UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MEXICO.

FACULTAD DE CIENCIAS.

SIMETRÍAS Y CANTIDADES CONSERVADAS EN FORMULACIÓN DE PRIMER ORDEN EN MECANICA CLASICA.

T E S I S

QUE PARA EL TITULO DE

F I S I C O

P R E S E N T A

JOSE JAVIER GÓMEZ LOPEZ

MEXICO DF

NOVIEMBRE 1981.

UNAM
Universidad Nacional Autónoma de México
Biblioteca Central
Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

Para mi madre

Para Adriana con
todo cariño. Y
para Claudia

"Que cada cosa siga su curso natural
No le busquemos los extremos
Una espada continuamente afilada no dura mucho tiempo
Una sala llena de oro y jade es difícil de guardar ..."

Tao Te King

AGRADECIMIENTOS

Agradezco especialmente al Dr. Sergio Hojman por haberme dirigido tan brillantemente en la elaboración de este trabajo, así mismo por la confianza que depositó en mí y por su amistad.

Agradezco también al Dr. Marcos Rosenbaum, director del Centro de Estudios Nucleares, por admitirme en esta institución como becario, gozando de todos los servicios de ésta.

Finalmente agradezco a todos los investigadores, becarios y empleados del Centro de Estudios Nucleares, que incondicionalmente me brindaron su ayuda y apoyo para realizar la tésis; sin olvidar a los maestros que fueron ejemplo de dedicación y trabajo, y estimularon mi interés por la Física, como el Dr. Juan Manuel Lozano, el maestro Juan de Oyarzábal y el Dr. Alberto Barajas.

INDICE

pags.

Introducción ---------------------------- i

Capítulo I. Formulación Variacional de la Mecanica Clásica ---------- 1

I.1 Ecuaciones diferenciales ordinarias de orden "n" y ecuaciones de Newton --- 1

I.2 Formulación Analítica ---------------- 3

I.3 Lagrangianos s-equivalentes ---------- 15

I.4 El problema inverso del cálculo variacional ------------ 25

I.5 Formulación de primer orden -------- 27

Capítulo II. Transformaciones de simetría y leyes de conservación en Mecánica Clásica ----------- 38

II.1 Las constantes de movimiento -------- 39

II.2 Clasificación de las transformaciones -- 43

II.3 Teorema de Noether -------------- 51

Capítulo III. Extensión del teorema de Noether en primer orden ---------- 61

III.1 Lagrangianos de primer orden y ecuaciones de movimiento ---------- 61

III.2 El teorema de Noether "usual" en primer orden --------------- 62

III.3 Problema inverso del teorema de Noether en primer orden ----------- 63

III.4 Aplicación del teorema inverso de Noether en primer orden --------- 67

III.5 Extensión del teorema de Noether para simetrías no-noetherianas ------ 76

Capítulo IV. Resumen y Conclusiones ------87
Apéndice A ------------------------89
Referencias y Bibliografía ------------93

Introducción

Actualmente, la Mecánica Clásica nos plantea problemas abiertos de gran interés. Algunos de éstos surgen cuando en el tratamiento variacional se considera que las curvas-solución son más fundamentales que las ecuaciones de movimiento. Este cambio en la forma de analizar la dinámica se debe a las siguientes razones:

1) Lo que observamos en la Naturaleza a nivel clásico, es decir, cuando se trata de objetos "grandes y lentos", son las trayectorias que siguen dichos objetos y no los lagrangianos o ecuaciones de movimiento directamente.

2) Un problema dinámico puede tener varios lagrangianos equivalentes (3, 11, 12) que den ecuaciones de movimiento diferentes pero con el mismo conjunto de curvas-solución.

Esto último nos indica que tanto los lagrangianos como las ecuaciones de movimiento son herramientas matemáticas en el tratamientos de los problemas dinámicos que no gozan de carácter unico y absoluto.

Uno de los problemas que se presentan es el de investigar la relación entre simetrías de las soluciones* y cantidades conservadas.

* Las simetrías de las soluciones transforman un lagrangiano en otro equivalente, por lo que no dejan necesariamente invariantes las ecuaciones de movimiento, aunque el conjunto de curvas-solución sea el mismo.

En Mecánica Clásica existe un teorema que relaciona las simetrías "usuales" con las cantidades conservadas (18). Este teorema esencialmente nos dice cómo encontrar una cantidad conservada a partir de una simetría del lagrangiano; por ejemplo, la conservación de la energía está asociada a la independencia temporal del lagrangiano.

En base a este teorema y considerando simetrías que dejen invariante el conjunto de curvas-solución, es decir, que transformen curvas-solución en curvas-solucion, podríamos preguntarnos ¿Cuáles serán las cantidades conservadas asociadas a este tipo de simetrías?

Encontrar una respuesta a esta pregunta es precisamente el objetivo de la presente tesis. El estudio se hará utilizando una fórmulación de primer orden por razones que se aclararán más adelante.

Antes de abordar el problema central, se presentará una reseña del panorama actual de la Mecánica Clásica en el Capítulo I, en el Capítulo II introduciremos el teorema de Noether y en el capítulo III se verá la extensión de este teorema para simetrías no-noethorianas bajo una formulación de primer orden. Finalmente daremos un ejemplo de aplicación de esta extensión.

Capítulo I) Formulación Variacional de la Mecánica Clásica

La evolución de la Física se ha caracterizado por una mayor capacidad de síntesis en las explicaciones de los conocimientos acumulados, colocándolos dentro de estructuras matemáticas más generales. En Mecánica Clásica nos basta observar el trayecto que ha seguido desde su inicio formal con Newton hasta la generalización dada por la formulación variacional de Euler-Lagrange, que utiliza el principio de acción estacionaria.

En primer lugar dentro de este capítulo se presentarán las ecuaciones de Newton, que son aquellas que tienen contenido físico; para continuar con la formulación variacional y las ecuaciones de Euler-Lagrange. Finalmente se expondrán algunos aspectos modernos de esta formulación, como los lagrangianos S-equivalentes y el problema inverso del cálculo de variaciones, así como la formulación variacional en primer orden.

I.1) Ecuaciones diferenciales ordinarias de orden "n" y ecuaciones de Newton.

Las ecuaciones diferenciales ordinarias de orden "n" son relaciones de la forma

$$F(q^{(n)}, q^{(n-1)}, \ldots, \ddot{q}, \dot{q}, q, t) = 0 \qquad (I.1)$$

donde $q^{(i)}$ indica la derivada i-ésima respecto a t

i.e. $q^{(i)} \equiv \dfrac{d^i q}{dt^i}$, donde

usualmente se toma a t como el tiempo.
Otra forma de expresar (I.1) es la siguiente:

$$q^{(n)} = f(q^{(n-1)}, q^{(n-2)}, \ldots, \dot{q}, t) \quad \ldots\ldots \quad (I.2)$$

que se obtiene de (I.1) siempre que se pueda despejar la derivada de orden superior. Si además conocemos las condiciones iniciales dadas por: $q_0^{(n-1)} = q^{(n-1)}(t_0)$, $q_0^{(n-2)} = q^{(n-2)}(t_0)$ $\ldots$, $\dot{q}_0 = \dot{q}(t_0)$, podremos determinar la única integral, única que corresponde a esa solución particular.
Cuando hablamos de sistemas dinámicos se hace referencia a las ecuaciones de Newton, que son de segundo orden, es decir, $n=2$.
Estas ecuaciones se expresan de la siguiente manera:

$$m_i \ddot{x}_i = f_i(\dot{x}_j, x_j, t) \quad \ldots\ldots \quad (I.3)$$

donde $m_1 = m_2 = m_3$ es la masa de la partícula 1.

x_1: la coordenada x de la partícula 1
x_2: " " y " " " 1
x_3: " " z " " " 1

$m_4 = m_5 = m_6$ es la masa de la partícula 2

x_4: la coordenada x de la partícula 2
x_5: " " y " " " 2
x_6: " " z " " " 2

y así sucesivamente.

Si además tenemos las condiciones iniciales $x_i(t_0) = x_{i_0}$ y $\dot{x}_i(t_0) = \dot{x}_{i_0}$, podremos determinar una solución unica dada por $x_i = x_i(t)$, que representa las trayectorias de las partículas del sistema considerado.

I.2) Formulación Analítica

En la Sección anterior hemos visto que para obtener las trayectorias o soluciones de un Sistema dinámico particular es necesario encontrar las ecuaciones diferenciales (I.3) que son las leyes que rigen el movimiento del sistema. Newton fué el primero en establecerlas en la forma vectorial $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m\ddot{\vec{x}}$ donde $\vec{p} = m\dot{\vec{x}}$

Posteriormente, dentro del desarrollo de la mecanica nos encontramos con una formulación general que al utilizar el principio de mínima acción o principio de Hamilton tiene como resultado las ecuaciones que gobiernan el movimiento.

A continuación señalaremos las diferencias entre el método newtoniano y la formulación analítica (ver, por ejemplo, 14).

En la mecánica vectorial cada partícula de un sistema se identifica al fijar sus coordenadas x, y, z. Sobre esta partícula actúa una fuerza con componentes F_x, F_y, F_z, que viene a ser la resultante de las fuerzas externas que actúan sobre el sistema más las interacciones de las otras partículas sobre ella.

Si el sistema es muy complicado será difícil encontrar las fuerzas individuales. Sin embargo, el

método analítico considera al sistema en su conjunto, sin preocuparse por identificar cada componente de las fuerzas que actúan sobre él, introduciendo el concepto de potencias (una sola función para todo el sistema).
Con este método podemos encontrar el conjunto de ecuaciones de movimiento a partir del principio de mínima acción, como se verá más adelante.

El principio de mínima acción es independiente de las coordenadas que se utilicen, de donde podemos concluir que las ecuaciones de movimiento deberán ser independientes* (cambiarán de forma) de las coordenadas escogidas.

Lo anterior nos permitirá escoger las coordenadas más convenientes para caracterizar al sistema que queramos estudiar sin alterar los resultados.

a) Coordenadas generalizadas y el espacio de configuración (14).

La forma usual de describir los sistemas dinámicos es por medio de las coordenadas cartesianas x, y, z de cada masa puntual integrante del sistema.

Existe una correspondencia biunívoca entre los puntos del espacio físico con el conjunto de tríadas (x, y, z). Si N partículas componen el sistema, tendremos $3N$ coordenadas en total, que podemos llamar: $q_1, q_2, \dots, q_{3N}$

---

*describirán el mismo sistema físico

Dependiendo del tipo de problema que se estudie podremos hacer un cambio de coordenadas adecuado, por ejemplo, si estudiamos el movimiento en un campo central puede ser conveniente introducir coordenadas esféricas:

$$
\begin{aligned}
x &= r \operatorname{sen}\theta \cos\phi \\
y &= r \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi \qquad \cdots\cdots \quad (I.4) \\
z &= r \cos\theta
\end{aligned}
$$

Escogiendo como coordenadas a r, θ, ϕ.

Generalmente podemos tener una transformación de coordenadas en la siguiente forma:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= f_1(q_1, \ldots, q_{3N}, t) \\
x_2 &= f_2(q_1, \ldots, q_{3N}, t) \qquad \cdots\cdots \quad (I.5) \\
&\vdots \\
z_N &= f_{3N}(q_1, \ldots, q_{3N}, t)
\end{aligned}
$$

Con frecuencia este cambio facilita enormemente la solución del problema. Sin embargo, es necesario que las funciones f_i sean finitas, uni-valuadas, continuas y diferenciables, además que el jacobiano de esta transformación, dado por:

$$
J \equiv \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial q_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial q_{3N}} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial f_{3N}}{\partial q_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_{3N}}{\partial q_{3N}} \end{vmatrix}
$$

sea diferente de cero. Con esto último se asegura que la transformación sea invertible, pudiendo expresar las q_s en función de las coordenadas cartesianas.

Las coordenadas q_s reciben el nombre de "coordenadas generalizadas" y todas juntas representan un solo punto en un espacio de 3N dimensiones.

Cuando existen ciertas condiciones cinemáticas llamadas "constricciones holonómicas" en el sistema, como por ejemplo, dos masas puntuales que deben estar a una distancia fija una de la otra (la mancuerna), tendríamos la relación siguiente entre las coordenadas:

$$(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2=a^2 \qquad (I.6)$$

Si despejamos de esta ecuación una variable, digamos z_2, en función de las otras cinco, se reduce el número de variables independientes.

Otro ejemplo más general donde hay constricciones es el "cuerpo rígido", en él las distancias entre las masas puntuales están fijas. Aunque en este caso se tenga un número infinito de partículas puntuales, el "cuerpo rígido" sólo tiene seis grados de libertad que pueden ser descritos por las coordenadas del centro de masa y los tres ángulos de Euler que determinan su orientación.

En general, si en un sistema mecánico con N partículas que tienen m constricciones holonómicas de la forma:

$$\phi_i(x_1, x_2, \ldots, z_N)=0 \qquad (I.7)$$

$$i=1,\ldots,m$$

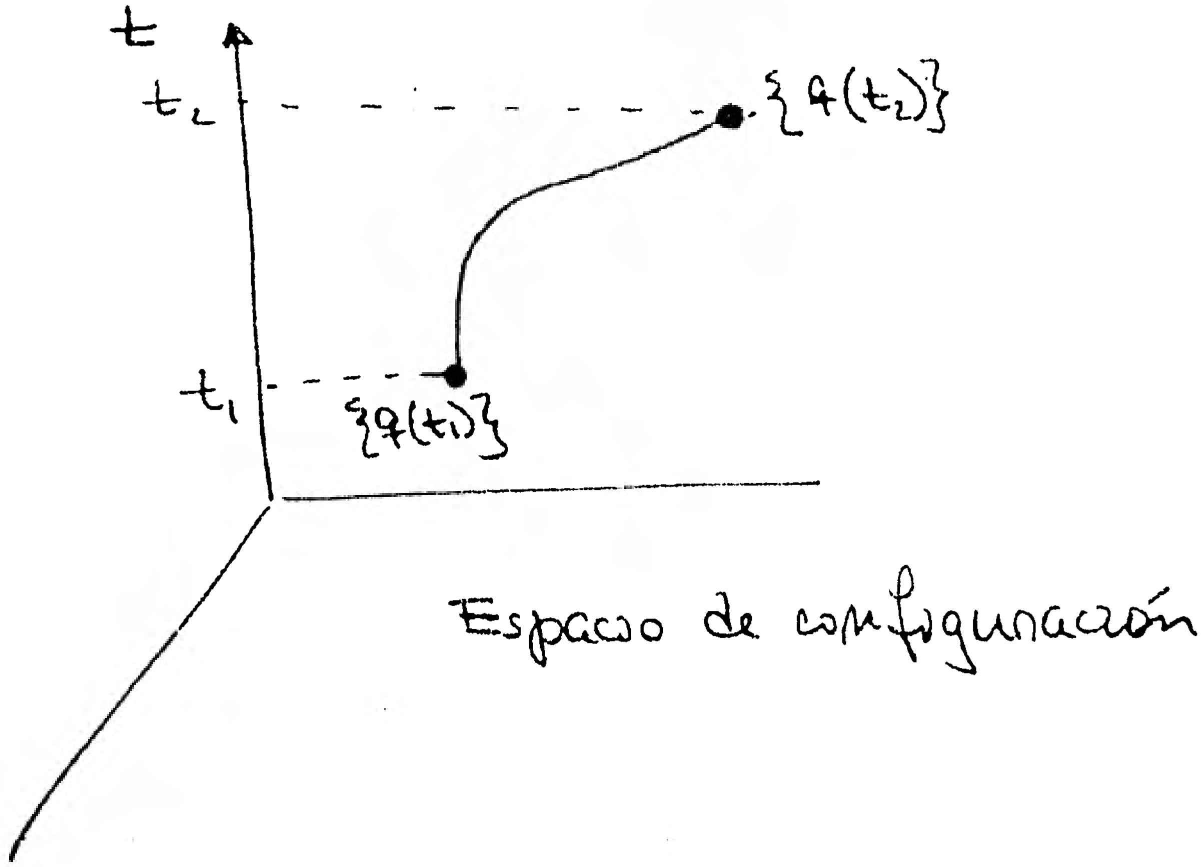
Es posible caracterizar siempre al sistema con n parámetros :

$$q_1, q_2, \ldots, q_n \quad \ldots\ldots \quad (I.8)$$

Donde $n = 3N - m$, de tal forma que las coordenadas cartesianas de todas las partículas son expresadas como funciones de los n parámetros (las coordenadas generalizadas) (I.8) :

$$x_1 = f_1(q_1, \ldots, q_n)$$
$$x_2 = f_2(q_1, \ldots, q_n) \quad \ldots\ldots \quad (I.9)$$
$$\vdots \qquad \vdots$$
$$z_N = f_{3N}(q_1, \ldots, q_n)$$

Donde "n" es el número de grados de libertad del sistema.
Las funciones f_i de (I.9) deben ser finitas, uno-valuadas, continuas y diferenciables, además que el jacobiano sea distinto de cero.
Podemos pensar que todas las coordenadas generalizadas : $q_1, q_2, \ldots, q_n$ representan un punto que caracteriza a todo el sistema en un espacio de n dimensiones llamado "Espacio de Configuración del sistema".
Este espacio no es real físicamente, sino que solo representa matemáticamente las posiciones y relaciones de todo el conjunto. Las trayectorias de este espacio tienen la forma $\{q_1(t), q_2(t), \ldots, q_n(t)\}$, donde t es el parámetro que corresponde al tiempo.



(fig 1)

En la figura 1 se muestra la trayectoria seguida por el sistema en el transcurso de tiempo comprendido entre $t = t_1$ y $t = t_2$.

b) Principio de Hamilton y las ecuaciones de Euler-Lagrange.

Para sistemas donde las fuerzas son derivables de un potencial ($\vec{F} = -\nabla V$), el principio de Hamilton puede ser enunciado así: (ver por ejemplo el Goldstein (7))

"El movimiento del sistema en el tiempo que transcurre de t_1 a t_2, con $q_i(t_1)$ y $q_i(t_2)$ fijos, es tal que la integral de línea

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t)\, dt \qquad \cdots\cdots \quad (\text{I}.10)$$

donde $L = T - V$ (T: energía cinética, V: energía potencial).

toma un valor extremal cuando se evalúa en la trayectoria real que sigue el movimiento del sistema, para variaciones arbitrarias $\delta q_i(t)$ para $t_1<t<t_2$ y $\delta q_i(t)=0$ para $t=t_1$ y $t=t_2$. A la integral S se le denomina "acción" del sistema, y es por eso que a este principio también se le llama de la "mínima acción" (aunque solo se pide que sea extremal) (18)

Podemos resumir lo anterior diciendo que la variación de la acción para tiempos fijos t_1, t_2 y posiciones inicial y final también fijas: $q_i(t_1)$, $q_i(t_2)$, es cero.

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q,\dot{q},t)\,dt = 0 \quad \ldots\ldots\ (\text{I}.11)$$

(Gottstein)

$\delta q_i(t)$ arbitrario en $t_1<t<t_2$

y $\delta q_i(t)=0$ en $t=t_1$ y $t=t_2$.

A la función L se le llama lagrangiano del sistema. Más adelante veremos como con solo esta función, podremos determinar las ecuaciones diferenciales que gobiernan el sistema.

Para deducir las ecuaciones de movimiento seguiremos los pasos del libro de Saletan y Cromer (ver ref).

Vamos a considerar todas las posibles trayectorias que unen los puntos $q(t_1)$ con $q(t_2)$ *, y cada una de ellas la identificaremos con un parámetro ϵ, de tal forma que $\epsilon=0$ corresponda a la trayectoria real seguida por nuestro sistema. De esta forma tendremos la familia de trayectorias $-\epsilon$: $q(t,\epsilon)$ con ϵ fijo, y supondremos que son diferenciables respecto a ϵ.

Como todas las trayectorias comienzan en $q(t_1)$ y finalizan en $q(t_2)$, tenemos:

$$\begin{aligned} q(t_1,\epsilon) &= q(t_1,0) = q(t_1) \equiv q_1 \\ q(t_2,\epsilon) &= q(t_2,0) = q(t_2) \equiv q_2 \end{aligned} \quad \ldots\ (\text{I}.12)$$

* : representaremos a $q(t) \equiv \{q_1(t), q_2(t), \ldots, q_n(t)\}$.

Ahora bien, la integral de acción (I.10) tendrá diferentes valores dependiendo de la trayectoria que se tome, es decir, que depende de ϵ.

$$S(\epsilon) = \int_{t_1}^{t_2} L(q(t,\epsilon), \dot{q}(t,\epsilon), t)\,dt = \int_{t_1}^{t_2} L(t,\epsilon)\,dt \qquad (I.13)$$

Un enunciado equivalente al principio variacional será el siguiente: Para cada familia de trayectorias $-\epsilon$ que satisfacen las condiciones mencionadas y $S(0)$ es el extremal de la acción, se tiene

$$\left.\frac{dS}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0} = \left[\frac{d}{d\epsilon}\int_{t_1}^{t_2} L\,dt\right]_{\epsilon=0} = 0 \qquad (I.14)$$

La integral temporal del Lagrangiano es un extremal para el movimiento real.

A continuación se mostrará que de (I.14) se deducen las ecuaciones de movimiento.

Como los límites de (I.14) están fijos, tenemos

$$\frac{dS}{d\epsilon} = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \epsilon}\,dt \qquad (I.15)$$

donde $$\frac{\partial L}{\partial \epsilon} = \frac{\partial L}{\partial q^\alpha}\frac{\partial q^\alpha}{\partial \epsilon} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha}\frac{\partial \dot{q}^\alpha}{\partial \epsilon} \qquad (I.16)$$

En el desarrollo siguiente denotaremos por $\frac{d}{dt}$ a la derivada parcial cuando se mantiene ϵ fija y es diferente de $\frac{\partial}{\partial t}$. Ahora $\dot{q}^\alpha$ es $\frac{dq^\alpha(t,\epsilon)}{dt}$ en ese sentido, y por lo tanto podemos cambiar el orden en la diferenciación en $\partial \dot{q}^\alpha/\partial\epsilon$, o sea $\frac{\partial \dot{q}^\alpha}{\partial \epsilon} = \frac{d}{dt}\frac{\partial q^\alpha}{\partial \epsilon}$

y podemos escribir el segundo término en (I.16) como

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha}\frac{\partial \dot{q}^\alpha}{\partial \epsilon} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha}\frac{d}{dt}\frac{\partial q^\alpha}{\partial \epsilon} = \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\frac{\partial q^\alpha}{\partial \epsilon}\right] - \left[\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha}\right]\frac{\partial q^\alpha}{\partial \epsilon}$$ que al sustituir

en (I.16) da

$$\frac{\partial L}{\partial \epsilon} = \left[\frac{\partial L}{\partial q^\alpha} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha}\right]\frac{\partial q^\alpha}{\partial \epsilon} + \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha}\frac{\partial q^\alpha}{\partial \epsilon}\right] \qquad (I.17)$$

introduciendola en (I.15) resulta

$$0 = \frac{dS}{d\epsilon} = \int_{t_1}^{t_2}\left[\frac{\partial L}{\partial q^\alpha} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha}\right]\frac{\partial q^\alpha}{\partial \epsilon}\,dt + \int_{t_1}^{t_2}\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha}\frac{\partial q^\alpha}{\partial \epsilon}\right]dt \qquad (I.18)$$

donde la segunda integral es $\left.\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha}\frac{\partial q^\alpha}{\partial \epsilon}\right|_{t_1}^{t_2} = 0$ ya que $\frac{\partial q(t_1,\epsilon)}{\partial \epsilon} = \frac{\partial q(t_2,\epsilon)}{\partial \epsilon} = 0$ debido a que en t_1 y t_2 los puntos coinciden con los de la trayectoria física. Como esto es cierto para cualquier familia de trayectorias, las derivadas $\partial q^\alpha/\partial \epsilon$ son funciones arbitrarias del tiempo y por tanto (I.18) se cumple cuando

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} - \frac{\partial L}{\partial q^\alpha} = 0 \qquad (I.19)$$

$$\alpha = 1, 2, \ldots, n$$

Que son las ecuaciones de Euler-Lagrange, que describen el movimiento del sistema considerado.

El miembro izquierdo de (I.19) es conocido como la "derivada lagrangiana", representada como

$$L_\alpha \equiv \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} - \frac{\partial L}{\partial q^\alpha} \qquad (I.20)$$

En mecánica clásica es usual considerar al lagrangiano como la diferencia entre la energía cinética y la energía potencial, i.e., $L = T - V$ (que está en conexión con las ecuaciones de Newton). A continuación presentaremos un teorema que extiende el concepto de lagrangiano hasta la adición de la derivada total respecto al tiempo de una función de las coordenadas y el tiempo.

Teorema I.1 –

Si al lagrangiano $L = T - V$ le sumamos la derivada total con respecto al tiempo de una función arbitraria $\Omega(q,t)$ satisface las mismas ecuaciones de Euler-Lagrange que teníamos inicialmente. Y recíprocamente si dos lagrangianos L y L' dan origen a las mismas ecuaciones de movimiento (Euler-Lagrange) entonces difieren por una derivada total con respecto al tiempo de una función de las coordenadas y el tiempo, $\Omega(q,t)$.

Demostración:

$$\Rightarrow \text{Sea} \quad L'(q,\dot{q},t) = L(q,\dot{q},t) + \frac{d\Omega(q,t)}{dt} \tag{I.21}$$

entonces
$$\frac{\partial L'}{\partial q^\alpha} = \frac{\partial L}{\partial q^\alpha} + \frac{\partial}{\partial q^\alpha}\left[\frac{\partial \Omega}{\partial q^\beta}\dot{q}^\beta + \frac{\partial \Omega}{\partial t}\right]$$
$$= \frac{\partial L}{\partial q^\alpha} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial q^\alpha \partial q^\beta}\dot{q}^\beta + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial q^\alpha \partial t}$$

$$\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}^\alpha} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} + \frac{\partial \Omega}{\partial q^\alpha} \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}^\alpha} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial q^\beta \partial q^\alpha}\dot{q}^\beta + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial t \partial q^\alpha}$$

de donde se obtiene
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}^\alpha} - \frac{\partial L'}{\partial q^\alpha} \equiv \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} - \frac{\partial L}{\partial q^\alpha} \quad \text{i.e } L'_\alpha \equiv L_\alpha$$

De aquí se infiere que si $L_\alpha = 0$ entonces $L'_\alpha = 0$ y $L'_\alpha = 0$ implica $L_\alpha = 0$.

$\Leftarrow$) Ahora supondremos que dados dos lagrangianos L y L' y sus ecuaciones E-L son idénticas i.e

$$[L]_\alpha \equiv [L']_\alpha$$

lo que demostraremos será que $L'-L = \frac{df(q,t)}{dt}$.
Para facilitar la demostración llamaremos $\Delta \equiv L'-L$.
Al calcular la derivada lagrangiana de Δ tenemos:

$$[\Delta]_\alpha \equiv \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \Delta}{\partial \dot{q}^\alpha}\right) - \frac{\partial \Delta}{\partial q^\alpha} \equiv 0 \qquad \text{ya que } [\Delta]_\alpha \equiv [L']_\alpha - [L]_\alpha \equiv 0$$

desarrollando

$$\frac{\partial^2 \Delta}{\partial \dot{q}^\alpha \partial \dot{q}^\beta}\ddot{q}^\beta + \frac{\partial^2 \Delta}{\partial q^\beta \partial \dot{q}^\alpha}\dot{q}^\beta + \frac{\partial^2 \Delta}{\partial t \partial \dot{q}^\alpha} - \frac{\partial \Delta}{\partial q^\alpha} \equiv 0 \qquad (I.22)$$

Como el primer término es el único que contiene aceleraciones, el coeficiente de $\ddot{q}^\beta$ debe ser idénticamente cero. i.e

$$\frac{\partial^2 \Delta}{\partial \dot{q}^\beta \partial \dot{q}^\alpha} \equiv 0$$

Cuando integramos resulta que Δ tiene la forma

$$\Delta = \Delta_\alpha(q,t)\dot{q}^\alpha + \Delta_0(q,t)$$, que es lineal en las velocidades.

Sustituyendo esta expresión en (I.22) tenemos la siguiente identidad

$$\frac{d}{dt}(\Delta_\alpha) - \frac{\partial \Delta_\beta}{\partial q^\alpha}\dot{q}^\beta - \frac{\partial \Delta_0}{\partial q^\alpha} \equiv 0$$

que podemos escribir

$$\left(\frac{\partial \Delta_\alpha}{\partial q^\beta} - \frac{\partial \Delta_\beta}{\partial q^\alpha}\right)\dot{q}^\beta + \frac{\partial \Delta_\alpha}{\partial t} - \frac{\partial \Delta_0}{\partial q^\alpha} \equiv 0$$

Como la $\dot{q}^\beta$ solo aparece en el primer término, tenemos las siguientes identidades:

$$\frac{\partial \Delta_\alpha}{\partial q^\beta} - \frac{\partial \Delta_\beta}{\partial q^\alpha} \equiv 0 \quad \text{, o sea} \quad \frac{\partial \Delta_\alpha}{\partial q^\beta} \equiv \frac{\partial \Delta_\beta}{\partial q^\alpha}$$

y

$$\frac{\partial \Delta_\alpha}{\partial t} - \frac{\partial \Delta_0}{\partial q^\alpha} \equiv 0 \quad \text{, o sea} \quad \frac{\partial \Delta_\alpha}{\partial t} \equiv \frac{\partial \Delta_0}{\partial q^\alpha}$$

Satisfacen las condiciones del lema de Poincaré ó de diferenciabilidad (ver por ejemplo Spivak (25)). y por lo tanto se cumple que

$$\Delta_\alpha(q,t) = \frac{\partial f(q,t)}{\partial q^\alpha} \quad y \quad \Delta_0(q,t) = \frac{\partial f(q,t)}{\partial t}$$

o sea: $\Delta = \dfrac{df(q,t)}{dt}$. Que es lo que queríamos probar.

Nos encontramos ahora en posición de considerar al lagrangiano con la indeterminación aditiva de la derivada total con respecto al tiempo de cualquier función de las coordenadas y del tiempo.

Es importante señalar que la función lagrangiana puede no tener la forma usual mas general ($L = T - V + \frac{d\Omega}{dt}$) y que a pesar de esto, las soluciones de sus ecuaciones Euler Lagrange coincidan con las soluciones físicas del problema que se estudie.

Dos lagrangianos que den origen a las mismas soluciones reciben el nombre de s-equivalentes y la diferencia entre ellos no será necesariamente la derivada con respecto al tiempo de una función $\Omega(q,t)$ a diferencia del caso de lagrangianos que tengan las mismas ecuaciones de Euler-Lagrange, su diferencia puede ser $\frac{d\Omega}{dt}$, ó 0 ó bien proporcionales: $L' = AL$ donde A es una constante.

I.3) Lagrangianos s-equivalentes

Comenzaremos esta sección con un ejemplo en el que se mostrarán dos lagrangianos que describen clasicamente el mismo sistema dinámico y no difieren por una derivada total del tiempo de una función.

Ejemplo.-
Una partícula libre tiene un lagrangiano usual

$$L = \frac{1}{2}\dot{x}^2 \quad \text{(considerando la masa } m=1\text{)}$$

cuya ecuación de Euler-Lagrange es

$$\ddot{x} = 0 \qquad \Rightarrow x = At + B \text{ como solución.} \qquad \ldots\ldots \quad (I.23)$$

Si ahora consideramos la función

$$L' = \frac{1}{3}\dot{x}^3$$

obtenemos la ecuación E-L que resulta de L'

$$\dot{x}\ddot{x} = 0 \qquad \ldots\ldots \quad (I.24)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dot{x} = 0 \\ \text{ó } \ddot{x} = 0 \end{cases} \qquad x = At + B, \quad A, B \text{ números.}$$

cuyas soluciones coinciden con las de (I.23), y puesto que las ecuaciones (I.23) y (I.24) son diferentes, entonces $L' - L$ no es la derivada total de una función. Este hecho se debe al teorema I.1.

A continuación presentaremos el análisis de la equivalencia entre lagrangianos en una dimensión que fue tratado por Currie y Saletan en 1966 (3).

Vamos a suponer que $L(q,\dot{q},t)$ y $\bar{L}(q,\dot{q},t)$ son dos funciones lagrangianas para un mismo sistema sin constricciones y con un grado de libertad. Además se cumple que $L_{\dot{q}\dot{q}}$ y $\bar{L}_{\dot{q}\dot{q}}$* son diferentes de 0 e infinito en una región R del espacio $(q,\dot{q},t)$ y también que L y $\bar{L}$ tienen primera y segunda derivadas continuas en R.

Antes de enunciar el teorema de la equivalencia entre lagrangianos es preciso definir lo que se entiende por subordinación de un lagrangiano con respecto a otro.

Definición: $\bar{L}$ está subordinado a L en R si

$$\mathcal{E}L = 0 \Rightarrow \mathcal{E}\bar{L} = 0 \,{**}$$

Teorema I.2)

a) Si $\bar{L}$ está subordinado a L en R, entonces L está subordinado a $\bar{L}$ en R, es decir, L y $\bar{L}$ son equivalentes en R.

Adicionalmente $\mathcal{E}\bar{L} = f(q,\dot{q},t)\,\mathcal{E}L$ . . . . (I.25)

donde $f(q,\dot{q},t)$ es una constante de movimiento que es el cociente de los tensores de masa: $\bar{L}_{\dot{q}\dot{q}}/L_{\dot{q}\dot{q}}$.

b) Si existe un lagrangiano L y una constante de movimiento $f(q,\dot{q},t)$ (de las ecuaciones de movimiento) tal que $f, L_{\dot{q}\dot{q}} \neq 0, \infty$ en R,

---

* En general, denotaremos la derivación parcial con respecto a la variable que aparezca como subíndice, así tenemos:

$$L_{\dot{q}\dot{q}} \equiv \frac{\partial^2 L}{\partial\dot{q}\partial\dot{q}} \quad \text{y} \quad \bar{L}_{\dot{q}\dot{q}} \equiv \frac{\partial^2 \bar{L}}{\partial\dot{q}\partial\dot{q}}$$

** $\mathcal{E}L \equiv \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \dfrac{\partial L}{\partial q}$ (son las ecuaciones de Euler-Lagrange).

Entonces existe un $\bar{L}$ equivalente a L en R que satisface (I.25) y $\bar{L}$ es único hasta una derivada total del tiempo de alguna función de q y t.

Demostración:

La ecuación de Euler-Lagrange para L se puede escribir

$$\mathcal{E}L \equiv \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = \ddot{q}L_{\dot{q}\dot{q}} + \dot{q}L_{\dot{q}q} + L_{\dot{q}t} - L_q = 0 \qquad \text{(I.26)}$$

y para $\bar{L}$

$$\mathcal{E}\bar{L} \equiv \frac{d}{dt}\frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial \bar{L}}{\partial q} = \ddot{q}\bar{L}_{\dot{q}\dot{q}} + \dot{q}\bar{L}_{\dot{q}q} + \bar{L}_{\dot{q}t} - \bar{L}_q = 0 \qquad \text{(I.27)}$$

despejando $\ddot{q}$ de ésta última, tenemos

$$\ddot{q} = -\left(\dot{q}\bar{L}_{\dot{q}q} + \bar{L}_{\dot{q}t} - \bar{L}_q\right) / \bar{L}_{\dot{q}\dot{q}} \qquad \text{(I.28)}$$

la podemos sustituir en (I.26) porque $\bar{L}$ está subordinado a L

$$\frac{L_{\dot{q}\dot{q}}}{\bar{L}_{\dot{q}\dot{q}}}\left(\dot{q}\bar{L}_{\dot{q}q} + \bar{L}_{\dot{q}t} - \bar{L}_q\right) = \dot{q}L_{\dot{q}q} + L_{\dot{q}t} - L_q$$

sumando en ambos miembros $\ddot{q}L_{\dot{q}\dot{q}}$

$$\mathcal{E}L \equiv \ddot{q}\, L_{\dot{q}\dot{q}} + \dot{q}\, L_{\dot{q}q} + L_{\dot{q}t} - L_q = \frac{L_{\dot{q}\dot{q}}}{\bar{L}_{\dot{q}\dot{q}}}\left(\ddot{q}\, \bar{L}_{\dot{q}\dot{q}} + \dot{q}\, \bar{L}_{\dot{q}q} + \bar{L}_{\dot{q}t} - \bar{L}_q\right) \equiv \frac{1}{f}\mathcal{E}\bar{L} \qquad (\text{I}.29)$$

donde f y $\frac{1}{f} \neq 0, \infty$ en $\mathbb{R}$ porque $L_{\dot{q}\dot{q}}$ y $\bar{L}_{\dot{q}\dot{q}} \neq 0, \infty$ en $\mathbb{R}$.
En (I.29) vemos que $\mathcal{E}\bar{L} = 0$ implica $\mathcal{E}L = 0$, o sea que L está subordinado a $\bar{L}$, que es lo que se quería probar, por lo tanto $\mathcal{E}L = 0 \iff \mathcal{E}\bar{L} = 0$, i.e L y $\bar{L}$ son equivalentes.
Antes de probar que f es constante de movimiento, veremos que la igualdad (I.29) es una identidad.

La ecuaciones (I.26) y (I.27) las podemos expresar respectivamente, como:

$$\ddot{q} = -\frac{1}{L_{\dot{q}\dot{q}}}\left(\dot{q}\, L_{\dot{q}q} + L_{\dot{q}t} - L_q\right) \qquad (\text{I}.26')$$

$$\ddot{q} = -\frac{1}{\bar{L}_{\dot{q}\dot{q}}}\left(\dot{q}\, \bar{L}_{\dot{q}q} + \bar{L}_{\dot{q}t} - \bar{L}_q\right) \qquad (\text{I}.28)$$

que deben ser equivalentes, por (I.29).
Entonces, para cualquier punto inicial $q_0 = q(0)$, $\dot{q}_0 = \dot{q}(0)$, (I.26') nos da una $\ddot{q}$ que al introducir en (I.28), resulta en que debe coincidir con la que, por ser equivalentes. Como esto vale para cualquier punto inicial, van a ser idénticas las ecuaciones (I.26') y (I.28) y por lo tanto (I.29) es una identidad, al igual que (I.25)

O sea,

$$f\left(\ddot{q} L_{\dot{q}\dot{q}} + \dot{q} L_{\dot{q}q} + L_{\dot{q}t} - L_q\right) \equiv \ddot{q} \bar{L}_{\dot{q}\dot{q}} + \dot{q} \bar{L}_{\dot{q}q} + \bar{L}_{\dot{q}t} - \bar{L}_q \qquad (I.25')$$

A continuación probaremos que f es constante de movimiento. En (I.25') podemos restar $\ddot{q} \bar{L}_{\dot{q}\dot{q}} \equiv \ddot{q} f L_{\dot{q}\dot{q}}$ * de ambos miembros.

$$\dot{q} f L_{\dot{q}q} + f L_{\dot{q}t} - f L_q \equiv \dot{q} \bar{L}_{\dot{q}q} + \bar{L}_{\dot{q}t} - \bar{L}_q \qquad (I.30)$$

Derivando respecto a $\dot{q}$ y usando la definición de f, $\bar{L}_{\dot{q}\dot{q}} \equiv f L_{\dot{q}\dot{q}}$, que al derivar respecto a q y t, dan

$$\bar{L}_{\dot{q}\dot{q}q} \equiv f_q L_{\dot{q}\dot{q}} + f L_{\dot{q}\dot{q}q}$$

$$\bar{L}_{\dot{q}\dot{q}t} \equiv f_t L_{\dot{q}\dot{q}} + f L_{\dot{q}\dot{q}t}$$

resulta la identidad

$$L_{\dot{q}\dot{q}}\left(f_q \dot{q} + f_t\right) - f_{\dot{q}}\left(\dot{q} L_{\dot{q}q} + L_{\dot{q}t} - L_q\right) \equiv 0 \qquad (I.31)$$

pero $-\ddot{q} L_{\dot{q}\dot{q}} = \dot{q} L_{\dot{q}q} + L_{\dot{q}t} - L_q$

por lo tanto $\quad L_{\dot{q}\dot{q}}\left(f_{\dot{q}} \ddot{q} + f_q \dot{q} + f_t\right) \equiv L_{\dot{q}\dot{q}} \dfrac{df}{dt} = 0$

que implica $\quad \dfrac{df}{dt} = 0$

ya que $L_{\dot{q}\dot{q}} \neq 0$

* $f = \bar{L}_{\dot{q}\dot{q}} / L_{\dot{q}\dot{q}}$, y además son los únicos términos donde aparece la aceleración

El procedimiento para encontrar L es relativamente sencillo, ya que hay que integrar dos veces el producto $fL_{\dot q\dot q}$ con respecto a $\dot q$.

A continuación presentaremos un ejemplo de como generar lagrangianos equivalentes usando constantes de movimiento.

(Darboux-1891)(4)

(Partícula libre)

$$L = \frac{1}{2}\dot q^2 \qquad , \quad f(q,\dot q,t) = q - \dot q t$$

$$\frac{df}{dt} = \dot q - \dot q - \ddot q t = 0 \quad , \quad f \text{ es una constante de movimiento}$$

por que $\ddot q = 0$.

$L_{\dot q} = \dot q$ $\qquad L_{\dot q q} = 0$

$L_{\dot q\dot q} = 1$ $\qquad L_{\dot q t} = 0$

$L'_{\dot q\dot q} = q - \dot q t$ $\qquad L_q = 0$

integrando $L'_{\dot q\dot q}$.

$$L'_{\dot q} = q\dot q - \frac{1}{2}\dot q^2 t + g(q,t)$$

$$L' = \frac{1}{2}q\dot q^2 - \frac{1}{6}\dot q^3 t + \dot q g(q,t) + h(q,t)$$

de donde

$$L'_q = \frac{1}{2}\dot q^2 + \dot q\frac{\partial g}{\partial q} + \frac{\partial h}{\partial q}$$

$$L'_{\dot q q} = \dot q + \frac{\partial g}{\partial q}$$

$$L'_{\dot q} = q\dot q - \frac{1}{2}\dot q^2 t + g(q,t)$$

$$L'_{\dot q t} = -\frac{1}{2}\dot q^2 + \frac{\partial g}{\partial t}$$

Al sustituir estas derivadas en la ecuación (I.30) tenemos

$$0 = \dot{q}\left(\dot{q}+\frac{\partial g}{\partial q}\right)+\left(-\frac{1}{2}\dot{q}^2+\frac{\partial g}{\partial t}\right)-\left(\frac{1}{2}\dot{q}^2+\dot{q}\frac{\partial g}{\partial q}+\frac{\partial h}{\partial q}\right)$$

$$0 = \dot{q}^2+\dot{q}\frac{\partial g}{\partial q}-\frac{1}{2}\dot{q}^2+\frac{\partial g}{\partial t}-\frac{1}{2}\dot{q}^2-\dot{q}\frac{\partial g}{\partial q}-\frac{\partial h}{\partial q}$$

o sea $$\frac{\partial g}{\partial t}-\frac{\partial h}{\partial q}=0$$

ó $$\frac{\partial g}{\partial t}=\frac{\partial h}{\partial q}$$

con la elección $g = t$

y $h = q$

tenemos: $$L' = \frac{1}{2}q\dot{q}^2-\frac{1}{6}\dot{q}^3t+\dot{q}t+q$$

Cuya ecuación de Euler-Lagrange será:

$$q\ddot{q}+\dot{q}^2-\dot{q}\ddot{q}t-\frac{1}{2}\dot{q}^2+1-\frac{1}{2}\dot{q}^2-1=(q-\dot{q}t)\ddot{q}=0$$

que es equivalente a $\ddot{q}=0$ (la de L) por lo siguiente,

$$(q-\dot{q}t)\ddot{q}=0 \Longrightarrow \begin{cases} q-\dot{q}t=0 \\ \ddot{q}=0 \quad \rightarrow \text{es la de } L \end{cases}$$

de $q-\dot{q}t=0$

al derivar $$\dot{q}-\ddot{q}t-\dot{q}=0$$

$$\ddot{q}t=0\ ,\ t\neq 0 \Longrightarrow \ddot{q}=0$$

también la de L.

Con la ecuación de movimiento de L'

$$\varepsilon L' = f \varepsilon L = (q - \dot{q}t)\ddot{q} = 0$$

que, aún cuando $q - \dot{q}t = 0$, implica $\ddot{q} = 0$, y da las mismas soluciones en ambos casos.

Diremos que dos lagrangianos son s*-equivalentes cuando los conjuntos de soluciones de cada uno coinciden (11)

Cuando tenemos n dimensiones, el tratamiento y análisis de la s-equivalencia entre lagrangianos (11) se complica bastante.

Si $L(q^i, \dot{q}^i, t)$ y $L'(q^i, \dot{q}^i, t)$, $i = 1, \ldots, n$, son dos lagrangianos con n grados de libertad y cuyos determinantes $\left|\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^r \partial \dot{q}^s}\right|$, $\left|\frac{\partial^2 L'}{\partial \dot{q}^r \partial \dot{q}^s}\right|$ distintos de cero e infinito, en una región R del espacio formado por $q, \dot{q}, t$, y L' subordinado a L en R, i.e

$$\left\{ L_s \equiv \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^s} - \frac{\partial L}{\partial q^s} = 0 \right\} \Rightarrow \left\{ L'_r \equiv \frac{d}{dt}\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}^r} - \frac{\partial L'}{\partial q^r} = 0 \right\}$$

con $r, s = 1, \ldots, n$

Existe un teorema semejante al de Currie y Saletan (teorema I.1) para n grados de libertad (11) que presentaremos a continuación

---

* S viene de solución.

Teorema I.3)

a) Si L' es subordinado a L en R, entonces L es subordinado a L' en R, i.e. L y L' son s-equivalentes.

b) Existe Λ matriz $(n \times n)$, no singular tal que

$$L'_{n} \equiv \Lambda_{n}^{\ s} L_{s} \qquad \text{(I.32)}$$

c) y las cantidades $tr\,\Lambda^{m}$; m entero ; son constantes de movimiento.

No daremos la demostración, pués viene con todo detalle en la tesis de H. Harleston.

Este teorema es una generalización del teorema (I.2) para n dimensiones, donde las constantes de movimiento son las trazas de Λ^{m} que juegan el papel de la "f" en el teorema (I.2). Hay que señalar que el grado de dificultad aumenta considerablemente con el número de dimensiones y que para obtener un lagrangiano s-equivalente a L no existe un camino resuelto como para una dimensión.

Definición.- Un lagrangiano $L'(q,\dot{q},t)$ s-equivalente al lagrangiano $L(q,\dot{q},t)$, se puede obtener de L mediante lo que llamaremos una transformación "l" ya que podemos escribir

$$L'(q,\dot{q},t) \equiv \rho\, L(q,\dot{q},t) + l\,(q,\dot{q},t) \qquad \text{(I.33)}$$

(ρ una constante)

a $l(q,\dot{q},t) \equiv L' - \rho L$, se le llama "lagrangiancito" y su derivada lagrangiana es

$$l_{n} \equiv \left(\Lambda_{n}^{\ s} - \rho\,\delta_{n}^{\ s} \right) L_{s} \qquad \text{(I.34)}$$

Lo que nos lleva a inferir que las ecuaciones asociadas a ℓ están contenidas en las de L (por la s-equivalencia), pero no al revés, porque el determinante de $|\Lambda - \rho L|$ puede ser cero.

La transformación "ℓ" que acabamos de definir y que más adelante veremos en detalle, es una extensión de lo que se conoce como transformación de norma (Gauge) de un lagrangiano dada por

$$L'(q,\dot{q},t) = \rho L(q,\dot{q},t) + \frac{d\Omega(q,t)}{dt}$$

donde ρ es una constante.

En este caso las ecuaciones que resultan de L' serán las mismas que vienen de L multiplicadas por ρ*. Por lo tanto, las soluciones serán iguales y esta transformación será un caso particular de las transformaciones "ℓ" del lagrangiano.

---

*Es fácil comprobarlo con ayuda del teorema (I.1).

I.4) El problema inverso del cálculo de variaciones

Existen dos maneras de plantear el problema inverso del cálculo de variaciones, a saber:

i) Matemáticamente puede plantearse así:
Dado un sistema de n ecuaciones diferenciales ordinarias

$$F_k(t, q, \dot{q}, \ddot{q}) = 0 \qquad (I.35)$$

$$k = 1, \ldots, n$$

con n grados de libertad, dados por las coordenadas generalizadas $\{q^1, \ldots, q^n\}$ y con el conjunto de trayectorias solución dado por $\{q^1(t), \ldots, q^n(t)\}$, se trata de encontrar una funcional de acción dada por

$$S(q) = \int_{t_1}^{t_2} dt\, L(q, \dot{q}, t)$$

con variaciones δq^i arbitrarias y $\delta q^i(t_1) = \delta q^i(t_2) = 0$ para toda i y tal que el conjunto de trayectorias-solución de (I.35) resulten de $\delta S = 0$ y recíprocamente.

ii) De una manera más directa podría plantearse de la siguiente forma:
Dado un sistema newtoniano, expresado en su forma fundamental

$$F_k = A_{ki}(q, \dot{q}, t)\, \ddot{q}^i + B_k(q, \dot{q}, t) = 0 \qquad (I.36)$$

$\det A \neq 0$

encontrar las condiciones necesarias y suficientes para que sean las ecuaciones E-L de un lagrangiano L, que también habrá de encontrarse (o ver si existe)

Es decir, buscamos las condiciones bajo las cuales un lagrangiano L satisface las relaciones siguientes

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} - \frac{\partial L}{\partial q^k} = A_{ki}(q,\dot{q},t)\ddot{q}^i + B_k(q,\dot{q},t) \qquad (I.37)$$

$$k = 1, \ldots, n$$

El primero en investigar este problema fue Helmholtz (1887) y las condiciones necesarias y suficientes para satisfacer (I.37) son conocidas como de autoadjuntez; que son las siguientes: (del sistema de ecuaciones diferenciales (I.35))

$$\frac{\partial F_i}{\partial \ddot{q}^k} = \frac{\partial F_k}{\partial \ddot{q}^i}$$

$$\frac{\partial F_i}{\partial \dot{q}^k} + \frac{\partial F_k}{\partial \dot{q}^i} = 2\frac{d}{dt}\frac{\partial F_i}{\partial \ddot{q}^k} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F_i}{\partial \ddot{q}^k} + \frac{\partial F_k}{\partial \ddot{q}^i}\right)$$

$$\frac{\partial F_i}{\partial q^k} - \frac{\partial F_k}{\partial q^i} = \frac{d}{dt}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F_k}{\partial \ddot{q}^i}\right) - \frac{\partial F_k}{\partial \dot{q}^i}\right] = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F_i}{\partial \dot{q}^k} - \frac{\partial F_k}{\partial \dot{q}^i}\right)$$

(I.38)

(Santilli)(22)

Sin hacer uso de las condiciones de autoadjuntez, Darboux (1891) (4) resolvió el caso más sencillo, cuando $n=1$, (Bolza)(1). que consiste en lo siguiente.
Dada una ecuación de segundo orden

$$\ddot{q} = f(q,\dot{q},t) \qquad (I.39)$$

se trata de encontrar un lagrangiano $L = L(q,\dot{q},t)$ tal que su ecuación de Euler–Lagrange sea equivalente a (I.39), es decir, que para todo $(t,q,\dot{q})$, se cumpla

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^2} f + \frac{\partial^2 L}{\partial q \partial \dot{q}} \dot{q} + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q} \partial t} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0 \qquad (I.40)$$

El problema inverso para dos dimensiones fue resuelto por Douglas (1941) (5), cuyo método de resolución fué esencialmente una extensión del tratamiento de Darboux para una dimensión, con la utilización de la teoría de Riquier para ecuaciones diferenciales.

Hay que señalar que las condiciones obtenidas por Douglas son diferentes a las que obtuvo Helmholtz, ya que ambos problemas difieren.

I.5) Formulación de primer orden.

Tanto en el estudio de las ecuaciones diferenciales, como en la mecánica clásica son bien conocidas las formulaciones de primer orden, que es cuando aparecen derivadas de primer orden como máximo. Por ejemplo, la ecuación de Newton, en su forma original:

$$F(x,\dot{x},t) = \frac{d}{dt}(m\dot{x}) \qquad (I.41)$$

donde F es la fuerza y $p = m\dot{x}$ el ímpetu.

Otro ejemplo de formulación de primer orden es la hamiltoniana, donde se utiliza en lugar del lagrangiano el hamiltoniano, que está definido por:

$$H(q,p,t) = \dot{q}^i p_i - L(q,\dot{q},t) \qquad (I.42)$$

La forma de obtener H a partir de L es por medio de un procedimiento matemático conocido como transformación de Legendre (Goldstein) (7).
y las ecuaciones de movimiento que resultan son las siguientes:

$$\left.\begin{aligned} \dot{q}^i &= \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial q^i} \end{aligned}\right\} \qquad (I.43)$$

que son conocidas como las ecuaciones canónicas de Hamilton en el espacio de fases (q, p), que son ecuaciones diferenciales de primer orden.
A continuación presentaremos un desarrollo general para pasar a una formulación de primer orden (12).
La reducción del orden de una ecuación diferencial cambia la forma estructural de las ecuaciones en un espacio que tiene el doble de dimensiones que la forma original, y aunque no se aporte nueva información, basta dar un punto inicial en el nuevo espacio para tener una curva-solucion del sistema, i.e., no se necesita dar la dirección de la tangente en el punto inicial (aunque tiene el doble de coordenadas) para encontrar o determinar la curva integral solución de ese sistema.
Empecemos considerando las ecuaciones (I.35)

$$F_i(\ddot{q}^j, \dot{q}^j, q^j, t) = 0 \qquad (I.35)$$

$$i, j = 1, \ldots, n$$

Suponemos que (I.35) puede ser resuelto para las aceleraciones, i.e., que las $\ddot{q}^j$ pueden despejarse así

$$\ddot{q}^j = f^j(\dot{q}^i, q^i, t) \qquad (I.44)$$

Por otro lado, siempre podemos reducir el orden de ese sistema de ecuaciones al hacer el cambio de variable

$$\dot{q}^i \equiv q^{n+i} \qquad (I.45)$$

O sea, definiendo nuevas variables. Lo cual puede contemplarse como una extensión del espacio (una especie de espacio de fases)

Y (I.35) toma la forma

$$F_i(\dot{q}^{n+j}, q^{n+j}, q^j, t) = 0 \qquad (I.46)$$

Expresando (I.45) y (I.46) en forma compacta queda así

$$\dot{q}^a = f^a(q^b, t) \qquad (I.47)$$

$$a, b = 1, \ldots, 2n$$

donde f está definida de la siguiente manera

$$f^a = \begin{cases} q^{n+j} & a = j = 1, \ldots, n \\ f^j & a = n+j \end{cases}$$

$$j = 1, \ldots, n$$

(como en I.44)

y estas últimas son las ecuaciones de movimiento expresadas en primer orden.
Para que el sistema $\dot{q}^a = f^a(q^b,t)$
sea equivalente a uno que provenga de un lagrangiano L, se requiere que

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^a \partial \dot{q}^b} \equiv 0 , \quad \forall \; a, b, q^a, \dot{q}^a, t \qquad (I.48)$$

es decir, que el sistema sea singular y completamente degenerado.
Lo que podemos comprobar al igualar el sistema (I.4
a un sistema de Euler-Lagrange:

$$L_a \equiv \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^a \partial \dot{q}^b} \ddot{q}^b + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^a \partial q^b} \dot{q}^b + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^a \partial t} - \frac{\partial L}{\partial q^a}$$

Donde aparece un término con aceleraciones que no encontramos en (I.46), por lo tanto debe cumplirse (I.48), que al integrarse resulta

$$L = l_a(q^b,t)\dot{q}^a + l_0(q^b,t) \qquad (I.49)$$

Que es lineal en las velocidades, cuyas ecuaciones de Euler-Lagrange son:

$$\left(\frac{\partial l_a}{\partial q^b} - \frac{\partial l_b}{\partial q^a}\right)\dot{q}^a = \frac{\partial l_0}{\partial q^b} - \frac{\partial l_b}{\partial t} \qquad (I.50)$$

(Hojman, Urrutia) (12)
Para que (I.50) y (I.47) sean equivalentes es necesario que

$$\eta_{ab} \equiv \left(\frac{\partial l_a}{\partial q^b} - \frac{\partial l_b}{\partial q^a}\right) \text{ Sea invertible, i.e. } \det \eta_{ab} \neq 0$$

y se debe encontrar las soluciones l_a y l_o del siguiente sistema

$$\left(\frac{\partial l_a}{\partial q^b}-\frac{\partial l_b}{\partial q^a}\right) f^a(q,t)=\frac{\partial l_o}{\partial q^b}-\frac{\partial l_o}{\partial t} \qquad (I.51)$$

En este punto es conveniente señalar que el teorema de Köenig (12) asegura la existencia de una solución para l_a con un l_o dado. (Havas) (12).

El lagrangiano de la forma (I.49) es conocido como lagrangiano de primer orden.

En el trabajo al que nos hemos referido se demuestra que en primer orden siempre existe un número infinito de lagrangianos, cuya construcción viene dada por

$$L=\left[l_{(b)}(C^{(a)})\frac{\partial C^{(b)}}{\partial q^i}\right]\dot{q}^i+l_{(b)}(C^{(a)})\frac{\partial C^{(b)}}{\partial t} \qquad (I.52)$$

donde $\det\left(\frac{\partial l_{(a)}}{\partial C^{(b)}}-\frac{\partial l_{(b)}}{\partial C^{(a)}}\right)\neq 0$

y $C^{(a)}$ son $2n$ constantes de movimiento funcionalmente independientes (indicado por ( )), esto es, $\det \frac{\partial C^{(a)}}{\partial q^b}\neq 0$.

En el tratamiento del artículo se extiende el espacio de estudio a $2n+1$ dimensiones con la notacion $q^0=t(\tau), q^a=q^a(\tau)$ donde τ es un parámetro, y las trayectorias están caracterizadas por la tangente.

$$\frac{dq^\mu}{d\tau}=f^\mu(q) \; ; \; \mu=0,1,\dots,2n \qquad (I.53)$$

donde f^a/f^0 son funciones dadas y $f^0=\frac{dt}{d\tau}$ es arbitraria.

La acción puede expresarse en general como

$$S = \int l_\mu(q) \frac{dq^\mu}{d\tau} d\tau \qquad (I.54)$$

Debido a la libertad en la parametrización de τ, podemos escoger τ como ~~el tiempo t~~ y tendríamos $l^0(q) = 1$. Las ecuaciones de movimiento obtenidas de (I.54) son

$$\left(\frac{\partial l_\mu}{\partial q^\nu} - \frac{\partial l_\nu}{\partial q^\mu}\right)\frac{dq^\nu}{d\tau} \equiv \eta_{\mu\nu}\frac{dq^\nu}{d\tau} = 0 \qquad (I.55)$$

Como $\eta_{\mu\nu}$ es antisimétrica $(\eta_{\mu\nu} = -\eta_{\nu\mu})$ y con dimensión impar, su determinante debe ser cero.

En este espacio de $2n+1$ dimensiones, demuestran que la forma más general de lagrangiano es

$$* \qquad L = l_{(a)}(C^{(b)})\, C^{(a)}_{,\mu} \frac{dq^\mu}{d\tau} \qquad (I.56)$$

es decir $l_\mu = l_{(a)}(C^{(b)})\, C^{(a)}_{,\mu}$ cuyas ecuaciones de Euler-Lagrange (I.65) son $\qquad (I.57)$

$$\left(\frac{\partial l_{(a)}}{\partial C^{(b)}} - \frac{\partial l_{(b)}}{\partial C^{(a)}}\right) C^{(a)}_{,\mu}\, C^{(b)}_{,\nu} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0$$

que implica $\frac{dC^{(b)}}{d\tau} = 0$ porque $\det .\, \eta_{(a)(b)} = \det\left(\frac{\partial l_{(a)}}{\partial C^{(b)}} - \frac{\partial l_{(b)}}{\partial C^{(a)}}\right) \neq 0$

y rango de $C^a_{,\mu} = 2n$

* $l_{(a)}$ no depende de $C^{(0)} = t_0$, y L se hace cero cuando se cumplen las ecuaciones de movimiento.

Es importante mencionar que en el trabajo al que nos hemos referido se muestra la contraparte del teorema I.2 (de las trazas) en primer orden como sigue:
Sean L y $\bar{L}$ dos lagrangianos S-equivalentes de primer orden, tales que sus ecuaciones E-L están relacionadas por medio de la matriz Λ, así:

$$\bar{L}_r \equiv \Lambda_r^{\ s} L_s \qquad (I.58)$$

donde $L = l_i(q,t)\dot{q}^i + l_0(q,t)$

y $\bar{L} = \bar{l}_i(q,t)\dot{q}^i + \bar{l}_0(q,t)$

cuyas ecuaciones E-L son

$$\bar{L}_r \equiv \left(\frac{\partial \bar{l}_r}{\partial q^i} - \frac{\partial \bar{l}_i}{\partial q^r}\right)\dot{q}^i + \frac{\partial \bar{l}_r}{\partial t} - \frac{\partial \bar{l}_0}{\partial q^r} = 0$$

$$\text{y} \quad L_s \equiv \left(\frac{\partial l_s}{\partial q^i} - \frac{\partial l_i}{\partial q^s}\right)\dot{q}^i + \frac{\partial l_s}{\partial t} - \frac{\partial l_0}{\partial q^s} = 0$$

o también:

$$\left.\begin{aligned} \bar{L}_r &\equiv \bar{\eta}_{ri}\dot{q}^i + \frac{\partial \bar{l}_r}{\partial t} - \frac{\partial \bar{l}_0}{\partial q^r} \\ \text{y} \quad L_s &\equiv \eta_{si}\dot{q}^i + \frac{\partial l_s}{\partial t} - \frac{\partial l_0}{\partial q^s} \end{aligned}\right\} \qquad (I.59)$$

introduciendo en (I.58) tenemos

$$\bar{\eta}_{ri}\dot{q}^i + \frac{\partial \bar{l}_r}{\partial t} - \frac{\partial \bar{l}_0}{\partial q^r} \equiv \Lambda_r^{\ s}\left[\eta_{si}\dot{q}^i + \frac{\partial l_s}{\partial t} - \frac{\partial l_0}{\partial q^s}\right] \qquad (I.60)$$

de donde igualamos los términos que contienen las velocidades:

$$\bar{\eta}_{ni}\,\dot{q}^i = \Lambda_n{}^s\,\eta_{si}\,\dot{q}^i \qquad (I.61)$$

o sea

$$\bar{\eta}_{ni} = \Lambda_n{}^s\,\eta_{si} \qquad (I.62)$$

Como $\det\eta \neq 0$, η tiene inversa dada por η^{-1} y al multiplicar (I.62) por η^{-1} por la derecha tenemos:

$$\Lambda = \bar{\eta}\,\eta^{-1} \qquad (I.63)$$

Para demostrar que las trazas de Λ^k (k = entero) son constantes de movimiento, empezaremos por ver la forma de η y $\bar{\eta}$.

$$\eta_{rp} = \frac{\partial l_r}{\partial q^p} - \frac{\partial l_p}{\partial q^r}$$

pero l_r y l_p pueden ser escritos en función de las constantes de movimiento:

$$l_r = l_{(a)}\left(C^{(b)}, C^{(0)}\right)\frac{\partial C^{(a)}}{\partial q^r}, \quad l_p = l_{(a)}\left(C^{(b)}, C^{(0)}\right)\frac{\partial C^{(a)}}{\partial q^p}$$

como se vió en el renglón siguiente de (I.56)

De donde

$$\frac{\partial l_r}{\partial q^p} = \frac{\partial l_{(a)}}{\partial q^p}\frac{\partial C^{(a)}}{\partial q^r} + l_{(a)}\frac{\partial^2 C^{(a)}}{\partial q^p \partial q^r}$$

y $$\frac{\partial l_p}{\partial q^r} = \frac{\partial l_{(a)}}{\partial q^r}\frac{\partial C^{(a)}}{\partial q^p} + l_{(a)}\frac{\partial^2 C^{(a)}}{\partial q^p \partial q^r}$$

pero $$\frac{\partial l_{(a)}}{\partial q^p} = \frac{\partial l_{(a)}}{\partial C^{(b)}}\frac{\partial C^{(b)}}{\partial q^p} \quad y \quad \frac{\partial l_{(a)}}{\partial q^r} = \frac{\partial l_{(a)}}{\partial C^{(b)}}\frac{\partial C^{(b)}}{\partial q^r}$$

sustituyendo en la expresión de M_{rp}, tenemos

$$M_{rp} = \frac{\partial l_{(a)}}{\partial C^{(b)}}\frac{\partial C^{(b)}}{\partial q^p}\frac{\partial C^{(a)}}{\partial q^r} - \frac{\partial l_{(b)}}{\partial C^{(a)}}\frac{\partial C^{(b)}}{\partial q^p}\frac{\partial C^{(a)}}{\partial q^r}$$

$$= \left(\frac{\partial l_{(a)}}{\partial C^{(b)}} - \frac{\partial l_{(b)}}{\partial C^{(a)}}\right)\frac{\partial C^{(b)}}{\partial q^p}\frac{\partial C^{(a)}}{\partial q^r}$$

$$= \overset{+}{C}{}^{(a)}_{,r}\, h_{ab}\, C^{(b)}_{,p}$$

es decir $$M = \mathbb{C}^{+}\, \mathbb{h}\, \mathbb{C} \qquad \text{- - - - (I.64)}$$

donde $$h_{ab} = \frac{\partial l_{(a)}}{\partial C^{(b)}} - \frac{\partial l_{(b)}}{\partial C^{(a)}}$$

y $$\mathbb{C} = \left(\frac{\partial C^{(a)}}{\partial q^p}\right).$$

de igual forma tenemos $\bar{\eta}$:

$$\bar{\eta} = \mathbb{C}^{+} \, \bar{\mathbb{h}} \, \mathbb{C} \qquad (I.65)$$

esto se debe al hecho de que las constantes de movimiento no cambian en la S-equivalencia i.e tenemos el mismo conjunto de $c^{(b)}$.

Al sustituir (I.64) y (I.65) en (I.63) tenemos:

$$\Lambda = \mathbb{C}^{+} \bar{\mathbb{h}} \, \mathbb{C} \left(\mathbb{C}^{-1} \mathbb{h} (\mathbb{C}^{+})^{-1} \right)$$

$$= \mathbb{C}^{+} \bar{\mathbb{h}} \cdot \mathbb{h} (\mathbb{C}^{+})^{-1}$$

como las trazas son cíclicas, es decir $\operatorname{tr} AB = \operatorname{tr} BA$ —

$$\operatorname{tr} \Lambda = \operatorname{tr} \left(\mathbb{h} (\mathbb{C}^{+})^{-1} \right) \cdot \left(\mathbb{C}^{+} \bar{\mathbb{h}} \right) = \operatorname{tr} \mathbb{h} \bar{\mathbb{h}}$$

y como $\mathbb{h}$ y $\bar{\mathbb{h}}$ son funciones solo de las constantes de movimiento, la $\operatorname{tr} \Lambda$ también será constante de movimiento.

y para las trazas de las potencias tendremos, en general:

$$\operatorname{tr} \Lambda^{k} = \operatorname{tr} (\mathbb{h} \bar{\mathbb{h}})^{k}$$

k: entero

que es trivialmente una constante de movimiento.

En el artículo mencionado se demuestra que siempre puede encontrarse un lagrangiano de primer orden que se hace cero al sustituir en él las ecuaciones de movimiento (ver (I.56))

En el caso de tener dos lagrangianos L' y L S-equivalentes de primer orden que se hagan cero cuando se sustituyen las ecuaciones de movimiento, el lagrangianito $\mu_0 = L' - L$ también será cero al sustituir las ecuaciones de movimiento.

En el Capítulo III veremos cómo utilizar esta formulación en el estudio de las relaciones entre simetrías y cantidades conservadas.

CAPITULO II.

TRANSFORMACIONES DE SIMETRIA Y LEYES DE CONSERVACIÓN EN MECANICA CLÁSICA.

Las transformaciones de simetría, o simplemente las simetrías en mecánica se refieren a algún tipo de invariancia, ya sea del lagrangiano, o de las ecuaciones de movimiento, o de las trayectorias que siguen las partículas del sistema.
Las simetrías son particularmente interesantes porque nos ayudan a encontrar cantidades conservadas en un sistema, como por ejemplo la energía y el ímpetu. Estas cantidades que se conservan durante la evolución del sistema son muy importantes porque su conocimiento nos acerca a la solución del problema dinámico.
De aquí se desprende la importancia de estudiar la conexión entre simetrías y cantidades conservadas.
Al llegar a este punto cabe preguntarnos cual es la relación entre unas y otras, y también cual es la información física que resulta de esas relaciones. (ver ref 8).

II.1) Las constantes de movimiento. (ref 21)

Un ejemplo de relación entre simetrías y constantes de movimiento lo tenemos cuando una variable no aparece en el lagrangiano, esto es, cuando es cíclica. Aunque su velocidad sí esté explícitamente en el lagrangiano*. A continuación veremos que es lo que se conserva.

De la ecuación de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^{\alpha}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q^{\alpha}} = 0$$

tenemos $\frac{\partial L}{\partial q^{\alpha}} = 0$

debido a que q^{α} no aparece en L, por lo tanto

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^{\alpha}}\right) = 0$$

esto es que $p_{\alpha} \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^{\alpha}}$ es constante de movimiento, y se llama ímpetu generalizado ó también momento conjugado de q^{α}.

Tenemos pues que p_{α} es una constante de movimiento siempre que la variable q^{α} sea cíclica.

En este caso podemos pensar que la transformación de simetría que deja invariante al lagrangiano es un cambio arbitrario de q^{α}, mientras que las otras coordenadas y el tiempo permanecen constantes.

---

* Si no ocurriera esto tendríamos un grado de libertad menos.

Es conveniente introducir en este momento los conceptos de simetría que mencionamos al principio.

i) Simetría del Lagrangiano

Cuando existe una transformación que deja invariante al lagrangiano, es decir, $\delta L = 0$, se llama simetría del lagrangiano, y preserva la forma de las ecuaciones de movimiento. Sinembargo esto último no implica $\delta L = 0$.

ii) Simetría noetheriana ó de las ecuaciones de movimiento.

Esta simetría mantiene la forma de las ecuaciones de movimiento. Como ejemplo podemos presentar la transformación de norma (gauge), definida por:

$$L'(q,\dot{q},t) = L(q,\dot{q},t) + \frac{df(q,t)}{dt}.$$

y como vimos en el teorema (I.1), preserva la forma de $L'_q \equiv L_q$, aunque $\delta L = \frac{df}{dt} \neq 0$.

iii) Simetría de las soluciones (no-noetheriana).

En este caso, que podría ser considerado el más general, la forma del lagrangiano se puede alterar, al igual que la acción, modificando las ecuaciones de movimiento, pero las soluciones de estas coinciden, es decir, la simetría transforma trayectorias físicas en trayectorias físicas.
Este es precisamente el caso de la "s-equivalencia" de lagrangianos.

Debido a esta clasificación, siempre que se estudien simetrías, debe especificarse de alguna manera a que tipo nos estamos refiriendo.

Así en el caso de variables cíclicas nos hemos referido a una simetría del lagrangiano.

En el caso de tener conservación de p_α ¿qué podemos decir acerca de las simetrías relacionadas con esa conservación?

Si vemos la ecuación de movimiento

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha}\right) - \frac{\partial L}{\partial q^\alpha} = 0$$

como $p_\alpha \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha}$ se conserva

entonces $\frac{\partial L}{\partial q^\alpha} = 0$

Esto es, L no depende explícitamente de q^α y por lo tanto, hay una simetría del lagrangiano que lo mantiene invariante al cambiar arbitrariamente q^α.

Por definición una constante de movimiento o cantidad conservada es una función $F = F(q, \dot{q}, t)$ que permanece constante durante cualquier movimiento (trayectoria) posible del sistema i.e. $\frac{dF}{dt} = 0$, cuando se cumplen las ecuaciones de movimiento.

Si tenemos $c_1, c_2, \ldots, c_m$ constantes de movimiento, una función de ellas $G(c_1, c_2, \ldots, c_m)$ también será constante de movimiento y no dá más información de la que teníamos con las m constantes. Por lo tanto estaremos interesados en los conjuntos de constantes funcionalmente independientes.
Existe un teorema que nos dice el número de constantes de movimiento, dependiendo de los grados de libertad del sistema.

Teorema II.1 (21)

Para un sistema con n grados de libertad existen exactamente 2n constantes de movimiento independientes.
(Ver la demostración en 21, 20).
El hecho de que sea 2n el número de constantes de movimiento tiene el significado físico de tener precisamente 2n valores iniciales o condiciones iniciales; n para las posiciones y n para las velocidades. Por lo que 2n es el número de condiciones que determinan en forma única la solución, o la trayectoria que deberá seguir el sistema.
El encontrar todas las constantes de movimiento sería equivalente a la integración de las ecuaciones de Euler-Lagrange. De tal forma que cuando encontramos una constante hemos reducido la dificultad del problema.
Las constantes de movimiento además de ser útiles para resolver las ecuaciones de movimiento, nos dicen mucho acerca de la dinámica y de la estructura misma de la mecánica.

II.2) Clasificación de las transformaciones.

Clasificaremos las transformaciones en dos tipos: las de coordenadas y las que transforman el lagrangiano.

1) ~~transformaciones~~ de coordenadas.

i) Transformaciones de coordenadas puntuales. 19

Cualquier conjunto (q,t) de coordenadas que describen un sistema puede ser transformado a uno nuevo (q',t') definido por

$$q'^{\alpha} = q'^{\alpha}(q,t) \qquad \text{(II.1)}$$
$$t' = t'(t)$$

$$\alpha = 1, 2, \dots, n$$

Esta transformación se llama "puntual" porque transforma cada punto del espacio de configuración en otro, y a cada instante en otro. y de velocidades será la transformación

$$\dot{q}' \equiv \frac{dq'^{\alpha}}{dt'} = \frac{dt}{dt'}\left(\frac{\partial q'^{\alpha}}{\partial q^{\beta}}\dot{q}^{\beta} + \frac{\partial q'^{\alpha}}{\partial t}\right) = \dot{q}'^{\alpha}(q,\dot{q},t) \qquad \text{(II,2)}$$

Si suponemos que el jacobiano

$$\frac{\partial(q'^{1},\dots,q'^{n})}{\partial(q^{1},\dots,q^{n})} \neq 0 \quad \text{y} \quad \frac{dt'}{dt} \neq 0$$

la transformación será invertible:

$$q^\alpha = q^\alpha(q', t') \qquad t = t(t') \qquad (II.3)$$

$$\dot q^\alpha = \frac{dt'}{dt}\left(\frac{\partial q^\alpha}{\partial q'^\beta}\dot q'^\beta + \frac{\partial q^\alpha}{\partial t'}\right) = \dot q^\alpha(q', \dot q', t') \qquad (II.4)$$

Obviamente (q,t) y (q',t') describen el mismo sistema físico y por lo tanto las integrales de acción como los lagrangianos en ambos sistemas de coordenadas deberán ser equivalentes.

Desde el punto de vista de la acción, tendremos:

$$S'[q'(t')] = S[q(t)] \qquad (II.5)$$

Con (II.1) y (II.3) se llega a

$$S[q(t)] = \int_{t'(t_1)}^{t'(t_2)} \frac{dt}{dt'} L\left(q(q',t'), \dot q(q',\dot q',t'), t(t')\right) dt' \qquad (II.6)$$

y, por definición

$$L'(q',\dot q',t') = \frac{dt}{dt'} L\left(q(q',t'), \dot q(q',\dot q',t'), t(t')\right) \qquad (II.7)$$

A continuación presentaremos la demostración de la equivalencia entre L y L' (19)

$$L'_\alpha \equiv \frac{d}{dt'}\frac{\partial L'}{\partial \dot q'^\alpha} - \frac{\partial L'}{\partial q'^\alpha}$$

y con (II.3) y (II.4) tenemos

$$\frac{\partial \dot{q}^\beta}{\partial q'^\alpha} = \frac{dt'}{dt}\left(\frac{\partial^2 q^\beta}{\partial q'^\alpha \partial q'^\gamma}\dot{q}'^\gamma + \frac{\partial^2 q^\beta}{\partial q'^\alpha \partial t'}\right)$$

pero $$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial q^\beta(q',t')}{\partial q'^\alpha}\right) = \frac{dt'}{dt}\frac{d}{dt'}\left(\frac{\partial q^\beta(q',t')}{\partial q'^\alpha}\right) = \frac{dt'}{dt}\left(\frac{\partial^2 q^\beta}{\partial q'^\alpha \partial q'^\gamma}\dot{q}'^\gamma + \frac{\partial^2 q^\beta}{\partial q'^\alpha \partial t}\right)$$

$$= \frac{\partial \dot{q}^\beta}{\partial q'^\alpha}$$

por lo tanto

$$\partial \dot{q}^\beta = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial q^\beta}{\partial q'^\alpha}\right) \quad y \quad \frac{\partial \dot{q}^\beta}{\partial q'^\alpha} = \frac{dt'}{dt}\left(\frac{\partial q^\beta}{\partial q'^\alpha}\right) \qquad (II.8)$$

también tenemos las siguientes igualdades por (II.7) y (II.8)

$$\frac{\partial L'}{\partial q'^\alpha} = \frac{dt}{dt'}\left(\frac{\partial L}{\partial q^\beta}\frac{\partial q^\beta}{\partial q'^\alpha} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\beta}\frac{\partial \dot{q}^\beta}{\partial q'^\alpha}\right) = \frac{dt}{dt'}\frac{\partial L}{\partial q^\beta}\frac{\partial q^\beta}{\partial q'^\alpha} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\beta}\frac{dt}{dt'}\frac{\partial \dot{q}^\beta}{\partial q'^\alpha}$$

$$= \frac{dt}{dt'}\frac{\partial L}{\partial q^\beta}\frac{\partial q^\beta}{\partial q'^\alpha} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\beta}\frac{dt}{dt'}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial q^\beta}{\partial q'^\alpha}\right) = \frac{dt}{dt'}\frac{\partial L}{\partial q^\beta}\frac{\partial q^\beta}{\partial q'^\alpha} +$$

$$+ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\beta}\frac{d}{dt'}\left(\frac{\partial q^\beta}{\partial q'^\alpha}\right) = \frac{dt}{dt'}\frac{\partial L}{\partial q^\beta}\frac{\partial q^\beta}{\partial q'^\alpha} + \frac{d}{dt'}\left(\frac{\partial q^\beta}{\partial q'^\alpha}\right)\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\beta} +$$

$$+ \frac{\partial q^\beta}{\partial q'^\alpha}\frac{d}{dt'}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\beta}\right) - \frac{\partial q^\beta}{\partial q'^\alpha}\frac{d}{dt'}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\beta}\right) =$$

$$= \frac{d}{dt'}\left[\frac{\partial q^\beta}{\partial q'^\alpha}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\beta}\right] + \frac{dt}{dt'}\frac{\partial q^\beta}{\partial q'^\alpha}\left[\frac{\partial L}{\partial q^\beta} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\beta}\right)\right] =$$

$$\frac{d}{dt'}\left[\frac{\partial q^\beta}{\partial q'^\alpha}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\beta}\right] - \frac{dt}{dt'}\frac{\partial q^\beta}{\partial q'^\alpha} L_\beta = \frac{\partial L'}{\partial q'^\alpha}$$

como

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial q^{\beta}}{\partial q'^{\alpha}}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^{\beta}}\right]=\frac{d}{dt'}\left[\frac{dt}{dt'}\frac{\partial \dot{q}^{\beta}}{\partial \dot{q}'^{\alpha}}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^{\beta}}\right]=\frac{d}{dt'}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}'^{\alpha}}\right)=$$

$$=\frac{d}{dt'}\left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}'^{\alpha}}\right)$$

lo que implica

$$\frac{d}{dt'}\left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}'^{\alpha}}\right)-\frac{\partial L'}{\partial q'^{\alpha}}\equiv L'_{\alpha}=\frac{dt}{dt'}\frac{\partial q^{\beta}}{\partial q'^{\alpha}}L_{\beta} \qquad (II.9)$$

Donde podemos ver que las ecuaciones de movimiento en (q,t) son equivalentes a las de (q',t') y recíprocamente, ya que $\frac{dt}{dt'}$ y $\det\frac{\partial q^{\beta}}{\partial q'^{\alpha}}$ son distintos de cero e infinito.

ii) <u>transformaciones puntuales infinitesimales.</u>

Estas transformaciones son definidas así:

$$\begin{aligned} q'^{\alpha} &= q^{\alpha}+\delta q^{\alpha}(q,t) \\ t' &= t+\delta t(t) \end{aligned} \qquad (II.10)$$

donde $\delta q^{\alpha}(q,t)$ y $\delta t(t)$ son infinitesimales.

Como

$$\frac{dq'^{\alpha}}{dt'} = \frac{dq'^{\alpha}}{dt}\frac{dt}{dt'} = \left(\dot{q}^{\alpha} + \frac{d\delta q^{\alpha}}{dt}\right)\frac{dt}{dt'}$$

y $$\frac{dt'}{dt} = 1 + \frac{d}{dt}\delta t \quad \text{y} \quad \frac{dt}{dt'} = \left(1 + \frac{d}{dt}\delta t\right)^{-1} \simeq 1 - \frac{d\delta t}{dt}$$

de donde

$$\dot{q}'^{\alpha} = \left(\dot{q}^{\alpha} + \frac{d\delta q^{\alpha}}{dt}\right)\left(1 - \frac{d\delta t}{dt}\right) = \dot{q}^{\alpha} + \frac{d\delta q^{\alpha}}{dt} - \dot{q}^{\alpha}\frac{d\delta t}{dt} - \underbrace{\frac{d\delta q^{\alpha}}{dt}\frac{d\delta t}{dt}}_{2^{\text{o}}\ \text{orden}}$$

como $\frac{d\delta q^{\alpha}}{dt}\cdot\frac{d\delta t}{dt} \ll 1$, tenemos

$$\dot{q}'^{\alpha} = \dot{q}^{\alpha} + (\delta q^{\alpha})^{\cdot} - \dot{q}^{\alpha}(\delta t)^{\cdot}.$$

La velocidad se transforma de acuerdo con

$$\frac{dq'^{\alpha}}{dt'} = \dot{q}'^{\alpha} = \dot{q}^{\alpha} + \frac{d}{dt}(\delta q^{\alpha}) - \dot{q}^{\alpha}\frac{d}{dt}(\delta t) \qquad (\text{II}.11)$$

$$= \dot{q}^{\alpha} + (\delta q^{\alpha})^{\cdot} - \dot{q}^{\alpha}(\delta t)^{\cdot}$$

y también es conveniente ver que

$$\delta q^{\alpha}(q', t') = \delta q^{\alpha}(q + \delta q, t + \delta t) = \delta q^{\alpha}(q, t) + \underbrace{\frac{\partial \delta q^{\alpha}}{\partial q^{\beta}}\delta q^{\beta} + \frac{\partial \delta t}{\partial t}\delta t + \cdots}_{\text{orden superior}}$$

Por lo tanto se puede considerar

$$\delta q^{\alpha}(q', t') \simeq \delta q^{\alpha}(q, t)$$

de igual forma

$$\delta t(t') \simeq \delta t(t)$$

tenemos también que (II.12)

$$\delta \dot{q}^\alpha = \dot{q}'^\alpha - \dot{q}^\alpha = (\delta q^\alpha)^{\cdot} - \dot{q}^\alpha (\delta t)^{\cdot}$$

y la inversa viene dada por (II.13)

$$q^\alpha = q'^\alpha - \delta q^\alpha (q', t')$$
$$t = t' - \delta t(t')$$

Para relacionar las transformaciones infinitesimales con las finitas se introducen las fórmulas de transformaciones puntuales paramétricas. (II.14)

$$q'^\alpha = q'^\alpha(q, t, \epsilon_i)$$
$$t' = t'(t, \epsilon_i)$$
$$i = 1, \ldots, r$$

tal que para valores pequeños de los parámetros se tiene hasta primer orden (II.15)

$$q'^\alpha = q^\alpha + \epsilon_i \frac{\partial q'^\alpha}{\partial \epsilon_i}$$
$$t' = t + \epsilon_i \frac{\partial t'}{\partial \epsilon_i}$$

siendo de la forma (II.12)

2) Transformaciones del Lagrangiano.

i) Transformaciones de norma (gauge).

Consisten en sumar al lagrangiano la derivada total respecto al tiempo de una función arbitraria de las coordenadas y el tiempo. En forma general, con A una constante.

$$L'(q,\dot q,t) = A\,L(q,\dot q,t) + \frac{d\Omega(q,t)}{dt} \qquad (II.16)$$

y las ecuaciones de movimiento que resultan de L' son esencialmente las mismas que las de L.

ii) Transformaciones tipo "l".

Estas son una extensión de las transformaciones de norma donde se introduce la s-equivalencia. Y son definidas de la siguiente forma: (11)

$$L'(q,\dot q,t) = A\,L(q,\dot q,t) + l(q,\dot q,t) \qquad (II.17)$$

donde $A \neq 0$, es un número y l no es necesariamente igual a $\frac{d\Omega(q,t)}{dt}$.

Este tipo de transformación incluye a las gauge como caso particular.

En el caso de que l sea un lagrangianito, esto es que $\{L_r=0\} \Rightarrow \{l_s=0\}$, L' será s-equivalente a L, i.e

$$L'_r = \Lambda_r^{\ s} L_s \quad , \quad \det \Lambda \neq 0$$

y conducirá a las mismas soluciones que las deducidas de L.

Más adelante usaremos estas transformaciones para extender el teorema de Noether.

3) Transformaciones de coordenadas asociadas a transformaciones del lagrangiano.

i) Transformaciones infinitesimales puntuales de simetría de norma.

Aquí, nos referimos a la simetría (ii) definida en la página 40, es decir, aquella que mantiene las ecuaciones de movimiento idénticas (salvo por una constante numérica). Y la transformación es de la forma (II.16).

Para que las ecuaciones de movimiento sean invariantes, debe cumplirse

$$L'(q,\dot{q},t) = A\,L(q,\dot{q},t) + \frac{d\Omega(q,t)}{dt} \qquad (II.18)$$

y además se cumple (II.7) por definición

$$L'(q',\dot{q}',t') = \frac{dt}{dt'}\,L\left(q(q',t'),\dot{q}(q',\dot{q}',t'),t(t')\right) \qquad (II.7)$$

Que al sustituir en (II.18), cambiando q por q' y como es una transformación infinitesimal de parámetro ϵ_i, tenemos:

$$\frac{dt}{dt'}\,L(q,\dot{q},t) = A(\epsilon)\,L(q',\dot{q}',t') + \frac{d\Omega(q',t',\epsilon)}{dt'} \qquad (II.19)$$

Esta ecuación será una identidad al sustituir (II.16) en ella. Por lo tanto $A(0)=1$ y $\frac{d\Omega(q',t',0)}{dt'}=0$.

ii) transformaciones de simetría "l" (de soluciones).

Son aquellas que dejan inalteradas las soluciones, es decir, conservan el contenido físico del sistema aunque las ecuaciones de movimiento difieran. Aquí se introduce el concepto de s-equivalencia.(11)

Al establecer un paralelismo con las transformaciones infinitesimales de simetría de norma, las de simetría "l" deben cumplir con la siguiente condición

$$\frac{dt}{dt'} L(q,\dot{q},t) = A(\epsilon) L(q',\dot{q}',t') + l(q',\dot{q}',t',\epsilon) \qquad (\text{II}.20)$$

Donde l es un lagrangiano (11) definido por: $l = L' - L$, con L y L' s-equivalentes. Igual que en el inciso anterior (II.20) será una identidad cuando se sustituya la transformación (II.16) y por tanto $A(0)=1$ y $l(q',\dot{q}',t',0)=0$.

II.3) Teorema de Noether.

A continuación presentaremos el teorema que relaciona las transformaciones de simetría usual con las constantes de movimiento en una forma "concisa".

Teorema II.2) (de Noether - 1918).[18]

Si dado un lagrangiano $L=L(q,\dot{q};t)$ y una simetría usual dada por

$$\delta q^\sigma = \delta q^\sigma(q,t) \qquad \text{(II.21)}$$
$$\delta t = \delta t(q,t)$$

tal que podamos tener la siguiente igualdad

$$\delta L \equiv \frac{\partial L}{\partial q^\sigma}\delta q^\sigma + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\sigma}(\delta q^\sigma)^{\cdot} + \frac{\partial L}{\partial t}\delta t + \left(L - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\sigma}\dot{q}^\sigma\right)(\delta t)^{\cdot} = -\frac{df}{dt} \qquad \text{(II.22)}$$

donde $f=f(q,t)$, entonces hay una
* cantidad conservada dada por

$$G = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\sigma}\delta q^\sigma + \left(L - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\sigma}\dot{q}^\sigma\right)\delta t + f \qquad \text{(II.23)}$$

o sea $\frac{dG}{dt} = 0$ cuando se cumplen las ecuaciones de movimiento.

Demostración:

Una forma sencilla de demostrar que G es una cantidad conservada es derivar G y ver que efectivamente cumple con II,22 y que su derivada es cero.

* también se conoce como constante de movimiento.

$$\frac{dG}{dt}=\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial\dot q^\sigma}\delta q^\sigma+\left(L-\frac{\partial L}{\partial\dot q^\sigma}\dot q^\sigma\right)\delta t+f\right]=$$

$$=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot q^\sigma}\right)\delta q^\sigma+\frac{\partial L}{\partial\dot q^\sigma}(\delta q^\sigma)^{\cdot}+\left(\frac{\partial L}{\partial q^\sigma}\dot q^\sigma+\frac{\partial L}{\partial\dot q^\sigma}\ddot q^\sigma+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial L}{\partial t}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot q^\sigma}\right)\dot q^\sigma-\frac{\partial L}{\partial\dot q^\sigma}\ddot q^\sigma\right)\delta t+\left(L-\frac{\partial L}{\partial\dot q^\sigma}\dot q^\sigma\right)(\delta t)^{\cdot}+\frac{df}{dt}$$

$$=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot q^\sigma}\right)\delta q^\sigma+\frac{\partial L}{\partial\dot q^\sigma}(\delta q^\sigma)^{\cdot}-\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot q^\sigma}\right)-\frac{\partial L}{\partial q^\sigma}\right]\dot q^\sigma\delta t+$$

$$+\frac{\partial L}{\partial t}\delta t+\left(L-\frac{\partial L}{\partial\dot q^\sigma}\dot q^\sigma\right)(\delta t)^{\cdot}+\frac{df}{dt}$$

Como suponemos válidas las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot q^\sigma}\right)-\frac{\partial L}{\partial q^\sigma}=0$$

para todo σ

Tenemos

$$\frac{dG}{dt}=\frac{\partial L}{\partial q^\sigma}\delta q^\sigma+\frac{\partial L}{\partial\dot q^\sigma}(\delta q^\sigma)^{\cdot}+\frac{\partial L}{\partial t}\delta t+\left(L-\frac{\partial L}{\partial\dot q^\sigma}\dot q^\sigma\right)(\delta t)^{\cdot}+\frac{df}{dt}$$

y por (II.22), que es válida por hipótesis, se cumple que

$$\frac{dG}{dt}=0$$

lo que prueba que G es una constante de movimiento.

A continuación presentaremos un ejemplo donde se aplica el teorema de Noether, para hallar una constante de movimiento.

Ejemplo II.3).

Considerando una partícula descrita en un sistema cartesiano y bajo la influencia de un potencial que solo depende del cuadrado de la distancia al origen, tiene un lagrangiano dado por:

$$L = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2\right) - V\left(x^2+y^2+z^2\right) \qquad (II.24)$$

Con una simetría dada por una rotación infinitesimal alrededor del eje z, con parámetro $\epsilon \ll 1$. Representada por:

$$\begin{aligned} x' &= x+\epsilon x &&: \quad \delta x = \epsilon y \\ y' &= -\epsilon x + y &&: \quad \delta y = -\epsilon x \\ z' &= z &&: \quad \delta z = 0 \\ t' &= t &&: \quad \delta t = 0 \end{aligned} \qquad (II.25)$$

Primero veremos que es efectivamente una simetría. i.e. se cumple (II.19).

$$L(x',\dot{x}',y',\dot{y}',z',\dot{z}') = \frac{1}{2}m\left[(\dot{x}+\epsilon\dot{y})^2+(\dot{y}-\epsilon\dot{x})^2+\dot{z}^2\right] - V\left[(x+\epsilon y)^2+(y-\epsilon x)^2+z^2\right] =$$

$$= \frac{1}{2}m\left[\dot{x}^2+2\epsilon\dot{x}\dot{y}+\epsilon^2\dot{y}^2+\dot{y}^2-2\epsilon\dot{x}\dot{y}+\epsilon^2\dot{x}^2+\dot{z}^2\right]$$

$$- V\left(x^2+2\epsilon xy+\epsilon^2y^2+y^2-2\epsilon xy+\epsilon^2x^2+z^2\right)$$

$$= \frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2) - V(x^2+y^2+z^2) = L(x,\dot{x},y,\dot{y},z,\dot{z})$$

Donde hemos eliminado los términos de 2º orden de ϵ, y $\Omega=0$, $A=1$. (ver (II.19))

De (II.25) tenemos

$$(\delta x)^{\cdot} = \epsilon \dot{y}$$
$$(\delta y)^{\cdot} = -\epsilon \dot{x}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \ , \ \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y} \ , \ \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -2xV' \ , \ \frac{\partial L}{\partial y} = -2yV' \ , \ \frac{\partial L}{\partial z} = -2zV'$$

V' significa la derivada de V con respecto a su argumento.
Con ayuda del teorema de Noether

$$(-2xV')(\epsilon y) + (-2yV')(-\epsilon x) + (m\dot{x})(\epsilon\dot{y}) + (m\dot{y})(-\epsilon\dot{x}) = 0 = -\frac{df}{dt}$$

con $f = 0$.

La constante de movimiento será

$$G = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\delta q^i + \left(L - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\dot{q}^i\right)\delta t$$

$$= (m\dot{x})(\epsilon y) + (m\dot{y})(-\epsilon x) = \epsilon m(\dot{x}y - \dot{y}x)$$

como ϵ es un número, tenemos que

$$G/\epsilon = m(\dot{x}y - \dot{y}x) = L_z$$

Vemos que se conserva el momento angular en la dirección z.

Cuando hay homogeneidad e isotropia espacial, como en el caso de las traslasiones espaciales vemos que se conserva el ímpetu y cuando existe invariancia frente a traslaciones temporales se conserva la energia del sistema.

A continuación presentaremos un ejemplo donde aparecen dos lagrangianos S-equivalentes con simetrías diferentes que dan cantidades conservadas diferentes.

Ejemplo II.4) (Ref Santilli)[22]

tenemos el lagrangiano

$$L_1 = \frac{1}{2} e^{\gamma t} \dot{q}^2 \qquad (II.26)$$

$$\frac{\partial L_1}{\partial \dot{q}} = e^{\gamma t} \dot{q} \, , \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L_1}{\partial \dot{q}} = e^{\gamma t}(\ddot{q} + \gamma \dot{q})$$

la ecuación de movimiento es

$$e^{\gamma t}(\ddot{q} + \gamma \dot{q}) = 0 \qquad (II.27)$$

cuya solución es de la forma

$$q = A e^{-\gamma t} + B \qquad (II.28)$$

A y B constantes

Ahora consideremos el lagrangiano

$$L_2 = \dot{q} \ln \dot{q} - \gamma q \qquad (II.29)$$

$$\frac{\partial L_2}{\partial q} = -\gamma \qquad \frac{\partial L_2}{\partial \dot q} = \ln \dot q + 1$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L_2}{\partial \dot q} = \frac{\ddot q}{\dot q}$$

y la ecuación E-L es

$$\frac{\ddot q}{\dot q} + \gamma = 0 \qquad (\text{II}.30)$$

cuya solución es de la forma

$$q = E e^{-\gamma t} + D \qquad (\text{II}.31)$$

E y D constantes

que coinciden con (II.28) con $A=E$ y $B=D$. Por lo tanto L_1 y L_2 son S-equivalentes.

Como L_1 (II.26) no depende de q (es cíclica), la simetría correspondiente será una traslación en q arbitraria; y la cantidad conservada deberá ser el ímpetu generalizado $p \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot q} = e^{\gamma t}\dot q$ (II.32)

Si ahora nos fijamos en L_2 (II.29), vemos que es independiente del tiempo t, o sea tiene una simetría dada por una traslación temporal arbitraria.
Aplicando el teorema de Noether (II.23) resulta la cantidad conservada:

$$G = \left(L_2 - \frac{\partial L_2}{\partial \dot{q}}\dot{q}\right)\delta t = \left(\dot{q}\ln\dot{q} - \gamma q - \dot{q}\ln\dot{q} - \dot{q}\right)\delta t = -(\dot{q}+\gamma q)\,\delta t$$

$(f=0)$. (II.33)

siendo funcionalmente independiente de P.

Ahora bien, si a L_1 le aplicamos la transformación de simetría (II.34)

$$\delta q = \epsilon e^{-\gamma t}$$

Usando el teorema de Noether resulta

$$\epsilon(-\gamma)e^{\gamma t}\dot{q}e^{-\gamma t} = -\frac{df}{dt}$$

i.e. $$-\epsilon\gamma\dot{q} = -\frac{df}{dt}$$

con una solución $f = \epsilon\gamma q$

Dando la cantidad conservada (con (II.23)) (II.35)

$$G' = e^{\gamma t}\dot{q}\left(\epsilon e^{-\gamma t}\right) + \epsilon\gamma q = \epsilon(\dot{q}+\gamma q) = \epsilon\gamma B$$

al comparar la constante G obtenida de L_2, al aplicar una simetría de traslación temporal (II.33) con la obtenida de L_1 (s-equivalente a L_2) al aplicarle la simetría (II.34), da por resultado G' (II.35). Vemos que G' es proporcional a G, esto es, son funcionalmente dependientes.

Lo anterior puede interpretarse como una ambigüedad, ya que el mismo sistema físico representado por dos lagrangianos s-equivalentes, que al aplicarle a cada uno una simetría diferente generan esencialmente la misma cantidad conservada.

Para concluir este capítulo diremos que existe un artículo escrito por P. Havas (8) donde plantea una serie de preguntas sobre la conexión entre simetrías y cantidades conservadas, las cuales responde mediante curiosos ejemplos. En ese artículo se presenta un panorama moderno sobre el tema de las simetrías, el cual aún está abierto y que podría tener trascendencia en el futuro.

A continuación presentaremos solamente 2 preguntas de ese artículo con sus respuestas.

¿Debe un sistema dinámico poseer simetrías* usuales para tener leyes de conservación?

Es evidente que no, ya que cualquier sistema está caracterizado por n ecuaciones, cuyas soluciones están determinadas por 2n constantes, que existen independientemente que haya simetrías.

¿La invariancia de una ley bajo una traslación espacial o temporal implica conservación del momento lineal o de la energía respectivamente?

La respuesta es no, ya que en el caso de fuerzas disipativas, como por ejemplo:

$$m\ddot{\underline{r}} = -k\dot{\underline{r}} \qquad \text{(II.36)}$$

hay invariancia frente a traslaciones (espaciales y temporales) y sin embargo es bien conocido que cuando hay fricción no se conserva ni la energía mecánica de la partícula ni su cantidad de movimiento.

---

* simetrías del tipo (ii), pag 40.

CAPITULO III –

EXTENSION DEL TEOREMA DE NOETHER EN PRIMER ORDEN.

III.1) Lagrangianos de 1er orden y ecuaciones de movimiento (12, 27)

Un lagrangiano de primer orden aparece cuando tenemos el Hessiano igual a cero, i.e.

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^a \partial \dot{q}^b} = 0 \qquad (III.1)$$

para todo $a, b, q^a, \dot{q}^a, t$

que al integrar resulta

$$L = l_a(q^b, t)\,\dot{q}^a + l_0(q^b, t) \qquad (III.2)$$

que es lineal en las velocidades, cuyas ecuaciones de Euler-Lagrange vienen dadas por:

$$\left(\frac{\partial l_a}{\partial q^b} - \frac{\partial l_b}{\partial q^a}\right)\dot{q}^b - \frac{\partial l_0}{\partial q^b} + \frac{\partial l_b}{\partial t} = 0 \qquad (III.3)$$

la matriz

$$\eta_{ab} \equiv \frac{\partial l_a}{\partial q^b} - \frac{\partial l_b}{\partial q^a} \qquad (III.4)$$

se supone invertible, es decir

$$\det \eta_{ab} \neq 0$$

y la inversa se denotará por

$$\eta^{-1}_{ab} \equiv \eta^{ab} \qquad (III.5)$$

Si despejamos las velocidades de (III.3) multiplicando η^{ba} por la izquierda, obtenemos:

$$\dot{q}^b = \eta^{ba}(q,t) \cdot \left(\frac{\partial l_0}{\partial q^b} - \frac{\partial l_b}{\partial t} \right) \qquad (III.6)$$

$b = 1, \ldots, n$

Que podemos considerar como la forma fundamental de las ecuaciones de movimiento.

Si

$$f_b(q,t) \equiv \eta^{ba} \left(\frac{\partial l_0}{\partial q^b} - \frac{\partial l_b}{\partial t} \right) \qquad (III.7)$$

las ecuaciones de movimiento en primer orden pueden quedan expresadas así:

$$\dot{q}^b = f_b(q,t) \qquad (III.8)$$

III.2) teorema de noether "usual" en 1º orden.

Vamos a presentar la contraparte del teorema de noether general, (teorema II.2) de la sección II.3.

teorema III.1) Dada una transformación de coordenadas puntual que de una invariancia de las ecuaciones de movimiento, con la forma.

$$\delta q^b = \delta q^b(q,t) \qquad (II.21)$$

$$\delta t = \delta t(q,t)$$

Sy un lagrangiano de primer orden dado por (III.2)

$$L = l_a(q^b,t)\dot{q}^a + l_0(q^b,t) \qquad \text{(III.2)}$$

tal que podamos tener la siguiente igualdad

$$\delta L \equiv \left(\frac{\partial l_a}{\partial q^b}\dot{q}^a + \frac{\partial l_0}{\partial q^b}\right)\delta q^b + l_b\left(\delta q^b\right)^{\cdot} + \left(\frac{\partial l_a}{\partial t}\dot{q}^a + \frac{\partial l_0}{\partial t}\right)\delta t + l_0\left(\delta t\right)^{\cdot} = -\frac{df}{dt} \qquad \text{(III.9)}$$

donde $f = f(q,t)$, entonces hay una cantidad conservada dada por

$$G = l_b\,\delta q^b + l_0\,\delta t + f \qquad \text{(III.10)}$$

La demostración es una aplicación directa del teorema II.2 a (III.2) donde (II.22) se convierte (III.9) y (II.23) en (III.10).

III.3) Problema inverso del teorema de Noether en 1er orden.

El problema inverso del teorema de Noether surge de la pregunta: Dada una constante de movimiento ¿se puede encontrar una simetría que la genere? y además ¿cuál sería la forma de encontrarla?

En otras palabras, si $I(q,t)$ es la constante de movimiento, tratemos de encontrar funciones

$\delta q^b(q,t)$ y $\delta t(t)$ tales que cumplan con la identidad

$$\frac{d}{dt} I(q,t) \equiv -(l_b \dot{q}^b + l_0)_a (\delta q^a - \dot{q}^a \delta t)^{*} \qquad (III.11)$$

(19)

(cuando se cumplen las ecuaciones de Euler-Lagrange tenemos $(l_b \dot{q}^b + l_0)_a = 0$ y por lo tanto $\frac{dI}{dt} \equiv 0$. también puede considerarse que si en la identidad (III.11) sustituimos las ecuaciones de movimiento en la forma (III.8) llegamos a $\frac{dI}{dt} \equiv 0$)

Al desarrollar (III.11)

$$\frac{\partial I}{\partial q^b}\dot{q}^b + \frac{\partial I}{\partial t} \equiv -\left[\eta_{ab}\dot{q}^b - \frac{\partial l_0}{\partial q^a} + \frac{\partial l_a}{\partial t}\right](\delta q^a - \dot{q}^a \delta t) \qquad (III.12)$$

Este sistema no siempre se podrá resolver, pues el miembro de la derecha tiene una dependencia en $q, \dot{q}$ y t muy determinada que no puede corresponder a $\frac{dI}{dt}$ para L e I dados. (19)

Sinembargo, al suponer $\delta t = 0$ (invariancia temporal) si se puede encontrar δq^a.

Ahora (III.12) se convierte en:

$$\frac{\partial I}{\partial q^b}\dot{q}^b + \frac{\partial I}{\partial t} \equiv -\left[\eta_{ab}\dot{q}^b - \frac{\partial l_0}{\partial q^a} + \frac{\partial l_a}{\partial t}\right]\delta q^a \qquad (III.13)$$

---

* Esta identidad viene del teorema de Noether, donde se tiene:
$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^b}\delta q^b + \left(L - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^b}\dot{q}^b\right)\delta t + f\right] \equiv -L_a(\delta q^a - \dot{q}^a \delta t)$$

los términos que contienen las velocidades deben ser idénticos, por lo que

$$\frac{\partial I}{\partial q^b} = \eta_{ba}\,\delta q^a \qquad (\text{III}, 14)$$

y además *

$$\left(\frac{\partial I}{\partial q^b}\dot q^b + \frac{\partial I}{\partial t}\right)\Bigg|_{\dot q^b = f^b} = \eta^{ba}\left(\frac{\partial l_a}{\partial q^b} - \frac{\partial l_b}{\partial t}\right) \equiv 0$$

Por lo tanto

$$\frac{\partial I}{\partial t} \equiv \frac{\partial I}{\partial q^b}\eta^{ba}\left(\frac{\partial l_a}{\partial t} - \frac{\partial l_0}{\partial q^a}\right) \quad \text{por } (\text{III}, 14)$$

$$\equiv \eta_{bc}\,\delta q^c \eta^{ba}\left(\frac{\partial l_a}{\partial t} - \frac{\partial l_0}{\partial q^a}\right)$$

$$\equiv \left(\frac{\partial l_0}{\partial q^a} - \frac{\partial l_a}{\partial t}\right)\delta q^a \qquad (\text{III}, 15)$$

Si despejamos δq^a de (III, 14) tenemos

$$\delta q^a \equiv (\eta^{-1})^{ab}\,\frac{\partial I}{\partial q^b} \qquad (\text{III}, 16)$$

que es la simetría buscada.

Esto demuestra el teorema siguiente.

---

* Por el teorema siguiente (26):
Dado un sistema que cumple con las ecuaciones de movimiento $\ddot q^i = f^i(q, \dot q, t)$ $(i = 1, \dots, n)$. Si $C = C(q, \dot q, t)$ es una constante de movimiento, entonces $\left.\frac{dC}{dt}\right|_{\ddot q^i = f^i(q,\dot q,t)} = \tilde G(q, \dot q, t) \equiv 0$
y en 1er orden quedaría como:

$$I = I(q,t) \qquad \left.\frac{dI}{dt}\right|_{\dot q^b = f^b} = \tilde I(q,t) \equiv 0 .$$

teorema III,2) Teorema inverso de Noether en 1$^{\underline{o}}$ orden.

Sea $L = l_b(q,t)\dot{q}^b + l_0(q,t)$, tal que
$\eta_{ab} \equiv \frac{\partial l_a}{\partial q^b} - \frac{\partial l_b}{\partial q^a}$ tiene determinante distinto de cero, y dada
$I = I(q,t)$ una constante de movimiento, entonces existe una simetría asociada a sus ecuaciones de movimiento, independiente del tiempo ($\delta t = 0$) definida por

$$\delta q^a \equiv \eta^{ab} \frac{\partial I}{\partial q^b} \qquad \text{(III.16)}$$

donde η^{ab} es la inversa de η_{ba}.

En la siguiente sección veremos una aplicación del teorema III,2.

De acuerdo con la forma del lagrangiano (III,19) $L = l_i \dot{q}^i + l_0$ y la matriz $\eta_{ij} = \frac{\partial l_i}{\partial q_j} - \frac{\partial l_j}{\partial q_i}$

tenemos lo siguiente:

$$
\left.
\begin{aligned}
l_1 &= m q_4 \\
l_2 &= m q_5 \\
l_3 &= m q_6 \\
l_4 &= 0 \\
l_5 &= 0 \\
l_6 &= 0
\end{aligned}
\right. \qquad (III,22)
$$

y
$$
\eta = \begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & m & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & m & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m \\
-m & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -m & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -m & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}
$$

$\det \eta = m^6 \neq 0$

Con la inversa
$$
\eta^{-1} = \begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & -1/m & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1/m & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1/m \\
1/m & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1/m & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1/m & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix} \qquad (III,23)
$$

i) Tomando como cantidad conservada a la energía

$$E=\frac{m}{2}\left(q_4^2+q_5^2+q_6^2\right)-\frac{\alpha}{\sqrt{q_1^2+q_2^2+q_3^2}} \qquad (\text{III},24)$$

Con derivadas parciales

$$\frac{\partial E}{\partial q_1}=\frac{\alpha q_1}{(q_1^2+q_2^2+q_3^2)^{3/2}},\quad \frac{\partial E}{\partial q_2}=\frac{\alpha q_2}{(q_1^2+q_2^2+q_3^2)^{3/2}},\quad \frac{\partial E}{\partial q_3}=\frac{\alpha q_3}{(q_1^2+q_2^2+q_3^2)^{3/2}}$$

$$\frac{\partial E}{\partial q_4}=mq_4,\quad \frac{\partial E}{\partial q_5}=mq_5,\quad \frac{\partial E}{\partial q_6}=mq_6$$

Con la simetría dada por (III.16)

$$\delta q^a=\eta^{ab}\frac{\partial I}{\partial q^b}\,\epsilon$$

$$\delta q_1=\eta^{1j}\frac{\partial E}{\partial q_j}=-q_4\,\epsilon \qquad \delta q_4=\eta^{4j}\frac{\partial E}{\partial q_j}=\frac{\alpha q_1\,\epsilon}{m(q_1^2+q_2^2+q_3^2)^{3/2}}$$

$$\delta q_2=\eta^{2j}\frac{\partial E}{\partial q_j}=-q_5\,\epsilon \qquad \delta q_5=\eta^{5j}\frac{\partial E}{\partial q_j}=\frac{\alpha q_2\,\epsilon}{m(q_1^2+q_2^2+q_3^2)^{3/2}}$$

$$\delta q_3=\eta^{3j}\frac{\partial E}{\partial q_j}=-q_6\,\epsilon \qquad \delta q_6=\eta^{6j}\frac{\partial E}{\partial q_j}=\frac{\alpha q_3\,\epsilon}{m(q_1^2+q_2^2+q_3^2)^{3/2}}$$

(III.25)

Lo que podríamos escribir:

$$
\begin{aligned}
q_1' &= q_1 - q_4\,\epsilon \\
q_2' &= q_2 - q_5\,\epsilon \\
q_3' &= q_3 - q_6\,\epsilon \\
q_4' &= q_4 + \frac{\epsilon\,\alpha\, q_1}{m\left(q_1^2+q_2^2+q_3^2\right)^{3/2}} = q_4 - \dot{q}_4\,\epsilon \\
q_5' &= q_5 + \frac{\epsilon\,\alpha\, q_2}{m\left(q_1^2+q_2^2+q_3^2\right)^{3/2}} = q_5 - \dot{q}_5\,\epsilon \\
q_6' &= q_6 + \frac{\epsilon\,\alpha\, q_3}{m\left(q_1^2+q_2^2+q_3^2\right)^{3/2}} = q_6 - \dot{q}_6\,\epsilon
\end{aligned}
\qquad \text{(III.26)}
$$

Si ahora aplicamos el teorema de Noether directo, la cantidad conservada que viene de (III.25) sería

$$G = l_a\,\delta q^a + f = -m\left(q_4^2+q_5^2+q_6^2\right) + f \qquad \text{(III,27)}$$

tomando a $f = \dfrac{2\alpha}{\sqrt{q_1^2+q_2^2+q_3^2}}$

Resulta que $E = -\frac{1}{2}G$

Dió prácticamente la misma constante de la que partimos.

ii) Vamos a ver ahora que simetría resulta del momento angular

$$\underline{L} = m\underline{r}\times\underline{v} \qquad (III.28)$$

$$\frac{d\underline{L}}{dt} = m\underline{r}\times\frac{d\underline{v}}{dt} + m\dot{\underline{r}}\times\underline{v} = m\underline{r}\times\ddot{\underline{r}} = 0$$

ya que al aplicar la ecuación de movimiento $\ddot{\underline{r}} = -\frac{\alpha}{mr^3}\underline{r}$

(III.29).

Ahora representaremos $\underline{L}$ en las nuevas coordenadas en primer orden.

$$\underline{L} = (L_1, L_2, L_3) = \left(m(q_2q_6 - q_3q_5), m(q_3q_4 - q_1q_6), m(q_1q_5 - q_2q_4)\right) \qquad (III.30)$$

Derivando parcialmente:

$$\frac{\partial L_1}{\partial q_1} = 0, \frac{\partial L_1}{\partial q_2} = mq_6, \frac{\partial L_1}{\partial q_3} = -mq_5, \frac{\partial L_1}{\partial q_4} = 0, \frac{\partial L_1}{\partial q_5} = -mq_3, \frac{\partial L_1}{\partial q_6} = mq_2$$

$$\frac{\partial L_2}{\partial q_1} = -mq_6, \frac{\partial L_2}{\partial q_2} = 0, \frac{\partial L_2}{\partial q_3} = mq_4, \frac{\partial L_2}{\partial q_4} = mq_3, \frac{\partial L_2}{\partial q_5} = 0, \frac{\partial L_2}{\partial q_6} = -mq_1$$

$$\frac{\partial L_3}{\partial q_1} = mq_5, \frac{\partial L_3}{\partial q_2} = -mq_4, \frac{\partial L_3}{\partial q_3} = 0, \frac{\partial L_3}{\partial q_4} = -mq_2, \frac{\partial L_3}{\partial q_5} = mq_1, \frac{\partial L_3}{\partial q_6} = 0$$

Resultando las siguientes simetrías:

Com $L_1 = m(q_2 q_6 - q_3 q_5)$

$$\delta q_1 = \eta^{1j}\frac{\partial L_1}{\partial q_j} = 0,\quad \delta q_2 = \eta^{2j}\frac{\partial L_1}{\partial q_j} = q_3,\quad \delta q_3 = \eta^{3j}\frac{\partial L_1}{\partial q_j} = -q_2$$

$$\delta q_4 = \eta^{4j}\frac{\partial L_1}{\partial q_j} = 0,\quad \delta q_5 = \eta^{5j}\frac{\partial L_1}{\partial q_j} = q_6,\quad \delta q_6 = \eta^{6j}\frac{\partial L_1}{\partial q_j} = -q_5$$

(III.31)

Com $L_2 = m(q_3 q_4 - q_1 q_6)$

$$\delta q_1 = \eta^{1j}\frac{\partial L_2}{\partial q_j} = -q_3,\quad \delta q_2 = \eta^{2j}\frac{\partial L_2}{\partial q_j} = 0,\quad \delta q_3 = \eta^{3j}\frac{\partial L_2}{\partial q_j} = q_1$$

$$\delta q_4 = \eta^{4j}\frac{\partial L_2}{\partial q_j} = -q_6,\quad \delta q_5 = \eta^{5j}\frac{\partial L_2}{\partial q_j} = 0,\quad \delta q_6 = \eta^{6j}\frac{\partial L_2}{\partial q_j} = q_4$$

(III.32)

Com $L_3 = m(q_1 q_5 - q_2 q_4)$

$$\delta q_1 = \eta^{1j}\frac{\partial L_3}{\partial q_j} = q_2,\quad \delta q_2 = \eta^{2j}\frac{\partial L_3}{\partial q_j} = -q_1,\quad \delta q_3 = \eta^{3j}\frac{\partial L_3}{\partial q_j} = 0$$

$$\delta q_4 = \eta^{4j}\frac{\partial L_3}{\partial q_j} = q_5,\quad \delta q_5 = \eta^{5j}\frac{\partial L_3}{\partial q_j} = -q_4,\quad \delta q_6 = \eta^{6j}\frac{\partial L_3}{\partial q_j} = 0$$

(III.33)

Usando la simetría (III.31) veamos que constante de movimiento resulta:

$$G_1 = l_a \delta q^a = -m(q_5 q_3 + q_6 q_2) = -L_1 \qquad \text{(III.34)}$$

usando (III.32)

$$G_2 = l_a \delta q^a = -m(q_4 q_3 - q_6 q_1) = -L_2 \qquad \text{(III.35)}$$

usando (III.33)

$$G_3 = l_a \delta q^a = m(q_4 q_2 - q_5 q_1) = -L_3 \qquad \text{(III.36)}$$

iii) Finalmente veremos cual es la simetría que resulta de la conservación del vector de Runge-Lenz.

$$\vec{M} = \vec{v} \times \vec{L} - \frac{\alpha \vec{r}}{r} \qquad \text{(III.37)}$$

Probaremos que se conserva:

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = \dot{\vec{v}} \times \vec{L} + \vec{v} \times \dot{\vec{L}} - \frac{\alpha \dot{\vec{r}}}{r} + \frac{\alpha \vec{r}(\vec{r}\cdot\dot{\vec{r}})}{r^3}$$

$$= \ddot{\vec{r}} \times (m\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) - \frac{\alpha \dot{\vec{r}}}{r} + \frac{\alpha \vec{r}(\vec{r}\cdot\dot{\vec{r}})}{r^3}$$

$$= m\left[(\ddot{\vec{r}}\cdot\dot{\vec{r}})\vec{r} - (\ddot{\vec{r}}\cdot\vec{r})\dot{\vec{r}}\right] - \frac{\alpha \dot{\vec{r}}}{r} + \frac{\alpha \vec{r}(\vec{r}\cdot\dot{\vec{r}})}{r^3} = 0$$

Usando las coordenadas q^s, $\vec{M}$ toma la forma siguiente:

$$\vec{M} = \left[\left(m(q_4^2+q_5^2+q_6^2) - \frac{\alpha}{\sqrt{q_1^2+q_2^2+q_3^2}}\right) q_1 - m(q_1q_4+q_2q_5+q_3q_6)\, q_4\right]\hat{\imath}$$

$$+ \left[\left(m(q_4^2+q_5^2+q_6^2) - \frac{\alpha}{\sqrt{q_1^2+q_2^2+q_3^2}}\right) q_2 - m(q_1q_4+q_2q_5+q_3q_6)\, q_5\right]\hat{\jmath}$$

$$+ \left[\left(m(q_4^2+q_5^2+q_6^2) - \frac{\alpha}{\sqrt{q_1^2+q_2^2+q_3^2}}\right) q_3 - m(q_1q_4+q_2q_5+q_3q_6)\, q_6\right]\hat{k} \qquad \text{(III.38)}$$

Sea M_1 la componente x de $\vec{M}$, M_2 la componente y de $\vec{M}$ y M_3 la componente z de $\vec{M}$.

Con $M_1 = mq_1(q_4^2+q_5^2+q_6^2) - \dfrac{\alpha q_1}{\sqrt{q_1^2+q_2^2+q_3^2}} - mq_4(q_1q_4+q_2q_5+q_3q_6)$

$$\frac{\partial M_1}{\partial q_1} = m(q_5^2+q_6^2) - \frac{\alpha}{r^3}(q_2^2+q_3^2)$$

$$\frac{\partial M_1}{\partial q_2} = \frac{\alpha}{r^3} q_1q_2 - mq_4q_5$$

$$\frac{\partial M_1}{\partial q_3} = \frac{\alpha}{r^3} q_1q_3 - mq_4q_6$$

$$\frac{\partial M_1}{\partial q_4} = -m(q_2q_5+q_3q_6)$$

$$\frac{\partial M_1}{\partial q_6} = 2m q_1 q_6 - m q_4 q_3$$

Con la simetría:

$$\delta q_1 = q_2 q_5 + q_3 q_6 \ ; \quad \delta q_4 = q_5^2 + q_6^2 - \frac{\alpha}{m r^3}(q_2^2 + q_3^2)$$

$$\delta q_2 = -2 q_1 q_6 + q_4 q_2 \ ; \quad \delta q_5 = \frac{\alpha}{m r^3} q_1 q_2 - q_4 q_5$$

$$\delta q_3 = -2 q_1 q_6 + q_4 q_3 \ ; \quad \delta q_6 = \frac{\alpha}{m r^3} q_1 q_3 - q_4 q_6 \qquad (\text{III},39)$$

Con $M_2 = m q_2 (q_4^2 + q_5^2 + q_6^2) - \dfrac{\alpha q_2}{\sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}} - m q_5 (q_1 q_4 + q_2 q_5 + q_3 q_6)$

tiene la simetría:

$$\delta q_1 = q_1 q_5 - 2 q_2 q_4 \ ; \quad \delta q_4 = \frac{\alpha}{m r^3} q_2 q_1 - q_5 q_4$$

$$\delta q_2 = q_1 q_4 + q_3 q_6 \ ; \quad \delta q_5 = q_4^2 + q_6^2 - \frac{\alpha}{m r^3}(q_1^2 + q_3^2)$$

$$\delta q_3 = q_3 q_5 - 2 q_2 q_6 \ ; \quad \delta q_6 = \frac{\alpha}{m r^3} q_2 q_3 - q_5 q_6 \qquad (\text{III},40)$$

Con $M_3 = m q_3 (q_4^2 + q_5^2 + q_6^2) - \dfrac{\alpha q_3}{\sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}} - m q_6 (q_1 q_4 + q_2 q_5 + q_3 q_6)$

Resulta la simetría:

$$\delta q_1 = 2 q_3 q_4 - q_6 q_1 \ ; \quad \delta q_4 = 2 q_3 q_4 - q_6 q_1$$

$$\delta q_2 = q_2 q_6 - 2 q_3 q_5 \ ; \quad \delta q_5 = \frac{\alpha}{m r^2} q_2 q_3 - q_5 q_6 \qquad (\text{III},41)$$

$$\delta q_3 = q_1 q_4 + q_2 q_5 \ ; \quad \delta q_6 = q_4^2 + q_5^2 - \frac{\alpha}{m r^3}(q_1^2 + q_2^2)$$

Para terminar esta sección diremos que en la formulación de primer orden las transformaciones de simetría asociadas al teorema de Noether son todas simetrías puntuales.

III.5) Extensión del teorema de noether para simetrías no-noetherianas.

Una simetría no-noetheriana* es aquella que deja invariante el conjunto de soluciones de las ecuaciones de movimiento, aunque éstas y el lagrangiano puedan cambiar de forma.

Con el concepto de simetría no-noetheriana, nos referimos a la transformación de un lagrangiano en otro que sea s-equivalente (11), es decir vamos a tener una relación entre dos lagrangianos s-equivalentes.

Si L y L' son dos lagrangianos s-equivalentes, sus ecuaciones de movimiento (Euler-Lagrange) estarán relacionadas por $L'_s = \Lambda_s^{\,r} L_r$, donde Λ es una matriz no singular, y además las trazas de las potencias de Λ son constantes de movimiento. (teorema I.3).

Para poder extender el teorema de noether para simetrías de las soluciones hemos utilizado la formulación de primer orden por lo siguiente: en primer orden se ha probado que siempre existe lagrangiano (12), y es más; hay un número infinito de lagrangianos. A diferencia del caso usual de 2º orden, donde pueden presentarse sistemas que no provengan de un principio variacional y no tener lagrangiano, por lo que no podría aplicarse el teorema de noether. En cambio en primer orden siempre puede presentarse dicho teorema y encontrar cantidades conservadas.

Otra ventaja que tiene la formulación de primer orden para la extensión que estamos estudiando:

---

* A esta simetría la hemos llamado también simetría de las soluciones, o del tipo (iii) (ver sección II.1, pag 40).

Es la forma general que tienen los lagrangianos, que se compone de una parte que se hace cero cuando se cumplen las ecuaciones de movimiento más una derivada total respecto al tiempo de una función de las coordenadas y el tiempo, es decir, tienen la forma siguiente: (12)

(ver (I,56))

$$L = l_{(a)} \frac{\partial C^{(a)}}{\partial q^{\mu}} \dot{q}^{\mu} + \frac{d\Lambda}{dt} \qquad (III.42)$$

donde $l_{(a)} = l_{(a)}(C^{(b)})$ y $C^{(a)} = C^{(a)}(q)$, constantes de movimiento.

El primer término de (III,42) cuando se sustituyen las ecuaciones de movimiento, que son de la forma $\dot{q}^{\mu} = f^{\mu}(q,t)$ es evidente que es cero porque

$$\left. \frac{dC^{(a)}}{dt} \right|_{\dot{q}^{\mu} = f^{\mu}} = 0 .$$

Esta última propiedad es usada en la demostración del teorema que presentaremos a continuación.

Teorema III.3) (Extensión del teorema de Noether)

Sea un sistema de ecuaciones de movimiento en primer orden; dadas por:

$$\dot{q}^i = g^i(q,t) \qquad (III.43)$$

$$i = 1, 2, \ldots, n$$

Que tiene el siguiente lagrangiano

$$L = l_i(q,t)\dot{q}^i + l_0(q,t) \qquad (III.44)$$

y

$$\delta q^i = \delta q^i(q,t) \qquad (III.45)$$
$$\delta t = \delta t(t)$$

una simetría de las soluciones (infinitesimal).
La variación de L viene definida por

$$\delta L \equiv \mu = \mu_0 - \frac{df}{dt} \quad * \qquad (III.46)$$

Entonces

1) Si $\mu_i \equiv \frac{d}{dt}\frac{\partial \mu}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial \mu}{\partial q^i} \equiv 0$, para toda $i = 1, 2, \ldots, n$.
entonces $\mu = -\frac{df}{dt}$ (teorema I.1) ($f = f(q,t)$).
y la constante de movimiento asociada a (III.46) será:

$$G_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\delta q^i - H\delta t + f \qquad (III.47)$$

donde H es el hamiltoniano.

* μ_0 se hace cero, cuando se cumplen las ecs de mov. ver (III.41) y párrafo de arriba (pag 79).

2) Si μ_i^* no es idénticamente cero, pero $\mu_i = 0$ cuando se cumplen las ecuaciones de movimiento, entonces:

a) si $\mu\Big|_{\dot{q}^i = g^i} = 0$ implica $\mu = \mu_0$

y la constante generada será:

$$G_{2a} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \delta q^i - H \delta t \qquad \text{(III.48)}$$

además ~~tenemos~~ las constantes que provienen de la s-equivalencia entre $L' = L + \mu_0$ y L:

Si $L'_n = \Lambda_n^{\ s} L_s$, entonces $tr(\Lambda^k)$ (k: entero) son constantes de movimiento. (11) (teorema I,3)

b) si $\mu\Big|_{\dot{q}^i = g^i} \neq 0$, entonces $\mu = \mu_0 - \frac{df}{dt}$

y la constante de movimiento es:

$$G_{2b} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \delta q^i - H \delta t + f \qquad \text{(III.49)}$$

donde f satisface la ecuación:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + g^1 \frac{\partial f}{\partial q^1} + \cdots + g^n \frac{\partial f}{\partial q^n} + \mu\Big|_{\dot{q}^\alpha = g^\alpha} = 0 \quad ** \qquad \text{(III.50)}$$

además tenemos las constantes $tr(\Lambda^k)$ (k: entero) donde $L'_n = \Lambda_n^{\ s} L_s$. (teorema I,3).

---

* $\mu_i\Big|_{\dot{q}^j = g^j} = 0$ siempre que haya simetría, porque $\mu_i \equiv L'_i - L_i = (\Lambda_i^{\ j} - \delta_i^{\ j}) L_j$ (ver teorema I.3)

** $\alpha = 0, 1, \ldots, n$, $q^0 = t$.

Demostración —

La simetría (III.45) transforma al lagrangiano L (III.44) en otro s-equivalente L', por lo tanto sus ecuaciones Euler-Lagrange estarán relacionadas del siguiente modo:

$L'_n = \Lambda_n{}^s L_s$ (11), Λ no singular.

Si $\Lambda = \mathbb{1}$, tendremos $\delta L = -\frac{df}{dt}$ por el teorema (I.1) y se presentará el caso usual del teorema de Noether (teorema II.2), por tanto la cantidad conservada será G_1 (III.47).

Si $\Lambda \neq \mathbb{1}$, tendremos $\delta L = \mu = \mu_0 - \frac{df}{dt}$ *, donde puede presentarse el caso $\frac{df}{dt} = 0$, o sea, cuando $\mu\Big|_{\dot{q}^i = g^i} = 0$, $\mu = \mu_0$.

Entonces

$$\delta L = \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\delta q^i + \left(L - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\dot{q}^i\right)\delta t\right] = \mu_0$$

(II.22)

(ver teorema II.2)

y cuando se cumplen las ecuaciones de movimiento se hace idénticamente cero, por tanto tenemos la constante de movimiento

$$G_{2a} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\delta q^i - H\delta t \qquad \text{(III.48)}$$

---

* Por estar en primer orden (ver pag 77).

Cuando $\mu\Big|_{\dot{q}^i = q^i} \neq 0$ tenemos el caso más general:

$\mu = \mu_0 - \frac{df}{dt}$ con $\frac{df}{dt} \neq 0$.

Entonces (por (III.22)).

$$\delta L = \frac{\partial L}{\partial q^i}\delta q^i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}(\delta q^i)^{\cdot} + \frac{\partial L}{\partial t}\delta t + \left(L - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\dot{q}^i\right)(\delta t)^{\cdot} = \mu_0 - \frac{df}{dt}$$

que se convierte en

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\delta q^i - H\delta t + f\right] = \mu_0$$

y se vuelve cero cuando se cumplen las ecuaciones de movimiento, por definición de μ_0.

Por lo tanto tenemos la constante de movimiento

$$G_{2b} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\delta q^i - H\delta t + f \qquad \text{(III.49)}$$

y por (III.44):

$$G_{2b} = l_i\,\delta q^i + l_0\,\delta t + f \qquad \text{(III.49')}$$

Ahora bien, por (III.42), μ puede ser expresado como:

$$\mu = \nu_i \dot{q}^i + \nu_0 = \lambda_i \dot{q}^i + \lambda_0 - \left(\frac{\partial f}{\partial q^i}\dot{q}^i + \frac{\partial f}{\partial t}\right) \qquad \text{(III.51)}$$

donde $\mu_0 = \lambda_i \dot{q}^i + \lambda_0$

Si definimos $q^0 = t$, entonces $\dot{q}^0 = g^0(q) = 1$

(III.51) queda expresado como

$$\mu = v_\alpha \dot{q}^\alpha = \lambda_\alpha \dot{q}^\alpha - \frac{\partial f}{\partial q^\alpha} \dot{q}^\alpha \qquad \alpha = 0,1,\dots,n \qquad \text{(III.52)}$$

Como $\mu_0 \Big|_{\dot{q}^\alpha = g^\alpha} = 0$ tenemos

$$\left[v_\alpha + \frac{\partial f}{\partial q^\alpha} \right] g^\alpha(q) \equiv 0 \qquad \text{(III.53)}$$

o sea:

$$g^0 \frac{\partial f}{\partial q^0} + g^1 \frac{\partial f}{\partial q^1} + \dots + g^n \frac{\partial f}{\partial q^n} + \mu \Big|_{\dot{q}^\alpha = g^\alpha} = 0 \qquad \text{(III.50)}$$

Con esto último hemos probado el teorema.

La ecuación (III.50) puede ser puesta en la forma:

$$Y^0 \frac{\partial f}{\partial q^0} + Y^1 \frac{\partial f}{\partial q^1} + Y^2 \frac{\partial f}{\partial q^2} + \dots + Y^{n+1} = 0 \qquad \text{(III.54)}$$

con $Y^\alpha = g^\alpha$, $Y^{n+1} = \mu \Big|_{\dot{q}^\alpha = g^\alpha}$

$\alpha = 0,\dots,n$

Para encontrar la solución de esta ecuación, conviene ver el apéndice A, donde (III.54) corresponde a la ecuación (A.7). Lo que debe hacerse es encontrar una integral del sistema correspondiente:

$$\frac{dq^0}{y^0} = \frac{dq^1}{y^1} = \cdots = \frac{dq^n}{y^n} = \frac{d\varphi}{y^{n+1}} \qquad \text{(III.55)}$$

que tiene la forma:

$$\omega(q^0, q^1, \ldots, q^n, f) = C \qquad \text{(III.56)}$$

y ω satisface la ecuación homogénea:

$$y^0 \frac{\partial\omega}{\partial q^0} + y^1 \frac{\partial\omega}{\partial q^1} + \cdots + y^n \frac{\partial\omega}{\partial q^n} + y^{n+1} \frac{\partial\omega}{\partial f} = 0 \qquad \text{(III.57)}$$

El método de encontrar la solución de (III.57) es a base de hallar una integral del sistema correspondiente de ecuaciones diferenciales ordinarias (III.55). Por este motivo, el método podría no ser práctico, sin embargo, nos permite asegurar la existencia de la f, que puede obtenerse despejando (III.56).

A continuación presentaremos un ejemplo donde aplicamos el teorema (III.3).

Ejemplo III.1)

Oscilador armónico unidimensional.

Un lagrangiano de 1er orden, del oscilador armónico unidimensional será:

$$L = \dot{x}_1 x_2 - \tfrac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) \qquad (III.64)$$

cuyas ecuaciones de movimiento son:

$$\dot{x}_2 = -x_1 \quad , \quad \dot{x}_1 = x_2 \qquad (III.65)$$

la transformación:

$$\delta x_1 = \mu x_1 + \omega x_2 \qquad (III.66)$$
$$\delta x_2 = \mu x_2 - \omega x_1$$

es de simetría, para demostrarlo calculamos primero la variación de L

$$\delta L = \frac{\partial L}{\partial x_i}\delta x_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}(\delta x_i)^{\cdot}$$

$$= (-x_1)(\mu x_1 + \omega x_2) + (\dot{x}_1 - x_2)(\mu x_2 - \omega x_1) + (x_2)(\mu \dot{x}_1 + \omega \dot{x}_2)$$

$$= 2\mu x_2 \dot{x}_1 + \omega(x_2 \dot{x}_2 - x_1 \dot{x}_1) - \mu(x_1^2 + x_2^2) = l$$

Para comprobar que (III.66) es una transformación de simetría de las soluciones, l_j debe anularse cuando se cumplen las ecuaciones de movimiento (III.65):

$$\frac{\partial l}{\partial x_1} = -\omega \dot{x}_1 - 2\mu x_1 \quad , \quad \frac{\partial l}{\partial \dot{x}_1} = 2\mu x_2 - \omega x_1$$

$$\therefore \quad l_1 \equiv 2\mu \dot{x}_2 + 2\mu x_1 = 0$$

aplicando (III.65)

$$\frac{\partial l}{\partial x_2} = 2\mu \dot{x}_1 + 2\nu \dot{x}_2 - 2\mu x_2 \,, \quad \frac{\partial l}{\partial \dot{x}_2} = 2\nu x_2$$

$$l_2 \equiv -2\mu \dot{x}_1 + 2\mu x_2 = 0$$

aplicando (III.65)

Con lo que se demuestra que (III.66) es una simetría de las soluciones!

Al evaluar l en las trayectorias, se obtiene

$$l \Big|_{\dot{x}_\mu = \gamma_\mu} = \mu x_2^2 - 2\nu x_1 x_2 - \mu x_1^2 \neq 0$$

Por lo tanto tenemos el caso (iib) del teorema III.1 con la cantidad conservada

$$G = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \delta x_i + f$$

y f satisface la ecuación

$$x_2 \frac{\partial f}{\partial x_1} - x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \left[\mu(x_2^2 - x_1^2) - 2\nu x_1 x_2\right] = 0$$

con solución $\quad f = \frac{\nu}{2}\left(x_1^2 - x_2^2\right) - \mu x_1 x_2$

y la cantidad conservada es:

$$G = x_2(\mu x_1 + \nu x_2) + \frac{\nu}{2}(x_1^2 - x_2^2) - \mu x_1 x_2 = \frac{\nu}{2}(x_1^2 + x_2^2)$$

que es la energía

La matriz Λ asociada a la transformación de L a L' $(L' = L + l)$ es

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1+2\mu & 0 \\ 0 & 1+2\mu \end{pmatrix}$$

cuyas potencias enteras tienen trazas que son (trivialmente) constantes.

CAPÍTULO IV

RESUMEN Y CONCLUSIONES.

Los resultados nuevos que se han encontrado en esta tesis están contenidos esencialmente en el teorema (III.2) y teorema (III.3).

El primero nos permite obtener las transformaciones de simetría asociadas a cualquier cantidad conservada como transformaciones puntuales (en la formulación de primer orden). El segundo teorema nos permite asociar cantidades conservadas a simetrías no-noetherianas (que no dejan invariantes las ecuaciones de movimiento) de dos formas diferentes, a través del teorema de las trazas y una expresión del tipo del teorema de Noether.

Hemos visto que al considerar las trayectorias como los objetos fundamentales en la mecánica clásica (en lugar de las ecuaciones de movimiento) aparecen una serie de problemas interesantes.

i) Existe una ambigüedad en la relación entre simetrías y cantidades conservadas

ii) La cuantización de los sistemas clásicos presenta problemas no triviales (16,28)

iii) Existe la posibilidad de extender el teorema de Noether a simetrías más generales que las usuales.

Por otro lado, la formulación de la Mecánica Clásica en primer orden tiene otro tipo de ventajas

i) Permite, en principio, la construcción de lagrangianos para cualquier sistema (12)

ii) Permite extender el teorema de Noether de modo de encontrar cantidades conservadas asociadas al teorema de las trazas y constantes de movimiento usuales.

Después de este estudio queda claro que la correspondencia entre simetrías y cantidades conservadas no es necesariamente biunívoca.

Parte del trabajo que resta es intentar encontrar mas ejemplos que permitan juzgar la utilidad del teorema presentado en esta tesis.

Apéndice A

Sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden y su relación con las ecuaciones diferenciales parciales lineales. (23).

Un sistema de n ecuaciones diferenciales de primer orden con n funciones incógnitas tiene la forma:

$$\frac{dq^1}{dq^0} = g^1(q^0, q^1, \ldots, q^n)$$
$$\frac{dq^2}{dq^0} = g^2(q^0, q^1, \ldots, q^n) \qquad (A.1)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{dq^n}{dq^0} = g^n(q^0, q^1, \ldots, q^n)$$

La solución general de este sistema es:

$$\Phi_i(q^0, q^1, \ldots, q^n) = c_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \qquad (A.2)$$

donde las c_i son constantes y las Φ_i son las integrales independientes del sistema (A.1) por lo que las q^i pueden ser resueltas de (A.2).

El sistema (A.1) puede ser re-escrito como:

$$dq^0 = \frac{dq^1}{g^1(q^0, \ldots, q^n)} = \frac{dq^2}{g^2(q^0, \ldots, q^n)} = \cdots = \frac{dq^n}{g^n(q^0, \ldots, q^n)} \qquad (A.3)$$

Multiplicando todos los denominadores por el mismo factor, tenemos:

$$\frac{dq^0}{Q^0} = \frac{dq^1}{Q^1} = \cdots = \frac{dq^n}{Q^n} \qquad (A.4)$$

que es equivalente a (A.1).

Si $\varphi(q^0, q^1, \ldots, q^n) = C$ * es una integral del sistema (A.1) cuya derivada total respecto a q^0 es:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial q^0} + \frac{\partial\varphi}{\partial q^1}\frac{dq^1}{dq^0} + \cdots + \frac{\partial\varphi}{\partial q^n}\frac{dq^n}{dq^0} = 0$$

ó

$$\frac{\partial\varphi}{\partial q^0}dq^0 + \frac{\partial\varphi}{\partial q^1}dq^1 + \cdots + \frac{\partial\varphi}{\partial q^n}dq^n = 0 \qquad (A.5)$$

Pero, como dq^s es proporcional a Q^s (por (A.4)), podemos escribir (A.5) en la forma:

$$Q^0\frac{\partial\varphi}{\partial q^0} + Q^1\frac{\partial\varphi}{\partial q^1} + \cdots + Q^n\frac{\partial\varphi}{\partial q^n} = 0 \qquad (A.6)$$

A continuación presentaremos el teorema que relaciona las integrales de (A.4) con las soluciones de (A.6).

---

* Sólo es constante cuando se sustituye una solución $\{q^1(q^0), q^2(q^0), \ldots, q^n(q^0)\}$ en φ.

Teorema A.1)

Si $\varphi(q^0, q^1, \ldots, q^n) = C$ es una integral del sistema (A.4), la función $\varphi(q^0, q^1, \ldots, q^n)$ debe satisfacer la ecuación diferencial (A.6) y recíprocamente si $\varphi(q^0, q^1, \ldots, q^n)$ es cualquier solución de la ecuación (A.6), $\varphi(q^0, q, \ldots, q^n) = C$ es una integral del sistema.

Ahora bien, para encontrar la solución general de la ecuación diferencial parcial (A.6), debemos formar el sistema correspondiente de ecuaciones diferenciales ordinarias (A.4) y obtener n integrales independientes para el sistema, entonces la solución general de (A.6) estará dada por

$$\varphi = F(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)$$

donde F es una función arbitraria de las n integrales.

El caso más general de ecuación diferencial parcial lineal tiene la forma

$$Y^0 \frac{\partial \varphi}{\partial q^0} + Y^1 \frac{\partial \varphi}{\partial q^1} + \cdots + Y^n \frac{\partial \varphi}{\partial q^n} + Y^{n+1} = 0 \qquad \text{(A.7)}$$

donde las $Y^0, Y^1, \ldots, Y^{n+1}$ son funciones de $q^0, q^1, \ldots, q^n$ y φ.

Para encontrar las soluciones de (A.7), hay que buscarlas en la forma implícita siguiente:

$$\omega(q^0, q^1, \ldots, q^n, \varphi) = C \qquad \text{(A.8)}$$

donde C es una constante arbitraria.

Por medio de la regla de diferenciación implícita

$$\frac{\partial \varphi}{\partial q^{\alpha}} = - \frac{\frac{\partial \omega}{\partial q^{\alpha}}}{\frac{\partial \omega}{\partial \varphi}}$$

que sustituimos en (A.7), y queda:

$$y^{0}\frac{\partial \omega}{\partial q^{0}} + y^{1}\frac{\partial \omega}{\partial q^{1}} + \cdots + y^{n}\frac{\partial \omega}{\partial q^{n}} + y^{n+1}\frac{\partial \omega}{\partial \varphi} = 0 \qquad (A.9)$$

que al aplicar el teorema (A.1) – las soluciones de (A.9) son las integrales del sistema correspondiente;

$$\frac{dq^{0}}{y^{0}} = \frac{dq^{1}}{y^{1}} = \cdots = \frac{dq^{n}}{y^{n}} = \frac{d\varphi}{y^{n+1}} \qquad (A.10).$$

Una vez encontrando una solución de (A.9)

$$\omega\left(q^{0}, q^{1}, \ldots, q^{n}, \varphi\right) = C \qquad (A.8)$$

podemos despejar φ, que es una solución de la ecuación (A.7).

Referencias y Bibliografía.

1.-) Bolza, O (1961); "Lectures on the Calculus of Variations", Dover, New York.

2.-) Cantrijn, F y Sarlet, W; "Note on Symmetries and Invariants for Second-Order Ordinary Differential Equations". Phys. Lett. 77A (1980) 404.

3.-) Currie, D.G y Saletan, E.J; "q-Equivalent Particle Hamiltonians. I", J. Math. Phys., 7, N6, (Junio 1966), p 967.

4.-) Darboux, G (1891); "Leçons sur la théorie Générale des Surfaces", III^e partie (Gautier-Villars, Paris) p 53.

5.-) Douglas, J (1941); "Solution of the Inverse Problem of the Calculus of Variations", Trans. Am. Math. Soc. 50, 71—128.

6.-) Elsgoltz, L; "Ecuaciones Diferenciales y Cálculo Variacional", 2ª Ed, Mir, Moscú (1977).

7.-) Goldstein, H; "Classical Mechanics", Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass, 1950.

8.-) Havas, P (1973); "The Connection between Conservation Laws and Invariance Groups: Folklore, Fiction and Fact", Acta. Phys. Austriaca, 38, 145-167.

9.-) Havas, P (1957); "The Range of Application of the Lagrange Formalism - I", Supp. Nuovo Cimento, 5, Ser. X, 363--388.

10.-) Hill, E. L; "Hamilton's Principle and the Conservation ~~theorems~~ Theorems of Mathematical Physics", Rev. Mod. Phys, 23, p 253 (1951).

11.-) Hojman, S y Harleston, H (1981); "Equivalent Lagrangians: Multidimensional Case". J. Math - Phys. 22, 1414-1419.

12.-) Hojman, S y Urrutia, L. F (1981); "On the Inverse Problem of the Calculus of Variations". J. Math. Phys (por aparecer).

13.-) Landau, L. D y Lifshitz, E. M.; "Mecánica", (Volumen I del Curso de Física Teórica); Editorial Reverté, S.A., Barcelona, 1970.

14.-) Lanczos, C.; "The Variational Principles of Mechanics"; University of Toronto Press, Toronto, 1970.

15.-) Lutzky, M; Phys. Lett. 72A (1979) 86.

16.-) Marmo, G y Saletan, E.J (1978); "q-Equivalent Particle Hamiltonians III. The two-Dimensional Quantum Oscillator", Hadronic J. 1, 955-965.

17.-) Marmo, G y Saletan, E.J (1977); "Ambiguities in the Lagrangian and Hamiltonian Formalism: transformation Properties", Nuovo Cimento, 40B, 67-89.

18.-) Noether, E (1918); "Invariante Variations Probleme", Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Math. Phys. Klasse, 235-257.

19.-) Oset, E y Tarrach, R; "Simetrías y teorema de Noether en mecánica Clásica", Gift 9/74, Depto. de Física teórica, Universidad de Barcelona.

20.-) Pontryagin, L.S (1962); "Ordinary Differential Equations", Addison-Wesley, Reading, Mass.

21.-) Saletan, E.J y Cromer, A.H.; "Theoretical Mechanics", John Wiley and Sons, Inc., New York, 1971.

22.-) Santilli, R.M. (1978); "Foundations of Classical Mechanics I", Springer-Verlag, New York.

23.-) Smirnov, V.I. (1964); "A Course of Higher Mathematics", Addison-Wesley, New York. (Vol II). p 58-73.

24.-) Sommerfeld, A. (1952); "Mechanics", Academic Press, New York.

25.-) Spivak, M.; "Cálculo en Variedades", Editorial Reverté, S.A., Barcelona, 1970.

26.-) Whittaker, E.T. (1937); "A treatise on the Analytical Dynamics of Particles and Rigid Bodies, 4th Ed. Cambridge. Univ. Press. Cambridge.

27.-) Sudarshan, E.C.G., Mukunda, N; "Classical Dynamics: A Modern Perspective"; John Wiley and Sons, New York, 1974.

28.-) Hojman, S y Montemayor, R; "S-equivalent Lagrangians for Free Particles and Canonical Quantization", Centro de Estudios Nucleares, U.N.A.M, preprint SPF0980.