76

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

SISTEMAS SINGULARES EN MECANICA CLASICA

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

F I S I C O

P R E S E N T A :

JOSE LUCIANO SORIA ARTECHE

MEXICO D.F. MAYO DE 1981.

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

A MI MADRE:

QUIEN CON POCAS PALABRAS, PERO, CON GRAN AMOR, LE DEBO MUCHO DE LO QUE SOY.

"IT IS IMPORTANT FOR HIM WHO WANTS TO DISCOVER NOT TO CONFINE HIMSELF TO ONE CHAPTER OF SCIENCE, BUT TO KEEP IN TOUCH WITH VARIOS OTHERS"

JACQUES HADAMARD.

Hermann To.

INDICE

INTRODUCCIÓN.

En los últimos años, se han hecho grandes intentos en tratar de unificar las descripciones de las interacciones fundamentales conocidas, tomando como idea central, la invariancia de norma de las teorías de campo. Es un hecho conocido que las teorías clásicas mas aceptadas que describen a la gravitación y al electromagnetismo pertenecen a este tipo de teorías invariantes de norma (*).

El presente trabajo enfoca su estudio a los sistemas singulares(**), partiendo su razón de ser, de la gran motivación que adquiere del hecho de que los sistemas singulares se manifiestan dentro de las teorías físicas como sistemas invariantes de norma y/o sistemas constreñidos.

En el año de 1950, Dirac publica un artículo [1] en el cual ataca el problema de desarrollar una dinámica Hamiltoniana clásica consistente, correspondiendo a un sistema singular Lagrangiano. Posteriormente el mismo presenta una expansión del tratamiento de los sistemas Hamiltonianos constreñidos, en [2,3].

Actualmente se reconoce que el tratamiento de Dirac es uno de los mas completos con que se cuenta para el análisis canónico de cuantización de sistemas invariantes de norma. Sin embargo, aun este tratamiento no se escapa de ciertos problemas hasta la fecha no resueltos en general, entre ellos podemos mencionar:

* Estas ideas se tratarán con mayor extensión en el cap. III

** Entendiendo por este a un sistema descrito por ecuaciones diferenciales en las cuales no es posible despejar todas las mas altas derivadas temporales de las variables dinámicas.

i).- No es apropiado para tratar constricciones de la forma $c = c(q, \dot{q}, t) = 0$ cuando las velocidades no pueden ser escritas en términos de los momentos. Ejemplo típico de esto se conoce a la norma de Lorentz en electrodinámica, $\partial_\mu A^\mu = 0$.

ii).- Para la conversión de las constricciones de primera clase en una de segunda y poder así usar el tratamiento de Dirac, uno necesariamente tiene que fijar las normas.

En un sistema singular se tiene como condición necesaria y suficiente que la matriz $M(q, \dot{q}, t)$ (*), tenga determinante nulo, este hecho juega un papel importante en el estudio de estos sistemas. Prueba de ello, se puede ver en el tratamiento de eliminación de constricciones, realizado por Sudarshan - Mukunda en [4], y por otra parte en [5], donde se hace un intento por separar del Lagrangiano la parte conteniendo variables dependientes de norma.

El objetivo principal de este trabajo es el de presentar una metodología para generar un número infinito de Lagrangianos s-equivalentes, para los sistemas singulares en la mecánica clásica. Para llevar a cabo este propósito la idea que se manejará es la de llegar a separar los verdaderos grados dinámicos de libertad (T.D.O.F) "True dynamical degrees of freedom" [6], del sistema singular original llevando a uno de primer orden el cual también resulta ser singular, posteriormente bajo ciertas condiciones específicas se aplica directamente la construcción elaborada en [7].

Resumiendo el contenido del presente trabajo pode-

* Donde esta matriz es el coeficiente de las mas altas derivadas temporales de las variables dinámicas en cuestión.

nos discriminan dos partes fundamentales:

La primera, que comprende los tres primeros capítulos en donde se hace un estudio bibliográfico de los tratamientos más relevantes (a nuestro parecer) del problema inverso del cálculo de variaciones tanto en segundo orden (Cap. I) como en el primero (Cap. II), proporcionándose en el capítulo 0 algunos preliminares matemáticos necesarios para el buen entendimiento de los capítulos I y II.

Por otro lado en la segunda parte se enfoca el estudio del problema inverso para los sistemas singulares de orden finito. Específicamente en el capítulo III, se desarrolla la metodología para la generación de un número infinito de lagrangianos s-equivalentes de primer orden para este tipo de sistemas. En el capítulo IV se proporcionan ejemplos de motivación y una aplicación de la metodología desarrollada en el capítulo anterior. Finalmente se dan las conclusiones mencionándose las posibles perspectivas del tratamiento.

CAPITULO 0

"PRELIMINARES"

EN ESTE CAPITULO SE PROPORCIONARAN ALGUNOS DE LOS CONCEPTOS Y RESULTADOS MATEMATICOS DE RELEVANCIA UTILIZADOS EN EL DESARROLLO DE ESTE TRABAJO.

0.1.- Enfoque variacional.

Se sabe que el cálculo de variaciones se originó en el siglo XVIII, con el problema de la determinación de los máximos y mínimos de integrales definidas en funciones conocidas. Años más tarde se identificó la importancia de este estudio para las diferentes ramas de la ciencia.

Dentro de los rudimentos que aparecen en el cálculo de variaciones tenemos [8,13] lo siguiente:

Entenderemos por una trayectoria al conjunto de valores:

$$E = \{ q^k(t) \mid t \in (t_1, t_2) ;\ k = 1, 2, \ldots, n \}$$

Para funciones q^k dadas.

Por una trayectoria funcional (*) se entenderá a una correspondencia la cual asigna un número real $A(E)$ a una trayectoria real E dada. Para el cálculo de variaciones y la física la trayectoria funcional de mayor relevancia es la muy conocida acción funcional:

$$A(E) = \int_{t_1}^{t_2} dt\, L(t, E, \dot{E}) \qquad (0.1.1)$$

Por un problema variacional simple se entenderá el de encontrar las trayectorias E_0, satisfaciendo las condiciones iniciales:

$$E_0(t) = u_0 = \{u_0^k\} ;\ \dot{E}_0(t) = v_0 = \{v_0^k\}$$

a lo largo de la cual la funcional $A(E)$ proporciona un extremo.

* Podría parecer no adecuado el nombre de trayectoria funcional, sin embargo es el que se utiliza convencional-

mente, véase [8].

Por una trayectoria admisible entendemos a una curva uniparamétrica:

$$q^k(t,\omega) \quad \forall \quad t\in(t_1,t_2);\ \omega\in O_\varepsilon;\ k=1,2,\dots,n$$

con $q^k(\cdot)$ al menos C^2 en t y C' en ω.

La variación de trayectorias admisibles puede ser definida por:

$$\eta^k(t)\equiv\frac{\partial q^k}{\partial\omega}\Big|_{\omega=0}$$

ó en el lenguaje moderno del cálculo de variaciones como:

$$\delta' q = \eta(t)\,\omega$$

El paso inmediato será el de introducir los llamados sistemas de formas de variación de un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden:

$$F_i(t,q,\dot q,\ddot q)=0 \qquad i=1,2,\dots,n \qquad (0.1.2)$$

lo cual puede ser hecho, por la diferenciación con respecto a ω y evaluación en $\omega=0$, de las funciones F_i a lo largo de una trayectoria admisible, es decir;

$$M_i(\eta)=\frac{dF_i}{d\omega}\Big|_{\omega=0}=\frac{\delta F_i}{\delta q^k}\Big|_{\omega=0}\eta^k+\frac{\delta F_i}{\delta\dot q^k}\Big|_{\omega=0}\dot\eta^k+\frac{\delta F_i}{\delta\ddot q^k}\Big|_{\omega=0}\ddot\eta^k \qquad (0.1.3)$$

lo que puede ser considerado como la variación de primer orden de F_i, es decir: $\delta' F_i = M_i(\eta)\omega \ \forall\ \omega\in O_\varepsilon$.

Por ser F_i conocida esto implica que las parciales se conocen, por lo que, llamando:

$$a_{ik}=\frac{\delta F_i}{\delta q^k}\ ;\qquad b_{ik}=\frac{\delta F_i}{\delta\dot q^k}\ ;\qquad c_{ik}=\frac{\delta F_i}{\delta\ddot q^k}$$

Tendremos que: $M_i(\eta) = a_{ik}(t)\eta^k + b_{ik}(t)\dot{\eta}^k + c_{ik}(t)\ddot{\eta}^k$ (0.1.4)

Debido a que la variación $\eta^k(t)$ no es única, da origen al concepto de familia de variaciones admisibles. Como la familia de curvas caracterizadas por las variaciones de todas las posibles trayectorias admisibles, es decir:

$$\{\alpha \mid \alpha = \eta, \tilde{\eta}, \tilde{\tilde{\eta}}, \ldots \in C^2(t_1,t_2)\}$$

Llamaremos familia de forma de variación admisible, a la familia caracterizada por el cálculo de las formas $M_i(\eta)$ a lo largo de todas las variaciones admisibles:

$$\{M_i(\alpha)\} = \{a_{ik}\alpha^k + b_{ik}\dot{\alpha}^k + c_{ik}\ddot{\alpha}^k \mid \alpha = \eta, \tilde{\eta}, \ldots \in C^2(t_1,t_2)\}$$

Un sistema de formas de variación $\tilde{M}_i(\tilde{\eta})$ es llamado el sistema adjunto de las formas $M_i(\eta)$, cuando existe una función $Q(\eta,\tilde{\eta}) \ni \tilde{\eta}^i M_i(\eta) - \eta^i \tilde{M}_i(\tilde{\eta}) = \frac{d}{dt} Q(\eta,\tilde{\eta})$ (0.1.5) es válida para todas las variaciones admisibles, en otras palabras es una identidad en $\eta, \tilde{\eta}, \ldots$ Por un cálculo directo se puede ver la posible forma de la estructura del sistema adjunto y de $Q_i(\eta,\tilde{\eta})$, es decir:

$$\tilde{\eta}^i M_i(\eta) = \tilde{\eta}^i a_{ij}\eta^j + \tilde{\eta}^i b_{ij}\dot{\eta}^j + \tilde{\eta}^i c_{ij}\ddot{\eta}^j$$

$$= \eta^j a_{ij}\tilde{\eta}^i + \frac{d}{dt}(\tilde{\eta}^i b_{ij}) + \frac{d}{dt}\left[(\tilde{\eta}^i c_{ij})\dot{\eta}^j - \eta^j \frac{d}{dt}(\tilde{\eta}^i c_{ij})\right] -$$

$$- \eta^j \frac{d}{dt}(\tilde{\eta}^i b_{ij}) + \eta^j \frac{d^2}{dt^2}(\tilde{\eta}^i c_{ij}) = \eta^j\left[\tilde{\eta}^i a_{ij} - \frac{d}{dt}(\tilde{\eta}^i b_{ij}) + \frac{d^2}{dt^2}(\tilde{\eta}^i c_{ij})\right] +$$

$$+ \frac{d}{dt}\left[\tilde{\eta}^i b_{ij}\eta^j + \tilde{\eta}^i c_{ij}\dot{\eta}^j - \eta^j \frac{d}{dt}(\tilde{\eta}^i c_{ij})\right]$$

De (0.1.5) $\Rightarrow \therefore$ $\tilde{M}_j(\tilde{\eta}) = \tilde{\eta}^i a_{ij} - \frac{d}{dt}(\tilde{\eta}^i b_{ij}) + \frac{d^2}{dt^2}(\tilde{\eta}^i c_{ij})$ (0.1.6) y $Q_i(\eta,\tilde{\eta}) = \tilde{\eta}^i b_{ij}\eta^j + \tilde{\eta}^i c_{ij}\dot{\eta}^j - \eta^j \frac{d}{dt}(\eta^i c_{ij})$ (0.1.6₂)

Con esto estamos en condiciones de definir a un sistema autoadjunto, como un sistema de formas variacionales $M_i(\eta)$ el cual coincide con su sistema adjunto $\tilde{M}^i(\eta)$ para todas las variaciones admisibles, es decir:

$$M_i(\eta) = \tilde{M}_i(\eta) \qquad \forall i = 1,2,\dots,n \quad y \quad \eta \in C^2$$

Es claro en estos momentos que las condiciones de ser sistema autoadjunto se pueden obtener por simple inspección de (0.1.4) y (0.1.6₁) lo que resulta:

$$\begin{aligned} c_{ik} &= c_{ki} \\ b_{ik} + b_{ki} &= 2\dot{c}_{ki} \\ a_{ik} - a_{ki} &= \ddot{c}_{ki} - \dot{b}_{ki} \end{aligned} \qquad (0.1.7)$$

Así mismo sustituyendo los valores de las a's, b's, c's en función de las F_i's, tenemos que un sistema de ecuaciones diferenciales como (0.1.2) es autoadjunto siempre que:

$$\left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial F_i}{\partial \ddot{q}^k} = \frac{\partial F_k}{\partial \ddot{q}^i}, \\ &\frac{\partial F_i}{\partial \dot{q}^k} + \frac{\partial F_k}{\partial \dot{q}^i} = 2\frac{d}{dt}\frac{\partial F_i}{\partial \ddot{q}^k} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F_i}{\partial \ddot{q}^k} + \frac{\partial F_k}{\partial \ddot{q}^i}\right), \\ &\frac{\partial F_i}{\partial q^k} - \frac{\partial F_k}{\partial q^i} = \frac{d}{dt}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F_k}{\partial \ddot{q}^i}\right) - \frac{\partial F_k}{\partial \dot{q}^i}\right] \\ &\qquad = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F_i}{\partial \dot{q}^k} - \frac{\partial F_k}{\partial \dot{q}^i}\right) \end{aligned} \right. \qquad (0.1.8)$$

las cuales deben ser satisfechas en todo el dominio de $(t, q, \dot{q}, \ddot{q})$.

Este último concepto (el de sistema autoadjunto), ha sido uno de los pilares de casi todos los tratamientos hechos sobre el problema inverso del cálculo de variaciones. En el estudio bibliográfico que presentamos podemos anticipar que; Helmholtz (introductor de ella), Davis, Havas y Santilli, utilizaron esta idea en sus trabajos como se verá en los siguientes capítulos.

CAPÍTULO 1:

"Introducción al problema inverso del cálculo de variaciones."

En este capítulo plantearemos el problema inverso del cálculo de variaciones y discutiremos algunos de los trabajos más importantes en órdenes mayores que el primero, concernientes con este problema, haciendo hincapié en las ideas centrales de los tratamientos.

I.1.- PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA.

En una terminología rigurosa, matemáticamente hablando el problema inverso del cálculo de variaciones puede ser formulado [8] como se da a continuación:

Dada una familia de soluciones:

$$q(t) = \{q^1(t), \dots q^n(t)\}$$

de un sistema de n ecuaciones diferenciales ordinarias y cuasilineales de orden $2r$.

$$F_k(t, q, q^{(1)}, \dots, q^{(2r)}) = 0 \qquad (I.1.0)$$

donde $q^{(i)} = \dfrac{d^i q}{dt^i}$ $\qquad i = 1, 2, \dots 2r \qquad k = 1, 2, \dots, n$

determinar si existe una funcional:

$$A(q) = \int_{t_1}^{t_2} dt\, L[t, q, q^{(1)}, \dots, q^{(r)}] \qquad (I.1.1)$$

la cual admita tales soluciones como extremales.

En otras palabras el problema está basado sobre el estudio de las condiciones bajo las cuales existe una función:

$$L(t, q, q^{(1)}, \dots, q^{(r)})$$

tal que las ecuaciones de Euler-Lagrange de la funcional (I.1.1) sea equivalente al sistema (I.1.0), donde esta equivalencia [9a] está dada por transformaciones de $L \longrightarrow L^*$ tales que:

$$\sum_{i=0}^{r} (-1)^i \frac{d^i}{dt^i} \frac{\partial L^*}{\partial q^{k(i)}} = h_{kl} F_l \qquad (I.1.2)$$

donde:

$$h_{kl} = h_{kl}(t, q, q^{(1)}, \dots, q^{(2r-1)}) \text{ y } \det(h_{kl}) \neq 0$$

Es importante señalar que estas transformaciones de equivalencia no pueden ser derivadas de transformaciones puntuales, $L(t, q, \dots, q^{(r)}) \longrightarrow L'(t, q', \dots, q'^{(r)})$, ya que esto ocurre en un sistema coordenado fijo. o en su defecto con una transformación de norma Newtoniana $L \longrightarrow L^+$, donde

$L^{+} = L + \frac{d}{dt} G(t, q, q^{(1)}, \ldots, q^{(r-1)})$, DEBIDO A QUE LAS ECUACIONES LAGRAN-GEANAS NO COINCIDEN A MENOS DE QUE EL MAPEO SEA EL TRIVIAL.

EL PROBLEMA INVERSO DEL CÁLCULO DE VARIACIONES, EN EL LENGUAJE DE LA MECÁNICA NEWTONIANA, PUEDE PLANTEARSE COMO EL ESTUDIO EN EL CUAL DADO UN SISTEMA ARBITRARIO CUASILINEAL DE ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS DE 2º ORDEN:

$$A_{ki}(t, q, \ddot{q})\, \ddot{q}^{i} + B_{k}(t, q, \dot{q}) = 0 \qquad (I.1.3)$$

ESTUDIAMOS:

i).- LAS CONDICIONES NECESARIAS Y SUFICIENTES PARA LA EXISTENCIA DE UN LAGRANGIANO.

ii).- UN METODO COMPUTACIONAL DEL LAGRANGIANO, PARTIENDO DE LAS ECUACIONES DADAS DE MOVIMIENTO CUANDO SU EXISTENCIA SEA ASEGURADA POR LAS CONDICIONES DE INTEGRABILIDAD.

I.2.- PRINCIPALES ESTUDIOS DEL PROBLEMA INVERSO. (*)

EL PROBLEMA INVERSO HA SIDO ESTUDIADO INTENSIVAMENTE DESDE HACE MÁS DE UN SIGLO POR UNA GRAN CANTIDAD DE AUTO-RES, ENTRE ALGUNOS DE ELLOS TENEMOS:

a).- HELMHOLTZ H.

HELMHOLTZ EN SU TRABAJO DE "REINE ANGEW. MATH. 1887, 100-137.", IDENTIFICÓ SOBRE BASES NETAMENTE INTUITIVAS LAS CONDICIONES

* VALIOSA INFORMACIÓN DE LO QUE SE HA HECHO EN LO REFERENTE A ESTE PROBLEMA, FUE RECABADA POR SANTILLI EN [8,10]. SIN EMBARGO NO ES LO SUFICIENTEMENTE CONCRETA NI COMPLETA, PARA NUESTROS INTERESES.

necesarias y suficientes para la existencia de una solución L en (I.1.1) son de que el sistema (I.1.0), fuese autoadjunto (*).

b).- Darboux G.

Es considerado como uno de los primeros que abordó el problema inverso logrando resolver el caso unidimensional en [12]. La forma en que él se planteó el problema fue la siguiente:

Dada una ecuación diferencial de segundo orden

$$v'' = \varphi(u, v, v') \qquad (I.2.1)$$

existirá una integral de la forma

$$\int f(u, v, v')\, du$$

para las cuales las ecuaciones de Euler

$$\frac{\partial f}{\partial v} - \frac{d}{du}\left(\frac{\partial f}{\partial v'}\right) = 0$$

sean equivalentes a (I.2.1), es decir, que $\forall\ u, v$ y v'

$$\frac{\partial^2 f}{\partial v'^2}\varphi + \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial v'} v' + \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u} - \frac{\partial f}{\partial v} = 0 \qquad (I.2.2)$$

de donde podemos inmediatamente notar que para el caso unidimensional el problema se ha reducido a resolver una ecuación diferencial parcial (I.2.2) en una incógnita (f).

Para lograr su objetivo Darboux utilizó técnicas de ecuaciones diferenciales convencionales. Básicamente su demostración se resume en lo siguiente:

Diferenciando parcialmente la ecuación (I.2.2) con respecto a v' y redefiniendo una nueva cantidad, $M = \frac{\partial^2 f}{\partial v'^2}$

* Véase este concepto en el capítulo 0.

se llega a: $$M\frac{\partial \varphi}{\partial v'} + \varphi\frac{\partial M}{\partial v'} + v'\frac{\partial M}{\partial v} + \frac{\partial M}{\partial u} = 0 \qquad (I.2.3)$$

De la definición de dM se tiene que (I.2.3) $\Rightarrow$

$$dM + M\frac{\partial \varphi}{\partial v'}\,du = 0 \qquad (I.2.4)$$

llamando
$$\begin{cases} \psi(u,v,v') = \alpha \\ \psi_1(u,v,v') = \beta \end{cases} \qquad (I.2.5)$$

las cuales representan las integrales de movimiento del sistema. Al despejar v, v' en función de u, α, β, se tiene de (I.2.4)

$$\frac{dM}{M} + \theta(u,\alpha,\beta)\,du = 0 \qquad (I.2.6)$$

por lo que por una cuadratura resulta:

$$M\sigma(u,\alpha,\beta) = \gamma \qquad \text{(donde } \gamma \text{ es una constante)}$$

reemplazando α y β de (I.2.5) tendremos:

$$M\psi_2(u,v,v') = \gamma$$

por lo que la solución general de M en la ecuación (I.2.3) está dada por:

$$M\psi_2(u,v,v') = \mathcal{F}(\psi,\psi_1) \qquad (I.2.7)$$

donde $\mathcal{F}$ representa a una función completamente arbitraria de ψ, ψ_1.

Después que la función M ha sido obtenida, f se obtiene por dos cuadraturas sucesivas de $M = \frac{\partial^2 f}{\partial v'^2}$ $\therefore$ la solución general será:

$$f = f_0 + \lambda(u,v)v' + \mu(u,v)$$

donde λ y μ representan funciones arbitrarias de u y v.

c).- DAVIS D.

En su primer artículo [13], basado en su tesis doctoral, Davis trata el problema inverso en (2+1) dimensiones, logrando demostrar de una forma completa y rigurosa la afirmación hecha por Helmholtz en 1887 sobre la necesidad y suficiencia del sistema de ecuaciones (I.1.0), de ser un sistema autoadjunto para la existencia de una solución L en (I.1.1). Este resultado quedó establecido

EN UN TEOREMA DEMOSTRADO EN EL TRABAJO ANTES MENCIONADO DE LA SIGUIENTE FORMA:

"SI DOS ECUACIONES DE LA FORMA:

$$H(x,y,z,y',z',y'',z'')=0 \quad ; \quad K(x,y,z,y',z',y'',z'')=0$$

TIENE ECUACIONES DE VARIACIÓN:

$$H_y U + H_z B + H_{y'} U' + H_{z'} B' + H_{y''} U'' + H_{z''} B'' = 0$$

$$K_y U + K_z B + K_{y'} U' + K_{z'} B' + K_{y''} U'' + K_{z''} B'' = 0$$

LAS CUALES FORMAN UN SISTEMA AUTOADJUNTO A LO LARGO DE TODA CURVA $y = y(x)$ $z = z(x)$; ENTONCES SIEMPRE EXISTE UNA FORMA INTEGRAL $I \ni$ $I = \int_{x'}^{x^2} f(x,y,z,y',z')\,dx$ TENIENDO LAS ECUACIONES $H = K = 0$ COMO ECUACIONES DE EULER. LA MÁS GENERAL DE TALES INTEGRALES TIENE UN INTEGRANDO;

$$f = g(x,y,z,y',z') + a(x,y,z) + b(x,y,z)y' + c(x,y,z)z' + \frac{d}{dx} t(x,y,z)$$

DONDE g ES UNA SOLUCIÓN PARTICULAR DE:

$$g_{y'y'} = P \quad ; \quad g_{y'z'} = Q \quad ; \quad g_{z'z'} = R$$

P, Q y R SON TALES QUE $H = M + Py'' + Qz''$; $K = N + Qy'' + Rz''$ y $a, b, c,$ SON SOLUCIONES PARTICULARES DEL SISTEMA:

$$c_y - b_z = g_{y'z} - g_{yz} - \tfrac{1}{2}(M_{z'} - M_{y'})$$

$$a_z - c_x = -N - g_z + g_{z'x} + g_{y'z}\, y' + g_{z'z}\, z' - \tfrac{1}{2}(M_z - N_{y'})$$

$$b_x - a_y = M + g_y - g_{y'x} - g_{y'y}\, y' - g_{z'y}\, z' - \tfrac{1}{2}(M_{z'} - N_{y'})z'$$

y t ES UNA FUNCIÓN ARBITRARIA DE x, y y z.

NO PRETENDEREMOS DAR LA DEMOSTRACIÓN (LA CUAL RECOMENDAMOS AL LECTOR INTERESADO VERLA EN [2]), SINO SIMPLEMENTE DEJAR ESTABLECIDO EL TIPO DE SUPOSICIONES QUE SE MANIFIESTAN EN

Cabe mencionar que en este trabajo Davis hace un estudio sobre las representaciones indirectas (*), sin embargo se topa con ciertas DIFICULTADES encontradas al tratar de que satisfagan ciertas condiciones propuestas en su metodología para tratar este problema. Un año después publica estos mismos resultados en un espacio de (n+1) dimensiones en [13].

d).- DOUGLAS J. (**)

Por principio Douglas consideró para su estudio, un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$F_k = (t, q, \dot{q}, \ddot{q}) = 0 \quad , k = 1, 2, \ldots, n \qquad (I.2.8)$$

el cual satisfacen las condiciones del teorema de la función implícita en k, pudiendo con esto escribir el sistema (I.2.8) a lo que se conoce como la forma normal, es decir:

$$\ddot{q}^j = f^j(t, q, \dot{q}^j) \; ; \; f^j \in C^1(R^{2n+1})$$

Estudiando el sistema general sobre determinado de las ecuaciones diferenciales parciales:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^k \partial \dot{q}^j} f^j + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^k \partial q^j} \dot{q}^j + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^k \partial t} - \frac{\partial L}{\partial q^k} = 0 \qquad (I.2.9)$$

En la función desconocida L, donde la función implícita f^j es dada.

Este análisis fué conducido con referencia particular

* Mejor conocidas como representaciones de sistemas equivalentes.

** Este resumen fue realizado por Santilli en [8] debido a su claridad y sencillez se consideró conveniente transcribirlo casi completamente, sin embargo para el lector intere-

SALVO RECOMENDAMOS SE DIRIJA AL ORIGINAL DE DOUGLAS [15].

EN LA TEORÍA DE ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES DE RIQUIER, SIN USO ALGUNO DE LAS CONDICIONES CONOCIDAS DE SISTEMAS AUTOADJUNTOS.

LA IDEA PRINCIPAL EN SU DESARROLLO FUÉ LA DE REDUCIR EL SISTEMA (I.2.9) A UNO EQUIVALENTE DE PRIMER ORDEN, ES DECIR QUE VIÓ QUE LA DERIVADA LAGRANGIANA SATISFACÍA:

$$\frac{\partial L_i}{\partial \dot{q}^j} + \frac{\partial L_j}{\partial \dot{q}^i} + 2\frac{d L_{ij}}{dt} + \frac{\partial f^k}{\partial \dot{q}^j} L_{ik} + \frac{\partial f^k}{\partial \dot{q}^i} L_{jk} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L_i}{\partial \dot{q}^j} - \frac{\partial L_j}{\partial \dot{q}^i}\right) - 2\left(\frac{\partial L_i}{\partial q^j} - \frac{\partial L_j}{\partial q^i}\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial f^k}{\partial \dot{q}^i}\left(\frac{\partial L_j}{\partial \dot{q}^k} + \frac{\partial L_k}{\partial \dot{q}^j}\right)$$

$$-\frac{1}{2}\frac{\partial f^k}{\partial \dot{q}^j}\left(\frac{\partial L_i}{\partial \dot{q}^k} + \frac{\partial L_k}{\partial \dot{q}^i}\right) + L_{ik} G^k_j - L_{jk} G^k_i = 0$$

$$G^k_i \equiv \frac{d}{dt}\frac{\partial f^k}{\partial \dot{q}^i} - 2\frac{\partial f^k}{\partial q^i} - \frac{1}{2}\frac{\partial f^m}{\partial \dot{q}^i}\frac{\partial f^k}{\partial \dot{q}^m}$$

$$L_{ij} = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j}$$

BAJO LA SUPOSICIÓN DE QUE LAS DERIVADAS LAGRANGIANAS SON NULAS ES DECIR $L_k = 0$, LAS IDENTIDADES ANTERIORES SE REDUCEN A LOS SIGUIENTES SISTEMAS LINEALES EN LAS INCÓGNITAS L_{ij}:

$$\frac{\partial L_{ij}}{\partial \dot{q}^k} - \frac{\partial L_{ik}}{\partial \dot{q}^j} = 0$$

$$L_{ik} G^k_j - L_{jk} G^k_i = 0$$

$$\frac{d}{dt} L_{ij} + \frac{1}{2}\frac{\partial F^k}{\partial \dot{q}^j} L_{ik} + \frac{1}{2}\frac{\partial F^k}{\partial \dot{q}^i} L_{jk} = 0$$

$$L_{ij} - L_{ji} = 0$$

las cuales Douglas probó ser equivalentes al sistema original (I.2.9). A pesar de haber desarrollado estas ideas para el caso $n=2$ el análisis se convierte demasiado complicado al grado de que ningún investigador posterior a él continuó con esta línea de estudio. En esencia el método de Douglas es una extensión del método de Darboux al caso de sistemas bidimensionales.

CAPÍTULO II.

"El problema inverso en las formulaciones de primer orden".

En este capítulo se discutirán algunos de los trabajos más importantes realizados en formulaciones de primer orden, y al igual que en el capítulo anterior se hará hincapié en las ideas centrales de los tratamientos.

II.1.- PRINCIPALES ESTUDIOS DEL PROBLEMA INVERSO EN PRIMER ORDEN.

a).- BIRKHOFF G.

Parece ser que la primera persona que manejó la idea de tratamiento del problema inverso a sistemas reducidos a primer orden fué Birkhoff, en [11].

Fundamentalmente lo que muestra Birkhoff es que todo sistema transformado a primer orden es equivalente a un sistema proveniente de un principio variacional.

La idea central de su demostración fué la siguiente:

Primero considera para su análisis un sistema transformado a primer orden: $\frac{dx_i}{dt} = X_i\,(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, t)$ (II.1.1)

sus ecuaciones de variación son: $\frac{dy_i}{dt} = \frac{\partial X_i}{\partial x_j} y_j$ (II.1.2)

las cuales pueden ser formalmente integradas si la solución general $x_i = f_i\,(t, c_1, \ldots, c_n)$ está a la mano.

Llamando $y_i = k_1 \frac{\partial f_i}{\partial c_1} + \ldots + k_n \frac{\partial f_i}{\partial c_n}$ $i = 1, 2, \ldots n$ (II.1.3)

donde $k_1, \ldots k_n$ son constantes arbitrarias.

De manera análoga el sistema adjunto a las ecuaciones de variación: $\frac{dz_i}{dt} = \frac{\partial X_j}{\partial x_i} z_j$ (II.1.4)

puede ser integrada explícitamente tomando

$$\frac{\partial f_1}{\partial c_i} z_1 + \ldots + \frac{\partial f_n}{\partial c_i} z_n = k_i \qquad \text{(II.1.5)}$$

Por consiguiente el sistema (II.1.1) puede ser llamado equivalente al extendido del sistema dado (II.1.1), (II.1.4) del doble de variables $x_1, \ldots, x_n, z_1, \ldots, z_n$, donde la solución explícita de cualquiera de los sistemas (II.1.1) y (II.1.4) es hamiltoniano con las variables conjugadas x_i, z_i y con:

$$H = -x_j z_j,$$

como puede ser directamente verificado.

b).- Havas P.

Havas estudia el problema por primera vez en el contexto de los sistemas newtonianos en [16]. Ahí se reduce el problema de existencia de la representación lagrangiana, a el problema de encontrar formas autoadjuntas equivalentes (*).

No es hasta 1973 que en [17] maneja la idea de transformar el sistema a uno de primer orden, mostrando que cualquier conjunto de ecuaciones newtonianas con fuerzas arbitrarias dependientes de las velocidades es equivalente a un sistema de ecuaciones de primer orden, las cuales son derivables de un principio variacional.

c).- Vainberg M.

Vainberg en su libro "Variational methods for the study of non linear operators" trató el problema inverso por una metodología completamente diferente a las anteriores, utilizando una aproximación variacional para operadores no lineales en el caso de lagrangianos de primer orden.

d).- Santilli R.

Los estudios realizados por Santilli los podemos analizar de la siguiente forma:

Sus tres primeros artículos publicados en [9a, 9b, 9c], en esencia una expansión de los resultados ya obtenidos por Davis, a las teorías de campos clásicos utilizando el teorema inverso de Poincaré.

*Todo esto en segundo orden.

Por otra parte su contribución a sistemas Newtonianos en lo referente al problema inverso, lo desarrollo en su libro [8], en el cual demuestra los mismos resultados que en los artículos ya mencionados, con todo detalle para sistemas Newtonianos, utilizando las técnicas modernas del cálculo de formas diferenciales.

En otro de sus artículos [10] discute el tratamiento de la formulación de primer orden la cual se puede resumir como sigue:

Se considera un sistema Newtoniano:

$$[A_{ki}(t,q,\dot{q})\ddot{q}+B_k(t,q,\dot{q})]^{C^2,R}_{NSA}=0 \qquad (II.1.6)$$

el cual es de clase C^2 regular y no autoadjunto en una región R de las variables. Introduce una prescripción arbitraria para la caracterización de las nuevas variables y_k en la forma:

$$G_k(t,q,\dot{q},y)=\alpha_{ki}(t,q,y)\dot{q}^i+\beta^k(t,q,y)=0$$

las cuales son tales que admiten un único sistema de funciones implícitas en las velocidades, $\dot{q}^k=g^k(t,q,y)$.

La substitución de este último sistema en la ecuación (II.1.6) da origen al sistema de ecuaciones de primer orden:

$$\left[\begin{pmatrix}(h) & (h')\\ (h'') & (h''')\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_{ki}(t,q,y)\dot{q}^i+\beta_k(t,q,y)\\ \bar{\alpha}^i_k(t,q,y)\dot{y}_i+\bar{\beta}_k(t,q,y)\end{pmatrix}^{C^2,R}\right]^{C^2,R}=0,\ \det\begin{pmatrix}h & h'\\ h'' & h'''\end{pmatrix}\neq 0$$

$$\bar{\alpha}^i_k=A_{kj}\frac{\partial g^j}{\partial y_i},\ \bar{\beta}_k=A_{kj}\frac{\partial g^j}{\partial q^l}g^l+A_{ki}\frac{\partial g^i}{\partial t}+B_k(t,q,g)$$

llamando:

$$(C_{\mu\nu})=\begin{pmatrix}h & h'\\ h'' & h'''\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \bar{\alpha}\end{pmatrix}$$

$$(D_\mu)=\begin{pmatrix}h & h'\\ h'' & h'''\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\beta\\ \bar{\beta}\end{pmatrix},\ (q^\mu)=\begin{pmatrix}q^k\\ y^k\end{pmatrix}$$

tenemos:

$$C_{\mu\nu}(t,q)\dot{q}^\nu+D_\mu(t,q)=0 \qquad \mu=1,2,\dots,2n.$$

demuestra el siguiente teorema:

"Un sistema Newtoniano regular local siempre admite una representación analítica (*) en la vecindad de un punto regular de sus variables locales". (**)

Sin restarle valor a su trabajo Santilli ha hecho mucho más de lo que aquí pudo haberse mencionado como lo importante. Entre algunos índices de esto se encuentran en:

"Foundations of Theoretical Mechanics, Vol 2, generalization of the inverse problem in Newtonian Mechanics. Foundation of theoretical physics, vol III. The inverse problem in field theory. Hadronic journal (1978) 574, 1279, entre otros.

a) - Hojman - Urrutia.

En su trabajo [7] proporcionan una manera de construir un número infinito de Lagrangianos de primer orden, para cualquier sistema de ecuaciones diferenciales siempre y cuando las más altas derivadas puedan ser resueltas algebraicamente.

* Decimos que un sistema regular Newtoniano (al menos clase C_2) admite una representación analítica en el espacio de configuración en términos de las ecuaciones de Lagrange, cuando existen n^2 funciones $h^i_k(t, q, \dot q)$ con al menos que sean de clase C^2 y cuya matriz (h^i_k) es regular en R^{2n+1}, tal que las ecuaciones de Lagrange coinciden con las ecuaciones de movimiento hasta una transformación de equivalencia inducida por la matriz (h^i_k) es decir:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q^k} - \frac{\partial L}{\partial q^k} = h^i_k\,(A_{ij}\,\ddot q^j + B_i) \qquad k = 1, 2, \ldots n$$

$$h^i_k \in C^2 (R^{2n+1}) \quad ; \quad (h^i_k)(R^{2n+1}) \neq 0$$

** Para el lector interesado puede verse la demostración en [10]

Sea $F_i(\ddot{q}^n, \dot{q}^n, q^n, t) = 0$ $\qquad i, n = 1, 2, \ldots, n$ $\qquad$ (II.1.8)

nuestro sistema de ecuaciones por la hipotesis es equivalente a:

$$\ddot{q}^s = f^s(\dot{q}^n, q^n, t) \qquad s = 1, 2, \ldots, n$$

por lo que redefiniendo:

$$\dot{q}^l = q^{n+l} \quad - \quad l = 1, 2, \ldots, n \qquad (\text{II}.1.9)$$

se tendrá un sistema equivalente a (II.1.8) definido por (II.1.9)

y $\qquad \dot{q}^a = f^a(q^b t)$ $\qquad a = n+1, n+2, \ldots, n$ $\qquad$ (II.1.9)

$b = 1, 2, \ldots, 2n$

Si lo que deseamos es encontrar Lagrangianos L que nos proporcionen sistemas equivalentes a (II.1.9) es necesario que:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^a \partial \dot{q}^b} \equiv 0 \quad \forall (t, q^a) \quad \therefore \quad L = f_a(q^b, t)\, \dot{q}^a + f_o(q^b, t) \qquad (\text{II}.1.10)$$

por lo que sus ecuaciones de Euler serán:

$$\left(\frac{\partial f_a}{\partial q^b} - \frac{\partial f_b}{\partial q^a}\right) \dot{q}^a = \frac{\partial f_o}{\partial q^b} - \frac{\partial f_b}{\partial t} \qquad (\text{II}.1.11)$$

Al requerir la equivalencia con (II.1.9) se tendrá

que $\qquad \det.\left(\frac{\partial f_a}{\partial q^b} - \frac{\partial f_b}{\partial q^a}\right) \neq 0 \qquad$ (II.1.12)

Las ideas básicas de la construcción son:

1).- Se mapea la solución general al sistema original en el espacio definido por las coordenadas originales, velocidad y el tiempo (*). Se ve que en este espacio la solución queda definida por la dirección de su vector tangente en cada punto.

2).- La posible existencia de un conjunto suficiente de constantes de movimiento (**) relacionadas al sistema

* Esto para el caso en que se vaya iniciando el tratamiento sobre un sistema de 2° orden.

** Esta selección de constantes de movimiento puede hacerse de un número infinito de formas diferentes.

SIN EMBARGO LA CONSTRUCCIÓN EXPLÍCITA PUEDE SER SOLAMENTE LLEVADA A CABO CUANDO TODAS LAS CONSTANTES DE MOVIMIENTO FUNCIONALMENTE INDEPENDIENTES, ES DECIR DET. $\frac{\partial c^a}{\partial x^b} \neq 0$, SON CONOCIDAS.

EL SISTEMA (II.1.9) POSEE 2n FUNCIONES INDEPENDIENTES c^a, LAS CUALES DEPENDEN DE LAS COORDENADAS x^b Y CORRESPONDEN A LOS VALORES INICIALES $x^b(t_o)$ LOS CUALES ESPECIFICAN LAS CURVAS PARA UNA DINÁMICA DADA.

CAPITULO III.

"Los sistemas singulares".

En este capítulo se desarrollará un tratamiento explícito sobre los sistemas singulares, para poder aplicar el mismo tipo de criterio de construcción de un número infinito de invariantes o equivalentes desarrollado en [7].

III.1.- INTRODUCCIÓN:

Una de las principales razones que nos conducen al estudio del problema inverso, para los sistemas singulares, es la gran importancia que toman estos sistemas dentro de las teorías de campo.

Se sabe [18] que en las teorías de campo los sistemas singulares se manifiestan como sistemas con invariancia de norma dentro de las cuatro interacciones fundamentales conocidas en la naturaleza:

1.- Fuerte.
2.- Electromagnética.
3.- Débil.
4.- Gravitacional.

Son conocidas como teorías invariantes de norma a:

i).- Electromagnetismo, conocido como teoría de norma del grupo $U(1)$.

ii).- Relatividad general, considerada como un caso especial de la teoría de norma del grupo de Poincaré

iii).- Unificación de interacciones débiles y electromagnéticas, conocidas como teoría de Salam-Weinberg del grupo de norma $SU(2) \times U(1)$.

iv).- Unificación de interacciones fuertes, electromagnéticas, débiles y además de las gravitacionales respectivamente mejor conocidas como teorías de Yang-Mills o de grupos no abelianos. (*)

*Los trabajos están basados en distintos grupos de Lie, pero hasta la fecha no se han obtenido resultados del todo satisfact.

v).- Unificación de todas las interacciones, conducción como supersimetría y supergravedad donde la teoría de norma basada en estas transformaciones es la supersimetría (*).

Se pueden resumir las características generales de las teorías invariantes de norma, como las siguientes:

i).- El número de variables utilizadas por las teorías de norma es mayor que el estrictamente necesario, por lo que origina la existencia de variables sin relevancia física, cuyos valores son arbitrarios.

ii).- Las ecuaciones de campo no son independientes, es decir, existen identidades que las ligan, por lo que no es posible determinar a todas las variables siendo algunas arbitrarias.

iii).- Algunas de las ecuaciones de movimiento no son dinámicas, ya que no contienen las segundas derivadas con respecto al tiempo de ninguna variable, es decir, que constituyen constricciones sobre los valores iniciales de las variables.

iv).- Las segundas derivadas con respecto al tiempo, de algunas de las variables no aparecen en ninguna de las ecuaciones de movimiento. Siendo precisamente estas características de las teorías de norma que las hacen teorías más complejas que las otras.

No obstante la fuerte motivación que nos proporciona[n] las teorías de norma dentro de los sistemas singulares, nues-tra [illegible] lo restringiremos a sistemas singulares con [illegible] de grados de libertad (**).

[illegible]s teorías han tenido éxitos teóricos pero aún no [illegible]ados experimentalmente.

* Esta elección es debida a la gran compleji-

dad que presenta el tratamiento al pasar a un espacio funcional.

III.2- TRATAMIENTO DE LOS SISTEMAS SINGULARES.

Como se mencionó en la introducción la idea central para la extensión del problema inverso a sistemas singulares va a ser la de separar las variables redundantes de las dinámicas: En primer término se localizan todas las variables de constricción mediante un proceso iterativo como el desarrollado por Sudarshan-Mukunda en [4] con la novedad de que el tratamiento se hace en sistemas de primer orden y sin la necesidad de pensar en la existencia del Lagrangiano.

En la segunda parte se desarrolla el vector velocidad $\dot{x}^\mu$ en una combinación lineal de vectores básicos en dos subespacios, el rango de M y el kernel de M, donde por la naturaleza de los elementos del kernel de M los coeficientes de los vectores básicos de este kernel de M en el desarrollo de $\dot{x}$ son funciones arbitrarias de x y t. Posteriormente identificándose a las variables dinámicas reales (T.D.D.F) como las variables representadas en el nuevo cambio de coordenadas por las constantes de movimiento y a las variables dependientes de norma con las funciones arbitrarias.

Para el desarrollo del tratamiento se toma como sistema singular a un sistema de ecuaciones diferenciales, de segundo orden cuasilineal con n variables, es decir, (*)

$$M_{ab}(\dot{x},x,t)\ddot{x}^b+B_a(\dot{x},x,t)=0 \qquad a,b=1,2,\dots,n \quad (III.2.1)$$

donde x_i pertenece a R^n con det. $M=0$.

Lo primero que nos conviene hacer es transfor-

* Se consideró de segundo orden por la analogía

EXISTENTE CON LAS ECUACIONES DE MOVIMIENTO DE UN SISTEMA FÍSICO, HACIENDO NOTAR, QUE CON ESTO, NO SE PIERDE GENERALIDAD EN EL TRATAMIENTO YA QUE LOS PASOS QUE SE SEGUIRÁN SON EXACTAMENTE LOS MISMOS PARA SISTEMAS DE ORDEN $>2, <\infty$.

LLEVAR (III.2.1) A UN SISTEMA DE PRIMER ORDEN, PARA ESTO DEFINIMOS A $x_2 \equiv \dot{x}_1$ LO CUAL PODEMOS EXPRESAR COMO:

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & M \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -x_2 \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

DONDE $M = M(x_2, x_1, t)$ (III.2.2)
$B = B(x_2, x_1, t)$

LLAMANDO $\mathcal{M} \equiv \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & M \end{pmatrix}$ Y $\mathcal{B} \equiv \begin{pmatrix} -x_2 \\ B \end{pmatrix}$

TENEMOS QUE (III.2.2) SE CONVIERTE EN:

$$\mathcal{M}(x_2, x_1, t)\dot{x} + \mathcal{B}(x_2, x_1, t) = 0 \qquad \text{(III.2.3)}$$

NOTANDO QUE $\det \mathcal{M} = \det M = 0$

ES DECIR, TENEMOS UN SISTEMA SINGULAR DE PRIMER ORDEN DONDE RANG. DE $\mathcal{M} = n +$ RANG. $M = n + m$, $m = n - K$, EL HECHO DE QUE $0 < m < n$ SE SABE QUE IMPLICA LA EXISTENCIA DE K EIGENVECTORES NULOS, TANTO POR LA DERECHA COMO POR LA IZQUIERDA. (NO NECESARIAMENTE IGUALES), ES DECIR, LLAMANDO $\{\eta_\alpha(x_i, t)\}_{\alpha=1}^{K}$ AL CONJUNTO DE EIGENVECTORES NULOS POR LA IZQUIERDA DE $\mathcal{M} \Rightarrow$

$$\eta^a_\alpha \{\mathcal{M}_{ab}\dot{x}^b + \mathcal{B}_a\} = 0 \Rightarrow \eta^a_\alpha(x_i, t)\mathcal{B}_a(x_i, t) = 0 \quad \alpha = 1, 2, \ldots, n \qquad \text{(III.2.4)}$$

DENOMINANDO A (III.2.4) POR:

$$\gamma^{(1)}_a(x_i, t) = 0 \qquad \text{(III.2.5)}$$

LAS CUALES EN EL LENGUAJE DE [4] SON CONSTRICCIONES DEL TIPO A (*).

SE SABE QUE (III.2.5) PUEDE DAR ORIGEN A:

i).- IDENTIDADES.

* EN EL TRATAMIENTO DEL PRIMER ORDEN NO HAY POSIBILIDAD DE EXISTENCIA DE CONSTRICCIONES DEL TIPO B, ES DECIR, $\gamma^{(2)}_\alpha(\dot{x}_i, x_i, t) = 0$

ii).- Inconsistencias. (*)

iii).- Ecuaciones funcionalmente dependientes. (**)

iv).- Ecuaciones funcionalmente independientes.

Siguiendo la metodología propuesta por [4] para separar las variables de constricción tendremos:

1).- Llamando k_1 al número de ecuaciones (III.2.5) del tipo iv), es decir $\gamma'_\alpha(x_i,t)=0$; $\alpha = 1,2,\dots,k_1$ funcionalmente independientes. Estas constricciones definen a una subvariedad V_1, $2n-k_1$ dimensional donde el sistema evolucionará. Al calcular de nuevo el rango de M en la restricción a V_1, podría suceder que el rango de M disminuyese, lo cual implicaría la existencia de más eigenvectores nulos linealmente independientes. Esto a su vez puede dar origen a más constricciones funcionalmente independientes, con lo que el movimiento llegaría a desarrollarse en una subvariedad de dimensión menor V_1. Continuando con este proceso, iterativamente hasta que se llegue a una situación en la que ya no se pueda generar más eigenvectores nulos de M. Llamando a V_2 a la subvariedad de dimensión $(2n-k_2)$ obtenida finalmente por la iteración y definida por las k_2 constricciones funcionalmente independientes.

2).- Se examina si las derivadas temporales de las k_2 constricciones encontradas en el inciso 1 son(+) independientes de las ecuaciones originales (III.2.3). Tomando aquellas ecu.

* Estas no se consideran como casos posibles dentro del tratamiento, ya que no es deseable en las teorías físicas.

** Las cuales pueden ser llevadas al caso i).

\+ Al menos algunas de ellas.

ciones independientes en consideración, se tendrá un sistema aumentado en un número mayor de ecuaciones linealmente independientes. Este nuevo conjunto puede a su vez generar más constricciones funcionalmente independientes, por lo que tenemos que hacer todo el proceso 1) de nuevo hasta no poder generar más eigenvectores nulos, posteriormente se derivan las encontradas adicionalmente y así se continúa la operación hasta agotar todas las constricciones y obtener el mayor número de ecuaciones independientes de las derivadas temporales de las constricciones (*), tendremos finalmente:

a).- El sistema de ecuaciones extendido será:

$$M_{ab}\dot{x}^b + \beta_a = 0 \qquad a = 1,2,\ldots,2n+\rho.$$

donde:

$$M_{ij} = \frac{\partial \gamma_i^{(1)}}{\partial x^j} \qquad \begin{array}{l} b = 1,2,\ldots,2n \\ i = 1,2,\ldots,k_3 \\ j = 1,2,\ldots,2n \end{array} \qquad (\text{III}.2.7)$$

3).- Se hace un cambio de coordenadas de $x \longmapsto y(x)$ tal que $y^i = \gamma^{(1)i}(x_i, t)$ para $i = 1,2,\ldots,k_3$ lo cual en (III.2.7) se transforma en:

$$M_{ab}(x_i(y), t)\left(\frac{\partial x^b}{\partial y^c}\dot{y}^c\right) + \beta_a(x_i(y), t) = 0$$

definiendo $M' = M\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)$

al intentar la validez de las ecuaciones de movimiento implicará $\dot{y}^i = 0$ $i = 1,2,\ldots,k_3$, el rango de M' = rango M.

Tendremos finalmente a nuestro sistema como:

$$M'_{ab}\dot{y}^b + \beta'_a = 0 \quad \text{donde } \beta' = \beta \qquad \begin{array}{l} a = 1,2,\ldots,2n+\rho \\ b = 1,2,\ldots,2n-k_3 \end{array} \qquad (\text{III}.2.8)$$

* Para un sistema con un número finito de grados de libertad este proceso iterativo finalizará después de un número finito de pasos.

En este momento se tiene identificado a todas las posibles variables de constricción de nuestro sistema $y^i = y^{(a)i}$ donde la ecuación obvio de proponer para esta parte de constricción es: $\tilde{\ell} = \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{k_3} (y^\alpha)^2$ (III.2.8) donde sus ecuaciones de E-L son:

$$\frac{\partial \tilde{\ell}}{\partial y^\alpha} = y^\alpha \qquad \therefore \quad \Rightarrow y^\alpha = 0 \quad \alpha = 1, 2, \ldots, k_3$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \tilde{\ell}}{\partial \dot{y}^\alpha} = 0$$

(resultado conocido de antemano).

Con esto hemos logrado concluir la primera etapa del tratamiento, sin embargo, como se pudo notar, no necesariamente se ha acotado con todas las variables redundantes por lo que variando el al número de variables redundantes que restan en la descripción de nuestro sistema dentro de la subvariedad V_3.

Por lo que se puede asegurar la existencia de 6 eigenvectores nulos por la derecha de M', es decir, $M'\eta_\alpha = 0$; $\eta_\alpha \in \mathbb{R}^{2n-k_3}$; $(\alpha = 1, \ldots, 6)$ los cuales forman una base para el kernel de M'.

En este momento podemos pensar a $\dot{y}$, que se puede generar por el kernel de M' y el rango de M' es decir rango M' $\oplus$ kern $M' = \mathbb{R}^{2n-k_3}$ $\Rightarrow \dot{y} = f \oplus g$ donde $f \in$ rango M'; $g \in$ kern M usando $\{\eta_\alpha\}_{\alpha=1}^{6}$ base de kern M $\}$ (III.2.9)

y $\{f_b\}_{b=1}^{(2n-k_3)-6}$ base de rang M'

las cuales se encuentran perfectamente determinados (III.2.9) por:

$$M'_{ab}\,\eta^b_\alpha = 0$$

y (III.2.9) por:

$$\dot{y}^a = \rho^\beta f^a_\beta + u^\alpha \eta^a_\alpha \qquad \text{(III.2.10)}$$

SUBSTITUYENDO EN (III.2.8):

$$\Rightarrow \mu'_{ab}\left(P^{\beta} f^{b}_{\beta} + u^{\alpha}\eta^{b}_{\alpha}\right) + \beta'_{a} = 0$$

$$\Rightarrow \mu'_{ab}\, p^{\beta} f^{b}_{\beta} + \beta_{a} = 0$$

COMO, LA RESTRINGIMOS A QUE μ', AHÍ μ' ES NO SINGULAR

$$\Rightarrow p^{\beta} f^{b}_{\beta} = (\mu'_{ab})^{-1}\beta'_{a}$$

DE DONDE SE TIENE DETERMINADO A $\{f_{\beta}\}$.

UNA VEZ QUE TENEMOS EL SISTEMA DESCRITO POR:

$$\dot{y} = pf + u\eta \qquad \text{(III.2.11)} \qquad \alpha = 1,2,\dots,G$$

DONDE $g^{k} = u^{\alpha}\eta^{k}_{\alpha}$ Y $f^{k} = p^{\beta} f^{k}_{\beta}$ $\qquad \beta = 1,2,\dots,(2n-ks)-G$

$k = 1,2,\dots,2n-ks$

Y $u^{\alpha} = u^{\alpha}(y,t)$ FUNCIONES ARBITRARIAS, g SOLUCIÓN GENERAL DE LA ECUACIÓN HOMOGÉNEA $\mu'\dot{y} = 0$ Y f ES UNA SOLUCIÓN PARTICULAR DE LA ECUACIÓN HOMOGÉNEA.

ES VÁLIDO PREOCUPARSE QUE CONDICIONES SON NECESARIAS DE CUMPLIR SI CONSIDERAMOS UNA BASE DE CONSTANTES DE MOVIMIENTO $\{c^{a}\}_{a=1}^{(2n-ks)-G}$ Y VEREMOS QUE:

$$\frac{\partial c^{(a)}}{\partial y^{\mu}}\dot{y}^{\mu} = \frac{\partial c^{(a)}}{\partial y^{\mu}}\left(p^{\beta} f^{\mu}_{\beta} + u^{\alpha}\eta^{\mu}_{\alpha}\right)$$

$$\|$$

$$\frac{\partial c^{(a)}}{\partial y^{\mu}}\frac{\partial x^{\mu}}{\partial z} = \frac{\partial c^{(a)}}{\partial z} = 0$$

COMO u^{α} SON ARBITRARIAS $\Rightarrow$

QUE, SEA NECESARIO:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial c^{a}}{\partial y^{\mu}} f^{\mu}_{\beta} &= 0 \\ \frac{\partial c^{a}}{\partial y^{\mu}} \eta^{\mu}_{\alpha} &= 0 \end{aligned}\right\} \text{(III.2.12)}$$

Este sistema no necesariamente va a ser siempre compatible(*), por ende no siempre el conjunto seleccionado de c^a's funcionalmente independientes nos servirán para aplicar la metodología de [7]. Después de haber señalado esto podemos notar que toda la parte arbitraria de nuestro sistema original ha quedado relegada al kernel de M', por ser precisamente las funciones arbitrarias los coeficientes de los vectores que generan al kernel M'. Por otro lado lo correspondiente a lo dinámico del problema se encuentra en el rango de M'. Esto nos induce a proponer como nuevas coordenadas al conjunto c^a's como portadoras absolutas de (T.D.D.F) y a las U's como las coordenadas dependientes de norma.

Con esto se ha logrado hacer la identificación propuesta al inicio del tratamiento.

Finalmente se generarán los lagrangianos del sistema (III.2.11) por el criterio propuesto en [7], con lo que tendremos: $\tilde{L} = l_{(a)}(c^b)\,\dot{c}^a \qquad a,b = 0,1,\ldots,2n-k_3-9$

Un caso particular y de interés para nosotros es cuando $\tilde{L} = \dot{c}_1 c_2 + \dot{c}_3 c_4 + \dot{c}_5 c_6 + \ldots$ (III.2.14)

Si el número de constantes c's es impar se tomará una constante arbitraria más, esta idea de agregar esta constante que no tiene relación con el problema fue sugerida por Hojman en [7].

*Otras condiciones aparentemente diferentes a (III.2.12) fueron expuestas recientemente por Hirschon en [25] al demostrar la invertibilidad de las operaciones de sistemas como los aquí trabajados. Estas ideas se darán con mayor detalle en las conclusiones.

RESUMIENDO NUESTROS RESULTADOS LOS LAGRANGIANOS S-EQUIVALENTES MAS GENERALES ESTAN DADOS POR

$$\tilde{\tilde{\ell}} = \tilde{\ell} + \hat{\ell} + \frac{d\Lambda}{dt} = \ell_a(c)\,\dot{c}^a + \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{k-3}(y^\alpha)^2 + \frac{d\Lambda}{dt} \qquad (\text{III},2,15)$$

CON $\tilde{\ell}$ PARTICULAR (III.2.14) TENDREMOS:

$$\tilde{\tilde{\ell}} = \dot{c}_1 c_2 + \dots + \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{k-3}(y^\alpha)^2 + \frac{d\Lambda}{dt} \qquad (\text{III},2,16)$$

EN ESTE MOMENTO NO NOS RESTA MAS QUE APLICAR ESTA METODOLOGIA LO CUAL SE HARA EN EL SIGUIENTE CAPITULO.

CAPITULO IV.

Aplicaciones y Ejemplos.

• En este capítulo daremos algunos de los ejemplos prometidos en la introducción del capítulo anterior y desarrollaremos dos sistemas en los cuales uno de ellos posee solamente constricciones y el otro únicamente variables dependientes de norma.

IV.1 Ejemplos de Motivación.

Es valioso mencionar la importancia que juegan los sistemas singulares al ser analizados desde el punto de vista de las matemáticas aplicadas, como un caso particular de sistemas de ecuaciones diferenciales. Los estudios realizados desde esta perspectiva han sido altamente fructíferos, sin embargo, no han sido lo suficientemente generales ya que sus tratamientos estan restringidos a sistemas singulares $M\ddot{x}+B=0$, donde M y B poseen entradas dependiendo solamente de t, para mayores detalles vease [26].

Como se menciono en la introducción del capítulo anterior los sistemas singulares juegan un papel de gran relevancia en las teorías de norma; Veamos explícitamente ésto, en algunos ejemplos:

i) Electromagnetismo: Partiendo de las ecuaciones de Maxwell en la forma tensorial, es decir,

$$\partial_\mu \partial^\mu A^\nu(x) - \partial^\nu \partial_\mu A^\mu(x) = 0$$

$$\leftrightarrow (\partial_0\partial^0 + \partial_i\partial^i) A^\nu - \partial^\nu(\partial_0 A^0 + \partial_i A^i) = 0$$

notando que para $\nu=0$

$$(\cancel{\partial_0\partial^0} + \partial_i\partial^i) A^0 - \partial^0(\cancel{\partial_0 A^0} + \partial_i A^i) = 0$$

$$\rightarrow \partial_i\partial^i A^0 - \partial^0\partial_i A^i = 0$$

lo cual representa una ecuación de constricción.

De manera analoga analizando para las diferentes j's $(j=1,2,3)$ tenemos:

$$j=1 \rightarrow (\partial_0\partial^0 + \partial_i\partial^i) A^1 - \partial^1(\partial_0 A^0 + \partial_i A^i) = 0$$

$$j=2 \rightarrow (\partial_0\partial^0 + \partial_i\partial^i) A^2 - \partial^2(\partial_0 A^0 + \partial_i A^i) = 0$$

$$j=3 \rightarrow (\partial_0\partial^0 + \partial_i\partial^i) A^3 - \partial^3(\partial_0 A^0 + \partial_i A^i) = 0$$

lo cual podemos escribir en forma matricial como:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \ddot{A}^0 \\ \ddot{A}^1 \\ \ddot{A}^2 \\ \ddot{A}^3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \partial_i \partial^i A^0 - \partial^0 \partial_i A^i \\ \partial_i \partial^i A^1 - \partial^1 \partial_0 A^0 - \partial^1 \partial_i A^i \\ \partial_i \partial^i A^2 - \partial^2 \partial_0 A^0 - \partial^2 \partial_i A^i \\ \partial_i \partial^i A^3 - \partial^3 \partial_0 A^0 - \partial^3 \partial_i A^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

el cual claramente es un sistema singular de la forma $M_{ab}\ddot{A}^b + B_a = 0$.

Con esto queda asentado que el sistema de ecuaciones que representan las ecuaciones de Maxwell es un sistema singular como los analizados en el tratamiento del capítulo tres, con la diferencia de que existen un número infinito de grados de libertad, es decir, el subindice de la variable dinámica es continuo $(A_x(t))$.

Cabe mencionar que Hojman en [6] hizo la separación de las variables realmente dinámicas (*) de las dependientes de norma para el caso electromagnético utilizando una metodología completamente diferente a la utilizada en este trabajo.

ii) Teorías de Yang-Mills:

A continuación se verá que para el caso de los potenciales de Y.-M., A^a_μ (donde las a's se suben y bajan con la métrica del grupo y los índices μ con la métrica del espacio de Minkowski), se pueden llevar a un sistema singular similar al caso i).

* Llamadas por él "true dynamical degrees of freedom (TDDF).

electromagnético, con la salvedad presenta mas términos.

Partiendo de las ecuaciones de Y.-M.:

$F^{\mu\nu}_{a\,;\nu} = C^{b}_{ac} F^{\mu\nu}_{b} A^{c}_{\nu}$ (*) (IV.1.6)

donde $F^{\mu\nu}_{a} = \partial^{\mu} A^{\nu}_{a} - \partial^{\nu} A^{\mu}_{a} - C^{bc}_{a} A^{\mu}_{b} A^{\nu}_{c}$ (intensidad de campo) ∴ (IV.1.6) se convierte en $\partial_{\nu}\partial^{\mu} A^{\nu}_{a} - \partial_{\nu}\partial^{\nu} A^{\mu}_{a} = C^{b}_{ac} F^{\mu\nu}_{b} A^{c}_{\nu} + (C^{bc}_{a} A^{\mu}_{b} A^{\nu}_{c})_{,\nu}$ (IV.1.7)

de donde podemos notar que la única parte donde aparecen segundas derivadas temporales es en el primer miembro de (IV.1.7). Notando que este miembro tiene la misma forma que las ecuaciones de Maxwell, por lo que razonando de la misma forma que en el caso anterior tendremos:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{A}^{0}_{a} \\ \ddot{A}^{1}_{a} \\ \ddot{A}^{2}_{a} \\ \ddot{A}^{3}_{a} \end{pmatrix} + B(A^{\nu}_{a}, \partial_{\mu} A^{\nu}, x, t) = 0$$

es decir, el caso de Y.M. también se tiene un sistema singular de la forma $M_{\mu\nu} \ddot{A}^{\nu}_{a} + B_{\mu} = 0$. (IV.1.8)

iii) Tanto el caso de relatividad general como el de supergravedad se puede llevar a sistemas singulares como los de (IV.1.8) por análisis semejantes a los anteriores, con la diferencia de que ahora la matriz singular será de mayor orden y los términos que aparecerán en las entradas de B presentarán mayor complicación.

* C^{b}_{ac} representa la constante de estructura del grupo de Lie, es fácil ver de los axiomas de las álgebras de Lie que $C^{b}_{ac} = -C^{b}_{ca}$ y $C^{a}_{be} C^{e}_{cd} + C^{a}_{ce} C^{e}_{db} + C^{a}_{de} C^{e}_{bc} = 0$ (Identidad de Jacobi)

IV. 2. "Aplicación".

a) Partícula libre relativista:

Las ecuaciones de movimiento que describen a la partícula libre relativista se presentan de una manera natural como un ejemplo en la mecánica clásica de un sistema singular donde las variables redundantes se manifiestan en forma de variables dependientes de norma.

Siguiendo el tratamiento propuesto y utilizando hechos conocidos de este ejemplo en particular nosotros sabemos que uno de sus lagrangianos de segundo orden es:

$$L = M_0 (\dot{X}_\alpha \dot{X}^\alpha)^{1/2} \quad \text{donde} \quad \alpha = 0,1,2,3 \ldots (IV.2.1)$$

se tomara, sin perder generalidad, $M_0 = 1$, de donde tenemos que sus ecuaciones de movimiento (*) son:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{X}_\mu}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{X}_\mu}{(\dot{X}_\alpha \dot{X}^\alpha)^{1/2}}\right) = \left(\frac{g_{\mu\nu}}{(\dot{X}_\alpha \dot{X}^\alpha)^{1/2}} - \frac{\dot{X}_\mu \dot{X}_\nu}{(\dot{X}_\alpha \dot{X}^\alpha)^{3/2}}\right)\ddot{X}^\nu$$

$$\frac{\partial L}{\partial X_\mu} = 0 \quad \therefore \left(\frac{g_{\mu\nu}}{(\dot{X}_\alpha \dot{X}^\alpha)^{1/2}} - \frac{\dot{X}_\mu \dot{X}_\nu}{(\dot{X}_\alpha \dot{X}^\alpha)^{3/2}}\right)\ddot{X}^\nu = 0 \ldots (IV.2.2)$$

llamando a:

$$\left(\frac{g_{\mu\nu}}{(\dot{X}_\alpha \dot{X}^\alpha)^{1/2}} - \frac{\dot{X}_\mu \dot{X}_\nu}{(\dot{X}_\alpha \dot{X}^\alpha)^{3/2}}\right) \equiv M_{\mu\nu} \quad (IV.2.3)$$

nótese que por la construcción de M, es un proyector en la dirección $\perp \dot{X}_\mu$, por lo que: det. M = 0 (**)

* Lo cual es lo valioso en este tratamiento.

** ya que $M_{\mu\nu}\dot{X}^\mu = \left(\frac{g_{\mu\nu}}{(\dot{X}_\alpha \dot{X}^\alpha)^{1/2}} - \frac{\dot{X}_\mu \dot{X}_\nu}{(\dot{X}_\alpha \dot{X}^\alpha)^{3/2}}\right)\dot{X}^\mu =$

$$= \left(\frac{\dot{X}_\nu}{(\dot{X}_\alpha \dot{X}^\alpha)^{1/2}} - \frac{\cancel{(\dot{X}_\mu \dot{X}^\mu)}\,\dot{X}_\nu}{\cancel{(\dot{X}_\alpha \dot{X}^\alpha)}^{3/2}}\right) = 0$$

Como primer paso transformemos al sistema (IV.2.2) a uno de primer orden por el cambio:

$$\dot{x}^{\mu} = x^{\mu+4} \quad \text{donde} \quad \mu = 0,1,2,\ldots$$

Esto implica que nuestro sistema de primer orden quedará representado por:

$$M\dot{X} + B = 0 \qquad \text{donde} \qquad M = \begin{pmatrix} \varepsilon_{4\times4} & 0 \\ 0 & M \end{pmatrix} \quad \ldots\ldots \quad \text{(IV.2.4)}$$

$$\beta = \begin{pmatrix} -x^4 \\ -x^5 \\ -x^6 \\ -x^7 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad\qquad \dot{X} = \begin{pmatrix} \dot{x}^0 \\ \dot{x}^1 \\ \dot{x}^2 \\ \dot{x}^3 \\ \dot{x}^4 \\ \dot{x}^5 \\ \dot{x}^6 \\ \dot{x}^7 \end{pmatrix}$$

Donde su único eigenvector nulo η_1 viene dado por:

$$\eta^{\bar{\mu}}_{(1)} = (0,0,0,0,x^4,x^5,x^6,x^7)$$

por lo que $\quad \eta^{\bar{a}}_{(1)} \{ M_{\bar{a}\bar{b}}\, \dot{x}^{\bar{b}} + \beta_{\bar{a}} \} = 0 \qquad (\bar{a}, \bar{b} = 0,1,\ldots,7)$

implica $\quad \eta^{\bar{a}}_{(1)} \beta_{\bar{a}} = 0 \equiv 0 \qquad$ ¡es una identidad!

Lo cual nos indica que en este sistema no hay variables de constricción, tomando como nuestra colección de constantes de movimiento a las condiciones iniciales de las soluciones al sistema (IV.2.4), es decir $x_0^{\mu} = x^{\mu} - P^{\mu}_{(a)}\, u(t)$ $\mu = 0,1,2,3$; y a todos los momentos que poseen el sistema (de los cuales sólo hay 3 funcionalmente independientes debido a la constricción $P_\mu P^\mu = -M_0^2$), sin perder generalidad por la alta simetría de las P^μ podemos tomar a P_1, P_2, P_3 como los funcionalmente independientes. Además por tratarse de un número impar de constantes de movimiento tomaremos la constante arbitraria como se mencionó en el capítulo III.

Resumiendo nuestras constantes serán:

$$c^1 = x_0^0(x^\mu, t)$$
$$c^2 = x_0^1(x^\mu, t) \qquad (\text{IV}.2.7)$$
$$c^3 = x_0^2(x^\mu, t)$$
$$c^4 = x_0^3(x^\mu, t)$$
$$c^5 = \frac{x^5}{(x_a x^a)^{1/2}} \qquad a = 5, 6, 7 \text{ y } 4.$$
$$c^6 = \frac{x^6}{(x_a x^a)^{1/2}} \qquad \mu = 0, 1, 2, 3$$
$$c^7 = \frac{x^7}{(x_a x^a)^{1/2}}$$
$$c^8 = \text{arbitraria}.$$

Se podría ver por dos diferentes formas que este conjunto de constantes de movimiento es un conjunto funcionalmente independiente. La primera de ellas sería notando que:

$$\frac{\partial}{\partial x^\ell}\left(\frac{x^k}{(x_a x^a)^{1/2}}\right) = \left(\frac{g_{k\,l+4}}{(x_a x^a)^{1/2}} - \frac{x_k x_{\ell+4}}{(x_a x^a)^{3/2}}\right)$$

y que: $\dfrac{\partial x_0^\nu}{\partial x^\mu} = \delta^\mu_\nu$ donde:

$$k = 4, 5, 6$$
$$\ell = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 \qquad (\text{IV}.2.6)$$
$$\mu = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$$

de donde por un cálculo directo (el cual es sumamente engorroso) del det. $\left(\dfrac{\partial c^a}{\partial x^b}\right)$ se ve que $\neq 0$. La otra forma sería expresando a los momentos en función de coordenadas superextendidas, lo cual origina la evidente independencia entre las diferentes P's, y consecuentemente el det. $\left(\dfrac{\partial c^a}{\partial x^b}\right)$ es $\neq 0$ entonces lo único que restaría verificar es de que el sistema (III.2.12) sea compatible.

Pero esto es inmediato ya que de (IV.2.5) $\dot{x}^\mu = P^\mu(0)\,\dot{u}\,t = x^{\mu+4}_{(0)}\left(\dfrac{\dot{u}(t)}{(x_a(0)x^a)^{1/2}}\right)$ $= \eta^{\mu+4}\,\tilde{u}(t)$ donde podemos reconocer al generador nulo η, del sistema y a su función arbitraria $\tilde{u}(t)$. De donde podemos concluir que $f^\mu \equiv 0$ y que además como $\eta^\mu \dfrac{\partial c^{k+4}}{\partial x^\mu} = \dot{x}^\mu(M_{\mu\,k+4}) = 0$ $\therefore$ el sistema (III.2.12) es compatible.

Por lo que siguiendo con la metodología tenemos que de la ecuación (III.2.16):

$$\tilde{\tilde{L}} = (\dot{x}^0 - P^0(0)\,\dot{u}(t))(x^1 - P^1(0)\,u(t)) + (\dot{x}^2 - P^2(0)\,\dot{u}(t))(x^3 - P^3(0)\,u(t))$$

$$+\left(\frac{g^{q\,l+4}}{(x_{a+4}\,x^{a+4})} - \frac{x^q\,x^{p+4}}{(x_{a+4}\,x^{a+4})}\right)\dot{x}_{l+4}\left(\frac{x^5}{(x_{a+4}\,x^{a+4})^{1/2}}\right) + \left(\frac{g^{6\,l+4}}{(x_{a+4}\,x^{a+4})^{1/2}} - \frac{x^6\,x^{l+4}}{(x_{a+4}\,x^{a+4})^{3/2}}\right)$$

$$\dot{x}_{l+4}\, c^8 + \frac{d\Lambda}{dt} \qquad \text{(III.2.7)}$$

SI CALCULAMOS LAS ECUACIONES DE E-L TOMANDO COMO VARIABLES DINÁMICAS A LAS C'S ES FÁCIL VER POR MERA INSPECCIÓN QUE:

VARIANDO:

$c^1 \Rightarrow \quad \dot{c}^2 = 0$

$c^2 \Rightarrow \quad \dot{c}^1 = 0$

$\vdots$

$c^7 \Rightarrow \quad \dot{c}^8 = 0$

$c^8 \Rightarrow \quad \dot{c}^7 = 0$ ¡SON LAS BUENAS CONSTANTES DE MOVIMIENTO!

CONCLUSIONES

Haciendo un análisis retrospectivo de lo hecho en el capítulo III, podríamos decir que el método presentado ahí no debe ser visto en primera instancia como una construcción práctica de Lagrangianos s equivalentes para sistemas singulares (como se pudo notar en la aplicación esta metodología resulta la mayoría de las veces engorrosa y complicada) sino más bien como un problema de existencia de un número infinito de Lagrangianos s equivalentes para sistemas singulares llevados a primer orden.

Cabe mencionar que se encontró otra forma diferente de llevar a cabo la demostración realizada en el capítulo III. La diferencia en la demostración se presenta una vez que se ha hecho la separación de variables constrictivas y además se tiene descrito al vector $\dot{y}$. por una suma directa del rango M' y kernel de M', ecuación (III.2.9). Aquí se puede identificar a (III.2.9) como un problema de la teoría de control (*). Además dentro de la teoría de ecuaciones diferenciales se han desarrollado estudios de sistemas singulares [26] en donde para pasar del sistema singular $M\dot{x}+B=0$ a $\dot{x}=\eta u+\rho f$ donde $u=u(t)$ (representa el control), se utiliza el concepto de inversa generalizada de una matriz.

* El problema matemático de la teoría de control trata las modificaciones de las ecuaciones diferenciales, dentro de las limitaciones prescritas se comporten de una manera especificada, es decir en la teoría control no se conocen las reglas del juego.
Existe una amplia sobre este tema sin embargo nos atrevemos a recomendar al lector interesado [23].

Estas matrices poseen las siguientes propiedades [21]:

$$\forall\ M \in M_r^{n\times m} \quad \text{(cuadrada o no)}$$
$$\exists\ M^+ \in M_r^{n\times m} \quad \text{tal que}$$

i).- $MM^+M = M$ iii).- $MM^+ = P_R(M)$ (proyección en rango M)

ii).- $M^+MM^+ = M^+$ iv).- $M^+M = P_r(M^*)$ (proyección en rango M^*)

donde M^* es el conjugado de M.

Un tratamiento de actualidad y bastante completo sobre inversas generalizadas se puede encontrar en [22]. Con esto podemos identificar $e^+ = -M'^{-1}\beta$ y a $\eta = (I - M'^{-1}M')$ lo cual resulta de aplicar M'^{-1} a el sistema (III.2.8). Posteriormente utilizando un resultado reciente de la teoría de control el cual nos permite invertir las soluciones de un sistema $\dot{y} = A(x) + B(x)U(t)$ en función de sus condiciones iniciales y sus controles, es decir:

$$y = y(t, y_0, u) \text{ en } \begin{cases} y_0 = y_0(y,t) \\ u = u(y,t) \end{cases}$$

Todo esto se estableció en un teorema que fué demostrado por Hirschorn en [25].

Finalmente se hace un cambio de coordenadas en donde se identifica a las constantes de movimiento, como las nuevas coordenadas que representan toda la parte dinámica del sistema y por otra parte lo arbitrario queda resumido en los controles que se tomarán como las nuevas coordenadas restantes. Con esto se logra la identificación propuesta y se pasa al criterio ya mencionado de construcción.

Es importante notar que las condiciones que se piden en el teorema de invertibilidad en [25] nos hacen sospechar que existe una estrecha relación con las condiciones que resultaron de nuestro tratamiento original (III.2.7). Sin embargo no se ha profundizado al respecto, por lo cual queda esto abierto para investigaciones futuras.

AGRADECIMIENTOS.

Antes de concluir con este trabajo, deseo manifestar un sincero agradecimiento a todas las personas que colaboraron de alguna manera, directa o Indirectamente, en la realización de este trabajo.

Entre ellos cabría mencionar:

En primer lugar a mi madre, por haberme apoyado y brindado esa confianza, que despertó en mi una gran seguridad en la realizacion de mis actos.

Al Dr. Arturo Ramirez, por haber sido quien me guió durante un gran periodo de mi formación profesional, enseñandome a valorar y amar con seriedad a la Ciencia.

Al Dr. Ricardo Weder, el cual, con sus valiosas charlas, reforzo en mi ese gran interes por la física - matemática.

Al brillante estudiante Rogelio Aguilar, que gracias a su gran Interes y valiosas discusiones, me permitieran comprender lo relacionado con la teoría de control.

A mi amigo, Rodolfo Argote, por haber convivido muchas de mis experiencias personales y aceptó escribirme de su puño y letra este trabajo

En fin existen una gran cantidad de personas a mi alrededor que no me resta mas que disculparme ante ellas por no darles el agradecimiento explícito en este momento; sin embargo quisiera concluir mis agradecimientos con uno muy

especial para el Dr. Sergio Hojman, quien me dirigió esta tesis, a mi manera muy personal de ver una forma bastante formativa; proporcionándome, siempre que fué necesario, ejemplos ilustrativos de gran sencillez y claridad, pero no por esto de poca relevancia. Gracias a él ahora tengo plena conciencia de que no por ser las abstracciones encantadoras son las mas valiosas en la Física.

REFERENCIAS.

8. R.M. Santilli, "Foundations of theoretical Mechanics I", Springer Verlag, Heidelberg (1978).

10. R.M. Santilli, Hadronic J. 1 223 (1978).

9. R.M. Santilli, Ann. of Phys. 103, 354 (1977); ibid 103, 409 (1977); ibid. 105, 227 (1977).

13. D. Davis., trans. Amer. Math. Soc. 30 (1928) 710.

14. D. Davis, Bull. Amer. Math. Soc. 35 (1929) 371.

11. G. D. Birkhoff., "Dynamical Systems", Amer. Math. Soc. (N.Y.), (1927).

7. S. Hojman & Urrutia., "On the inverse problem of the Calculus of Variations".

15. J. Douglas., trans. Amer. Math. Soc. 90, 71, (1941)

16. P. Havas, Suppl. Nuovo Cimento 5, 363, (1957).

17. P. Havas, Acta. Phys. Austr. 38, 145 (1973).

18. S. Hojman., "teorias Unificadas de Campos" Memorias de las jornadas Einste...

26. St. Campbell, "Singular systems of Differential equations", Advanced publishing Programs (1980).

5. S. Hojman., "Gauge invariant treat ment of internal gauge theories" Simposio de Física.

6. S. Hojman., "Isolation ~~and~~ Quantization of the two degrees of freedom of the electromagnetic Potential for any Gauge". Ann of Phys. 103, (1977).

2. P.A.M. Dirac., "Lectures on Quantum Mechanics" Yoshiva University, New York (1964)

3. Hanson, Regge & teitelboim, "Constrained Hamiltonian systems", Academia Nazionale dei Lincei, Roma, 1975.

19. F. Dyson, "Missed Opportunities", Bull of Amer. Math. Soc. 78, 5, (1972).

20. S. Hojman, "teoría Clasica de Campos" Notas del Curso dado por el autor en la facultad de Ciencias, Nivel maestria.

"Einstein, El hombre y su obra"
(por aparecer)

4. Sudarshan & Mukunda, "Clasical Dynamics: A modern Perspective" Wiley interscience (1974).

21. R. Penrose., "A generalized inverse for Matrices", Proc. Cambridge Philos. Soc. 51 (1955), 406.

22. Israel & Grenville, "Generalized inverses, theory and applications". Wiley Interscience publications (1974).

23. L. Markus "Basic concepts of control theory", lectures of control theory and topics in functional Analysis (1976) I.A.EA.

24. Sussmann & Jurdjevic "Controllability of Nonlinear Systems" Journal of Diff. equations 12, 95, (1972).

25. R. M. Hirschorn., "Invertibility of Nonlinear control Systems", Siam Jouranl of control an Optimization 17, 2 March (1979).

1.- P.A.M. DIRAC "CANAD. J. MATH"., 2, 129, (1950)

12.- DARBOUX G. "THEORIE DES SURFACES" VOL. III, NOS 604, 605 (1891)