintas posiciones de todo el patrón en que puede tener lugar un segmento.

Formalmente el procedimiento de reconocimiento comprende un conjunto de segmentos que forman idealmente una mayúscula, un conjunto de once subrutinas capaces de detectar y reconocer secuencialmente los segmentos de los patrones y un conjunto de segmentos reales que forman el patrón.

El elemento reconocido está formado por parámetros para su posición y su forma: longitud, pendiente, curvatura, iniciar, terminar y puntos conectores.

La parametrización puede ser costosa respecto al tiempo de cómputo y a los requisitos de memoria, por lo que proponen una optimización, siendo la función de costo a minimizar:

$$C = \sum_{i=1}^n (n_i) (et_i) (mr_i)$$

donde n_i es el número de llamadas a la i -ésima subrutina de

reconocimiento de P , $1 \leq i \leq n$ ($n = 6$).

et_i es el tiempo de ejecución medio de la subrutina i .

mr_i es el requisito de memoria medio de la subrutina i .

El orden secuencial en que se aplican las subrutinas de reconocimiento de P , es el parámetro respecto al que se minimiza C .

La frecuencia de ocurrencia de las 26 letras del alfabeto se conoce para la mayoría de los idiomas. De este hecho se puede obtener directamente la frecuencia de ocurrencia de todos los segmentos que forman las letras. Conociendo las probabilidades de ocurrencia de cada segmento se puede optimizar estadísticamente C disponiendo el orden de aplicación de las rutinas de tal forma que las reglas de reconocimiento económicas que se espera tengan éxito se aplican primero y las más costosas, después.

Con este método sintáctico se generan las trayectorias sobre las que se puede componer una letra a partir de los segmentos que la constituyen.

Lo mal escrito de una letra se puede interpretar directamente como una función, la función de pertenencia borrosa que representa el grado en el que el patrón real pertenece al conjunto borroso "línea" o "arco". El peor patrón parece una línea, cuanto más baja la confianza de que lo bien representado que esté

el patrón sea una línea tanto menor será el grado de pertenencia de ese patrón en el conjunto borroso "línea".

Definen dos conjuntos borrosos: "recto" y "curvo" y, asignan al segmento observado x un grado de pertenencia en el intervalo $[0, 1]$

$$\mu_{\text{"recto"}}(x) \rightarrow [0, 1]$$

$$\mu_{\text{"curvo"}}(x) \rightarrow [0, 1]$$

Debido al concepto básicamente subjetivista de un conjunto borroso, la asignación real de pertenencia borrosa a los segmentos del patrón es una elección heurística. Como consecuencia, el conjunto de segmentos paramétricos se convierte en un conjunto de conjuntos borrosos. Se considera que cada segmento es un conjunto borroso que constituye a su vez varios conjuntos borrosos, esto es, "curvo", "largo", "profundo" y, se establece que la función de pertenencia de un segmento de este tipo es

$$\mu(x) = \min [\mu_{\text{"curvo"}}(x); \mu_{\text{"largo"}}(x); \mu_{\text{"profundo"}}(x)]$$

$\mu(x)$ es una medida de la confianza del reconocimiento del segmento de patrón observado.

Una forma para tomar una decisión respecto a si el segmento es un arco, por ejemplo, sería introduciendo un nivel umbral $\alpha \in [0, 1]$ tal que si $\mu_{\alpha}(x) \geq \alpha$, x es un arco, en tanto que si $\mu_{\alpha}(x) < \alpha$, x no lo es.

Esquema de reconocimiento borroso.- El carácter completo a reconocerse se considera constituido por la intersección de todos los subsegmentos.

3. G. F. De Palma y S. S. Yau^{(20(b))} describen un experimento de reconocimiento de un patrón, para probar la utilidad de las gramáticas fraccionalmente borrosas en el reconocimiento de patrones. Se utilizó un espacio para el patrón, que consistía en un conjunto de cadenas. Se eligió emplear las letras manuscritas, las cuales se introdujeron en una computadora en una tableta de gráficas. Estos datos consistieron en cadenas de puntos del espacio 2-dimensional de la tableta. Los datos fueron una muestra de la escritura de siete personas. A cada una se le dió una lista de 400 palabras de siete letras y se indicó el tamaño aproximado de dichas letras. Los datos fueron digitalizados continuamente por la computadora, mientras la pluma estaba abajo. Cada punto así coleccionado se comparaba con el punto previamente almacenado para ver si la distancia entre ellos era mayor que un umbral dado. Si no era mayor, el nuevo punto se descartaba y se leía otra posición nueva de la pluma. Si el umbral era excedido, este punto se agregaba a los datos y se repetía el proceso. Esto dió como resultado un registro de 250 puntos en el plano xy para cada palabra de siete letras escrita.

A continuación había que convertir estos puntos a una cadena de símbolos que comprendería al alfabeto terminal. Esto se logró

comparando cada pareja adyacente de puntos para ver la dirección relativa que recorría la pluma en ese punto y clasificar la dirección en alguna de las ocho direcciones, cada una a 45 grados de su antecesora, centrando la clase 0 a cero grados; las clases restantes se numeraron del 1 al 7 en sentido contrario al del reloj.

El alfabeto terminal estaba formado por ocho dígitos octales ($V_T = \{0, 1, 2, \dots, 7\}$). Esta cuantización de direcciones introdujo cierta distorsión en los datos.

Se utilizaron sólo gramáticas regulares fraccionalmente borrosas y se generaron por métodos de intento y error.

En este método existen muchas consideraciones y el tiempo de cómputo parece ser considerable.

4. Kaufmann⁽¹²⁾ genera el algoritmo de reconocimiento de letras impresas haciendo uso del concepto de proyección borrosa de una relación, como en la figura 4.9-1 y en la 4.9-2 del capítulo 2.

En los métodos anteriores se requiere de gran equipo de cómputo, computadoras de 32 a 64 K palabras, terminales periféricas, etc. y como se desea implementar el reconocimiento para que un amputado efectúe el movimiento, un primer problema que se presenta

es el peso del equipo necesario, (17) .

El método que se propone para el reconocimiento no implica equipo pesado ni voluminoso.

S es la letra inicial total a reconocer y
 P es el siguiente conjunto finito de siete reglas de reconocimiento tales que $P: A \rightarrow aB$ o bien, $A \rightarrow a$, donde $A, B \in V_N^*$ y $a \in V_T$; en nuestro caso $\mu: A \rightarrow [0,1] B$ o bien, $A \rightarrow [0,1]$; $\mu \rightarrow [0,1]$ es una medida de qué tanto se parece el segmento real al ideal:

- 1 Establecer el área que ocupa la letra
- 2 Subdividir el área en 16 partes iguales dando un orden simultáneamente
- 3 Entrada a la primera subárea por la izquierda
- 4 Establecer en cada subárea la función de membresía del segmento que ahí se encuentra, con respecto al segmento ideal
- 5 Caracterizar cada subárea con el máximo de estas funciones, en caso de que esté presente más de un segmento
- 6 Establecer las proyecciones de las relaciones borrosas
- 7 Caracterizar la letra con la proyección global

De las reglas anteriores, las tres primeras serán siempre iguales para cada una de las 26 letras a reconocer y, de la cuarta a la séptima varían como se indica a continuación en: longitud, pendiente y forma.

Para establecer en cada subárea la función de pertenencia μ_{ij} , se asigna 0 si no hay segmento, 1 si el segmento es único y si además es idéntico con los ideales. En caso contrario se asigna el valor de la correlación obtenida entre el segmento ideal y el real, al factor de segmento curvo $|r_c^2|$, o al factor de segmento recto $|r_1^2|$. El factor de forma queda determinado por el máximo de los dos valores anteriores

$$\mu_f = \max(|r_c^2|, |r_1^2|) \quad (1-2)$$

Este valor del μ_f se asigna a la μ_{ij} correspondiente.

La correlación entre segmentos rectos real e ideal se determina por el coeficiente de correlación, Hoel⁽⁸⁾,

$$r = \frac{n \sum xy - \sum x \sum y}{\sqrt{[n \sum x^2 - (\sum x)^2][n \sum y^2 - (\sum y)^2]}} \quad (1-3)$$

donde x_i, y_i son los puntos que se consideran para determinar al segmento y n es el número de ellos, tres para el reconocimiento manual y cinco para el reconocimiento automatizado.

La correlación $r = 0$ en casos como en la fig 1-1, $r = 1$ en la fig. 1-2 y $r = -1$ en la fig. 1-3.



Fig. 1-1 (a) (r=0)

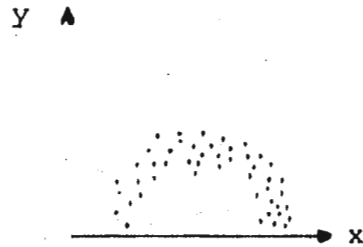


Fig. 1-1 (b)

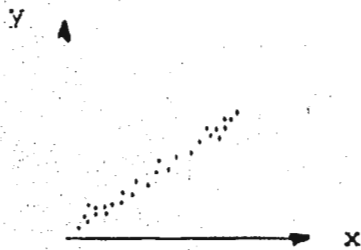


Fig. 1-2 r=1

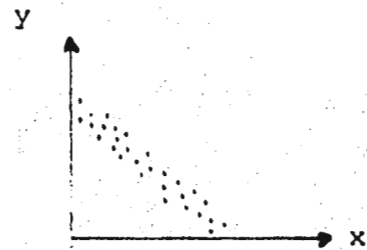


Fig. 1-3 r=-1

Efectuando un mapeo de $x \rightarrow x^2$ y de $y \rightarrow y^2$ se elimina el caso en que la correlación de un segmento curvo sea 0, fig 1-1(b), con lo que la fórmula para la correlación en el caso de un segmento curvo quedará:

$$r = \frac{n \sum x^2 y^2 - \sum x^2 \sum y^2}{\sqrt{[n \sum x^4 - (\sum x^2)^2] [n \sum y^4 - (\sum y^2)^2]}} \quad (1-4)$$

$|r_1^2|$ será el factor de segmento recto dado por (1-3) y $|r_c^2|$, el factor de segmento curvo dado por (1-4).

En la figura 1-4, se aprecia una letra A mayúscula que ocupa

un área dada, subdividida (como una matriz) en 16 subáreas iguales, en el orden indicado; en las subáreas (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (4,1) y (4,2) hay sólo un segmento; en estos casos μ_{ij} estará dada por $|r_c^2|$, por $|r_1^2|$ o por 1 según se explicó antes. En el caso de las subáreas (1,4), (3,3) y (4,3) en las que hay dos segmentos, se obtiene primero un factor de longitud dado por

$$\mu_1 = \frac{\text{longitud del segmento}}{2 (\text{área})^{1/2}} \quad (1-5)$$

Si $\mu_1 \geq 1$, se asigna el valor 1 y $\mu_{ij} = \mu_1$, si $\mu_1 < 1$,

$$\mu_{ij} = \max(\mu_f, \mu_1) \quad (1-6)$$

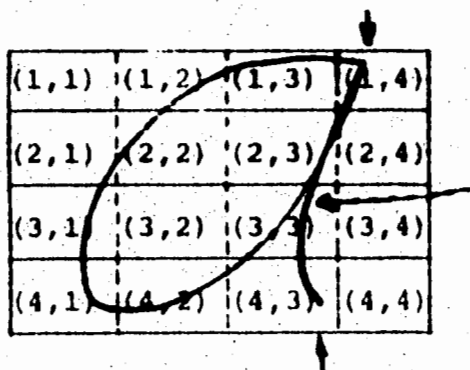


Figura 1-4 orden de subdivisión de subáreas

Una vez obtenidas las μ_{ij} se establecen las proyecciones h_j y

$\mu_j^{(2)}(R)$ y la proyección global $h(R)$ que va a caracterizar el patrón reconocido.

2. Reconocimiento manual.- Cuando el hombre efectúa el reconocimiento de las letras, basta considerar tres puntos para cada segmento (el inicial, el medio y el final) puesto que siempre es posible dados tres puntos hallar la circunferencia (o la recta) que pase por ellos. También es posible que el hombre "reconozca" si el segmento tiene una forma dada así como el número de segmentos por subárea.

Habiendo analizado la subárea y considerando los tres puntos, se obtiene el coeficiente de correlación con una calculadora, aplicando la fórmula (1-3) o la (1-4) según el caso y se continda en la misma forma quince veces más hasta obtener las 16 funciones de pertenencia, después de lo cual se pasa al reconocimiento de la segunda letra siguiendo los mismos pasos que en la primera y, así sucesivamente, hasta la letra 26 que corresponde a la Z.

En caso de que las 26 proyecciones globales sean diferentes se caracteriza cada letra con su $h(\mathcal{R})$ respectiva, se alimenta la computadora con esta caracterización para que ésta pueda ser identificada, fig. 3-1.

Si hay proyecciones globales repetidas, se elimina la ambigüedad del reconocimiento asignando a cada letra un conjunto de 8 proyecciones (4 primeras y 4 segundas).

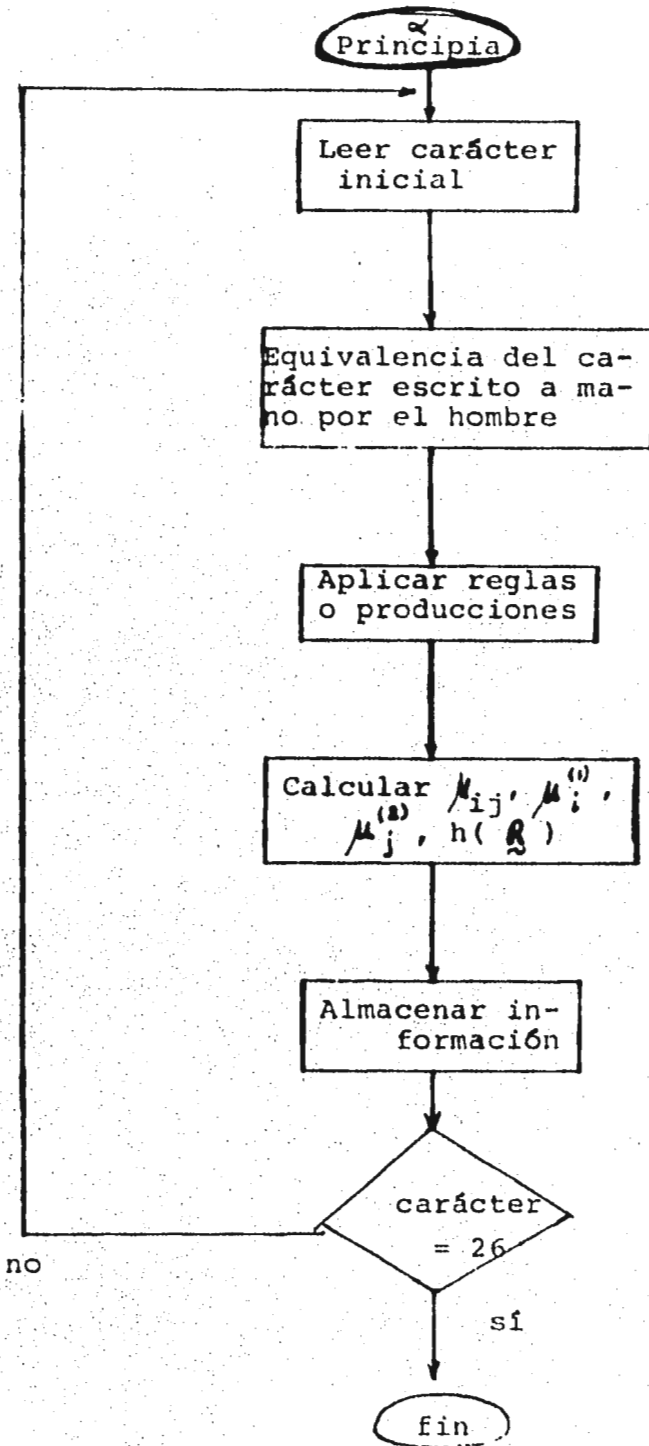


Figura 3-1 Primera parte del algoritmo interactivo hombre-máquina.

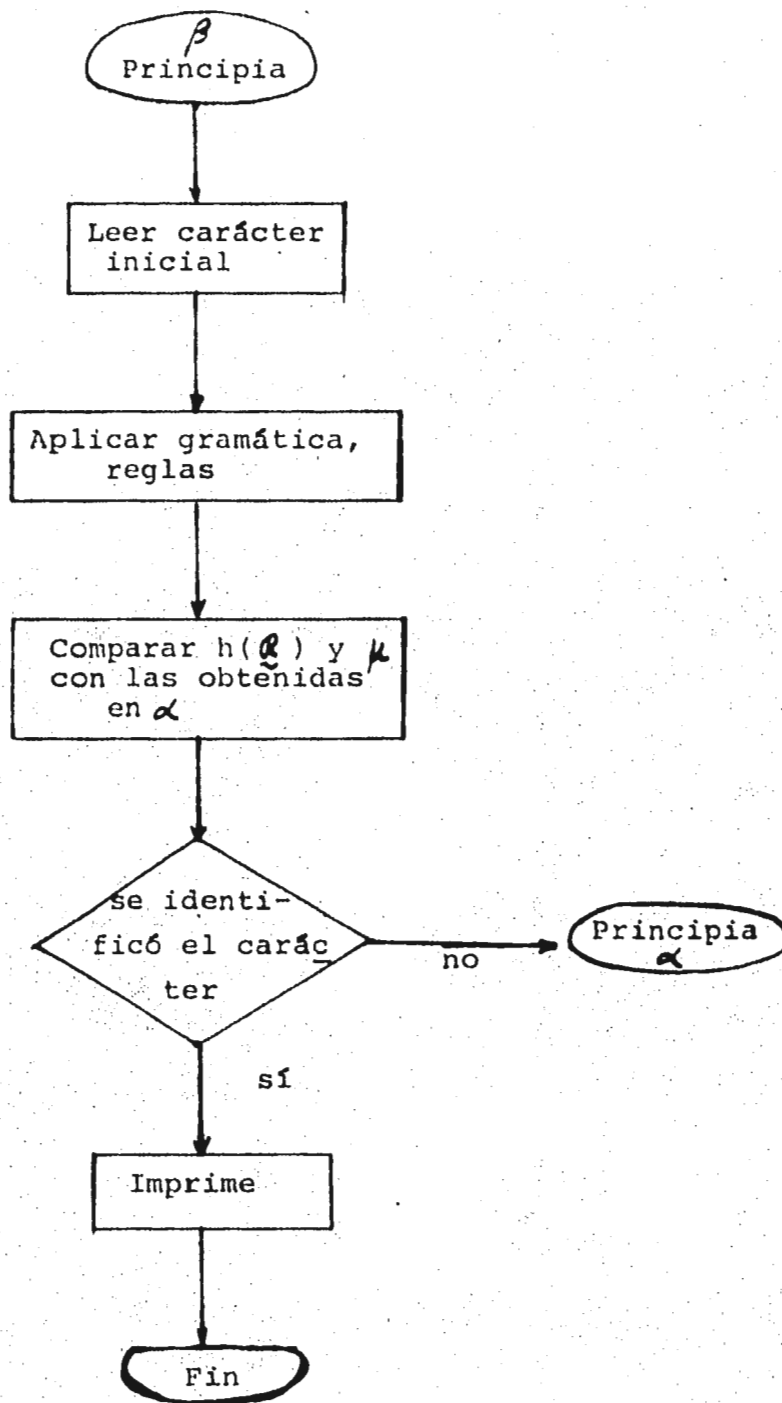


Figura 3-2 Segunda parte del algoritmo interactivo hombre-máquina

Si el caso no es ninguno de los dos anteriores, esto es, hay proyecciones globales repetidas y también primeras y/o segundas proyecciones repetidas, la caracterización de cada letra se efectúa con sus 16 funciones μ_{ij} de modo que no exista ambigüedad posible, ya que no existen dos letras con el mismo conjunto de μ_{ij} .

3. Reconocimiento automatizado.- Cuando el primer reconocimiento no lo efectúa el hombre, la computadora no "sabe" dados tres puntos, si éstos pertenecen a una recta o a una curva, ni la concavidad de ésta. En ese caso es necesario considerar cinco puntos para determinar la forma y la longitud de cada segmento.

La esquematización para este caso se aprecia en el algoritmo de dos partes⁽¹⁶⁾, figuras 3-1 y 3-2.

4. Rutinas constitutivas de la primera parte del algoritmo.- La primera parte del algoritmo consta de un programa principal y cuatro subrutinas (cuyos diagramas de flujo se indican en las figuras 4.1-2, 4.2-1, 4.3-1, 4.4-1 y 4.5-1): la 1 calcula si el segmento es curvo o recto, la 2 calcula la longitud del segmento recto si hay dos segmentos en la subárea considerada, la 3 calcula la longitud del segmento curvo en caso de que haya dos segmentos en la subárea y la 4 calcula las proyecciones de la relación borrosa formada por las 16 funciones de pertenencia de cada subárea.

4.1 Subrutina 1.- Se consideran 5 puntos para determinar un segmento curvo en el orden en que se indica:

- 1 y 5, puntos extremos, inicial y final
- 3, punto medio
- 2, punto intermedio entre el 1 y el 3
- 4, punto intermedio entre el 3 y el 5.

En la figura 4.1-1 y en la Tabla 4-1 se presentan las condiciones en las que se encuentra un segmento dado así como el segmento ideal al que corresponde.

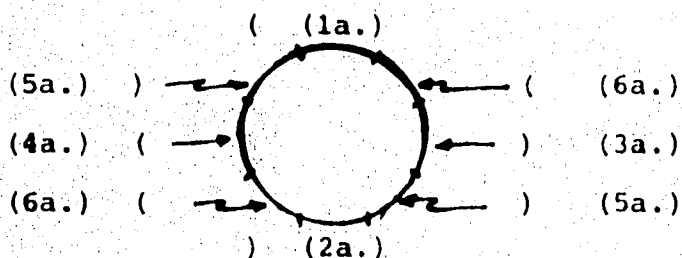


Figura 4.1-1 Circunferencia asociada a las posibles posiciones de un segmento real.

En la parte izquierda de la tabla 4-1 hay seis condiciones que corresponden cada una a un segmento real. Se ha considerado en la elección de V_N (segmentos variables no terminales) que una letra mayúscula cualquiera está formada por pequeños trazos, con diferente posición, inclinación, curvatura o longitud. Siempre será posible segmentar una letra de modo que cada componente se identifique con alguno de los elementos de V_N . Se

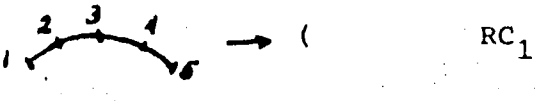
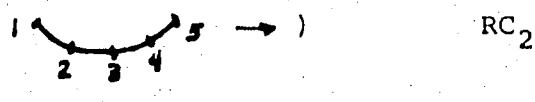

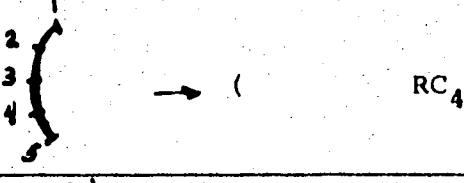

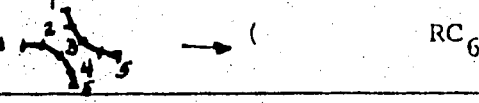
| CONDICIONES | V_N (REALES) \rightarrow V_T (convenio de primitivos) |
|--|--|
| 1a $\begin{cases} Y_1 \leftarrow Y_2 \leftarrow Y_3 \\ Y \\ Y_5 \leftarrow Y_4 \leftarrow Y_3 \end{cases}$ |  |
| 2a $\begin{cases} Y_1 \rightarrow Y_2 \rightarrow Y_3 \\ Y \\ Y_5 \rightarrow Y_4 \rightarrow Y_3 \end{cases}$ |  |
| 3a $\begin{cases} x_1 \leftarrow x_2 \leftarrow x_3 \\ Y \\ x_5 \leftarrow x_4 \leftarrow x_3 \end{cases}$ |  |
| 4a $\begin{cases} x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow x_3 \\ Y \\ x_5 \rightarrow x_4 \rightarrow x_3 \end{cases}$ |  |
| 5a. $x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow x_3 \rightarrow x_4 \rightarrow x_5$ |  |
| 6a. $x_1 \leftarrow x_2 \leftarrow x_3 \leftarrow x_4 \leftarrow x_5$ |  |

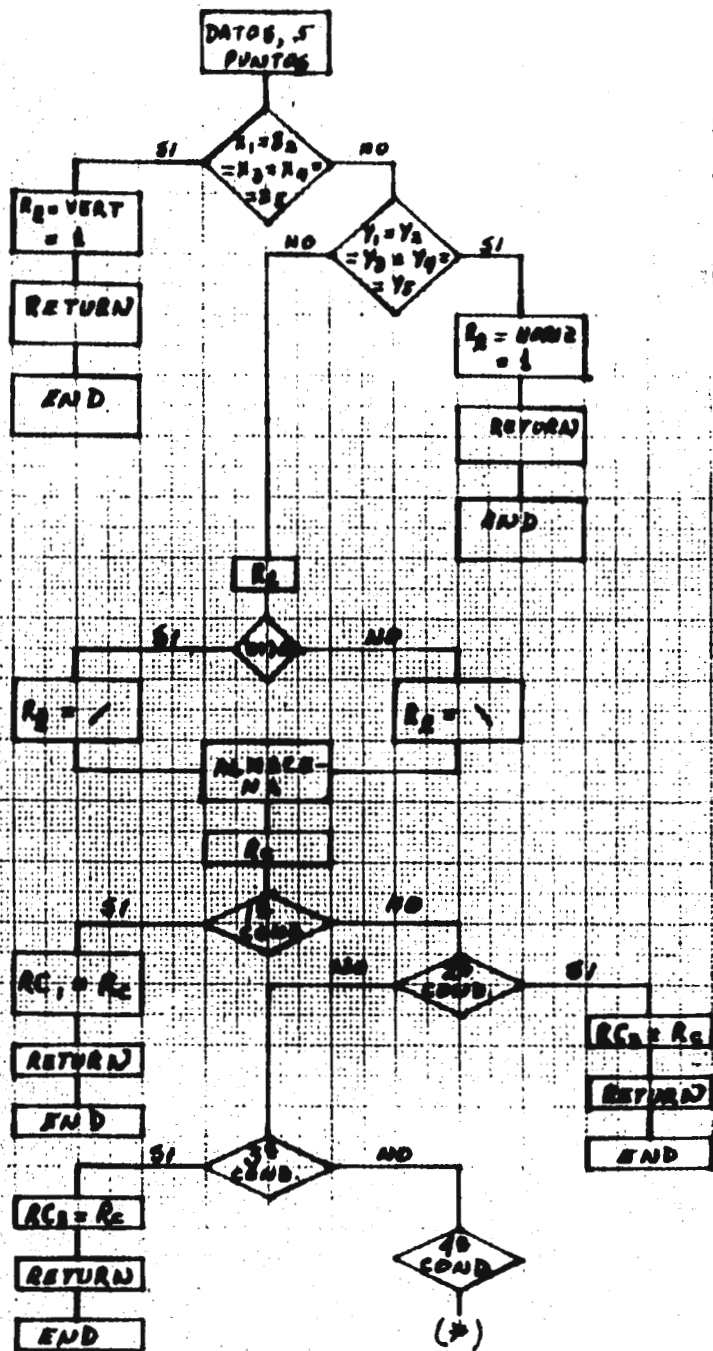
Tabla 4-1 Condiciones en que se puede presentar un segmento de letra y su correspondencia con el segmento ideal

hizo corresponder cada segmento real de la letra (Tabla 4-1) con una sección de la circunferencia de la figura 4.1-1 y se observó que no habrá en ninguna un segmento curvo que no pertenezca a alguno de los segmentos de la circunferencia, esto es, si en el segmento considerado en una subárea dada se cumple la condición 1 éste será el representado en la tabla inmediatamente después de su condición; si en una subárea se verifica la condición 2 para el segmento ahí presente, éste será precisamente el representado en la misma tabla a continuación de la condición que se ha cumplido; lo mismo sucede para los segmentos restantes.

Ahora bien, como los segmentos terminales o ideales que constituyen V_T van a ser constantes, por convenio, se hicieron corresponder los dos curvos:), (, de la manera que se indica en la tabla, quedando así reducido el número de elementos de V_T a seis, como se vió en el 4.1.

En la figura 4.1-2 se presenta un diagrama de flujo que calcula si el segmento es recto o curvo. Si el segmento es horizontal le asigna el valor 1 a la función de pertenencia μ lo identifica como horizontal al igual que si es vertical, para lo que basta comparar la igualdad de todas las ordenadas o abscisas respectivamente, en caso contrario calcula la pendiente m utilizando la fórmula (1-3) y asigna una indicación de la correlación lineal R_1 inclinada hacia la derecha si la pendiente es

positiva y hacia la izquierda en caso de que sea negativa. A continuación calcula la correlación para segmento curvo utilizando la fórmula (1-4) de manera que asigne una indicación al tipo de segmento que se trate según se cumpla la 1a. condición, la 2a., ..., la 6a., dando al tipo de segmento la etiqueta RC + (número de condición), RC representa correlación de segmento curvo. Esta información regresa a la siguiente instrucción del programa principal, para comparar las correlaciones de factor lineal o curvo y elegir la mayor como definitiva en caso de ser distinta de uno.



$$R_2 = |r_2^2|$$

$$R_c = |r_c^2|$$

DE LA FORMULA (1-3):

$$r_2 = \frac{\sum x^2 y - \sum x y^2}{\sqrt{(\sum x^2 - (\sum x)^2/n)(\sum y^2 - (\sum y)^2/n)}}$$

$$r_2 = \frac{\sum x^2 y - \sum x y^2}{\frac{(\sum x^2 - \sum x^2/n) \cdot (\sum y^2 - \sum y^2/n)}{\sum y^2 - (\sum y)^2/n}}$$

$$r = \left[\frac{\sum x^2 y - \sum x y^2}{\sum y^2 - (\sum y)^2/n} \right]^{-1}$$

Fig. 4.1-2 Diagrama de flujo de la subrutina 1 para el cálculo de segmento recto o curvo.

(continuación)

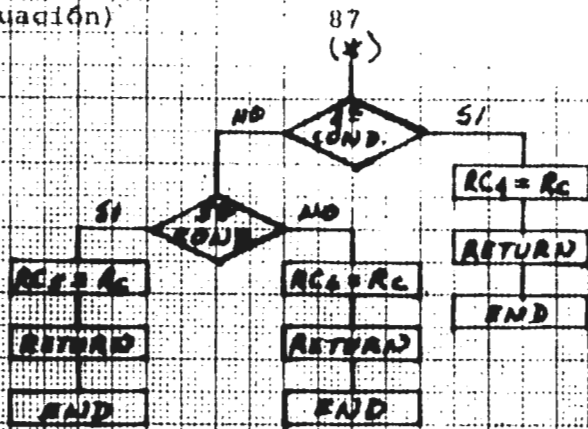


Fig. A.1-2 Diagrama de Flujo de la subrutina 1 para el cálculo de segmento recto o curvo.

4.2 Subrutina 2.- Cuando hay más de un segmento en la subárea considerada, el diagrama de flujo que se indica en la figura 4.2-1 corresponde a una subrutina que calcula la longitud de segmento en caso de que éste sea recto. Se utiliza la rutina (a) si se dispone de la función raíz cuadrada y la (b) en caso contrario.

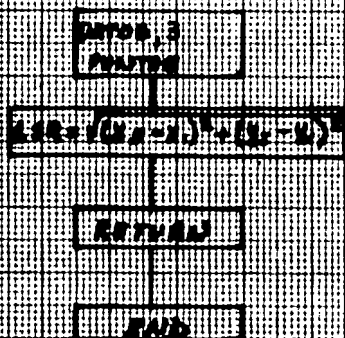
La rutina para la raíz cuadrada se elabora aplicando el método de Newton (Abramowitz^{(1(a))}) que establece lo siguiente:

Dado el cuadrado de un número $x^2 = N$ y una aproximación x_k a su raíz, una mejor aproximación está dada por

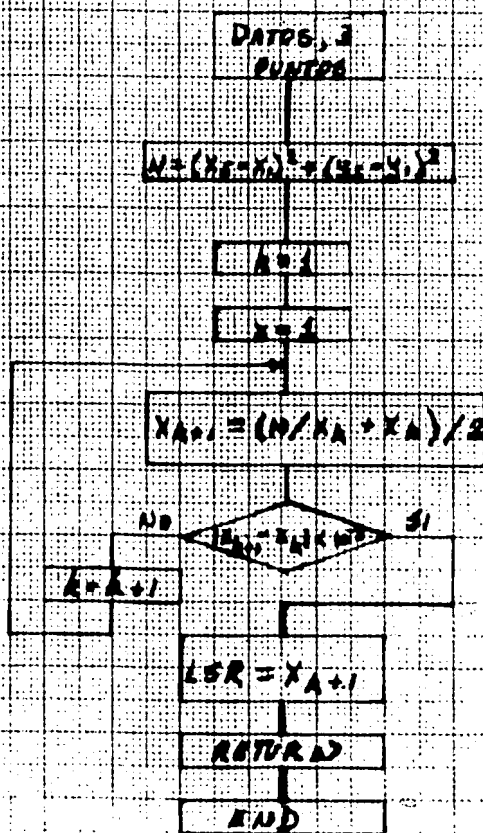
$$x_{k+1} = \frac{1}{2} \left(\frac{N}{x_k} + x_k \right) \quad (4.2-1)$$

Fig. 4.2-1 Diagrama de flujo de la subrutina 2 para el cálculo de la longitud del segmento recto.

(a)



(b)



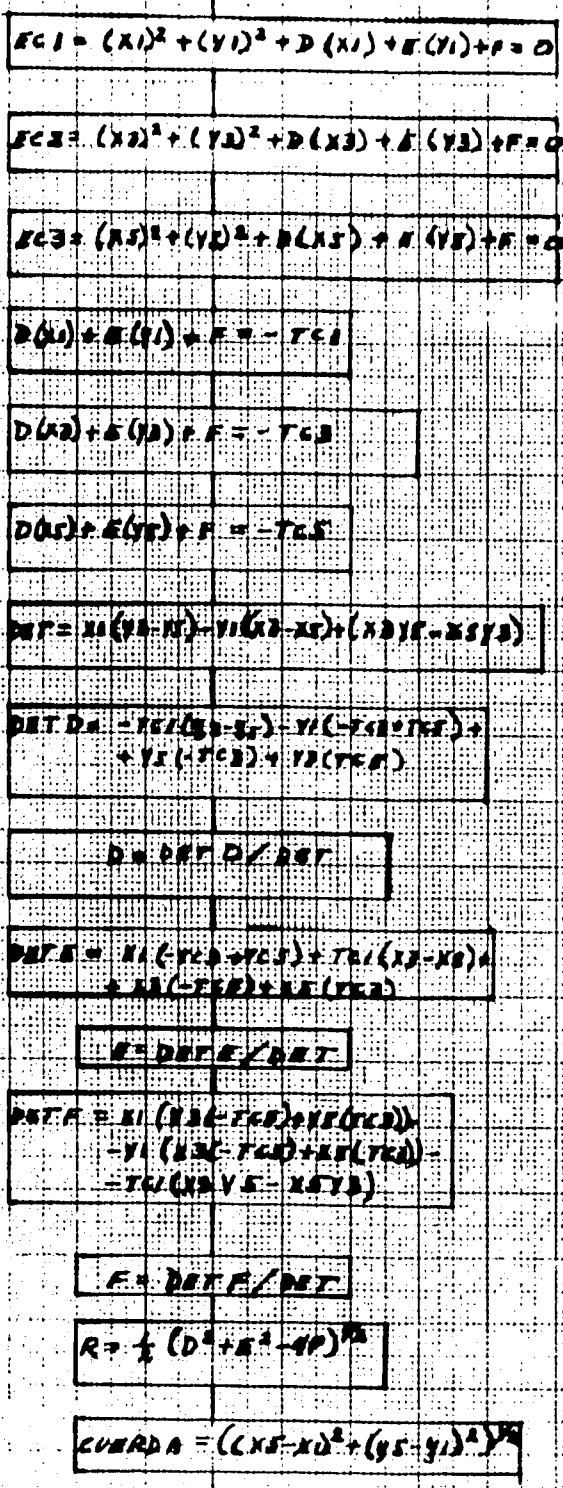
4.3 Subrutina 3.- Si en la subárea considerada se encuentran dos segmentos, esta rutina calcula la longitud del segmento curvo, su diagrama de flujo se indica en la figura 4.3-1.

Como en la rutina 1 se determinó previamente el tipo de segmento curvo de que se trata, ya no es necesario tomar cinco puntos para determinarlo, basta tomar los extremos y el medio y calcular la circunferencia que pasa por dichos tres puntos formando cuadrados y determinar su centro y su radio. La cuerda se determina (fig. 4.3-2) puesto que se conocen los dos puntos extremos y el seno del ángulo θ se obtiene directamente utilizando su definición trigonométrica; como éste será siempre menor que 1 se calcula la función inversa que, correcta a 3 decimales, se obtiene con la serie (Abramowitz ^{(1)(b)}):

$$\begin{aligned} \text{sen}^{-1} x = x + x^3 / (2) (3) + (1) (3) (x^5) / (2) (4) (5) + \\ + (1) (3) (5) (x^7) / (2) (4) (6) (7) + \dots \quad (4.3-1) \end{aligned}$$

Teniendo el ángulo, se sabe que el producto del radio por el doble del ángulo calculado da directamente la longitud buscada del segmento curvo.

DATOS.
3 PUNTOS



Forma general de la ec. de la circunferencia:
 $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$

con centro en X_0, Y_0 y radio R , donde
 $D = -2X_0, E = -2Y_0, F = X_0^2 + Y_0^2 - R^2$

$$(x - X_0)^2 + (y - Y_0)^2 = R^2$$

$$R = \frac{1}{2} \sqrt{D^2 + E^2 - 4F}$$

TC = TERMINOS CUADRADOS.
 $= (x^2 + y^2)$

DET = DETERMINANTE DEL SISTEMA

$$= \begin{vmatrix} X1 & Y1 & 1 \\ X2 & Y2 & 1 \\ X3 & Y3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$DET D = \begin{vmatrix} -TC1 & Y1 & 1 \\ -TC2 & Y2 & 1 \\ -TC3 & Y3 & 1 \end{vmatrix}$$

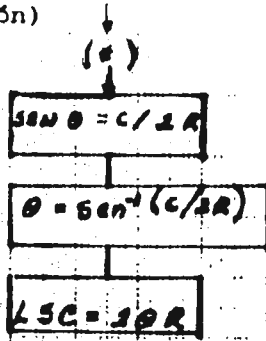
$$DET E = \begin{vmatrix} X1 & -TC1 & 1 \\ X2 & -TC2 & 1 \\ X3 & -TC3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$DET F = \begin{vmatrix} X1 & Y1 & -TC1 \\ X2 & Y2 & -TC2 \\ X3 & Y3 & -TC3 \end{vmatrix}$$

Fig. 4.3-1 Diagrama de flujo de la subrutina 3

(continuación)

92



C = CUERDA

$$\theta = \text{SEN}^{-1}(C/2R) = \frac{C}{2R} + \left(\frac{C}{2R}\right)^3 \frac{1}{2 \cdot 3} +$$
$$+ \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} \left(\frac{C}{2R}\right)^5 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} \left(\frac{C}{2R}\right)^7 + \dots$$

(Abramowitz (14))

LSC = longitud segmento curva

Fig. 4.3-1 Diagrama de flujo de la subrutina 3 para el cálculo de la longitud del segmento curva.

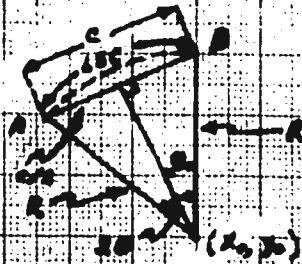


Fig. 4.3-2 Segmento curvo AB.- arco punteado: LSC

Segmento recto AB.- cuerda: C

R: radio de la circunferencia que pasa por los puntos dados A, B y el medio que no se indica.

θ: ángulo buscado.

4.4 Subrutina 4.- En la figura 4.4-1 se presenta el diagrama de flujo de la rutina que calcula las proyecciones primera, - segunda y global, una vez calculadas las 16 funciones de pertenencia de cada subárea para cada letra.

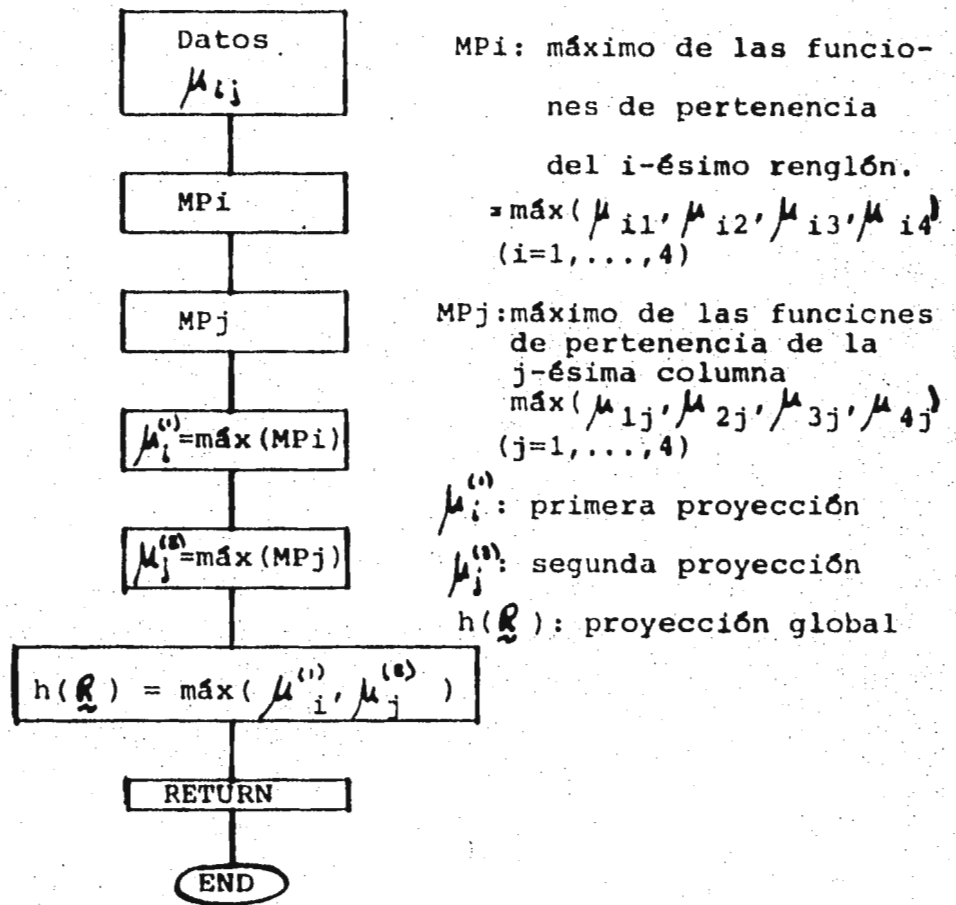


Fig. 4.4-1 Diagrama de flujo de la subrutina 4 para el cálculo de las proyecciones que se asignan a una letra.

4.5 Programa principal.- El programa que hace las llamadas a las cuatro subrutinas anteriores según convenga en cada caso para finalmente reconocer todas las letras del alfabeto se de nomina programa principal y se presenta su diagrama de flujo en la figura 4.5-1:

INICIA RECONOCIMIENTO

LETRA=1

DETERMINA AREA

SUBDIVIDE AREA, N=1,16

N=1

Y

B

¿MAYOR A B?

SI
N=N+1

NO
PENT.
MAYOR
LETRA

¿MAYOR A B?

SI
AREA

PARA SUBA 1

¿R₁ > R₂?

SI
AREA

NO
B=16

μ_N = μ_{5j}

PARA SUBA 1

¿R₁ > R₂?

SI
AREA

NO
B=16

PARA SUBA 2

¿R₁ > R₂?

SI
AREA

NO
B=16

PARA SUBA 3

¿R₁ > R₂?

SI
AREA

NO
B=16

LENGU MAX (AREA 1, AREA 2)

$L = \frac{LONG}{2 \cdot AREA} \cdot \frac{1}{2}$

Q

Fig. 4.5-1 Programa principal

C A P I T U L O 5

RESULTADOS OBTENIDOS

En este capítulo se indica el material empleado para el reconocimiento manual, la forma en que se aplicó el método y los resultados obtenidos.

1. Material.- Papel milimétrico, digitalizador, regla, compás y calculadora.

Se escribieron las 26 letras mayúsculas en papel milimétrico para facilitar la lectura de los puntos elegidos de cada segmento así como el centro de la circunferencia a la que pertenecen.

Se empleó el digitalizador "HIPADTM DIGITIZER de la Houston Instrument Dormeyer Industries, modelo PS-7004-P-F" y su visualizador digital de cotas de "Houston Instrument Austin, Tex., modelo DT-11-91" que, además de facilitar la lectura de las coordenadas se puede conectar a la EXORCISER 6800 de Motorola para alimentar los datos directamente.

La calculadora utilizada fue la HP 97, para hacer los cálculos

de los coeficientes de correlación que serán las funciones de pertenencia de cada subárea.

2. Reconocimiento manual.- Establecida el área de 4 x 4 cm. para cada letra, se subdivide en 16 subáreas iguales de 1 x 1 cm. y se analiza la primera (1,1) de izquierda a derecha y de arriba hacia abajo como se indicó en la fig. 1.4 del capítulo 4.

Si no hay segmento se asigna el cero a la función de pertenencia, $\mu_{ij} = 0$, (fig. 4.1 del capítulo 4). En caso de que haya un segmento se toman tres puntos, los dos extremos y el medio. Apoyando el compás en el primer punto con una abertura dada, se marca un arco. Con la misma abertura del compás se apoya en los dos puntos restantes marcando un arco en cada ocasión y si los tres arcos se cortan en un punto, éste será el centro de la circunferencia buscada. Si no se obtiene este punto al primer intento se varía la abertura aumentándola o reduciéndola hasta lograrlo. Si se obtiene una circunferencia que pase por dichos tres puntos, la correlación será 1 y, en la medida que ésto no pueda lograrse disminuirá en forma correspondiente el valor de la función característica

Aplicando la fórmula (1-3) o la (1-4) del cap. 4, según corresponda a un segmento recto o a uno curvo, se introducen los valores de los tres puntos empleando para el cálculo la HP 97 con el programa de ajuste de curvas.

Cuando existe duda respecto a la linealidad del segmento, se calcula para los mismos tres puntos la correlación de segmento curvo y la de segmento recto a continuación y se elige el valor que resulte mayor para asignar curvatura o linealidad al segmento según indique la fórmula utilizada.

Este valor obtenido de la correlación será el factor de forma μ_f o la función de pertenencia de la subárea analizada.

En caso de que en esta subárea haya dos segmentos se calcula en la misma forma la correlación de ambos para compararla con el factor de longitud del mayor dado por la fórmula μ_l (1-5) del capítulo 4 y, elegir para la función de pertenencia el mayor, (fórmula 1-6, cap. 4). Como en todos los casos el factor de forma era 1 ó muy próximo a 1, no hubo necesidad de calcular μ_l .

Una vez asignada la μ_{ij} a la primera subárea ($i=1, j=1$), se continúa con la siguiente ($i=2, j=1$) barriendo los renglones - hasta que $i=4$ y continuando el barrido con la siguiente columna ($i=1, j=2$) hasta completar las 16 subáreas con sus asignaciones correspondientes de μ_{ij} .

Lo antes explicado para asignar las 16 funciones de pertenencia a una letra se efectúa para todas las 26 .

Los resultados obtenidos para la letra A mayúscula son los siguientes:

2.1 Reconocimiento de la letra *a*.

| Letra | Subárea | puntos | | V_N | V_T | R_C | μ_{ij} | R_R | radio cm. |
|----------|---------|--------|-------|-------|-------|-------|------------|-----------|------------|
| | | x | y | | | | | | |
| <i>a</i> | (1,1) | 0 | 0 | | | | 0 | | |
| | (1,2) | -2.55 | 2.51 | | | | | | |
| | | -2.15 | 2.82 | | | | | | |
| | | -1.65 | 3.19 | (|) | .99 | .99 | | A/ 3.55 |
| | (1,3) | -1.65 | 3.19 | | | | | | |
| | | -1.1 | 3.35 | | | | | | |
| | | -0.6 | 3.49 | (|) | .99 | .99 | | A/ 3.55 |
| | (1,4) | -0.4 | 3.55 | | | | | | |
| | | 0.1 | 3.54 | | | | | | |
| | | 0.45 | 3.52 | / | / | .39 | .96 | .96 | D/ 1.9 |
| | | 3.35 | -1.19 | | | | | | |
| | | 3.45 | -0.68 | | | | | | |
| | | 3.35 | -0.4 |) | (| .28 | .28 | .17 | B/ 1.9 |
| | (2,1) | -3.25 | 1.5 | | | | | | |
| | | -2.98 | 2.5 | | | | | | |
| | | -2.65 | 2.4 | (|) | .99 | .99 | | A/ 3.55 |
| | (2,2) | -2.65 | 2.4 | | | | | | |
| | | -2.6 | 2.49 | | | | | | |
| | | -2.55 | 2.51 | / | / | .94 | .94 | .94 | A/ 3.55 |
| | (2,3) | 0 | 0 | | | | 0 | | |
| (2,4) | 3.6 | -0.5 | | | | | | | |
| | 3.45 | -1 | | | | | | | |
| | 3.3 | -1.5 |) |) | .99 | .99 | .99 | B/ 3.6 | |

Tabla 2.1-1 Valores obtenidos para la *h* de la letra *a*.

Continuación Tabla 2.1-1

| Letra | Subárea | x | puntos y | V_N | V_T | R_C | μ_{ij} | R_R | radio cm. | |
|-------|---------|-------|-------------|-------|-------|-------|------------|------------|--------------|------|
| a | (3,1) | -3.39 | 1.19 | | | | | | c/ 3.57 | |
| | | -3.35 | 0.7 | | | | | | | |
| | | -3.6 | 0.18 | / | (| .99 | .99 | | | |
| | (3,2) | 0 | 0 | | | | 0 | | | |
| | (3,3) | 0 | 0 | | | | 0 | | | |
| | (3,4) | 3.4 | -1.25 | | | | | | | 3.55 |
| | | 3.15 | -1.7 | | | | | | | |
| | | 2.85 | -2.15 |) |) | 1 | 1 | 1 | | |
| | | -3.6 | 0 | | | | | | | |
| | (4,1) | -3.55 | 0.5 | | | | | | F/ 3.55 | |
| | | -3.4 | 1 | (| (| 1 | 1 | .96 | | |
| | | -0.8 | 0.1 | | | | | | | |
| (4,2) | -0.7 | -0.4 | | | | | | I/ .85 | | |
| | 0 | -0.85 | (| (| 1 | 1 | .91 | | | |
| | -0.21 | -1.89 | | | | | | | | |
| (4,3) | 0.29 | -1.9 | | | | | | H/ 1.9 | | |
| | 0.81 | -1.78 | - |) | .99 | .99 | | | | |
| | 2.8 | -2.4 | | | | | | | | |
| (4,4) | 2.25 | -2.7 | | | | | | G/ 3.55 | | |
| | 1.85 | -3.1 | / |) | .96 | .96 | | | | |
| | -0.2 | -0.55 | | | | | | | | |
| (4,4) | -0.4 | 0.48 | | | | | | 0.6 | | |
| | -0.55 | 0.4 | (| (| 1 | 1 | .87 | | | |

Tabla 2.1-1 valores de R_C y R_R obtenidos para la μ_{ij} de la a.

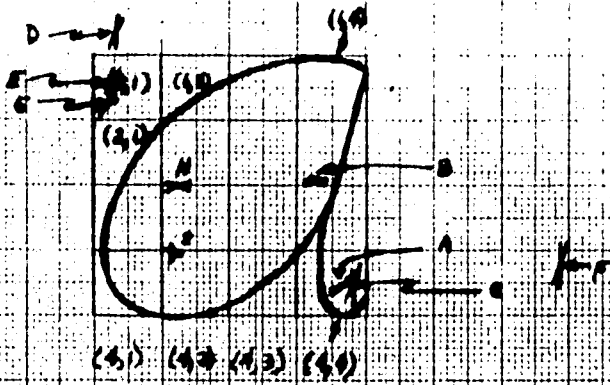
En la Tabla 2.1-2 se resumen los valores obtenidos de μ_{ij} para las 16 subáreas

| | | | | | |
|---------------|-----|-----|-----|-----|---------------|
| | a | | | | $\mu_i^{(1)}$ |
| | 0 | .99 | .99 | .96 | .99 |
| | .99 | .94 | 0 | .99 | .99 |
| | .99 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| | 1 | .99 | .96 | 1 | 1 |
| | | | | | |
| $\mu_j^{(2)}$ | 1 | .99 | .99 | 1 | 1 |
| | | | | | $h(a)$ |

Tabla 2.1-2. Valores de μ_{ij} , $\mu_i^{(1)}$, $\mu_j^{(2)}$ y h para la letra a .

En la columna de la derecha se encuentran las primeras proyecciones, $\mu_i^{(1)} = \max(\mu_{i1}, \mu_{i2}, \mu_{i3}, \mu_{i4})$ para $i=1, 2, 3, 4$. Para $i=1$ se tiene que $\mu_1^{(1)} = \max(0, .99, .99, .96) = .99$; así sucesivamente hasta $i = 4$. En el renglón inferior se encuentran las segundas proyecciones $\mu_j^{(2)} = \max(\mu_{1j}, \mu_{2j}, \mu_{3j}, \mu_{4j})$ para $j = 1, 2, 3, 4$; para $j=1$ se tiene que $\mu_1^{(2)} = \max(0, .99, .99, 1) = 1$; así sucesivamente hasta $j = 4$. En la parte inferior derecha se encuentra la proyección global $h = \max(\mu_i^{(1)}, \mu_j^{(2)})$, que para la a es 1.

En la figura 2.1-3 se encuentra la letra a de la que se tomaron los tres puntos de cada segmento de cada subárea para los cálculos de las μ_{ij} .



PUNTOS: A, B, C, D, E, F, G, H, I, CENTROS DE LAS CIRCUNFERENCIAS DE LAS QUE SE VAN LOS SEGMENTOS INDICADOS

| PUNTO | RADIO (CM) | SUBARCOS |
|-------|------------|--------------------------------|
| A | 3.55 | (1, 2), (1, 2), (2, 1), (2, 2) |
| B | 1.9 | (1, 4) |
| C | 3.57 | (3, 1) |
| D | 2.88 | (1, 4) |
| E | 2.6 | (2, 2) |
| F | 2.90 | (3, 4) |
| G | 2.55 | (1, 3) |
| H | 1.9 | (1, 2) |
| I | 2.55 | (1, 1) |

Figura 2-1-3 Letra C modelo para los cálculos de las μ_1 .

En la Tabla 2.2-2 se presentan los valores calculados de las correlaciones de segmento recto R_R y de segmento curvo R_C para la obtención de las funciones de pertenencia μ_{ij} para la letra B mayúscula.

En la Tabla 2.2-3 se resumen los valores de μ_{ij} , $\mu_i^{(1)}$, $\mu_j^{(2)}$ y $h(\underline{R})$ y la letra modelo de la que se obtienen estos datos se encuentra con el resto de las letras del alfabeto en la figura 2.3-1.

| Letra | Subárea | puntos | | V_N | V_T | R_C | μ_{ij} | R_R |
|-------|---------|--------|-------|-------|-------|-------|------------|-------|
| | | x | y | | | | | |
| B | (1,1) | 0 | 0 | | | | 0 | |
| | (1,2) | -1.7 | 1 | | | | | |
| | | -1.2 | 1.5 | | | | | |
| | | -0.7 | 1.8 | / |) | .99 | .99 | |
| | (1,3) | -0.75 | 1.8 | | | | | |
| | | -0.25 | 1.9 | | | | | |
| | | 0.25 | 1.85 | ~ | (| .99 | .99 | |
| | (1,4) | 0.13 | 0.75 | | | | | |
| | | 0.55 | 0.65 | | | | | |
| | | 0.8 | -0.3 |) | (| .98 | .98 | |
| | (2,1) | -2 | 0.45 | | | | | |
| | | -1.7 | 1.05 | | | | | |
| | | -1.4 | 1.45 | / |) | .99 | .99 | |
| | | -2.8 | 0.6 | | | | | |
| | | -2.8 | 0.1 | | | | | |
| | | -2.8 | -0.4 | | | | 1 | VERT. |
| | (2,2) | 0 | 0 | | | | 0 | |
| | (2,3) | 0.5 | -2.25 | | | | | |
| | | 0.9 | -2.15 | | | | | |
| | | 1.2 | -1.92 | / |) | .98 | .98 | |

Tabla 2.2-2 Valores de R_C y R_R obtenidos para la μ_{ij} de la B

Continuación. Tabla 2.2-2

| Letra | Subárea | puntos | | V_N | V_T | R_C | μ_{ij} | R_R |
|---------|---------|--------|-------|-------|-------|-------|------------|-------|
| | | x | y | | | | | |
| β | (2,4) | 1.8 | -0.81 | | | | | |
| | | 1.4 | -1.35 | | | | | |
| | | 1.1 | -1.55 |) |) | .99 | .99 | |
| | (3,1) | -2.7 | -0.1 | | | | | |
| | | -2.65 | 0.5 | | | | | |
| | | -2.55 | 0.9 | (| (| .99 | .99 | |
| | | -3.1 | 0.5 | | | | | |
| | | -3.1 | 0 | | | | | |
| | | -3.1 | -0.5 | | | | 1 | VERT |
| | | | | | | | | |
| | (3,2) | -1.15 | 2.75 | | | | | |
| | | -0.8 | 2.8 | | | | | |
| | | -0.55 | 2.85 | / |) | .98 | .98 | |
| | (3,3) | -0.55 | 2.85 | | | | | |
| | | -0.05 | 2.9 | | | | | |
| | | 0.45 | 2.85 | - | (| .94 | .94 | |
| | (3,4) | 0.45 | 0.75 | | | | | |
| | | 0.7 | 0.4 | | | | | |
| | | 0.68 | -0.25 |) |) | .96 | .96 | |
| | (4,1) | 2.65 | 0.1 | | | | | |
| | | 2.63 | -0.4 | | | | | |
| 2.55 | | -0.8 |) |) | .99 | .99 | | |

Tabla 2.2-2 Valores de R_C y R_R obtenidos para la μ_{ij} de la β

Continuación. Tabla 2.2-2

| Letra | Subárea | puntos | | V_N | V_T | R_C | μ_{ij} | R_R |
|-------|---------|--------|-------|-------|-------|-------|------------|-------|
| | | x | y | | | | | |
| B | (4,1) | -2.13 | 0.2 | | | | | |
| | | -2.15 | -0.3 | | | | | |
| | | -2.13 | -0.7 | (| (| .41 | | |
| | | -1.35 | 2.3 | | | | | |
| | | -1.1 | 2.45 | | | | | |
| | | -0.85 | 2.5 | (|) | .97 | | |
| | | -0.45 | -2.65 | | | | | |
| | | -0.15 | -2.7 | | | | | |
| | 0.5 | -2.7 | (|) | .32 | | .74 | |
| | (4,2) | -0.85 | 2.5 | (|) | | | |
| | | -0.6 | 2.6 | | | | | |
| | | -0.3 | 2.7 | | | | .99 | .99 |
| | | -2.3 | 2.64 | | | | | |
| -0.05 | | 2.65 | | | | | | |
| 0.77 | 2.6 | (|) | | | .56 | | |
| (4,3) | 0.6 | -2.85 | | | | | | |
| | 1.1 | -2.7 | | | | | | |
| | 1.6 | -2.5 | (|) | .99 | .99 | | |
| (4,4) | 2.35 | -1.3 | | | | | | |
| | 2.29 | -1.6 | | | | | | |
| | 2 | -1.8 |) |) | .91 | .91 | | |

Tabla 2.2-2 Valores de R_C y R_R obtenidos para la μ_{ij} de la B

B $\mu_i^{(1)}$

| | | | | | | |
|---------------|-----|-----|-----|-----|-----|---|
| 0 | .99 | .99 | .98 | | .99 | |
| .99 | 0 | .98 | .99 | | .99 | |
| .99 | .98 | .94 | .96 | | .99 | |
| 1 | 1 | .99 | .91 | | 1 | |
| | | | | | | |
| $\mu_i^{(2)}$ | 1 | 1 | .99 | .99 | | 1 |

$h(R)$

Tabla 2.2-3 Funciones de pertenencia y proyecciones para la letra B mayúscula.

2.3-1 Reconocimiento de las letras C, ..., Z. En la figura 2.3-1 se presentan todas las letras del alfabeto que sirvieron de modelo para la obtención de los datos con que se calcularon las funciones de pertenencia y proyecciones, siguiendo los mismos pasos que para las dos letras A y B que se detallaron antes.

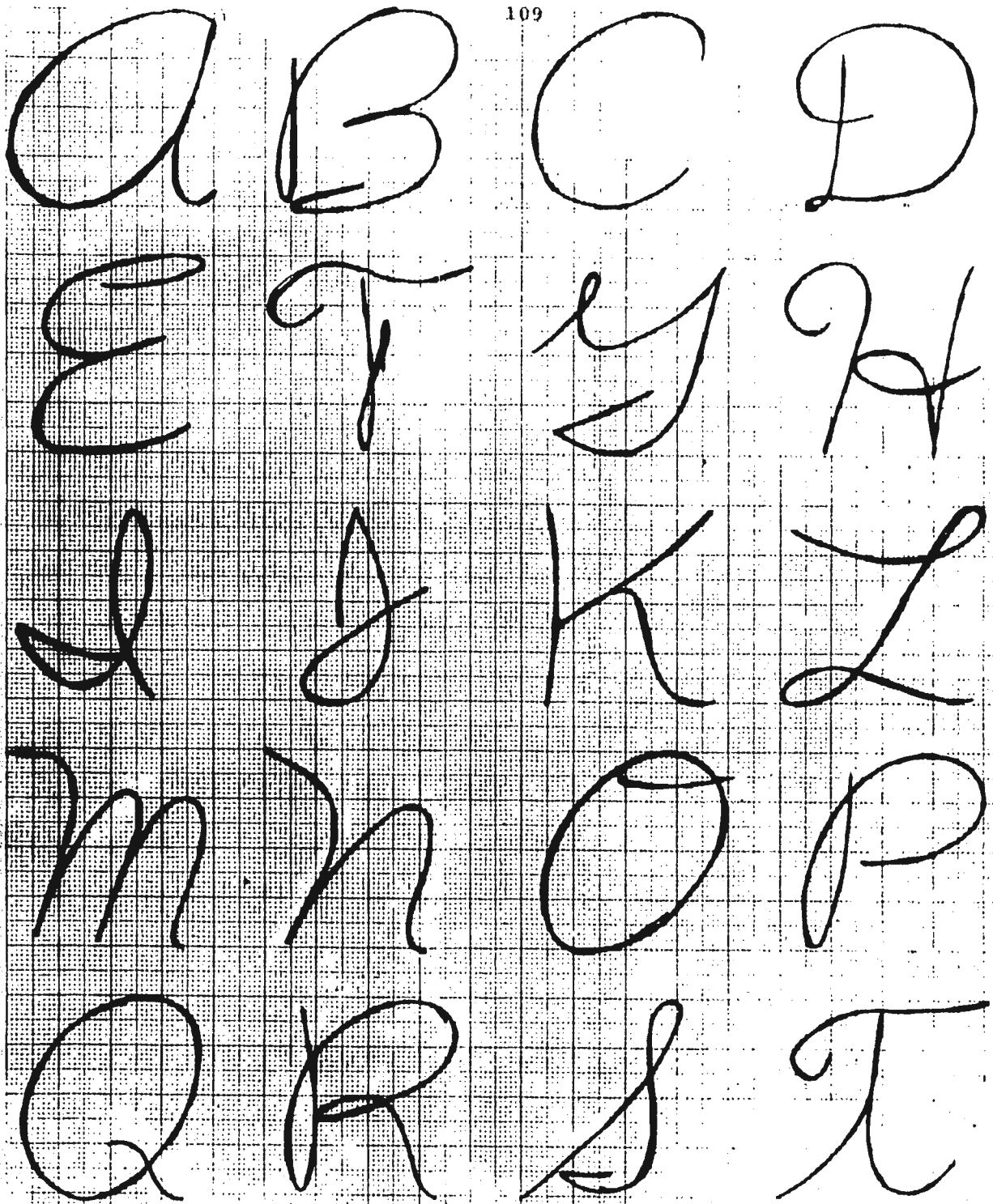


Figura 2.3-1. Letras que sirvieron de modelo para los cálculos de funciones de pertenencia y proyecciones.

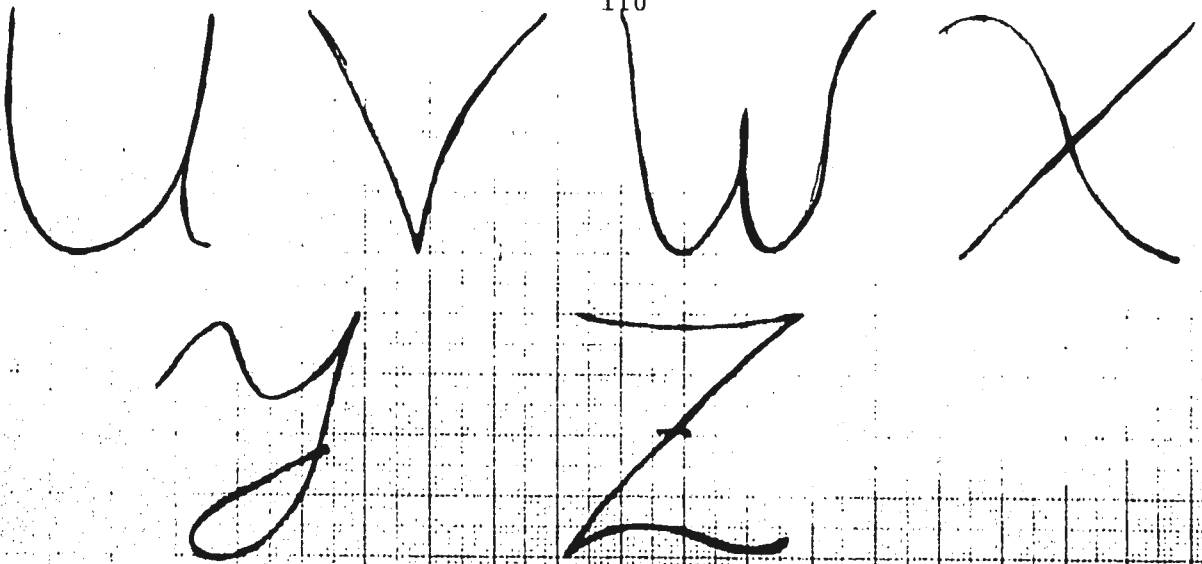


Figura 2.3-1 (continuación)

Letras que sirvieron de modelo para los cálculos de funciones de pertenencia y proyecciones.

En la Tabla 2.3-1 se presentan los valores de las funciones de pertenencia μ_{ij} , las primeras proyecciones $\mu_i^{(1)}$, las segundas proyecciones $\mu_j^{(2)}$ y las proyecciones globales $h(\mathcal{Q})$ - obtenidos para las letras C a Z reconocidas manualmente.

c

| | | | | | |
|-----|-----|-----|-----|--|-----|
| 1 | 1 | .64 | .94 | | 1 |
| .97 | 0 | 0 | 0 | | .97 |
| .77 | 0 | 0 | .99 | | .99 |
| .99 | .87 | .92 | .96 | | .99 |
| | | | | | |
| 1 | 1 | .92 | .99 | | 1 |

D

| | | | | | |
|-----|-----|-----|-----|--|-----|
| .99 | 1 | 1 | 1 | | 1 |
| 1 | 1 | 0 | .96 | | 1 |
| .94 | .96 | 0 | .99 | | .99 |
| 1 | .69 | .98 | .99 | | 1 |
| | | | | | |
| 1 | 1 | 1 | 1 | | 1 |

E

| | | | | | |
|-----|-----|-----|-----|--|---|
| .99 | 1 | .98 | .99 | | 1 |
| .97 | 1 | 1 | 0 | | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | | 1 |
| .99 | .98 | .99 | 1 | | 1 |
| | | | | | |
| 1 | 1 | 1 | 1 | | 1 |

F

| | | | | | |
|-----|-----|-----|---|--|-----|
| 1 | 1 | .92 | 1 | | 1 |
| .97 | .97 | .99 | 0 | | .99 |
| 0 | .98 | 1 | 0 | | 1 |
| 0 | .99 | 0 | 0 | | .99 |
| | | | | | |
| 1 | 1 | 1 | 1 | | 1 |

G

| | | | | | |
|-----|-----|-----|-----|--|---|
| 0 | .99 | 0 | 1 | | 1 |
| 1 | .99 | 1 | .99 | | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | | 1 |
| .99 | 1 | .95 | 0 | | 1 |
| | | | | | |
| 1 | 1 | 1 | 1 | | 1 |

H

| | | | | | |
|-----|-----|-----|-----|--|---|
| 1 | .98 | 0 | .99 | | 1 |
| .99 | 1 | 1 | 1 | | 1 |
| 0 | 1 | .99 | 1 | | 1 |
| 1 | .98 | .99 | 1 | | 1 |
| | | | | | |
| 1 | 1 | 1 | 1 | | 1 |

I

| | | | | | |
|---|---|-----|---|--|---|
| 0 | 0 | 1 | 0 | | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | | 1 |
| 1 | 1 | .99 | 0 | | 1 |
| | | | | | |
| 1 | 1 | 1 | 0 | | 1 |

Tabla 2.3-1. funciones de pertenencia y proyecciones.

| <i>J</i> | | | | | <i>K</i> | | | | | <i>L</i> | | | | |
|----------|----|---|---|---|----------|----|----|---|---|----------|----|----|----|---|
| 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 99 | 1 | 1 | 99 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 08 | 1 | 99 | 0 | 1 | 0 | 98 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 99 | 99 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 82 | 94 | 1 | 0 | 1 | 92 | 0 | 1 | 1 | 1 | 99 | 1 | 99 | 96 | 1 |
| | | | | | | | | | | | | | | |
| 82 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 99 | 1 | 1 | 1 | 1 |

| <i>M</i> | | | | | <i>N</i> | | | | | <i>O</i> | | | | |
|----------|---|---|----|---|----------|---|----|----|---|----------|----|---|----|----|
| 1 | 1 | 1 | 93 | 1 | 99 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 99 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 99 | 1 | 0 | 1 | 99 | 1 | 1 | 99 | 99 | 0 | 96 | 99 |
| 99 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 97 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 99 | 1 | 1 | 0 | 1 | 06 | 1 | 99 | 99 | 1 | 0 | 1 |
| | | | | | | | | | | | | | | |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 99 | 99 | 1 | 1 | 1 |

| <i>P</i> | | | | | <i>Q</i> | | | | | <i>R</i> | | | | |
|----------|---|----|----|---|----------|----|----|----|---|----------|----|----|----|---|
| 0 | 1 | 1 | 99 | 1 | 99 | 1 | 99 | 99 | 1 | 99 | 1 | 1 | 95 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 87 | 1 | 1 | 98 | 1 | 99 | 1 |
| 97 | 1 | 99 | 0 | 1 | 84 | 99 | 98 | 1 | 1 | 1 | 99 | 99 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 95 | 1 | 99 | 1 | 1 | 0 | 99 | 1 | 1 |
| | | | | | | | | | | | | | | |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

Tabla 2.3-1 (cont.) funciones de pertenencia y proyecciones.

S

| | | | | | |
|---|-----|-----|-----|--|---|
| 0 | 0 | 1 | .65 | | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | | 1 |
| 0 | 1 | .99 | 0 | | 1 |
| 1 | .81 | 1 | 0 | | |
| | | | | | |
| 1 | 1 | 1 | .65 | | 1 |

g

| | | | | | |
|-----|-----|-----|-----|--|-----|
| 1 | .99 | .91 | .96 | | 1 |
| .91 | .98 | 0 | 0 | | .98 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | | 1 |
| 1 | .99 | 1 | 1 | | 1 |
| | | | | | |
| 1 | 1 | 1 | 1 | | 1 |

u

| | | | | | |
|-----|-----|---|-----|--|---|
| 1 | 0 | 0 | 1 | | 1 |
| .87 | 0 | 0 | 1 | | 1 |
| .98 | 0 | 0 | 1 | | 1 |
| .96 | .96 | 1 | .97 | | 1 |
| | | | | | |
| 1 | .96 | 1 | 1 | | 1 |

v

| | | | | | |
|-----|---|---|-----|--|---|
| .99 | 0 | 0 | 1 | | 1 |
| .98 | 0 | 1 | .97 | | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | | 1 |
| | | | | | |
| .99 | 1 | 1 | 1 | | 1 |

w

| | | | | | |
|-----|-----|-----|-----|--|-----|
| .99 | 0 | 0 | 1 | | 1 |
| .99 | .79 | 0 | .98 | | .99 |
| 1 | 1 | .99 | .98 | | 1 |
| 1 | .98 | 1 | 0 | | 1 |
| | | | | | |
| 1 | 1 | 1 | 1 | | 1 |

x

| | | | | | |
|---|-----|---|---|--|---|
| 1 | .99 | 0 | 1 | | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | | 1 |
| 1 | .96 | 1 | 1 | | 1 |
| | | | | | |
| 1 | 1 | 1 | 1 | | 1 |

y

| | | | | | |
|---|-----|-----|-----|--|---|
| 0 | 1 | .97 | 1 | | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | | 1 |
| 0 | .99 | 1 | .98 | | 1 |
| | | | | | |
| 1 | 1 | 1 | 1 | | 1 |

z

| | | | | | |
|-----|-----|-----|---|--|---|
| .99 | .97 | 1 | 1 | | 1 |
| 0 | .98 | 1 | 0 | | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | | 1 |
| 1 | 1 | .98 | 1 | | 1 |
| | | | | | |
| 1 | 1 | 1 | 1 | | 1 |

Tabla 2.3-1 (Cont.) funciones de pertenencia y proyecciones.

Los resultados anteriores con sus primeras proyecciones en la columna de la derecha, sus segundas proyecciones en el renglón inferior y sus proyecciones globales en la casilla inferior derecha de las Tablas 2.1-2, 2.2-3 y 2.3-1 nos permiten ver que asignando la proyección global no se pueden caracterizar las letras como tampoco se puede hacer una caracterización asignando las primeras y segundas proyecciones puesto que se repiten en varias letras.

Asociando las 16 μ_{ij} no se presenta ambigüedad puesto que ningún juego se repite por lo que se determina una única letra con la $\mathcal{R} = \{\mu_{ij}\}$.

Con referencia al método automatizado, que no forma parte de este trabajo, se tiene el proyecto de aplicarlo en la elaboración de un sistema electrónico en que se grabe y pueda efectuarse el reconocimiento tanto de las letras como de otro tipo de patrones, particularmente señales mioeléctricas, un análisis de las cuales ^{(22), (24)} ya ha sido efectuado en este proyecto de investigación de prótesis del CIUNAM.

CAPITULO 6

CONCLUSIONES

En este trabajo se presentó una serie de conceptos generales de inteligencia artificial, conjuntos borrosos y métodos de reconocimiento de patrones utilizando conjuntos borrosos.

Empleando una gramática regular y proyecciones borrosas se estableció un algoritmo de reconocimiento de patrones que aquí en particular se aplicó al reconocimiento de las letras mayúsculas manuscritas del alfabeto.

De las discusiones presentadas en el desarrollo de esta tesis se pone de manifiesto que para efectuar el reconocimiento de patrones por este método una de las cuestiones fundamentales es la elección de los primitivos.

Dado un conjunto de letras particular, se pueden obtener sus funciones de pertenencia y caracterizar cada letra con sus 16 *bits*, variando por supuesto estas funciones ca

racterísticas para cada individuo.

Lo interesante de este método es que variando las producciones de la gramática regular y los primitivos, es posible utilizarlo en el reconocimiento de patrones que no sean letras, sino señales mioeléctricas, que al diseñar un sistema que contenga el algoritmo de reconocimiento del patrón deseado, se introduzca en la prótesis inteligente de miembro superior y ésta pueda efectuar los movimientos mediante el reconocimiento de la señal.

REFERENCIAS

1. Abramowitz M., Stegun I. A., "Handbook of Mathematical Functions". Dover Publications, Inc., New York, (1972).
 - a) pp. 19 (raíces)
 - b) pp. 81 ($\text{sen}^{-1} x$)
2. Bellman R., Kalaba R., Zadeh L. A., "Pattern Classification and Abstraction", Journal of Mathematical Analysis and Applications, 13, 1-7, (1966).
3. Fu K. S., Keidel W. D., Levet W. J. M., "Digital Pattern Recognition", Communication and Cybernetics 10, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, pp. 1, 95-99, 101, (1980)
4. Fu K. S., "Sequential Methods in Pattern Recognition and Machine Learning", Mathematics in Science and Engineering, Vol 52, Richard Bellman Editor, Academic Press, Inc. (1968).
5. Fu K. S., "Syntactic Methods in Pattern Recognition", Mathematics and Engineering, Vol. 112,
6. Fu K. S., "Syntactic Pattern Recognition, Application ", Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, pp. 256, (1977). (Communication and Cybernetics 14) 1-16,
7. González R. C., Thomason M. G., "Syntactic Pattern Recognition an Introduction", Addison-Wesley, (1978).
8. Hoel P. G., "Introduction to Mathematical Statistics", Fourth Edition, Wiley International Ed., pp. 164-166, (1971).
9. Hopcroft J. E., Ullman J. D., "Formal Languages and their

Relation to Automata", Addison-Wesley Publishing Co., (1969).

10. Ishikawa A., Mieno H., "The Fuzzy Entropy Concept and its Application", Fuzzy Sets and Systems, 2, 113-123, North Holland Publishing Co., (1979).
11. Kaufmann A., "An Introduction to the Theory of Fuzzy Subsets", Vol 1, Academic Press, New York, (1975).
12. Kaufmann A., "Introduction a la Theorie Des Sous-Ensembles Flous a L'usage Des Ingenieurs. 1. Eléments Théoriques de Base", Masson et. C^{IE}, (1973).
13. Kickert W. J., Koppelaar Henk, "Application of Fuzzy Set Theory to Syntactic Pattern Recognition of Handwritten Capitals", IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, 148-151, (1976).
14. Logsdon T., "The Era of Intelligent Machines?", Computers and People for Sept-Oct., 14-16, (1980).
15. Minsky M. L., "18 Computer Science and the Representation of Knowledge", Cambridge, Mass.: MIT Press, pp. 393-421, (1977).
16. Noyola I. A., Pérez S. J. L., Piña C., Blumovicz P. S., "An Application of Fuzzy Sets Theory to Recognition of Handwritten Capital Letters", C. I., I. F., UNAM, por publicarse, (1981).
17. Piña C., Noyola I. A., Pérez S. J. L., "Reconocimiento de Patrones Mediante Conjuntos Borrosos", 1er. Simposio sobre Instrumentación, I. F., UNAM, (1980).

18. Tou J. T., González R. C., "Pattern Recognition Principles", Addison-Wesley Publishing Co., pp. 316-323, (1979).
19. Zadeh L. A., "Fuzzy Sets", Information and Control, 8, 338-353, (1965).
20.
 - a) Zadeh L. A., Fu K. S., Tanaka K., Shimura M., "Fuzzy Sets and their Applications to Cognitive and Decision Processes", Academic Press, Inc., (1975).
 - b) De Palma G. F., Yau S. S., pp. 343-345, Artículo: "Fractionally Fuzzy Grammars With Application to Pattern Recognition".
 - c) Goguen J. A., pp. 433, Artículo: "On Fuzzy Robot Planning".
 - d) Kitagawa T., Artículo: "Fuzziness in Informative Logics"
 - e) Uhr L., Artículo: "Toward Integrated Cognitive Systems, Which Must Make Fuzzy Decisions About Fuzzy Problems".
21. Zadeh L. A., "Toward a Theory of Fuzzy Systems" Report No. ERL-69-2, Electronics Research Laboratory, College of Engineering, University of California, Berkeley, (1969).
22. Reyes J. I. "Un Estudio de las Señales Mioeléctricas y su Aplicación en prótesis", Tesis Profesional, UNAM, (1982).
23. Cameron J. R., Skofronick J. G., "Medical Physics", John Wiley & Sons (1978).
24. Noyola I. A., Reyes I., Blumovicz S., "Myoelectric Signals Obtention, Mathematical Treatment and Applications", Centro de Instrumentos UNAM, presentado en el World Congress on Medical Physics and Biomedical Engineering 1982, Hamburgo.