

Algunos Problemas de Propagación
de Ondas en Presencia de Playas.



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

Indice

	página
Introducción	1
Capítulo I.- Propagación de ondas en un océano semi infinito con profundidad constante y sin fuerza de Coriolis.	7
Capítulo II.- Efecto de la fuerza de Coriolis sobre ondas en un océano semi infinito con fondo plano.	33
Capítulo III.- Propagación de ondas en un océano semi infinito con fondo inclinado y sin fuerza de Coriolis	53
Capítulo IV.- Propagación de ondas unidimensionales sobre un fondo arbitrario en presencia de fuerza de Coriolis.	64
Conclusiones	72
Bibliografía	74

Introducción.

La mayoría de las investigaciones analíticas sobre la generación y propagación de tsunamis se han basado en una descripción linealizada del movimiento ondulatorio ya sea en dos o tres dimensiones en un fluido de profundidad constante. La complejidad de las soluciones integrales encontradas mediante la teoría lineal, aún para los modelos más simples de deformación del fondo, previene a los autores de determinar el comportamiento detallado de la onda. Usando diferentes aproximaciones de estas soluciones integrales se ha podido determinar un patrón general cerca de la fuente para varias formas de movimientos del fondo en un fluido bidimensional.

Por otra parte, usando las soluciones integrales desarrolladas por la teoría lineal para deformaciones específicas del fondo, algunos autores han examinado el comportamiento de la onda lejos de la fuente mediante métodos asintóticos, tal como el método de la fase

estacionaria.

Estudios experimentales de generación de tsunamis son raros. Se ha reportado una serie de experimentos en los cuales se generan ondas por medio de una deformación impulsiva circular y elíptica de una membrana de hule en el fondo de una cuba de ondas. Los resultados obtenidos de estos experimentos concuerdan cualitativamente con los que predicen las teorías lineales aunque no se ha hecho una comparación más detallada.

El propósito de este trabajo es el de estudiar varios problemas de propagación de ondas en el agua producidas por un movimiento localizado del fondo del mar.* En particular nos interesa el estudio de su comportamiento cerca de las playas. El tipo de información que se busca es la dependencia de la elevación del agua cerca de la playa como función de los parámetros de la fuente (tamaño, localización, historia) y de la posición del observador a lo largo

* Por abuso del lenguaje, a este desplazamiento lo llamaremos falla a lo largo del trabajo.

de la playa.

Hay una gran variedad de efectos en la solución del problema. En los primeros capítulos del trabajo se estudia cada efecto por separado y en la parte final la combinación de todos ellos en ciertos ejemplos. El propósito es darse una idea de la importancia relativa de ellos y las diferencias cualitativas que producen en la solución.

Para tratar el problema hemos tomado un modelo muy simplificado en el que se supone al agua como un líquido de densidad constante y no viscoso. Utilizamos además, la teoría lineal despreciando así los efectos de rompimiento y hacemos la aproximación de onda larga o agua poco profunda apropiada para este caso.

El problema matemático que resulta es el de estudiar un sistema hiperbólico con condiciones iniciales y de frontera. Las técnicas empleadas en el trabajo son las usuales para este tipo de problema. Transformadas de Fourier y Laplace combinadas con desarrollos asintóticos tipo fase es-

tacionaria.* Aunque no se han incluido los efectos de densidad variable, estratificación en el agua, etc., las mismas técnicas usadas aquí nos darían la información deseada.

En el primer capítulo del trabajo se estudian las olas provocadas por una falla sobre un fondo plano y su reflexión en la playa cuando se desprecia la fuerza de Coriolis. Este es un problema clásico de ecuación de onda y se estudia con las técnicas antes mencionadas obteniéndose la amplitud de los diferentes frentes de onda así como su posición. En este caso no hay efectos de fondo en la propagación de la onda lejos de la fuente y el movimiento resultante cerca de la playa es fácil de describir.

A continuación, en el capítulo II, se estudia el efecto de la fuerza de Coriolis nuevamente so-

* Sin embargo, hasta donde hemos visto, los detalles para el caso de ondas en el agua no se han hecho explícitamente y realizar este estudio detallado fue uno de los motivos por los que se hizo este trabajo.

bre un fondo plano y se encuentra que ésta provoca dispersión en las ondas. Esto se observa al aparecer una oscilación después de la llegada de la primera onda. Esta situación es cualitativamente diferente a la del caso anterior en el cual la solución es monótona cerca del frente de onda. Aparece además un nuevo fenómeno debido al balance de la fuerza de Coriolis con el gradiente de la presión, que es la aparición de ondas que viajan cerca de la playa sin dispersarse. Estas son las ondas de Kelvin que decaen exponencialmente lejos de la playa y viajan paralelamente a ella. Estas ondas son debidas a la fuerza de Coriolis y su estudio es un prototipo de los efectos puramente dinámicos de la fuerza de Coriolis en estos movimientos.

El tercer capítulo se dedica al estudio de los efectos geométricos para un fondo plano e inclinado con cierto ángulo. Se obtiene, en el caso de no haber fuerza de Coriolis, una modificación (erecimiento) en la amplitud a medida que la onda se acerca a la playa. Este efecto es puramente geométrico y es debido a la inclinación del fondo. En este

caso los frentes de onda no presentan oscilaciones pero su amplitud y velocidad ya no son constantes.*

Finalmente se estudian los efectos combinados de fuerza de Coriolis e inclinación del fondo sobre el comportamiento de los frentes de onda. En este caso se obtienen frentes que son, acelerados debido a la inclinación del fondo, y oscilatorios debido a la fuerza de Coriolis que produce dispersión. En este último capítulo se estudia la propagación de los frentes de onda en una dimensión sobre un fondo arbitrario y en presencia de la fuerza de Coriolis. Esto se hace utilizando una variante del método J. W. K. B. Nuevamente se obtienen frentes de onda oscilatorios y acelerados dependiendo de la forma del fondo.

* Se estudia en detalle el comportamiento del frente cerca de la playa y se obtiene que es diferente al encontrado en el caso con playa vertical.

CAPITULO I

Propagación de ondas en un océano semi infinito con profundidad constante y sin fuerza de Coriolis.

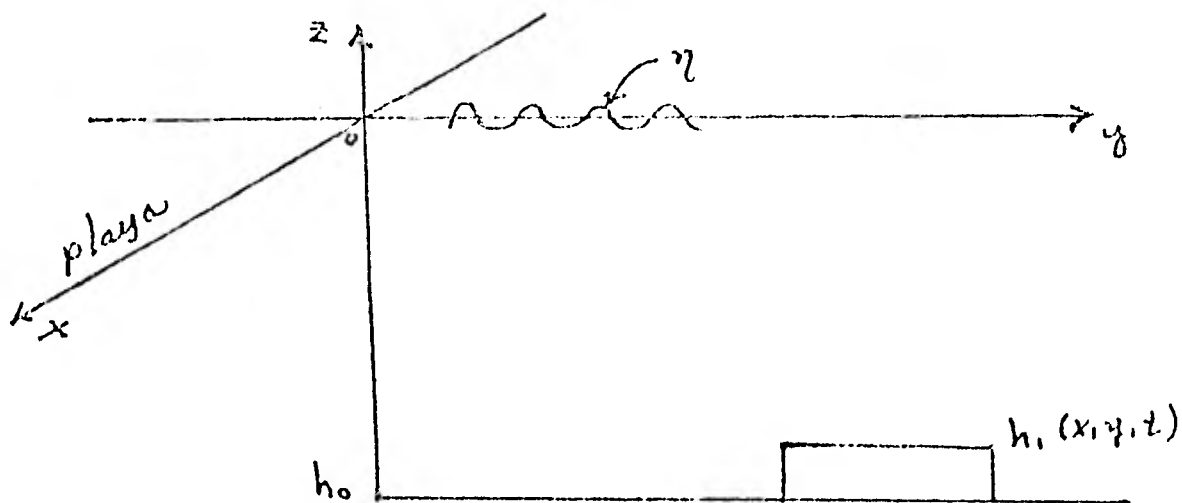
En este primer capítulo estudiaremos las ondas producidas por una falla sobre un fondo plano colocada a una distancia h de la playa y paralela a ella. El problema se plantea en términos de la teoría de onda larga que lo reduce al estudio de un problema hiperbólico con condiciones iniciales y de frontera. Esto se resuelve utilizando las transformadas de Laplace y de Fourier con lo que queda la respuesta expresada en términos de una doble integral. Esta integral desde luego no puede calcularse exactamente y por eso se estudia en forma aproximada. En particular se examina con detalle el comportamiento de las primeras llegadas, o frentes de onda, y su reflexión por la playa. Se encuentra también la dependencia en la amplitud de la posición y de los parámetros de

la falla y se examinan los efectos de la geometría y de la dinámica en las diferentes partes de la solución.

Empecemos pues por formular el problema:

La situación más sencilla que podemos estudiar es la de un mar con fondo plano y sobre el cual no actúa la fuerza de Coriolis. Escogemos el sistema de referencia de tal modo que el eje z apunte hacia arriba, el eje x coincida con la línea de la playa y el eje y apunte hacia el mar, esto se muestra en la figura 1. Tomaremos $h(x, y, t)$ como la profundidad del mar (que puede cambiar en función de x y t), η como la elevación del agua sobre el nivel de equilibrio ($z=0$) y u, v, w como las componentes de la velocidad en las direcciones x, y, z respectivamente.

Supondremos que Ω , la velocidad angular de la tierra, es cero; que no hay viscosidad en el agua y que la fuerza gravitacional está dada por $-\rho g \hat{k}$, donde ρ es la densidad del agua, que supondremos constante, y g es la aceleración debida a la gravedad.



En estas condiciones las ecuaciones de movimiento del agua son:

$$u_x + v_y + w_z = 0 \quad \dots (1)$$

$$\rho \underline{u}_t + \underline{u} \cdot \nabla \underline{u} = -\nabla p - \rho g \hat{k} \quad \dots (2)$$

$$-\infty < x < \infty, \quad 0 < y < \infty, \quad h < z < \eta$$

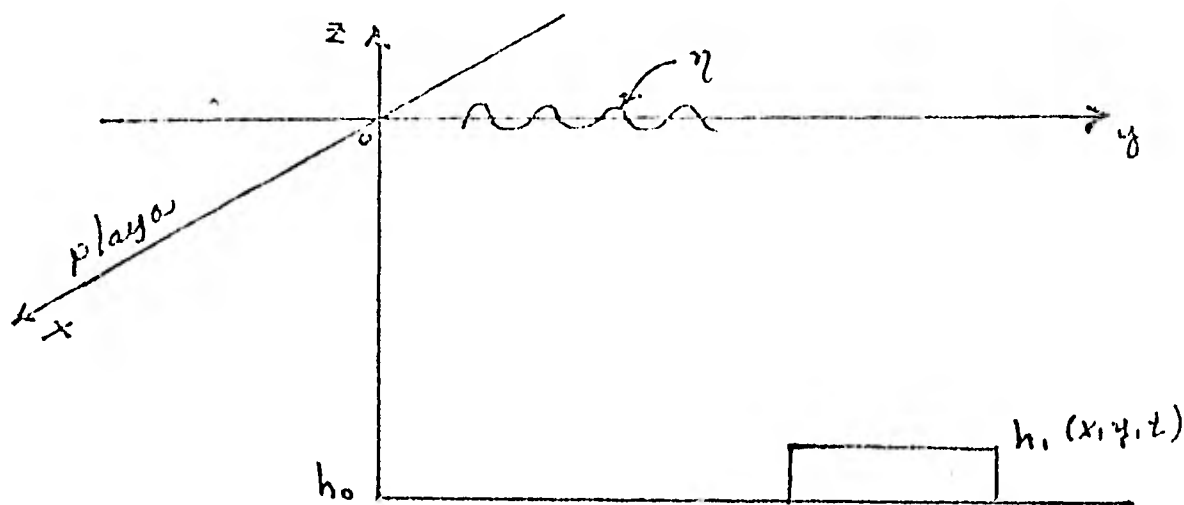
son la ecuación de continuidad y la de conservación de momento respectivamente (Stoker p.p. 6).
 la última p es la presión en el líquido.

Desarrollamos la ecuación (2) en componentes en el siguiente sistema

$$\rho \frac{du}{dt} = -p_x \quad \dots (2a)$$

$$\rho \frac{dv}{dt} = -p_y \quad \dots (2b)$$

$$\rho \frac{dw}{dt} = -p_z - \rho g \quad \dots (2c)$$



En estas condiciones las ecuaciones de movimiento del agua son:

$$u_x + v_y + w_z = 0 \quad \dots (1)$$

$$\rho \underline{u}_t + \underline{u} \cdot \nabla \underline{u} = -\nabla p - \rho g \hat{k} \quad \dots (2)$$

$$-\infty < x < \infty, \quad 0 < y < \infty, \quad h < z < \eta$$

que son la ecuación de continuidad y la de conservación de momento respectivamente (Stoker p.p. 6).

En esta última p es la presión en el líquido.

Si separamos la ecuación (2) en componentes obtenemos el siguiente sistema

$$\rho \frac{du}{dt} = -p_x \quad \dots (2a)$$

$$\rho \frac{dv}{dt} = -p_y \quad \dots (2b)$$

$$\rho \frac{dw}{dt} = -p_z - \rho g \quad \dots (2c)$$

Haremos ahora la aproximación hidrostática (Stoker p.p. 23), es decir, supondremos que la componente vertical de la aceleración es cero, o sea $w_t = 0$. Esto es equivalente a decir que la fuerza debida al gradiente de la presión en la dirección vertical se equilibra con la fuerza de gravedad.

Con esta aproximación la ecuación (2c) se convierte en

$$\rho w_t = -p_t - \rho g = 0$$

Como ρ y g son constantes, podemos integrar con respecto a z con lo que tenemos

$$p = -\rho g z + c(x, y, t) \quad \dots (3)$$

Para obtener c observamos que en la superficie libre del agua la presión es igual a la presión atmosférica p_0 , que podemos considerar constante y la altura del agua es precisamente η . Sustituyendo estos valores en (3) tenemos que

$$p_0 = -\rho g \eta + c(x, y, t)$$

entonces $c(x, y, t) = p_0 + \rho g \eta$

de donde $p(x, y, z, t) = \rho g (\eta - z) + p_0$

$$p_x = \rho g \eta_x \quad ; \quad p_y = \rho g \eta_y$$

y sustituyendo este resultado en (2a) y (2b) se tiene que

$$u_t = -g \eta_x \quad \dots (4a)$$

$$v_t = -g \eta_y \quad \dots (4b)$$

Ahora veremos que sucede con la ecuación de continuidad. El problema es el siguiente: el fondo del océano, que en un principio era de profundidad constante h_0 , en determinado momento sufre una deformación localizada en una pequeña región. La falla puede depender de la posición y del tiempo, supondremos que se forma lentamente y que su altura es pequeña comparada con la profundidad del mar h_0 .

De este modo la profundidad en cualquier punto del océano está dada por

$$z = -h(x, y, t)$$

con $h(x, y, t) = h_0 + h_1(x, y, t)$
 y $|h_1| \ll |h_0|.$

De las condiciones cinemáticas en la superficie libre y en el fondo se tiene que

$$\eta_t + u\eta_x + v\eta_y = w \quad \text{en } z = \eta \quad (5a)$$

$$h_t + uh_x + vh_y = -w \quad \text{en } z = -h \quad (5b)$$

Si integramos (1) con respecto a z encontramos que

$$\int_{-h}^{\eta} u_x dz + \int_{-h}^{\eta} v_y dz + w \Big|_{-h}^{\eta} = 0$$

y sustituyendo en esta expresión (5a) y (5b)

$$\int_{-h}^{\eta} u_x dz + \int_{-h}^{\eta} v_y dz + \eta_t + u \Big|_{z=\eta} \eta_x + v \Big|_{z=\eta} \eta_y$$

$$+ h_t + u \Big|_{z=-h} h_x + v \Big|_{z=-h} h_y = 0$$

pero como

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_{-h(x,y,t)}^{\eta(x,y,t)} u dz = u \Big|_{z=\eta} \eta_x + u \Big|_{z=-h} h_x + \int_{-h}^{\eta} u_x dz$$

tenemos que

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^{\eta} u \, dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{-h}^{\eta} v \, dz = -\eta_t - h_t \quad \dots (6)$$

Pero haciendo la aproximación hidrostática habíamos encontrado que p_x y p_y eran independientes de z , entonces de (2a) y (2b) tenemos que $\frac{du}{dt}$ y $\frac{dv}{dt}$ son independientes de z y podemos integrar (6) obteniendo que

$$[u(\eta+h)]_x + [v(\eta+h)]_y = -(\eta+h)_t \quad \dots (7)$$

Si ahora suponemos que u, v, w, η y sus derivadas son muy pequeñas, a primer orden se tiene que (4a), (4b) y (7) se reducen a

$$u_t = -g \eta_x \quad \dots (8a)$$

$$v_t = -g \eta_y \quad \dots (8b)$$

$$(uh)_x + (vh)_y = -(\eta+h)_t$$

Pero como $h(x, y, t) = h_0 + h_1(x, y, t)$ con h_0 constante y $|h_1| \ll |h_0|$ esta última ecuación se re-

duce a

$$\eta_t = -h_0 (u_x + v_y) - h_{1t} \quad \dots (8e)$$

Las condiciones iniciales del problema son $u=v=\eta=0$ cuando $t=0$. En la playa ($y=0$), como el líquido no es viscoso tenemos que $v=0$ y por consiguiente $\eta_y=0$. La otra condición de frontera es que η sea acotada cuando $y \rightarrow \infty$.

Debemos escoger ahora un modelo de falla que pueda estudiarse analíticamente con el fin de entender de qué parámetros depende la solución. Para esto escogemos un modelo de falla rectangular que se ajusta a la geometría de una playa recta. En detalle la falla es un rectángulo plano situado a una distancia h de la playa, con ancho a y largo $2M$, simétrico con respecto al eje y y que tarda un tiempo β^{-1} en subir hasta una altura \bar{e} de su altura total.

Es decir, tomemos h_1 como

$$h_1(x, y, t) = \begin{cases} H (1 - e^{-\beta t}) & |x| \leq M, |y| \leq h+a \\ 0 & \text{para las otras } x, y \end{cases} \quad \dots (9)$$

H es la altura máxima de la falla y puede ser mayor o menor que cero dependiendo de si la falla se hunde o se eleva.

Para resolver el sistema (8) tomamos la transformada de Laplace en el tiempo y obtenemos, usando tildas para las variables transformadas, las siguientes ecuaciones

$$s\tilde{u} = -g\tilde{\eta}_x$$

$$s\tilde{v} = -g\tilde{\eta}_y$$

$$s\tilde{\eta} = -h_0(\tilde{u}_x + \tilde{v}_y) - s\tilde{h}_1$$

donde s es la variable transformada de t .

Derivando la primera de estas ecuaciones con respecto a x , la segunda con respecto a y y sustituyendo en la tercera se obtiene que la ecuación para la superficie libre es

$$s^2\tilde{\eta} = gh_0\Delta\tilde{\eta} - s^2\tilde{h}_1 \quad \dots (10)$$

con condiciones de frontera $\tilde{\eta}_y = 0$ en $y=0$ y $\tilde{\eta}$ acotada cuando $y \rightarrow \infty$.

Esta es una ecuación diferencial parcial para

η en las variables x, y . lo resolvemos usando transformada de Fourier en la dirección x para obtener una ecuación ordinaria en y . Para esto introducimos la transformada de Fourier

$$\hat{\eta}(k, y, t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} \eta(x, y, t) dx$$

y obtenemos una ecuación para $\hat{\eta}$ de la forma

$$\hat{\eta}_{yy} - \alpha^2 \hat{\eta} = \frac{1}{gh_0} \alpha^2 \hat{h}_1$$

donde $\alpha^2 = \omega^2/gh_0 + k^2$ y las condiciones de frontera son $\hat{\eta}_y = 0$ en $y=0$ y $\hat{\eta}$ acotada cuando $y \rightarrow \infty$.

Este es un problema clásico de ecuaciones diferenciales ordinarias y lo resolvemos buscando una integral particular, añadiendo a ella una solución general del problema homogéneo y ajustando las constantes para satisfacer las condiciones de frontera.

Para encontrar la solución particular calculamos \hat{h}_1 y obtenemos

$$\hat{h}_1 = \int_{-H}^H \int_0^{\infty} e^{ikx} e^{-st} H(1 - e^{-\lambda t}) dt dx$$

$$\hat{h}_1 = \frac{\beta H}{s(s+\beta)} \frac{e^{iHk} - e^{-iHk}}{ik} \quad h \leq y \leq h+a$$

y $\hat{h}_1 = 0$ para los otros valores de y . Tenemos así que una solución particular es

$$\hat{\eta}_p = \frac{-\beta H}{s(s+\beta)} \frac{s^2}{gh_0} \frac{e^{iHk} - e^{-iHk}}{i\alpha^2 k}$$

Con esto tenemos que la solución en cualquier punto está dada por

$$\hat{\eta}(k, y, s) = \begin{cases} e_1 e^{\alpha y} + e_2 e^{-\alpha y} & 0 \leq y \leq h \\ e_3 e^{\alpha y} + e_4 e^{-\alpha y} + \hat{\eta}_p & h \leq y \leq h+a \\ e_5 e^{\alpha y} + e_6 e^{-\alpha y} & y \geq h+a \end{cases}$$

donde las constantes e_1, \dots, e_6 son funciones de k y s por determinarse mediante las condiciones de frontera. En $y=h$ y $y=h+a$ las condiciones son que el flujo (o la velocidad que es proporcional a η_y) sea continuo y es por esto que pedimos que η y η_y sean continuas en esos puntos, ya que de otra manera la masa no se conservaría.

Determinamos ahora las constantes de la siguiente forma:

de la condición de que $\hat{\eta}$ sea acotada cuando $y \rightarrow +\infty$ tenemos que $c_5 = 0$ y de que $\hat{\eta}_y(k, 0, s) = 0$ $c_1 - c_2 = 0$. Por otro lado la continuidad de $\hat{\eta}$ y $\hat{\eta}_y$ en h y $h+a$ nos da

$$e^{\alpha h} (c_1 - c_3) + e^{-\alpha h} (c_2 - c_4) = \hat{\eta}_p$$

$$e^{\alpha h} (c_1 - c_3) - e^{-\alpha h} (c_2 - c_4) = 0$$

$$e^{\alpha(h+a)} c_3 + e^{-\alpha(h+a)} (c_4 - c_6) = -\hat{\eta}_p$$

$$e^{\alpha(h+a)} c_3 - e^{-\alpha(h+a)} (c_4 - c_6) = 0$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones algebraicas y sustituyendo en la expresión para $\hat{\eta}(k, y, s)$ tenemos que la solución es

$$\hat{\eta}(k, y, s) = \frac{\varphi(s) (e^{iHk} - e^{-iHk})}{k \alpha^2} \begin{cases} e^{\alpha(y-h)} - e^{\alpha(y-h-a)} & -e^{-\alpha(y+h)} + e^{-\alpha(y+h+a)} & \alpha y < h \\ e^{-\alpha(y+h)} + e^{\alpha(y-h)} & -e^{-\alpha(y+h+a)} - e^{\alpha(y-h-a)} & h < \alpha y < h+a \\ e^{-\alpha(y+h)} + e^{\alpha(y-h)} & -e^{-\alpha(y+h+a)} + e^{\alpha(y-h-a)} & y > h+a \end{cases} \dots (13)$$

donde $\varphi(s) = \frac{-\beta H s}{2i \operatorname{gho}(s+\beta)}$

Para tener la solución del problema original debemos calcular las transformadas inversas de Fourier y Laplace. Desde luego no esperamos una respuesta en forma cerrada para todos los valores de los parámetros. Veremos pues que sucede, en primer lugar, para el caso $y \gg h + a$. Invertimos primero la transformada de Fourier

$$\tilde{\eta}(x, y, s) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\tilde{\eta}}(k, y, s) e^{-ikx} dk$$

Sustituyendo aquí la expresión para $\hat{\tilde{\eta}}$ cuando $y \gg h + a$ y llamando I_1 a la integral que involucra al primer término en (13) se tiene que

$$I_1 = \frac{q(s)}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iHk} - e^{-iHk}}{k\alpha^2} e^{-\alpha(y+u)} e^{-ikx} dk$$

Esta se calcula por integración de contorno. Para resolverla la separamos en dos integrales evitando el polo en $k=0$ con un semicírculo en $\text{Im}k > 0$ y centrado en el origen. Llamando Γ al nuevo contorno tenemos

$$I_1 = \frac{\varphi(s)}{2\pi} \int_{\gamma} \frac{e^{iHk - d(y+z) - ikx}}{k^2} dk - \frac{\varphi(s)}{2\pi} \int_{\gamma} \frac{e^{-iHk - d(y+z) - ikx}}{k^2} dk$$

Para calcular la primera de estas integrales hacemos el cambio de variable $k = su$ y se obtiene

$$\tilde{\eta}_1(x, y, s) = \frac{gh_0 \varphi(s)}{2\pi s^2} \int_{\gamma} \frac{e^{s \left\{ -iu(x-y) - \frac{1}{\sqrt{gh_0}} \sqrt{1+gh_0 u^2} (y+z) \right\}}}{u(gh_0 u^2 + 1)} du \dots (14)$$

Esta integral no se puede calcular exactamente y es ahora cuando recurrimos a las aproximaciones.

Una pregunta interesante es la de cómo se ve la primera ola que llega a un punto dado, es decir, cómo avanza la perturbación en la zona de quietud, qué amplitud tiene, como se refleja ésta en la playa. Esta información se obtiene para valores grandes de s con $\text{Re } s > 0$

Para estudiar el comportamiento de $\tilde{\eta}_1$ para valores grandes de s , notamos que $\tilde{\eta}_1$ es una integral de la forma

$$F(s) = \int e^{s f(u)} \phi(u) du$$

con
$$\phi(u) = \frac{1}{u(\rho h_0 u^2 + 1)} \dots (15)$$

$$f(u) = -i(x-1)u - \frac{1}{\sqrt{\rho h_0}} \sqrt{\rho h_0 u^2 + 1} (y+1) \dots (16)$$

que es la forma canónica para utilizar el método del punto silla (Felsen p.p. 370)

Para utilizar el método en este caso, busquemos primero las singularidades del integrando. Vemos en primer lugar que $\phi(u)$ tiene dos puntos rama en $u = \pm i/\sqrt{\rho h_0}$ que denotaremos por u_r^\pm . Escogemos los cortes ramales de tal modo que

$$\operatorname{Re} \sqrt{\rho h_0 u^2 + 1} = 0$$

para tomar la rama $\operatorname{Re} \sqrt{\rho h_0 u^2 + 1} > 0$. En esta rama la función $f(u)$ es analítica.

Para ubicar los cortes ramales tomamos $u = \xi + i\eta$ y la sustituimos en la igualdad de arriba de donde obtenemos que

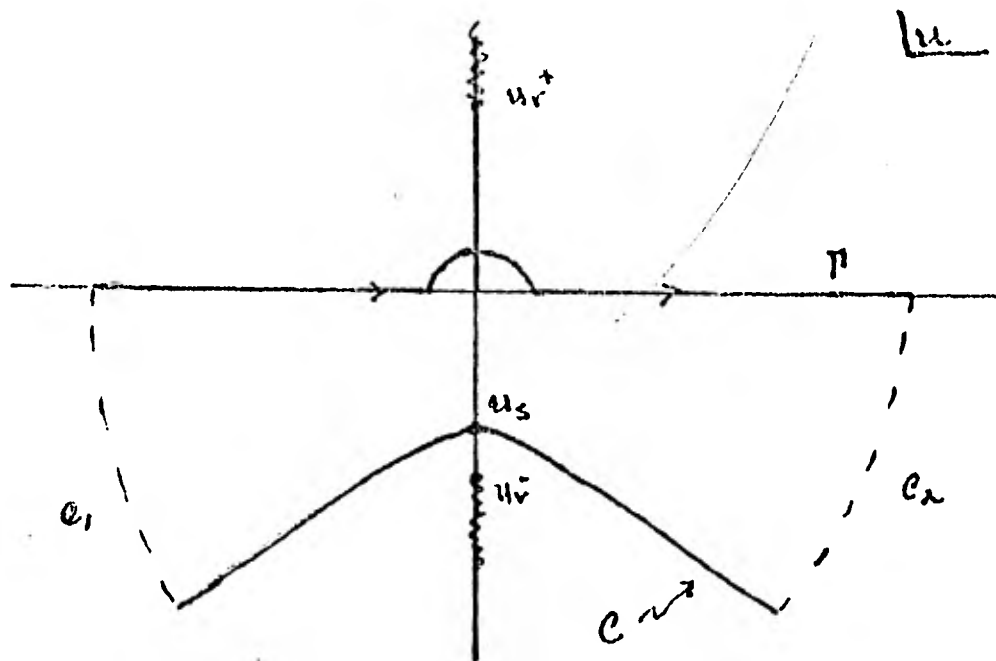
$$\frac{1}{\rho h_0} + \xi^2 - \eta^2 + 2i\xi\eta \quad \text{debe ser real y negativo}$$

entonces

$$\xi^2 - \eta^2 + \frac{1}{\rho h_0} < 0$$

$$2\xi\eta = 0$$

De estas dos ecuaciones tenemos que los cortes ramales son los segmentos de recta $\xi = 0$ con $|\eta| > \frac{1}{\sqrt{gh_0}}$ como se muestra en la figura 2.



Ahora, para encontrar los puntos silla tomamos

$$f'(u) = -i(x-1) - \frac{\sqrt{gh_0} u(y+1)}{\sqrt{gh_0 u^2 + 1}} = 0$$

de donde

$$u = \frac{-i}{\sqrt{gh_0}} \frac{x-1}{\sqrt{(x-1)^2 + (y+1)^2}}$$

A este punto lo denotaremos por u_s . Si $x > H$ u_s se encuentra siempre entre el origen y \bar{u}_r tal como se muestra en la figura 2.

Para encontrar la trayectoria \mathcal{C} de descenso más rápido, pedimos que $\text{Im } f(u) = \text{Im } f(u_s)$.

$$f(u_s) = \frac{-1}{\sqrt{gh_0}} \sqrt{(x-H)^2 + (y+L)^2}$$

Tomando $u = \xi + i\eta$ en (16) y dado que $\text{Im } f(u_s) = 0$, tenemos que la ecuación para \mathcal{C} es

$$\text{Im} \left\{ i(x-H)\xi - (x-H)\eta + \sqrt{\frac{1}{gh_0} + \xi^2 + \eta^2} (y+L) \right\} = 0$$

de donde

$$\left\{ \frac{(x-H)^4}{(y+L)^4} + (x-H)^2 \right\} \xi^2 - \left\{ (x-H)^2 + (y+L)^2 \right\} \eta^2 + \frac{(x-H)^2}{gh_0} = 0$$

o de otra forma

$$\frac{\frac{\eta^2}{(x-H)^2}}{gh_0 [(x-H)^2 + (y+L)^2]} - \frac{\frac{\xi^2}{(y+L)^2}}{gh_0 [(x-H)^2 + (y+L)^2]} = 1$$

... (17)

Esta es la ecuación de una hipérbola cuyo eje principal es el eje η y con vértices en $\eta = \pm \frac{1}{\sqrt{gh_0}} \frac{x-H}{\sqrt{(x-H)^2 + (y+L)^2}}$ uno de los cuales es precisamente el punto silla (figura 2). Con esto hemos visto que C no cruza los cortes ramales, eso es importante para la aproximación que se hace de la integral original.

De la ecuación (14) vemos que como

$$\operatorname{Re} \left\{ -iu(x-H) - \frac{1}{\sqrt{gh_0}} \sqrt{gh_0 u^2 + 1} (y+L) \right\} < 0$$

para $\operatorname{Im} u < 0$ podemos cerrar el contorno de integración con dos arcos e_1 y e_2 (figura 2). Cuando el radio de esos círculos tiende a infinito su contribución en la integral es nula.

Como no hay polos dentro del contorno se tiene que, por el teorema de Cauchy

$$\int_{\Gamma} e^{sf(u)} \phi(u) du + \int_C e^{sf(u)} \phi(u) du = 0$$

además se vió que la trayectoria de descenso más

rápido no cruza ninguna singularidad, entonces la integral sobre \mathcal{C} puede aproximarse por (Felsen p.p. 323)

$$\int_{\mathcal{C}} e^{sf(u)} \phi(u) du = \sqrt{\frac{-2\pi}{sf''(u_s)}} \phi(u_s) e^{sf(u_s)} \left\{ 1 + O(s^{-3/2}) \right\} \dots (12)$$

En este caso tenemos que

$$\phi(u_s) = i\sqrt{gh_0} \frac{[(x-H)^2 + (y+L)^2]^{3/2}}{(x-H)(y+L)}$$

$$f''(u_s) = -\sqrt{gh_0} \frac{[(x-H)^2 + (y+L)^2]^{3/2}}{(y+L)^2}$$

de donde

$$\int_{\mathcal{C}} e^{sf(u)} \phi(u) du = -i \sqrt{\frac{2\pi}{s}} (gh_0)^{1/4} \frac{[(x-H)^2 + (y+L)^2]^{3/4}}{(x-H)(y+L)} e^{-s/\sqrt{gh_0} \sqrt{(x-H)^2 + (y+L)^2}} \left\{ 1 + O(s^{-3/2}) \right\}$$

y sustituyendo en la ecuación (14) se tiene que

$$\tilde{\eta}_1(x, y, s) = \frac{(gh_0)^{1/4} \beta H}{2\sqrt{2\pi} s^{3/2} (s+\beta)} \frac{\left\{ (x-H)^2 + (y+L)^2 \right\}^{3/4}}{(x-H)(y+L)} e^{-\frac{s}{\sqrt{gh_0}} \sqrt{(x-H)^2 + (y+L)^2}}$$

Los otros términos dan contribuciones semejantes a $\tilde{\eta}$, reemplazando $x-H$ por $x+H$, $y+L$ por $y-L$, etc., cuya interpretación discutiremos más adelante en este capítulo.

Hay que notar que para $x = \pm H$, $y = \pm L$ y $y = \pm(L+a)$ la expresión para $\tilde{\eta}$ diverge, o sea que para las líneas que forman el contorno de la falla no podemos usar esta aproximación. Esto se debe a que en esos puntos $f'' = 0$ y $\phi^{-1} = 0$. Ahí es necesario utilizar otra aproximación pero no analizaremos este punto en más detalle ya que la singularidad no tiene sentido físico porque se debe a la presencia de una función discontinua para modelar la falla.

Con esto tenemos que $\tilde{\eta}(x, y, s)$ es una suma de términos de la forma $A(x, y) e^{-s g(x, y)}$ donde

$$g(x, y) = \frac{\sqrt{(x \pm H)^2 + (y \pm L)^2}}{\sqrt{gh_0}}$$

o bien
$$g(x, y) = \frac{\sqrt{(x \pm H)^2 + (y \pm (L+a))^2}}{\sqrt{gh_0}}$$

y al sustituir cada uno de estos términos en la

expresión para la transformada inversa de Laplace

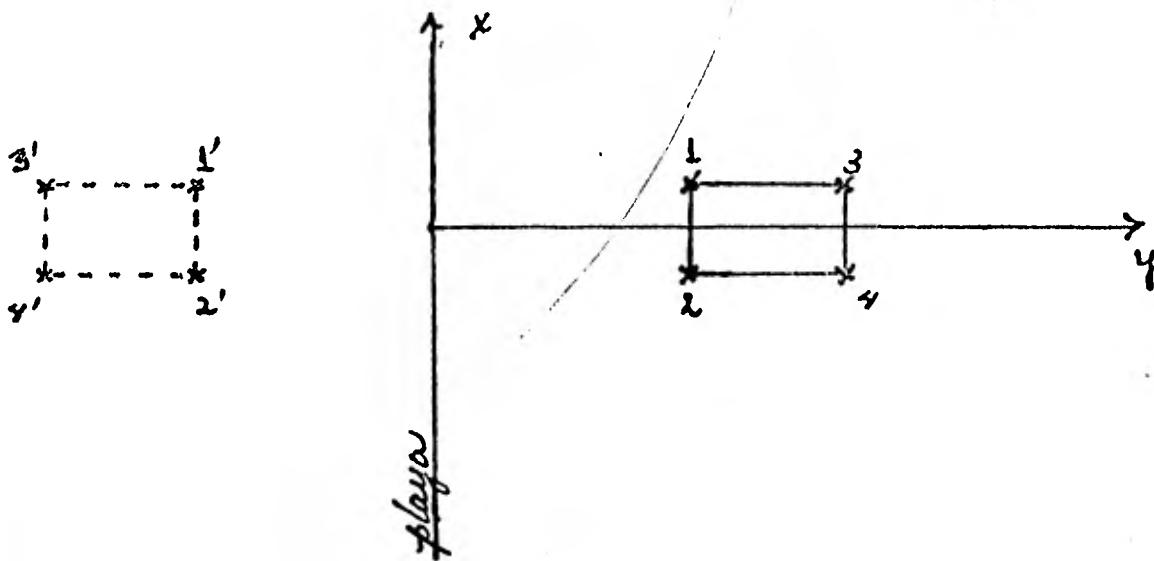
$$\eta(x, y, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \tilde{\eta}(x, y, s) e^{st} ds \quad \dots (19)$$

donde γ es tal que todas las singularidades de $\tilde{\eta}$ están a la izquierda de ella, tendremos que calcular integrales de la forma

$$\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} A(x, y, s) e^{s(t - g(x, y))} ds$$

Entonces para todos los tiempos t' para los cuales $t' - g(x, y) < 0$ podemos cerrar el contorno de integración por la derecha con un arco de radio infinito y como dentro de ese contorno no hay singularidades (ya que todas están a la izquierda de γ) la integral vale cero. Esto nos dice que para un tiempo dado t_0 , la perturbación habrá llegado solo a aquellos puntos en los que se cumple que $t_0 - g(x, y) = 0$, esto es equivalente a decir que los frentes de onda son aquellos puntos en los que $g(x, y) = t_0$ y, dada la forma de $g(x, y)$, lo que tenemos son frentes de onda circulares con

centro en $(\pm H, \pm L)$ y $(\pm H, \pm(L+a))$ y que se propagan con velocidad $\sqrt{gh_0}$ tal como se ve en la figura 3.



Examinemos ahora en detalle los diferentes frentes de onda y su interacción en la playa.

Los frentes de onda que provocan las fuentes 1, 2, 3, 4 son debidos directamente a la falla, pero los frentes debidos a las fuentes 1', 2', 3', 4' son las reflexiones de cada uno de los anteriores en la playa. Observando el signo de cada u-

no de los términos en (13) vemos que los frentes 1 y 2 se reflejan sin cambio de fase (es decir conservando el mismo signo en su amplitud) mientras que los frentes 3 y 4 se reflejan con un cambio de fase de π . Si seguimos con detalle el movimiento de frente de onda que sale de los puntos 1 y 3 vemos que el que sale de 1 llega a la playa, ahí se refleja como un frente que viene de 1'. Después llega el frente que sale de 3 y se refleja como uno que sale de 3'. Análogamente para los otros frentes. Desde luego este es el resultado que se obtiene de la óptica geométrica.

Ahora calcularemos la amplitud de la onda en el frente y para eso debemos encontrar la transformada inversa de Laplace de $\tilde{\eta}(x, y, s)$

Sustituyendo $\tilde{\eta}_1$ en la ecuación (19) tenemos

$$\eta_1(x, y, t) \approx A(x, y) \frac{1}{2\pi i} \int_{\beta - i\infty}^{\beta + i\infty} \frac{e^{-\frac{s}{\sqrt{gh_0}} \sqrt{(x-H)^2 + (y+L)^2}}}{s^{3/2} (s+\beta)} e^{st} ds$$

con
$$A(x, y) = (gh_0)^{1/4} \frac{\beta H}{2\sqrt{\beta H}} \frac{[(x-H)^2 + (y+L)^2]^{3/4}}{(x-H)(y+L)}$$

Ya vimos antes que para $\tau = t - g(x, y) < 0$ la integral vale cero. Ahora, en el caso $\tau > 0$ podemos cerrar el contorno de integración por la izquierda y en ese caso tendríamos:

$$\eta_1(x, y, t) = A(x, y) \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{e^{s\tau}}{s^{3/2}(s+\beta)} ds$$

Como nos interesa el valor de la integral para valores pequeños de τ , es decir, cerca del frente de onda, hacemos un desarrollo en serie para s grande y tenemos que

$$\frac{1}{s^{3/2}(s+\beta)} \approx \frac{1}{s^{5/2}}$$

Entonces, lo que hay que calcular es la transformada inversa de Laplace de $s^{-5/2}$. Esto es

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{e^{s\tau}}{s^{5/2}} ds = \frac{1}{\Gamma(5/2)} \tau^{3/2}$$

de donde el primer término para $\eta(x, y, t)$ es

$$\eta_1(x, y, t) = \frac{(gh_0)^{1/4} \beta H}{2\sqrt{2\pi} \Gamma(5/2)} \frac{[(x-\eta)^2 + (y+\lambda)^2]^{3/4}}{(x-\eta)(y+\lambda)} \left\{ t - \frac{1}{\sqrt{gh_0}} \sqrt{(x-\eta)^2 + (y+\lambda)^2} \right\}^{3/2}$$

... (20)

y los otros siete términos son semejantes a este.

De esta expresión concluimos que la amplitud de la onda es proporcional a la altura que alcanza la falla. Entonces si H es positiva (elevación del fondo) la amplitud de la perturbación es positiva y hay un levantamiento de agua; en cambio si H es negativa, la amplitud es negativa y lo que tenemos es una onda de depresión.

También se tiene que la amplitud crece proporcionalmente con β , o sea que mientras más rápido se forme la falla la amplitud de la ola será mayor. Además el levantamiento de agua en cada punto no es brusco sino gradual y proporcional a $z^{3/2}$, es decir, crece más lentamente que la altura de la falla que crece como t .

En conclusión el frente de onda producido por una falla es una circunferencia cuyo radio se expande con velocidad $\sqrt{gh_0}$ y cuya amplitud crece lentamente. Estos frentes se reflejan en la playa siguiendo las leyes de la óptica geométrica.

Por otra parte su amplitud disminuye como $r^{-1/2}$ donde r es la distancia del punto de observación a la esquina de la falla, esto es debido a que la propagación es en dos dimensiones y por conservación de energía se espera que los frentes sean cilíndricos. La dependencia precisa no se puede obtener por balance de energía pero está dada por la fórmula (20). También hay que notar que el tiempo de subida de la falla es un parámetro muy importante ya que controla la amplitud de la onda.

CAPITULO II

Efecto de la fuerza de Coriolis sobre ondas en un océano semi infinito con fondo plano.

En el problema que trataremos ahora estudiaremos el efecto que tiene la rotación de la tierra sobre las olas provocadas por la falla en el fondo del mar. El hecho de considerar que la velocidad angular de la tierra no es cero trae como consecuencia dos términos más en la ecuación de conservación de momento, éstos son la fuerza de Coriolis y la fuerza centrípeta.

La ecuación de conservación de momento en un sistema que rota con velocidad angular $\underline{\Omega}$ es la siguiente

$$\rho \left\{ \frac{d\underline{u}}{dt} + 2 \underline{\Omega} \times \underline{u} + \underline{\Omega} \times (\underline{\Omega} \times \underline{r}) \right\} = -\nabla p - \rho g \hat{k} \quad \dots(1)$$

Haremos además la aproximación de que el efecto importante de la velocidad angular está

en la dirección normal a la superficie del agua, es decir, que podemos expresar a $\underline{\Omega}$ como

$$\underline{\Omega} = \Omega \hat{k} \quad \dots (2)$$

Esto es exacto en el polo norte pero para puntos cercanos al ecuador la aproximación deja de ser buena.

Si escogemos el origen de nuestro sistema de referencia en el polo norte, para puntos cercanos a éste tenemos que $\underline{r} = (x, y, 0)$, entonces

$$\underline{\Omega} \times (\underline{\Omega} \times \underline{r}) = -\Omega^2 (x, y, 0) = -\nabla \left(\frac{\Omega^2}{2} (x^2 + y^2) \right) \quad \dots (3)$$

De (2) y (3) podemos escribir (1) como

$$\rho \left\{ \frac{d\underline{u}}{dt} + 2 \Omega \hat{k} \times \underline{u} \right\} = -\nabla \left(p + \frac{\Omega^2 (x^2 + y^2)}{2} \right) \quad \dots (4)$$

Tomando $p' = p + \frac{\Omega^2 (x^2 + y^2)}{2}$ y considerando que $\hat{k} \times \underline{u} = (-v, u, 0)$ podemos escribir la ecuación (4) en componentes de la siguiente forma

$$u_t - 2\Omega v = -\frac{1}{\rho} p'_x \quad \dots (5a)$$

$$v_t + 2\Omega u = -\frac{1}{\rho} p'_y \quad \dots (5b)$$

$$w_t = -\frac{1}{\rho} p'_z - g \quad \dots (5c)$$

Haciendo nuevamente la aproximación hidrostática y procediendo de la misma manera que para el caso sin rotación tenemos que

$$p' = \rho g (\eta - z) + p'_0$$

Sustituyendo este resultado en las ecuaciones (5a) y (5b), el sistema que debemos resolver es el siguiente

$$u_t - 2\Omega v = -g \eta_x \quad \dots (6a)$$

$$v_t + 2\Omega u = -g \eta_y \quad \dots (6b)$$

$$\eta_t + h_0(u_x + v_y) = -h_1 t \quad \dots (6c)$$

La última de estas ecuaciones es la misma ecuación (3e) del capítulo anterior. Esto se debe a que la ecuación de continuidad no se ve afectada por el hecho de que la tierra gire, además estamos escogiendo el mismo modelo de falla que antes.

Las condiciones de frontera en este problema son las mismas que en el anterior

$$\eta \text{ acotada cuando } y \rightarrow \infty$$

$$v(x, 0, t) = 0 \quad \dots (7)$$

Nuevamente debemos resolver un sistema hiperbólico y para hacerlo procedemos, como en el caso anterior, tomando la transformada de Laplace de las ecuaciones (6) para obtener

$$s\tilde{u} - 2\Omega\tilde{v} = -g\tilde{\eta}_x \quad \dots (8a)$$

$$s\tilde{v} + 2\Omega\tilde{u} = -g\tilde{\eta}_y \quad \dots (8b)$$

$$s\tilde{\eta} + h_0(\tilde{u}_x + \tilde{v}_y) = -s\tilde{h}_1 \quad \dots (8c)$$

Las ecuaciones (8a) y (8b) se pueden resolver como un sistema algebraico de dos ecuaciones con dos incógnitas para obtener \tilde{u} y \tilde{v} en función de $\tilde{\eta}_x$ y $\tilde{\eta}_y$ obteniéndose que

$$u = \frac{-g(s\tilde{\eta}_x + 2\Omega\tilde{\eta}_y)}{4\Omega^2 + s^2}$$

$$v = \frac{-g(s\tilde{\eta}_y - 2\Omega\tilde{\eta}_x)}{4\Omega^2 + s^2} \quad \dots (9)$$

y sustituyendo estas dos expresiones en (8c) tenemos

$$(4\Omega^2 + \sigma^2) \tilde{\eta} = gh_0 \Delta \tilde{\eta} - (4\Omega^2 + \sigma^2) \tilde{h}_1 \quad \dots (10)$$

Esta ecuación, cuando $\Omega = 0$, se reduce a la ecuación (10) del capítulo anterior. Aquí aparece un término nuevo que es $4\Omega^2 \tilde{\eta}$; este término es el responsable de la dispersión. Notemos también que para s grande esta ecuación se reduce a la obtenida en el capítulo anterior y por eso se espera que la posición de los frentes de onda sea la misma que cuando no hay fuerza de Coriolis.

Estudiaremos ahora las soluciones de la ecuación (10) tal como en el capítulo anterior.

Tomemos la transformada de Fourier en x de (10) para obtener la siguiente ecuación diferencial ordinaria de segundo orden en la variable y

$$\hat{\tilde{\eta}}_{yy} - \sigma^2 \hat{\tilde{\eta}} = \frac{4\Omega^2 + \sigma^2}{gh_0} \hat{\tilde{h}}_1 \quad \dots (11)$$

donde

$$\sigma^2 = k^2 + \frac{4\Omega^2 + \sigma^2}{gh_0}$$

Para obtener las condiciones de frontera en términos de $\hat{\eta}$ calculamos la transformada de Laplace de la ecuación (7) de donde se obtiene

$$\tilde{v}(x, 0, s) = 0$$

Sustituyendo esta expresión en (9) tenemos que

$$s\tilde{\eta}_y(x, 0, s) - 2\Omega\tilde{\eta}_x(x, 0, s) = 0$$

y tomando la transformada de Fourier de esta expresión se tiene finalmente que la condición de frontera es

$$s\hat{\eta}_y(k, 0, s) + 2i\Omega k\hat{\eta}(k, 0, s) = 0$$

además $\hat{\eta}$ es acotada cuando $y \rightarrow \infty$

Estas condiciones son análogas a las obtenidas cuando $\Omega = 0$ excepto que la condición en $y=0$ es más complicada y, como veremos después, este hecho da lugar a las ondas de Kelvin.

Para resolver la ecuación (10) procedemos de la

manera usual buscando una integral particular $\hat{\eta}_p$ y luego de sumarle la solución general de la ecuación homogénea, ajustar las constantes de ésta para satisfacer las condiciones de frontera y de continuidad.

Tomamos pues

$$\hat{\eta}(k, y, s) = \begin{cases} c_1 e^{\sigma y} + c_2 e^{-\sigma y} & 0 \leq y \leq L \\ c_3 e^{\sigma y} + c_4 e^{-\sigma y} + \hat{\eta}_p & L \leq y \leq L+a \\ c_5 e^{\sigma y} + c_6 e^{-\sigma y} & y \geq L+a \end{cases}$$

donde $\hat{\eta}_p = \frac{-\beta H (4\Omega^2 + \alpha^2)}{g h_0 \sigma^2 \alpha (\alpha + \beta)} \frac{e^{iHk} - e^{-iHk}}{ik}$

Sustituyendo todo esto en las condiciones de continuidad y de frontera para calcular las constantes, encontramos que la expresión para $\hat{\eta}$ es

$$\hat{\eta}(k, y, s) = \frac{\eta(s) (e^{iHk} - e^{-iHk})}{k \alpha^2} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\sigma \alpha + 2i\Omega k}{\sigma \alpha - 2i\Omega k} (e^{-\sigma(y+L)} - e^{-\sigma(y+L+a)}) \\ + e^{\sigma(y-L)} - e^{\sigma(y-L-a)} \end{array} \right\} \quad 0 \leq y \leq L \quad \dots (12)$$

$$\hat{\eta}(k, y, s) = \frac{\eta(s) (e^{iHk} - e^{-iHk})}{k \alpha^2} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\sigma \alpha + 2i\Omega k}{\sigma \alpha - 2i\Omega k} (e^{\sigma(y+L)} - e^{-\sigma(y+L+a)}) \\ - e^{\sigma(y-L)} - e^{\sigma(y-L-a)} + 2 \end{array} \right\} \quad L \leq y \leq L+a$$

$$\tilde{\eta}(k, y, s) = g(s) \frac{(e^{iHk} - e^{-iHk})}{k\sigma^2} \left\{ \frac{s\sigma + 2i\Omega k}{s\sigma - 2i\Omega k} (e^{-\sigma(y+\lambda)} - e^{-\sigma(y+\lambda+a)}) \right. \\ \left. + e^{-\sigma(y-\lambda)} + e^{-\sigma(y-\lambda-a)} \right\} \quad y \geq \lambda + a$$

donde $g(s) = \frac{-\beta H (4\Omega^2 + s^2)}{2i\gamma h_0 s(s+\beta)}$

Observamos que cuando $\Omega = 0$ esta expresión coincide con la obtenida en el capítulo I. En este caso, sin embargo, hay una situación diferente que es la aparición de un posible polo cuando $s\sigma = 2i\Omega k$. Como veremos posteriormente, la contribución de este polo se manifiesta como una onda de Kelvin.

Lo que ahora queremos es encontrar $\tilde{\eta}$ cerca de la playa y para eso calculamos la transformada inversa de Fourier de (12). Para el primer término tenemos

$$\tilde{I}_1 = g(s) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{s\sigma + 2i\Omega k}{s\sigma - 2i\Omega k} \frac{(e^{iHk} - e^{-iHk})}{k\sigma^2} e^{-\sigma(y+\lambda) - ikx} dk$$

Para calcular esta integral seguimos el mismo procedimiento que en el capítulo anterior, esto es, de-

formamos el contorno para poder separar la integral en dos términos y hacemos el cambio de variable $k = su$, con esto tenemos que, llamando $\tilde{\eta}_1$ al primero de esos términos

$$\tilde{\eta}_1(x, y, z) = \frac{gh_0 \eta(z)}{2\pi \Delta z} \int_{\Gamma} \frac{\Delta z / \sqrt{gh_0} \sqrt{gh_0 u^2 + 4\Omega^2 / \Delta z^2 + 1} + 2i \Omega su}{\Delta z / \sqrt{gh_0} \sqrt{gh_0 u^2 + 4\Omega^2 / \Delta z^2 + 1} - 2i \Omega su} \frac{s \{-iu(x-H) - \sqrt{gh_0 u^2 + 4\Omega^2 / \Delta z^2 + 1} (y+L)\}}{u (gh_0 u^2 + 4\Omega^2 / \Delta z^2 + 1)} du \quad \dots (13)$$

Ahora analizamos las singularidades del integrando: sus puntos rama están donde $gh_0 u^2 + 4\Omega^2 / \Delta z^2 + 1 = 0$, es decir

$$u_r = \frac{\pm i}{\sqrt{gh_0}} \sqrt{1 + 4\Omega^2 / \Delta z^2}$$

Eseogemos los cortes ramales del mismo modo que en el capítulo I pidiendo que $\text{Re} \sqrt{gh_0 u^2 + 4\Omega^2 / \Delta z^2 + 1} = 0$ y tomando $u = \xi + i\eta$ se tiene que

$$gh_0 (\xi^2 - \eta^2) + 4 \frac{\Omega^2}{\Delta z^2} + 1 < 0$$

$$2\xi\eta = 0$$

de donde los cortes ramales son los segmentos de recta $\Im = 0$ con $|\eta| > \frac{1}{\sqrt{gh_0}} \sqrt{4\Omega^2/\sigma^2 + 1}$ tal como se ilustra en la figura 4.

Nuevamente estamos interesados en el valor de $\tilde{\eta}$ cuando σ es grande para estudiar los frentes de onda. Procedemos entonces utilizando el método del punto silla tomando en este caso

$$f(u) = -iu(x-H) - \frac{1}{\sqrt{gh_0}} \sqrt{gh_0 u^2 + 4\Omega^2/\sigma^2 + 1} (y+L)$$

$$\phi(u) = \frac{1}{u(gh_0 u^2 + 4\Omega^2/\sigma^2 + 1)} \frac{\frac{\partial}{\partial u} \sqrt{gh_0 u^2 + 4\Omega^2/\sigma^2 + 1} + 2i\Omega \sigma u}{\frac{\partial}{\partial u} \sqrt{gh_0 u^2 + 4\Omega^2/\sigma^2 + 1} - 2i\Omega \sigma u}$$

El punto silla está donde

$$f'(u) = -i(x-H) - \frac{1}{\sqrt{gh_0}} \frac{gh_0 u (y+L)}{\sqrt{gh_0 u^2 + 4\Omega^2/\sigma^2 + 1}} = 0$$

es decir

$$u_s = \frac{-i}{\sqrt{gh_0}} \frac{\sqrt{4\Omega^2/\sigma^2 + 1}}{\sqrt{(x-H)^2 + (y+L)^2}}$$

Por otro lado el integrando tiene un polo en

$$\frac{s^2}{\sqrt{gh_0}} \sqrt{gh_0 u^2 + 4 \frac{\Omega^2}{s^2} + 1} - 2i\Omega su = 0$$

de donde

$$u_0 = \frac{-i}{\sqrt{gh_0}}$$

La ubicación de u_r , u_s y u_0 en el plano complejo se muestra en la figura 4. Notemos que u_r está siempre abajo de u_s y u_0 y para valores grandes de s (que es justamente lo que nos interesa) u_0 está por abajo de u_s . Sin embargo cuando s es pequeña u_0 puede quedar arriba de u_s dependiendo de los valores de x, y y s , ese caso no se analizará aquí.

Encontraremos ahora la trayectoria de descenso más rápido C . Para esto calculamos $f(u_0)$:

$$f(u_0) = -\frac{1}{\sqrt{gh_0}} \sqrt{4 \frac{\Omega^2}{s^2} + 1} \sqrt{(x-H)^2 + (y+L)^2}$$

de donde se tiene que $\text{Im} f(u_0) = 0$

Escribiendo u como $\xi + i\eta$ tenemos que

$$\operatorname{Im} \left\{ \frac{1}{\sqrt{gh_0}} \sqrt{gh_0(\xi^2 - \eta^2) + 4\frac{\Omega^2}{\sigma^2} + 1} + 2i gh_0 \xi \eta \right\} (y+z) + (i\xi - \eta)(x-H) \} = 0$$

que, procediendo de la misma manera que en el capítulo I, se puede escribir como

$$\frac{\frac{\eta^2}{(x-H)^2}}{gh_0[(x-H)^2 + (y+z)^2]} - \frac{\frac{\xi^2}{(y+z)^2}}{gh_0[(x-H)^2 + (y+z)^2]} = 1$$

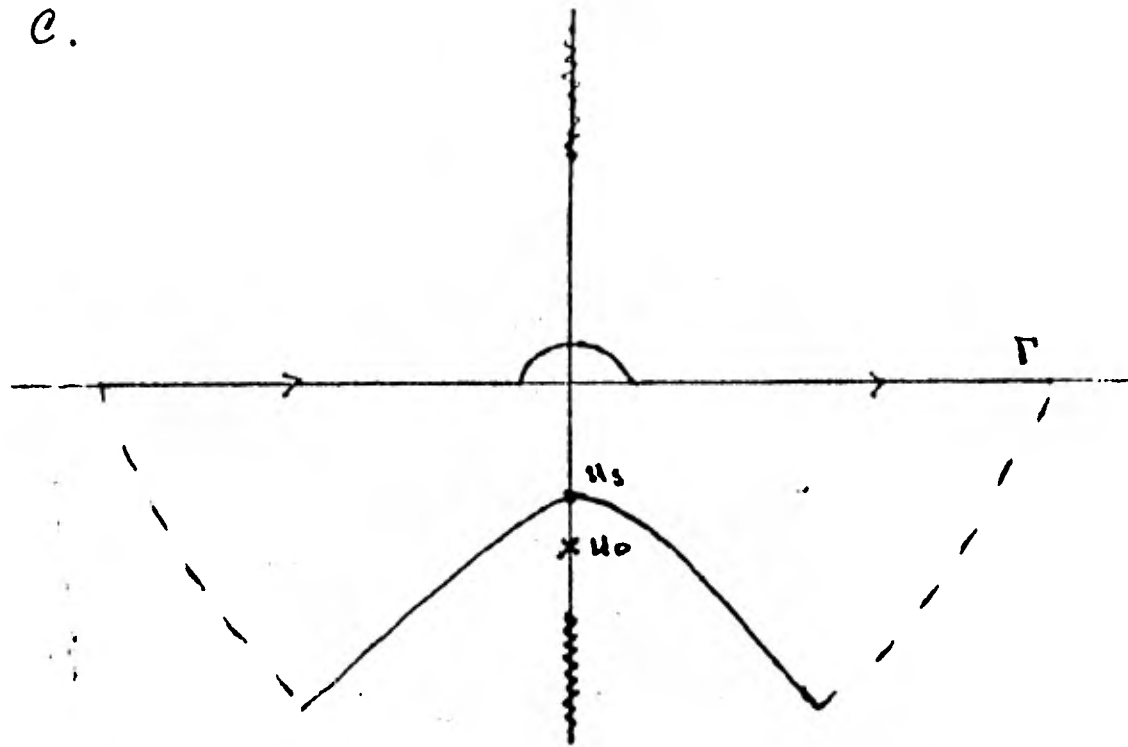
Esta ecuación es la misma que se encontró para la trayectoria de descenso más rápido en el caso sin fuerza de Coriolis. Esto es de esperarse ya que la posición de los frentes de onda está determinada por los términos con derivadas más altas y éstos son los mismos cuando no hay fuerza de Coriolis.

De la ecuación (13) tenemos que, como

$$\sqrt{\eta^2 + 4\frac{\Omega^2}{\sigma^2} + 1} \geq 0, \text{ para } \operatorname{Im} u < 0$$

decae y siguiendo el mismo razonamiento en el capítulo anterior se tiene que \mathcal{I} sobre \mathcal{N} es igual a la integral so-

bre c.



La integral sobre Γ puede aproximarse de la misma manera que en el caso anterior (ecuación (18) del capítulo I). En este caso

$$\phi(u_s) = \frac{i\sqrt{gh_0}}{(4\Omega^2/\sigma^2 + 1)} \frac{\sigma(y+l) + 2\Omega(x-M)}{\sigma(y+l) - 2\Omega(x-M)} \frac{[(x-M)^2 + (y+l)^2]^{3/2}}{(x-M)(y+l)}$$

$$\phi''(u_s) = \frac{-\sqrt{gh_0}}{\sqrt{4\Omega^2/\sigma^2 + 1}} \frac{[(x-M)^2 + (y+l)^2]^{3/2}}{(y+l)^2}$$

de donde

$$\int_{\Gamma} e^{sf(u)} \phi(u) du = i(g h_0)^{1/4} \sqrt{\frac{2\pi}{\Delta}} \frac{\Delta(y+\lambda) + 2\Omega(x-H)}{\Delta(y+\lambda) - 2\Omega(x-H)} \frac{[(x-H)^2 + (y+\lambda)^2]^{3/4}}{(x-H)(y+\lambda)}$$

$$\frac{e^{\frac{-s}{\sqrt{g h_0}} \sqrt{4\frac{\Omega^2}{\Delta^2} + 1} \sqrt{(x-H)^2 + (y+\lambda)^2}}}{(4\frac{\Omega^2}{\Delta^2} + 1)^{5/4}} \left\{ 1 + O(\Delta^{-3/2}) \right\}$$

Sustituyendo este resultado en la ecuación (13) tenemos que el primer término de $\tilde{\eta}(x, y, \Delta)$ es

$$\tilde{\eta}_1(x, y, \Delta) \approx \frac{(g h_0)^{1/4} \beta H}{2\sqrt{2\pi}} \frac{\Delta(y+\lambda) + 2\Omega(x-H)}{\Delta(y+\lambda) - 2\Omega(x-H)} \frac{[(x-H)^2 + (y+\lambda)^2]^{3/4}}{(x-H)(y+\lambda)}$$

$$\frac{e^{\frac{-s}{\sqrt{g h_0}} \sqrt{4\frac{\Omega^2}{\Delta^2} + 1} \sqrt{(x-H)^2 + (y+\lambda)^2}}}{(4\frac{\Omega^2}{\Delta^2} + 1) \Delta^{3/2} (\Delta + \beta)}$$

Notamos que cuando Δ es grande esta expresión puede aproximarse por

$$\tilde{\eta}_1(x, y, \Delta) \approx \frac{(g h_0)^{1/4} \beta H}{2\sqrt{2\pi}} \frac{[(x-H)^2 + (y+\lambda)^2]^{3/4}}{(x-H)(y+\lambda)} \frac{e^{\frac{-s}{\sqrt{g h_0}} \sqrt{4\frac{\Omega^2}{\Delta^2} + 1} \sqrt{(x-H)^2 + (y+\lambda)^2}}}{\Delta^{5/2}}$$

que es la misma expresión que para el frente reflejado ξ' del capítulo anterior excepto por el factor $(1 + 4\Omega^2/\omega^2)^{1/2}$ en la exponencial que es el efecto de la dispersión.

Para determinar el efecto de ese término observamos que cuando ω es grande

$$(1 + 4\Omega^2/\omega^2)^{1/2} \approx 1 + 2\Omega^2/\omega^2$$

y la transformada inversa de Laplace puede escribirse como

$$\eta_1(x, y, t) = \frac{(gh_0)^{1/4} \beta H}{2\sqrt{2\pi}} \frac{[(x-M)^2 + (y+L)^2]^{3/4}}{(x-M)(y+L)} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{e^{st - \frac{r}{\sqrt{gh_0}} - \frac{2\Omega^2}{\omega^2} r}}{s^{5/2}} ds$$

donde $r = \sqrt{(x-M)^2 + (y+L)^2}$

Tomando $\xi = t - r/\sqrt{gh_0}$, que es el tiempo que tarda en llegar al frente de onda $r = \sqrt{gh_0} t$, y haciendo el cambio de variable $s = v/\xi$ tenemos que

$$\eta_1(x, y, z) = \frac{(gh_0)^{1/4} \beta H}{2\sqrt{3}\pi} \frac{[(x-H)^2 + (y+L)^2]^{3/4}}{(x-H)(y+L)} \frac{5^{3/2}}{2\pi i} \int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} \frac{e^{\nu - \frac{2\Omega^2 g r}{\sqrt{gh_0}} \frac{1}{\nu}}}{\nu^{5/2}} d\nu$$

Esta última integral es una representación de una función de Bessel de orden $3/2$.

De esta expresión vemos que el problema dispersivo presenta las mismas características que el no dispersivo en cuanto a la posición de los frentes de onda y decaimiento de la amplitud. Sin embargo en el problema dispersivo hay una característica adicional que es la aparición de una oscilación debida a la función de Bessel, cuya frecuencia es proporcional a Ω^2 . Debido a esto la oscilación es muy lenta y por lo tanto no es observable en condiciones oceanográficas pero sí en otros líquidos que roten si Ω es mayor. Con esto concluimos que, en el caso de interés para la oceanografía, los frentes de onda de los problemas con y sin fuerza de Coriolis se comportan de la misma manera.

El efecto importante de la fuerza de Coriolis no es pues sobre los frentes de onda. Es, sin em-

bargo, la causante de otro efecto muy notorio que son las ondas de Kelvin.

Para estudiar estas ondas consideremos la expresión para $\tilde{\eta}_1(x, y, 0)$ (ecuación (13)). En dicha expresión el integrando tiene un polo en el semiplano $\text{Im } u < 0$. Si tomamos $x - M > 0$, el integrando decrece cuando $\text{Im } u \rightarrow -\infty$ y podemos calcular la integral sobre Γ como una integral sobre el corte ramal a lo largo de un contorno Λ más la contribución del residuo en el polo. De esto obtenemos, sin ninguna aproximación todavía

$$\tilde{\eta}_1 = \frac{gh_0 \mathcal{F}(s)}{2\pi s^2} \int_{\Lambda} \frac{\frac{s^2}{\sqrt{gh_0}} \sqrt{gh_0 u^2 + 4 \frac{\Omega^2}{s^2} + 1} + 2i\Omega s u}{\frac{s^2}{\sqrt{gh_0}} \sqrt{gh_0 u^2 + 4 \frac{\Omega^2}{s^2} + 1} - 2i\Omega s u} \frac{e^{-iu(x-M) - \sqrt{gh_0 u^2 + 4 \frac{\Omega^2}{s^2} + 1}(y+L)}}{u(gh_0 u^2 + 4 \frac{\Omega^2}{s^2} + 1)}$$

$$+ \frac{gh_0 \mathcal{F}(s)}{2\pi s^2} \text{Residuo}(u_0)$$

u_0 es un polo simple y el residuo ahí está dado

por

$$\text{Residuo}(u_0) = \frac{1}{2\pi} \frac{2s^2}{s^2 + 4\Omega^2} \frac{e^{-s(x-M)/\sqrt{gh_0}}}{e^{-2\Omega(y+L)}}$$

Ahora, para ver la forma de la onda cerca de la playa y en ella, debemos invertir la transformada de Laplace. La contribución del residuo puede calcularse directamente mientras que la integral a lo largo de Λ no puede obtenerse en forma cerrada. Sin embargo para x grande esa integral es $O(x^{-1})$ por el lema de Watson (Copson p.p.) por lo cual la despreciamos para obtener la contribución más importante. Si tomamos entonces x grande y $\sqrt{gh_0} t$ comparable con x tenemos que η_1 se aproxima por

$$\eta_1(x, y, t) = \beta H e^{-2\Omega(y+\lambda)} \frac{1}{2\pi i} \int_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty} \frac{e^{s(t - \frac{x-H}{\sqrt{gh_0}})}}{s(s+\beta)} ds + O(x^{-1})$$

Esta última integral se puede calcular fácilmente obteniéndose que

$$\eta_1(x, y, t) = H e^{-2\Omega(y+\lambda)} \left(1 - e^{-\beta(t - \frac{x-H}{\sqrt{gh_0}})} \right) + O(x^{-1})$$

lo que nos da la onda de Kelvin.

Analizando la solución encontramos varios hechos interesantes. En primer lugar la onda de

Kelvin solo se propaga en una dirección a lo largo de la playa. No es una onda dispersiva y es por eso que reproduce exactamente la forma temporal de la fuente en su amplitud. Además decae exponencialmente lejos de la playa.

La amplitud de la onda es proporcional a la altura H de la falla y decrece con la distancia L de la falla a la playa.

Para concluir este capítulo comparamos los resultados obtenidos cuando hay fuerza de Coriolis con los resultados del capítulo I.

La geometría y movimientos de los frentes de onda son los mismos en ambos casos así como el decaimiento de su amplitud. El efecto dispersivo importante es el de hacer aparecer oscilaciones detrás de la primera llegada, cosa que en el caso sin fuerza de Coriolis no sucede. Para efectos oceanográficos esta oscilación resulta prácticamente inobservable.

El efecto importante de la fuerza de Coriolis es el de atrapar ondas no dispersivas cerca de la playa que replican exactamente el movimiento

de la falla y que pueden viajar grandes distancias sin desintegrarse. Estas ondas, desde luego, pueden observarse y son responsables de fuertes efectos en las costas. Concluimos así que la fuerza de Coriolis produce efectos importantes en la solución.

CAPITULO III

Propagación de ondas en un océano semi infinito con fondo inclinado y sin fuerza de Coriolis.

Ahora analizaremos el problema con un modelo para el fondo del océano que es un poco más parecido a la realidad. Supondremos que el fondo es un plano inclinado de pendiente α e infinito hacia mar adentro. En este caso trataremos el problema para dos dimensiones solamente y por el momento despreciaremos el efecto de rotación de la tierra.

Bajo estas condiciones y del mismo modo que en el capítulo I las ecuaciones de movimiento para el agua son

$$(\eta+h)_t = -(vh)_y \quad \dots (1a)$$

$$\rho v_t = -p_y \quad \dots (1b)$$

$$\rho w_t = -p_z - \rho g \quad \dots (1c)$$

en donde nuevamente tenemos que

$$p(y, z) = \rho g (y - z) + p_0 \quad \dots (12)$$

y de ahí

$$v_z = -g \eta_y \quad \dots (13)$$

En este caso los cambios en la profundidad se deben a dos factores: por una parte la falla y por otra a que la forma del fondo, aún antes de que la falla empiece a formarse, depende de la distancia a la playa.

Escogemos pues un perfil para el fondo de la forma

$$h(y, t) = h_0(y) + h_1(y, t) \quad \dots (14)$$

donde

$$h_0(y) = a y$$

La forma de la falla se escoge igual que en los casos anteriores

$$h_1(y, t) = \begin{cases} H(1 - e^{-\beta t}) \\ 0 \end{cases}$$

$ky \leq k_1 + a$
 otros valores
 de y

la situación se ilustra en la figura 5

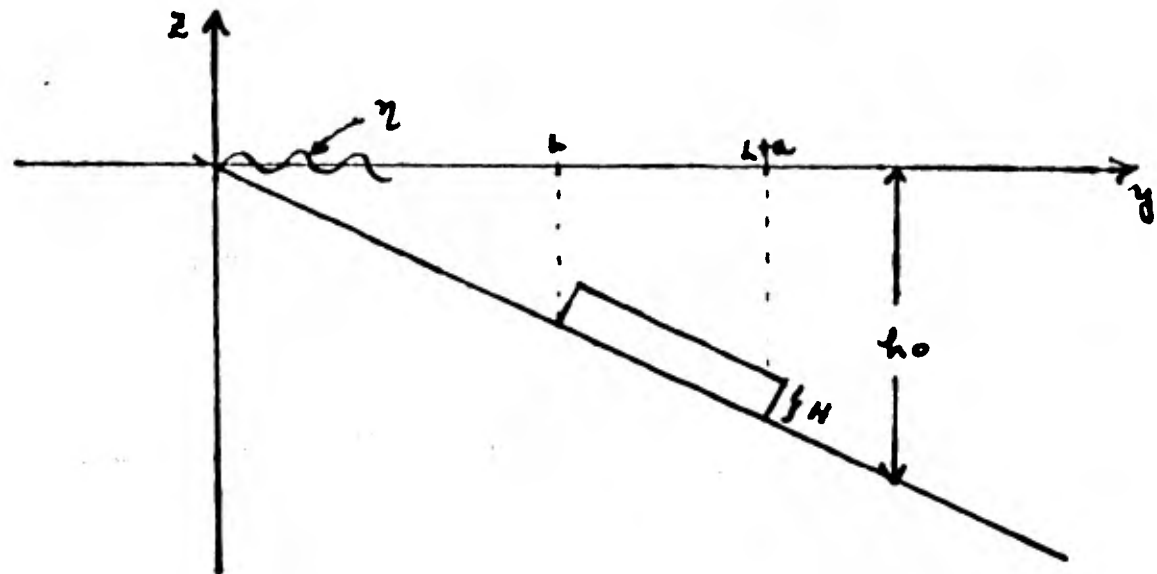


Figura 5.- Sistema de referencia para el caso bidimensional.

Procedemos ahora de la misma manera que en el capítulo I y obtenemos el siguiente sistema hiperbólico

$$v_t = -g\eta_y \quad \dots (5a)$$

$$\eta_t = -(vh_0)_y - h_1 t \quad \dots (5b)$$

Las condiciones son $\eta = v = 0$ cuando $t = 0$. Necesitamos ahora una condición de frontera en la playa ($y = 0$). En este caso requerimos que tanto η como v sean finitas ya que la teoría lineal sería inconsistente con valores infinitos de esas cantidades.

Para resolver el sistema derivamos la ecuación (5b) con respecto a t , sustituimos ahí el resultado de (5a) y obtenemos la transformada de Laplace de esa ecuación. Con eso tenemos que $\tilde{\eta}(y,s)$ satisface

$$s^2 \tilde{\eta} = g(h_0(y) \tilde{\eta}_y)_y - s^2 \tilde{h}_1 \quad \dots (6)$$

con la condición $\tilde{\eta}(0,s)$ finita.

Notemos que ahora tenemos una ecuación con un coeficiente variable $h_0(y) = ay$.

El método para encontrar la solución es el mismo que para los casos anteriores solo que ahora las soluciones al problema homogéneo ya no son exponenciales sino funciones especiales asociadas con $h_0(y)$.

La solución particular del problema en este caso es

$$\tilde{\eta}_p = \begin{cases} \frac{-H(p)}{s(s+p)} & \text{si } y \leq L+a \\ 0 & \text{para otra } y \end{cases}$$

las soluciones linealmente independientes del

problema homogéneo son $I_0(2s\sqrt{y/\alpha g})$ que es finita para $y=0$ y $K_0(2s\sqrt{y/\alpha g})$ que decae exponencialmente cuando $y \rightarrow \infty$, $s \rightarrow \infty$. Las funciones I_0 y K_0 son las funciones modificadas de Bessel. (Lebedev p.p. 108).

Procedemos ahora como para el caso con coeficientes constantes buscando una solución de la forma

$$\tilde{\eta}(y, s) = \begin{cases} c_1 I_0(2s\sqrt{y/\alpha g}) & 0 < y < L \\ c_2 I_0(2s\sqrt{y/\alpha g}) + c_3 K_0(2s\sqrt{y/\alpha g}) + \tilde{\eta}_p & L < y < L+a \\ c_4 K_0(2s\sqrt{y/\alpha g}) & y \geq L+a \end{cases}$$

y de la forma usual con las condiciones de frontera y de continuidad obtenemos las constantes

$$c_1 = \frac{-\beta H}{s(s+\beta)} \left\{ \frac{K_1(s\tau_2)}{I_0(s\tau_2) K_1(s\tau_2) + K_0(s\tau_2) I_1(s\tau_2)} - \frac{K_0(s\tau_1)}{I_0(s\tau_1) K_1(s\tau_1) + K_0(s\tau_1) I_1(s\tau_1)} \right\}$$

$$c_2 = \frac{-\beta H}{s(s+\beta)} \left\{ \frac{K_1(s\tau_2)}{I_0(s\tau_2) K_1(s\tau_2) + K_0(s\tau_2) I_1(s\tau_2)} \right\}$$

$$e_3 = \frac{-\beta H}{s(s+\beta)} \left\{ \frac{I_1(s\tau_1)}{I_0(s\tau_1)K_1(s\tau_1) + K_0(s\tau_1)I_1(s\tau_1)} \right\}$$

$$e_4 = \frac{-\beta H}{s(s+\beta)} \left\{ \frac{I_1(s\tau_2)}{I_0(s\tau_2)K_1(s\tau_2) + K_0(s\tau_2)I_1(s\tau_2)} + \frac{I_1(s\tau_1)}{I_0(s\tau_1)K_1(s\tau_1) + K_0(s\tau_1)I_1(s\tau_1)} \right\}$$

donde los tiempos τ_1 y τ_2 están dados por

$$\tau_1 = 2\sqrt{\frac{L}{g}} \quad \tau_2 = 2\sqrt{\frac{L+a}{g}}$$

Para encontrar la solución en términos de y y t debemos invertir la transformada de Laplace. Estamos interesados en el comportamiento del frente de onda cuando éste llega a la playa ($y=0$) y cómo se refleja.

Estudiaremos en detalle solo el frente producido por la falla entre $0 < y < h$ ya que el estudio de los demás es muy parecido. Para estudiar esta parte de la solución consideramos

$$\eta(y,t) = \frac{\beta H}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{K_0(s\tau_1) I_0(s\sqrt{y/2g})}{I_0(s\tau_1)K_1(s\tau_1) + K_0(s\tau_1)I_1(s\tau_1)} \frac{e^{st}}{s(s+\beta)} ds \quad \dots (7)$$

Aquí conviene descomponer a $I_0(s, z_0)$ en una onda que viaja hacia la playa y otra que se aleja de ella. Para eso recordamos que (Lebedev p. 108)

$$I_0(s, z_0) = J_0(is, z_0) = \frac{1}{2} \{ H_0^{(1)}(is, z_0) + H_0^{(2)}(is, z_0) \}$$

Tenemos así que η_1 está dada por

$$\eta_1(y, t) = \eta_1^i(y, t) + \eta_1^r(y, t)$$

donde la onda incidente está dada por

$$\eta_1^i(y, t) = \beta H \frac{1}{4\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{K_0(s, z_0) H_0^{(1)}(2is\sqrt{y/\alpha g})}{I_0(s, z_0) K_1(s, z_0) + K_0(s, z_0) I_1(s, z_0)} \frac{e^{st}}{s(s+\beta)} ds \quad \dots (8)$$

y la reflejada por

$$\eta_1^r(y, t) = \beta H \frac{1}{4\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{K_0(s, z_0) H_0^{(2)}(2is\sqrt{y/\alpha g})}{I_0(s, z_0) K_1(s, z_0) + K_0(s, z_0) I_1(s, z_0)} \frac{e^{st}}{s(s+\beta)} ds \quad \dots (9)$$

Ahora veremos el movimiento del frente de onda para la parte incidente. Para eso aproximamos la in-

tegral que define a η_i^i para σ grande utilizando los desarrollos asintóticos siguientes (Levedev p.p. 122)

$$H_0^{(2)}(2i\sigma\sqrt{y/4g}) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi\sigma}} \left(\frac{\alpha g}{y}\right)^{1/4} e^{2\sqrt{y/4g}\sigma}$$

$$I_0(\sigma z_1) \sim \frac{e^{\sigma z_1}}{\sqrt{2\pi\sigma z_1}} \quad ; \quad I_1(\sigma z_1) \sim \frac{e^{\sigma z_1}}{\sqrt{2\pi\sigma z_1}}$$

$$K_0(\sigma z_1) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2\sigma z_1}} e^{-\sigma z_1} \quad ; \quad K_1(\sigma z_1) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2\sigma z_1}} e^{-\sigma z_1}$$

Sustituyendo estos resultados en la ecuación (8) se tiene que

$$\eta_i^i(y, t) \sim \frac{\beta H z_1^{1/2}}{2\sqrt{2}} \left(\frac{\alpha g}{y}\right)^{1/4} \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma+i\infty}^{\sigma+i\omega} \frac{e^{-\sigma(t-z_1+2\sqrt{y/4g})}}{\sigma^2} d\sigma$$

Haciendo la aproximación de que en el frente de onda $t > z_1 - 2\sqrt{y/4g}$ y con esto se evalúa la integral obteniendo que

$$\eta_i^i(y, t) \approx \frac{\beta H z_1^{1/2}}{2\sqrt{2}} \left(\frac{\alpha g}{y}\right)^{1/4} \left\{ t - 2\sqrt{\frac{h}{\alpha g}} + 2\sqrt{y/4g} \right\}$$

Esta función representa una onda que sale

desde $y=l$, viaja hacia la izquierda y tiene una amplitud que crece cuando $y \rightarrow \infty$. Esta expresión no es uniformemente válida cuando $y \rightarrow 0$ ya que el desarrollo de $H_0^{(2)}$ involucra el producto \sqrt{y} .

Para la onda reflejada hacemos exactamente lo mismo y obtenemos

$$\eta_1^r(y,t) = \frac{\beta H_0 \zeta_1^{1/2}}{2} \left(\frac{ag}{y}\right)^{1/4} \left\{ t - 2\sqrt{\frac{l}{ag}} - 2\sqrt{\frac{y}{ag}} \right\}$$

para $t > \zeta_1 + 2\sqrt{y/ag}$

Esta es una onda que se propaga después de la reflexión en $y=0$ hacia la derecha (mar abierto).

Vemos también que para el modelo de playa que estamos usando no hay cambio de fase en la reflexión, es decir que un pulso de elevación se refleja en la playa también como un pulso de elevación.

Desde luego resultaría interesante examinar más en detalle que pasa cuando la onda llega a la playa y tratar de encontrar un desarrollo uniforme para la onda incidente cuando menos

válido para $y=0$.

Antes de hacer eso podemos examinar como se mueve el agua exactamente en $y=0$. Para eso calculamos

$$\eta_1(0,t) = \frac{\beta H}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{K_0(s\tau_1)}{I_0(s\tau_1)K_1(s\tau_1) + K_0(s\tau_1)I_1(s\tau_1)} \frac{e^{-st}}{s(1+\tau_1 s)} ds$$

Sustituyendo aquí los desarrollos asintóticos de las funciones de Bessel tenemos que

$$\eta_1(0,t) = \beta H \sqrt{\frac{\pi}{2}} \tau_1^{1/2} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{e^{-s(t-\tau_1)}}{s^{3/2}} ds$$

y aproximando la integral para $t > \tau_1$ tenemos finalmente que

$$\eta_1(0,t) = \beta H \sqrt{\frac{\pi}{2}} \tau_1^{1/2} \frac{1}{\Gamma(3/2)} (t-\tau_1)^{1/2}$$

En primer lugar observamos que la elevación del agua en $y=0$ es siempre finita. Por otra parte hay una diferencia importante en como sube el agua para $y=0$ y para $y \neq 0$. Para

$y \neq 0$ la elevación sube linealmente mientras que para $y=0$ la subida es mucho más violenta ya que es como una parábola. Este cambio es debido a la acumulación de masa de agua en $y=0$ que es más notoria que para $y \neq 0$.

CAPITULO IV

Propagación de ondas unidimensionales sobre un fondo arbitrario en presencia de fuerza de Coriolis.

Consideremos ahora los efectos de un fondo arbitrario $h(y)$ sobre la propagación de ondas en agua en presencia de fuerza de Coriolis.

Las ecuaciones de movimiento son análogas a las del capítulo anterior pero incluyendo un término de fuerza de Coriolis. La transformada de Laplace de esta ecuación es la misma que la ecuación (10) del capítulo II excepto que, como h_0 es variable reemplazamos el término $gh_0 \Delta \tilde{\eta}$ por $g \nabla \cdot h_0 \nabla \tilde{\eta}$ con lo que se obtiene

$$(4\Omega^2 + s^2) \tilde{\eta} = g(h_0(y) \tilde{\eta}_y)_y - (4\Omega^2 + s^2) \tilde{h}_1(y) \quad \dots(1)$$

Como h_0 solo depende de y , consideramos so-

lo las soluciones particulares unidimensionales que satisfacen la ecuación (1) con la condición de frontera $\tilde{\eta}$ acotada cuando $y \rightarrow \infty$.

La forma de la falla la consideramos ahora como puntual, es decir, de la forma $\tilde{h}_1(y) = S \delta(y)$ donde δ es la distribución de Dirac y S el área de la falla. Es decir, calculamos la función de Green del problema. El problema es equivalente a resolver

$$g(h_0(y) \tilde{\eta}_y)_y - (\sigma^2 + 4\Omega^2) \tilde{\eta} = 0 \quad \text{para } y > 0, y < 0$$

$$\tilde{\eta} \text{ continua en } y = 0$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \tilde{\eta}_y(\epsilon, \sigma) - \tilde{\eta}_y(-\epsilon, \sigma) = \frac{S \delta}{g(h_0(y))} \frac{4\Omega^2 + \sigma^2}{\sigma(\sigma + \delta)}$$

$$\eta \text{ acotada cuando } |y| \rightarrow \infty$$

Una manera de resolver el problema es buscar funciones $h_0(y)$ para las cuales se conozcan las soluciones del problema homogéneo en términos de funciones especiales, esto sin embargo

es muy limitante. Como nos interesa resolver el problema para s grande y encontrar así los frentes de onda, lo que debemos buscar es una solución de la ecuación válida para s grande. De otra manera, buscar directamente de la ecuación el comportamiento asintótico de la función especial asociada con h_0 . Este comportamiento se busca utilizando el método J. W. K. B.

Para utilizar este método buscamos soluciones de la forma

$$\tilde{\eta} = A(y) e^{s\psi(y,s)} \dots (2)$$

donde A y ψ son funciones por determinarse.

Sustituyendo (2) en la ecuación (1) obtenemos

$$s^2 \left\{ g h_0 \psi'^2 - (4 \frac{\omega^2}{s^2} + 1) \right\} A e^{s\psi} + s \left\{ h_0 (\psi'' A + 2\psi' A') + \psi' A h_0' \right\} e^{s\psi}$$

Una solución aproximada para s grande se obtiene haciendo cero los términos en los paréntesis obteniéndose así dos ecuaciones para la fase ψ y la amplitud A . Tenemos pues que ψ satisface

$$\psi'^2 = \frac{1}{gh_0} \left\{ 1 + \frac{4\Omega^2}{\sigma^2} \right\} \dots (3)$$

que es la ecuación de la eikonal en una variable. La amplitud satisface también una ecuación de primer orden que se obtiene al igualar a cero el segundo paréntesis. Esta ecuación es

$$h_0(\psi''A + 2\psi'A) + \psi'A h_0' = 0 \dots (4)$$

Las ecuaciones (3) y (4) pueden integrarse inmediatamente obteniéndose para σ grande.

$$\psi(y, \sigma) = \pm \int_0^y \frac{d\xi}{\sqrt{gh_0(\xi)}} \pm \frac{2\Omega^2}{\sigma^2} \int_0^y \frac{d\xi}{\sqrt{gh_0(\xi)}} + \text{cte}$$

En la ecuación (4) multipliquemos por A para obtener

$$h_0(\psi'A^2)' + h_0'(\psi'A^2) = 0$$

de donde $(\psi'h_0A^2)' = 0$

Sustituyendo en esta expresión la ecuación (3) se tiene que

$$(h_0^{1/2} A^2)' = 0$$

e integrando esta última ecuación tenemos que

$$A = cte h_0^{-1/4}$$

que es la bien conocida ley de Green. Esto nos dice que al disminuir la profundidad, la amplitud aumenta.

Hemos construido así las soluciones buscadas para s grande. Estas son

$$C(s) h_0^{-1/4}(y) e^{-s} \int_0^y \frac{d\xi}{\sqrt{g h_0(\xi)}} - \frac{2\Omega^2}{s} \int_0^y \frac{d\xi}{\sqrt{g h_0(\xi)}} \quad y > 0 \quad \dots (4)$$

$$D(s) h_0^{-1/4}(y) e^s \int_0^y \frac{d\xi}{\sqrt{g h_0(\xi)}} + \frac{2\Omega^2}{s} \int_0^y \frac{d\xi}{\sqrt{g h_0(\xi)}} \quad y < 0 \quad \dots (5)$$

donde e y D deben determinarse para satisfacer las condiciones de frontera en $y=0$. Utilizando estas condiciones tenemos que para s grande

$$e(s) = D(s) = \frac{-\alpha\beta}{\alpha(s+\beta)} g^{1/2} h_0^{3/4}(0)$$

Finalmente invertimos la transformada de Laplace de la ecuación (5) que representa ondas que viajan hacia la derecha, obteniendo

$$\eta_1(y,t) = \frac{-\beta}{[gh_0(0)]^{1/4}} \frac{1}{[gh_0(y)]^{1/4}} \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{1}{s} e^{s\left\{t - \int_0^y \frac{d\xi}{\sqrt{gh_0(\xi)}}\right\} - \frac{2\Omega^2}{s} \int_0^y \frac{d\xi}{\sqrt{gh_0(\xi)}}} ds$$

Esta última integral se identifica nuevamente con una función de Bessel.

De esta expresión vemos que el frente de onda $y(t)$ está localizado en $y(t)$ satisfaciendo

$$\int_0^{y(t)} \frac{d\xi}{\sqrt{gh_0(\xi)}} = t$$

que nos da una velocidad de

$$\frac{dy}{dt} = \sqrt{gh_0(y(t))}$$

Esto nos dice que en agua profunda el frente de onda se acelera y en agua somera

se frena. Debido a la dispersión hay una oscilación detrás de la primera llegada. Finalmente, debido a que la fuente es puntual, lo que se propaga a lo largo del frente es una discontinuidad. Esto no sucedió en los capítulos anteriores porque la fuente tenía un tamaño finito.

En resumen, para un fondo arbitrario hay una separación entre los efectos dispersivos y los geométricos. La solución cerca de los frentes de onda se puede obtener fácilmente integrando las soluciones obtenidas por medio del método de W.K.B.

Incluyendo dependencia en la variable x y con un fondo que solo dependiera de y tendríamos exactamente la misma respuesta que en el capítulo II en cuanto a la combinación de dispersión y efectos de fondo. La diferencia sería que los frentes de onda ya no serían circulares sino curvas más complicadas que satisfacen relaciones de la forma

$$t = \int_0^y \frac{ds}{\sqrt{g h_0(s)}} = \frac{(x - x_1)}{\sqrt{g h_0(y)}}$$

Esta aproximación, sin embargo, falla cuando $h(y) = 0$, es decir, cerca de la playa. Pero en esa región encontramos la solución exacta al problema mediante la sección anterior.

Conclusiones

En este trabajo se estudiaron las soluciones a varios problemas de generación de olas por fallas oceánicas y su reflexión tanto por playas rectas como inclinadas. La idea fue comparar los resultados de las diferentes aproximaciones.

Cuando la fuerza de Coriolis se desprecia no se obtiene dispersión después de la primera llegada y los frentes se comportan siguiendo las leyes de la óptica geométrica. El despreciar la fuerza de Coriolis produce errores graves cerca de la playa ya que esta fuerza genera las ondas de Kelvin, que son no dispersivas y que pueden viajar grandes distancias. De hecho este es el efecto más importante de la fuerza de Coriolis.

Se estudió también la reflexión de un frente de onda sobre una playa inclinada cuando la profundidad se hace cero. El resultado fue que el frente de onda se refleja sin cambiar de fase

y, debido a la condición de regularidad que impusimos, la reflexión es total. Además en la playa ($y=0$) el levantamiento de agua después de la primera llegada es más brusco que para $y \neq 0$. Este modelo no incluye rompimiento de ola y la condición $\eta(0,t)$ nos da la reflexión total sin cambio de fase.

Finalmente se analizó la propagación de ondas sobre un fondo arbitrario cuando la fuerza de Coriolis está presente y se obtuvieron las soluciones cerca de los frentes de ondas. Se concluye que el comportamiento cualitativo de estas ondas es semejante a cuando el fondo es plano con la diferencia de una modulación en la amplitud y en que el frente de onda no avanza con velocidad constante como en el caso de fondo plano.

Bibliografía

- Copson, E. T.

Asymptotic Expansions

Cambridge University Press, 1965.

- Felsen, L. B. and N. Marcuvitz

Radiation and Scattering of Waves

Prentice-Hall (microwaves and fields series), 1972

- Lebedev, N. N.

Special Functions and their Applications

Dover Publications, Inc., 1972

- Stoker, J. J.

Water Waves

Interscience Publishers, Inc., 1957

- Van der Pol, B. and H. Bremmer
Operational Calculus
Cambridge University Press, 1964