EXISTENCIA DE SOLUCIONES

ESTACIONARIAS PARA ONDAS EN EL AGUA

Universidad Nacional Autónoma de México
UNAM
Biblioteca Central
Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

INDICE DE MATERIAS

INTRODUCCION

CAPITULO I. FORMULACION DEL PROBLEMA.

1) Ecuaciones de Movimiento.

2) Condiciones a la Frontera.

3) Función de Corriente.

4) Un Primer Problema Equivalente.

5) Un Segundo Problema Equivalente.

CAPITULO II. ESTUDIO MATEMATICO.

1) Introducción.

2) El Operador

3) El Operador Conjugado

4) Propiedades de los Operadores

   A) El Operador

   B) El Operador

   C) Regularidad

   D) Propiedades Espectrales

5) El Operador No-Lineal

   A) El Operador

   B) El Operador

CAPITULO III. ESTUDIO DE LA BIFURCACION.

1) Introducción.

2) La No Bifurcación.

3) Bifurcación Local.

CAPITULO IV. CONCLUSIONES.

APENDICE

REFERENCIAS.

CAPITULO I

FORMULACION DEL PROBLEMA

1) Ecuaciones de Movimiento.

2) Condiciones a la Frontera.

3) Función de Corriente.

4) Un Primer Problema Equivalente.

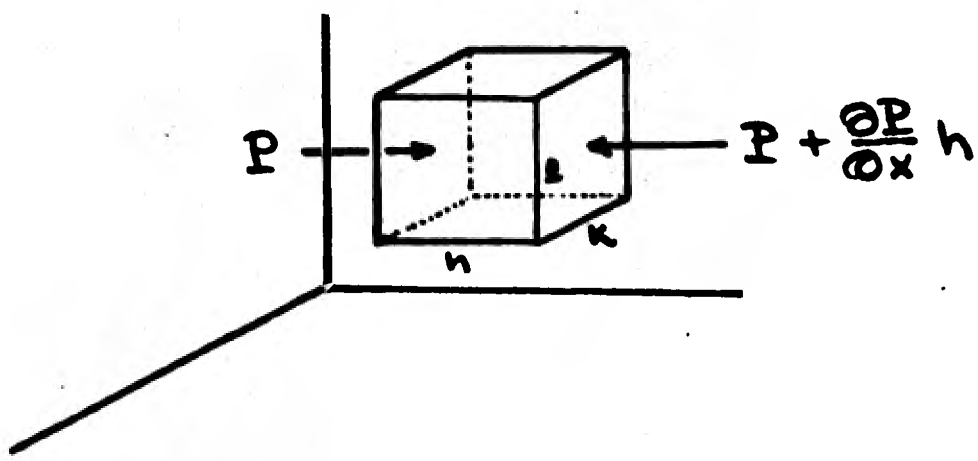
5) Un Segundo Problema Equivalente.

1) Ecuaciones de Movimiento.

A lo largo de todo el presente trabajo solo nos referiremos a flujos en el agua que son de tal naturaleza, que hacen posible despreciar los efectos debidos a viscosidad y compresibilidad, suposiciones que simplificarán mucho las ecuaciones de movimiento, ya que el flujo estará libre de esfuerzos internos por fricción entre las capas líquidas y solo los gradientes de presión y las fuerzas externas serán responsables directos del movimiento que el flujo adquiera.

En un fluido incompresible y sin viscosidad, el movimiento de una partícula puede ser obtenido de la ley de conservación del momento, aplicada a un elemento de volumen. Apoyados en la figura, podemos escribir la conservación del momento como sigue:

$$\left[-\left(P+\frac{\partial P}{\partial x}h\right)+P\right]kl+X\rho hkl=a\rho hkl$$



donde X es la fuerza externa (en la dirección x) sobre la partícula por unidad de masa, P es la presión, a es la aceleración resultante (en la dirección x) y ρ es la densidad del fluido.

Si ahora dividimos por el volumen hkl y tomamos el límite cuando el volumen tiende a cero, obtenemos una relación puntual que no depende del elemento de volumen que hayamos tomado y que se ve así:

$$-\frac{\partial P}{\partial x} + X\rho = a\rho$$

donde $\frac{\partial P}{\partial x}$, X, ρ y a estan valuadas en el mismo punto (x,y,z). De la misma forma podemos obtener las ecuaciones para las otras dos direcciones y como resultado total tenemos el sistema:

$$(1)\quad \begin{aligned} -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} + X &= a.\\ -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y} + Y &= b.\\ -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z} + Z &= c.\end{aligned} \qquad \text{ó} \qquad \begin{aligned} -\frac{\nabla P}{\rho} + \vec{F} &= \vec{a}\\ \vec{F} &= (X,Y,Z)\\ \vec{a} &= (a,b,c)\end{aligned}$$

Podemos reescribir este sistema en términos de las componentes de la velocidad del flujo en cada punto, u, v y w, pensando a la aceleración como una función de la trayectoria $(x(t),\ y(t), z(t))$ y del tiempo t, ya que a la podemos escribir como

$$a = \frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial t}$$

e igualmente para b y c. Si ademas suponemos que la única fuerza externa es la gravitatoria y que apunta en la dirección de $-y$, (1) se puede reescribir como:

$$(2)\quad \begin{aligned} u_t + uu_x + vu_y + wu_z &= -\frac{1}{\rho}P_x\\ v_t + uv_x + vv_y + wv_z &= -\frac{1}{\rho}P_y - g\\ w_t + uw_x + vw_y + ww_z &= -\frac{1}{\rho}P_z\end{aligned}$$

Si ρ es conocida, entonces (2) es un sistema de tres ecuaciones con cuatro incógnitas u, v, w y P. Para poder resolver necesitamos otra ecuación. Esta se puede obtener de la ley de conservación de la masa para un fluido incompresible, que afirma que para toda superficie cerrada S dentro del fluido, la cantidad de masa que entra es igual a la que sale. Esto se puede expresar como

$$\iint_S \rho v_n \, dA = 0$$

donde v_n es la velocidad normal a la superficie, considerada positiva en la dirección de la normal exterior.

Por el teorema de la divergencia de Gauss,

$$\iint_S \rho v_n \, dA = \iiint_R \nabla \cdot (\rho \vec{v}) \, d\Omega = 0$$

donde R es la región contenida por S. Por ser para toda S, se concluye que debe mantenerse la relación

$$\nabla \cdot \vec{v} = u_x + v_y + w_z = 0 \tag{3}$$

dado que la densidad es constante. Esta ecuación es conocida como la ecuación de continuidad.

De esta manera, las ecuaciones (2) y (3) forman un sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas que junto con condiciones iniciales y de frontera adecuadas llevan a una solución única.

El sistema de ecuaciones (2)-(3) puede ser escrito de manera diferente si introducimos la cantidad

$$\Gamma(t) = \oint_C u\,dx + v\,dy + w\,dz$$

donde C es una curva cerrada dentro del fluido. Es bien conocido - (ver apéndice 1), que $\Gamma(t)$ se mantiene constante si el fluido tiene viscosidad nula. Supongamos que para algún t_0 $\Gamma(t_0)=0$ para toda curva C (por ejemplo, si el fluido está en reposo o tiene velocidad - constante en $t = t_0$). Entonces utilizando el teorema de Stokes

$$\Gamma(t) = \oint_C v_s\,ds = \iint_S (\nabla \times \vec{V})\,dA = 0$$

donde S es una superficie encerrada por C. Por ser para toda C dentro del fluido, se concluye que

$$(4) \qquad \nabla \times \vec{V} = (w_y - v_z\,,\, u_z - w_x\,,\, v_x - u_y) = 0$$

y el flujo es conocido como irrotacional. De esta manera, si un -- fluido sin viscosidad tiene un flujo irrotacional en cierto tiempo t_0, permanecerá irrotacional para todos los tiempos.

Supongamos que tenemos un flujo irrotacional y que (u,v,w) -- son funciones que tienen primeras derivadas continuas en un conjunto simplemente conexo. Entonces, udx + vdy + wdz es una forma di-- ferencial exacta en el sentido de que existe una función ϕ defini *da en R que satisface la siguiente relación*

$$(5) \qquad (u, v, w) = (\Phi_x, \Phi_y, \Phi_z)$$

La función Φ es conocida como el potencial de velocidad y su existencia esta garantizada para todo tiempo.

Las ecuaciones (3) y (5) dan como resultado que Φ sea una -- función armónica dado que

$$(6) \qquad \nabla \cdot \vec{V} = \nabla \cdot (\nabla \Phi) = \Delta \Phi = 0$$

Con las ecuaciones (4) y (5) podemos reescribir (2). Los términos uu_x, vv_y y ww_z los escribimos respectivamente, como: $\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}u^2$, $\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}v^2$, $\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial z}w^2$. Los términos mixtos los reescribimos así: de (4) vemos que $u_y = v_x$; entonces, el término vu_y se escribe como vv_x que a su - vez es igual a $\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}v^2$ y así con los demas términos. Todos estos cambios permiten escribir (2) como sigue:

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \partial/\partial x\,(u^2+v^2+w^2) \\ \partial/\partial y\,(u^2+v^2+w^2) \\ \partial/\partial z\,(u^2+v^2+w^2) \end{pmatrix} = -\nabla \frac{P}{\rho} - \nabla gy$$

El primer término del lado izquierdo se puede escribir, utilizando (5), como

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \Phi) = \nabla \Phi_t$$

y la siguiente suma como

$$u^2 + v^2 + w^2 = |\nabla \phi|^2 .$$

Juntando todo tenemos la siguiente expresión

$$\nabla \phi_t + \frac{1}{2} \nabla (|\nabla \phi|^2) = -\nabla \frac{P}{\rho} - \nabla gy$$

que puede ser integrada una vez para dar

$$\phi_t + \frac{1}{2} |\nabla \phi|^2 + \frac{P}{\rho} + gy = C(t) \tag{7}$$

donde C(t) es la constante de integración.

Hasta ahora, hemos reducido el número de ecuaciones e incógnitas a dos: (6)-(7) y ϕ,P respectivamente. Si bien la presión P parece estar determinada solo dentro de una función que es la misma en todo el fluido para cada instante. Sin embargo, físicamente es claro que una función de t nada mas, sumada a la presión P, no tiene efecto sobre el movimiento del fluido, ya que ningún gradiente de presión resulta de hacer tal suma. De hecho, si ponemos - - - - $\phi = \phi^* + \int^t C(\xi) d\xi$, entonces ϕ^* es una función armónica con $\nabla \phi^* = \nabla \phi$ y la ecuación (7) con respecto a ϕ^* tiene un lado derecho que se desvanece. Así, podemos tomar C(t) = 0 sin perdida de generalidad. Con todo esto, las ecuaciónes que rigen el movimiento de un fluido incompresible, sin viscosidad e irrotacional son

$$\phi_t + \tfrac{1}{2}|\nabla\phi|^2 + \frac{p}{\rho} + gy = 0 \tag{8}$$
$$\Delta\phi = 0$$

mas condiciones iniciales y/o de frontera.

Para finalizar esta introducción queremos hacer notar que (3) y (4) producen $\Delta\vec{v} = 0$. Para demostrarlo, supongamos que (u, v, w) tienen segundas derivadas parciales continuas, derivemos (3) con respecto de x, despejemos u_{xx}; las relaciones $u_y = v_x$ y $u_z = w_x$ que se obtienen de (4), derívense respecto de y y z respectivamente. Juntando estas tres relaciones obtenemos que u es una función armónica

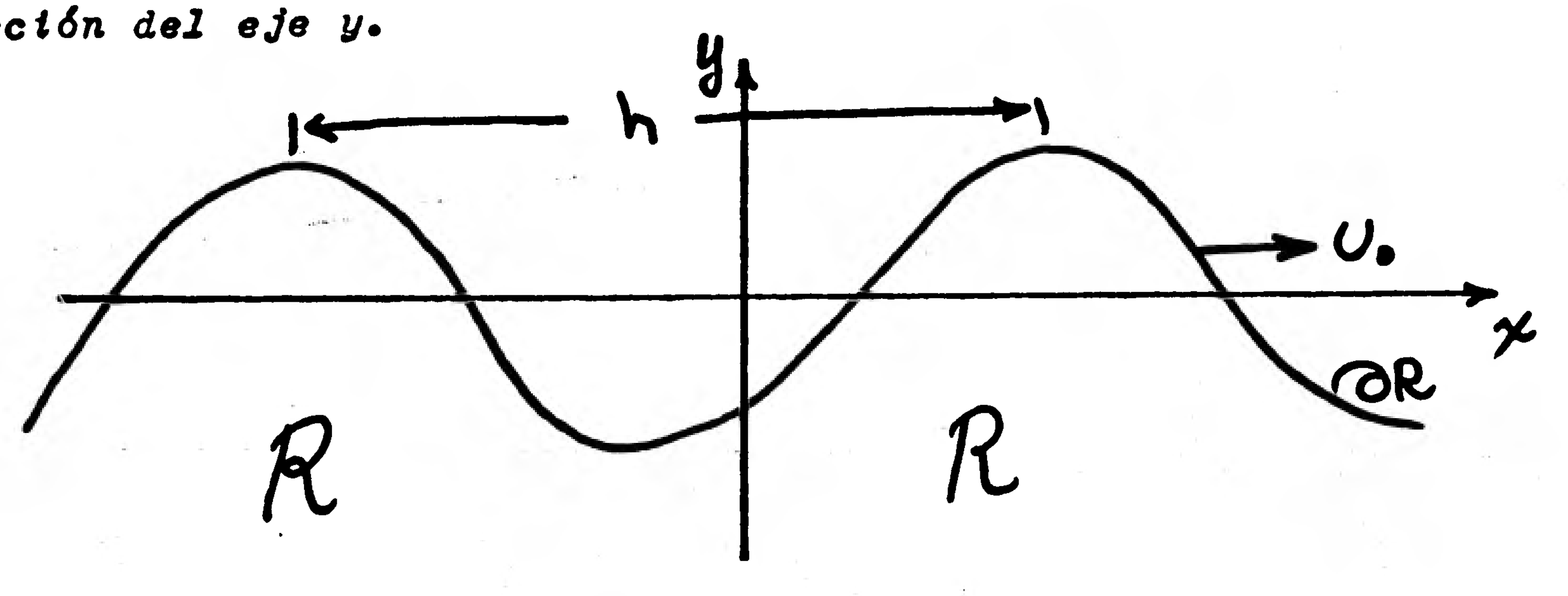
$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = -v_{yx} - w_{zx} + v_{xy} + w_{xz} = 0$$

por virtud de ser las parciales mixtas funciones continuas. De forma análoga, se puede demostrar que v y w son también funciones armónicas. Esto lo podemos expresar en una sola ecuación

$$\Delta\vec{v} = (\Delta u, \Delta v, \Delta w) = 0 \tag{9}$$

2) Condiciones a la Frontera.

Imaginemos que tenemos agua contenida en un recipiente de dimensiones infinitas de tal forma que en un sistema coordenado S, la superficie libre del agua sin perturbar ocupe todo el plano (x,z) y la profundidad se extienda hasta menos infinito en la dirección del eje y.



Llamemos R a la región ocupada por el agua y R a su superficie libre.

Supongamos que por algún mecanismo se produce una perturbación cuyo perfil, periódico e infinito, se mueve con velocidad U_0 en la dirección x y tiene tal simetría que es inecesario considerar la coordenada z, es decir, tenemos un flujo bidimensional que puede ser analizado en el plano (x,y).

Para demostrar la existencia de un flujo con estas características, supongamos que la perturbación es hecha de tal forma, que el agua no pierde su estado de irrotacionalidad. Esto, junto con la incompresibilidad y viscosidad casi nulas del agua, nos permite hacer uso de (8) como una buena aproximación para determinar el -- campo de velocidades que mantiene el flujo.

Las condiciones de frontera para este problema vienen dadas - de forma natural. Por un lado, en la superficie libre, P es la presión atmosférica, que puede ser tomada como constante a lo largo - de ella. Y por otro lado, la perturbación tiende a desaparecer rapidamente conforme nos alejamos de la superficie libre y por consiguiente la velocidad del fluido tiende a cero cuando y tiende a menos infinito (recuerdese que antes de producir la perturbación el fluido estaba en reposo).

Entonces, el problema físico descrito está definido por las - siguientes ecuaciones:

$$\Delta\phi = 0 \qquad \text{sobre } R$$

$$(10) \qquad \phi_t + \tfrac{1}{2}|\nabla\phi|^2 + gy = cte \qquad \text{sobre } \partial R$$

$$\nabla\phi = 0 \qquad \text{cuando } y \to -\infty$$

Ademas, una vez encontrado ϕ, podemos determinar P a través de la ecuación (8).

Las ecuaciones (10) pueden simplificarse si describimos al -- fluido desde un sistema que se mueve con el perfil de la onda. De acuerdo con la transformación de Galileo, $x'=x-U_0t$, $y'=y$, $\phi(x,y,t) = \Phi(x',y)+U_0x'$ el campo de velocidades se transforma como

$$\phi_x = \Phi_{x'} + U_0 \quad ; \quad \phi_y = \Phi_{y'}$$

y ademas ϕ_t *se ve ahora como*

$$\phi_t = -U_0\phi_x = -U_0\phi_{x'} - U_0^2 \ .$$

Sustituyendo estas relaciones en (10), tenemos que en el nuevo sistema S', ϕ satisface (omitiendo las primas)

$$(11)\quad \begin{aligned} &\Delta\phi = 0 \quad \text{sobre } R \\ &\tfrac{1}{2}|\nabla\phi|^2 + gy = \text{cte} \quad \text{sobre } \partial R \\ &\nabla\phi = (U,0) \quad \text{sobre } y \to -\infty \ . \\ &\frac{\partial\phi}{\partial n} = 0 \quad \text{sobre } \partial R \ . \end{aligned}$$

donde la nueva constante en la segunda relación, es igual a aquella que aparece en (10) mas $\frac{1}{2}U_0^2$ y $U = -U_0$. La última ecuación que hemos agregado, refleja el hecho físico de que el perfil de la superficie libre se mantiene gracias a un movimiento puramente tangencial de las partículas a lo largo de ella.

Dado que en (11) ya no aparecen derivadas con respecto del tiempo, nuestro problema ahora, será demostrar la existencia de soluciones estacionarias para un fluido como el agua que es supuesto irrotacional, incompresible y con viscosidad nula.

Es claro que la forma de la superficie libre puede tomar diversas formas, desde una superficie horizontal hasta la que se ve en la figura 2. Ademas, excepto por la superficie horizontal, no tenemos una expresión analítica de ∂R . Podriamos proponer formas *explícitas, pero esto limitaría el análisis que se haría de las ondas, a un tipo muy particular. Este problema podemos superarlo si recurrimos a los conceptos de línea de corriente y de función de corriente.*

3) *Función de Corriente.*

Una línea en el fluido, cuya tangente en todo punto sea paralela al campo de velocidad $\vec{V}$, instantaneamente, es conocida como una línea de corriente. La familia de líneas de corriente al tiempo t, son soluciones de la ecuación

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} \tag{12}$$

donde u y v son las componentes de $\vec{V}$ y dependen de (x,y,t). Cuando el flujo es estacionario, como es el caso que nos ocupa, las líneas de corriente tienen la misma forma para todos los tiempos.

Por otro lado, la ecuación de continuidad para un fluido incompresible tiene la forma

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \tag{13}$$

de donde se sigue que $u\,dy - v\,dx = d\psi$ es una diferencial exacta. Luego, se debe mantener que

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad ; \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \tag{14}$$

donde la función escalar desconocida $\psi(x,y,t)$ está definida por

$$\psi - \psi_0 = \int_C (u\,dy - v\,dx) \tag{15}$$

con ψ_0 igual a una constante y C una curva arbitraria que une algún punto de referencia O a un punto P de coordenadas (x,y).

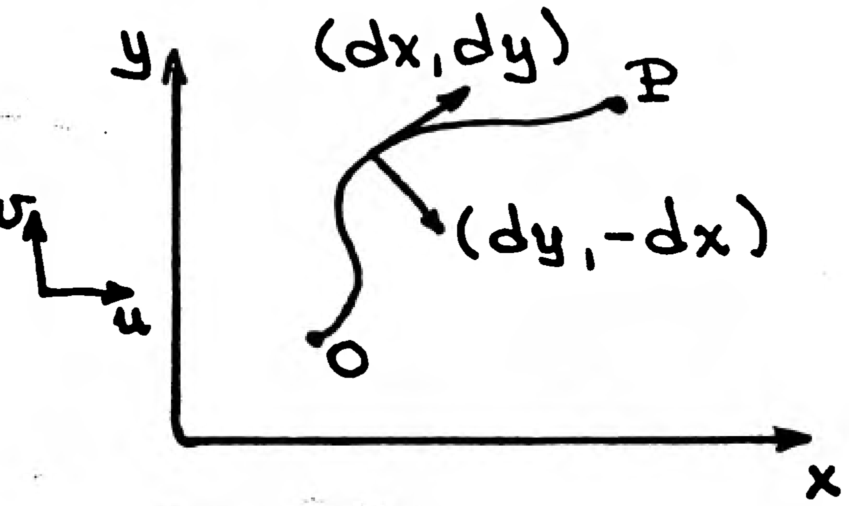


FIGURA 3.

El contenido físico de ψ se ve como sigue. Reescribiendo la integral que aparece en (15) como

$$\int_C (u\,dy - v\,dx) = \int_C (u,v)\cdot(dy,-dx) = \int_C V_n\,ds$$

es claro que $\psi-\psi_0$ representa el flujo de fluido a través de C, en la dirección de la normal (dy,-dx). Ademas, el flujo a través de una curva cerrada formada por cualesquiera dos trayectorias que unan O y P, es necesariamente cero cuando la región entre las dos trayectorias este completamente ocupada por fluido incompresible. El flujo representado por la integral en (15) es, por lo tanto, independiente de la elección de la curva que una O con P, cuidando que pertenezca al conjunto de trayectorias tales que cualesquiera dos de ellas encierren solo fluido incompresible. Por lo tanto, la integral define una función de la posición, quehemos escrito como $\psi-\psi_0$.

De la definición de línea de corriente vemos que el fluido no atraviesa estas líneas. Es decir, el flujo a través de una línea - de corriente es cero, lo que significa que en (15) la integral se desvanece dejando $\psi=\psi_0$. De esto se concluye que ψ es igual a -- una constante a lo largo de una línea de corriente por lo que a ψ se la conoce con el nombre de función de corriente.

Ahora expliquemos lo que queremos hacer al definir una nueva función ψ.

Por un lado, se acostumbra convenir que el flujo a través de una curva C, sea positivo si este se mueve en sentido contrario a las manecillas del reloj, tomando a P como centro de giro. Por --- ejemplo, el flujo representado por una flecha en la figura 4, es - un flujo positivo, de acuerdo con esta convención.

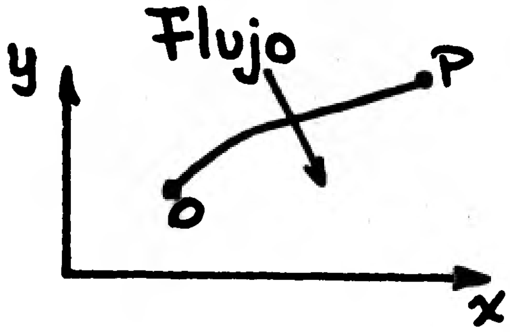


FIGURA 4.

Por otro lado, la condición $\frac{\partial\phi}{\partial n}=0$, sobre ∂R, nos permite - pensar a la superficie libre como una línea de corriente. Ademas, si suponemos ψ_y positiva, las líneas de corriente son de la forma - $y = y(x)$ y como forman una familia de curvas que no se cortan pode_ mos visualizarlas como aparecen en la figura 5.

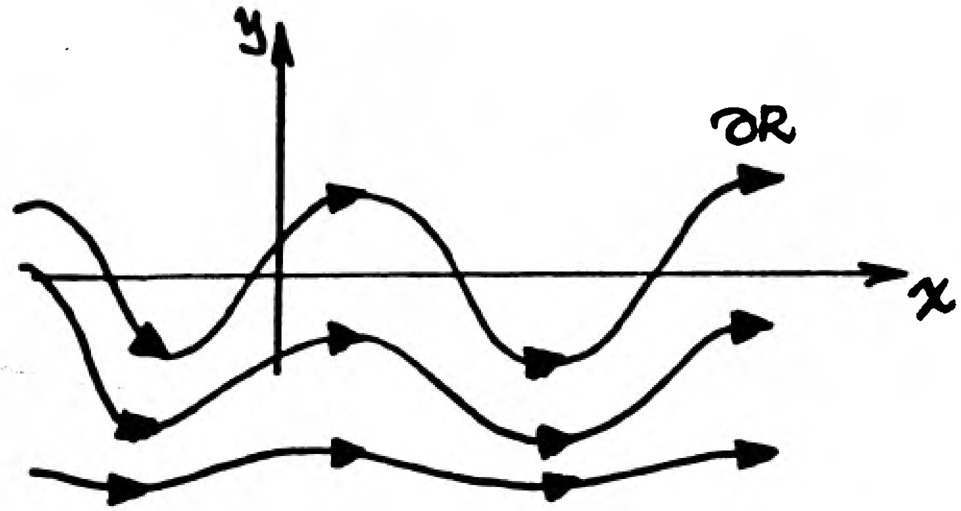


FIGURA 5.

donde las flechas indican la dirección del flujo de acuerdo con la componente positiva horizontal U.

Ahora, tomese un punto de referencia O sobre la superficie ∂R y un punto P dentro del fluido, tal como en la figura 6.

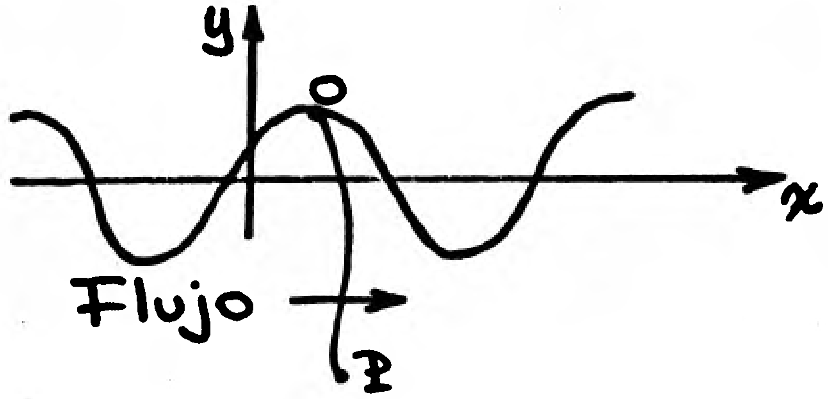


FIGURA 6.

Si nosotros calculamos la integral (15), que define a ψ a lo largo de C, una curva que une O con P, encontramos que

$$\int_C (u\,dy - v\,dx) = \psi_P - \psi_0 < 0$$

de acuerdo con la convención de signo anterior. Como podemos tomar

$\psi_o = 0$, sin perdida de generalidad, entonces ψ_P resulta ser menor que cero. Si dejamos que P se mueva en la dirección y negativa, ψ_P será cada vez mas negativa. Podemos concluir que ψ_P tiende a menos infinito cuando y tiende a menos infinito. De esta manera el rango de valores que ψ puede tomar esta restringido a los reales negativos. Esta es una de las razones por lo que es importante el conocimiento de ψ. La otra razón, proviene del hecho de que ψ es la armónica conjugada de ϕ, el potencial de velocidades.

Para ver que ψ es una función armónica basta combinar la ecuación (14) con la hipótesis de irrotacionalidad (ecuación (4)), para producir

$$(16) \qquad \Delta\psi = \psi_{xx} + \psi_{yy} = u_y - v_x = 0$$

Que ψ sea la conjugada armónica de ϕ es porque de la definición de la primera

$$(17) \qquad \phi_x = u = \psi_y \quad ; \quad \phi_y = v = -\psi_x$$

De ahí que ψ sea la armónica conjugada de ϕ.

4) Un Primer Problema Equivalente.

Una vez introducido el concepto de función de corriente, veamos como podemos superar el problema de tener un dominio físico parcialmente conocido. Para ello, demostraremos la siguiente proposición.

Proposición 1. Si ϕ es una solución al problema (11) con $(u,v)=\nabla\phi$ satisfaciendo las siguientes condiciones

(18) (u,v) es periódico, de periodo h, en x.

(19) $u(x,y)>0$ para toda $(x,y)\in\bar{R}$ y $x\in[0,h]$

entonces, el mapeo

(20) $$\chi(x+iy)=\chi(z)=\phi(x,y)+i\,\psi(x,y)\ ,\quad z=x+iy$$

es un mapeo conforme de R al semiplano $\psi\leq 0$, que satisface

(21) $$\chi(z+h)=\chi(z)+Uh$$

Ademas, si definimos la velocidad compleja V como

(22) $$V=u+(-iv)$$

entonces, V es una función analítica en χ que satisface lo siguiente:

(23) $$V(\chi+Uh)=V(\chi)$$

(24) $$|V|\frac{\partial|V|}{\partial\phi}-g\frac{\operatorname{Im}V}{|V|^2}=0 \qquad \text{en } \psi=0$$

(25) $$V \to U \quad \text{si} \quad \psi \to -\infty$$

(26) $$\operatorname{Re} V > 0$$

La demostración de esta proposición procede de la siguiente manera. Primero demostremos que χ satisface (21). Por (18) tenemos que

$$\psi_y(x,y) = u(x,y) = u(x+h,y) = \psi_y(x+h,y)$$

lo cual da como resultado, despues de integrar respecto de y que

$$\psi(x+h,y) = \psi(x,y) + c(x)$$

Valuando esta última relación sobre la superficie libre, que es una línea de corriente, obtenemos $c(x)=0$. Entonces, $\psi(x,y)$ es periódica, de periodo h, en x.

Nuevamente, por (18), también es cierto que

$$\phi_y(x+h,y) = \phi_y(x,y)$$

Por lo tanto,

$$\phi(x+h,y) - \phi(x,y) = d(x)$$

De donde

$$d'(x) = \phi_x(x+h,y) - \phi_x(x,y) = u(x+h,y) - u(x,y) = 0$$

Entonces, d es una constante que no depende de x ni de y. Para conocer su valor, escribamos

$$d=\phi(x+h,y)-\phi(x,y)=\int_0^h \phi_x(x+\xi,y)d\xi=\int_0^h u(x+\xi,y)d\xi$$

Ahora, cuando y tiende a menos infinito, u tiende a U por (11). Entonces

$$d=\lim_{y\to-\infty}\int_0^h u(x+\xi,y)\,d\xi=\int_0^h U\,d\xi=Uh$$

Luego, este resultado y aquel para ψ *, dan (21)*

(21) $$\chi(z+h)=\chi(z)+Uh$$

Ahora, demostremos que χ *es uno-a-uno-sobre.*

$$\phi_x(x,y)=u(x,y)>0$$
$$\phi_y(x,y)=u(x,y)>0$$

es decir, que por un lado ϕ *es monotona creciente en x, y por lo tanto uno-a-uno en el intervalo* $[0,h]$. *Ademas, por (21)* ϕ *es uno-a-uno para* $x\in]-\infty,\infty[$ *para cada y fijo.*

Por otro lado, ψ *es monotona creciente en y y por lo tanto, uno-a-uno en* $]-\infty,0[$ *para cada x fijo.*

Ahora, procedamos como sigue. Sea $\phi(x_0,y_0)=\phi_0$ *fijo. - Pongamos* $x=nh+x_0$, $n\in\mathbb{Z}$. *Entonces, por la periodicidad de* ϕ *(21)*

$$\begin{aligned}\phi(x,y_0)&=\phi(x_0+nh,y_0)\\&=\phi(x_0+(n-1)h,y_0)+Uh\\&\;\vdots\\&=\phi(x_0,y_0)+nUh\end{aligned}$$

Por lo tanto, si n tiende a mas o menos infinito, $\phi(x,y_0)$ *tiende a mas o menos infinito, es decir,*

(27) $$\phi(x,y)\to\pm\infty \quad \text{si} \quad x\to\pm\infty$$

Por otro lado, como $0 < u(x,y)$ tiende a U cuando y tiende a menos infinito, entonces $\psi(x,y) \cong Uy$, para y grande, es decir, que

(28) $$\psi \to -\infty \quad \text{si} \quad y \to -\infty .$$

Luego, por (27) y (28), χ esta definido de R en H, donde H esta dado por

(29) $$H = \{ (\phi,\psi) \mid -\infty < \phi < \infty \,,\ \psi \leq 0 \}.$$

Tomemos un punto $(\phi_0, \psi_0) \in H$. Ya que ψ es monotona creciente en y (para x fijo), no pueden existir dos líneas de corriente separadas que tengan el mismo valor ψ_0; es decir, existe una única línea de corriente con el valor ψ_0. Por otro lado, como las líneas de corriente son periódicas, se extiende de $-\infty$ a $+\infty$ y $\psi_y > 0$, es decir, son de la forma $y=y(x)$, entonces ϕ es una función creciente de x sobre la línea de corriente ψ_0, ya que si la línea de corriente es $y=y(x)$, tal que $\psi(x, y(x))=\psi_0$, entonces, sobre la línea de corriente, $\phi(x,y(x))$ es una función de x con

$$\phi'(x,y(x)) = \phi_x(x,y(x)) + \phi_y(x,y(x))\, y'(x) \quad y \quad y'(x) = -\frac{\psi_x}{\psi_y} = \frac{v}{u}$$

entonces

$$\phi'(x,y(x)) = u + \frac{v^2}{u} = \frac{u^2+v^2}{u} > 0 .$$

Por lo tanto, existe un único (x_0, y_0) tal que $\phi(x_0,y_0)=\phi_0$ y $\psi(x_0,y_0)=\psi_0$. Entonces, χ es sobre y uno-a-uno.

Es bien conocido que si ψ es la conjugada armónica de ϕ, entonces, $\chi = \phi + i\psi$ es una función analítica ( ). Ademas, como $u > 0$, entonces

(30) $$\frac{d\chi}{dz} \equiv V = \phi_x + i\psi_x = u - iv \neq 0$$

Por lo tanto, χ es un mapeo conforme.

De la definición de V, es fácil ver que

(31) $$|V|^2 = u^2 + v^2 = |\nabla\phi|^2$$

Ahora bien, como χ es uno-a-uno y sobre, podemos expresar a z como una función analítica de χ , es decir, (   )

(32) $$z(\chi) = x(\chi) + iy(\chi)$$

De donde,

(33) $$\frac{dz}{d\chi} = \frac{u+iv}{|V|^2} = x_\phi + iy_\phi$$

Con la ayuda de (31) y (33), la condición de frontera en (11) se puede escribir así

$$\frac{1}{2}|V|^2 + g\,y(\phi,0) = cte. \quad en \quad \psi = 0$$

que derivada con respecto a ϕ , se obtiene

$$|V|\frac{\partial|V|}{\partial\phi} + g\,\partial y/\partial\phi = 0 \qquad en \quad \psi = 0$$

o sea, obtenemos (24)

$$|V|\frac{\partial|V|}{\partial\phi} - \frac{\operatorname{Im} V}{|V|^2} = 0 \qquad en \quad \psi = 0 .$$

Las relaciones (25) y (26) son directas, a partir de la defición de V. Luego, hemos terminado la demostración de la proposición.

Recíprocamente, podemos probar que

<u>*Proposición 2*</u>*. Sea V, una solución del problema (22)-(26) y sea*

$$Z(\chi) = \int_0^{\chi} \frac{d\chi}{V}$$

entonces,

a) $Z(\chi) = x+iy$ *es un mapeo conforme del semiplano* $\psi < 0$ *sobre su imagen* $\bar{R}$ *, que satisface*

$$(21) \qquad Z(\chi + Uh) = Z(\chi) + h$$

b) Si $\chi(z)$ *es la transformación inversa, entonces,* $\phi = Re\,\chi$ *es solución del problema (11) con las condiciones (18)-(19).*

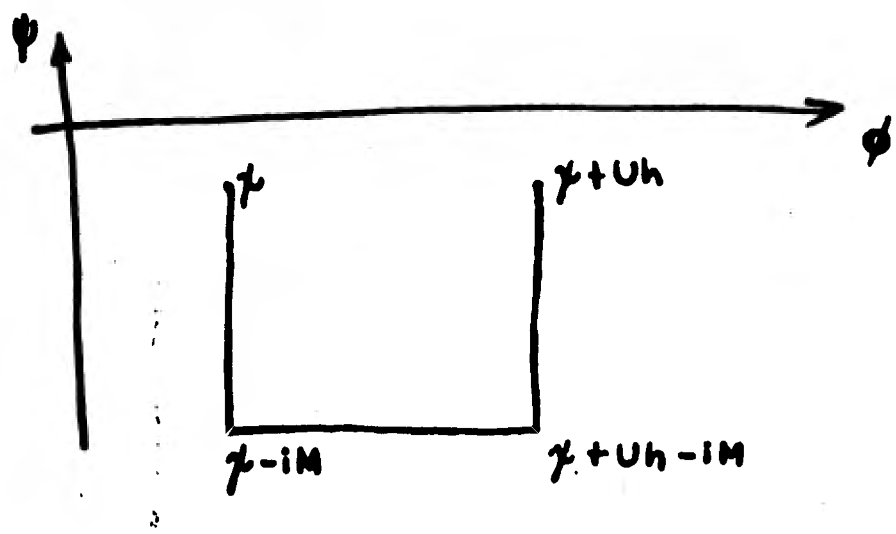
<u>*Demostración.*</u>

a) Como Re V=u(x,y) es positivo, $Z(\chi)$ *esta bien definido y es independiente del camino recorrido, ya que, por el Teorema de Cauchy, la integral de una función analítica sobre la frontera de un dominio es cero.*

Por otro lado,

$$Z(\chi + Uh) - Z(\chi) = \int_{\chi}^{\chi + Uh} \frac{d\chi}{V}$$

puede calcularse sobre la siguente trayectoria



Por la periodicidad de V, (23), las integrales sobre las lí-neas verticales se cancelan. Entonces, por (25), podemos tomar M suficientemente grande, tal que

$$V(\chi - iM) = U + O(M^{-1})$$

Por lo tanto,

$$z(\chi + Uh) - z(\chi) = \int_{\phi_0}^{\phi_0 + Uh} \frac{d\phi}{U + O(M^{-1})} = \int_{\phi_0}^{\phi_0 + Uh} \frac{d\phi}{U} + O(M^{-1})$$
$$= h + O(M^{-1})$$

Como M es arbitrario, esto prueba que

$$(21) \qquad z(\chi + Uh) - z(\chi) = h$$

Poniendo $\phi = \phi_0 + nUh$ *, (21) da como resultado que*

$$x(\phi, \psi_0) = x(\phi_0 + nUh, \psi_0) = x(\phi_0, \psi_0) + nh$$

de donde, es fácil concluir, haciendo que n tienda a $\pm\infty$ *, que el rango de* $x(\chi)$ *son todos los reales.*

De la definición de $z(\chi)$ *obtenemos que*

$$\frac{dz}{d\chi} = \frac{1}{V} = \frac{u + iv}{|V|^2} = x_\phi + iy_\phi = y_\psi - ix_\psi$$

Como u es positiva, las líneas $\psi =$*cte. corresponden a curvas* $(x(\phi), y(\phi))$ *que se pueden expresar como* $y(x)$ *y se extienden periodicamente de* $-\infty$ *a* $+\infty$ *. Además, para* $\phi =$*cte.,* $\frac{\partial y}{\partial \psi} = \frac{u}{|V|^2}$ *es positiva, es decir, que y es una función creciente de* ψ *, y como* $\partial y/\partial \psi$ *tiende a 1/U cuando* ψ *tiende a* $-\infty$ *, entonces,* $y \simeq \psi/U$ *, es decir, que y es una función creciente de* ψ *, que tiende a* $-\infty$ *cuando* ψ *tiende a* $-\infty$ *. Por lo tanto, la línea vertical* $x(\phi, \psi) = x_0$*, proviene -*

de una única curva $\phi=\phi(\psi)$, que se extiende de $\psi=0$ hasta $\psi=-\infty$, porque si proviniera de dos curvas, entonces violaríamos que $x(\phi,\psi)$ es monotona creciente en ϕ (ya que $\partial x/\partial\phi$ es positiva) para ψ fijo. Por lo tanto, el punto (x_0,y_0) proviene de la línea $x(\phi,\psi)=x_0$ y de un solo punto de esta línea, ya que sobre esta línea $y(\phi(\psi),\psi)$ tiene derivada positiva

$$\frac{d}{d\psi}\,y(\phi(\psi),\psi)=y_\phi\,\phi_\psi+y_\psi=\frac{1}{u|V|^2}\,(u^2+v^2)>0$$

es decir, y es monotona creciente y como antes tiende a $-\infty$ cuando ψ tiende a $-\infty$. Por lo tanto, $\mathcal{Z}$ es uno-a-uno y sobre. Notese que el análisis anterior, lleva a que $\mathcal{R}$ no tiene hoyos, ya que todas las líneas verticales $x(\phi,\psi)=x_0$ estan contenidas en el.

b) Ahora, si $\mathcal{Z}$ es analítica y uno-a-uno-sobre, entonces, el mapeo inverso $f(z)$ es analítico en $\mathcal{Z}$ con

$$\frac{df}{dz}=V=u-iv$$

La analiticidad de $f(z)$ implica que $\Delta\phi(z)=0$, $\phi_x=u=\psi_y$ y $\phi_y=v=-\psi_x$. Es decir, ϕ y ψ son armónico-conjugadas.

Ademas, $|\nabla\phi|^2=|V|^2$; $\nabla\phi$ tiende a $(U,0)$ si ψ tiende a $-\infty$, es decir, si y tiende a $-\infty$.

La superficie libre, $\psi=0$, es $y=y(\phi,0)$ y puede expresarse como $y=y(x)$. La condición

$$\frac{1}{2}\,\frac{\partial|V|^2}{\partial\phi}-g\,\frac{\operatorname{Im}V}{|V|^2}=0$$

puede ser escrita como

$$\frac{\partial}{\partial\phi}\frac{1}{2}|V|^2 + g\frac{\partial y}{\partial\phi}(\phi,0) = 0$$

que integrada da

$$\frac{1}{2}|V|^2 + gy = cte. \quad \text{sobre } OR .$$

Igualmente, la condición $\frac{\partial\phi}{\partial n}=0$ proviene del hecho de que la superficie libre es una línea de corriente y las condiciones (18)-(19) son directas. Con esto terminamos la demostración de la Proposición 2.

5) Un Segundo Problema Equivalente.

Ahora, usemos la periodicidad para pasar el problema (22)-(26) sobre la semibanda $\{0\leq\phi\leq Uh, \psi\leq 0\}$ a un problema sobre un dominio acotado, el disco unitario.

Para hacer esto, pongamos

$$z = e^{-\frac{2\pi i}{Uh}f} . \tag{34}$$

Evidentemente, z es una función analítica de f . Si $z=\rho e^{i\gamma}$, entonces

$$\rho = e^{\frac{2\pi\psi}{Uh}}$$

$$\gamma = -\frac{2\pi}{Uh}\phi \tag{35}$$

donde, $\rho\leq 1$ para $\psi\leq 0$ y $-2\pi\leq\gamma\leq 0$ si $0\leq\phi\leq Uh$.

Los equipotenciales ϕ =cte., corresponden a rayos que salen del origen y las líneas de corriente ψ =cte. a círculos concéntricos con la línea $\psi=0$ en el círculo unitario.

Como $\frac{dz}{d\chi} \neq 0$, entonces, z es una transformación conforme de la semibanda al círculo unitario.

Ahora, definamos la función $\omega(\chi)$ como

$$\omega = \theta + i\tau = \frac{1}{i} \log \left(\frac{U}{V} \right) \tag{36}$$

donde V es una solución del problema (22)-(26), tomando la rama del logaritmo de tal forma que

$$V = U e^{-i\omega} \tag{37}$$

De esta manera,

$$\theta = \arg \bar{V} = \arg (u + iv) \tag{38}$$

es decir, θ es el ángulo formado por el vector de velocidad (u,v) y la horizontal.

Como Re V es positivo y la semibanda es simplemente conexa, entonces ω es una función analítica de χ y por composición, es analítica en z .(   )

Por la condición (25), ω tiende a cero cuando ϕ tiende a $-\infty$ y por lo tanto

$$\omega(\rho=0, \gamma) = 0 \tag{39}$$

Ademas, se satisface que

(40) $$\operatorname{Re} V = U e^{\tau} \cos\theta > 0 \iff |\theta| < \pi/2 .$$

Como $\operatorname{Im} V = -Ue^{\tau} \operatorname{sen}\theta$ y $\frac{\partial |V|}{\partial \phi} = Ue^{\tau}\frac{\partial \tau}{\partial \phi} = -|V|\frac{\partial \theta}{\partial \psi}$ por las condiciones de Cauchy-Riemann, entonces, por (34)

$$\frac{\partial |V|}{\partial \phi} = -\frac{2\pi}{h}\,\rho\, e^{\tau}\frac{\partial \theta}{\partial \rho}$$

y la condición de frontera (24) se convierte en

$$-\frac{2\pi}{h}\,\rho\, e^{\tau}\frac{\partial \theta}{\partial \rho}\,Ue^{\tau} + g\,\frac{Ue^{\tau}\operatorname{sen}\theta}{U^2 e^{2\tau}} = 0 \quad \text{en } \rho = 1$$

o sea,

(41) $$\frac{\partial \theta}{\partial \rho} = \lambda\, e^{-3\tau}\operatorname{sen}\theta \quad \text{en } \rho = 1$$

con

(42) $$\lambda = \frac{gh}{2\pi U^2}$$

Esto demuestra la primera parte del siguiente teorema:

Teorema Las soluciones del problema (11)-(18)-(19) (y las del problema (22)-(26)) están en correspondencia uno-a-uno con las soluciones del problema de encontrar una función $\omega = \theta + i\tau$ que satisfaga las siguientes condiciones:

(43)
- a) ω es analítica en $\rho < 1$ y continua en $\rho \leq 1$.
- b) θ_ρ es continua en $\rho \leq 1$ y satisface (41)-(42).
- c) $\omega(0) = 0$
- d) $|\theta| < \pi/2$

Demostración. Solo hay que demostrar el regreso. Si ω es solución del problema (43), definimos

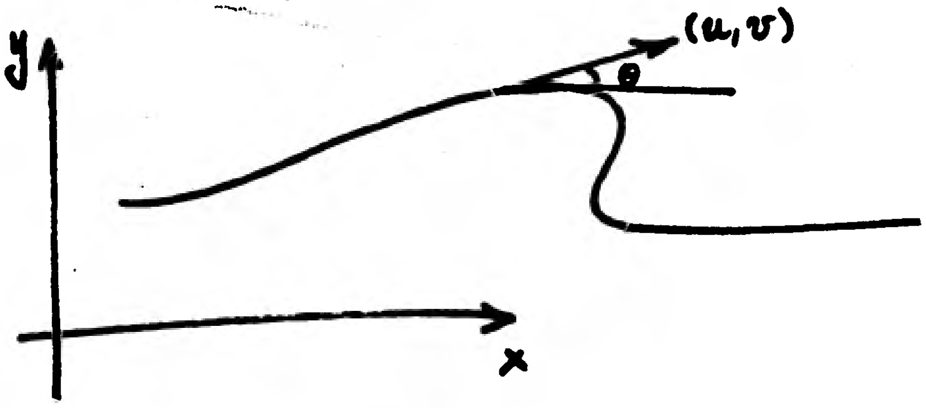
$$V = U e^{-i\omega}$$

Es claro que, V es analítica en $\mathcal{Z}$, Re V es positivo, $V(0)=U$ y

$$-\frac{2\pi}{h}|V|\frac{\partial\theta}{\partial\rho}e^{\tau} - g\frac{\operatorname{Im} V}{|V|^2} = 0$$

Haciendo la transformación inversa de χ en $\mathcal{Z}$, obtenemos una función V analítica en χ sobre la semibanda H; periódica, de periodo Uh en χ, ya que ω es periódica de periodo 2π en γ; y V es solución del problema (22)-(26).

Notese que la condición $|\theta|<\pi/2$ quiere decir que las líneas de corriente no se doblan como en esta figura



Notemos tambien que $\theta\equiv 0$, $\tau\equiv 0$ es solución del problema (43) y corresponde a la solución $V=U$, o sea, $\phi=Ux$, $\psi=Uy$ con superficie libre $y=0$.

El problema, ahora es encontrar una función armónica ω, en el círculo unitario, con $|\theta|<\frac{\pi}{2}$ y con una condición de Neumann no lineal. En él siguiente capitulo, demostraremos que el problema (43) puede ser reducido a una sola ecuación sobre la frontera, resultado que permitirá hacer un mejor análisis de la situación.

1) Introducción.

Nuestro objetivo ahora es reducir el problema (43) a una sola ecuación sobre la frontera. Para ello, seguiremos el siguiente procedimiento.

Sea

(44) $$K_\rho(\gamma,\gamma') = -\frac{1}{2\pi}\log(1-2\rho\cos(\gamma-\gamma')+\rho^2)$$

el núcleo de la función de Green para el problema de Neumann ( )

y sea

(45) $$K_\rho f(\rho,\gamma) = \int_{-\pi}^{\pi} K_\rho(\gamma,\gamma')\, f(\gamma')\,d\gamma'$$

Entonces, se demuestra que $K_\rho f$ satisface

$$\Delta K_\rho f = 0$$
$$K_0 f = 0$$
$$\lim_{\rho\to 1}\frac{\partial K_\rho f}{\partial\rho} = f \iff \int_{-\pi}^{\pi} f(\gamma)\,d\gamma = 0$$

es decir, que $K_\rho f$ es solución del problema:

$$(*)\qquad \begin{array}{ll} \Delta\theta = 0 & \text{en } |z|<1 \\ \theta_\rho = f & \text{en } |z|=1 \\ \theta = 0 & \text{en } |z|=0 \end{array}$$

con la condición necesaria

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(\gamma)\,d\gamma = 0$$

ya que por la fórmula de Green tenemos que

$$0=\iint_D 1\cdot\Delta\theta\,dS=\iint_D \theta\cdot\Delta 1\,dS+\int_{\partial D}\left(1\cdot\frac{\partial\theta}{\partial n}-\theta\frac{\partial 1}{\partial n}\right)=\int_{\partial D}\frac{\partial\theta}{\partial n}$$

si θ es una solución del problema (*) y D denota el disco unitario.

Después se demuestra que dada una función armónica θ, existe- una única función armónica conjugada τ, con la condición $\tau(0)=0$ y se estudian las propiedades del operador que manda $\theta \to \tau(\theta)$.

De esta manera, si tenemos una solución al problema (43)

$$\begin{aligned} &\Delta\theta = 0 && |z|<1 \\ &\theta_\rho = \lambda e^{-3\tau(\theta)} \operatorname{sen}\theta && |z|=1 \\ &\theta = 0 && |z|=0 \\ &|\theta| \leq \pi/2 \end{aligned}$$

con θ continua en $\rho=1$, esta se puede expresar como

$$\theta(\rho,\gamma) = K_\rho\left(\lambda e^{-3\tau(\theta(1,\gamma))} \operatorname{sen}\theta(1,\gamma)\right)$$

con las condiciones

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{-3\tau(\theta(1,\gamma))} \operatorname{sen}\theta(1,\gamma)\, d\gamma = 0 \qquad y \qquad |\theta(1,\gamma)| < \pi/2 \;.$$

Así, el problema puede ser visto de dos maneras. Por un lado, - si tenemos una función $\tilde{\theta}(\gamma)$, (que será la derivada normal de nuestra solución) definida en el círculo unitario, con

$$\int_{-\pi}^{\pi} \tilde{\theta}(\gamma)\, d\gamma = 0$$

podemos definir $K_\rho\tilde{\theta}$, $\tau(\rho,\gamma)=\tau(K_1\tilde{\theta})$ y $\lambda e^{-3\tau(K_1\tilde{\theta})} \operatorname{sen}(K_1\tilde{\theta})$. Entonces - buscaremos una $\tilde{\theta}$ que además satisfaga $\tilde{\theta} = \lambda e^{-3\tau(K_1\tilde{\theta})} \operatorname{sen}(K_1\tilde{\theta})$ y que -- $|K_1\tilde{\theta}| < \pi/2$. Pedir que $\tilde{\theta}$ sea así, trae dos consecuencias: Primera, si $\tilde{\theta}$ satisface $\int_{-\pi}^{\pi}\tilde{\theta}(\gamma)d\gamma=0$, entonces, necesitamos pedirle también que satisfaga $\int_{-\pi}^{\pi} e^{-3\tau(K_1\tilde{\theta})} \operatorname{sen}(K_1\tilde{\theta})d\gamma=0$ y, segunda si $|K_1\tilde{\theta}| < \pi/2$, entonces, por el principio del máximo (   ) pediremos también que $\theta = K_\rho\tilde{\theta}$

satisfaga la desigualdad.

Por otro lado, si $\hat{\theta}(\gamma)$ es una función continua en el círculo — $|z|=1$, con $|\hat{\theta}|<\pi/2$, podemos definir el operador que manda

$$\hat{\theta} \longrightarrow \lambda e^{-3\tau(\hat{\theta})} \operatorname{sen}\hat{\theta} = \lambda f(\hat{\theta})$$

y después definir $\lambda k_\rho f(\hat{\theta})$. Esta última función será solución del problema de Neumann, si y solo si, $\int_{-\pi}^{\pi} e^{-3\tau(\hat{\theta})} \operatorname{sen}\hat{\theta}\, d\gamma = 0$ y, del problema original, si y solo si:

$$\hat{\theta} = \lambda K_1 f(\hat{\theta}) = \lambda K_1 (e^{-3\tau(\hat{\theta})} \operatorname{sen}\hat{\theta})$$

la condición $|\theta|<\pi/2$ se cumple entonces automáticamente por el principio del máximo.

En el primer caso, $(\tilde{\theta})$, partimos del valor de la derivada normal de la solución, es decir, tenemos un problema de punto fijo para el problema de Neumann. El segundo caso, $(\hat{\theta})$, partimos del valor de la solución en la frontera que representa un problema de puntto fijo para el problema de Dirichlet. De hecho, si en el primer - problema, ponemos $\hat{\theta} = K_1\tilde{\theta}$, obtenemos una solución del segundo con las mismas condiciones. Inversamente, una solución del segundo problema con

$$\theta(\rho,\gamma) = \lambda K_\rho f(\hat{\theta})$$

tiene

$$\frac{\partial\theta}{\partial\rho}\Big|_{\rho=1} = \lambda f(\hat{\theta}(\gamma))$$

si y solo si, la condición

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(\hat{\theta})\, d\gamma = 0$$

Por lo tanto, los dos planteamientos son equivalentes, aunque el análisis de cada uno, presenta dificultades diferentes, sibien, la existencia y unicidad de las soluciones dependen de las propiedades de los operadores involucrados: los operadores lineales K_ρ y $\mathcal{G}$ y el operador no lineal A, definido por

$$A(\theta) = e^{-3\mathcal{G}(\theta)} \operatorname{sen}\theta$$

Es pues, necesario conocer los espacios sobre los cuales K_ρ y $\mathcal{G}$ y A estan bien definidos y son continuos, si son compactos en esos espacios, sus propiedades de regularidad, sus espectros asociados y por último la analiticidad del operador no lineal, hecho fundamental en el próximo capítulo, donde se conocerán explícitamente las soluciones haciendo uso del teorema de la función implícita. - Entonces, en las proximas secciones, haremos un estudio detallado de las propiedades que cada operador involucrado tiene.

Por último, advertimos que las demostraciones y estimaciones elaboradas serán referidas a un apéndice para que el lector no se pierda. Los resultados importantes dentro de la discusión general serán subrayados y serán introducidos con una previa discusión para señalarse su importancia y su necesidad para el trabajo de conjunto.

2) El Operador K_ρ.

En esta sección, comenzaremos por definir los espacios donde estarán definidos nuestros operadores. A continuación, estableceremos un Teorema (sobre el operador de Poisson), que justificará el porqué de la elección de los espacios C^0, $C^{0,\alpha}$ y dará pie a la introducción del operador K_ρ como única solución del problema (43).

Empecemos definiendo los siguientes espacios, donde nuestros operadores estarán definidos:

Sea $1 \leq p \leq \infty$. Entonces, definimos el espacio L^p, como la cerradura de las funciones periódicas, infinitamente diferenciables, $(1 \leq p < \infty)$, bajo la norma $\| \ \|_{L^p}$ definida por

(46.a) $$\|f\|_{L^p} = \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(\vartheta)|^p \, d\vartheta\right)^{1/p} \quad , \quad 1 \leq p < \infty ; \quad \|f\|_{L^\infty} = \operatorname{Sup}|f|$$

y que denotamos por

(46.b) $$L^p(S) = \overline{\{ f \in C^\infty, \text{ periódicas} \}}^{\| \ \|_{L^p}}.$$

Sea $0 < \alpha \leq 1$. Entonces, el espacio de las funciones Hölder continuas esta definido por

(47.a) $$C^{0,\alpha}(S) \equiv \{ f \in C^0 , \text{ periódicas}, \ H_\alpha(f) \leq c \}$$

bajo la norma

(47.b) $$|f|_{0,\alpha} = |f|_0 + \max_{\vartheta \neq \vartheta'} H_\alpha(f)$$

donde

(47.c) $$H_\alpha f \equiv \frac{f(\gamma) - f(\gamma')}{|\gamma - \gamma'|^\alpha}$$

y

(47.d) $$|f|_0 \equiv \max |f|$$

es la norma para el espacio de las funciones periódicas continuas $C^0(S)$. Para todos los espacios, S es el intervalo donde las funciones estarán definidas: $[-\pi, \pi]$.

A fin de demostrar que el operador K_ρ, definido por (44)-(45) es la única solución del problema (43), es escencial conocer el siguiente teorema.

TEOREMA. Sea

(48) $$(P_\rho f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-\rho^2}{1-2\rho\cos(\gamma-\gamma')+\rho^2} f(\gamma')\, d\gamma'$$

el operador de Poisson. Entonces, dada $f \in C^0$, $C^{0,\alpha}$ o L^p con y $0<\alpha<1$, $1\le p \le \infty$ Pf es la única solución del siguiente problema de Dirichlet

$$\Delta U = 0 \qquad \rho < 1$$

$$U = f \qquad \rho = 1$$

donde

$$\lim_{\rho \to 1} | P_\rho f - f | = 0$$

y // // es la norma en C^0, $C^{0,\alpha}$ o L^p, respectivamente. Para su demostración, vease el apéndice A II.

De esta manera, $K_\rho f$, tal como está definido por (44)-(45), es la única solución del problema

$$\Delta U = 0 \quad \text{en} \quad \rho < 1$$
$$U_\rho = f \quad \text{en} \quad \rho = 1$$
$$U = f \quad \text{en} \quad \rho = 0$$

Para demostrar esto, recordemos que el Laplaciano en coordenadas polares se escribe como

$$\Delta U = \frac{1}{\rho^2}\left\{ \rho \frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial U}{\partial \rho}\right) + \frac{\partial^2 U}{\partial \gamma^2} \right\}.$$

Así, si $U = K_\rho f$, entonces

$$\Delta U = \int_{-\pi}^{\pi} \Delta(K_\rho)\, f(\gamma')\, d\gamma'$$

ya que Δ esta calculado en (ρ, γ). Recordando la definición de K_ρ (44), encontramos que para $\underline{\rho < 1}$

$$\rho \frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial K_\rho}{\partial \rho}\right) = -\frac{1}{2\pi}\left(\frac{4\rho^2 - 2\rho^3 \cos(\gamma-\gamma') - 2\rho \cos(\gamma-\gamma')}{(1 - 2\rho\cos(\gamma-\gamma') + \rho^2)^2} \right)$$

y

$$\frac{\partial^2 K_\rho}{\partial \gamma^2} = -\frac{1}{2\pi}\left(\frac{-4\rho^2 + 2(\rho+\rho^3)\cos(\gamma-\gamma')}{(1 - 2\rho\cos(\gamma-\gamma') + \rho^2)^2} \right)$$

Por lo tanto,

$$\Delta U = 0 \quad \text{en} \quad \rho < 1$$

Además, como

$$K_0(\gamma, \gamma') = -\frac{1}{2\pi} \log(1) = 0$$

tenemos que $U = 0$ para $\rho = 0$.

Ahora, ayudados por el teorema para el operador de Poisson, podemos demostrar que K_ρ satisface la condición de frontera. Para ello veamos que

$$\frac{\partial K_\rho f}{\partial \rho} = \frac{\partial}{\partial \rho}\int_{-\pi}^{\pi} K_\rho(\gamma,\gamma')f(\gamma')d\gamma' = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\partial K_\rho}{\partial \rho} f(\gamma')d\gamma'$$

Pero, por (44)

$$\frac{\partial K_\rho}{\partial \rho} = -\frac{1}{2\pi}\;\frac{2\rho - 2\cos(\gamma-\gamma')}{1-2\rho\cos(\gamma-\gamma')+\rho^2} = \frac{1}{2\pi\rho}\;\frac{\rho^2+1-2\rho\cos(\gamma-\gamma')-(1-\rho^2)}{1-2\rho\cos(\gamma-\gamma')+\rho^2}$$

De donde, por (48)

$$\frac{\partial K_\rho}{\partial \rho} = \frac{1}{\rho} P_\rho f(\gamma) - \frac{1}{2\pi\rho}\int_{-\pi}^{\pi} f(\gamma')d\gamma'$$

Por lo tanto,

$$\lim_{\rho\to 1} \frac{\partial K_\rho f}{\partial \rho} = f(\gamma) - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\gamma')d\gamma'$$

De esta manera, tenemos que $U = K_\rho f$, satisface

$$\begin{aligned} &\Delta U = 0 \quad , \quad \rho<1 \\ &U_\rho = f(\gamma) - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\gamma')d\gamma' \quad , \quad \rho=1 \\ &U = 0 \quad , \quad \rho=0 \end{aligned}$$

para f en C^0, $C^{0,\alpha}$ o L^p, $0<\alpha<1$ y $1\leq p\leq\infty$.

Hasta aquí hemos demostrado la existencia de una solución para el problema (43). La unicidad se puede probar como sigue:

Supongamos, que tenemos dos soluciones diferentes. Entonces, la diferencia, es solución del problema

$$\begin{aligned} &\Delta U=0 \qquad \rho<1 \\ &U_\rho=0 \qquad \rho=1 \\ &U=0 \qquad \rho=0 \end{aligned}$$

Pero, por la fórmula de Green, tenemos que

$$\iint_D |\nabla U|^2 dS = \iint_D -U\Delta U\, dS + \int_{\partial D} U U_\rho\, d\ell = 0$$

Por lo tanto, U = cte. Pero, $U(0) = 0$, de donde $U = 0$. Esto prueba la unicidad.

3) El Operador Conjugado $\mathcal{C}_\rho$.

En esta sección, a través de las propiedades de una función analítica, introduciremos el operador $\mathcal{C}_\rho$, demostrando que su representación es única y que es el conjugado armónico de $P_\rho U$, el operador de Poisson.

Entonces, sea f una función analítica en $|z|<1$, con $f(e^{i\gamma'})$ compleja en C^0, $C^{0,\alpha}$ o L^p. Entonces, por el teorema de Cauchy tenemos que ( )

$$f(\rho e^{i\gamma}) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f(z)\, dz}{z - \rho e^{i\gamma}}$$

Poniendo $z = e^{i\gamma'}$ y $f(e^{i\gamma'}) = \hat{f}(\gamma')$, es decir, $\hat{f}$ denota los valores de f en la frontera del disco unitario, $\rho = 1$, entonces $dz = ie^{i\gamma'}d\gamma'$ y

$$f(\rho e^{i\gamma}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{i\gamma'}\hat{f}(\gamma')}{e^{i\gamma'} - \rho e^{i\gamma}}\, d\gamma'$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \hat{f}(\gamma') \frac{e^{i\gamma'}\left(e^{-i\gamma'} - \rho e^{-i\gamma}\right)}{\left(e^{i\gamma'} - \rho e^{i\gamma}\right)\left(e^{-i\gamma'} - \rho e^{-i\gamma}\right)}\, d\gamma'$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \hat{f}(\gamma') \frac{1 - \rho e^{i(\gamma' - \gamma)}}{1 - 2\rho\cos(\gamma - \gamma') + \rho^2}\, d\gamma'$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\hat{f}(\gamma')}{2}\, d\gamma' + \frac{1}{2}P_\rho \hat{f} + \frac{i}{2}\mathcal{C}_\rho \hat{f}$$

donde hemos definido el operador $\mathcal{C}_\rho f$, *como*

(49) $$\mathcal{C}_\rho \hat{f} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\rho \operatorname{sen}(\gamma-\gamma')}{1-2\rho\cos(\gamma-\gamma')+\rho^2}\, f(\gamma')\, d\gamma'$$

Por ser $f(z)$ una función analítica, entonces Ref e Imf son funciones armónicas y además, son las únicas soluciones de

$$\begin{array}{lll} \Delta U = 0 \text{ en } \rho<1 & ; & \Delta U = 0 \text{ en } \rho<1 \\ U = \operatorname{Re} f \text{ en } \rho=1 & & U = \operatorname{Im} f \text{ en } \rho=1 \end{array}$$

respectivamente.

Entonces, por el teorema (48) podemos concluir que

$$P_\rho(\operatorname{Re}\hat{f}) = \operatorname{Re} f(\rho e^{i\gamma})$$

$$P_\rho(\operatorname{Im}\hat{f}) = \operatorname{Im} f(\rho e^{i\gamma})$$

de donde, por la definición de P_ρ (48), tenemos

$$P_\rho(\hat{f}) = f(\rho e^{i\gamma})$$

Además, por el principio de la media o, directo del teorema integral de Cauchy

$$\hat{f}(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \hat{f}(\gamma')\, d\gamma'$$

Por lo tanto, ahora tenemos que

$$f(\rho e^{i\gamma}) = \hat{f}(0) + i\mathcal{C}_\rho(\hat{f}) = \mathcal{P}_\rho(\hat{f})$$

De esta manera, tomando las partes imaginarias y suponiendo que $Im f(0) = 0$, tenemos que

$$Im\, f(\rho e^{i\gamma}) = \mathcal{C}_\rho(Re\,\hat{f})$$

Por lo tanto, si $U = Re\hat{f}$, entonces

$$f(\rho e^{i\gamma}) = \mathcal{P}_\rho U + i\mathcal{C}_\rho U . \tag{50}$$

Inversamente, si U es una función sobre S (por ejemplo, en L^1) tomando

$$\mathcal{P}_\rho U + i\mathcal{C}_\rho U = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} U(\gamma')\, \frac{1-\rho^2 + 2i\rho \operatorname{sen}(\gamma-\gamma')}{1+\rho^2 - 2\rho\cos(\gamma-\gamma')}\, d\gamma'$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{U(z)\,dz}{z-\rho e^{i\gamma}} - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} U(\gamma')\,d\gamma'$$

Para $\rho<1$, el primer término es una función analítica y el segundo una constante. Por lo tanto, $\mathcal{P}_\rho U + i\mathcal{C}_\rho U$, es también analítica, de donde $\mathcal{C}_\rho U$ es la conjugada armónica de $\mathcal{P}_\rho U$.

Ademas, para $\rho = 0$, tenemos

$$\mathcal{P}_0 U + i\mathcal{C}_0 U = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} U(\gamma')\,d\gamma'$$

de donde

$$\mathcal{C}_0 U = 0$$

$$\mathcal{P}_0 U = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} U(\gamma')\,d\gamma'$$

Lo único que nos queda por demostrar, es la unicidad de $\mathcal{T}_\rho$. Supongamos que existen dos operadores conjugados diferentes, $\mathcal{T}_\rho^1$ y $\mathcal{T}_\rho^2$. Sea $V = \mathcal{T}_\rho^1 U - \mathcal{T}_\rho^2 U$, entonces, por las ecuaciones de Cauchy-Riemann, se debe cumplir que

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial \mathcal{T}_\rho^1 U}{\partial x} - \frac{\partial \mathcal{T}_\rho^2 U}{\partial x} = -\frac{\partial P_\rho U}{\partial y} + \frac{\partial P_\rho U}{\partial y} = 0$$

es decir, V = cte. Pero, vimos que los operadores conjugados deben satisfacer $\mathcal{T}_\rho^1 U = \mathcal{T}_\rho^2 U = 0$. Por lo tanto, $V = 0$ y de aquí obtenemos la unicidad de $\mathcal{T}_\rho U$, para $\rho < 1$.

4) Propiedades de los Operadores.

Una vez introducidos los operadores K_ρ y $\mathcal{T}_\rho$, es fundamental mostrar en que espacios estan bien definidos y son continuos. Es decir, hacer una estimación del acotamiento que puedan tener, con el fin de conocer la regularidad y el espectro asociado con ellos. A su vez, esto nos permitirá conocer la regularidad de las soluciones, si es que existen.

Todas estas propiedades serán de fundamental importancia cuando estudiemos la analiticidad del operador no lineal A, y cuando lo usemos en el teorema de la función implícita para mostrar la existencia de soluciones.

Nuevamente, solo se dejarán los desarrollos que pudieran ser útiles dentro de la discución general.

4.A) El Operador $\mathcal{T}_\rho$.

A continuación iremos enumerando las propiedades del operador $\mathcal{T}_\rho$, mencionando los hechos que se usaron para demostrarlo, siempre que esto pueda hacerse. Los detalles de las demostraciones vienen en los apéndices señalados entre paréntesis.

a) El operador $\mathcal{T}_\rho$ es un operador lineal, como resultado de su definición:

$$\mathcal{T}_\rho f \equiv \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\gamma') \frac{\rho \operatorname{sen}(\gamma-\gamma')}{1-2\rho\cos(\gamma-\gamma')+\rho^2}\, d\gamma' .$$

b) Si f es par (impar), entonces, $\mathcal{T}_\rho f$ es impar (par). (A-III)

c) $\mathcal{T}_\rho(cte) = 0$ para $\rho<1$. Esto es fácil de probar. Sea $f=cte=1$. Entonces, para $\rho<1$

$$\mathcal{T}_\rho(1) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d}{d\gamma'}\left(\log\left(1-2\rho\cos(\gamma-\gamma')+\rho^2\right)\right) d\gamma'$$

$$= 0$$

Ahora, nos interesa conocer las propiedades de $\mathcal{T}_\rho$ como operador definido en los espacios $C^{0,\alpha}$, con $0<\alpha<1$. Para esto, empecemos viendo que por la última propiedad, es posible escribir al operador $\mathcal{T}_\rho$ como

$$\mathcal{T}_\rho f(\gamma) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\rho \operatorname{sen}(\gamma-\gamma')}{1-2\rho\cos(\gamma-\gamma')+\rho^2}\left(f(\gamma')-f(\gamma)\right) d\gamma'$$

para $\rho<1$, y con la ayuda de los resultados siguientes (A-IV):

i) $1+\rho^2-2\rho\cos(\gamma-\gamma') \geq \frac{1}{\pi^2}(\gamma-\gamma')^2$

ii) $|\operatorname{sen}(\gamma-\gamma')| \leq |\gamma-\gamma'|$

es posible demostrar que

d) Si $f \in C^{0,\alpha}$, con $\alpha > 0$, entonces, $|\tau_\rho f| \leq C|f|_{0,\alpha}$, donde C es una constante que es independiente de ρ. (A-V)

Para $\rho = 1$, es fácil ver que si definimos

$$\tau_1 f = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\operatorname{sen}(\gamma-\gamma')}{2(1-\cos(\gamma-\gamma'))}\,(f(\gamma')-f(\gamma))\,d\gamma'$$

y reescribimos

$$\frac{\operatorname{sen}(\gamma-\gamma')}{2(1-\cos(\gamma-\gamma'))} = \frac{1}{2}\cot\frac{1}{2}(\gamma-\gamma')$$

entonces,

$$\tau_1 f = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cot\frac{1}{2}(\gamma-\gamma')\,\{f(\gamma')-f(\gamma)\}\,d\gamma'$$

tiene sentido, por la estimación anterior. Esta definición para τ_1 y el inciso (d) nos permiten demostrar que

e) Para $\rho \leq 1$, $|\tau_\rho f|_{0,\alpha} \leq C|f|_{0,\alpha}$, donde C es una constante independiente de ρ y $0<\alpha<1$. Es decir, que (A-VI).

$$\tau_\rho : C^{0,\alpha} \to C^{0,\alpha} \quad \forall\ \rho \leq 1 \ \text{y} \ 0<\alpha<1.$$

Para propositos de convergencia es útil hacer la siguiente estimación: Tomemos $u = \gamma'-\gamma$; entonces $\tau_\rho f$ se puede escribir como

$$\tau_\rho f(\gamma) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\rho \operatorname{sen} u\,[f(u+\gamma)-f(\gamma)]}{1+\rho^2-2\rho\cos u}\,du$$

de donde, podemos mostrar que (A-VII)

$$|\tau_\rho f|_{0,\beta} \leq C|f|_{0,\alpha} \quad \forall\ 0<\beta<\alpha<1.$$

Este último resultado nos permite demostrar que (A-VIII)

f) Para toda f en $C^{0,\alpha}$, con $\alpha>0$, $\mathcal{C}_\rho f$ tiende a $\mathcal{C}_1 f$, cuando ρ tiende a 1, en el espacio $C^{0,\beta}$ con $0\leq\beta<\alpha$.

Con esto concluimos las propiedades de $\mathcal{C}_\rho$ en los espacios $C^{0,\alpha}$ Ahora, sigamos con los espacios L^p. Para ello, es necesario recurrir al siguiente teorema

Teorema de M. Riesz (A-IX). Sea $F(z) = u(z) + iv(z)$, con $v(0) = 0$, una función analítica arbitraria definida dentro del círculo unitario $|z| <1$. Entonces,

$$|v(\rho e^{i\theta})|_{L^p} \leq A_p |u(\rho e^{i\theta})|_{L^p}$$

para toda $\rho\in[0,1]$ y $p\in]1,\infty[$.

Recordemos la relación (50)

$$f(\rho e^{i\theta}) = \mathcal{P}_\rho U + i\mathcal{C}_\rho U$$

donde $U = \mathrm{Re} f(e^{i\theta}) = \mathrm{Re} f$. Entonces, aplicando aquí, el teorema de Riesz, tenemos que

$$|\mathcal{C}_\rho U|_{L^p} \leq A_p |\mathcal{P}_\rho U|_{L^p} \quad \forall\ 0\leq\rho<1,\ 1<p<\infty .$$

Esto y los siguientes hechos (A-II)

$$\mathcal{P}_\rho U \xrightarrow[\rho\to 1]{L^p} U \quad ; \quad |\mathcal{P}_\rho U|_{L^p} \leq C|U|_{L^p} ,\quad C\neq C(\rho) .$$

nos permiten afirmar que

g) $|\mathcal{C}_\rho f|_{L^p} \leq C|f|_{L^p} \quad \forall\ \rho\leq 1 \ y\ p\in]1,\infty[$

y que $\mathcal{T}_\rho$ tiende a $\mathcal{T}_1$ cuando ρ tiende a 1 en el espacio L^p con $1 < p < \infty$.

Además, como $C^0 \subset L^\infty \subset L^p$, para toda p, entonces

h) $\mathcal{T}_1 : C^0 \to L^p$ para toda $p < \infty$.

4.B) El operador K_ρ .

a) K_ρ es un operador lineal como resultado de su definición

$$K_\rho f = \int_{-\pi}^{\pi} K_\rho(\gamma,\gamma')\, f(\gamma')\, d\gamma'$$

$$K_\rho(\gamma,\gamma') = -\frac{1}{2\pi} \log\left(1+\rho^2-2\rho\cos(\gamma-\gamma')\right)$$

b) Si f es par (impar), entonces, $K_\rho f$ es par (impar). (A-X).

c) Si f es impar y $f \geq 0$ en $[0,\pi]$, entonces, $K_\rho f \geq 0$ en $[0,\pi]$. (AX)

d) Si $\theta \in L^1$, entonces $K_\rho\theta \in C^\infty$ en ρ y γ para $\rho < 1$ y $K_1\theta \in C^0$ en γ para $\rho = 1$. En efecto, dado que Log es una función C^∞. Además usando la periodicidad de θ, podemos reescribir $K_\rho\theta$ como

(51) $$K_\rho\theta = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log(1+\rho^2-2\rho\cos u)\,\theta(u+\gamma)\,du$$

de donde, para $\rho = 1$

$$K_1\theta = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 2\log\left|2\operatorname{sen}\frac{u}{2}\right|\theta(u+\gamma)\,du$$

Pero, $\operatorname{sen}\frac{u}{2} = \frac{u}{2}(1 - \frac{1}{3!}(\frac{u}{2})^2 + \dots) = \frac{u}{2}(1 - R(u))$ con $0 < R(u) < \frac{1}{3!}(\frac{u}{2})^2$ por las propiedades de las series alternas. Ya que $|u| < \pi$, entonces $u^2 < 24 = 3!\,2^2$. Luego, $1 - R(u) > 0$ y por lo tanto

$$K_1\Theta = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\log|u| + \log(1-R(u))\right)\Theta(u+r)\,du$$

esta bien definido.

Por (51) podemos escribir

$$K_\rho\Theta(r_1) - K_\rho\Theta(r_2) = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log(1+\rho^2-2\rho\cos u)\{\Theta(u+r_1)-\Theta(u+r_2)\}\,du$$

y concluir que

e) Si $\Theta\in C^0$, $K_\rho\Theta\in C^0$ para $\rho\leq 1$.

f) Si $\Theta\in C^{0,\alpha}$, $K_\rho\Theta\in C^{0,\alpha}$ para $\rho\leq 1$.

Lo que sucede para los espacios L^p es similar, ya que suponiendo que $\Theta\in L^p$, con $p>1$, entonces, por la desigualdad de Hölder, tenemos

$$\left|\int_{-\pi}^{\pi}\log(1+\rho^2-2\rho\cos u)\Theta(u+r)\,du\right| \leq C\left(\int_{-\pi}^{\pi}|\log|u||^q\right)^{1/q}|\Theta|_{L^p} \leq C'|\Theta|_{L^p}$$

ya que

$$\int_{-\pi}^{\pi}|\log|u||^q = 2\int_0^{\pi}(\log u)^q\,du = 2\left(\int_0^1+\int_1^{\pi}\right) = 2\int_0^1 + cte$$

y poniendo $v=-\operatorname{Log} u$, entonces

$$\int_0^1(-\log u)^q\,du = \int_0^{\infty} v^q e^{-v}\,dv = cte$$

Por lo tanto,

g) Si $\Theta\in L^p$, $K_\rho\in L^\infty$ para $\rho\leq 1$ y $p>1$.

Ahora, la convergencia de K_ρ a K_1 cuando ρ tiende a 1, en los diferentes espacios, puede ser vista de la siguiente manera (A XII).

Escribamos:

$$K_1\theta - K_{\rho_0}\theta - \int_{\rho_0}^{1} P_\rho\theta\, d\rho + \log \rho_0 \int_{-\pi}^{\pi} \theta(u)\, du \quad (1/2a)$$

Entonces, por el hecho de que $P_\rho\theta$ tienda a θ en C^0, $C^{0,\alpha}$ y L^p, será cierto que

h) $K_\rho\theta$ tiende a $K_1\theta$, cuando ρ tiende a 1, en los espacios C^0, $C^{0,\alpha}$ y L^p.

Ahora, las definiciones particulares de K_ρ y G_ρ nos permiten decir algo sobre las derivadas de K_ρ y extender los espacios sobre los que K_ρ es continuo. Empecemos, viendo que para $\rho<1$,

$$\frac{d}{d\delta} K_\rho\theta(\delta) = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d}{d\delta} \log(1+\rho^2-2\rho\cos(\delta-\delta'))\,\theta(\delta')\,d\delta'$$

$$= -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\rho\, \mathrm{sen}(\delta-\delta')}{1+\rho^2-2\rho\cos(\delta-\delta')}\,\theta(\delta')\,d\delta' = -G_\rho\theta$$

para toda $\theta\in L^1$, es decir, que $K_\rho: C^{0,\alpha}\to C^{1,\alpha}$ es continuo para $\rho<1$. La convergencia de G_ρ cuando ρ tiende a 1 nos permiten decir que $\frac{d}{d\delta}K_\rho\theta(\delta)$ tiende a $-G_1\theta$ en $C^{0,\beta}$ si $\theta\in C^{0,\alpha}$ con $0<\beta<\alpha<1$ y en L^p, si $\theta\in L^p$ con $p>1$.

Podemos extender este resultado para θ en $C^{0,\alpha}$. Sea $U_\rho = K_\rho\theta$ Entonces, U_ρ tiende a U_1 cuando ρ tiende a 1, en $C^{0,\alpha}$ (por lo visto antes) y además, $U_\rho'(\delta)$ tiende a algun v en $C^{0,\alpha}$ cuando ρ tiende a 1. Ahora, sea $h\neq 0$, entonces

$$\frac{U_\rho(\delta+h)-U_\rho(\delta)}{h} = \int_0^1 U_\rho'(\delta+ht)\,dt$$

Por un lado, cuando ρ tiende a 1, U_ρ tiende a U_1 y por el otro, U_ρ' tiende a v. Luego, despues de tomar el límite cuando ρ tiende a 1, tenemos que

$$\frac{U_1(r+h)-U_1(r)}{h} = \int_0^1 v(r+ht)\,dt$$

Luego, por el teorema fundamental

$$U_1'(r) = v(r) \in C^{0,\alpha} .$$

Es decir, que $K_1: C^{0,\alpha} \to C^{1,\alpha}$ es continuo. Por lo tanto,

i) $K_\rho: C^{0,\alpha} \longrightarrow C^{1,\alpha}$ es un operador continuo para toda $\rho\leq 1$ y $0<\alpha<1$.

De hecho como $|\mathcal{T}_\rho\theta|_{0,\alpha} \leq C|\theta|_{0,\alpha}$, entonces

$$|K_\rho'|_{0,\alpha} \leq C \quad \forall\ \rho\leq 1$$

Ahora, veamos lo que pasa si $\theta\in L^p$. Sea $\varphi\in C_0^\infty]-\pi,\pi[$. Entonces,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \varphi \frac{d}{dr}(K_\rho\theta)\,dr = -\int_{-\pi}^{\pi} \varphi\, \mathcal{T}_\rho\theta\, dr = -\int_{-\pi}^{\pi} \varphi' K_\rho\theta\, dr$$

Como $C^\infty \subset L^q$ y K_ρ tiende a K_1 cuando ρ tiende a 1, entonces, tomando el límite cuando ρ tiende a 1 obtenemos que

$$\int_{-\pi}^{\pi} \varphi\, \mathcal{T}_1\theta\, dr = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi' K_1\theta\, dr$$

lo cual es cierto para toda $\varphi\in C_0^\infty$ y $\mathcal{T}_1\theta\in L^p$. Por lo tanto,

$$(K_1\theta)' = -\mathcal{T}_1\theta$$

como derivada débil y por lo tanto, $K_1\theta\in H^{1,p}$ (   ). Esto, junto con el hecho de que $\mathcal{T}_\rho$ tiende a $\mathcal{T}_1$ en L^p cuando ρ tiende a 1, nos permite concluir que

k) $K_\rho : L^p \to H^{1,p}$, es un operador continuo para toda $\rho \leq 1$ y $p > 1$. - Además, por el teorema de Riesz

$$|K_\rho'|_{L^p} \leq C \quad \forall\ \rho \leq 1 .$$

4.C) Propiedades de Regularidad.

En esta sección nos proponemos demostrar que

a) El operador

$$\mathcal{T}_\rho : H^{k,p} \longrightarrow H^{k,p} \quad , \quad p > 1$$

para todo $k \geqslant 0$ y $\rho \leq 1$, es acotado independientemente de ρ y satisface la propiedad de convergencia

$$\mathcal{T}_\rho f \to \mathcal{T}_1 f \text{ , cuando } \rho \to 1, \text{ en } H^{k,p} \text{ , } p > 1 .$$

b) El operador

$$K_\rho : H^{k,p} \longrightarrow H^{k+1,p} \quad , \quad p > 1$$

para todo $k \geqslant 0$ y $\rho \leq 1$, es acotado uniformemente y satisface

$$K_\rho f \to K_1 f \text{ , cuando } \rho \to 1, \text{ en } H^{k+1,p} \text{ , } p > 1$$

Demostración. Sea $\theta \in H^{1,p}$. Entonces

$$\mathcal{T}_\rho \theta = -(K_\rho \theta)' = \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dr} \int_{-\pi}^{\pi} \log(1+\rho^2-2\rho\cos(r-r'))\,\theta(u+r)\,du$$

$$\tau_\rho \theta = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log\left(1+\rho^2-2\rho\cos u\right)\theta'(u+\delta)\,du \quad \text{en } \rho<1$$

es decir,

$$\tau_\rho \theta = -k_\rho \theta' \quad \text{para } \rho\leq 1$$

Por lo tanto,

$$(\tau_\rho \theta)' = -(k_\rho \theta')' = \tau_\rho \theta' \quad \text{para } \rho \leq 1$$

y así

$$|\tau_\rho \theta|_{H^{1,p}} \leq C|\theta|_{H^{1,p}}$$

y

$$(\tau_\rho \theta)' \longrightarrow \tau_1 \theta' = (\tau_1 \theta)' \quad \text{cuando } \rho\to 1.$$

Ademas,

$$(\tau_\rho \theta)^{(k)} = (\tau_\rho \theta')^{(k-1)} = \cdots = \tau_\rho \theta^{(k)}$$

dando el resultado expresado en a) para τ_ρ.

Para K_ρ

$$(k_\rho \theta)^{(k)} = -(\tau_\rho \theta)^{k-1} = \cdots = -\tau_\rho \theta^{(k-1)}$$

dando el resultado expresado en b) para K_ρ.

De forma análoga $\tau_\rho : C^{k,\alpha} \longrightarrow C^{k,\alpha}$ es uniformemente acotado para todo $\rho<1$. También,

$$\tau_\rho f \to \tau_1 f \text{, cuando } \rho\to 1 \text{, en } C^{k,\beta} \text{, } 0\leq\beta<\alpha<1.$$

Mientras que, por su lado $K_\rho : C^{k,\alpha} \to C^{k+1,\alpha}$ *es uniformemente acotado en* ρ *y* $K_\rho f$ *tiende a* $K_1 f$ *en* $C^{k+1,\beta}$.

4.D) Propiedades Espectrales.

4.D.1) El Operador K_1.

Sobre C^0, L^p *o* $C^{0,\alpha}$, *el operador* K_1 *satisface*

$$K_1 : L^p \to H^{1,p} \hookrightarrow L^p$$
$$: C^{0,\alpha} \to C^{1,\alpha} \hookrightarrow C^{1,\beta} \subset C^{0,\alpha}$$
$$: C^0 \to H^{1,2} \hookrightarrow C^{0,1-1/2} \hookrightarrow C^{0,1-\frac{1}{2}-\epsilon} \subset C^0$$

La inclusión $H^{1,2} \hookrightarrow C^{0,1-1/2}$ *se deduce a partir de que*

$$|\theta(r_2)-\theta(r_1)| \leq \int_{r_1}^{r_2} |\theta'|\cdot 1\, dr \leq \left(\int_{r_1}^{r_2} |\theta'|^r dr\right)^{1/r} \left(\int_{r_1}^{r_2} 1\, dr\right)^{1/r'}$$
$$\leq |\theta'|_{L^r} |r_2-r_1|^{1/r'}$$

Por lo tanto,

$$|\theta(r_2)-\theta(r_1)| \leq |r_2-r_1|^{1/r'} |\theta'|_{L^2} = |r_2-r_1|^{1-\frac{1}{2}} |\theta|_{L^2}$$

entonces, K_1 *es un operador compacto en esos espacios. Por lo tanto, el espectro es discreto y consta solo de valores propios y un posible punto de acumulación en cero (   ).*

Si $K_1\theta = \mu\theta$, $\theta \in C^0$, $C^{0,\alpha}$ *o* L^p, *entonces, por la regularidad demostrada en la sección anterior,* $\theta \in C^\infty$. *Si* θ *es vector propio de* K_1 *en alguno de estos espacios, lo será para cualquier otro, de don* de el espectro y los valores propios son independientes del espacio y es suficiente con considerar el espacio L^2.

NOTA. τ_ρ y K_ρ como operadores de L^p en L^p y L^p en $H^{1,p}$, respectivamente, no son compactos. De hecho, en la prueba del primer teorema, llegamos a la relación (50)

$$f(z) = f(0) + i\tau_\rho \hat{f} = f(0) + i\tau_\rho(U + i\tau_1 U) = P_\rho U + i\tau_\rho U$$

con $f(0)=U(0)=P_0U$. Entonces,

$$P_\rho U + i\tau_\rho U = P_0 U - \tau_\rho \tau_1 U + i\tau_\rho U$$

Por lo tanto,

$$P_\rho U = P_0 U - \tau_\rho \tau_1 U$$

y cuando ρ tiende a 1,

$$U = P_0 U - \tau_1^2 U$$

Tomando, U tal que

$$\int_{-\pi}^{\pi} U(\gamma)\,d\gamma = 0 = P_0 U$$

entonces, $\tau_1^2 = -Id$ sobre ese subespacio, es decir, τ_1 no puede -- ser compacto, porque si lo fuera, tambien $\tau_1^2 = -Id$ lo sería, cosa que no sucede.

De ahora en adelante, trabajaremos solo en L^2. Entonces, si

$$K_\rho \theta(\gamma) = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log(1+\rho^2 - 2\rho\cos(\gamma-\gamma'))\,\theta(\gamma')\,d\gamma'$$

encontramos que

$$\int_{-\pi}^{\pi} K_\rho \Theta(\gamma)\varphi(\gamma)d\gamma = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log(1+\rho^2-2\rho\cos(\gamma-\gamma'))\Theta(\gamma')\varphi(\gamma)\,d\gamma\,d\gamma'$$

de donde, por el teorema de Fubini y el hecho de que $\cos(\gamma-\gamma')=$ --- $\cos(\gamma'-\gamma)$, *tenemos*

$$(K_\rho\Theta,\varphi)=(\Theta,K_\rho\varphi)$$

es decir, que <u>K_ρ *es autoadjunto en* L^2, *para toda* $\rho\leq 1$</u>. <u>*Ademas, el* - *espectro de* K_ρ *es real y las funciones propias son ortogonales formando una base de* L^2</u>. ( )

Consideremos $L^2[-\pi,\pi]$ *con la base* $e^{in\gamma}$ *con* $n\in\mathbb{Z}$. *Si* θ *es una función propia de* K_1, *entonces* $K_1\theta=\mu\Theta$, *con* $\theta\in C^\infty$. *Luego,* - $K_\rho\theta$ *satisface*

$$\Delta(K_\rho\Theta)=0 \qquad \rho<1$$

$$K_0\Theta=0 \qquad \rho=0$$

$$\frac{\partial K_\rho\Theta}{\partial\rho}=\Theta-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mu\Theta\,d\gamma \qquad \rho=1$$

Pero,

$$K_0\Theta=0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}K_\rho\Theta\,d\gamma=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}K_1\Theta\,d\gamma=-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mu\Theta\,d\gamma$$

Por lo tanto, si $\mu\neq 0$, *entonces*

$$\int_{-\pi}^{\pi}\Theta\,d\gamma=0$$

y

$$\frac{\partial}{\partial\rho}(K_\rho\Theta)=\Theta=\frac{1}{\mu}K_1\Theta \qquad \text{en} \quad \rho=1$$

de donde, $K_1\hat{\theta}$ es solución del problema

$$\frac{\partial U}{\partial \rho} - \frac{U}{\rho} = 0 \quad \text{en } \rho = 1 \quad y \quad \Delta U = 0 \quad \text{en } \rho < 1 .$$

Pero, si tomamos

$$U = z^n = \rho^n e^{in\gamma}$$
$$U = \bar{z}^{n} = \rho^n e^{-in\gamma}$$

$\Delta U = 0$ si $n > 0$ y

$$\left.\frac{\partial U}{\partial \rho}\right|_{\rho=1} = n\rho^{n-1} e^{\pm in\gamma}\Big|_{\rho=1} = n e^{\pm in\gamma} = n\hat{U} .$$

Por lo tanto, $e^{\pm in}$ son funciones propias de K_1, si $n > 0$, con valor propio $1/n$.

Finalmente, $K_1(1) = 0$, ya que

$$(K_\rho(1))' = -T_\rho(1) = 0$$

de donde, $K_\rho(1) = cte = c(\rho)$. Pero, $K_\rho(1)$ es continua en ρ y $K_0(1) = 0$

Por lo tanto, $K(1) = 0$ para toda $\rho \leq 1$.

Entonces, cada elemento de la base de L^2 es vector propio de K_1. Si hubiera mas vectores propios, tendriamos que estos ultimos serían ortogonales (porque K_1 es autoadjunto) a todos los elementos de la base; entonces, deberían ser cero.

De esta manera, hemos probado que los valores propios de K_1 son el 0 y $\{1/n\}_{n=1}^{\infty}$ con vectores propios 1, $\cos(n\gamma)$ y $\operatorname{sen}(n\gamma)$.

Tambien, por último, K_1 es positivo definido, ya que

$$(K_1\varphi,\varphi) = \left(K_1\left(\frac{\alpha_0}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{n\geq 1}\frac{\alpha_n}{\sqrt{\pi}}\cos n\gamma + \frac{\beta_n}{\sqrt{\pi}}\operatorname{sen} n\gamma\right), \frac{\alpha_0}{\sqrt{2\pi}} + \cdots\right)$$
$$= \sum_{n\geq 1}\frac{\alpha_n^2+\beta_n^2}{n} \geq 0 \quad \forall\, \varphi .$$

4.D.2) El Operador τ_1

Sabemos que $\tau_1(cte)=0$, entonces tomando el subespacio de L^p y $C^{0,\alpha}$ tal que $\int_{-\pi}^{\pi}\theta\, d\vartheta = 0$ $(L^1 \subset L^p \subset C^{0,\alpha})$, entonces

$$\theta = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\theta\, dr + \left(\theta - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\theta\, dr\right) = c + v$$

de donde $\tau(\theta) = \tau(v)$. Ahora, de la relación $\theta = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\theta\, d\vartheta - \tau_1^2\theta$ encontramos

$$\tau_1^2 v = -v$$

Por lo tanto, sea $\mu \in \mathbb{C}$, entpnces, $(\tau_1-\mu)(\tau_1+\mu) = \tau_1^2-\mu^2 = -(1+\mu^2)I$ implica, si $\mu \neq \pm i$, $\tau_1 \pm \mu$ es uno-a-uno-sobre.

Como $z^n = \rho^n e^{in\theta}$ es analítica, con parte real $\rho^n \cos n\theta$ y parte imaginaria $\rho^n \operatorname{sen} n\theta$, tenemos que

$$P_\rho(\cos n\theta) = \rho^n \cos n\theta$$

$$\tau_\rho(\cos n\theta) = \rho^n \operatorname{sen} n\theta$$

de donde,

$$\tau_1(\cos n\theta) = \operatorname{sen} n\theta \qquad n \geq 1$$

$$\tau_1(\operatorname{sen} n\theta) = -\cos n\theta$$

ya que $\tau_1^2 = -Id$. Por lo tanto,

$$\tau_1(e^{\pm in\theta}) = \tau_1(\cos n\theta) \pm i\tau_1(\operatorname{sen} n\theta) = \operatorname{sen} n\theta \mp i\cos n\theta = \mp i\, e^{\pm in\theta} .$$

de donde, el espectro de τ_1 esta formado por $\{\pm i\}$, 0 .

5) El Operador no Lineal $A(\theta) = e^{-3\zeta_1(\theta)}sen(\theta)$.

Recordemos que tenemos que encontrar una función $\tilde{\theta}$ tal que

$$\int_{-1}^{1} \tilde{\theta}(r)\,dr = 0 \quad y \quad \tilde{\theta} = \lambda A K_1 \tilde{\theta}$$

o equivalentemente, una función $\hat{\theta}$ tal que

$$\hat{\theta} = \lambda K_1\left(e^{-3\zeta_1(\hat{\theta})} sen\,\hat{\theta}\right) = \lambda K_1 A \hat{\theta}$$

y en ambos casos necesitamos la condición para la solución:

$$(*) \qquad \int_{-\pi}^{\pi} e^{-3\zeta(\theta)} sen\,\theta\,d\gamma = 0$$

con $\theta=K_1\tilde{\theta}$ o $\theta=\hat{\theta}$. Tenemos, entonces que ver lo que significa el operador no lineal $e^{-3\zeta_1(\theta)}sen\,\theta$ en los distintos espacios en los cuales hemos trabajado, recordando que el problema físico pide $\Delta\theta=0,\ \theta_\rho=\lambda A(\theta)$ y $\theta(0)=0$ con θ continua en $[-\pi,\pi]$.

A continuación, haremos un esquema de los dos problemas que atacaremos en esta sección:

a) Sea

$$\tilde{\theta} = \lambda e^{-3\zeta_1 K_1\tilde{\theta}} sen\,K_1\tilde{\theta} = \lambda A K_1(\tilde{\theta})$$

Entonces, definido en los espacios siguientes, el operador AK_1 satisface

$$\begin{aligned} AK_1 :\ & H^{k,p} \longrightarrow H^{k+1,p} && 1<p<\infty\ ,\ k\geq 0 \\ :\ & C^{k,\alpha} \longrightarrow C^{k+1,\alpha} && 0<\alpha<1 \\ :\ & C^{0} \longrightarrow H^{1,p} && \forall\ p>1 \end{aligned}$$

siendo AK_1 Lipchitz, porque como veremos es analítico real. Ademas

$$|AK_1(\tilde{\theta}) - K_1\tilde{\theta}|_{\substack{H^{k+1,p}\\ C^{k+1,\alpha}\\ H^{1,p}}} \leq c|\theta|^2_{\substack{H^{k,p}\\ C^{k,\alpha}\\ C^{\circ}}}$$

con soluciones que son C^{∞}.

b) Sea

$$\hat{\theta} = \lambda K_1 e^{-3\tau_1\hat{\theta}} \operatorname{sen}\hat{\theta} = \lambda K_1 A(\hat{\theta})$$

Entonces, definido en los espacios

$$\begin{aligned} K_1A : H^{k,p} &\to H^{k+1,p} & 1<p<\infty, \ k\geq 1\\ : C^{k,\alpha} &\to C^{k+1,\alpha} & k\geq 0, \ 0<\alpha<1\\ : B(0,\tfrac{\pi}{6}(1-\epsilon)) &\to H^{1,p} & p=\tfrac{1}{1-\epsilon^2}, \ B(0,\pi/6(1-\epsilon))\subset C^{0}. \end{aligned}$$

es analítico real, donde en en último caso se tienen constantes de Lipchitz que tienden a infinito si ϵ tiende a cero. Ademas,

$$|K_1A(\hat{\theta}) - K_1\hat{\theta}|_{\substack{H^{k+1,p}\\ C^{k+1,\alpha}\\ H^{1,p}}} < c(\epsilon)|\hat{\theta}|^2_{\substack{H^{k,p}\\ C^{k,\alpha}\\ B(0,\frac{\pi}{6}(1-\epsilon))\subset C^{0}}}$$

con soluciones que son C^{∞}. (Notese que para C^{0}, es necesario que $|\hat{\theta}|_0<\pi/6$).

Ahora, nos disponemos a demostrar que los problemas (a) y (b) son equivalentes, es decir, que si $\tilde{\theta}$ es solución de (a), entonces, $\tilde{\theta}\in C^{\infty}$ y $K_1\tilde{\theta} = \hat{\theta}$ es solución de (b), es decir

$$\hat{\theta} = K_1\tilde{\theta} = \lambda K_1 e^{-3\tau_1 K_1\tilde{\theta}} \operatorname{sen} K_1\tilde{\theta} = \lambda K_1 e^{-3\tau_1\hat{\theta}} \operatorname{sen}\hat{\theta} = \lambda K_1 A(\hat{\theta}).$$

Y al revés, si $\hat{\theta}$ es solución de (b) con $|\hat{\theta}|_0<\pi/6$ o $\hat{\theta}\in C^{0,\alpha}$, entonces $\hat{\theta}\in C^{\infty}$. Ahora, sea

$$\tilde{\theta} = \lambda e^{-3\tau_1\hat{\theta}} \operatorname{sen}\hat{\theta}$$

Entonces,

$$K_1\tilde{\theta} = \lambda K_1\{e^{-3\tau_1\hat{\theta}}\operatorname{sen}\hat{\theta}\} = \hat{\theta}$$

y por lo tanto,

$$\tilde{\theta} = \lambda e^{-3\tau_1 K_1\tilde{\theta}}\operatorname{sen}\tilde{\theta}$$

de donde, los problemas (a) y (b) son equivalentes.

A continuación, nos disponemos a trabajar los dos problemas, (a) y (b), por separado, demostrando lo que esta dicho en cada uno de los enunciados, es decir, vamos a estudiar las propiedades de los operadores AK_1 y K_1A. Para cumplir con este propósito, demostraremos primero, algunos resultados que serán utilizados mas adelante.

__R.1__) Si θ es impar, entonces, de la sección anterior, $\tau_1(\theta)$ es par. Ademas, sen(θ) es impar. Por lo tanto, $A(\theta)(\gamma)$ es impar en γ, de donde

$$\int_{-\pi}^{\pi} A(\theta)(\gamma)\,d\gamma = 0$$

__R.2__) $|e^{-3\tau_1}\operatorname{sen}\theta_1 - e^{-3\tau_2}\operatorname{sen}\theta_2| \le e^{3\max(|\tau_1|,|\tau_2|)}(|\theta_1-\theta_2|+|\tau_1-\tau_2|)k$

__R.3__) $|e^{-3\tau_1}\cos\theta_1 - e^{-3\tau_2}\cos\theta_2| \le k\,e^{3\max(|\tau_1|,|\tau_2|)}(|\theta_1-\theta_2|+|\tau_1-\tau_2|)$

__Demostración.__ Como

$$e^{-3\tau_1}\operatorname{sen}\theta_1 - e^{-3\tau_2}\operatorname{sen}\theta_2 = e^{-3\tau_1}(\operatorname{sen}\theta_1-\operatorname{sen}\theta_2) + (e^{-3\tau_1}-e^{-3\tau_2})\operatorname{sen}\theta_2$$

Entonces

$$|e^{-3\tau_1}\operatorname{sen}\theta_1 - e^{-3\tau_2}\operatorname{sen}\theta_2| \le e^{3|\tau_1|}|\operatorname{sen}\theta_1-\operatorname{sen}\theta_2| + |e^{-3\tau_1}-e^{-3\tau_2}|$$

Ahora,

$$|\operatorname{sen}\theta_1 - \operatorname{sen}\theta_2| = \left|\int_{\theta_1}^{\theta_2} \cos\xi \, d\xi\right| \leq |\theta_1 - \theta_2|$$

$$|e^{-3\zeta_1} - e^{-3\zeta_2}| = \left|\int_{\zeta_1}^{\zeta_2} (-3e^{-3\xi})\, d\xi\right| \leq 3 \max e^{-3\xi} |\zeta_1 - \zeta_2|$$

De lo cual, se sigue R.2. La demostración de R.3 es similar.

R.4) $|\theta - \operatorname{sen}\theta| \leq |\theta|^3/3!$

Como sen $x = x - x^3/3! + x^5/5! - \ldots$, entonces

$$|\theta - \operatorname{sen}\theta| = |\theta^3/3! - \theta^5/5! + \cdots| \leq |\theta|^3/3!$$

R.5) Si $f \in L^\infty$ y $g \in L^p$, entonces, $fg \in L^p$.

Como

$$\int_{-\pi}^{\pi} |fg|^p \, d\gamma \leq \max |f^p| \int_{-\pi}^{\pi} |g|^p d\gamma \leq (\max|f|)^p \int_{-\pi}^{\pi} |g|^p d\gamma$$

ya que $|f(x_0)|$ es máximo, si y solo si $|f(x_0)|^p$ es máximo con $p \geq 1$-

Por lo tanto,

$$|fg|_{L^p} \leq \max |f| \left(\int_{-\pi}^{\pi} |g|^p d\gamma\right)^{1/p} = |f|_0 |g|_{L^p}$$

R.6) Si f y g estan en $C^{0,\alpha}$ entonces $fg \in C^{0,\alpha}$ y $|fg|_{0,\alpha} \leq 3|f|_{0,\alpha}|g|_{0,\alpha}$

$$f(\gamma_1)g(\gamma_1) - f(\gamma_2)g(\gamma_2) = (f(\gamma_1) - f(\gamma_2))g(\gamma_1) + f(\gamma_2)(g(\gamma_1) - g(\gamma_2))$$

$$|fg(\gamma_1) - fg(\gamma_2)| \leq |\gamma_1 - \gamma_2|^\alpha (|f|_{0,\alpha}|g|_0 + |f|_0 |g|_{0,\alpha})$$

de donde

$$|fg|_{0,\alpha} = |fg|_0 + \max \frac{|fg(\gamma_1) - fg(\gamma_2)|}{|\gamma_1 - \gamma_2|^\alpha}$$

$$\leq |fg|_0 + |f|_{0,\alpha}|g|_0 + |f|_0 |g|_{0,\alpha}$$

$$\leq 3|f|_{0,\alpha}|g|_{0,\alpha}.$$

R.7) *Teorema de Zygmund.* Si $|\theta|_0 \leq 1$, entonces (A-XIII)

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{\lambda|\tau_1\theta|} dr \leq \frac{4\pi}{\cos\lambda} \quad \text{para} \quad 0 \leq \lambda < \pi/2 .$$

5.A) El Operador AK_1.

a) $AK_1(\tilde{\theta}) \in H^{1,p}$ si $\tilde{\theta} \subset L^p$.

Si $\tilde{\theta} \in L^p$, entonces $K_1\tilde{\theta} \in H^{1,p}$ y $\tau_1(K_1\tilde{\theta}) \in H^{1,p}$. Por lo tanto, por ser e^x y sen x funciones analíticas y $H^{1,p} \subset C^{0,1-1/p}$ compactamente ( ), $AK_1(\tilde{\theta})$ es al menos continua.

Ahora,

$$\frac{d}{dr} AK_1(\tilde{\theta}) = 3\tau_1^2\tilde{\theta}\, AK_1(\tilde{\theta}) - \tau_1\tilde{\theta}\, e^{-3\tau_1 K_1\tilde{\theta}} \cos(K_1\tilde{\theta})$$

y como antes, $\tau_1(K_1\tilde{\theta}) \in H^{1,p} \subset C^{0,1-1/p} \subset L^\infty$, sen$(K_1\tilde{\theta})$, cos$(K_1\tilde{\theta})$, pertenecen a $C^{0,1-1/p} \subset L^\infty$ y por el resultado R.5, tenemos

$$\frac{d}{dr} AK_1(\tilde{\theta}) \in L^p .$$

de donde, la imagen de AK_1 está en $H^{1,p}$.

b) AK_1 es continuo como operador no lineal de L^p en $H^{1,p}$.

Ayudados por el resultado R.2 y el teorema de Riesz, llegamos a que (A-XIV)

$$|A(K_1\tilde{\theta}_1) - AK_1(\tilde{\theta}_2)|_{L^\infty} \leq k\, e^{C_A \max(|\tilde{\theta}_1|_{L^p}, |\tilde{\theta}_2|_{L^p})} (|\tilde{\theta}_1 - \tilde{\theta}_2|_{L^p})$$

es decir, A es Lipchitz de L^p en L^∞.

De igual forma, usando ademas el R.5 llegamos a que (A-XV)

$$\left|\frac{d}{dr} AK_1(\tilde{\theta}_1) - \frac{d}{dr} AK_1(\tilde{\theta}_2)\right|_{L^p} \leq k\, |\tilde{\theta}_1 - \tilde{\theta}_2|\, e^{C \max(|\tilde{\theta}_1|_{L^p}, |\tilde{\theta}_2|_{L^p})}$$

es decir, AK_1 es Lipchitz de L^p en $H^{1,p}$.

Ademas, la constante es uniforme si $|\tilde{\theta}_1|_{L^p}, |\tilde{\theta}_2|_{L^p} \leq K_1$. Con esto AK_1 manda conjuntos acotados en conjuntos acotados. Y como $H^{1,p} \subset L^p$ compactamente, entonces, <u>AK_1 es Lipchitz y compacto como operador no lineal en L^p</u> (   ).

c) <u>$AK_1 : H^{k,p} \longrightarrow H^{k+1,p}$ es Lipchitz.</u>

Como en (a), si $\tilde{\theta} \in H^{1,p}$, entonces

$$\frac{d}{dr} AK_1(\tilde{\theta}) = 3\tau_1^2(\tilde{\theta})\, e^{-3\tau_1 K_1 \tilde{\theta}} \operatorname{sen} K_1\tilde{\theta} - \tau_1(\tilde{\theta})\, e^{-3\tau_1 K_1 \tilde{\theta}} \cos(K_1\tilde{\theta})$$

como $K_1\tilde{\theta} \in H^{2,p}$ podemos calcular $\frac{d^2}{dr^2} AK_1$

$$\frac{d^2}{dr^2} AK_1(\tilde{\theta}) = 3\tau_1^2(\tilde{\theta}')\, e^{-3\tau_1 K_1 \tilde{\theta}} \operatorname{sen} K_1\tilde{\theta} - \tau_1(\tilde{\theta}')\, e^{-3\tau_1 K_1\tilde{\theta}} \cos K_1\tilde{\theta} - 3\tau_1 K_1\tilde{\theta}' (e^{-3\tau_1 K_1\tilde{\theta}} \operatorname{sen} K_1\tilde{\theta})' + K_1\tilde{\theta}' (e^{-3\tau_1 K_1\tilde{\theta}} \cos K_1\tilde{\theta})'$$

Como $\tilde{\theta}' \in L^p$, $K_1\tilde{\theta}' \in H^{1,p}$, $\tau_1\tilde{\theta} \in L^p$, $e^{-3\tau_1 K_1\tilde{\theta}} \left\{ \begin{matrix} \operatorname{sen} K_1\tilde{\theta} \\ \cos K_1\tilde{\theta} \end{matrix} \right\}$ y sus derivadas estan en $H^{1,p}$ y L^p, respectivamente, entonces, en $\frac{d^2}{dr^2} AK_1(\tilde{\theta})$ tendremos términos de la forma fg con $f \in L^p$ y $g \in H^{1,p}$. Por lo tanto, $\frac{d^2}{dr^2} AK_1(\tilde{\theta})$ esta en L^p. Como $e^{-3\tau\theta} \operatorname{sen}\theta$ es Lipchitz y los otros términos son lineales tendremos que

$$AK_1(\tilde{\theta}) : H^{1,p} \longrightarrow H^{2,p} .$$

<u>es Lipchitz.</u> Claramente, si $\theta \in H^{2,p}$, podemos de nuevo probar que - $AK_1(\tilde{\theta})$ esta en $H^{3,p}$ y define un operador Lipchitz. En general,

$$AK_1 : H^{k,p} \longrightarrow H^{k+1,p} \quad \text{es Lipchitz} .$$

Una consecuencia inmediata de (c) es que si $\tilde{\theta}$ es tal que

$$\tilde{\theta} = \lambda\, e^{-3\tau_1 K_1 \tilde{\theta}} \operatorname{sen} K_1\tilde{\theta}$$

entonces

$$(*) \qquad \tilde{\theta} = \lambda A K_1(\tilde{\theta})$$

Si $\tilde{\theta} \in L^p$, $AK_1(\tilde{\theta}) \in H^{1,p}$ y entonces $\tilde{\theta} \in H^{1,p}$. Pero, entonces, $AK_1\tilde{\theta} \in H^{2,p}$ y así sucesivamente. Por lo tanto, <u>si $\tilde{\theta} \in L^p$ es solución de $(*)$, entonces, $\tilde{\theta} \in C^{\infty}$</u>.

d) <u>AK_1 como operador no lineal de $C^{0,\alpha} \longrightarrow C^{1,\alpha}$ es Lipchitz y compacto en $C^{0,\alpha}$ con $0 < \alpha < 1$.</u>

<u>Demostración</u>. Si $\tilde{\theta} \in C^{0,\alpha}$, entonces, $K_1\tilde{\theta} \in C^{1,\alpha}$ y $\tau_1 K_1\tilde{\theta} \in C^{1,\alpha}$.

Nuevamente, por el R.2 (A-XVI)

$$|AK_1(\tilde{\theta})|_{0,\alpha} \leq C\, e^{C|\tilde{\theta}|_{0,\alpha}} |\tilde{\theta}|_{0,\alpha}$$

Por lo tanto, <u>si $\tilde{\theta} \in C^{0,\alpha}$, $AK_1(\tilde{\theta}) \in C^{0,\alpha}$</u>. Ahora,

$$\frac{d}{dr} AK_1(\tilde{\theta})(r_1) - \frac{d}{dr} AK_1(\tilde{\theta})(r_2) = \{(\tau_1^2\tilde{\theta}(r_1) - \tau_1^2\tilde{\theta}(r_2))\, 3\,\mathrm{sen}\, K_1\theta(r_1) - (\tau_1\tilde{\theta}(r_1) - \tau_1\tilde{\theta}(r_2))\cos K_1\theta(r_1)\} \times$$
$$\times\, e^{-3\tau_1 K_1\theta(r_1)} + 3\tau_1^2\tilde{\theta}(r_2)\left(e^{-3\tau_1 K_1\tilde{\theta}(r_1)}\,\mathrm{sen}\, K_1\tilde{\theta}(r_1) - e^{-3\tau_1 K_1\tilde{\theta}(r_2)}\,\mathrm{sen}\, K_1\tilde{\theta}(r_2)\right) - \tau_1\tilde{\theta}(r_2)\left(\cos K_1\tilde{\theta}(r_1)\, e^{-3\tau_1 K_1\theta(r_1)} -\right.$$
$$\left. - \cos K_1\tilde{\theta}(r_2)\, e^{-3\tau_1 K_1\theta(r_2)}\right)$$

y como antes,

$$\left|\frac{d}{dr} AK_1\tilde{\theta}(r_1) - \frac{d}{dr} AK_1\tilde{\theta}(r_2)\right| \leq C(|\theta|_{0,\alpha})\, |\theta|_{0,\alpha}\, |r_1 - r_2|^{\alpha}$$

Por lo tanto, <u>si $\theta \in C^{0,\alpha}$, $AK_1\tilde{\theta} \in C^{1,\alpha}$</u>.

Con este resultado se puede demostrar que si escribimos

$$(+) \quad AK_1\tilde{\theta}_1 - AK_1\tilde{\theta}_2 = \int_0^1 e^{-3\tau_1(K_1\tilde{\theta}_2 + t(K_1\tilde{\theta}_1 - K_1\tilde{\theta}_2))} \{\cos(K_1\tilde{\theta}_2 + t(K_1\tilde{\theta}_1 - K_1\tilde{\theta}_2)) - 3\,\mathrm{sen}(K_1\tilde{\theta}_2 + t(K_1\tilde{\theta}_1 - K_1\tilde{\theta}_2))\,\tau_1\}(K_1\tilde{\theta}_1 - K_1\tilde{\theta}_2)\,dt$$

entonces, usando el R, 6

$$|AK_1\tilde{\theta}_1 - AK_1\tilde{\theta}_2|_{0,\alpha} \leq e^{3\max \tau_1 (K_1\tilde{\theta}_2 + t(K_1\tilde{\theta}_1 - K_1\tilde{\theta}_2))} \{|K_1\tilde{\theta}_1 - K_1\tilde{\theta}_2|_{0,\alpha} + |\tau_1 K_1\tilde{\theta}_1 - \tau_1 K_1\tilde{\theta}_2|_{0,\alpha}\}$$
$$\leq K(\tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2)\, |\tilde{\theta}_1 - \tilde{\theta}_2|_{0,\alpha}$$

Del mismo modo, si ahora derivamos (+) con respecto a r dentro de la integral, se obtiene

$$\left| \frac{dAK_1\tilde{\theta}_1}{dr} - \frac{dAK_1\tilde{\theta}_2}{dr} \right| \leq K(\tilde{\theta}_1,\tilde{\theta}_2)\, |\tilde{\theta}_1 - \tilde{\theta}_2|_{0,\alpha} .$$

Esto prueba que AK_1 es Lipchitz de $C^{0,\alpha}$ en $C^{1,\alpha}$.

e) Si $\theta \in C^0$, entonces, AK_1 es Lipchitz de C^0 en $H^{1,r}$ para toda $r \in]1,\infty[$

Como $C^0 \subset L^r$ para toda r, entonces por (a) se sigue (e).

f) Como función de θ, AK_1 es C^1 entre los espacios: $L^p \to H^{1,p}$, $C^{0,\alpha} \to C^{1,\alpha}$, $C^0 \to H^{1,r}$.

Demostración. Escribamos, para θ y $h \in L^p$

$$\begin{aligned} AK_1(\theta+h) - AK_1(\theta) = {} & e^{-3\tau_1 K_1\theta}\{-3\tau_1 K_1 h \operatorname{sen} K_1\theta + K_1 h \cos K_1\theta\} + \\ & + e^{-3\tau_1 K_1\theta}\{\operatorname{sen} K_1\theta\,(e^{-3\tau_1 K_1 h}\cos K_1 h - 1 + 3\tau_1 K_1 h) + \\ & + \cos K_1\theta\,(\operatorname{sen} K_1 h\, e^{-3\tau_1 K_1 h} - K_1 h)\} . \end{aligned}$$

El primer término: $e^{-3\tau_1 K_1\theta}\{\cos(K_1\theta)K_1 - 3\operatorname{sen}(K_1\theta)\tau_1 K_1\}h$ es lineal en h y continuo entre esos espacios, por las propiedades de K_1 y del operador no lineal $e^{-3\tau_1 K_1\theta}\left\{\begin{matrix}\operatorname{sen} K_1\theta \\ \cos K_1\theta\end{matrix}\right\}$. El segundo término y su derivada son acotados por $|h|^2_{L^p}$ (A-XVII) y por lo tanto, existe efectivamente la derivada de Frechet de $AK_1(\theta)$ que esta dada por el primer término

$$DAK_1(\theta) = e^{-3\tau_1 K_1\theta}\{\cos(K_1\theta)K_1 - 3\operatorname{sen}(K_1\theta)\tau_1 K_1\}$$

Para $\theta \in C^{0,\alpha}$ se sigue el mismo procedimiento. En el caso de C^0, tenemos

$$|AK_1\tilde{\theta} - K_1\tilde{\theta}|_{H^{1,r}} \leq C|\tilde{\theta}|^2_{L^r} \leq C|\tilde{\theta}|^2_{C^0} , \quad 1<r<\infty .$$

es decir, el residuo y su derivada estan acotados, de donde tenemos la misma derivada de Frechet.

Evidentemente, la derivada de Frechet es diferenciable con respecto a θ y así sucesivamente. Entonces, $AK_1\theta$ es C^∞ en esos espacios. De hecho, $AK_1\theta$ es analítico real, es decir, tiene una serie de Taylor convergente, ya que la serie para $e^{-3\tau_1 K_1\theta}\operatorname{sen} K_1\theta$ es uniformemente convergente y $|K_1\theta|, |\tau_1 K_1\theta|$ son acotados para todo γ, ya que pertenecen a $H^{1,p} \subset C^{0,1-1/p}$. (A·XVII).

Por último, tambien es cierto que

g) Si $\theta=0$, entonces, $DAK_1(0)=K_1$.

Esto es directo, ya que la derivada de Frechet es

$$DAK_1\theta = e^{-3\tau_1 K_1\theta}\{\cos(K_1\theta)K_1 - 3\operatorname{sen}(K_1\theta)\tau_1 K_1\}$$

y en $\theta=0$ da K_1. Ademas, el residuo dado por $\operatorname{sen} K_1 h\, e^{-3\tau_1 K_1 h} - K_1 h$ es cuadrático en h, como antes.

Esto concluye el estudio del operador AK_1. Ahora, vayamos a ver lo que sucede con el operador K_1A.

5.B) El Operador K_1A.

Notese que si $\theta \in L^p$, $\operatorname{sen}\theta \in L^\infty$ y $\tau_1\theta \in L^p$, de donde $e^{-3\tau_1\theta}\operatorname{sen}\theta$ puede no estar bien definido. Por ejemplo, supongamos que $\int_{-\pi}^{\pi}\theta(\gamma)d\gamma=0$. Ahora, $\tau_1^2\theta=-\theta$, entonces τ_1^2 es uno-a-uno sobre, en el espacio ortogonal a las constantes bajo la norma de L^2. Pero, entonces τ_1 es uno-a-uno sobre y podemos tomar $\varphi \in L^2$ con

$$\varphi(r) \sim \frac{1}{r^{\alpha}} \quad , \; 0 < \alpha < \frac{1}{2} \quad y \; \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(r)\, dr = 0 \; .$$

Entonces, $\varphi(r) = \mathcal{T}_1\theta$ para algún θ y $e^{-3\mathcal{T}_1\theta} = e^{3/|r|^{\alpha}}$, $|r| < 1/2$ tiene una singularidad esencial en $r = 0$. De esta manera, no podemos tomar $\theta \in L^p$ para el caso de trabajar con el operador $K_1 A$.

PRIMER CASO. $\theta \in C^{0,\alpha}$, $H^{1,p}$.

Si $\theta \in C^{0,\alpha}$, entonces, sen$\theta \in C^{0,\alpha}$, $\mathcal{T}_1\theta \in C^{0,\alpha}$, $e^{-3\mathcal{T}_1\theta} \in C^{0,\alpha}$ $A\theta \in C^{0,\alpha}$ y por lo tanto, $K_1 A\theta \in C^{1,\alpha}$, es decir,

$$|K_1 A\theta_1 - K_1 A\theta_2|_{0,\alpha} \leq C|A\theta_1 - A\theta_2|_{0,\alpha} \leq C(\theta_1,\theta_2)\,|\theta_1 - \theta_2|_{0,\alpha}$$

como en la sección anterior, inciso (d). (Ver AXVI). De esta manera

$$K_1 A(\theta) : C^{0,\alpha} \longrightarrow C^{1,\alpha}$$

es Lipchitz y compacto como operador de $C^{0,\alpha}$ en $C^{0,\alpha}$. De hecho,

$$K_1 A : H^{k,p} \longrightarrow H^{k+1,p} \quad \text{es Lipchitz para } k \geq 1,\ p > 1$$

$$K_1 A : C^{k,\alpha} \longrightarrow C^{k+1,\alpha} \quad \text{es Lipchitz para } k \geq 0,\ 0 < \alpha < 1$$

entonces, al igual que antes, las soluciones en $H^{1,p}$ o $C^{0,\alpha}$ son C^{∞}

Del mismo modo que en la sección anterior

$$K_1 A(\theta + h) - K_1 A(\theta) = K_1 \{ e^{-3\mathcal{T}_1\theta}(\cos\theta - 3\,\mathrm{sen}\,\theta\, \mathcal{T}_1) h \} +$$

$$K_1 \{ e^{-3\mathcal{T}_1\theta}(\mathrm{sen}\,\theta\,(e^{-3\mathcal{T}_1 h}\cos h - 1 + 3\mathcal{T}_1 h) + \cos\theta\,(\mathrm{sen}\,h\, e^{-3\mathcal{T}_1 h} - h)) \} .$$

es decir, si θ , $h \in C^{0,\alpha}$, entonces la parte lineal (en h) está en $C^{1,\alpha}$ y la parte no lineal es cuadrática en h y tambien esta en $C^{1,\alpha}$. Por lo tanto, $K_1 A : C^{0,\alpha} \longrightarrow C^{1,\alpha}$ es C^1 y de hecho es analítico.

Ademas, $K_1 A: H^{k,p} \to H^{k+1,p}$ es analítico con $k \geq 1$, porque el residuo satisface como antes

$$|K_1 A\theta - K_1\theta|_{1,\alpha} \leq c|\theta|^2_{0,\alpha}$$

$$|K_1 A\theta - K_1\theta|_{H^{k+1,p}} \leq c|\theta|^2_{H^{k,p}} \qquad k \geq 1$$

SEGUNDO CASO. $\theta \in C^0$.

Si $A(\theta) = e^{-3\mathcal{T}_1(\theta)}\operatorname{sen}(\theta)$, con $\theta \in C^0$ ($\operatorname{sen}(\theta) \in C^0$), entonces

$$|A(\theta)|^p \leq e^{3p|\mathcal{T}_1\theta|}|\operatorname{sen}\theta|^p \leq e^{3p|\mathcal{T}_1\theta|}$$

y

$$\int_{\pi}^{\pi} |A(\theta)|^p d\gamma \leq \int_{-\pi}^{\pi} e^{3p|\mathcal{T}_1\theta|} d\gamma = \int_{-\pi}^{\pi} e^{3p|\theta|_0 \left|\mathcal{T}_1 \frac{\theta}{|\theta|_0}\right|} d\gamma$$

$$\leq \frac{4\pi}{\cos(3p|\theta|_0)} \qquad \text{si } 3p|\theta|_0 < \pi/2$$

por el teorema de Zygmund (R.7). Por lo tanto, dado $\theta \in C^0$, $A(\theta) \in L^p$ con $1 < p < \frac{\pi}{6|\theta|_0}$, implica $|\theta|_0 < \pi/6$. O dado $p > 1$, $A(\theta) \in L^p$ si $|\theta|_0 < \pi/6$. En ambos casos, $K_1 A(\theta) \in H^{1,p} \subset C^{0,1-1/p}$. y toda solución es C^∞, ya que despues no importa la norma.

Por otro lado,

$$|A(\theta_1) - A(\theta_2)|^p \leq K e^{3\max(|\mathcal{T}_1\theta_1|, |\mathcal{T}_1\theta_2|)}(|\theta_1 - \theta_2| + |\mathcal{T}_1(\theta_1 - \theta_2)|)^p$$

$$\leq K' e^{3\max(|\mathcal{T}_1\theta_1|, |\mathcal{T}_1\theta_2|)p}(|\theta_1 - \theta_2|^p + |\mathcal{T}_1(\theta_1 - \theta_2)|^p)$$

Para poder continuar, veamos los siguientes resultados.

i) $e^{3p\max(|\mathcal{T}_1\theta_1|, |\mathcal{T}_1\theta_2|)} \in L^q$ con $3pq|\theta_1|_0$, $3pq|\theta_2|_0 < \pi/2$.

ii) $|\theta_1 - \theta_2|^p \in L^\infty$ y $|\theta_1 - \theta_2|^p_{L^\infty} \leq C|\theta_1 - \theta_2|^p_0$.

iii) $|\tau_1(\theta_1-\theta_2)|^p \in L^r$ para toda $r>1$ con

$$\| \tau_1(\theta_1-\theta_2)|^p|_{L^r}^r = \left(\int_{-\pi}^{\pi} |\tau_1(\theta_1-\theta_2)|^{pr} d\sigma\right)^{1/rp} = |\tau_1(\theta_1-\theta_2)|_{L^{rp}}^p$$

$$\leq C|\theta_1-\theta_2|_{L^{rp}}^p \leq C|\theta_1-\theta_2|_{\infty}^p$$

iv) Tomando r igual al conjugado de q, si $|\theta_1|_0$, $|\theta_2|_0 \leq \frac{\pi}{6}(1-\epsilon)$, - entonces, necesitamos que $q=1+\eta$ y ponemos p tal que

$$3p(1+\eta)\left(\frac{\pi}{6}(1-\epsilon)\right) < \pi/2$$

de donde

$$p(1+\eta)(1-\epsilon) < 1$$

Ahora, podemos tomar $p=(1-\epsilon^2)^{-1}$ y $\eta=\epsilon/2$, resultando

$$p(1+\eta)(1-\epsilon) = \frac{1+\epsilon/2}{1+\epsilon} < 1$$

Con esto podemos concluir que

$$|A(\theta_1)-A(\theta_2)|_{L^p} \leq C(\epsilon)|\theta_1-\theta_2|_0$$

donde $C(\epsilon)$ tiende a ∞ si ϵ tiende a 0, por el término $\cos\lambda$. También es cierto que

$$|K_1A(\theta_1)-A(\theta_2)|_{H^{1,p}} \leq C|\theta_1-\theta_2|_{L^p} \leq C(\epsilon)|\theta_1-\theta_2|_0$$

Luego, $K_1A: C^0 \longrightarrow H^{1,p}$ es Lipchitz si $|\theta|_0 \leq \frac{\pi}{6}(1-\epsilon)$ y $\epsilon>0$.

Nuevamente, al calcular la derivada de Frechet, obtenemos

$$K_1A(\theta+h)-K_1A(\theta) = K_1(e^{-3\tau_1\theta}(\cos\theta-3\sin\theta\,\tau_1)h) +$$

$$+ K_1(e^{-3\tau_1\theta}\{\sin\theta(e^{3\tau_1h}\cos h-1+3\tau_1h)+\cos\theta(\sin h\,e^{3\tau_1h}-h)\}$$

Si $\theta \in C^0$ *y* $|\theta|_0 \leq \frac{\pi}{6}(1-\epsilon)$, *entonces*

$$(\cos\theta)h \in C^0 \subset L^\infty \quad y \quad \tau_1 h \in L^r$$

Por lo tanto,

$$DA(\theta)(h) = e^{-3\tau_1\theta}(\cos\theta - 3\sin\theta\,\tau_1)h \in L^p$$

como antes. Y usando el R.2, como antes <u>*DA(θ) es Lipchitz en θ de C^0 en L^p si $|\theta|_0 \leq \frac{\pi}{6}(1-\epsilon)$*</u>.

Tratemos de ver que esta afirmación puede ser extendida al -- espacio $H^{1,p}$. Veamos que el residuo, se acota por

$$|e^{-3\tau_1\theta}\sin\theta\,(e^{-3\tau_1 h}\cos h - 1 + 3\tau_1 h)|_{L^p}^{p} \leq |e^{3|\tau_1\theta|}|_{L^q}\,|(e^{-3\tau_1 h}\cos h - 1 + 3\tau_1 h)|_{L^{q'}}$$

$$\text{con } \frac{1}{q'} + \frac{1}{q} = 1$$

Ya vimos que

$$|e^{-3\tau_1 h}\cos h - 1 + 3\tau_1 h| \leq C e^{3|\tau_1 h|}|\tau_1 h|^2$$

entonces,

$$|e^{-3\tau_1\theta}\sin\theta\,(e^{-3\tau_1 h}\cos h - 1 + 3\tau_1 h)|^{pq'} \leq C e^{3pq'|\tau_1 h|}|\tau_1 h|^{2pq'}$$

Ahora, usando Hölder, tenemos

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\quad|^{pq'}\,dr \leq |e^{3pq'|\tau_1 h|}|_{L^r}\,||\tau_1 h|^{2pq'}|_{L^{r'}} \leq |e^{3pq'r|\tau_1 h|}|_{L^1}^{1/r}\,|\tau_1 h|_{L^{2pq'r'}}^{2pq'}$$

de donde,

$$|\quad|_{L^{q'}} \leq |e^{3pq'r|\tau_1 h|}|_{L^1}^{1/rq'}\,|\tau_1 h|_{L^{2pq'r'}}^{2p} \leq C\,|h|_{C^0}^{2p}$$

ya que $\tau_1 : C^0 \subset L^{2pq'r'} \longrightarrow L^{2pq'r'}$ y Como $|h|_0$ es arbitrariamente -- pequeña, podemos tomar p y q como antes y $r > 1$ arbitrario, tomando $|h|_0$ tal que $3pq'r|h|_0 < \pi/2$.

El otro término del residuo, $e^{-3\tau_1\theta}(\operatorname{senh} e^{-3\tau_1 h} - h)\cos\theta$ es así

$$|\operatorname{senh} e^{-3\tau_1 h} - h| = \left|(\operatorname{senh} - h)e^{-3\tau_1 h} - 3h\int_0^1 e^{-3s\tau_1 h}\tau_1 h\, ds\right| \leq |h|^3 e^{3|\tau_1 h|} + 3|h||\tau_1 h| e^{|3\tau_1 h|}$$

y se hace lo mismo de antes. Por lo tanto, $\underline{K_1 A : \{\theta \,/\, |\theta|_0 < \tfrac{\pi}{6}(1-\epsilon)\} C^0 \longrightarrow H^{1,p}}$ <u>es C^1</u>. De hecho, <u>es analítico</u> (A-XIX), ya que las derivadas sucesivas tienen términos $\cos(\theta)$ o $\operatorname{sen}(\theta)$ acotados, $\tau_1\theta : C^0 \longrightarrow L^r$ y $e^{-3\tau_1\theta}$ se estiman como antes.

CAPITULO III

ESTUDIO DE LA BIFURCACION

1) Introducción

2) La no Bifurcación

3) Bifurcación Local

1) Introducción

En este capítulo, estimaremos el aspecto local de las soluciones. Para ello, comenzaremos estudiando las simetrias involucradas en los operadores y sus respectivas interpretaciones físicas.

Después, haciendo uso de la descomposición espectral de K_1, proyectaremos la solución θ en dos espacios, dividiendo el problema de encontrar una solución al problema (a) en dos problemas, uno por cada espacio proyectado. Aquí, pueden ser planteadas las así llamadas ecuaciones de bifurcación, cuya solución se simplifica recurriendo a la simetría y se encuentra usando el Teorema de la función implícita.

Empecemos por la simetría. Sea $\varphi(\gamma)$alguna función. Entonces,

$$\mathcal{F}(\rho e^{i\gamma}) = P_\rho \varphi(\gamma) + i\, \mathcal{T}_\rho \varphi(\gamma)$$

tiene representación única si $Im\varphi(0)=0$ y es analítica con

$$\mathcal{F}(e^{i\gamma}) = \varphi(\gamma) + i\, \mathcal{T}_1 \varphi(\gamma)$$

y

$$\mathcal{F}(\rho^n e^{in\gamma}) = \mathcal{F}(z^n) = \mathcal{F}(\rho^n e^{in\gamma})$$

Si definimos

$$G(z) \equiv \mathcal{F}(z^n) = \mathcal{F}(\rho^n e^{in\gamma})$$

entonces, $G(z)$ es analítica, ya que z^n y F lo son. Ademas, para $\rho=1$ $ReG(e^{i\gamma})=ReF(e^{in\gamma})= \varphi(n\gamma)$, de donde

$$G(z) = G(\rho e^{i\gamma}) = P_\rho \varphi_n(\gamma) + i\,T_\rho \varphi_n(\gamma)$$

donde $\varphi_n(\gamma) = \varphi(n\gamma)$. Encontes, comparando con la representación de $F(z^n)$

$$P_{\rho^n} \varphi(n\gamma) = P_\rho \varphi_n(\gamma)$$

$$T_{\rho^n} \varphi(n\gamma) = T_\rho \varphi_n(\gamma)$$

y por lo tanto,

$$T_1 \varphi(n\gamma) = T_1 \varphi_n(\gamma)$$

Ahora, $K_\rho \varphi$ tiene la propiedad de que

$$\frac{d}{d\gamma} K_\rho \varphi = - T_\rho \varphi(\gamma)$$

es decir,

$$\frac{d}{d\gamma} K_\rho \varphi_n(\gamma) = - T_\rho \varphi_n(\gamma) = - T_{\rho^n} \varphi(n\gamma)$$

$$= \frac{d}{dn\gamma} K_{\rho^n} \varphi(n\gamma) = \frac{1}{n} \frac{d}{d\gamma} K_{\rho^n} \varphi(n\gamma)$$

de donde

$$K_\rho \varphi_n(\gamma) = \frac{1}{n} K_{\rho^n} \varphi_n(\gamma) + c(\rho)$$

con $c(\rho)$ una función diferenciable en ρ como K_ρ y K_{ρ^n}, que satisface $c(0)=0$, porque $K_0\varphi = 0$. Ahora, en $\rho = 1$,

$$\frac{\partial}{\partial\rho} K_\rho \varphi_n(\gamma) = \varphi_n(\gamma) - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi_n(\gamma)\,d\gamma$$

$$\frac{\partial}{\partial\rho} K_{\rho^n} \varphi_n(\gamma) = n\rho^{n-1} \frac{\partial}{\partial\rho^n} K_{\rho^n}\varphi_n(\gamma) = n\rho^{n-1}\left\{ \varphi_n(\gamma) - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi_n\,d\gamma \right\}$$

Entonces, derivando la expresión de arriba y evaluando en $\rho=1$, tenemos que

$$\varphi_n(\gamma) - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi_n(\gamma)\,d\gamma = \frac{n}{n}\left\{ \varphi_n(\gamma) - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi_n(\gamma)\,d\gamma \right\} + c'(\rho)$$

es decir, $c'(\rho)=0$, de donde $c=cte=c(0)=0$. Luego,

$$K_\rho \varphi_n(r) = \frac{1}{n} K_{\rho n} \varphi_n(r)$$

En particular, para $\rho=1$

$$n K_1 \varphi_n(r) = K_1 \varphi(nr)$$

Ahora, apliquemos estos resultados a los problemas (a) y (b). Tenemos que si $\hat{\theta}(r)$ es solución de (b)

$$\hat{\theta}(r) = \lambda \{ K_1 (e^{-3\tau_1 \hat{\theta}} \operatorname{sen} \hat{\theta}) \} (r)$$

es decir, $\hat{\theta}(r) = \lambda K_1 \varphi(r)$. Entonces,

$$\hat{\theta}(nr) = \lambda K_1 \varphi(nr) = n\lambda K_1 \varphi_n(r) = \hat{\theta}_n(r)$$

Pero, $\varphi(r) = e^{-3\tau_1 \hat{\theta}(r)} \operatorname{sen} \hat{\theta}(r)$; entonces,

$$\varphi_n(r) = \varphi(nr) = e^{-3\tau_1 \hat{\theta}(nr)} \operatorname{sen} \hat{\theta}(nr) = e^{-3\tau_1 \hat{\theta}_n(r)} \operatorname{sen} \hat{\theta}_n(r) = A\hat{\theta}_n(r)$$

por lo tanto, $\hat{\theta}_n(r) = n\lambda K_1 A \hat{\theta}_n(r)$.

La interpretación física es clara recordando que $\hat{\theta}$ corresponde al ángulo de la ola; entonces $\hat{\theta}(nr)$ recorre n periodos cuando r recorre el intervalo $[0,2\pi]$ y corresponde a nh ($\lambda = \frac{gh}{2\pi U^2}$ es lineal en h). Luego, si $\hat{\theta}(r)$ es solución al problema de una ola con un periodo, $\hat{\theta}_n(r) = \hat{\theta}(nr)$ es solución al problema de una ola con n periodos. Inversamente, para el problema (a), si

$$\tilde{\theta}(r) = \lambda e^{-3\tau_1 K_1 \tilde{\theta}(r)} \operatorname{sen} K_1 \tilde{\theta}(r)$$

entonces

$$\tilde{\theta}_n(\gamma) = \tilde{\theta}(n\gamma) = \lambda e^{-3\tau_1 K_1 \tilde{\theta}(n\gamma)} \operatorname{sen} K_1 \tilde{\theta}(n\gamma)$$

$$= \lambda e^{-n 3\tau_1 K_1 \tilde{\theta}_n(\gamma)} \operatorname{sen} n K_1 \tilde{\theta}_n(\gamma)$$

de donde

$$n\tilde{\theta}_n(\gamma) = \lambda n \, e^{-3\tau_1 K_1 (n\tilde{\theta}_n)(\gamma)} \operatorname{sen} (n\tilde{\theta}_n)(\gamma)$$

es decir, $n\tilde{\theta}_n$ es solución. Recordemos que

$$\theta(\gamma) = \frac{\partial}{\partial\rho} \tilde{\theta}(\rho e^{i\gamma}) \Big|_{\rho=1}$$

de donde,

$$\theta_n(\gamma) = \frac{\partial}{\partial\rho} \hat{\theta}(\rho^n e^{in\gamma}) \Big|_{\rho=1}$$

$$= \frac{\partial\rho^n}{\partial\rho}\Big|_{\rho=1} \frac{\partial}{\partial\rho^n} \hat{\theta}(\rho^n e^{in\gamma}) \Big|_{\rho=1} = n\tilde{\theta}(\gamma)$$

Entonces, si $\hat{\theta}$ corresponde a una solución bifurcada cerca de $\lambda=1$ $\hat{\theta}_n$ da una solución bifurcada cerca de $\lambda=n$. El inverso no es necesariamente cierto.

Ademas de esta simetría, nos encontramos con otra. Si

$$\theta(\gamma) = \lambda e^{-3\tau_1 K_1 \theta(\gamma)} \operatorname{sen} K_1 \theta(\gamma)$$

entonces, $\theta_\varphi(\gamma) = \theta(\gamma+\varphi)$ tambien es solución. De hecho,

$$\theta(\gamma+\varphi) = \lambda e^{-3\tau_1 K_1 \theta(\gamma+\varphi)} \operatorname{sen} K_1 \theta(\gamma+\varphi)$$

con

$$K_1\theta(r+\varphi) = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log\left(4 \operatorname{sen}^2 \frac{u}{2}\right) \theta(r+\varphi+u)\,du = K_1\theta_\varphi(r)$$

y

$$\mathcal{C}_1\theta(r+\varphi) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cot\frac{u}{2}\,\{\theta(r+\varphi+u) - \theta(r+\varphi)\}\,du = \mathcal{C}_1\theta_\varphi(r)$$

por lo tanto,

$$\theta_\varphi(r) = \lambda\, e^{-3\mathcal{C}_1 K_1 \theta_\varphi(r)} \operatorname{sen} K_1\theta_\varphi(r)$$

Lo mismo sucede para el problema (b). Si $\theta(r) = \lambda K_1(e^{-3\mathcal{C}_1\theta}\operatorname{sen}\theta)(r)$ *entonces,*

$$\theta_\varphi(r) = \lambda K_1(e^{-3\mathcal{C}_1\theta(r+\varphi)}\operatorname{sen}\theta(r+\varphi)) = \lambda K_1(e^{-3\mathcal{C}_1\theta_\varphi}\operatorname{sen}\theta_\varphi)(r)$$

Esto, corresponde al hecho físico de que podemos tomar el origen en cualquier punto de la ola.

2) La no Bifurcación.

Aquí demostraremos que en $\theta=0$ *no existen soluciones bifurcadas. Escribamos los dos problemas (a) y (b) como*

$$(I - \lambda K_1)\theta = \lambda(B(\theta) - K_1\theta)$$

Sea $(0, \lambda)$ *un punto del plano* (θ, λ)*. Entonces, decimos que* $(0, \lambda)$ *es un punto de bifurcación si en cada vecindad de el, existen soluciones con* $\theta \neq 0$*.*

Si $1/\lambda$ *no pertenece al espectro de* K_1 *(donde el espectro es -*

independiente del espacio), entonces, $I-\lambda K_1$ es invertible y

$$\theta = \lambda(I-\lambda K_1)^{-1}(B\theta - K_1\theta)$$

Como consecuencia,

$$|\theta| \leq \lambda |(I-\lambda K_1)^{-1}| \, |B\theta - K_1\theta|_{\text{espacio lado izquierdo}}$$

$$\leq |\lambda| \, |(I-\lambda K_1)^{-1}| \, |B\theta - K_1\theta|_{\text{espacio lado derecho}} \leq c \, |(I-\lambda K_1)^{-1}|_1 \, |\theta|_1^2$$

Entonces, si $|\theta| \neq 0$, $1 \leq c(\lambda)|\theta|$, con $\lambda \neq 0$, ya que $\lambda = 0$ corresponde a $\theta = 0$, es decir, que si λ^{-1} no pertenece al espectro de K_1, entonces, no podemos tomar soluciones de norma arbitrariamente pequeña y por lo tanto, $(0,\lambda)$ no es un punto de acumulación, lo que quiere decir, que la solución $\theta = 0$, es aislada.

3) Bifurcación Local.

ADVERTENCIA. La numeración de las ecuaciones en esta sección es independiente de aquella que aparecio antes.

La descomposición espectral del operador K_1, nos hace preferir el problema (a), ya que si $\theta \in L^2(S)$, donde $S = [-\pi, \pi]$ y escribimos

$$\theta = \theta_0 + \sum_n \frac{\alpha_n}{\sqrt{\pi}} \sin n\delta + \frac{\beta_n}{\sqrt{\pi}} \cos n\delta$$

entonces, $K_1\theta$ y $\mathcal{T}_1\theta$ tendrán representaciones semejantes y por ---

lo tanto, $A(\theta)$ tendrá un aspecto simple que nos permitirá escribir las ecuaciones de bifurcación de manera manejable.

Sea $\theta \in L^2(S)$, tal que resuelva el problema (a), es decir,

$$(1) \qquad \theta = \lambda e^{-3\tau_1 K_1 \theta} \operatorname{sen} K_1 \theta$$

Ahora, si $\theta \in L^2(S)$, entonces

$$(2) \qquad \theta = \theta_0 + \sum{}' \frac{\alpha_n}{\sqrt{\pi}} \operatorname{sen} n\gamma + \frac{\beta_n}{\sqrt{\pi}} \cos n\gamma$$

Sea P = Proyección sobre el espacio generado por ($\operatorname{sen} n_0\gamma$, $\cos n_0\gamma$) e $I-P$, la proyección ortogonal. Entonces, la ecuación para θ se puede descomponer como dos ecuaciones de la forma:

$$(3) \qquad \begin{aligned} P\theta &= \lambda P\left(e^{-3\tau_1 K_1 \theta} \operatorname{sen} K_1\theta\right) \\ (I-P)\theta &= \lambda (I-P)\left(e^{-3\tau_1 K_1 \theta} \operatorname{sen} K_1\theta\right) \end{aligned}$$

Definamos

$$(4) \qquad \begin{aligned} u &= P\theta = \frac{\alpha}{\sqrt{\pi}} \operatorname{sen} n_0\gamma + \frac{\beta}{\sqrt{\pi}} \cos n_0\gamma \\ v &= (I-P)\theta = \sum_{n \neq n_0}{}' \frac{\alpha_n}{\sqrt{\pi}} \operatorname{sen} n\gamma + \frac{\beta_n}{\sqrt{\pi}} \cos n\gamma \end{aligned}$$

entonces, $K_1 v$ y $\tau K_1 v$ son ortogonales a $\operatorname{sen} n_0\gamma$ y $\cos n_0\gamma$, porque, por la descomposición espectral

$$(5) \qquad K_1 \begin{Bmatrix} \cos n\gamma \\ \operatorname{sen} n\gamma \end{Bmatrix} = \frac{1}{n} \begin{Bmatrix} \cos n\gamma \\ \operatorname{sen} n\gamma \end{Bmatrix} \quad y \quad \tau_1 \begin{Bmatrix} \cos n\gamma \\ \operatorname{sen} n\gamma \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \operatorname{sen} n\gamma \\ -\cos n\gamma \end{Bmatrix}$$

Luego, la ecuación para v se escribe así:

$$(6) \qquad v = \lambda (I-P) \left\{ e^{-3\tau_1 K_1(u+v)} \operatorname{sen} K_1(u+v) - K_1(u+v) \right\} + \lambda (I-P) K_1(u+v)$$

Por la descomposición espectral de K_1 hecha antes, tenemos

(7) $$(I-P)K_1 u = 0 \quad y \quad (I-P)K_1 v = K_1 v$$

por lo tanto

(8) $$(I-\lambda K_1)v = \lambda(I-P)\left\{e^{-3\tau_1 K_1(u+v)} \operatorname{sen} K_1(u+v) - K_1(u+v)\right\}$$

Esta es una ecuación en el espacio $(I-P)L^2(S)$ para v con u dada. Sobre ese espacio $I-\lambda K_1$ es invertible para λ cercano a n (incluyendo $\lambda=n$). Si nosotros podemos resolver (8) y podemos expresar v como función de u y λ, i.e., $v(u,\lambda)$, entonces, sustituyendo en (3) obtenemos una ecuación para u de la forma

(9) $$u - \lambda P e^{-3\tau_1 K_1(u+v(u,\lambda))} \operatorname{sen} K_1(u+v(u,\lambda)) = 0$$

conocida como la ecuación de bifurcación. Esto se puede lograr, escribiendo (8) como

(10) $$F(\lambda,u,v) = (I-\lambda K_1)v - \lambda(I-P)\left\{e^{-3\tau_1 K_1(u+v)} \operatorname{sen} K_1(u+v) - K_1(u+v)\right\} = 0$$

A partir de las propiedades de analiticidad del operador AK_1 encontradas en el capítulo anterior, se deduce que $F \in C^1$; además, $F(\lambda,0,0)=0$. Ahora, para poder hacer uso del teorema de la función implícita, calculemos $F_v(\lambda,u,v)$

(11) $$F_v(\lambda,u,v)(w) = (I-\lambda K_1)(w) - \lambda(I-P)\left[e^{-3\tau_1 K_1(u+v)}\left\{\cos K_1(u+v) K_1 w - 3 \operatorname{sen} K_1(u+v)\tau_1 K_1 w - K_1 w\right\}\right]$$

de donde

(12) $$F_v(\lambda,0,0)(w) = (I-\lambda K_1)(w)$$

y por lo tanto, es invertible para cada λ cerca de n con $w \in (I-P)L^2(S)$. Entonces, por el teorema de la función implícita (   ) existe una vecindad de (u=0,n) y una única solución $v(u,\lambda)$ definida para (u,λ) en esa vecindad. Ademas, $v(u,\lambda)$ es analítica real.

Ahora, hagamos uso de las simetrías para reducirnos a una sola dimención. Descompongase $(I-P)L^2(S)$ en dos subespacios:

$$(13)\quad \begin{aligned} v_1 &= \sum \alpha_n \operatorname{sen} n\gamma \\ v_2 &= \sum{}' \beta_n \cos n\gamma \end{aligned}$$

de lo cual,

$$(14)\qquad v = v_1 + v_2 = P_1 v + P_2 v$$

Entonces,

$$(15)\quad \begin{aligned} (I-\lambda K_1)v_1 &- \lambda P_1 (I-P)\left[e^{-3\zeta_1 K_1 (u+P_1 v+P_2 v)} \operatorname{sen} K_1(\cdots) - K_1(\cdots)\right] \\ (I-\lambda K_1)v_2 &= \lambda P_2 (I-P)\left[\cdots\right] \end{aligned}$$

Sabemos que tenemos una única solución $v(u,\lambda)$. Supongamos que $\beta \equiv 0$, en la definición de u. Luego, tomando $v_2 \equiv 0$, $e^{-3\zeta_1 K_1 (u+P_1 v)} \operatorname{sen} K_1(u+P_1 v)$ es una función impar y entonces la ecuación para v_2 se resuelve sola

$$(16)\qquad P_2 (I-P)\left(e^{-(\cdots)} \operatorname{sen}(\cdots)\right) = 0$$

Entonces, si $\beta = 0$, $v = P_1 v$ es impar, es decir,

$$(17)\quad v(\lambda,u)(-\gamma) = -v(\lambda,u)(\gamma) \quad y \quad v(\lambda,u_\varphi)(\gamma) = v(\lambda,u)(\gamma+\varphi)$$

por la unicidad de la solución y el razonamiento seguido antes.

Ahora, todo elemento de $PL^2(S)$ es de la forma

$$(18) \qquad u_{\alpha\beta}(\gamma) = \frac{\alpha}{\sqrt{\pi}} \operatorname{sen} n_0\gamma + \frac{\beta}{\sqrt{\pi}} \cos n_0\gamma = A\, \frac{\operatorname{sen} n_0(\gamma+\varphi)}{\sqrt{\pi}}$$

con

$$(19) \qquad \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} = \cos n_0\varphi \quad y \quad \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} = \operatorname{sen} n_0\varphi$$

Por lo de antes, $u_{\alpha\beta}(\gamma) = A u_\varphi$, con $u(\gamma) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \operatorname{sen} n_0\gamma$. Con esto si la ecuación de bifurcación (9) tiene la solución $P\theta = u_{\alpha\beta}(\gamma)$ dando $\theta = u_{\alpha\beta}(\gamma) + v(u_{\alpha\beta})$, entonces, tambien tendrá la solución $Au_\varphi + v(Au_\varphi) = (Au + v(Au))(\gamma+\varphi)$,es decir, la solución correspondiente a $\beta=0$; e inversamente sucede lo mismo. Por lo tanto, es suficiente con considerar la ecuación de bifurcación con $\beta=0$. En ese caso, v es impar en γ .

Una vez reducidos a una dimensión, las funciones impares, encontremos v como función de u explicitamente para $|u|$ pequeña.

Supongamos λ fijo. Entonces, ahora tenemos $F(u, v(u))=0$. Si $h \in PL^2(S)$, entonces

$$(20) \qquad F_u h + F_v(u, v(u))\, v_u h = 0$$

de donde

$$(21) \qquad F_u h = -\lambda(I-P)\left\{ e^{-3\sigma_1 k_1(u+v)} \left(\cos k_1(u+v)\, k_1 h - 3 \operatorname{sen} k_1(u+v)\, \sigma_1 k_1 h - k_1 h\right)\right\}$$

y por lo tanto, $F_u(0,0)=0$, y como consecuencia $v_u(0)=0$. Por otro lado,

$$(22) \qquad \begin{aligned} &F_{uu}(u,v(u))(h_1,h_2) + F_{uv}(u,v(u))(h_1, v_u h_2) + F_{uv}(u,v(u))(v_u h_1, h_2) + \\ &+ F_{vv}(u,v(u))(v_u h_1, v_u h_2) + F_v(u,v(u))\, v_{uu}(h_1,h_2) = 0 \end{aligned}$$

y en 0, como $v_u(0)=0$,

(23) $$F_{uu}(0,0)(h_1,h_2) + F_v(0,0)\,v_{uu}(h_1,h_2) = 0$$

Pero, de la relación de arriba (21)

(24) $$F_{uu}(u,v(u))(h_1,h_2) = -\lambda(I-P)e^{-3\tau_1 K_1(u+v)}\left(-3\{\tau_1 K_1 h_2 K_1 h_1 + \tau_1 K_1 h_1 K_1 h_2\}\cos K_1(u+v) - \operatorname{sen} K_1(u+v)\,K_1 h_2\right)$$

y

(25) $$F_{uu}(0,0)(h_1,h_2) = 3\lambda(I-P)\{\tau_1 K_1 h_2 K_1 h_1 + \tau_1 K_1 h_1 K_1 h_2\}.$$

Todo esto junto, nos permite escribir a v como

(26) $$\begin{aligned} v(h) &= v(0) + v_u(0)h + \tfrac{1}{2}v_{uu}(h,h) + \cdots \\ &= \tfrac{1}{2}v_{uu}(0,0)(h,h) + \cdots = -\frac{F_v^{-1}}{2}(0,0)\,F_{uu}(0,0)(h,h) + \cdots \\ &= -(I-\lambda K_1)^{-1}\,3\lambda(I-P)(K_1 h\,\tau_1 K_1 h) + \cdots \end{aligned}$$

y si $h=\frac{\alpha}{\sqrt{\pi}}\operatorname{sen} n_0\gamma$, $K_1 h=\frac{\alpha}{n_0}\frac{\operatorname{sen} n_0\gamma}{\sqrt{\pi}}$, $\tau_1 K_1 h=-\frac{\alpha}{n_0}\frac{\cos n_0\gamma}{\sqrt{\pi}}$, $K_1 h\,\tau_1 K_1 h=-\frac{\alpha^2}{2n_0^2\sqrt{\pi}}\;\frac{\operatorname{sen} 2n_0\gamma}{\sqrt{\pi}}$

y por lo tanto

(27) $$v(h) = \frac{3\lambda}{(2n_0-\lambda)n_0\sqrt{\pi}}\,\alpha^2\,\frac{\operatorname{sen} 2n_0\gamma}{\sqrt{\pi}} + \cdots$$

Una vez encontrada $v=v(u)$ explícitamente, vamos a sustituir en la ecuación de bifurcación (9) de tal forma que ahora tenemos

(28) $$u - \lambda P\{e^{-3\tau_1 K_1(u+v(u,\lambda))}\operatorname{sen} K_1(u+v(u,\lambda))\} = 0$$

y queremos encontrar una solución u.

Sea $u=\frac{\alpha\operatorname{sen} n_0\gamma}{\sqrt{\pi}}$ y definamos $f(u)$ como

(29) $$f(u) = e^{-3\tau_1 K_1(u+v(u,\lambda))}\operatorname{sen} K_1(u+v(u,\lambda))$$

y procediendo como antes, llegamos a que (A-XIX)

$$
\begin{aligned}
&f(0)=0\\
&f_u(0)h = K_1(I+v_u(0))h = K_1 h\\
(30)\quad &f_{uu}(0,0)(h,h) = -6\tau_1 K_1 h K_1 h + K_1 v_{uu}(0)(h,h)\\
&f_{uuu}(0)(h,h,h) = 27 K_1 h(\tau_1 K_1 h)^2 - (K_1 h)^3 - 9\tau_1 K_1 h K_1 v_{uu}(h,h) -\\
&\qquad - 9K_1 h \tau_1 K_1 v_{uu}(h,h) + K_1 v_{uuu}(h,h)
\end{aligned}
$$

Ahora, $v(u) \in (I-P)L^2(s)$, *entonces,* v_u, v_{uu} *y* $v_{uuu} \in (I-P)L^2(S)$ *y* $K_1(v_{uu})$, $K_1(v_{uuu}) \in (I-P)L^2(S)$, *entonces,* $PK_1(v_{uu})=PK_1(v_{uuu})=0$. *Para* $u=\frac{\alpha \operatorname{sen} n_0\gamma}{\sqrt{\pi}}$, $K_1 u = \frac{1}{n_0}u$ *y haciendo un desarrollo de Taylor:*

$$(31)\qquad u-\lambda Pf(u) = u - \frac{\lambda}{n_0}u + 3\lambda P\left(-\frac{\alpha^2}{2n_0^2\pi}\operatorname{sen} 2n_0\gamma\right)+\dots = \left(1-\frac{\lambda}{n_0}-\frac{\lambda\alpha^2}{n_0^3\pi}+\dots\right)u$$

Ademas, si u es impar, $f(u)$ *lo es en* γ *y* $Pf(u)=k\operatorname{sen} n_0\gamma = \tilde{k}u$, *entonces,*

$$(32)\qquad u-\lambda Pf(u)=0$$

tiene solución trivial $u=0$ *si* $1-\lambda\tilde{k}\neq 0$. *Por el otro lado, si* $u\neq 0$, *-- sea*

$$(33)\qquad G(\lambda,\alpha) = 1-\frac{\lambda}{n_0}-\frac{\lambda\alpha^2}{n_0^3\pi}+\dots = 0$$

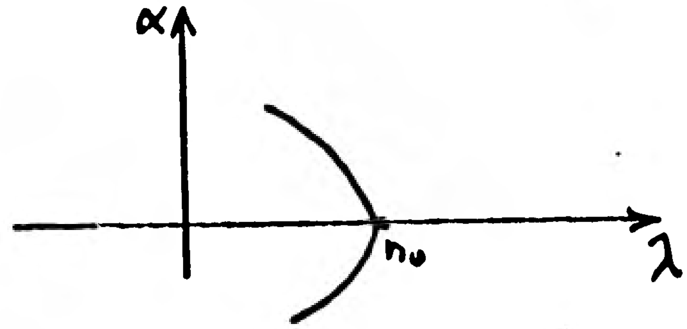
Claramente, $G(\lambda,\alpha)$ *es analítica en* λ *y* α *, al igual que* $f(u)$. *Se ve que*

$$(34)\qquad G(n_0,0)=0 \quad y \quad G_\lambda(n_0,0) = -\frac{1}{n_0}$$

de donde, por el teorema de la función implícita, existe una vecindad de $\alpha=0$ *y una única solución* $\lambda=\lambda(\alpha)$, *analítica en* α *, tal que*

$$
(35)\qquad
\begin{aligned}
&\frac{\lambda}{n_0}\left(1+\frac{\alpha^2}{n_0^2\pi}+\dots\right)=1\\
&\lambda = \frac{n_0}{1+\frac{\alpha^2}{n_0^2\pi}+\dots} = n_0\left(1-\frac{\alpha^2}{n_0^2\pi}+\dots\right)
\end{aligned}
$$

cuya gráfica es, en la vecindad de =0,



LO que representa a la solución bifurcada $u \neq 0$.

NOTA. Hemos visto que si consideramos la bifurcación cerca de $n_o=1$ entonces, si $\lambda_1 = \left(1 - \frac{\alpha_1^2}{\pi} + \dots\right)$, la función $n\theta(n\gamma)$ es igual a la bifurcada de $(n,0)$ con $\lambda_n = n\lambda_1$, lo cual es congruente, ya que

$$\theta(\gamma) = \alpha_1 \operatorname{sen}\gamma + \cdots$$

implica

$$n\theta(n\gamma) = n\alpha_1 \operatorname{sen} n\gamma + \cdots \quad , \quad n\alpha_1 = \alpha_n$$

implica $$\lambda_n = n\left(1 - \frac{\alpha_n^2}{n^2\pi} + \cdots\right) = n\left(1 - \frac{\alpha_1^2}{\pi}\right) = n\lambda_1$$

Ahora, como esta es la única solución bifurcada a partir de $(n_o,0)$, las soluciones bifurcadas a partir de $(n_o,0)$, son de la forma $n\theta(n\gamma)$, es decir, reproducen la solución bifurcada a partir de (1,0) en n periodos.

Además, como λ es analítica en α y tambien lo es $v(u,\lambda)$ en u y λ, entonces, v es analítica en α.

Por lo tanto, podemos buscar una solución en forma de series

$$\theta = \frac{\alpha \operatorname{sen}\gamma}{\sqrt{\pi}} + \sum_{n>1}' b_n(\alpha)\,\frac{\operatorname{sen} n\gamma}{\sqrt{\pi}}$$

$$\lambda = 1 + \sum_{n>1}' a_n \alpha^n$$

con $b_n(\alpha)$ analítica en α y $b_n(0)=b_n'(0)=0$.

Como

$$(36) \qquad \theta = \alpha\left(\frac{\operatorname{sen}\gamma}{\sqrt{\pi}} + \alpha + \cdots\right)$$

entonces, para α pequeño, $|v| \leq c\alpha^2$, lo que implica

$$(37) \qquad \theta = u + v \geq \alpha \operatorname{sen}\gamma - c\alpha^2 > 0 \quad \text{si } |\gamma| < \pi - \epsilon, \ 0 < \alpha < \alpha_0(\epsilon)$$

y

$$(38) \qquad \frac{du}{d\gamma} = \alpha\left(\frac{\cos\gamma}{\sqrt{\pi}} - O(\alpha)\right) \sim \pm 1/\sqrt{\pi} \quad \text{para } \gamma \sim {0 \atop \pi}$$

entonces, $\theta > 0$ en $]0,\pi[$, $\theta(0) = \theta(\pi) = 0$, para α pequeño.

Notese que esta es una solución del problema físico, ya que

$$\int_{-\pi}^{\pi} \theta(\gamma + \varphi)\, d\gamma = \int_{-\pi}^{\pi} \theta(\gamma)\, d\gamma = 0$$

donde, usamos primero la periodicidad de las soluciones y despues el hecho de que θ es impar en γ. Ademas, $|\theta|_{L^2}$ es pequeño y por el argumento usado para probar que la solución es C^∞, $|\theta|_0$ es pe-- queño, menor que $\pi/2$.

R E F E R E N C I A S

ADAMS, R.A. Sobolev Spaces. New York, Academic, 1975.

CHURCHILL, R.V. Variables Complejas, McGraw-Hill, 1978.

GOLDSTEIN, H. Mecánica Clásica. Aguilar, 1977.

HEWIT, E. y STROMBERG, K. Real and Abstract Analysis, Springer-Verlag, New York, 1975.

RUDIN, W. Real and Complex Analysis, McGraw-Hill, 1974.

STOKER, J.J. Water Waves, Interscience Publishers, INC. New York, 1957.

ZYGMUND, A. Trigonometrical Series. 1935