29 No 4

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO.

VNIVERSIDAD NACIONAL AVTONOMA

FACULTAD DE CIENCIAS.

APROXIMACION A LA RADIACION GRAVITATORIA EN LA COLISION DE DOS HOYOS NEGROS.

TESIS QUE PARA EL TITULO
DE FISICO PRESENTA:
FRANCISCO JAVIER BENITEZ DIAZ.

MEXICO, D.F. JUNIO 1982.

Deseo agradecer de manera muy especial al Dr. Michel P. Ryan el haberme permitido colaborar con él al realizar éste interesante trabajo. Sus valiosos consejos y gran conocimiento acerca del tema, fuerón indispensables para llevar a cabo este trabajo. Espero seguir su ejemplo en mi futura carrera profesional.

También agradesco al Dr. Marcos Rosenbaum, Director del Centro de Estudios Nucleares, el haberme permitido realizar mi tésis en el Centro de Estudios Nucleares, en el cual laboré como si fuera mi casa, debido a las facilidades que tuve, agradesco a todos los que laboran en este Centro por brindarme su apoyo para realizar mi tésis.

Al Dr. Julio Herrera le agradesco profundamente el haberme ayudado en el calculo numérico desarrollado en este trabajo, su calidad humana será otro ejemplo a seguir para mi.

Y finalmente agradesco a quien a lo largo de mi larga carrera en la licenciatura tuvieron confianza en mi, a quienes les estaré siempre muy agradecido.

I N D I C E

NOTACIONES Y CONVENCIONES.

- ($\alpha, \beta, \ldots$) Los indices griegos van como 0,1,2,3.
- ($i, j, \ldots$) Los indices latinos van como 1,2,3.
- Indices repetidos sifnifican suma, a menos que se indice lo contrario.
- (|) La barra significa dereivada covariante respecto a la métrica base.
- (•) El punto significa derivada parcial respecto al tiempo.
- (,) La coma significa derivada parcial respecto a las coordenadas espaciales.
- Signatura del Espacio-Tiempo (+2).

1. INTRODUCCION.

Los calculos en Relatividad General son dificiles, debido en gran parte a la no-linealidad de la teoría, esto es, si sumamos dos soluciones esta no es solución, en contraste con otros campos como el electromagnétismo. Por ejemplo, el campo eléctrico debido a dos cargas separadas por una distancia dada es la suma de los campos debidos a cada carga independientemente. El campo gravitacional de dos masas no es la suma de los campos independientes de las dos masas.

La situación es aun mas critica cuando se incluyen los efectos del movimiento de las masas, en especial la radiación gravitacional.

En este trabajo proponemos un modo de calcular de una manera aproximada campos que en una teoria lineal sean la suma de dos campos. La idea es que si sumamos los campos en una situación en la cual la interacción entre estos dos campos es pequeña, el resultado no va a diferir mucho de la solución real. En este caso se puede sumar una pequeña corrección a la suma de los dos campos.

El campo gravitacional se describe por medio de la métrica $\tilde{g}_{\mu\nu}$, en donde el elemento de linea se escribe como

$$ds^2 = \tilde{g}_{\mu\nu}\, dx^\mu dx^\nu$$

y la métrica obedece las ecuaciones de Einstein en vacio

$$G_{\mu\nu}(\tilde{g}_{\alpha\beta}) = 0$$

La métrica $\tilde{g}_{\mu\nu}$ la vamos a expresar como la suma $g_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ donde la métrica $g_{\mu\nu}$ va a corresponder a la suma de dos soluciones en vacio y por lo tanto esta suma no satisface la solución de Einstein en vacio, pero suponiendo que se encuentra cerca de una solución en vacio, $h_{\mu\nu}$ debe ser pequeño.

Sí tomamos solo términos de $G_{\mu\nu}(g_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta})$ a primer orden en $h_{\mu\nu}$, la ecuación

$$G_{\mu\nu}(g_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}) = 0$$

nos dara una ecuación para las cantidades $h_{\mu\nu}$ que sera más fácil de resolver que la Ecuación de Einstein .. general para la métrica correspondiente a la situación física.

Para probar esta idea calculamos una aproximación a la radiación gravitacional emitida en la colisión de dos hoyos negros. La métrica base $g_{\mu\nu}$ describira la situación de acercamiento de las masas puntuales con la separación entre ellas dependiendo del tiempo la cual ajustamos para producir la colisión.

Suponiendo que esta métrica no esta muy lejos de una solución intentaremos calcular $h_{\mu\nu}$. Este problema resulta muy dificil para encontrar una solución analítica. Pero linealizando la métrica base se logra enconrar una expresión analitica para $h_{\mu\nu}$. Esta solución representa las ondas gravitacionales emitidas en la colisión de los dos hoyos negros.

Es obvio que para distancias pequeñas entre las masas la métrica base se encuentre lejos de una solución, pero los resultados de todas maneras no estan lejos de la solución exacta numérica de Smarr. Esto implica que el método es prometedor y merece mas estudio.

La tésis se divide en las siguientes secciones:

2. ECUACIONES DE EINSTEIN.

Las ecuaciones de Einstein se expresan mediante la igualdad tensorial

$$G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu} \qquad (2.1)$$

donde $G_{\mu\nu}$ es el tensor de Einstein y $T_{\mu\nu}$ es el tensor de Energía-Momento.

Escribir explicitamente el tensor de Einstein en términos del tensor $g_{\mu\nu}$ es complicado, por lo tanto se definen otras cantidades auxiliares para expresar el tensor de Einstein en forma compacta. Así el tensor de Einstein se define como

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2} g_{\mu\nu} R \qquad (2.2)$$

siendo $R_{\mu\nu}$ el tensor de Ricci y R el escalar de Ricci. Este último se define como

$$R = g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} \qquad (2.3)$$

donde $g^{\alpha\beta}$ es el tensor métrico contravariante, éste a su vez se relaciona con el tensor métrico covariante mediante la relación

$$g^{\mu\alpha} g_{\alpha\nu} = \delta^{\mu}{}_{\nu} \qquad (2.4)$$

donde $\delta^{\mu}{}_{\nu}$ es el tensor mixto conocido como simbolo de Kronecker ó delta de Kronecker. El tensor de Ricci se define como

$$R_{\mu\nu} = \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu,\alpha} - \Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha,\nu} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta} - \Gamma^{\beta}_{\mu\alpha}\Gamma^{\alpha}_{\nu\beta} \qquad (2.5)$$

siendo $\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$ los llamados simbolos de Cristoffel, que se expresan como

$$\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \left(g_{\nu\beta,\alpha} + g_{\alpha\nu,\beta} - g_{\beta\alpha,\nu} \right) \qquad (1.6)$$

Con estas definiciones podemos visualizar como las componentes del tensor métrico $g_{\mu\nu}$ y sus derivadas aparecen en el tensor de Einstein.

Asi vemos que el tensor de Einstein es una cantidad tensorial en derivadas parciales, hasta segundo orden, en los tensores métricos. Pues los simbolos de Cristoffel tienen una primera derivada y el tensor de Ricci tiene una segunda derivada de los simbolos de Cristoffel, es decir, el tensor de Ricci tiene una segunda derivada de los tensores métricos. Como el tensor de Einstein se construye algebraicamente a partir del tensor de Ricci, este tiene tábién derivadas hasta segundo orden. Podemos ver que estas ecuaciones son no lineales. Esto lo podemos comprobar observando que las componentes del tensor métrico y sus derivadas estan multiplicadas entre sí.

La solución general, a las ecuaciones de Einstein aun no ha sido encontrada, solamente se han encontrado unas pocas soluciones particulares, como por ejemplos; la de Schwarzschild en 1916, que corresponde a una masa puntual estática y la de Kerr en 1963, que describe el campo gravitacional de una masa puntual con espin.

3. ECUACIONES PERTURBADAS DE EINSTEIN A PRIMER ORDEN.

Debido a la dificultad de encontrar soluciones particulares trataremos de acercarnos lo mas posible a ellas.

Primeramente escogeremos una métrica $g_{\mu\nu}$ que no se encuentre muy lejos de una solución particular - real, si estamos lejos ó cerca de una solución real, lo podremos lograr solamente escogiendo con sabiduria nuestra métrica $g_{\mu\nu}$.

Después, vamos a suponer que la métrica $g_{\mu\nu}+h_{\mu\nu}$ es más cercana a la solución real, que esto sea necesariamente cierto, queda por probar.

Entonces escogiendo nuestra métrica $\tilde{g}_{\mu\nu}$ como

$$\tilde{g}_{\mu\nu}=g_{\mu\nu}+h_{\mu\nu} \qquad (3.1)$$

vamos a perturbar la ecuación de Einstein en vacio, es decir el tensor de Energía Momento es cero.

Así, la ecuación de Einstein es

$$\tilde{G}_{\mu\nu}(\tilde{g}_{\alpha\beta})=\tilde{G}_{\mu\nu}(g_{\alpha\beta}+h_{\alpha\beta})=0 \qquad (3.2)$$

cuyo desarrollo es

$$G_{\mu\nu}(g_{\alpha\beta})+\delta G_{\mu\nu}=0 \qquad (3.3)$$

Entonces nuestro problema se reduce a encontrar la perturbación $\delta G_{\mu\nu}$ del tensor de Eistein. Esta resultara una ecuación en derivadas parciales para la perturbación $h_{\mu\nu}$.

Diremos que la perturbación al tensor métrico

$$\delta g_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} \qquad (3.4)$$

Perturbando la ecuación (2.4) obtenemos a primer orden $\delta g^{\mu\alpha} g_{\alpha\nu} + g^{\mu\alpha} \delta g_{\alpha\nu} = 0$
y despejando $\delta g^{\mu\alpha}$, tenemos

$$\delta g^{\mu\nu} = -g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} h_{\alpha\beta} \qquad (3.5)$$

Esta expresión representa la perturbación al tensor métrico contravariante, en términos del tensor métrico base $g_{\mu\nu}$ y la perturbación al tensor métrico covariante $h_{\mu\nu}$.

Estamos suponiendo que podemos despreciar productos cuadraticos,cubicos ,etc. de las cantidades y sus derivadas. Es decir solo coservamos términos de primer orden.

Para obtener la perturbación de los simbolos de Cristoffel debemos recordar que estos no son tensores, pero su variación si es un tensor, este hecho nos permite escoger un sistema de coordenadas de tal forma que estos sean faciles de calcular. Asi de la ecuación (2.6) tenemos

$$\delta \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} (g_{\beta\nu,\mu} + g_{\mu\beta,\nu} - g_{\nu\mu,\beta})$$

donde hemos seleccionado un sistema de coodenadas de tal forma que los tensores métricos sean constantes y sus primeras derivadas sean cero. Para expresarlo en general, la derivada parcial se debe cambiar por derivada covariante. Asi en general tenemos

$$\delta \Gamma^{\alpha}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} g^{\alpha\nu}\left(g_{\nu\beta|\alpha} + g_{\alpha\nu|\beta} - g_{\beta\alpha|\nu}\right) \qquad (3.4)$$

donde la barra significa derivada covariante respecto a la métrica base $g_{\mu\nu}$.

Obtenemos para la perturbación del tensor de Ricci

$$\delta R_{\mu\nu} = \delta\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu,\alpha} - \delta\Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha,\nu}$$

en donde hemos usado la expresión (2.5).
Esto se calculó en un sistema de coordenadas, tal — que los simbolos de Cristoffel son cero. La expresión general en cualquier sistema de coordenadas esta dado por

$$\delta R_{\mu\nu} = \delta\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu|\alpha} - \delta\Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha|\nu} \qquad (3.5)$$

Sabemos que la derivada covariante del tensor— métrico es cero y por tanto se puede escribir

$$\delta\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(h^{\alpha}{}_{\nu|\mu} + h_{\mu}{}^{\alpha}{}_{|\nu} - h_{\nu\mu}{}^{|\alpha}\right) \qquad (3.6)$$

introduciendo esta expresión en (3.5) obtenemos para la perturbación del tensor de Ricci

$$\delta R_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(h^{\alpha}{}_{\nu|\mu|\alpha} + h_{\mu}{}^{\alpha}{}_{|\alpha|\nu} + h_{\nu\mu}{}^{|\alpha}{}_{|\alpha}\right.$$
$$\left. - h^{\alpha}{}_{\alpha|\mu|\nu} - \cancel{h_{\mu}{}^{\alpha}{}_{|\alpha|\nu}} + \cancel{h_{\alpha\mu}{}^{|\alpha}{}_{|\nu}}\right)$$

quedando finalmente

$$\delta R_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(h^{\alpha}{}_{\nu|\mu|\alpha} + h_{\mu}{}^{\alpha}{}_{|\nu|\alpha} - h_{\nu\mu}{}^{|\alpha}{}_{|\alpha} - h_{|\mu|\nu}\right) \qquad (3.7)$$

donde se ha definido h como

$$h = h^{\alpha}{}_{\alpha} = g^{\alpha\beta} h_{\alpha\beta} \qquad (3.8)$$

El escalar de Ricci se perturba de (2.3) como

$$\delta R = g^{\alpha\beta}\,\delta R_{\alpha\beta} + R_{\alpha\beta}\,\delta g^{\alpha\beta}$$

utilizando (3.5) obtenemos

$$\delta R = g^{\alpha\beta}\,\delta R_{\alpha\beta} - R^{\alpha\beta} h_{\alpha\beta} \qquad (3.9)$$

Perturbando ahora el tensor de Einstein, (2.2), se tiene

$$\delta G_{\mu\nu} = \delta R_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2} R h_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2} g_{\mu\nu}\delta R \qquad (3.10)$$

Utilizando (3.7) y (3.9) la perturbación al tensor de Einstein se escribe como

$$\delta G_{\mu\nu} = \tfrac{1}{2}\Big(h^{\alpha}{}_{\nu|\mu|\alpha} + h_{\mu}{}^{\alpha}{}_{|\nu|\alpha} - h_{\nu\mu}{}^{|\alpha}{}_{|\alpha} - h_{|\mu|\nu} - R h_{\mu\nu}$$
$$- g_{\mu\nu}\big[- R^{\alpha\beta} h_{\alpha\beta} + \tfrac{1}{2} g^{\alpha\beta}(h^{\lambda}{}_{\beta|\alpha|\lambda} + h_{\alpha}{}^{\lambda}{}_{|\beta|\lambda} - h_{\beta\alpha}{}^{|\lambda}{}_{|\lambda}$$
$$- h_{|\alpha|\beta})\big] \Big)$$

simplificando obtenemos

$$\delta G_{\mu\nu} = \tfrac{1}{2}\Big(h^{\alpha}{}_{\nu|\mu|\alpha} + h_{\mu}{}^{\alpha}{}_{|\nu|\alpha} - h_{\nu\mu}{}^{|\alpha}{}_{|\alpha} - h_{|\mu|\nu}$$
$$- R h_{\mu\nu} + g_{\mu\nu} R^{\alpha\beta} h_{\alpha\beta} - \tfrac{1}{2} g_{\mu\nu}\big[h^{\lambda\alpha}{}_{|\alpha|\lambda} + h_{\alpha}{}^{\lambda|\alpha}{}_{|\lambda}$$
$$- h^{|\lambda}{}_{|\lambda} - h^{|\alpha}{}_{|\alpha}\big] \Big)$$

y finalmente

$$\delta G_{\mu\nu} = \tfrac{1}{2}\Big(h_{\alpha\nu|\mu}{}^{|\alpha} + h_{\mu\alpha|\nu}{}^{|\alpha} - h_{\nu\mu}{}^{|\alpha}{}_{|\alpha} - h_{|\mu|\nu} \qquad (3.11)$$
$$- R h_{\mu\nu} + g_{\mu\nu}\big[R^{\alpha\beta} h_{\alpha\beta} - h_{\alpha\beta}{}^{|\alpha|\beta} + h^{|\alpha}{}_{|\alpha}\big] \Big)$$

Para simplificar la expresión de la perturbación del tensor de Einstein, se define la cantidad $\bar{h}_{\mu\nu}$ como

$$\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2} h g_{\mu\nu} \qquad (3.12)$$

de donde definimos $\bar{h}$ como

$$\bar{h} = g^{\mu\nu}\bar{h}_{\mu\nu} \qquad (3.13)$$

Así $\bar{h} = -h$ y $h_{\mu\nu} = \bar{h}_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2} g_{\mu\nu}\bar{h}$ (3.14)

Introduciendo esta expresión en (3.11) obtenemos

$$\delta G_{\mu\nu} = \tfrac{1}{2}\Big(\bar{h}_{\nu\alpha|\mu}{}^{|\alpha} - \tfrac{1}{2} g_{\nu\alpha}\bar{h}_{|\mu}{}^{|\alpha} + \bar{h}_{\mu\alpha|\nu}{}^{|\alpha} - \tfrac{1}{2} g_{\mu\alpha}\bar{h}_{|\nu}{}^{|\alpha}$$
$$- \bar{h}_{\mu\nu}{}^{|\alpha}{}_{|\alpha} + \tfrac{1}{2} g_{\mu\nu}\bar{h}^{|\alpha}{}_{|\alpha} + \bar{h}_{|\mu|\nu} - R\bar{h}_{\mu\nu} + \tfrac{1}{2} R g_{\mu\nu}\bar{h}$$
$$+ g_{\mu\nu}\big[R^{\alpha\beta}\bar{h}_{\alpha\beta} - \tfrac{1}{2} R^{\alpha\beta} g_{\alpha\beta}\bar{h} - \bar{h}_{\alpha\beta}{}^{|\alpha|\beta} + \tfrac{1}{2} g_{\alpha\beta}\bar{h}^{|\alpha|\beta} - \bar{h}^{|\alpha}{}_{|\alpha}\big] \Big)$$

reescribiendola llegamos a

$$\delta G_{\mu\nu} = \tfrac{1}{2}\Big(\bar{h}_{\nu\alpha|\mu}{}^{|\alpha} - \tfrac{1}{2}\cancel{\bar{h}_{|\mu|\nu}} + \bar{h}_{\mu\alpha|\nu}{}^{|\alpha} - \tfrac{1}{2}\cancel{\bar{h}_{|\nu|\mu}} - \bar{h}_{\mu\nu}{}^{|\alpha}{}_{|\alpha}$$
$$+ \tfrac{1}{2}\cancel{g_{\mu\nu}\bar{h}^{|\alpha}{}_{|\alpha}} + \cancel{\bar{h}_{|\mu|\nu}} - R\,\bar{h}_{\mu\nu} + \tfrac{1}{2}R\,\cancel{g_{\mu\nu}\bar{h}}$$
$$+ g_{\mu\nu}\big[R^{\alpha\beta}\bar{h}_{\alpha\beta} - \tfrac{1}{2}\cancel{R\bar{h}} - \bar{h}_{\alpha\beta}{}^{|\alpha|\beta} + \cancel{\tfrac{1}{2}\bar{h}^{|\alpha}{}_{|\alpha}} - \cancel{\bar{h}^{|\alpha}{}_{|\alpha}}\big]\Big)$$

y finalmente obtenemos

$$\delta G_{\mu\nu} = \tfrac{1}{2}\Big(\bar{h}_{\nu\alpha|\mu}{}^{|\alpha} + \bar{h}_{\mu\alpha|\nu}{}^{|\alpha} - \bar{h}_{\mu\nu}{}^{|\alpha}{}_{|\alpha} - R\,\bar{h}_{\mu\nu} + g_{\mu\nu}\big(R^{\alpha\beta}\bar{h}_{\alpha\beta} - \bar{h}_{\alpha\beta}{}^{|\alpha|\beta}\big)\Big) \qquad (3.15)$$

Sabemos que la derivada covariante no es conmutativa, pero satisface

$$\bar{h}_{\mu\nu|\beta}{}^{|\alpha} = \bar{h}_{\mu\nu}{}^{|\alpha}{}_{|\beta} + R^{\lambda}{}_{\nu\beta}{}^{\alpha}\,\bar{h}_{\mu\lambda} + R^{\lambda}{}_{\mu\beta}{}^{\alpha}\,\bar{h}_{\nu\lambda} \qquad (3.16)$$

y sustituyendo (3.16) en (3.15) obtenemos

$$\delta G_{\mu\nu} = \tfrac{1}{2}\Big(\bar{h}_{\nu\alpha}{}^{|\alpha}{}_{|\mu} + R^{\lambda}{}_{\alpha\mu}{}^{\alpha}\,\bar{h}_{\nu\lambda} + R^{\lambda}{}_{\nu\mu}{}^{\alpha}\,\bar{h}_{\alpha\lambda}$$
$$+ \bar{h}_{\mu\alpha}{}^{|\alpha}{}_{|\nu} + R^{\lambda}{}_{\alpha\nu}{}^{\alpha}\,\bar{h}_{\mu\lambda} + R^{\lambda}{}_{\mu\nu}{}^{\alpha}\,\bar{h}_{\alpha\lambda} - \bar{h}_{\mu\nu}{}^{|\alpha}{}_{|\alpha}$$
$$- R\,\bar{h}_{\mu\nu} + g_{\mu\nu}\big[R^{\alpha\beta}\bar{h}_{\alpha\beta} - \bar{h}_{\alpha\beta}{}^{|\beta|\alpha} - R^{\lambda}{}_{\beta}{}^{\alpha\beta}\,\bar{h}_{\alpha\lambda}$$
$$- R^{\lambda}{}_{\alpha}{}^{\alpha\beta}\,\bar{h}_{\beta\lambda}\big]\Big)$$

que se puede reescribir como

$$\delta G_{\mu\nu} = \tfrac{1}{2}\Big(f_{\mu|\nu} + f_{\nu|\mu} + 2R^{\lambda}{}_{\mu\nu}{}^{\alpha}\,\bar{h}_{\alpha\lambda}$$
$$+ R^{\lambda}{}_{\mu}\,\bar{h}_{\nu\lambda} + R^{\lambda}{}_{\nu}\,\bar{h}_{\mu\lambda} - \bar{h}_{\mu\nu}{}^{|\alpha}{}_{|\alpha} \qquad (3.17)$$
$$- R\,\bar{h}_{\mu\nu} + g_{\mu\nu}\big(R^{\alpha\beta}\bar{h}_{\alpha\beta} - f_{\alpha}{}^{|\alpha}\big)\Big)$$

en donde se ha definido f_{μ} como

$$f_{\mu} = \bar{h}_{\mu\alpha}{}^{|\alpha} \qquad (3.18)$$

Puede observarse que el tensor perturbado de Einstein $\delta G_{\mu\nu}$ igualado a cero es una ecuación lineal en derivadas parciales para la perturbación $h_{\mu\nu}$.

4. TRANSFORMACION INFINITESIMAL EN LAS ECUACIONES DE EINSTEIN Y ELECCION DE NORMA.

La ecuación que tenemos que resolver es

$$\tilde{G}_{\mu\nu} = G_{\mu\nu} + \delta G_{\mu\nu} = 0$$

Observando de (3.17) que $\delta G_{\mu\nu}$ es muy complicada, vamos a simplificar la expresión $\delta G_{\mu\nu}$ mediante un cambio de coordenadas imponiendo la condición $f_\mu = 0$. Demostraremos a continuación como se puede lograr esto

Realizaremos una transformación infinitesimal de coordenadas, a saber $x'^\mu = x^\mu + \xi^\mu(x^\alpha)$

Como $\tilde{G}_{\mu\nu}$ lo consideramos como un tensor y es cero, $\tilde{G}'_{\mu\nu}$ también es cero, pidiendo que $\tilde{G}'_{\mu\nu}$ tenga la forma

$$\tilde{G}'_{\mu\nu} = G'_{\mu\nu} + \delta G'_{\mu\nu} \qquad (4.1)$$

y debemos de buscar la forma en que cambia la cantidad f_μ ante esta transformación.

Así hemos dicho que nuestro tensor métrico es

$$\tilde{g}_{\mu\nu}(x) = g_{\mu\nu}(x) + h_{\mu\nu}(x)$$

y queremos que ante el cambio de coordenadas, este se transforme en

$$\tilde{g}'_{\mu\nu}(x') = g'_{\mu\nu}(x') + h'_{\mu\nu}(x') \qquad (4.2)$$

como es una transformación infinitesimal, tenemos

$$\tilde{g}'_{\mu\nu}(x') = \tilde{g}_{\mu\nu}(x') - \xi_{\mu|\nu} - \xi_{\nu|\mu}$$

es decir

$$g'_{\mu\nu}(x') + h'_{\mu\nu}(x') = g_{\mu\nu}(x') + h_{\mu\nu}(x') - \xi_{\mu|\nu} - \xi_{\nu|\mu}$$

Observando que $f_\mu = \bar{h}_{\mu\alpha}{}^{|\alpha}$ solo depende de $\bar{h}_{\mu\nu}$ y no de $g_{\alpha\beta}$ es conveniente no modificar la forma funcional de $g_{\alpha\beta}$ y modificar solamente $\bar{h}_{\alpha\beta}$. Entonces pidiendo

$$g'_{\mu\nu}(x') = g_{\mu\nu}(x') \qquad (4.3)$$

tenemos que

$$h'_{\mu\nu}(x') = h_{\mu\nu}(x) - \xi_{\mu|\nu} - \xi_{\nu|\mu} \qquad (4.4)$$

que es la ley de transformación de las cantidades $h_{\mu\nu}$ en una transformación infinitesimal, con la métrica base invariante de forma.

Definiendo h' como

$$h' = g^{\alpha\beta} h'_{\alpha\beta} \qquad (4.5)$$

vemos que

$$h' = g^{\alpha\beta}(h_{\alpha\beta} - \xi_{\alpha|\beta} - \xi_{\beta|\alpha}) = h - 2\,\xi^{\alpha}{}_{|\alpha}$$

es decir

$$h' = h - 2\,\xi^{\alpha}{}_{|\alpha} \qquad (4.6)$$

La expresión $\bar{h}'_{\mu\nu} = h'_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} h'$ se transforma como

$$\bar{h}'_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \xi_{\mu|\nu} - \xi_{\nu|\mu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu}(h - 2\,\xi^{\alpha}{}_{|\alpha})$$

ó

$$\bar{h}'_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \xi_{\mu|\nu} - \xi_{\nu|\mu} + g_{\mu\nu}\,\xi^{\alpha}{}_{|\alpha} \qquad (4.7)$$

y la cantidad

$$f'_{\mu} = \bar{h}'_{\mu\alpha}{}^{|\alpha} \qquad (4.8)$$

es

$$f'_{\mu} = \bar{h}_{\mu\alpha}{}^{|\alpha} - \xi_{\mu|\alpha}{}^{|\alpha} - \xi_{\alpha|\mu}{}^{|\alpha} + g_{\mu\alpha}\,\xi^{\lambda}{}_{|\lambda}{}^{|\alpha}$$

simplificando tenemos que

$$f'_{\mu} = f_{\mu} - \xi_{\mu}{}^{|\alpha}{}_{|\alpha} - \xi_{\alpha|\mu}{}^{|\alpha} + \xi^{\lambda}{}_{|\lambda|\mu} \qquad (4.9)$$

La derivada de un campo vectorial satisface

$$\xi^{\beta}{}_{|\alpha|\mu} = \xi^{\beta}{}_{|\mu|\alpha} + R^{\lambda\beta}{}_{\alpha\mu}\,\xi_{\lambda} \qquad (4.10)$$

entonces

$$\xi'_\mu = \xi_\mu - \xi_\mu{}^{|\alpha}{}_{|\alpha} + R^{\tau\alpha}{}_{\alpha\mu}\,\xi_\tau$$

y finalmente la ley de transformación de ξ_μ es

$$\xi'_\mu = \xi_\mu - \xi_\mu{}^{|\alpha}{}_{|\alpha} - R^\alpha{}_\mu\,\xi_\alpha \qquad (4.11)$$

Asi vemos que si en un sistema de coordenadas ξ_μ no es cero, podemos buscar una transformación infinitesimal con ξ^μ, tal que haga $\xi'_\mu = 0$ y ξ^μ debe de cumplir la ecuación

$$0 = \xi_\mu - \xi_\mu{}^{|\alpha}{}_{|\alpha} - R^\alpha{}_\mu\,\xi_\alpha \qquad (4.12)$$

Por lo tanto imponiendo la condición $\xi_\mu = 0$, nuestra ecuación del campo gravitacional es

$$G_{\mu\nu} + \tfrac{1}{2}\big[R^\alpha{}_\mu\,\bar{h}_{\alpha\nu} + R^\alpha{}_\nu\,\bar{h}_{\alpha\mu} - \bar{h}_{\mu\nu}{}^{|\alpha}{}_{|\alpha} + 2R^\alpha{}_{\mu\nu}{}^\beta\,\bar{h}_{\alpha\beta} - R\,\bar{h}_{\mu\nu} + g_{\mu\nu}R^{\alpha\beta}\,\bar{h}_{\alpha\beta}\big] = 0 \qquad (4.13)$$

Esta es nuestra ecuación maestra, sin embargo todavia es complicada.

Una simplificación ocurre cuando la metrica base satisface la condición $G_{\mu\nu}=0$ y la ecuación se simplifica a

$$-\bar{h}_{\mu\nu}{}^{|\alpha}{}_{|\alpha} + 2R^\alpha{}_{\mu\nu}{}^\beta\,\bar{h}_{\alpha\beta} = 0 \qquad (4.14)$$

5.- FORMALISMO DE NEWMAN - PENSOSE.

Es común escribir el intervalo al cuadrado como

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x)\, dx^\mu dx^\nu \qquad (5.1)$$

donde $g_{\mu\nu}$ son los componentes del tensor métrico. En la literatura de análisis tensorial moderno, $g_{\mu\nu}$ esta dado en una base de coordenadas. Podemos escoger una base no-coordenada si hacemos la siguiente transformación.

$$dx^\mu = L^\mu{}_\alpha\, \omega^\alpha \qquad (5.2)$$

donde $L^\mu{}_\alpha$ es una matriz invertible y ω^α es una forma diferencial. Asi

$$ds^2 = g_{\mu\nu} L^\mu{}_\alpha L^\nu{}_\beta\, \omega^\alpha \omega^\beta = \eta_{\alpha\beta}\, \omega^\alpha \omega^\beta \qquad (5.3)$$

donde decimos que $\eta_{\alpha\beta}$ esta expresada en una base no - coordenada. Esto no es una transformación de coordenadas, sino una transformación de base.

Es muy frecuente utilizar la base no - coordenada ortonormal, a saber una base en donde la métrica tona la forma

$$\eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(-1,1,1,1) \qquad (5.4)$$

la cual podemos llamarle la base no- coordenada de Minkowski.

Como ejemplo de cambio de base usaremos la métrica de una esfera, en coordenadas polares.

los coeficientes métricos son

$$g_{\mu\nu}=\begin{pmatrix} r^2 & 0 \\ 0 & r^2\sin^2\theta \end{pmatrix}$$

haciendo $\omega^\theta = r\,d\theta$ y $\omega^\phi = r\sin\theta\,d\phi$ tenemos $ds^2=(\omega^\theta)^2+(\omega^\phi)^2$

y la métrica en la base no - coordenada es

$$\eta_{\mu\nu}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En principio podemos escoger cuaquier otra base, Newman y Penrose escogierón una base cuyo coeficiente métrico es

$$g_{\mu\nu}=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad (5.5)$$

la cual se conoce como una base nula.

Si $\eta_{\mu\nu}$ y $g_{\mu\nu}$ estan dados en bases no-coordenadas, la base de Minkowski y la base nula respectivamente, tenemos

$$ds^2=\eta_{\mu\nu}\tilde{\omega}^\mu\tilde{\omega}^\nu = g_{\mu\nu}\,\omega^\mu\omega^\nu \qquad (5.6)$$

la relación entre ω^μ y $\tilde{\omega}^\mu$ es

$$\omega^0=\frac{1}{\sqrt{2}}(\tilde{\omega}^0+\tilde{\omega}^1) \quad ; \quad \omega^1=\frac{1}{\sqrt{2}}(\tilde{\omega}^0-\tilde{\omega}^1)$$

$$\omega^2=\frac{1}{\sqrt{2}}(\tilde{\omega}^2+i\tilde{\omega}^3) \quad ; \quad \omega^3=\frac{1}{\sqrt{2}}(\tilde{\omega}^2-i\tilde{\omega}^3) \qquad (5.7)$$

dondé $\tilde{\omega}$, son reales y ω^μ son complejos. Observevese que ω^3 es el conjugado complejo de ω^2. Lo interesante es que las cantidades ω^μ son complejas y este hecho lo explotarón Newman y Penrose.

Teniendo la base y las formas diferenciales ω^μ, puede uno calcular los componentes del tensor de Riemann en esta base y observar que algunos de ellos se obtienen a partir de los otros, ya sea utilizando las propiedades de simetría y antisimetría de los indices.

y por el hecho de que son cantidades complejas, por ejemplo, conjugandolos se intercambia todo indice 2 por el 3 y viceversa. Utilizando además la identidad de Bianchi, solamente es necesario calcular 12 de ellos para obtener los otros. Cuando uno se restringue al vacio $R_{\mu\nu}=g^{\alpha\beta}R_{\alpha\mu\beta\nu}=0$ se reducen los independientes de 12 a 5.

Newman y Penrose construyen 5 escalares complejos, a saber

$$
\begin{aligned}
\Psi_0 &= R_{\alpha\beta\mu\nu}\, l^\alpha m^\beta l^\mu m^\nu \\
\Psi_1 &= R_{\alpha\beta\mu\nu}\, l^\alpha n^\beta l^\mu m^\nu \\
\Psi_2 &= R_{\alpha\beta\mu\nu}\, \bar{m}^\alpha n^\beta l^\mu m^\nu \\
\Psi_3 &= R_{\alpha\beta\mu\nu}\, \bar{m}^\alpha n^\beta l^\mu n^\nu \\
\Psi_4 &= R_{\alpha\beta\mu\nu}\, \bar{m}^\alpha n^\beta \bar{m}^\mu n^\nu
\end{aligned}
\qquad (5.8)
$$

donde $l^\mu, n^\mu, m^\mu, \bar{m}^\mu=(m^\mu)^*$ son tales que la métrica en la base de coordenadas se escribe como

$$g_{\mu\nu}=l_\mu n_\nu+n_\mu l_\nu-m_\mu \bar{m}_\nu-m_\nu \bar{m}_\mu \qquad (5.9)$$

Newman y Penrose llegan a demostrar que si una fuente del campo gravitacional es cero fuera de una región pequeña las cantidades $\Psi_0, \Psi_1, \Psi_2, \Psi_3, \Psi_4$ a distancias muy grandes de la fuente tienen la siguiente forma asintotica

$$\Psi_0=\frac{\phi_0^0}{r^5}+\frac{\phi_0^1}{r^6}+\frac{\phi_0^2}{r^7}+O(r^{-7})$$

$$\Psi_1=\frac{\phi_1^0}{r^4}+O(r^{-5})$$

$$\psi_2 = \frac{\psi_2^0}{r^3} + O(r^{-4})$$

$$\psi_3 = \frac{\psi_3^0}{r^2} + O(r^{-3})$$

$$\psi_4 = \frac{\psi_4^0}{r} + O(r^{-2})$$

donde ψ_n^0 no dependen de r siendo r la distancia del punto de observación al centro de la fuente.

6. CALCULO DE LA RADIACION GRAVITACIONAL.

Las formulas de radiación se dividen en dos grandes clases; las formulas de curvatura y las formulas de conexión.

Las formulas de curvatura miden el flujo de energía de una onda gravitacional por integración temporal del tensor de curvatura de Riemann.

Las formulas de conexión combinan cantidades de conexión como el simbolo de Cristoffel tridimensional y la curvatura extrinsica de una hipersuperficie, para obtener el flujo de energía.

Si encerramos la fuente de radiación gravitacional mediante una esfera de radio r, uno puede medir el flujo de energía que atravieza esta esfera, calculando la expresión

$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{4\pi} \oint_S P^r \, r^2 \, d\Omega \qquad (6.1)$$

donde $d\Omega$ es el elemento de área de la esfera y P^r es el momento normal a la esfera.

En el formalismo de Newman-Penrose uno calcula el momento P^r como

$$P^r = \left[\int_0^t dt' \; \Psi_4(t'-r, \theta, \phi) \right]^2, \qquad (6.2)$$

Como observamos esta formula corresponde a una formula de curvatura.

Como un ejemplo de formula de conexión tenemos la siguiente

$$P^r = -\frac{1}{8} f^{ij} f^{ln} f^{mp} \left[\left(\frac{\partial h_{mp}}{\partial t} \right) \left(2 D_m h_{jl} - D_j h_{lm} \right) \right. \qquad (6.3)$$

Donde γ_{ij} es la 3-métrica $\gamma_{ij}=f_{ij}+h_{ij}$, con f_{ij} como la métrica base y h_{ij} la perturbación, D_i es la derivada covariante respecto a la métrica base.
Esta formula esta dada en el formalismo A.D.M. y se conoce como el vector de Poynting.

Según la formula (6.2) debemos calcular el escalar de Newman-Penrose Ψ_4 a grandes distancias de la fuente de radiación gravitacional. La expresión a grandes distancias de la fuente es

$$\Psi_4 = R_{\hat t\hat\theta\hat t\hat\theta} + i\, R_{\hat t\hat\theta\hat t\hat\phi} \qquad (6.4)$$

donde los componentes del tensor métrico de Riemann estan calculados en una base ortonormal, en coordenadas esfericas.

Hagamos un cambio de base, pasemos a una base de coordenadas y calculemos los componentes del tensor de Riemann.

La distancia propia en coordenadas esfericas es

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta \, d\phi^2 \qquad (6.5)$$

seleccionando las formas diferenciales $\omega^{\hat\mu}$ como

$$\omega^{\hat t} = dt \;;\; \omega^{\hat r} = dr \;;\; \omega^{\hat\theta} = r\, d\theta \;;\; \omega^{\hat\phi} = r \sin\theta\, d\phi \qquad (6.6)$$

tenemos que $\omega^{\hat\mu} = L^{\hat\mu}{}_{\alpha}\, dx^{\alpha}$ con $L^{\hat\mu}{}_{\alpha} = \mathrm{diag}(1,1,r,r\sin\theta)$

la inversa de $L^{\hat\mu}{}_{\alpha}$ es $L^{\mu}{}_{\hat\alpha} = \mathrm{diag}(1,1,1/r,1/r\sin\theta)$

por lo tanto $R_{\hat t\hat\theta\hat t\hat\theta} = L^{\mu}{}_{\hat t} L^{\nu}{}_{\hat\theta} L^{\alpha}{}_{\hat t} L^{\beta}{}_{\hat\theta} R_{\mu\nu\alpha\beta}$

donde $R_{\mu\nu\alpha\beta}$ estan calculados en la base de coordenadas. Asi $R_{\hat t\hat\theta\hat t\hat\theta}$ es $\frac{1}{r^2} R_{t\theta t\theta}$

y $R_{\hat t\hat\theta\hat t\hat\phi}$ es $\dfrac{1}{r^2 \sin\theta} R_{t\theta t\phi}$

Para transformar los componentes del tensor de Riemann $R_{t\theta t\theta}$ y $R_{t\theta t\phi}$ al sistema de coordenadas cartesianas tenemos las expresiones

$$R_{t\theta t\theta} = \frac{\partial x^\mu}{\partial t}\frac{\partial x^\nu}{\partial \theta}\frac{\partial x^\alpha}{\partial t}\frac{\partial x^\beta}{\partial \theta} R_{\mu\nu\alpha\beta}\,; \quad R_{t\theta t\phi} = \frac{\partial x^\mu}{\partial t}\frac{\partial x^\nu}{\partial \theta}\frac{\partial x^\alpha}{\partial t}\frac{\partial x^\beta}{\partial \phi} R_{\mu\nu\alpha\beta}$$

con $x^0=t$, $x^1=x$, $x^2=y$, $x^3=z$.

ademas

$$x = r\,\mathrm{sen}\,\theta\,\cos\phi$$
$$y = r\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\phi$$
$$z = r\cos\theta$$

entonces

$$\left.\begin{aligned} R_{t\theta t\theta} = {} & \frac{\partial x}{\partial \theta}\left(R_{txtx}\frac{\partial x}{\partial \theta} + R_{txty}\frac{\partial y}{\partial \theta} + R_{txtz}\frac{\partial z}{\partial \theta}\right) \\ & + \frac{\partial y}{\partial \theta}\left(R_{tytx}\frac{\partial x}{\partial \theta} + R_{tyty}\frac{\partial y}{\partial \theta} + R_{tytz}\frac{\partial z}{\partial \theta}\right) \\ & + \frac{\partial z}{\partial \theta}\left(R_{tztx}\frac{\partial x}{\partial \theta} + R_{tzty}\frac{\partial y}{\partial \theta} + R_{tztz}\frac{\partial z}{\partial \theta}\right) \end{aligned}\right\} \quad (6.7)$$

y

$$\left.\begin{aligned} R_{t\theta t\phi} = {} & \frac{\partial x}{\partial \theta}\left(R_{txtx}\frac{\partial x}{\partial \phi} + R_{txty}\frac{\partial y}{\partial \phi}\right) \\ & + \frac{\partial y}{\partial \theta}\left(R_{tytx}\frac{\partial x}{\partial \phi} + R_{tyty}\frac{\partial y}{\partial \phi}\right) \\ & + \frac{\partial z}{\partial \theta}\left(R_{tztx}\frac{\partial x}{\partial \phi} + R_{tzty}\frac{\partial y}{\partial \phi}\right) \end{aligned}\right\} \quad (6.8)$$

7.- CHOQUE DE DOS HOYOS NEGROS (ANTECEDENTES)

Es más amplio el problema de los dos cuerpos que el problema de la colisión de dos cuerpos. Los primeros intentos por encontrar una solución estática que nos describiera el problema de los dos cuerpos fuerón desastrosas, Bach, Weyl y Levi-Civita tratarón de obtener una solución estática aximetrica pero fracasarón. Hoy se sabe que este problema es dependiente del tiempo a menos que una fuerza no gravitatoria equilibre la atracción gravitacional.

Debido a que hasta la fecha no se ha encontrado una solución exacta que nos describa a los dos cuerpos, el problema se ha reducido a calculos numéricos a partir de una condición inicial.

En I960 Misner investiga un problema de condiciones iniciales describiendo dos objetos de masas iguales instantaneamente en reposo. Este problema contenia dos parametros libres la masa total y la separación entre las masas.

El primer intento de obtener información hacerca de esta condición inicial fué hecha por Hahn y Lindquist en I964, este trabajo demuestra que se puede obtener información de este problema mediante la computación pero en sus calculos tienen problemas numéricos debido principalmente al escoger mal su sistema de coordenadas.

En I960 De Witt comienza a estudiar la colisión de dos hoyos negros mediante la computadora y tiempo después a este trabajo se añaden Cadez, Smarr y Eppley.

8 . METRICA BASE.

Queremos aproximarnos al problema de la colisión de dos hoyos negros, los cuales se encuentran inicialmente en reposo para posteriormente aproximarse el uno al otro y formar un hoyo negro unico, generandose en este proceso radiación gravitacional.

La métrica que proponemos debe acercarse lo más posible a la situación física descrita lineas arriba, aunque no satisfaga la solución en vacio.

La métrica de un hoyo negro en reposo fué dada por Schwarzshild en 1916, esta métrica no presenta radiación gravitacional, esta métrica es diagonal y su elemento de linea en coordenadas isotrópicas es

$$ds^2 = -N^2 dt^2 + B^2 (dx^2 + dy^2 + dz^2) \qquad (8.1)$$

donde N, B son funciones unicamente de espacio, Si el potencial newtoniano ϕ de una masa puntual tiene la forma

$$\phi = \frac{m}{r} \qquad \text{con} \qquad r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} ,$$

[illegible] N y B se expresan como

$$N = \frac{1 - m/2r}{1 + m/2r} \quad ; \quad B = \left(1 + \frac{m}{2r}\right)^2$$

Guiandonos en la métrica de Schwarsshild proponemos la siguiente métrica:

Escogemos el elemento de linea como (8.1), donde N y B son funciones de tiempo y espacio. dadOs por

$$N = \frac{1-\phi}{1+\phi} \quad , \quad B = (1+\phi)^2 \qquad (8.2)$$

aqui ϕ sera

$$\phi = \frac{m/2}{|\vec{r}-\vec{a}(t)|} + \frac{m/2}{|\vec{r}+\vec{a}(t)|} \qquad (8.3)$$

Observese que cuando $\vec{a}$ sea cero obtendremos la métrica de Schwarzshild con masa total 2m.

Esto no significa sumar dos métricas de Schwarzshild, pero tiene mas bién el espiritu de la teoría linealizada es decir sumar los potenciales Newtonianos correspondientes a las masas puntuales.

La forma funcional de $\vec{a}$ respecto al tiempo debemos escogerla sabiamente, [illegible]

[illegible]

Existen en la literatura formulas para calcular los simbolos de Cristoffel, tensores de Riemann, etc., sin embargo calculamos estos como ejercicio, para utilizar el formalismo de formas diferenciales, pero debido a que no creo que los detalles sean de interes para el lector simplemente escribire los pasos y resultados encontrados para la métrica diagonal (8.1).

Con la métrica diagonal en la forma

$$ds^2 = -N^2 dt^2 + B^2(dx^2 + dy^2 + dz^2)$$

donde $x^0 = t$, $x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = z$ y N, B funciones de (t, z), se selecciona la base de Minkowski con la métrica $\eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(-1,1,1,1)$. Así las formas diferenciales son

$$\omega^0 = N\,dt \quad , \omega^i = B\,dx^i \qquad (8.4)$$

el elemento de linea se representa como

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu}\,\omega^\mu \omega^\nu \qquad (8.5)$$

Se calcula la derivada exterior de las formas diferenciales ω^μ, donde se debe cumplir

$$d\omega^\mu = -\omega^\mu{}_\alpha \wedge \omega^\alpha \quad \text{con} \quad \omega_{\mu\nu} + \omega_{\nu\mu} = d\eta_{\mu\nu} \qquad (8.6)$$

Calculando estas derivadas en (8.4) y utilizando (8.6) se obtiene

$$\omega^0{}_i = A_i\,\omega^0 + E\,\omega^i \quad ; \quad \omega^i{}_j = F_j\,\omega^i - F_i\,\omega^j \qquad (8.7)$$

donde

$$A_i = \frac{N_i}{BN} \quad , E = \frac{\dot{B}}{BN} \quad , F_i = \frac{B_i}{B^2}$$

Después se calcula $\Theta^{\mu}{}_{\nu}$ como

$$\Theta^{\mu}{}_{\nu} = d\omega^{\mu}{}_{\nu} + \omega^{\mu}{}_{\alpha} \wedge \omega^{\alpha}{}_{\nu} = \frac{1}{2} R^{\hat{\mu}}{}_{\hat{\nu}\hat{\alpha}\hat{\beta}}\, \omega^{\alpha} \wedge \omega^{\beta} \qquad (8.8)$$

donde $R^{\hat{\mu}}{}_{\hat{\nu}\hat{\alpha}\hat{\beta}}$ es el tensor de Riemann en la base de Minkowski. Realizando las operaciones indicadas en (8.8) encontramos

$$R^{\hat{0}}{}_{\hat{i}\hat{k}\hat{i}} = \frac{E_k}{B} \quad ; \quad R^{\hat{0}}{}_{\hat{i}\hat{0}\hat{k}} = F_i A_k - A_i A_k - \frac{A_{ik}}{B} \qquad \left\{ \begin{array}{l} i \neq k \neq 0 . \\ \text{no suma: } i, k \end{array} \right\}$$

$$R^{\hat{0}}{}_{\hat{i}\hat{0}\hat{i}} = E^2 + \frac{\dot{E}}{N} - A_m F_m + A_i F_i - A_i A_i - \frac{A_{ii}}{B} \qquad (8.9)$$

$$R^{\hat{i}}{}_{\hat{k}\hat{0}\hat{i}} = \frac{F_{k0}}{B} \quad ; \quad R^{\hat{i}}{}_{\hat{k}\hat{i}\hat{k}} = E^2 - F_m F_m - \frac{F_{ii}}{B} - \frac{F_{kk}}{B}$$

Podemos calcular el tensor de Ricci en esta base como

$$R_{\hat{\mu}\hat{\nu}} = R^{\hat{\alpha}}{}_{\hat{\mu}\hat{\alpha}\hat{\nu}}$$

Realizando las operaciones, obtenemos

$$R_{\hat{0}\hat{0}} = -3\left(E^2 + \frac{\dot{E}}{N}\right) + 2 A_m F_m + A_m A_m + \frac{A_{mm}}{B} \qquad \{\text{no suma: } i\}$$

$$R_{\hat{0}\hat{i}} = -\frac{2E_i}{B} \quad ; \quad R_{\hat{i}\hat{k}} = F_i A_k - A_i A_k - A_{ik} - \frac{F_{ik}}{B} \qquad (8.10)$$

$$R_{\hat{i}\hat{i}} = 3E^2 + \frac{\dot{E}}{N} - A_m F_m + A_i F_i - A_i A_i - \frac{A_{ii}}{B} - 2F_m F_m - \frac{F_{mm}}{B} - \frac{F_{ii}}{B}$$

El escalar de Ricci es $R = \eta^{\alpha\beta} R_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}$ que nos da

$$R = 12E^2 + 6\frac{\dot{E}}{N} - 4A_m F_m - 2A_m A_m - \frac{2A_{mm}}{B} - 6F_m F_m - \frac{4F_{mm}}{B} \qquad (8.11)$$

Calculando ahora el tensor de Einstein $G_{\hat{\mu}\hat{\nu}}$ como

$G_{\hat{\mu}\hat{\nu}} = R_{\hat{\mu}\hat{\nu}} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu} R$ obtenemos

$$\left.\begin{array}{l} G_{\hat{0}\hat{0}} = 3E^2 - 3F_m F_m - 2\dfrac{F_{mm}}{B} \quad ; \quad G_{\hat{0}\hat{i}} = -2\dfrac{E_i}{B} \\ G_{\hat{i}\hat{k}} = F_i A_k - A_i A_k - \dfrac{A_{ik}}{B} - \dfrac{F_{ik}}{B} \\ G_{\hat{i}\hat{i}} = -3E^2 - 2\dfrac{\dot{E}}{N} + A_m F_m + F_m F_m + \dfrac{F_{mm}}{B} + A_m A_m + \dfrac{A_{mm}}{B} + \\ \qquad + A_i F_i - A_i A_i - \dfrac{A_{ii}}{B} - \dfrac{F_{ii}}{B} \end{array}\right\} \qquad (8.12) \quad \{\text{no suma: } i\}$$

Estas expresiones estan calculadas en la base de Minkowski y para transformarlas a la base de coordenadas tenemos que cambiar de base.

Con $\omega^\mu = A^\mu{}_\nu\, dx^\nu$, nuestra matriz $A^\mu{}_\nu$ es

$$A^\mu{}_\nu = \mathrm{diag}\,(N, B, B, B) \qquad (8.13)$$

pedimos que para tensores de segundo orden se cumpla

$$R_{\hat\mu\hat\nu}\, \omega^\mu \omega^\nu = R_{\alpha\beta}\, dx^\alpha dx^\beta$$

esto implica que

$$R_{\alpha\beta} = A^\mu{}_\alpha A^\nu{}_\beta R_{\hat\mu\hat\nu}$$

es decir

$$R_{00} = N^2 R_{\hat0\hat0}$$
$$R_{0i} = NB\, R_{\hat0\hat i}$$
$$R_{ij} = B^2 R_{\hat i\hat j} \qquad (8.14)$$

De la misma manera, para tensores de cuarto orden escribimos

$$R_{\hat\mu\hat\nu\hat\alpha\hat\beta}\, \omega^\mu \omega^\nu \omega^\alpha \omega^\beta = R_{\mu\nu\alpha\beta}\, dx^\mu dx^\nu dx^\alpha dx^\beta$$

que implica

$$R_{\lambda\tau\kappa\sigma} = A^\mu{}_\lambda A^\nu{}_\tau A^\alpha{}_\kappa A^\beta{}_\sigma\, R_{\hat\mu\hat\nu\hat\alpha\hat\beta}$$

Con esta expresión escribimos los tensores de Riemann como

$$\left.\begin{aligned} R_{0imi} &= NB^3 R_{\hat0\hat i\hat m\hat i} \\ R_{0i0m} &= N^2B^2 R_{\hat0\hat i\hat0\hat m} \\ R_{0i0i} &= N^2B^2 R_{\hat0\hat i\hat0\hat i} \\ R_{ikmi} &= B^4 R_{\hat i\hat k\hat m\hat i} \\ R_{ikik} &= B^4 R_{\hat i\hat k\hat i\hat k} \end{aligned}\right\} \qquad (8.15)$$

Los simbolos de Cristoffel se calculan de la siguiente manera.

Dado el lagrangiano $\mathcal{L} = \frac{1}{2}(-N^2\dot t^2 + B^2 \dot x^i \dot x^i)$ [1] (8.16)

calculamos la ecuación de Euler - Lagrange

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot x^\mu}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} = 0 \qquad (8.17)$$

[1] En las ecuaciones (8.16) y (8.17) el punto significa derivada total respecto al intervalo s.

reagrupando términos y expresandolos en la forma

$$\ddot{x}^{\mu} + \Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}\,\dot{x}^{\alpha}\dot{x}^{\beta} \overset{1)}{=} 0 \qquad (8.18)$$

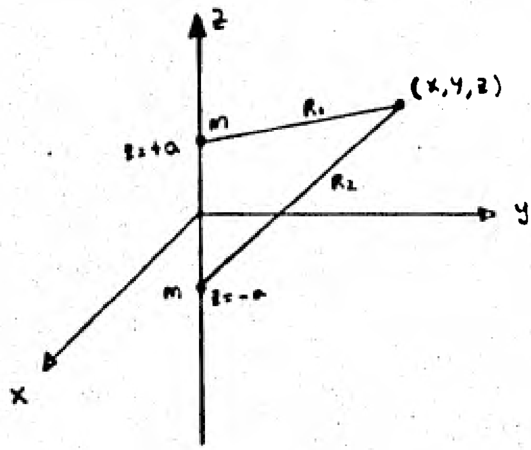
identificamos los simbolos de Cristoffel, los cuales son:

$$\Gamma^{0}_{00} = \frac{\dot{N}}{N} \;;\; \Gamma^{0}_{0i} = \frac{N_i}{N} \;;\; \Gamma^{0}_{ii} = \frac{B\dot{B}}{N^2} \;;\; \Gamma^{i}_{00} = \frac{NN_i}{B^2} \;;\; \Gamma^{i}_{0i} = \frac{\dot{B}}{B} \qquad \{\text{NO SUMA: } i, j\}$$

$$\Gamma^{i}_{ji} = \frac{B_j}{B} \;;\; \Gamma^{i}_{jj} = -\frac{B_i}{B} \;;\; \Gamma^{i}_{ii} = \frac{B_i}{B} \qquad (8.19)$$

Cuando N y B los expresamos como (8.2) con ϕ arbitrario, el tensor de Einstein se expresa como

$$\left.\begin{aligned} &G_{00} = 3E^2 - \frac{4}{(1+\phi)^5}\nabla^2\phi \;;\quad G_{0i} = -\frac{2E_i}{B} \\ &G_{kk} = -3E^2 - \frac{2\dot{E}}{N} + \frac{2}{NB^3}\left(\phi_m\phi_m - \phi\nabla^2\phi + \phi\,\phi_{kk} - 3\phi_k\phi_k\right) \\ &G_{ik} = \frac{2}{NB^3}\left(\phi\,\phi_{;ik} - 3\phi_{;i}\phi_k\right) \\ &\text{donde} \\ &\qquad E = \frac{2\dot{\phi}}{1-\phi} \;;\quad \nabla^2\phi = \phi_{mm} \end{aligned}\right\} \quad \{\text{NO SUMA: } k\} \quad (8.20)$$



Ahora cuando ϕ es $\phi = \frac{m/2}{R_1} + \frac{m/2}{R_2}$

donde $R_1 = [x^2+y^2+(z-a)^2]^{1/2}$; $R_2 = [x^2+y^2+(z+a)^2]^{1/2}$

aqui $R_1 = |\bar{r} - \bar{a}|$ y $R_2 = |\bar{r} + \bar{a}|$ donde $\bar{a}$ se encuentra solo en el eje z.

---

1) En la ecuación (8.18) el punto significa derivada total respecto al intervalo s.

obtenemos quo

$$
\left.\begin{aligned}
G_{12} &= \frac{2}{NB^3}\,\frac{3m^2x^1x^2}{4R_1R_2}\left(\frac{1}{R_1^2}-\frac{1}{R_2^2}\right)^2 \qquad ; \quad G_{00} = 3\dot{E}^2 - \frac{4\nabla^2\phi}{(1+\phi)^5}\\
G_{b3} &= \frac{2}{NB^3}\,\frac{3m^2x^b}{4R_1R_2}\left(\frac{1}{R_1^2}-\frac{1}{R_2^2}\right)\left(\frac{z-a}{R_1^2}-\frac{z+a}{R_2^2}\right)\\
G_{bb} &= -3\dot{E}^2 - 2\frac{\ddot{E}}{N} + \frac{2}{NB^3}\,\frac{3m^2x^b}{4R_1R_1}\left(\frac{1}{R_1^2}-\frac{1}{R_2^2}\right) - \frac{2}{NB^3}\,\frac{ma^2}{R_1^3R_2^3} - \frac{2\phi\,\nabla^2\phi}{NB^3}\\
G_{33} &= -3\dot{E}^2 - 2\frac{\ddot{E}}{N} + \frac{2}{NB^3}\,\frac{3m^2}{4R_1R_1}\left[\frac{z-a}{R_1^2}-\frac{z+a}{R_2^2}\right]^2 - \frac{2}{NB^3}\,\frac{ma^2}{R_1^3R_2^3} - \frac{2\phi}{NB^3}\nabla^2\phi
\end{aligned}\right\} \quad (8.21)
$$

con

$$\nabla^2\phi = -2m\pi\left\{\delta(\bar{x}-\bar{a}) + \delta(\bar{x}+\bar{a})\right\}$$

Como se observa esta métrica no satisface las ecuaciones de Einstein en vacio.

9. TEORIA LINEALIZADA.

Para la determinación de las perturbaciones $\bar{h}_{\mu\nu}$ debemos resolver la ecuación (4.13) ya que la métrica base no satisface las ecuaciones de Einstein en vacio.

Queremos determinar hasta que punto el tensor de Ricci, el tensor de Riemann y el escalar de Ricci afectan a la radiación gravitacional del sistema, comparando la solución hecha por computación de esta ecuación, efectuada por Smarr (1977), y una aproximación linealizada hecha en esta tésis, para una colisión de dos hoyos negros.

Suponiendo que $\bar{h}_{\mu\nu}$ sea del mismo orden que ϕ y conservando unicamente términos lineales en la ecuación (4.I3) se transforma en la siguiente

$$G_{\mu\nu} + \frac{1}{2} h_{\mu\nu}{}^{,\alpha}{}_{,\alpha} = 0$$

Esta es una ecuación de onda con fuente proporcional al tensor de Einstein.

Linealizando el tensor de Einstein obtenemos a primer orden en ϕ

$$G_{00} = -4\phi_{mm} \quad ; \quad G_{0i} = -4\dot{\phi}_{,i}$$

$$G_{ij} = 0 \quad (i \neq j) \quad ; \quad G_{ii} = -4\ddot{\phi} \quad \text{(no suma)}$$

con $\phi_{nn} = \nabla^2\phi = -2\pi m\left[\delta(\bar{x}-\bar{a}) + \delta(\bar{x}+\bar{a})\right]$

10. CALCULO DE LOS COEFICIENTES METRICOS PERTURBADOS.

Los coeficientes métricos perturbados deben satisfacer la ecuacion de onda con una fuente proporcional al tensor de Einstein de la métrica base

$$\Box \bar{h}_{\mu\nu} = 2\, G_{\mu\nu} \qquad (10.1)$$

la solución de esta ecuación es

$$\bar{h}_{\mu\nu} = -\frac{1}{4\pi} \int_{\text{vol.}} \frac{2 G_{\mu\nu}(t-R, \vec{r}\,')}{R}\, d^3r' + \int_{\text{sup.}} ds \; (\quad) \qquad (10.2)$$

donde $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}\,'$ y R es la longuitud del vector $\vec{R}$

Suponiendo que la integral de superficie se cancela en principio uno tiene que calcular unicamente la integral de volumen para encontrar la perturbación. Observando la forma del tensor de Einstein de la métrica base observamos que solamente la componente G_{00} que es una delta puede introducirse en la integral y calcularla en forma cerrada, las otras componentes G_{ij} no se dejan manejar en forma cerrada.
Nos interesa calcular principalmente el valor de la perturbación lejos de las masas que generan la radiación gravitacional.
Vamos a evaluar estas integrales suponiendo que solamente una región cercana a las masas es la que genera la radiación gravitacional en su parte más importante.
Entonces suponiendo $R \sim r$ tenemos que

$$\bar{h}_{\mu\nu} = -\frac{1}{2\pi r} \int_{L} G_{\mu\nu}(t-r, \vec{r}\,')\, d^3r'. \qquad (10.3)$$

Integrar a Goo es relativamente facil: por eso es conveniente expresar los otros componentes del tensor de Einstein G_{ij} en términos del componente G_{oo}.
Para esto partimos de que la divergencia del tensor de Einstein es cero.

$$G^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 0 \qquad (10.4)$$

el cual podemos escribir como

$$- G_{oo,o} + G_{oi,i} = 0 \qquad (10.5)$$
$$- G_{io,o} + G_{im,m} = 0 .$$

Derivando parcialmente con respecto al tiempo la primera ecuación tenemos

$$G_{oo,o,o} = G_{om,m,o} \qquad (10.6)$$

y derivando la segunda ecuación con respecto a la componente i ; tenemos que

$$G_{io,o,i} = G_{im,m,i} \qquad (10.7)$$

combinando estas ecuaciones tenemos que

$$G_{oo,o,o} = G_{im,m,i} \qquad (10.8)$$

Sea ahora

$$(x^i x^j G_{oo})_{,o,o} = x^i x^j \, G_{oo,o,o} \qquad (10.9)$$

es decir que

$$(x^i x^j G_{oo})_{,o,o} = x^i x^j \, G_{km,k,m}$$

pero $(x^i x^j G_{km})_{,k} = x^i x^j \, G_{km,k} + x^i G_{jm} + x^i G_{im}$

y

$$(x^i x^j G_{km})_{,km} = x^i x^j \, G_{km,k,m} + x^i G_{jm,m} + x^j G_{im,m}$$
$$+ (x^i G_{jm} + x^j G_{im})_{,m}$$

$$= x^i x^j G_{km,k,m} + 2G_{ij} + 2\left[x^i G_{mj,m} + x^j G_{im,m} \right] \qquad (10.10)$$

entonces

$$(x^i x^j G_{km})_{,k,m} = (x^i x^j G_{00})_{,0,0} + 2G_{ij} + 2\left[x_i G_{jm} + x^j G_{im} \right]_{,m}$$
$$- 4G_{ij}$$

asi que

$$(x^i x^j G_{00})_{,0,0} = (x^i x^j G_{km})_{,k,m} + 2G_{ij} - 2(x^i G_{jm} + x^j G_{im})_{,m} \qquad (10.11)$$

integramos esta expresión en un volumen dado y aplicando el teorema de la divergencia, y haciendo cero el valor del integrando en esa superficie, tenemos finalmente que

$$\int 2G_{ij}\, d^3x = \int (x^i x^j G_{00})_{,0,0}\, d^3x \qquad (10.12)$$

entonces

$$\left.\begin{aligned} \bar{h}_{00} &= -\frac{2}{4\pi r}\int [G_{00}]\, d^3r' \\ \bar{h}_{ij} &= -\frac{1}{4\pi r}\int [2G_{ij}]\, d^3r' = -\frac{1}{4\pi r}\int \left[(x^i x^j G_{00})_{,0,0}\right] d^3r' \end{aligned}\right\} \qquad (10.13)$$

como $G_{00} = 8\pi m\{\delta(\bar{x}-\bar{a}) + \delta(\bar{x}+\bar{a})\}$

tenemos que

$$\left.\begin{aligned} \bar{h}_{00} &= -\frac{1}{2\pi r} 8\pi m\, 2 = -8\frac{m}{r} \\ \bar{h}_{ij} &= -\frac{1}{4\pi r}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int 8\pi m x^i x^j (\delta(\bar{x}-\bar{a}) + \delta(\bar{x}+\bar{a}))\, d^3r' \\ &= -\frac{4m}{r}\frac{\partial^2}{\partial t^2} a_i a_j \end{aligned}\right\} \qquad (10.14)$$

En nuestro caso solo a_3 es diferente de cero.

Asi que solo queda $\bar{h}_{33}$.

Tenemos la constricción sobre las perturbaciones $\bar{h}_{\mu\nu}$,

a saber, $\bar{h}_{\mu\sigma}{}^{,\sigma} = 0$ es decir que

$$\left.\begin{aligned} -\bar{h}_{00,0} + \bar{h}_{01,1} + \bar{h}_{02,2} + \bar{h}_{03,3} &= 0 \\ -\bar{h}_{10,0} + \cancel{\bar{h}_{11,1}} + \cancel{\bar{h}_{12,2}} + \cancel{\bar{h}_{13,3}} &= 0 \\ -\bar{h}_{20,0} + \cancel{\bar{h}_{21,1}} + \cancel{\bar{h}_{22,2}} + \cancel{\bar{h}_{23,3}} &= 0 \\ -\bar{h}_{30,0} + \cancel{\bar{h}_{31,1}} + \cancel{\bar{h}_{32,2}} + \bar{h}_{33,3} &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (10.15)$$

y vemos que $\bar{h}_{01}$ y $\bar{h}_{02}$ no dependen del tiempo.

y que $\bar{h}_{03,0} = \bar{h}_{33,3}$

vemos que $$\bar{h}_{33} = -\frac{4m}{r}\frac{\partial^2 a}{\partial t^2} \quad \text{con} \quad a(t-r) \qquad (10.16)$$

entonces $\bar{h}_{33,3} = \frac{4m}{r}\left(\frac{z}{r}\right)\frac{\partial^3 a}{\partial t^3}$ hasta términos de primer orden en $1/r$.

y por lo tanto

$$\bar{h}_{03} = \frac{4m}{r}\cos\theta\,\frac{\partial^2 a}{\partial t^2} \qquad (10.17)$$

finalmente nuestras métricas perturbadas son:

$$\bar{h}_{00} = -\frac{8m}{r} \quad ; \quad \bar{h}_{03} = \frac{4m}{r}\cos\theta\,\frac{\partial^2 a}{\partial t^2} \quad ; \quad \bar{h}_{33} = -\frac{4m}{r}\frac{\partial^2 a}{\partial t^2} \qquad (10.18)$$

$\bar{h}$ es $$\bar{h} = -\bar{h}_{00} + \bar{h}_{11} + \bar{h}_{22} + \bar{h}_{33} = \frac{8m}{r} - \frac{4m}{r}\frac{\partial^2 a}{\partial t^2} \qquad (10.19)$$

Asi la métrica perturbada $h_{\mu\nu}$ es :

$$\left.\begin{aligned} h_{00} &= \bar{h}_{00} + \tfrac{1}{2}\bar{h} = -\frac{8m}{r} + \frac{4m}{r} - \frac{2m}{r}\frac{\partial^2 a}{\partial t^2} = -\frac{4m}{r} - \frac{2m}{r}\frac{\partial^2 a}{\partial t^2} \\ h_{11} &= h_{22} = -\frac{\bar{h}}{2} = -\frac{4m}{r} + \frac{2m}{r}\frac{\partial^2 a}{\partial t^2} \quad ; \quad \bar{h}_{03} = \frac{4m}{r}\cos\theta\,\frac{\partial^2 a}{\partial t^2} \\ h_{33} &= \bar{h}_{33} - \tfrac{1}{2}\bar{h} = -\frac{4m}{r}\frac{\partial^2 a}{\partial t^2} - \frac{4m}{r} + \frac{2m}{r}\frac{\partial^2 a}{\partial t^2} = -\frac{4m}{r} - \frac{2m}{r}\frac{\partial^2 a}{\partial t^2} \end{aligned}\right\} \qquad (10.20)$$

11. DISTANCIA ENTRE LAS PARTICULAS COMO FUNCION DEL TIEMPO.

Hemos dicho que el escoger sabiamente la métrica base nos acercara mas a la solución real, pues bién, la separación de las masas como función del tiempo esta contenida en la expresión de la métrica base. Es de interes investigar varias $a(t)$ y ver que tanto nos acercan a la solución real, calculo que fué efectuado por Smarr.

Vamos a investigar tres casos de interes, el primero sera usar la teoría de Newton para encontrar la separación entre las masas, el segundo caso es utilizar una mezcla de relatividad especial con relatividad general y el último caso sera el utilizar la relatividad general.

CASO NEWTONIANO.

El problema de dos cuerpos en mecánica clásica, utilizando la teoría de Newton, ha sido extensamente estudiada. Predice que la separación entre las masas puntuales esta dada por la ecuación

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -\frac{M}{r^2} \qquad (11.1)$$

siendo M la masa total del sistema, y r la separación entre las masas puntuales.

la solución a esta ecuación, expresada en forma parametrica es

$$r = \frac{R}{2}(1 + \cos\eta)$$
$$t = \frac{R}{2}\sqrt{\frac{R}{2M}}(\eta + \operatorname{sen}\eta) \qquad (11.2)$$

donde η es un parametro que varia de $0 \rightarrow \pi$.

Expresado de esta forma R es la separación inicial y sucede cuando $\eta = 0$ y $t = 0$.

CASO DE RELATIVIDAD ESPECIAL.

Cuando estudiamos el movimiento de una particula moviendose en un campo gravitacional de Schwarzshild obtenemos la expresión $\frac{d^2r}{d\tau^2} = -\frac{M}{r^2}$ donde r es la separación entre las masas. El tiempo propio esta dado por la expresión $d\tau^2 = (1 - \frac{2M}{r})dt^2 - (1 - \frac{2M}{r})^{-1}dr^2$.

Vamos hacer una combinación de relatividad general con relatividad especial y proponer como ecuación para la separación entre las masas la expresión $\frac{d^2r}{d\tau^2} = -\frac{M}{r^2}$ (11.3)

y escoger como tiempo propio a, $d\tau^2 = + dt^2 - dr^2$. (11.4)

A partir de (11.4) obtenemos que

$$t = \int (1 + \dot{r}^{2})^{1/2}\, d\tau \qquad (11.5)$$

utilizando el hecho que conocemos $\dot{r}$ como $\dot{r} = -\sqrt{\frac{2M}{r} - \frac{2M}{R}}$

podemos escribir (11.5) como

$$t = \int -\left(\frac{1 + \frac{2M}{r} - \frac{2M}{R}}{\frac{2M}{r} - \frac{2M}{R}}\right)^{1/2} dr$$

haciendo el cambio de variable $r = R(1 - \frac{1}{z})$ expresamos

t como

$$t = R\sqrt{\frac{R}{2M}} \int -\frac{\sqrt{z - (1 - \frac{2M}{R})}}{z^{2}}\, dz$$

cuya integración es

$$t = -A\left\{ -\frac{\sqrt{z-\rho}}{z} + \frac{1}{\sqrt{\rho}} \tan^{-1}\sqrt{\frac{z-\rho}{\rho}} \right\} + t_0$$

con $\rho = 1 - \frac{2M}{R}$ y $A = R\sqrt{\frac{R}{2M}}$

Para determinar la constante hacemos $r = R$, $Z = \infty$

cuando t = 0.

Así que

$$0 = -A\left\{ -\frac{\sqrt{z}}{z} + \frac{1}{\sqrt{\rho}} \tan^{-1}\sqrt{\infty} \right\} + t_0$$

$$0 = -A\left\{ \frac{1}{\sqrt{\rho}} \frac{\pi}{2} \right\} + t_0 \quad \Rightarrow \quad t_0 = A\,\frac{\pi}{2}\,\frac{1}{\sqrt{\rho}}$$

finalmente t es:

$$t = A\left\{ \frac{\sqrt{z-\rho}}{z} + \frac{\pi}{2\sqrt{\rho}} - \frac{1}{\sqrt{\rho}} \tan^{-1}\frac{\sqrt{z-\rho}}{\sqrt{\rho}} \right\} \qquad (11.6)$$

Definiendo θ como

$$\tan\theta = \frac{\sqrt{z-\rho}}{\sqrt{\rho}} \qquad (11.7)$$

obtenemos que

$$t = A\left\{ \frac{\operatorname{sen} 2\theta}{2\sqrt{\rho}} + \frac{\pi}{2\sqrt{\rho}} - \frac{2\theta}{2\sqrt{\rho}} \right\}$$

y con el cambio de parametro $\xi = \pi - 2\theta$

llegamos a expresar t como

$$t = \frac{A}{2\sqrt{\rho}}\left(\xi + \operatorname{sen}\xi\right) \qquad (II.8)$$

de (II.7) obtenemos

$$\cos^2\theta = \frac{\rho}{z} = \rho\left(1 - \frac{r}{R}\right)$$

$$\rho\left(1 - \frac{r}{R}\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \cos 2\theta\right)$$

y despejando r obtenemos que

$$r = \frac{R}{2\rho}\left(2\rho - 1 + \cos\xi\right) \qquad (II.9)$$

La relación entre este parámetro ξ y el usual del tiempo propio η es

$$\operatorname{sen}\frac{\xi}{2} = \sqrt{\rho}\ \operatorname{sen}\frac{\eta}{2} \qquad (II.10)$$

CASO DE RELATIVIDAD GENERAL.

El tiempo propio en la métrica de Schwarzshild, para caida radial, se expresa como

$$d\tau^2 = g_{00}\,dt^2 + g_{11}\,dr^2 \qquad (11.11)$$

con $\quad g_{00} = \left(1-\frac{2M}{r}\right) \;;\; g_{11} = -\left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1} \qquad (11.12)$

Un lagrangiano aceptable para el movimiento es

$$L = \frac{1}{2}\left(g_{00}\,\dot{t}^2 + g_{11}\,\dot{r}^2\right) \qquad (11.13)$$

donde el punto significa derivada total respecto al tiempo propio.

Como el lagrangiano no depende explicitamente del tiempo una constante del movimiento es

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{t}} = E = g_{00}\,\dot{t} = cte \qquad (11.14)$$

La otra constante es $\quad 1 = g_{00}\,\dot{t}^2 + g_{11}\,\dot{r}^2 \qquad (11.15)$

Sustituyendo $\dot{t}$ de (11.14) en (11.15) obtenemos

$$1 = \frac{E^2}{g_{00}} + g_{11}\,\dot{r}^2$$

y despejando $\dot{r}$ obtenemos

$$\dot{r} = -\left[E^2 - 1 + \frac{2M}{r}\right]^{1/2}$$

Por otra parte despejando $\dot{t}$ de (11.14) nos da

$$\dot{t} = \frac{E}{1-\frac{2M}{r}}$$

así el tiempo propio se expresa en término de la posición como la integral siguiente

$$t = \int \frac{\dot{t}}{\dot{r}}\,dr = \int -\frac{E\,dr}{\left(1-\frac{2M}{r}\right)\left(E^2-1+\frac{2M}{r}\right)^{1/2}} \qquad (11.16)$$

definiendo b como

$$b = E^2 - 1 = -\frac{2M}{r} \qquad (11.17)$$

y haciendo el cambio de variable

$$E^2 - \rho^2 = 1 - \frac{2M}{r} \qquad (11.18)$$

expresamos t como

$$t = \int \frac{4ME\, d\rho}{(E^2-\rho^2)(\rho^2-b)^2}$$

pero utilizando la identidad

$$\frac{1}{(E^2-\rho^2)(\rho^2-b)^2} = \frac{1}{E^2-\rho^2} + \frac{(1-b)+\rho^2}{(\rho^2-b)^2}$$

nos quedan las siguientes integrales para el tiempo

$$t = 4ME \int \frac{d\rho}{E^2-\rho^2} + 4ME(1-b) \int \frac{d\rho}{(\rho^2-b)^2} + 4ME \int \frac{\rho^2}{(\rho^2-b)^2}\, d\rho$$

de cuya solución obtenemos que el tiempo se expresa como

$$t = 2M \ln\left|\frac{E+\rho}{E-\rho}\right| + \frac{RE\rho}{\rho^2 + \frac{2M}{R}} + ER\sqrt{\frac{R}{2M}}\left(1+\frac{4M}{R}\right) \arctan \frac{\rho}{\sqrt{\frac{2M}{R}}} + cte$$

ahora definiendo $\tan\theta = \frac{\rho}{\sqrt{\frac{2M}{R}}}$

y utilizando (11.18) llegamos a que

$$\tan\theta = \sqrt{\frac{R}{r} - 1}$$

de la cual podemos despejar r como

$$r = \frac{R}{2}(1 + \cos 2\theta) \qquad (11.19)$$

si hacemos el cambio de parametro $\eta = 2\theta$ podemos expresar ρ como $\rho = \sqrt{\frac{2M}{R}} \tan \eta/2$

y finalmente escribir para la distancia r

$$r = \frac{R}{2}(1 + \cos\eta) \qquad (11.20)$$

El tiempo se escribe a su vez como

$$t = 2M \ln\left|\frac{\sqrt{\frac{R}{2M}-1} + \tan\eta/2}{\sqrt{\frac{R}{2M}-1} - \tan\eta/2}\right| + \frac{R}{2}\left(\frac{R}{2M}-1\right)^{1/2} \operatorname{sen}\eta + \left(\frac{R}{2}+2M\right)\left(\frac{R}{2M}-1\right)^{1/2}\eta \qquad (11.21)$$

12. RADIACION GRAVITACIONAL.

En este trabajo unicamente se va a calcular la cantidad de Newman-Penrose Ψ_4 ec. (6.4) evaluandola en $\theta=\frac{\pi}{2}$, la razón de esto, es que queremos compararlo con un calculo numérico hecho por Smarr utilizando las ecuaciones completas de Einstein, ellos dan una gráfica $rM\Psi_4$ contra t/M en $\theta=\pi/2$ con $r=25M$ y $\frac{\beta}{M}=6.6$. Veamos que forma adquiere Ψ_4 en nuestro trabajo, cuando $\theta=\pi/2$.

Observemos que $\frac{\partial x}{\partial\theta}=r\cos\theta\cos\phi$; $\frac{\partial y}{\partial\theta}=r\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\phi$ son cero en $\theta=\pi/2$ y que

$$\left.\frac{\partial z}{\partial\theta}\right|_{\theta=\pi/2}=-r\,\mathrm{sen}\,\theta\Big|_{\theta=\pi/2}=-r$$

$$\left.\frac{\partial x}{\partial\phi}\right|_{\theta=\pi/2}=-r\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\phi\Big|_{\theta=\pi/2}=-r\,\mathrm{sen}\,\phi \quad ; \quad \left.\frac{\partial y}{\partial\phi}\right|_{\theta=\pi/2}=r\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\phi\Big|_{\theta=\pi/2}=r\cos\phi$$

Entonces los componentes del tensor de Riemann $R_{t\theta t\theta}$ y $R_{t\theta t\phi}$ en $\theta=\pi/2$ son

$$\left.\begin{aligned}
R_{t\theta t\theta} &= \left(\frac{\partial z}{\partial\theta}\right)^2 R_{tztz} = r^2\, R_{tztz}\\
R_{t\theta t\phi} &= \left(\frac{\partial z}{\partial\theta}\right)\left(R_{tztx}\frac{\partial x}{\partial\phi}+R_{tzty}\frac{\partial y}{\partial\phi}\right)\\
&= r^2\left(-\mathrm{sen}\,\phi\, R_{tztx}+\cos\phi\, R_{tzty}\right)
\end{aligned}\right\} \qquad (12.1)$$

Estos componentes del tensor de Riemann en teoría linealizada tienen la forma siguiente

$$\left.\begin{aligned}
R_{tztz} &= \tfrac{1}{2}\left(h_{tz,z,t}-h_{zz,t,t}-h_{tt,z,z}+h_{tz,t,z}\right)\\
R_{tztx} &= \tfrac{1}{2}\left(\cancelto{0}{h_{tx,z,t}}-\cancelto{0}{h_{xz,t,t}}-h_{tt,x,z}+h_{tz,t,x}\right)\\
R_{tzty} &= \tfrac{1}{2}\left(\cancelto{0}{h_{ty,z,t}}-\cancelto{0}{h_{zy,t,t}}-h_{tt,z,y}+h_{tz,t,y}\right)
\end{aligned}\right\} \qquad (12.2)$$

Cuando estas cantidades las calculamos en $\theta = \pi/2$, muchas de ellas son de segundo orden en $1/r$ ó bién son cero. Quedando finalmente

$$R_{tztz} = -\frac{1}{2} h_{zz,t,t} \qquad y \qquad R_{tztx} \sim R_{tzty} \sim 0$$

Nuestra cantidad Ψ_4 se convierte entonces en

$$\Psi_4 = R_{tztz} = -\frac{1}{2} h_{zz,t,t} \quad . \tag{12.3}$$

e introduciendo el valor de h_{zz} obtenemos

$$\Psi_4 = \frac{m}{r} \frac{\partial^4 a^2}{\partial t^4} \qquad en \quad \theta = \pi/2 \tag{12.4}$$

Si, M=2m M masa total del sistema.

L=2a L distancia entre las masas.

Obtenemos que

$$\Psi_4 = \frac{M}{8r} \frac{\partial^4 L^2}{\partial t^4} \tag{12.5}$$

Dada esta formula para Ψ_4 queremos ver la radiación gravitacional predicha por esta formula analizando los tres casos mencionados en el (11), a saber, caso Newtoniano, caso de Relatividad Especial y finalmente el caso de Relatividad General y compararlos con la radiación gravitacional predicha por el calculo numérico exacto de Smarr.

Para el $a(t)$ Newtoniano, Ψ_4 se calcula como

$$\Psi_4 = \frac{M}{8r} \frac{M^2}{L^4}\left(10 - \frac{8L}{R}\right) \tag{12.6}$$

Para el $a(t)$ en Relatividad Especial el Ψ_4 es

$$\Psi_4 = \frac{M}{8r}\left\{-\frac{4LA}{c^4}\left[\frac{\cos\varphi}{(1+\cos\varphi)^5} + \frac{4\,\mathrm{sen}^2\varphi}{(1+\cos\varphi)^6}\right] + \frac{16A^2\,\mathrm{sen}^2\varphi}{c^4(1+\cos\varphi)^5} + \frac{6A^2}{c^4(1+\cos\varphi)^4}\right\} \tag{12.7}$$

con $A = \frac{R}{2E^2}$; $E = \sqrt{1 - \frac{2M}{R}}$; $C = \frac{R}{2E}\sqrt{\frac{R}{2M}}$

Para el $a(t)$ en Relatividad General el calculo de ψ_4 es bastante complicado y tuvo que realizarse en la computadora y solamente presentamos los resultados en la gráfica numero 2.

Smarr da una gráfica de su resultado y lo que vamos hacer es graficar los resultados de los tres casos arriba mencionadas para la expresión Ψ_4 en la misma gráfica hecha por Smarr para las mismas masas y separaciónes iniciales. Estas gráficas se presentan en la fig. 2 .

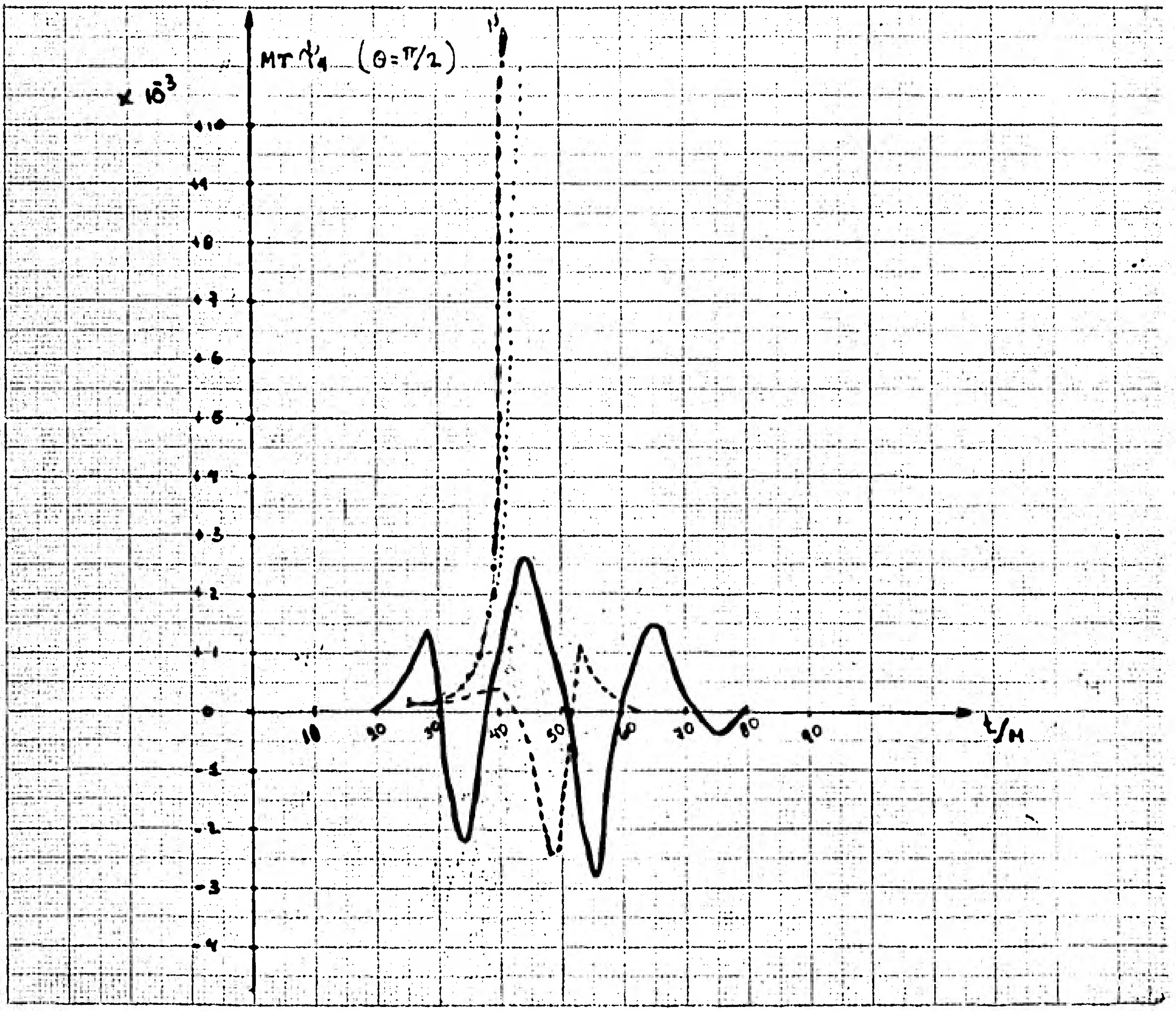


Fig. 2

- ——— Solución numérica de Smarr.
- - - - - Caso de Relatividad General.
- — • — • — Caso Newtoniano.
- • • • • • • Caso de Relatividad Especial.

Se nota de la gráfica que los casos Newtoniano y el de Relatividad Especial difieren radicalmente del resultado numérico efectuado por Smarr cuanto más nos alejamos del instante inicial, mientras el de Relatividad General presenta el mismo tipo de comportamiento que la solución numérica de Smarr aunque esta presenta un corrimiento de fase y una amplitud ligeramente diferente. Era ya de esperarse que el caso Newtoniano iba a ser diferente del caso real porque esta presenta una pendiente infinita de $a(t)$ y también porque rebasa la velocidad de la luz.

Dado que en Relatividad Especial $a(t)$ no puede tener una velocidad $\frac{da}{dt}$ mayor 1 (1=velocidad de la luz) no seria irrealista esperar que la radiación gravitacional tendiera a cero y que por lo menos uno de los picos del caso numérico de Smarr se reprodujera.
De todos modos el hecho de que la velocidad $\frac{da}{dt}$ tienda a una constante, las mas altas derivadas de $a(t)$ no van a cero y aunque $\frac{d^4 a^2}{dt^4}$ es finito, es grande y no se acerca a cero.
En el caso de relatividad General la modificación del tiempo debido al campo gravitacional es muy importante y causa, como se ve en la gráfica, la mayoria de la estructura en la radiación gravitacional.

Este calculo también provee una justificación para un calculo efectuado por Ruffini y Wheeler quienes calcularón la radiación emitida en la colisión de dos hoyos negros utilizando el tensor de Energía-Momento de dos masas puntuales acercandose y la teoria linealizada de la gravitación.

CONCLUSIONES.

Después de confrontar nuestros resultados, utilizando la simplificada aproximación que hemos realizado en este trabajo con los calculos exactos hechos por Smarr en el problema de la colisión de dos hoyos negros, podemos decir que este método simple si responde a describir en rasgos generales la estructura de la radiación gravitacional. Esto implica que el método de acercarse a soluciones comenzando con no-soluciones es prometedor pero que requiere mucho trabajo para aplicarse en fórma satisfactória a este tipo de calculo.. Una vez probado este tipo de calculo se puede utilizar en calculos preliminares de la radiación gravitacional esperada en diferentes situaciones físicas.

BIBLIOGRAFIA

1. Zerilli, F.J., "Gravitational Field of a Particle Falling in a Schwarzschild Geometry Analyzed in Tensor Harmonics", Phys. Rev. D., vol. 2 No. 10, pp.2141-2160, 1970.

2. Einstein, A. y Rosen, N., The Particle Problem in the General Theory of Relativity, Phys. Rev., vol. 48,pp.73-77, 1935.

3. Cadez, A., Some Remarks on the two-body Problem in Geometrodynamics, Ann. Phys., 91, pp.58-74, 1975.

4. Peters, P.C., Perturbations in the Schwarzschild Metric, Phys. Rev., vol. 146, No. 4, pp.938-946, 1966.

5. Smarr, L., Cadez, A., Dewitt, B., y Eppley, K., Collision of two black holes: Theoretical Framework, Phys. Rev. D., vol. 14, No. 10, pp. 2443-2452, 1976.

6. Smarr, L., Space-times Generated by Computers: Black Holes with Gravitational Radiation. Ann. N.Y. Acad. of Sci., 302, pp.569-604,1977.

7. Davis, M., Ruffini, R., Press, W.H., y Price, R.H., "Gravitational Radiation from a Particle Falling Radially into a Schwarzschile black hole", Phys. Rev. Lett. vol. 27, pp.1466-1469, 1971.

8. Landau, L.D.y Lifschitz, E.M., "Teoría Clásica de los Campos", 2a. ed. en español, Edit. Reverte,S.A., 1973.

9. Misner, Ch.W., Thorne, K.S. y Wheeler, J.A., Gravitation, W.H. Freeman and Co., San Francisco, 1973.

10. "Sources of Gravitational Radiation", Edit. by Smarr, Larry L., Cambridge University Press. 1979.

11. Hawking, S.W.,y Israel, W., General Relativity, Cambridge University Press., 1979.

12. Papapetrou, A., "Lectures on General Relativity", D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, Holland, 1974.

13. Zakharov, V.D., "Gravitational Waves in Einstein's Theory", Halsted Press., A division of John Wiley & Sons., Inc. N.Y., 1973.

14. R. Ruffini y J. Wheeler, Proceedings of the Cortona Symposium on Weak Interactions, Edit. por L. Radicati, Academia Nazionale Dei Lincei Roma, 1971.