UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA
DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

METODOS DE PLANIFICACION DESCENTRALIZADA

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

ACTUARIO

P R E S E N T A:

MARGARITA EUGENIA ZARCO RABAGO

México, D. F. 1986

I N D I C E

I N T R O D U C C I O N

Basta una simple ojeada a la literatura económica reciente para comprobar el creciente interés que despierta la teoría de la planificación económica, en general, y la teoría de los mecanismos de asignación de recursos, en particular. En cierto sentido el problema no es nuevo, desde la Mano Invisible de Adam Smith hasta el modelo de Arrow Debreu, pasando por la contribución fundamental de Walras, los teóricos de la economía se han preocupado por explicar cómo, a través de la interacción de distintos individuos movidos por intereses diversos, se resuelve el problema de la asignación de recursos en el marco del capitalismo competitivo. La teoría del bienestar ha mostrado que, bajo ciertas hipótesis, las asignaciones que resultan del equilibrio general competitivo son óptimas en el sentido de Pareto. Además, ha señalado las medidas correctivas que deben adoptarse (en general bajo la forma de impuestos y subsidios) para eludir las ineficiencias que resultan del incumplimiento de alguna de las hipótesis o para modificar la distribución en el caso de que el óptimo de Pareto alcanzado no se considere aceptable desde el punto de vista de la justicia distributiva.

Contrariamente a lo que tradicionalmente se ha venido haciendo en teoría del bienestar, el punto de partida de la teoría de los mecanismos de asignación de recursos, con -

siste en no aceptar el sistema competitivo y su correspondiente marco institucional como un dato y plantearse con espíritu normativo la posibilidad de organizaciones económicas alternativas, en un nuevo marco analítico en el que el mecanismo mismo se constituye en variable fundamental.

Las primeras discusiones con un cierto contenido analítico sobre el tema que nos ocupa tienen lugar durante las primeras décadas del presente siglo en el marco de la conocida polémica sobre la posibilidad del cálculo económico racional en una economía socialista. Una actitud común a todos aquellos que adoptaron posturas extremas es la de considerar que la asignación óptima de los recursos exige la utilización de un mecanismo de precios, que éste implica la existencia de mercados libres y que éstos sólo pueden existir en un régimen con propiedad privada de los medios de producción. Von Mises[1] fundamenta en esta cadena de implicaciones su tesis acerca de la imposibilidad de una economía socialista.

La contribución fundamental de Barone, Lange y Taylor[2] consiste en demostrar mediante un contraejemplo la falsedad de dichos argumentos. Sus propuestas no son sino reinterpretaciones del modelo Walrasiano que ponen de manifiesto que los precios de eficiencia no son un atributo exclusivo de los sitemas económicos con propiedad privada de los medios de producción. De ello se sigue que no tiene sentido ne gar la viabilidad de la economía socialista. Las propuestas de Lange y Taylor son básicamente procedimientos iterativos de cálculo para resolver el problema de la asignación óptima de los recursos.

El desarrollo simultáneo de la programación matemática,[3] la teoría de juegos[4] y el análisis de actividades[5], tanto en el campo teórico como en el de su aplicación, permite representar el problema de la asignación de recursos como un problema de programación matemática. Sin embargo, el algoritmo simplex resulta insatisfactorio en este contexto por dos razones básicas. En primer lugar, su aplicación requiere el conocimiento de todos los datos del problema. Cuando se trata de una economía nacional no es muy plausible suponer que quien esté planificando pueda disponer de toda esa información. En segundo lugar, inclusive en el caso de que así fuese, el tamaño del problema excede la capacidad de las computadoras existentes. Como consecuencia lógica, la descentralizacion[6] entra en escena.

Partiendo del planteamiento de asignación de recursos como un problema de programación matemática (específicamente de programación lineal), y ante la imposibilidad de utilizar el algoritmo simplex, se formulan varios algoritmos satisfactorios para resolver el problema. Dichos algoritmos tienen una característica en común, a saber, el envío recíproco de información, que puede consistir en precios o cantidades, lo cual da pie a la principal clasificación de éstos:

a) Algoritmos guiados por precios. Se caracterizan porque el que está planificando regula el comportamiento de las unidades involucradas en el problema, enviandoles precios para los servicios o bienes que producen.

b) Algoritmos guiados por cantidades. A diferencia de los anteriores, el comportamiento es regulado mediante el envío de niveles de producción a cada unidad involucrada en el problema.

Existen además otras clasificaciones para los algoritmos de asignación de recursos. Para dar una visión de los resultados obtenidos en el desarrollo de este campo, mencionaremos sin ninguna pretensión de exhaustividad, los mecanismos más significativos, divididos en tres categorías:

a) Algoritmos de descomposición para economías lineales. Se trata de mecanismos diseñados específicamente para economías lineales que cumplen ciertas condiciones de separabilidad. Entre los que podemos mencionar el algoritmo de Dantzing y Wolfe[7], que es en cierto sentido análogo al mecanismo competitivo. Además existe el algoritmo de Kornai y Lipták[8], al que podemos considerar como el dual del anterior, puesto que se invierten los papeles de quien planifica y de las unidades involucradas. El algoritmo de Kornai y Liptâk constituye el primer ejemplo de planificación sin precios, es un algoritmo de planificación por cantidades[9].

b) Algoritmos basados en el Método del gradiente. Están diseñados para resolver el problema de planificación bajo el supuesto de que las funciones involucradas en el modelo sean diferenciables y no necesariamente lineales.

Entre ellos se encuentran el algoritmo de Arrow y Hurwicz[10] (es una formalización rigurosa de una versión simplificada del modelo de Lange) y el algoritmo de planificación por cantidades de Heal[11]. La contribución de Arrow y Hurwicz es demostrar rigurosamente que, en el supuesto de una economía con un solo consumidor, el tanteo considerado por Lange, es formalmente equivalente al método gradiente de ajuste de precios y por lo tanto converge. El algoritmo de Heal es un método de ajuste por cantidades que puede considerarse como el dual del anterior.

c) Algoritmos con memoria. Son procedimientos escencialmente discretos en los que en cada interación, para determinar los cambios de las variables, es necesario 'recordar' todos los valores que han --

ido tomando a lo largo de todo el proceso. Entre-ellos podemos mencionar el algoritmo de Malinvaud[12] y el algoritmo de Weitzman[13], el primero está - - guiado por precios, mientras el segundo, que es - su dual, está guiado por cantidades. En este trabajo, se desarrollarán precisamente los procedi - mientos de Malinvaud y Weitzman, indicando en qué sentido se dice que estos dos procedimientos se - pueden considerar como duales entre sí.

La programación matemática es sin duda alguna, el vehículo fundamental de los avances teóricos que han tenido lugar por la vía que abrieran Lange y Taylor. En el campo de - la asignación de recursos hay que destacar dos aportaciones-importantes:

a) Desde el punto de vista dinámico, el descubrimiento de algoritmos eficientes para calcular soluciones de problemas lineales (en particular el algoritmo simplex de Dantzig), además de propiciar -- multitud de aplicaciones prácticas en campos muy-diversos, estimula a los teóricos a considerar -- sistemáticamente el problema de la convergencia - de los procedimientos iterativos de cálculo, - - correspondientes a los distintos algoritmos de -- asignación de recursos.

b) Desde el punto de vista estático, la interpreta -

ción económica de las variables duales asociadas a toda solución de un problema lineal, permite contemplar los precios desde una nueva perspectiva. Los precios dejan de ser una categoría económica lógicamente inseparable del mercado. Al mismo tiempo, se hace patente la relación escencial existente entre la programación lineal, el análisis de actividades y la teoría clásica del equilibrio competitivo.

Dada la importancia que tiene la teoría de dualidad dentro de la teoría de los algoritmos de asignación de recursos, se mostrarán las implicaciones y relaciones existentes entre la teoría de la dualidad y la teoría de los algoritmos de asignación de recursos, las cuales dividiremos en tres secciones:

a) La dualidad en el óptimo del problema de asignación de recursos.
b) La dualidad en cada interación si el problema es resuelto mediante el algoritmo de Malinvaud.
c) La dualidad en el óptimo de cada iteración según el algoritmo de Weitzman.

Como consecuencia del tratamiento formalmente correcto del problema, se hace necesario explicitar las hipótesis que garantizan la validez de los resultados. Ello delimita claramente la clase de economías para las que los distintos mecanismos funcionan, y nos da idea de toda la gama de problemas a los que pueden ser aplicados los algoritmos.

En particular, es patente que la hipótesis de convexidad y ausencia de efectos externos[14] juegan un papel crucial. Es bien sabido que en muchos casos los efectos externos se pueden introducir definiendo una nueva mercancía y creando un 'mercado' para ella. No obstante, como señala Starret[15], la introducción de esta nueva mercancía puede hacer aparecer no-convexidades en economías previamente convexas. Por otra parte una función objetivo única impide contemplar la incompatibilidad potencial entre objetivos individuales y los objetivos sociales de eficiencia y equidad perseguidos por todo mecanismo de planificación. Es obvio, que los agentes económicos podrían manejar su situación individual, violando las reglas del juego, razón por la cual el problema de los incentivos tiene una gran importancia práctica al evaluar algoritmos de planificación alternativos y especialmente en la última década, ha sido objeto de la atención de muchos teóricos. Es claro pues, que los resultados se han conseguido a costa de reducir drásticamente el alcance del problema planteado por Lange. El planteamiento de un problema de asignación de recursos como un problema de programación matemática, con una función objetivo única excluye por definición la cuestión crucial del conflicto de objeti -

vos, sin embargo pone limitaciones a la puesta en práctica de los algoritmos de asignación de recursos. A pesar de todas las limitaciones antes expuestas, los modelos de asignación de recursos derivados de la programación matemática tienen indudablemente un gran interés para aquellos problemas económicos en los que, como ocurre en la planificación de un sector productivo o de una gran empresa, la función objetivo está bien definida. Pero es necesario hacer notar que, el problema global de asignación de recursos en una economía es cualitativamente distinto del problema de una gran empresa.

El presente trabajo, que pretende dar una visión general de los algoritmos de planificación, está organizado de la siguiente manera:

En el capítulo I se presenta la forma general en que se caracteriza a la economía, indicando algunas de las propiedades que en situaciones ideales todo procedimiento debería satisfacer y se señalan las hipótesis que soportan el desarrollo de los procedimientos a tratar.

En el capítulo II se muestra la importancia de la interpretación económica que nos proporciona la aplicación de la teoría de dualidad en el óptimo del problema de asignación de recursos, para lo cual haremos el planteamiento formal de una economía en un modelo de programación matemática. Es preciso aclarar que dado que la teoría de la dualidad tan sólo se ha desarrollado en el campo de problemas lineales, todo lo concluido en este capítulo es únicamente válido para las economías lineales.

En el capítulo III se presenta el método de Malinvaud, en el que las indicaciones consisten en un conjunto de precios con los cuales cada sector debe de maximizar sus beneficios y finalmente se aplicará la teoría de dualidad al plan óptimo encontrado en cada iteración del procedimiento.

En el capítulo IV se considera el método de Weitzman en el que, a diferencia del anterior, las indicaciones enviadas a los sectores ya no son precios, sino niveles u objetivos de producción. Al igual que en el capítulo III se aplicará la teoría de dualidad al óptimo obtenido en cada iteración.

Finalmente, en el capítulo V se muestra una comparación entre los procedimientos de Malinvaud y Weitzman, dando una explicación del por qué se les considera como duales entre sí.

Se anexan 3 apéndices que contienen algunos resultados requeridos en el transcurso de este trabajo. En el Apéndice A se presentan resultados y definiciones matemáticas necesarias para el cabal entendimiento del trabajo. En el Apéndice B se detallan algunos resultados de programación matemática incluyendo teoría de dualidad. Y el Apéndice C contiene el procedimiento de Dantzig y Wolfe, en virtud de que el procedimiento de Malinvaud es una generalización de éste.

N O T A S

1 L. Von Mises, 'Economic Calculation in the Socialist -- Commenwealth' en F. Von Hayek (ed.), Collectivist Economic Planning, Reuledge & Kegan Paul, 1935.

2 E, Barone 'The Ministry of Producción in the Collectivist State' en F. Von Hayek (ed.); Lange y Taylor - - - (1938) en B.e. Lippincett (ed.), On the Economic Theory of Socialism Minneapollis, 1938.

3 Kantarovich, 'Mathematical Methods in the Organization-an Planning of Production'. Publication House of the Leningrad State University, 1939; G.B. Dantzig 'Maximization of a Linear Function of Variables subjet to Linear Inequalities', en T.C. Koopmans (ed.).

4 Von Neuman and Morgenstern, 'Theory of Games and Economic Behaviour', Princeton, 1947.

5 T.C. Koopmans, 'Analysis of Production as an Efficient Combination of Activities', en T.C. Koopmans (ed.), -- 1951.

6 Los espectaculares avances que han tenido lugar en el- campo de la cibernética han llevado a muchos a sobrevalorar la capacidad de las computadoras para resolver -

cualquier problema y a concluir que, desde el punto de vista computacional, la descentralización es innecesaria. Para una ingeniosa respuesta a una afirmación de Lange en este sentido, véase Scarf, 'The Computation of Economic Equilibria', Yale University Press, 1973, pp.10-11.

7 Dantzig y Wolfe, 'The Descomposition Algorithm for Linear Programs', Econométrica, 19.

8 Kornai y Lipták, 'Two-level Planning', Econometrica, 33

9 En los procedimientos guiados por cantidades el centro u oficina de planificación no fija los precios para cada mercancía sino que determina asignaciones cuantitativas a las unidades. No obstante los precios sombra intervienen de alguna forma en el proceso. Los mecanismos en los que los precios sombra no juegan ningún papel, como el proceso de Hurwicz, Radner y Reiter ('A Stochastic Decentralized Resource Allocation Process', Econométrica, 43, 1975) que es un proceso de busqueda aleatoria, son de naturaleza muy distinta a los basados en la programación matemática.

10 K. J. Arrow y L. Hurwicz, 'Descentralization and Computation in Resource Allocation' en R.W. Pfouts (ed.); Essays in Economics and Econometrics, Chapel Hill, 1960.

11 G.M. Heal, 'Planning without Prices', Review of Economic Studies, 36, 1969.

12 W. Malinvaud y M. Ol. Bacharach, 'Activity Analysis in the Theory of Growth and Planning', Mac Millan London, 1967.

13 M. Weitzman, 'Iterative Multilevel Planning with Production Targets', Econometrica, 38, 1970.

14 Se denominan efectos externos a las variables exógenas sobre las cuales el planificador generalmente no puede ejercer una acción decisiva. Así, la producción agrícola depende de las condiciones meteorológicas y de las relaciones con los países extranjeros, las técnicas de producción están en función del progreso científico y de sus aplicaciones, las preferencias de los consumidores cambian bajo la influencia de las consideraciones políticas y estrategias de los dirigentes.

15 D. Starret, 'Fundamental Nonconvexities in the Theory of Externalities', Journal of Economic Theory, 4, 1972.

C A P I T U L O   I

CARACTERIZACION DEL PROBLEMA DE PLANIFICACION DESCENTRALIZADA Y FORMALIZACION DE LOS PROCEDIMIENTOS DESCENTRALIZADOS

I.-I LA PLANIFICACION COMO UN PROBLEMA DE MAXIMIZACION CONDICIONADA.

La complejidad de las relaciones económicas entre -- las distintas entidades que conforman las sociedades modernas, hizo clara la necesidad de planificar formalmente estas economías. Los países socialistas han puesto un especial interés en el desarrollo tanto teórico, como práctico de este tema. Por - ejemplo, en la Unión Soviética han existido normalmente tres - categorías distintas de planes. Existe un plan esquemático que cubre un período de quince a veinte años, y el cual describe - los movimientos generales de la economía; está diseñado para - mejorar y dar consistencia a las decisiones a largo plazo. Pero además, existen también un plan quinquenal más detallado y un plan anual aún más preciso. Este último plan pretende regular completamente los procesos de producción y distribución de la economía; en este sentido cumple la función del mecanismo - del mercado: controla con detalle la asignación diaria de los-recursos. Los planes a los que nos referimos de aquí en adelante serán aquellos que aproximadamente puedan ser clasificados-dentro de esta última categoría.

El objetivo de una economía puede ser encontrar el -- máximo beneficio posible para sus integrantes, tomando en -- cuenta, las diversas restricciones a las que deben someterse. Por lo tanto, para resolver un problema de planificación es -- necesario seleccionar un plan de acción para la organización-económica que se está planificando.

Considérese la siguiente hipótesis: "La selección de ese plan implica la resolución de un problema de maximiza -- ción condicionada". Los problemas de maximización condiciona da pueden enunciarse en los siguientes términos: "escójase - la x que maximice U(x) sometida a la condición de que g(x)=0". Para justificar la hipótesis enunciada, el primer paso con - siste en identificar las "variables de elección". Es facti - ble suponer que la economía que se está planificando cuenta - con un organismo encargado de la planificación, llamémoslo - oficina de planificación; entonces, la oficina de planifica - ción puede escoger a su voluntad el valor de cada una de las variables económicamente relevantes, y por lo tanto, puede - determinar el estado de la economía con todo detalle. Denota remos al estado de la economía por un vector s y llamaremos - S al conjunto de todos los estados factibles de la economía. Entonces el problema de la oficina de planificación consiste en escoger un vector $s \in S$ que dé el mayor valor posible a -- una función objetivo U(s). La función objetivo asocia a cada estado de la economía s un número real U(s), que indica cuán deseable es el estado de la economía s para la oficina de -- planificación. Si suponemos que existen ciertas preferencias entre los estados de la economía que deben utilizarse para - guiar la actividad de la planificación y que dichas prefe -- rencias pueden describirse mediante curvas de indiferencia -

continuas y disjuntas (o superficies en el caso de que existan muchos bienes), entonces la función objetivo sirve para representar esas preferencias, es decir, para asignar números mayores a los estados preferidos. En lo que se refiere a las restricciones, se pueden distinguir dos categorías: aquellas que se refieren a los recursos disponibles y las que se refieren a la producción, las primeras se denominan "restricciones globales", mientras que para las segundas se utiliza el término de "restricciones tecnológicas".

En forma esquemática se puede decir que la preparación de un plan supone la realización de varias etapas sucesivas:

a) Formular un modelo que describa todas las restricciones tecnológicas de todos y cada uno de los agentes económicos, junto con las restricciones globales del sistema económico en general.

b) Construcción de una función que refleje los objetivos a través de la representación de éstos en una estructura de preferencias sobre las alternativas factibles del modelo mencionado.

c) Optimización del funcionamiento del sistema a través de la maximización de la función objetivo condicionada a las restricciones del modelo que representa el sistema.

Entonces un procedimiento de planificación será un - procedimiento mediante el cual se resuelve el problema de -- planificación (o equivalentemente el problema de maximización condicionada) al que nos hemos venido refiriendo.

El primer punto a subrayar al discutir la naturaleza de los procedimientos de planificación, consiste en que todo procedimiento para resolver un problema grande de maximiza - ción condicionada necesariamente deberá ser un procedimiento iterativo. La razón por la cual debe ser iterativo es muy -- clara: los problemas son demasiado grandes y complicados co- mo para poder ser resueltos en un solo intento. Particular - mente en el contexto de los procedimientos de planificación, el método de las aproximaciones sucesivas adopta la siguien- te forma: inicialmente se propone un plan arbitrario, se cal culan entonces ciertos índices asociados a ese plan, a la -- luz de los cuales se introducen ciertas modificaciones, y -- con ellas se obtiene un nuevo plan, se calculan nuevamente - los índices correspondientes, y así sucesivamente.

El segundo punto a destacar sobre la naturaleza de - los procedimientos de planificación es que suponen cierto -- grado de lo que en términos generales puede llamarse descen- tralización. El tamaño del problema[1] es el origen de dos gran des problemas: el primero se refiere a la imposibilidad de - que la oficina de planificación reúna toda la información ne cesaria para enunciar formalmente el problema de planificación. Esto se debe tanto a la inmensa cantidad de información a recopilar, como al hecho de que muchos de los que poseen la información requerida pueden ser incapaces de formalizar sus conocimientos y comunicarlos a la oficina de planificación sin introducir errores. La segunda dificultad originada en el tamaño del problema consiste en que, incluso si fuese posible recopilar la cantidad necesaria de información, la oficina de planificación sería incapaz de utilizarla y manipularla adecuadamente.[2] Consideraciones del tipo que acabamos de mencionar constituyen los argumentos principales en favor de alguna forma de descentralización de los procedimientos de planificación, esto nos conduce a proponer que en un procedimiento de planificación debe contemplarse el flujo de información entre la oficina de planificación y los agentes económicos que constituyen el sistema.

El concepto de descentralización en economía tiene dos interpretaciones distintas y complementarias: descentralización informacional[3] y descentralización de la autoridad para tomar decisiones. Un procedimiento de planificación se caracterizará como descentralizado desde el punto de vista de la información si goza de las siguientes propiedades:

a) El mensaje transmitido por un sector o unidad productiva en una etapa cualquiera, depende solamente de las posibilidades de producción de esa unidad y de los mensajes por ella recibidos en etapas anteriores.

b) Los mensajes transmitidos a una unidad productiva o sector sólo toman en cuenta las variables de decisión de esa unidad.

c) No es necesario que las empresas conozcan la fuente de los mensajes que reciben.

Los incisos a) y b) conjuntamente reciben el nombre de divisibilidad informacional e implican que las empresas sólo necesitan tener información sobre sus propias posibilidades de producción. El inciso c) suele recibir el nombre de condición de anonimato. Es claro que la transmisión de información introduce costos, retrasos y la posibilidad de cometer errores. En consecuencia, es muy importante que un procedimiento de planificación trate de minimizar la cantidad de información transmitida; es fácil darse cuenta que el flujo de información será menor en un procedimiento que cumpla la divisibilidad informacional que en uno que no la cumpla.

Debido al gran tamaño del problema de planificación, es esencial que éste se pueda descomponer en varios subproblemas cuyo tamaño no sea excesivo. Diremos que un procedimiento de planificación es multinivel si cumple las siguientes condiciones:

a) El problema de planificación se descompone en varios subproblemas, cada uno de los cuales se refiere y se delega a un sector de la economía.

b) Tanto la oficina de planificación como los sectores, juegan un papel esencial en el proceso de cálculo del plan.

La razón principal para exigir que un procedimiento de planificación sea multinivel ya ha sido mencionada y reside, tanto en el inmenso tamaño del problema de planificación, que hace que la oficina de planificación sea incapaz de resolverlo, como en el hecho de que gran parte de la información sobre las posibilidades de producción de los sectores (información que la oficina de planificación debe tomar en cuenta para determinar el plan a seguir), no se puede formalizar y comunicar fácilmente. De lo cual se sigue que, con objeto de aprovechar al máximo la información de los sectores, ellos deberán jugar algún papel en la determinación del plan a seguir.

Para aclarar el concepto de descentralización de la autoridad para tomar decisiones, es útil recurrir a una interesante clasificación de los procedimientos de planificación, realizada por Ellman [4], la cual los divide en perfectamente descentralizados, indirectamente centralizados y perfectamente centralizados.

Se entiende por centralización perfecta: "una economía en la que todas las decisiones las toma la oficina de planificación", por centralización indirecta "una economía en la que los consumidores y los sectores toman todas las decisiones, pero en la que esas decisiones son las mismas que hubiera tomado la oficina de planificación, puesto que ella determina tanto los criterios (por ejemplo, maximización de beneficios), como los parámetros (precios) que utilizan las empresas", y por descentralización perfecta:"una economía en la que los individuos y los sectores toman todas las decisiones de modo totalmente independiente de los deseos de la autoridad central".

Al comprometer en la elaboración del plan a aquellos que deberán ejecutarlo se incrementa su participación en el procedimiento de planificación, lo cual aumentará la probabilidad de que se lleve a cabo de modo efectivo. Sin embargo, es importante señalar que hacer participar en la determinación del plan a aquellos que deben ejecutarlo, no significa necesariamente concederles la autoridad para tomar decisiones.

Un esquema típico de planificación descentralizada puede contener la siguiente división de funciones. La oficina de planificación es la responsable de garantizar el cumplimiento de las restricciones globales y se le comunicala información mínima suficiente para que pueda hacerlo. La responsabilidad de que se satisfagan las restricciones tecnológicas se delega a los sectores o unidades productivas a cuyos procesos se refieren las restricciones.

Habiendo esbozado la naturaleza de los procedimientos de planificación, estamos en condiciones de dar una definición para los procedimientos de planificación descentralizada.

D E F: Un procedimiento de planificación descentralizada es un procedimiento iterativo y multinivel que funciona entre la oficina de planificación y las unidades productivas o sectores, y que permite la resolución descentralizada del problema de maximización condicionada por envío recíproco de información.

Según la terminología de Malinvaud, la información enviada por la oficina de planificación a las unidades productivas o sectores se denomina "índices prospectivos", mientras que éstas enviarán a la oficina de planificación sus "proposiciones".

Para determinar un procedimiento de planificación descentralizada es necesario precisar la naturaleza de la in formación emitida, así como la manera en la que será calculada dicha información, este último punto lo trataremos en capítulos subsecuentes.

La información que se intercambia entre la oficina de planificación y las unidades productivas se puede clasificar en las siguientes categorías:

1. Precios de Programación.
2. Indicadores de Eficiencia.
3. Indices Cuantitativos.
4. Programas de Acción.
5. Indicadores Financieros.

Puede verse la representación gráfica del flujo de información en la gráfica 1.1

1.- Precios de Programación:

Se trata no sólo de los precios duales en el sentido de variables duales de un problema de optimización, sino de todos los precios o informaciones que se indican con los precios que difieren de aquellos efectivamente utilizados en las transacciones financieras: tasas de rendimiento prescritas para los cálculos de elección de inversiones, tasas de cambio ficticias, precios futuros anticipados. Es necesario recordar, la distinción que existe en economía planificada entre los precios de programación (o precios ficticios) y los precios operativos (o precios efectivos). -- Los precios de programación pueden servir de base a los - - cálculos económicos concernientes a la asignación óptima de recursos, elección de factores de calidad diferente, elec - ción entre técnicas de producción de intensidad capitalista diferente, elección de importaciones y exportaciones. No se trata, por lo tanto, de los precios efectivamente utiliza - dos en las transacciones financieras, sino de parámetros -- que guían las decisiones de producción. El flujo de los pre cios de programación va de la oficina de planificación a -- las unidades productivas o sectores.

2.- Indicadores de Eficiencia:

Los indicadores de eficiencia más utilizados corres ponden a las operaciones de equipo: eficacia marginal o me - dia del capital invertido, tasas de rendimiento interno o - del plazo de recuperación de un proyecto de inversión. El - flujo de los indicadores de eficiencia va de las unidades - productivas o sectores a la oficina de planificación.

3.- Indicadores Cuantitativos:

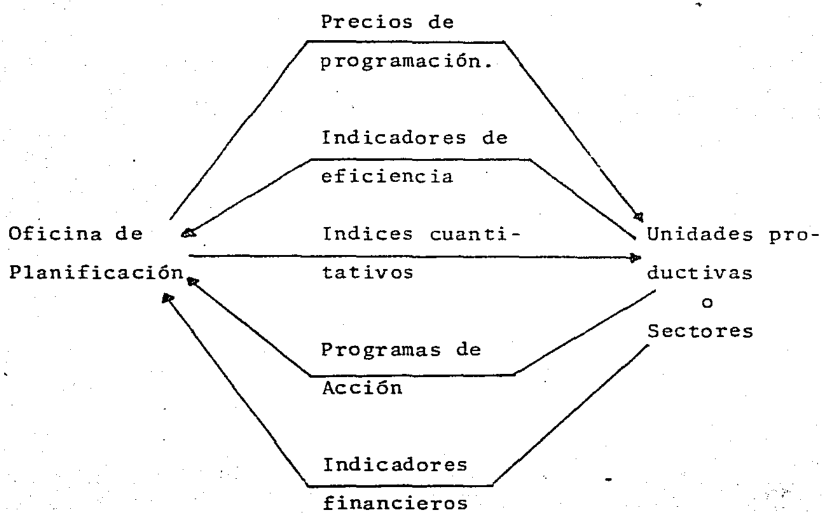
Constituyen la forma tradicional de los parámetros de decisión utilizados en las economías socialistas, se -- trata por una parte de la asignación de recursos (cuotas- de inputs y de factores)y por la otra de objetivos de pro ducción (cuotas de outputs). El flujo de los índices cuantitativos va de la oficina de planificación a las unidades productivas o sectores.

4.- Programas de Acción:

Se trata de informaciones relativas al desarrollo de nuevas capacidades de producción o de nuevas tecnologías, que no se contentan con anunciar las cantidades producidas o utilizadas, sino que dan una descripción, tanto técnica como cualitativa, de los nuevos equipos utilizados o de los nuevos productos. El flujo de los programas de acción va de las unidades productivas o sectores a la oficina de planificación.

5.- Indicadores Financieros:

Demanda y oferta de créditos, impuestos y derechos de aduanas a pagar, ganancias realizadas, subsidios, etc. El flujo de los indicadores financieros va de las unidades productivas o sectores a la oficina de planificación.


Precios de
programación.
Indicadores de
eficiencia
Oficina de
Planificación
Indices cuanti-
tativos
Unidades pro-
ductivas
o
Sectores
Programas de
Acción
Indicadores
financieros

Gráfica 1.1

I.2 LA ESTRUCTURA FORMAL DEL PROBLEMA DE PLANIFICACION.

La caracterización del plan óptimo implica el tener un conjunto de valores para las diferentes variables económicas, tales que, por una parte satisfagan ciertas condiciones de coherencia y además hagan máxima cierta función objetivo, adoptada como representativa de las preferencias por la oficina de planificación.

Supongamos una economía en la que existen n empresas y m bienes o servicios. Las diferentes variables a las cuales debemos darle valores, serán los consumos finales de los diferentes bienes y los insumos y factores utilizados por las empresas para la producción de dichos bienes. Lo anterior puede ser formalizado a través del siguiente modelo [5].

Definamos por w_i el recurso disponible del bien i y por y_{ij} el flujo neto del bien i en la empresa j, (si y_{ij} es positivo significa que la empresa j entrega dicha magnitud del bien i en forma neta al mercado, es decir, habiendo descontado la cantidad que pudiera requerir del propio bien i para su producción y si y_{ij} es negativo implicará que la empresa j está demandando como insumo para su producción dicha magnitud del bien i). Por lo tanto, si llamamos z_i a la oferta neta del artículo i, ésta será igual a:

$$z_i=w_i+\sum_{j=1}^{n} y_{ij} \qquad \forall i \in \overline{1, m}$$

Llamemos x_i al consumo final del bien i. La cantidad de una mercancía que se asigna a actividades como el consumo no puede ser mayor que la oferta neta disponible en la economía. Consecuentemente, x_i debe cumplir:

$$x_i \leq z_i \qquad \forall i \in \overline{1,m}$$

o bien:

$$x_i - \sum_{j=1}^{n} y_{ij} \leq w_i \qquad \forall i \in \overline{1,m}$$

llamando x, y_j y w a los vectores columna de mx1 cuyas componentes son los x_i, y_{ij} y w_i respectivamente, las expresiones anteriores pueden escribirse como:

$$x - \sum_{j=1}^{n} y_j \leq w \qquad (1.1)$$

Además, existirán ciertas condiciones para que un vector de consumos x sea aceptable para la comunidad. Estas condiciones podrían ser, por ejemplo: que el vector x sea no negativo, o que ciertas componentes de x sean proporcionales a otras componentes (caso de bienes complementarios), o bien que puedan existir ciertas cantidades mínimas de algunos bienes que deben ser consumidas (caso de bienes esen ciales), etc. Todo esto se puede traducir en la existencia de un conjunto X de consumos aceptables, al cual debe pertenecer x, o sea:

$$x \in X \qquad (1.2)$$

Por otra parte los vectores y_j implican cierta transformación de insumos y factores en bienes, lo cual sólo puede ser realizado bajo ciertas condiciones de producción. Si Y_j representa el conjunto de posibilidades de producción de la j-ésima empresa, lo anterior puede ser expresado como:

$$y_j \in Y_j \qquad \forall j \in \overline{1,m} \qquad (1.3)$$

En la medida en que se defina un conjunto de valores para las componentes de los vectores $(x, y_1, y_2, \ldots y_n)$ se tendrá determinado un plan. Si este conjunto de valores satisface las condiciones (1.1), (1.2), y (1.3), se dice que se trata de plan factible.

Definida una estructura de preferencias sobre las alternativas por parte de la oficina de planificación, a la cual se le puede asociar una función de utilidad U(x), que para nuestros fines jugará el papel de función objetivo, la obtención del plan óptimo se resumirá entonces en la resolución del problema de programación matemática definido como:

$$\text{Máx } U(x)$$

s.a.

$$x - \sum_{j=1}^{n} y_j \leq w$$

$$x \in X$$

$$y_j \in Y_j \qquad \forall j \in \overline{1,n}$$

Para el estudio de los procedimientos descentralizados se supone que la oficina de planificación conoce - - U(x), x y w, pero no tiene información suficiente como para construir los n conjuntos Y_j, los cuales sólo son conocidos por la empresa respectiva, quien a su vez no tienen-ninguna información sobre U(x), x y w .

I.3 PROPIEDADES DE UN PROCEDIMIENTO DE PLANIFICACION.

En esta sección abordaremos el problema de la puesta en práctica del plan sin considerar el problema de la elaboración del mismo. Idealmente, un procedimiento de planificación debería contener elementos que garantizasen que actuar de acuerdo con los requerimientos del plan favorece los intereses privados de los participantes. Los procedimientos que estudiaremos en los capítulos subsecuentes proporcionan algún sistema de incentivos. En efecto, requieren que las empresas maximicen sus beneficios. Es evidente que para valorar cualquier procedimiento, es necesario tener en cuenta la carga informacional impuesta a los participantes y la estructura de los incentivos, si la hay. Existen, no obstante, factores adicionales que deben tenerse en cuenta. Las principales características que idealmente debería cumplir el procedimiento utilizado para obtener el plan óptimo, se conocen con el nombre de propiedades de Malinvaud, y son:

a) Procedimiento bien definido: Como ya hemos visto un procedimiento de planificación deberá ser iterativo, lo cual implica que en cada etapa la oficina de planificación deberá determinar (en base a los resultados de la o las etapas anteriores) los índices prospectivos y el plan , los primeros se entregarán a las empresas y éstas deberán entregar a su vez ciertas proposiciones a la oficina central.

Cuando las operaciones involucradas en la obtención de los - índices prospectivos, el plan y las proposiciones, poseen solución en todas las etapas, se dice que el procedimiento está bien definido.

b). Procedimiento estrictamente bien definido: Cuando un procedimiento esté bien definido y además exista unicidad en las soluciones diremos que el procedimiento está estrictamente bien definido.

El que un procedimiento esté bien definido es muy -- importante, ya que si en alguna de las etapas no existiera - por ejemplo la posibilidad de calcular las proposiciones que debe hacer alguna empresa a la oficina de planificación, el- proceso quedaría parado arbitrariamente sin haber llegado al plan óptimo. Además, si el resultado en una cierta etapa - - implicara más de una posible proposición que hacer, no habría elementos para decidir cuál de éstos se consideraría, por lo que es importante que el procedimiento esté no solo bien definido, sino que lo esté en forma estricta.

c).- Procedimiento factible: Esta propiedad casi se explica por sí misma; un proceso tiene dicha propiedad si todo plan propuesto en el curso del proceso iterativo es un -- plan factible. Es conveniente que el procedimiento tenga esta propiedad ya que debido a los altos costos de realización de cada una de las etapas, podría ser preferible detener el procedimiento en una etapa determinada, aún sin haber obtenido el plan óptimo, garantizando que el plan obtenido en la última etapa puede ser puesto en práctica, ya que es factible.

d).- <u>Procedimiento monótono</u>: Diremos que un procedimiento es monótono si, en cada etapa, el plan propuesto es, por lo menos tan deseable como el anterior. El problema aquí, es definir cómo vamos a medir dicha preferencia. Supongamos que es posible definir una función de preferencia ($\emptyset(x)$), entonces en la iteración t se construye un plan P^t, al cual le corresponde un cierto valor de preferencia $\emptyset(P^t)$. Entonces un procedimiento es monótono si $\emptyset(P^t) \geq \emptyset(P^{t-1})\ \forall t$. En algunos casos dicha preferencia está dada en términos del valor de la función objetivo asociada a dicho plan. En este caso, el que el procedimiento sea monótono implicará que:

7

$$U^t \geq U^{t-1} \qquad \forall t$$

donde:

U^t es el valor de la función objetivo asociado al plan p^t (definido en la etapa t).

e) <u>Procedimiento estrictamente monótono</u>: Un procedimiento es estrictamente monótono si:

- Es monótono
- Si la igualdad $\emptyset(P^t)=\emptyset(P^{t-1})$ implica que el plan - P^{t-1} es óptimo.

Los procedimientos para la formulación del plan óptimo pueden implicar un número de etapas demasiado grande, por lo cual podríamos, por razones prácticas, conformarnos con - una buena aproximación al plan óptimo. Por lo tanto, si el - proceso es detenido antes de la etapa óptima sería deseable- que éste fuera monótono, ya que sólo así sabemos que los resultados obtenidos en esta etapa, desde el punto de vista - de lo que se desea maximizar (en caso de que la preferencia esté determinada en términos del valor de la función objetivo) serían mejores que los de todas las etapas anteriores.

f).- <u>Procedimiento convergente</u>: Un procedimiento -- converge si: a medida que se van repitiendo las iteraciones, los planes propuestos se acercan cada vez más al óptimo (o a un óptimo, si el plan óptimo no es único). Formalmente, si P^t es el plan propuesto en la t-ésima iteración y $\emptyset^*$es -- una cota superior de $\emptyset(P)$ sobre el conjunto de los planes posibles, se cumple que

$$\emptyset(P^t) \longrightarrow \emptyset^* \qquad \text{cuando } t \longrightarrow \infty$$

g).- Procedimiento finito: Un procedimiento es finito si es posible llegar al plan óptimo en un número finito de iteraciones, es decir, si existe un número $t < \infty$ tal que p^t sea el plan óptimo.

Generalmente al poner en práctica los procesos de planificación, sólo se llevan a cabo un número finito de iteraciones, por lo que las últimas dos proposiciones son menos relevantes que las anteriores.

Evidentemente, cada procedimiento se caracteriza por un vector de cualidades -economía informacional, velocidad de convergencia, factibilidad, etc.- por lo que la comparación de procesos alternativos se reduce a la comparación de combinaciones distintas de estas cualidades. Según las preferencias del que debe escoger el procedimiento a seguir, se elegirá un proceso u otro (esto es en realidad un problema de maximización condicionada)[8]. Estas preferencias estarán a su vez determinadas por las circunstancias en las que opera - el tamaño de la organización, la facilidad de comunicación en su seno, el costo de los retrasos en la puesta en práctica del plan, la naturaleza de la tecnología, etc-.

I.4 HIPOTESIS GENERALES

Evidentemente el modelo de planificación descentralizada es una abstracción de la economía real; en general todos los modelos matemáticos son abstracciones de fenómenos reales, en la medida en que estos modelos representen fielmente el fenómeno estudiado, la solución obtenida a partir de la resolución del modelo será realmente funcional al ponerla en práctica. Se habla de abstracción porque, para representar la estructura y comportamiento del fenómeno mediante un modelo matemático, se hacen ciertos supuestos sobre los diversos factores que constituyen o afecta al fenómeno, todo esto con la finalidad de simplificar la representación del fenómeno en cuestión. Por lo que para representar el fenómeno económico mediante algún modelo de planificación descentralizada, tendremos que hacer ciertos supuestos; además, dependiendo del mecanismo que se pretenda utilizar para resolver el problema planteado, se tendrán que hacer todavía más suposiciones sobre la economía que se está planificando, ya que solo así se garantiza la validez de los resultados obtenidos mediante el mecanismo elegido. A continuación enunciaremos las hipótesis más generales de todo procedimiento de planificación; sin embargo no se explicará en esta sección, la razón por la cual es necesario que se cumplan, ya que se considera más fácil entender el requerimiento de éstas a medida que se desarrolle cada procedimiento.

- Conjunto de Producción:

a) Hipótesis de convexidad (y algunas veces de estricta convexidad) de los conjuntos de producción, lo que genera el problema de la toma en consideración de rendimientos crecientes.

b) Hipótesis de diferenciabilidad de las funciones de producción, si se quieren definir productividades marginales.

- Estructura de la Economía:

a) Se hará algunas veces la hipótesis de monoproducción para las unidades productivas.

b) Además, algunos procedimientos no toman en cuenta los consumos intermedios.

- Función de Utilidad Colectiva:

a) Se supondrá algunas veces que la función objetivo es diferenciable, lo cual es restrictivo, pero algunas veces necesario.

b) Siempre se supondrá que la función objetivo es cóncava y algunas veces estríctamente cóncava.[9]

N O T A S:

1.- Enrico Barone se refiere a lo vasto del problema diciendo que consta de 'millones de ecuaciones con millones de incógnitas', en su libro 'The Ministry of Production in a Collectivist State', en F.A. von Hayek, 'Collectivist Economic Planning, London, 1935.

2.- Estas ideas fueron sugeridas por F.A. von Hayek en - - 'The Use of Knowledge in Society', American Economic - Review, 35,4 (1945).

3.- Véase, por ejemplo, en Hayek, op cit.; L. Hurwicz, 'Optimality and Informational Efficiency in Resource Allocation Processes', en Mathematical Methods in the So -- cial Sciences, edición preparada por K.J. Arrow, S. Karlin y P. Suppes, Stanford University Press, 1960.

4.- M. Ellman trata este tema en 'Optimal Planning', Soviet Studies, 20, número 1 (1968). Lo mismo hace J.S. Berliner en 'Comment' (sobre Hurwicz) en Value and Plan.

5.- La terminología y nomenclatura utilizada corresponde a- la de Malinvaud en 'Procedures Decentralisees pour la-- Preparation des Plans'. Ecole Nationale de la Statistique et de l'Administration Economique. Paris, 1963, o en -- cap 7 de 'Activity Analysis in the Theory of Growth and Planning', Mac Millan London 1967.

6.- Dado el carácter de este conjunto, podemos suponer que;

será acotado inferiormente, por los consumos mínimos o bien por la no negatividad de sus componentes, y que -- además será cerrado (admite a sus puntos frontera).

7.- La distancia está dada en la etapa t por $\overline{U} - U^t$ donde - $\overline{U}$ es el valor máximo de U en el conjunto de planes factibles. Si $\overline{U}-U^t \leq \overline{U}-U^{t-1}$, es evidente que $U^t \geq U^{t-1}$.

8.- Se debería de determinar cuál es el mejor procedimiento en términos de la mezcla óptima del vector de cualidades, sujeto a los procedimientos que son factibles de - aplicar al problema que se desea resolver.

9.- Ver apéndice A

C A P I T U L O II

DUALIDAD EN EL OPTIMO DEL PROBLEMA DE PLANIFICACION DESCENTRALIZADA

II.1 REPRESENTACION DE UNA ECONOMIA

Antes de efectuar una revisión de los principales procedimientos de planificación descentralizada, buscaremos una interpretación económica coherente de las relaciones duales y de las relaciones de complementariedad que nos permitan describir en términos de precios las condiciones de producción y distribución de los diferentes bienes. Para que nuestra búsqueda sea realmente fructífera es necesario describir con más detalle las restricciones involucradas en el modelo de planificación descentralizada. Es claro que las condiciones económicas de cualquier sistema varían en función del tiempo (por el avance tecnológico y científico de la comunidad que lo compone) es por ello que cualquier modelo se volverá obsoleto y, por consiguiente habrá que renovarlo.

Restricciones sobre productos:

Se considera un periodo de planificación, que va de un año inicial 0 al año terminal t y sean:

C_t:	vector de consumo familiar en	t
CP_t:	vector de consumo público en	t
I_t:	vector de ahorro en	t
CI_t:	vector de consumo intermedio en	t
EXP_t:	vector de exportaciones en	t

Y_t: vector de producciones disponibles en t

IMP_t: vector de importaciones en t

Es obvio que los bienes o servicios empleados durante el periodo deben ser menores o iguales que los disponibles en éste. De donde:

$$C_t + CP_t + I_t + CI_t + EXP_t \leq Y_t + IMP_t$$

esta desigualdad se escribe también :

$$C_t + CI_t - Y_t + EXP_t - IMP_t \leq -CP_t - I_t$$

sumando y distribuyendo de ambos lados el término -- $(- C_0 + Y_0 - CI_0)$:

$$\underbrace{C_t - C_o}_{\Delta C = \alpha C} - \underbrace{\{(Y_t - Y_0) - (CI_t - CI_0)\} + EXP_t - IMP_t}_{\Delta P} \leq \underbrace{Y_0 - CI_0}_{P} - \underbrace{(C_0 + CP_t + I_t)}_{G}$$

El incremento del consumo de las familias está determinado de la forma $\alpha \cdot C$, donde α es un escalar y C un vector en $\mathbb{R}^m$, por consiguiente la finalidad del problema será maximizar la intensidad α. Evidentemente, la estructura del consumo es susceptible de evolucionar con el enriquecimiento general.

Interviene enseguida el incremento ΔP de la producción neta, que es proporcional al incremento de los niveles de producción $x_1, \ldots x_j, \ldots x_n$ de las n empresas. Si A_{ij} es el consumo del producto i por unidad de actividad de la empresa j y B_{ij} es la producción neta del producto i por unidad de actividad de la misma empresa, entonces el incremento (durante el periodo de planificación) de producción neta del bien i es por consiguiente:

$$\Delta P_i = \sum_{j=1}^{n} B_{ij} x_j - \sum_{j=1}^{n} A_{ij} x_j$$

de donde:

$$\Delta P = (B - A) x$$

El vector $P = Y_0 - CI_0$, vector de producción neta en el año inicial, es evidentemente un dato. Son igualmente considerados como datos, los tres términos que constituyen el vector G.

Comercio exterior:

La descripción de los cambios con el exterior nos obliga a realizar una categorización de los diferentes bienes o servicios a los que genéricamente se les denomina productos.

- Productos de la categoría a; de índices $i \in \overline{1,m_a}$ - que son importables o exportables sin limitaciones Introducimos el vector S_a de componentes $s_1, \ldots s_i, \ldots s_{m_a}$ donde:

s_i = Exportaciones del producto i - Importaciones del producto i

Las componentes s_i pueden ser positivas, negativas o nulas.

- Productos de la categoría b; de índices $i \in \overline{m_{a+1}, m_b}$ que son importables o exportables, pero para los cuales las exportaciones están limitadas. Introducimos un vector columna S_b de componentes $s_{m_{a+1}}, \ldots s_i, \ldots s_{m_b}$ donde:

s_i = Exportaciones del producto i - Importaciones del producto i

Las componentes s_i pueden ser positivas, negativas o nulas, pero debe ocurrir que:

$$s_i \leq \overline{s_i} \qquad \forall i \in \overline{m_{a+1}, m_b}$$

es decir:

$$S_b \leq \overline{S_b}$$

- Productos de la categoría c; de índices $i \in \overline{m_{b+1}, m_c}$, que son importables y no exportables, Introducimos un vector S_c de componentes $s_{m_{b+1}}, \ldots s_i, \ldots s_{m_c}$ donde:

s_i = Importaciones del producto i

Las componentes s_i deberán ser positivas o nulas.

-Productos de la categoría d; de índices $i \in \overline{m_{c+1}, m_d}$, que son no importables y con limites de exportación. Introducimos un vector S_d de componentes $s_{m_{c+1}}, \ldots s_i, \ldots s_{m_d}$ donde:

s_i = Exportaciones del producto i

Las componentes s_i deberán ser positivas o nulas, y además debe ocurrir que:

$$s_i \leq \overline{s}_i \qquad \forall i \in \overline{m_{c+1}, m_d}$$

es decir:

$$0 \leq S_d \leq \overline{S_d}$$

- Una quinta categoría reagrupa los productos que no intervienen en el comercio exterior.

Finalmente, se deberá introducir una restricción representativa de que el déficit exterior para el año objetivo, debe ser inferior al monto de deuda externa del país -- en cuestión. Si D designa el monto de la deuda, diremos:

Valor de importaciones - Valor de exportaciones $\leq$ D

Sea $R = (r_1, \ldots r_{m_d}) = (r_a, r_b, r_c, r_d)$ el vector de -- precios exteriores de los productos, entonces la restricción anterior puede expresarse como:

$$- r_a S_a \; - r_b S_b \; + r_c S_c \; - r_d S_d \leq D$$

<u>Restricciones sobre los factores primarios</u>:

Primera Versión:

Si k_j es la inversión neta a efectuar para obtener un incremento unitario del nivel de producción de la empresa j y si la inversión neta factible durante el período de planificación está restringida por K, diremos:

$$\sum_{j=1}^{n} k_j x_j \leq K$$

en donde:

$$k\,x \leq K$$

Por otra parte se distinguen λ categorías de mano de obra de índices $t \in \overline{1,\lambda}$, considérese que la última categoría corresponde a la mano de obra no calificada. Introducimos una matriz W cuyas entradas representan los coeficientes de mano de obra, es decir, W_{tj} representa la cantidad de mano de obra de la categoría t utilizada para un incremento unitario del nivel de producción del sector j.

Si $T_1, \ldots T_t, \ldots T_\lambda$, designan los efectivos disponibles de las diferentes categorías durante el periodo de planificación, diremos:

personas efectivamente empleadas $\leq$ personal disponible.

es decir:

$$\sum_{j=1}^{n} W_{tj}\ x_j \leq T_t \qquad \forall t \in \overline{1,\lambda}$$

de donde:

$$W \cdot x \leq T$$

Segunda Versión:

Supongamos que los efectivos calificados que se pueden formar sean $T'_1, \ldots T'_t, \ldots T'_{\lambda-1}$. entonces las restricciones anteriores se escriben:

$$\sum_{j=1}^{n} W_{tj}\ x_j - T'_t \leq 0 \qquad \forall t \in \overline{1,\lambda-1}$$

Si T_0 designa el efectivo total de la mano de obra disponible, entonces la restricción relativa a la mano de obra no calificada se escribe:

$$\sum_{j=1}^{n} W_{\lambda j} \quad x_j \leq T_0 \quad - \sum_{t=1}^{\lambda-1} \quad T_t'$$

Finalmente, a cada categoría de mano de obra le corresponde un costo f_t, equivalente a la inversión necesaria para formar un trabajador de esta categoría, de donde:

$$k\,x + f\,T' \leq K$$

donde:

$$f = (f_1, \ldots f_t, \ldots f_{\lambda-1}) \quad T' = (T_1', \ldots T_t', \ldots T_{\lambda-1}')^t$$

Se obtiene finalmente la tabla de restricciones (tabla 2.1) donde el vector de las variables se presenta arriba de los bloques matriciales correspondientes. En la tabla (2.1) se puede observar que ciertas variables deberán ser positivas o nulas y las restantes podrán tomar el valor que se desee. Por lo que es posible transformar nuestras expresiones para finalmente obtener un problema de la forma:

Máx $fx + gy$

s.a.

$Ax + By \leq h$

$x \geq 0$

y sin restricción de signo

el cual tiene la forma de los problemas típicos de programación lineal[1]. Es claro que cuando se desea planificar una economía se deberá formular un modelo que describa las restricciones existentes en ese sistema económico; las consideraciones anteriores pueden servir de guía para determinar el modelo que se utilizará, obsérvese que el planteamiento resulta ser un modelo de programación lineal lo cual no es siempre cierto, sin embargo para los fines del presente trabajo es conveniente considerarlo lineal, ya que los algoritmos que se presentarán sirven para resolver problemas de este tipo, claro está que no son los únicos, y en caso de no ser factible plantear el problema mediante un modelo de programación lineal podrán utilizarse otros algoritmos.

Restricciones sobre productos y comercio exterior:

$$
\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|}
\hline
\alpha & X & S_a & S_b & S_c & S_d \\
\hline
\multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{\geq 0} & \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{\geq 0} & \multicolumn{1}{c}{\geq 0}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|}
\hline
 & & I & & & \\
\hline
 & & & I & & \\
\hline
C & A-B & & & -I & \\
\hline
 & & & & & I \\
\hline
 & & & & & \\
\hline
\end{array}
\leq
\begin{array}{|c|}
\hline
\\
\\
P-G \\
\\
\\
\hline
\end{array}
\left.\begin{array}{c}
\Pi_a \\ \Pi_b \\ \Pi_c \\ \Pi_d \\ \Pi_e
\end{array}\right\}
\Pi = (\Pi_i) \quad i \in \overline{1,m}
$$

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|}
\hline
 & & & I & & & \\
\hline
 & & & & & I & \\
\hline
\end{array}
\leq
\begin{array}{|c|}
\hline
\overline{S}_b \\
\hline
\overline{S}_d \\
\hline
\end{array}
\begin{array}{l}
\sigma_b \\
\sigma_d
\end{array}
\left.\right\}
\begin{array}{l}
\sigma = (\sigma_i) \\
i \in \overline{m_{a+1}, m_b} \\
i \in \overline{m_{c+1} \cdot m_d}
\end{array}$$

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|}
\hline
 & & -r_a & -r_b & +r_c & -r_d \\
\hline
\end{array}
\leq
\begin{array}{|c|}
\hline
D \\
\hline
\end{array}
\ \delta$$

Restricciones sobre factores primarios:

Primera Versión:

$$\begin{array}{|c|}
\hline
x \\
\hline
\end{array}$$
≥ 0

$$\begin{array}{|c|}
\hline
W \\
\hline
k \\
\hline
\end{array}
\leq
\begin{array}{|c|}
\hline
T \\
\hline
K \\
\hline
\end{array}
\begin{array}{l}
\tau \\
\theta
\end{array}
\qquad \tau = (\ \tau_t\ )\ \overline{t \in 1, \lambda}$$

Segunda Versión:

$$\begin{array}{|c|c|c|c|}
\hline
x & T'_1 & \dots & T'_{-1} \\
\hline
\end{array}$$
≥ 0

$$\begin{array}{|c|c|c|c|}
\hline
W & \multicolumn{3}{c|}{-I} \\
\cline{2-4}
 & 1 & \dots & 1 \\
\hline
k & f_1 & \dots & f_{-1} \\
\hline
\end{array}
\leq
\begin{array}{|c|}
\hline
0 \\
\hline
T_0 \\
\hline
K \\
\hline
\end{array}
\begin{array}{l}
\tau \\
\tau_\lambda \\
\theta
\end{array}
\qquad \tau = (\ \tau_t\ )\ t \in \overline{1, \lambda\text{-}1}$$

Tabla 2.1

II.2 INTERPRETACION DE LAS RELACIONES DUALES Y COMPLEMENTARIAS.

Se pueden definir los precios duales[1] Π_i, como -- aquellos que indicarían los precios a los que se compran los factores de producción y los precios a los que se venden los productos. Pero esos resultados demandan una referencia con- los precios de mercado de la cual no disponemos. Por lo que- tan sólo se buscará una interpretación económica coherente - de las relaciones duales y complementarias que permita des - cribir en términos de precios las restricciones del modelo.- Esto se hará en base a la naturaleza de las relaciones primales a las cuales les son asociados los diversos precios -- duales.

En la tabla 2.1 aparecen al lado de cada bloque de restricciones, datos figurados; éstos son los vectores de pre - cios duales correspondientes, Así:

- a las restricciones relativas a los diferentes pro - ductos les son asociados los precios duales Π_i, - que serán los precios duales de los productos $i \in \overline{1,m}$
- a las restricciones que limitan las exportaciones, - les son asociados los precios duales σ_i. Más adelante se verá que los σ_i juegan el papel de variables - de desviación.

- a la restricción que limita el déficit exterior, se le asocia el precio dual δ ,que aparece por consiguiente como el precio dual de las divisas puestas a disposición del país. Se verá que efectivamente δ juega el papel de tasa de cambio dual.

- a las restricciones de mano de obra les son asociadas los precios duales τ_t, que serán los precios duales de las diferentes categorías de mano de obra. Se verá que con ellos se pueden determinar los salarios duales.

- a la restricción sobre la disponibilidad financiera, se le asocia el precio dual θ , que aparece por consiguiente como el precio dual de los capitales disponibles. Este juega en efecto el papel de una tasa dual de actualización.

Habiendo definido los precios duales, surge la pregunta de rigor, ¿ qué relación existe entre los precios duales y los valores que toman las variables de modelo ? o dicho de otra manera, ¿ qué relación existe entre un determinado estado de la economía y sus correspondientes variables duales o precios duales ?, antes de poder contestar alguna de ellas, es necesario examinar las diferentes relaciones duales y complementarias asociadas al tipo de problema de programación lineal que se planteó en la sección anterior. Supóngase que se tiene el siguiente problema:

$$\begin{aligned} &\text{Máx } fx + gy \\ &\text{s.a.} \\ &\quad Ax + By \leq h \\ &\quad x \geq 0 \\ &\quad y \text{ sin restricción de signo} \end{aligned}$$

Es lógico suponer que si el problema representa una economía nacional, este tenga solución factible óptima finita; bajo esta suposición y aplicando el teorema de dualidad se puede garantizar que el problema dual asociado también tiene solución factible óptima finita. Es decir, que existe un vector u tal que:

$$\text{i) } u \geq 0 \qquad (2.1)$$
$$\text{ii) } uA - f \geq 0 \qquad (2.2)$$
$$\text{iii) } uB - g = 0 \qquad (2.3)$$

El teorema de holguras complementarias dice que si $\hat{x}$, $\hat{y}$ y $\hat{u}$ son soluciones factibles óptimas de los problemas primal y dual respectivamente, entonces cumplen las siguientes relaciones:

$$\text{i) } \hat{u}(A\hat{x} + B\hat{y} - h) = 0 \qquad (2.4)$$
$$\text{ii) } (\hat{u}A - f)\hat{x} = 0 \qquad (2.5)$$

Cada una de las relaciones complementarias expresan -

la nulidad de un producto escalar. Así la relación (2.4) se puede transcribir:

$$\sum_{l} \hat{u}_l \quad (A_l\hat{x} + B_l\hat{y} - h_l) = 0$$

donde A_l. B_l y h_l designan al l-ésimo renglón de A, B y h respectivamente. Todos los productos en cuestión son a priori negativos o nulos ($\hat{u}_l \geq 0$ y $A_l\hat{x} + B_l\hat{y} - h_l \leq 0$ para todo l); por consiguiente, la ecuación se descompone en otro tanto de iguales a cero. Así:

$$\hat{u}_l \quad (A_l\hat{x} + B_l\hat{y} - h_l) = 0 \qquad \forall l$$

Asímismo la relación (2.5) se descompone en:

$$(\hat{u}A^l - f^l)\hat{x}_l = 0 \qquad \forall l$$

donde A^l y f^l designan la l-ésima columna de A y f respectivamente.

Finalmente, la nulidad de todos esos productos se utiliza para afirmar: que si uno de los dos términos es diferente de cero, entonces el otro de ser nulo. Así:

$$A_l\hat{x} + B_l\hat{y} < h_l \longrightarrow \hat{u}_l = 0$$

$$\hat{u}_l > 0 \longrightarrow A_l\hat{x} + B_l\hat{y} = h_l$$

$$\hat{u}A^1 - f^1 > 0 \longrightarrow \hat{x}_1 = 0$$

$$\hat{x}_1 > 0 \longrightarrow \hat{u}A^1 - f^1 = 0$$

Se verá que estas relaciones son meramente expresiones matemáticas de la ley económica de oferta y demanda. Las cuales podemos interpretar de la siguiente manera:

Si una de las restricciones del primer bloque de la tabla 2.1 (restricciones sobre productos) se cumple estrictamente, esto es si el producto correspondiente está en excedente, entonces se puede afirmar que su precio dual es nulo. Si por el contrario el precio dual de un producto es nulo, se puede afirmar que ese producto es totalmente utilizado en el óptimo. Lo mismo sucede para los factores: mano de obra, capital y divisas, la utilización incompleta trae la nulidad del precio dual correspondiente, y la no nulidad de ese precio ocasiona la utilización completa del factor correspondiente. Además, las variables σ_i para las cuales no teníamos dada su interpretación, serán positivas si las exportaciones correspondientes alcanzan sus cotas.

a) PRECIOS DUALES Y NIVELES DE CONSUMO

Considérese ahora la relación del tipo (2.5) relativa a la variable α :

$$(\Pi C - 1)\cdot\hat{\alpha} = 0$$

Obviamente la solución óptima implicará $\hat{\alpha} > 0$, ya - que en caso contrario indicaría que el consumo familiar disminuye o se mantiene igual, de donde:

$$\Pi C = 1$$

es decir:

$$\sum_{i=1}^{m} \Pi_i C_i = 1$$

contrariamente a lo que se piensa ordinariamente, esta relación no norma el sistema de precios duales. En efecto, podríamos obtener la misma solución óptima al doblar los diferentes precios duales Π_i, σ_i, δ_i, si se toma $C_i' = C_i/2 \ \forall i$ y- $' = 2$. Se obtiene así el mismo consumo de las familias - que anteriormente porque:

$$\hat{\alpha}' . C' = \hat{\alpha} . C$$

y todas las relaciones primales, duales y complementarias -- restantes se verifican.

b) PRECIOS DUALES Y CONDICIONES DE PRODUCCION

Consideremos ahora la relación (2.5) relativa al vector x

$$(\Pi(A-B) + r W + \theta k) \hat{x} = 0$$

además la relación (2.2) relativa al mismo vector se puede - escribir:

$$\Pi(A-B) \; + \; \tau W \; + \; \theta k \quad \geq \quad 0$$

descomponiendo la primera ecuación se obtiene:

$$\hat{x}_j \geq 0 \longrightarrow \underbrace{\underbrace{\sum_{i=1}^{m} \Pi_i A_{ij}}_{\substack{\text{costo de los}\\ \text{productos --}\\ \text{consumidos -}\\ \text{cuando } x_j=1}} + \underbrace{\sum_{t=1}^{\lambda} \tau_t W_{tj}}_{\substack{\text{costo dual -}\\ \text{de la mano -}\\ \text{de obra cuan}\\ \text{do } x_j=1}} \underbrace{+\theta k_j}_{\substack{\text{costo dual -}\\ \text{del capital-}\\ \text{invertido}}}}_{\text{costo dual de la producción}} = \underbrace{\underbrace{\sum_{i=1}^{m} \Pi_i B_{ij}}_{\substack{\text{precio dual}\\ \text{de la pro--}\\ \text{ducción ---}\\ \text{cuando } x_j=1}}}_{\substack{\text{precio dual}\\ \text{de la pro -}\\ \text{ducción.}}}$$

Por lo tanto, si en el óptimo una empresa debe incrementar su producción, entonces el costo dual de producción es - igual al precio dual de producción, lo que implicaría obte - ner una ganancia nula por ese incremento. Por otra parte:

$$\text{Si} \quad \sum_{i=1}^{m} \Pi_i A_{ij} \; + \; \sum_{t=1}^{\lambda} \tau_t W_{tj} \; + \theta\, k_j > \sum_{i=1}^{m} \Pi_i B_{ij} \longrightarrow \hat{x}_j \; = 0$$

Por consiguiente si el costo dual de producción es superior al precio dual de la producción, entonces la empresa -

tratará de mantener su nivel de producción sin incremento, ya que si aumentara su nivel de producción entonces obtendría -- una ganancia dual negativa, lo cual no le convendría a la --- empresa.

c) PRECIOS DUALES Y PRECIOS EXTERIORES

- Productos de la categoría a:

La relación (2.3) relativa al vector S_a de variables $s_i \quad i \in \overline{1, m_a}$ que son sin restricción de signo, se escriben:

$$\Pi a - \delta r_a = 0$$

descomponiéndola obtenemos:

$$\Pi_i = \delta r_i \qquad \forall i \in \overline{1, m_a} \qquad .$$

Por ser bienes importables y exportables sin limitaciones, el precio dual Π_i es igual al precio exterior r_i - multiplicado por la tasa de cambio dual δ (por la sucesión se nombra 'precio dual exterior' al producto δr_i). El modelo determina por consiguiente una tasa de cambio dual mediante la cual los precios internos se alinean con los precios exteriores, al menos para los productos para los cuales el comercio no tiene ninguna limitación.

- Productos de la categoría b:

Se obtiene como en el caso anterior, la relación relativa al vector S_b de variables s_i $i \in \overline{m_{a+1}, m_b}$, ésta es:

$$\Pi_i + \sigma_i = \delta r_i \qquad \forall i \in \overline{m_{a+1}, m_b}$$

donde intervienen las variables σ_i y a las cuales les podemos dar un tratamiento mediante la relación (2.4) relativa al vector σ_b:

$$\sigma_b (\hat{S}_b - \bar{S}_b) = 0$$

es decir

$$\sigma_i (\hat{s}_i - \bar{s}_i) = 0 \qquad \forall i \in \overline{m_{a+1}, m_b}$$

de aquí se deduce:

$$\text{Si} \quad \hat{s}_i < \bar{s}_i \longrightarrow \sigma_i = 0 \longrightarrow \Pi_i = \delta r_i \qquad \forall i \in \overline{m_{a+1}, m_b}$$

$$\text{Si} \quad \Pi_i < \delta r_i \longrightarrow \sigma_i > 0 \longrightarrow \hat{s}_i = \bar{s}_i$$

Así, por ser bienes importables y con exportaciones limitadas:

- Si las exportaciones no alcanzan el límite establecido, el precio dual del bien es igual al precio dual exterior.

- Si el precio dual de un bien es inferior al precio dual exterior del mismo, entonces el bien se deberâ exportar al máximo.

En vista de que la variable σ_i juega el papel de -- una variable de desviación entre el precio dual exterior y - el precio dual, ésta representa una ganancia obtenida al exportar, dada la desviación del precio en cuestión.

- Productos de la categoría c:

La relación dual relativa al vector S_c es del tipo - (2.2) ya que $s_i \geqslant 0 \quad \forall i \in \overline{m_{b+1}, m_c}$, de aquí que:

$$- \Pi_c + \delta r_c \geq 0$$

es decir:

$$- \Pi_i + \delta r_i \geqslant 0 \qquad \forall i \in \overline{m_{b+1}, m_c}$$

y la relación (2.5) relativa al vector $\hat{S}_c$ se escribe:

$$(- \Pi_c + \delta r_c) \hat{S}_c = 0$$

por consiguiente:

$$\hat{s}_i (\delta r_i - \Pi_i) = 0 \qquad \forall i \in \overline{m_{b+1}, m_c}$$

de aquí se deduce:

$$\text{Si} \quad \hat{s}_i > 0 \longrightarrow r_i = \Pi_i$$

$$\text{Si} \quad \Pi_i < \delta r_i \longrightarrow \hat{s}_i = 0$$

por ser bienes importables y no exportables podemos decir:

- Si se importa, entonces el precio dual es igual al precio dual exterior.
- Si el precio dual es inferior al precio dual exterior entonces no se deberá importar el bien.
- Productos de la categoría d

  Al igual que en los casos anteriores se obtiene:

$$\text{i)} \quad \Pi_d + \sigma_d - r_d \geq 0$$

entonces:

$$\Pi_i + \sigma_i \geq \delta r_i \qquad \forall i \in \overline{m_{c+1}, m_d}$$

$$\text{ii)} \quad (\Pi_d + \sigma_d - \delta r_d)\, \hat{S}_d = 0$$

entonces:

$$(\Pi_i + \sigma_i - \delta r_i)\, \hat{s}_i = 0 \qquad \forall i \in \overline{m_{c+1}, m_d}$$

$$\text{iii)} \quad \sigma_d\, (\hat{S}_d - \bar{S}_d) = 0$$

entonces:

$$\sigma_i \, (\hat{s}_i - \overline{s}_i) = 0 \qquad \forall i \in \overline{m_{c+1}, m_d}$$

de donde:

I Supongamos $\hat{s}_i > 0$ y $\sigma_i > 0$ de aquí se deduce:

$$\left.\begin{array}{r} \sigma_i > 0 \\ \hat{s}_i > 0 \longrightarrow \Pi_i + \sigma_i = \delta r_i \end{array}\right\} \longrightarrow \begin{array}{l} \hat{s}_i = \overline{s}_i \\ \Pi_i < \delta r_i \end{array}$$

II Supongamos $\hat{s}_i > 0$ y $\hat{s}_i - \overline{s}_i < 0$, de aquí se deduce:

$$\left.\begin{array}{r} \hat{s}_i > 0 \longrightarrow \Pi_i + \sigma_i = \delta r_i \\ \hat{s}_i - \overline{s}_i > 0 \longrightarrow \sigma_i = 0 \end{array}\right\} \longrightarrow \Pi_i = \delta r_i .$$

III Supongamos $\Pi_i + \sigma_i - \delta r_i > 0$ y $\hat{s}_i - \overline{s}_i > 0$

$$\left.\begin{array}{r} \hat{s}_i - \overline{s}_i > 0 \longrightarrow \sigma_i = 0 \\ \Pi_i + \sigma_i - \delta r_i > 0 \end{array}\right\} \longrightarrow \begin{array}{l} \Pi_i > \delta r_i \\ \hat{s}_i = 0 \end{array}$$

Para ser bienes no importables y con exportaciones limitadas:

- Si el precio dual es inferior al precio dual exterior, se exporta al máximo.

- Si se exporta pero sin alcanzar la cota, el precio dual es igual al precio dual exterior.
- Si el precio dual es superior al precio dual exterior, no se exporta.

Las variables σ_i representan la ganancia obtenida al exportar, al menos si los límites de exportación $\overline{s}_i$ son alcanzados.

d) PRECIOS DUALES DE LA MANO DE OBRA:

En la primera versión, a cada categoría de mano de obra le es asociado un precio dual nulo o positivo, dependiendo de si los efectivos disponibles son parcial o totalmente utilizados.

En la segunda versión, la relación (2.2) relativa a las variables $T'_t \quad t \in \overline{1, \lambda -1}$ se escribe:

$$- \tau_t + \tau_\lambda + \theta f_t \geq 0$$

y la relación (2.5) relativa a la variable $\hat{T}'_t$ se escribe:

$$(- \tau_t + \tau_\lambda + \theta f_t) \hat{T}'_t = 0$$

de donde:

$$\hat{T}'_t > 0 \longrightarrow \tau_t = \tau_\lambda + \theta f_t \qquad \forall t \in \overline{1, \quad \lambda-1}$$

$$\tau_t < \tau_\lambda + \theta f_t \longrightarrow \hat{T}'_t = 0$$

Esto nos indica que cada categoría de mano de obra-calificada para la cual el óptimo requiere una formación de efectivos a un precio dual mayor al precio dual de la mano-de obra no calificada mejora el interés que se sostiene sobre el costo de formación. El costo de formación es una clase de capital agregado por los individuos, que es retribuido por la tasa de interés dual θ. Ordinariamente, los - precios duales de la mano de obra se interpretan como los - salarios duales. Es evidente que los salarios duales relativos a las categorías de mano de obra calificada ($t \in \overline{1, \lambda-1}$) serán no nulos si esas categorías son verdaderamente utilizadas y si la tasa dual es no nula, éste será en general el caso. Por el contrario, casi cualquier sistema se enfrenta-al subempleo de la mano de obra no calificada, por consi -- guiente el salario dual correspondiente se nulifica.

e) DUALIDAD Y LA REPARTICION DE LAS RENTAS

Consideremos la relación complementaria (2.4) relativa al vector $\hat{x}$, ésta se escribe:

$$(\Pi(A-B) + \tau W + \theta k)\,\hat{x} = 0$$

es decir:

$$\Pi(B-A)x = \ast Wx + \theta k\hat{x} \qquad (2.6)$$

ésta describe la repartición de riqueza disponible entre remu neración del trabajo y remuneración del capital. Para entender mejor lo anterior considérese la relación (2.4) relativa al vector Π :

$$\Pi(\hat{\alpha}\cdot C + (A-B)\hat{x}) + \Pi(EXP_t - IMP_t) - \Pi(P-G) = 0$$

es decir:

$$\Pi(B-A)\hat{x} = \Pi\hat{\alpha}C + \Pi(EXP_t - IMP_t) + \Pi(G-P)$$

sustituyendo el valor de G-P obtenemos:

$$\Pi(B-A)\hat{x} = \Pi\hat{\alpha}C + \Pi(EXP_t - IMP_t) + \Pi(C_0+CP_t+I_t-Y_0+CI_0)$$

supongamos que la relación de equilibrio correspondiente al año cero se cumple con la igualdad estricta, es decir:

$$C_0 + CP_0 + I_0 + CI_0 + EXP_0 = Y_0 + IMP_0$$

es decir:

$$C_0 + CI_0 - Y_0 = IMP_0 - CP_0 - I_0 - EXP_0$$

sustituyendo obtenemos:

$$\Pi(B-A)\hat{x} = \Pi\hat{\alpha}C + \Pi(EXP_t - IMP_t) + \Pi(CP_t + I_t + IMP_O - CP_O - I_O - EXP_O)$$

de donde:

$$\Pi(B-A)\hat{x} = \Pi\hat{\alpha}C + \Pi\Delta EXP - \Pi\Delta IMP + \Pi\Delta CP + \Pi\Delta I \quad (2.7)$$

donde:

$$\Delta EXP = EXP_t - EXP_O \qquad \Delta IMP = IMP_t - IMP_O$$

$$\Delta CP = CP_t - CP_O \qquad \Delta I = I_t - I_O$$

esta ecuación calcula la distribución de los bienes disponibles. Al escribir la igualdad de los segundos miembros de las expresiones (2.7) y (2.6) se obtiene:

$$W\hat{x} + \theta k\hat{x} = \Pi\hat{\alpha}C + \Pi\Delta EXP - \Pi\Delta IMP + \Pi\Delta CP + \Pi\Delta I \quad (2.8)$$

esta expresión nos indica cómo es que se distribuyen las remuneraciones de trabajo y capital entre los diferentes tipos de consumo. Pero los términos relativos a los cambios en el exterior demandan un análisis, que a continuación se realiza:

$$\Pi\Delta EXP - \Pi\Delta IMP = \Pi(EXP_t - IMP_t) - \Pi(EXP_O - IMP_O).$$

el primer término del segundo miembro puede ser expresado bajo la forma:

$$\Pi(EXP_t - IMP_t) = \Pi_a \hat{S}_a + \Pi_b \hat{S}_b - \Pi_c \hat{S}_c + \Pi_d \hat{S}_d$$

al utilizar las relaciones complementarias relativas a los vectores $\hat{S}_a$, $\hat{S}_b$, $\hat{S}_c$ y $\hat{S}_d$ se obtiene:

$$\Pi(EXP_t - IMP_t) = \delta r_a \hat{S}_a + \delta r_b \hat{S}_b - \sigma_b \hat{S}_b - \delta r_c \hat{S}_c + \delta r_d \hat{S}_d - \sigma_d \hat{S}_d$$

utilizando también las relaciones complementarias relativas a las limitaciones de exportación y a la desigualdad del déficit exterior, esto es:

$$\delta(-r_a \hat{S}_a - r_b \hat{S}_b + r_c \hat{S}_c - r_d \hat{S}_d - D) = 0$$

entonces:

$$\delta r_a \hat{S}_a + \delta r_b \hat{S}_b - \delta r_c \hat{S}_c + \delta r_d \hat{S}_d = -\delta D$$

por consiguiente:

$$\Pi(EXP_t - IMP_t) = -\delta D - \sigma_b \hat{S}_b - \sigma_d \hat{S}_d$$

finalmente la ecuación (2.8) puede escribirse:

$$\tau W\hat{x} + \theta k\hat{x} + \delta D + \sigma_b \hat{S}_b + \sigma_d \hat{S}_d + \Pi(EXP_0 - IMP_0) = \Pi \hat{\alpha} C' + \Pi \Delta C + \Pi \Delta I$$

por consiguiente, además de las remuneraciones del trabajo y del capital existen otras fuentes de riqueza. El término D - es la ayuda de la cual dispone el Estado. Los términos $\sigma_b \hat{S}_b$- y $\sigma_d \hat{S}_d$ designan las ganancias obtenidas por las exportaciones realizadas si éstas alcanzan sus cotas. Finalmente el -- término $\pi(EXP_0 - IMP_0)$ viene a corregir éste resultado en base al año inicial 0.

La remuneración del trabajo va a estar principalmente empleada en el financiamiento del consumo de las familias, pero también una parte se destinará al ahorro y otra quedará en manos del Estado. en forma de impuestos. Así mismo la remuneración del capital y las ganancias obtenidas por las exportaciones servirá para financiar el ahorro, pero aún más a los consumos públicos y familiares. Finalmente la ayuda exterior y los impuestos permitirán al Estado financiar el consumo público, pero también una parte del consumo familiar y el ahorro mediante ayudas sociales o subsidios.

II.3 COMPETENCIA IMPERFECTA: GANANCIAS DUALES NO NULAS

Supongamos que el Estado va a impedir que el nivel de actividad de cierta empresa j quede por debajo de cierto nivel mínimo m_j. Las motivaciones para tomar una actitud así pueden ser diversas: política de independencia nacional en ciertos sectores claves, defensa del empleo, servicios públicos indispensables para las clases sociales más desfavorecidas. Para lograrlo, es necesario introducir un nuevo bloque de restricciones.

$$x_j \geq m_j \qquad \forall j \in \overline{i,\, n}$$

a la cual se le asocia un precio dual u_j (daremos por hecho que $\hat{x}_j > 0$ si $m_j > 0$). Por consiguiente la relación complementaria (2.4) relativa a $\hat{x}_j$ se escribe:

$$\sum_i \Pi_i A_{ij} + \sum_t \tau_t W_{tj} + \theta k_j = \sum_i \Pi_i B_{ij} + u_j$$

se ve ahora que el precio dual de la producción no alcanza a pagar los costos de producción. En efecto, la igualdad de los ingresos y gastos de la empresa j necesitará una percepción adicional igual a u_j. Este nuevo precio dual aparece por lo tanto como un subsidio que deberá ser otorgado por el Estado para que el nivel de la actividad de la empresa j no quede por debajo de m_j. Es evidente que si $x_j = m_j$ entonces no será necesario dicho subsidio y por lo tanto $u_j=0$

Supongamos ahora que por monopolio o política interna de la empresa j, se decida mantener el nivel de actividad de la empresa j inferior a M_j, es decir;

$$x_j \leq M_j \qquad \forall j \in \overline{i, n}$$

a esta desigualdad se le asocia un precio dual v_j. La relación complementaria (2.4) relativa a $\hat{x}_j$ se escribe:

$$\sum_i \Pi_i A_{ij} + \sum_t \tau_t W_{tj} + \theta k_j + v_j = \sum_i \Pi_i B_{ij}$$

es decir que si el valor dual de la producción excede del -- costo dual de la misma, existirá una ganancia dual positiva- y será precisamente igual a v_j. Es evidente que si $x_j = M_j$ entonces dicha ganancia se nulificará, es decir $v_j = 0$

II.4 LA NULIDAD DE LOS PRECIOS DUALES EN EL CASO DE LA UTILIZACION INCOMPELTA DE LOS INPUTS.

La principal dificultad que encontramos para la aplicación de la dualidad' es la grave y frecuente nulidad del precio dual de la mano de obra no calificada y por consiguiente el salario dual asociado a la misma. Pero la dualidad misma nos sugiere una solución radical: dar un mismo salario a todos los trabajadores, el cual estará subsidiado por el Estado, aparte del salario dual. Entonces el salario de la mano de obra calificada será igual al salario dual más el subsidio dado por el Estado. Pero es lógico imaginar que gran parte - de ese subsidio será acaparado por las empresas, así como también se puede imaginar que algunas categorías de mano de obra estarán sobrepagadas. Sin embargo, el Estado tiene armas para contrarrestar cualquiera de las situaciones anteriores, las - más frecuentes están dadas en forma de impuestos.

Hemos conseguido dar una visión genérica de las relaciones existentes entre el estado de una economía y los precios duales asociados, lo cual nos servirá para determinar en qué momento, aún sin haber llegado al óptimo, es conveniente parar cualquiera de los algoritmos que se utilicen para resolver el problema de planificación descentralizada, y será precisamente cuando todas las relaciones anteriores aunque no - se cumplan estrictamente, al menos no se aleje de lo que debería suceder en el óptimo.

N O T A S

1 El apéndice B está dedicado a resumir algunos resultados de programación lineal y de teoría de dualidad por lo - que para cualquier aclaración al respecto deberá consultarse el mismo.

C A P I T U L O III

PROCEDIMIENTO DE PLANIFICACION GUIADO POR PRECIOS:

EL PROCEDIMIENTO DE MALINVAUD

III.1 OBSERVACIONES GENERALES

El estudio de los procedimientos descentralizados es un tema relativamente reciente en la literatura económica. - Sin embargo las premisas se remontan a Walras con el concepto de tanteo. Se puede considerar que los precusores son: -- Taylor (1924); después Lange (1936); éste último fue el donador de las descripciones relativamente precisas de los procedimientos descentralizados. Los primeros procedimientos -- verdaderamente formales son publicados y presentados en los- años 60's. El algoritmo de Dantzig y Wolfe presentado en -- 1958 a la RAND CORPORATION y publicado en 1961, el procedimiento de tanteo de Arrow, Hurwicz, Uzawa publicado en 1960. Aparecen enseguida los procedimientos de Kornai y Lipták -- (1965) y de Malinvaud (1967).

El algoritmo de Dantzig y Wolfe (algoritmo de des -- composición para problemas lineales) es el primero y el más- célebre de los algoritmos de descomposición. Posteriormente, Malinvaud realizó una generalización de este algoritmo[1], y - así propone un procedimiento para resolver el problema de -- planificación descentralizada, al cual se le conoce con el - nombre de su autor 'Procedimiento de Malinvaud'. En el presente capítulo nos abocaremos al estudio de este último procedimiento.

El procedimiento de Malinvaud[2] tiene una característica que lo enriquece notablemente y es el hecho de que la decisión a ser tomada en cualquier etapa no depende sólo de la información recibida en ella, sino de todo el cúmulo de informaciones recibidas en las etapas anteriores. Esto es, la decisión no se tomará solamente en base a las últimas proposiciones hechas por las empresas, sino además, tomando en cuenta las anteriores. Este hecho tiene una gran importancia, ya que cada proposición más que haga un sector o empresa nos permite ir visualizando en forma más exacta las características estructurales de ésta, y por lo tanto, tener un mejor elemento de juicio en la toma de decisiones. Muchos consideran esta característica como una desventaja, puesto que la cantidad de información que el centro debe retener puede llegar a ser inmensa. No obstante, es indudablemente cierto que el procedimiento tiene una serie de aspectos muy atractivos, que serán analizados posteriormente.

Antes de presentar el funcionamiento del algoritmo, es conveniente explicitar las hipótesis necesarias para el buen funcionamiento del procedimiento de Malinvaud.

Hipótesis 1: Los conjuntos de producción Y_k son cerrados, convexos y acotados[3] $Y_k \subseteq \mathbb{R}^m$ $\forall k \in \overline{1,n}$ (se tienen n empresas o sectores y m bienes).

Hipótesis 2: La función objetivo del planificador U(x) es continua y cóncava.[3]

Hipótesis 3: El conjunto X es cerrado, convexo y acotado inferiormente.

Hipótesis 4: La oficina de planificación conoce un plan de producción factible, es decir para cada empresa conoce y_k^o tal que $y_k^o \in Y_k \quad \forall k \in \overline{1,n}$

El primer supuesto juega un papel esencial en este procedimiento, ya que si las proposiciones recibidas en cada etapa por parte de las empresas constituyeran elementos del conjunto Y_k, esto nos permitiría ir visualizando en forma creciente las características de este conjunto (que es convexo) a través de las combinaciones lineales convexas de dichas proposiciones.

Supongamos que la información que envían las empresas a la oficina de planificación estuviera constituida por elementos del conjunto Y_k. Entonces después de t-1 etapas la oficina de planificación conoce t-1 puntos del conjunto de posibilidades de producción (Y_k) de cada una de las empresas de la economía; y si suponemos que se cumplen las hipótesis 1 y 4, entonces en cada etapa del procedimiento de planificación, la oficina de planificación conoce una aproximación al conjunto de posibilidades de producción de cada una de --

las empresas. En particular, en la etapa t, dicha aproxima - ción estará dada por el conjunto de todas las combinaciones- convexas de los t puntos conocidos. Si llamamos Y_k^t a la - - aproximación al conjunto Y_k en la t-ésima estapa entonces -- Y_k^t está definido por la siguiente expresión:

$$Y_k^t = \left\{ y_k \;\middle|\; y_k = \sum_{r=0}^{t-1} \lambda_k^r \, y_k^r \quad ; \quad \lambda_k^r \geq 0 \quad ; \quad \sum_{r=0}^{t-1} \lambda_k^r = 1 \right\}$$

es decir y_k^t estará formado por todas las combinaciones con - vexas de los puntos y_k^r para todo $r \in \overline{0,t-1}$

III.-2 DESCRIPCION DEL PROCEDIMIENTO

Examinaremos primero la estructura del procedimiento, para pasar posteriormente al estudio de sus propiedades referentes a la optimalidad del equilibrio, la convergencia del procedimiento, etc.

En el capítulo I vimos que para resolver el problema de planificación descentralizada, bastaba con resolver el problema de programación matemática definido como:

$$
\begin{aligned}
&\text{Máx } U(x) \\
&\text{s.a.} \\
&\qquad x - \sum_{k=1}^{n} y_k \leq w \\
&\qquad x \in X \qquad\qquad\qquad\qquad (3.1) \\
&\qquad y_k \in Y_k \quad \forall k \in \overline{1,n}
\end{aligned}
$$

donde:

$x=(x_i)$ $i \in \overline{1,m}$ es el vector columna de consumo final.

$y_k=(y_{ik})$ $i \in \overline{1,m}$ es el vector columna de producción neta de la empresa k (+optputs - inputs)

$w=(w_i)$ $i \in \overline{1,m}$ es el vector columna de recursos iniciales.

$U(x)$ es la función objetivo o función de utilidad colectiva.

X es el conjunto de consumos aceptables

Y_k es el conjunto de posibilidades de producción de la empresa k.

También vimos que la oficina de planificación no está capacitada para resolver este problema ella sola, ya que no conoce los conjuntos de producción (Y_k). Sin embargo, en la t-ésima etapa conoce una aproximación a dichos conjuntos, esta es Y_k^t, y por consiguiente podría resolver el siguiente problema:

$$
\begin{aligned}
&\text{Máx } U(x) \\
&\text{s.a.} \\
&\qquad x - \sum_{k=1}^{n} y_k \leq w \\
&\qquad x \in X \qquad\qquad\qquad\qquad (3.2) \\
&\qquad y_k \in Y_k^t \qquad \forall k \in \overline{1, n}
\end{aligned}
$$

Resuleve pues, un problema que tiene la misma forma que el problema global de planificación (3.1) pero que se diferencía de éste en que se sustituye la restricción $y_k \in Y_k$

por el requisito de que y_k pertenezca al subconjunto de Y_k^t -- conocido por el centro en la etapa correspondiente, es decir, $y_k \in Y_k^t$. Como el centro elabora aproximaciones cada vez más- exactas de los conjuntos Y_k, la solución del problema (3.2) - se aproxima a la solución del problema global de planifica -- ción (3.1), es decir tiende hacia el plan óptimo. Es eviden - te que si el centro tuviese que conocer con exactitud el con- junto de posibilidades de producción Y_k de cada una de las - empresas, de tal forma que para algún t, $Y_k^t = Y_k$, antes de - que la solución de (3.2) coincidiera con la de (3.1) perde -- rían valor todas las virtudes inherentes a la descentraliza - ción.

En realidad, una de las características más intere - santes de este procedimiento es que el centro no requiere co nocer toda la información relativa a los conjuntos Y_k, para - que la solución de (3.2) coincida con la de (3.1). En efecto, la solución de (3.2) será igual a la de (3.1) si el centro co noce la forma de cada Y_k en un entorno del plan de producción que forma parte del plan óptimo. El artificio que permite al- centro concentrar su información en las regiones estratégicas de Y_k, reside en la información (índices prospectivos) que - les enviará a cada una de las empresas.

En la etapa t la oficina de planificación resuelve - el problema (3.2), obteniendo así $\overline{x}^t$ y $\overline{y}_k^t$. Como se trata - de un problema de maximización condicionada, su solución, --

además de proporcionar un plan óptimo que cumple con las restricciones de (3.2), proporciona un vector (1xm) de multiplicadores de Lagrange o precios sombra (P^t) que sabemos que cumplen con las siguientes cuatro condiciones:[4]

i) $P^t x > P^t \bar{x}^t$ para todo $x \in X$ tal que $U(x) > U(\bar{x}^t)$

ii) $P^t y_k \leq P^t \bar{y}_k^t$ para todo $y_k \in Y_k^t$ y para todo $k \in \overline{1,n}$

iii) $P^t \left(x^t - \sum_{k=1}^{n} \bar{y}_k^t\right) = P^t w$ (3.3)

iv) $P^t \geqslant 0$

este vector de precios puede ser normalizado multiplicando P^t por el escalar α :

$$\alpha = 1 \Big/ \sum_{i=1}^{m} P_i^t$$

entonces se puede definir el nuevo vector de precios $\bar{P}^t$:

$$\bar{P}^t = P^t \Big/ \sum_{i=1}^{m} P_i^t$$

donde $\bar{P}^t$ cumple las siguientes condiciones:

$\bar{P}^t x > \bar{P}^t \bar{x}^t$ para todo $x \in X$ tal que $U(x) > U(\bar{x}^t)$ (3.4)

$\bar{P}^t y_k \leq \bar{P}^t \bar{y}_k^t$ para todo $y_k \in Y_k^t$ y para todo $k \in \overline{1,n}$ (3.5)

$$w_i + \sum_{k=1}^{n} \bar{y}_{ik}^{t} - \bar{x}_i^t > 0 \longrightarrow \bar{p}_i^t = 0 \qquad (3.6)$$

$$\bar{p}_i^t > 0 \longrightarrow w_i + \sum_{k=1}^{n} \bar{y}_{ik}^{t} - \bar{x}_i^t = 0 \qquad (3.7)$$

$$\bar{p}_i^t \geqslant 0 \qquad \forall i \in \overline{1,m} \qquad (3.8)$$

$$\sum_{i=1}^{m} \bar{p}^t = 1 \qquad (3.9)$$

La interpretación de las condiciones es la siguiente, la condición (3.4) simplemente nos dice que a cualquier nivel de utilidad mayor está sociado un nivel de gasto mayor que el asociado al consumo óptimo. La condición (3.5) establece que el programa de producción $\bar{y}_k^t$ al ser valorado con los precios $\bar{p}^t$ constituye el programa óptimo para la tecnología implícita en el conjunto Y_k^t. Las relaciones (3.6) y (3.7) establecen la condición de exclusión: sólo existirán precios positivos para aquellos artículos cuya demanda iguale a la oferta, en cambio si la oferta es mayor que la demanda el precio será nulo. La condición (3.8) tan sólo indica que el precio de cualquier artículo no podrá ser negativo. Por último la condición (3.9) muestra que el vector $\bar{p}^t$ ha sido normalizado.

Conocido este vector de precios, la oficina de planificación lo envía a todas y cada una de las empresas, las cuales deberán maximizar sus ganancias de acuerdo a los precios $\bar{p}^t$. Para lograrlo, la empresa k en la etapa t deberá resol -

ver el siguiente problema de maximización condicionada:

$$\begin{aligned} &\text{Máx } \bar{p}^t y_k \\ &\text{s.a.} \qquad\qquad\qquad\qquad (3.10) \\ &\qquad y_k \in Y_k \end{aligned}$$

obteniendo así, y_k^t. Este es un nuevo punto del conjunto de posibilidades de producción (Y_k). Cada empresa le enviará - su respectivo programa de producción a la oficina de planificación; la cual se encuentra en la posibilidad de construir una mejor aproximación del conjunto de posibilidades de producción de cada una de las empresas (Y_k^{t+1}) y en base a esta- mejor aproximación repetir el procedimiento.

Es evidente que para dar inicio al procedimiento se- requiere contar con un plan de producción factible y_k^o (hipótesis 4), para así poder construir Y_k^1 e iniciar el procedimiento.

Podemos además observar que si en la etapa t el va-- lor de las proposiciones productivas obtenidas por cada empresa coincide con el valor de la producción asociada al programa matemático central, eso significará el haber llegado a la- etapa óptima, estamos pues en condiciones de definir la regla de alto.

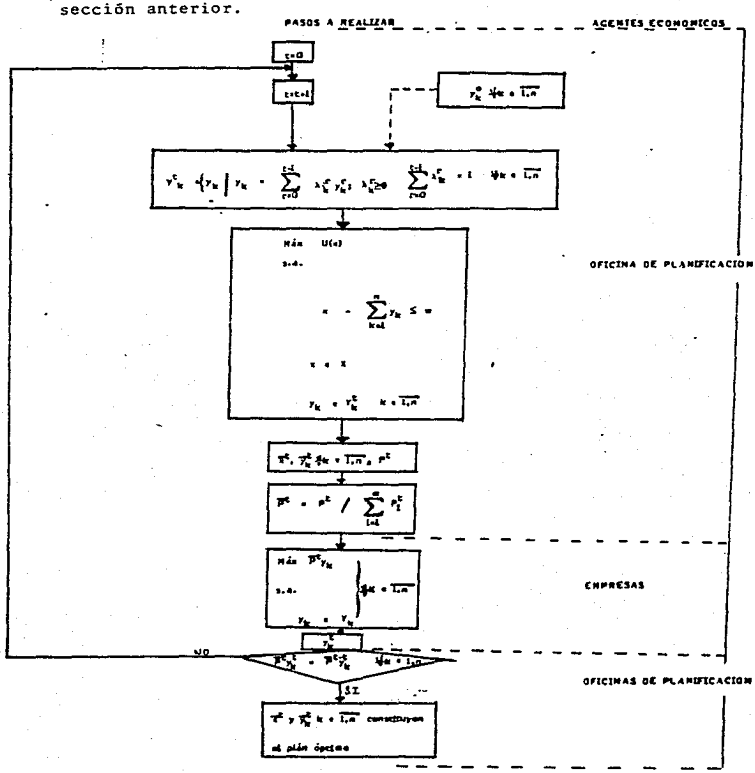
Regla de alto: El procedimiento se detiene cuando se encuentra una etapa t para la cual se cumple:

$$\bar{p}^t y_k^t = \bar{p}^t \bar{y}_k^t \qquad \forall k \in \overline{1,n}$$

La regla de alto se puede interpretar de la siguiente manera: la igualdad significa que la empresa k obtiene la misma utilidad al llevar a cabo el plan $\bar{y}_k^t$ o el plan y_k^t, por lo que estaría dispuesta a realizar $\bar{y}_k^t$ en vez de y_k^t con la finalidad de cumplir los objetivos de producción de la oficina de planificación sin sacrificar sus ganancias. La demostración formal de la regla de alto se realiza en secciones subsecuentes.

3.3 DIAGRAMA DE FLUJO

En esta sección tan sólo mostraremos el diagrama de flujo asociado al procedimiento de Malinvaud, que fue presentado en la sección anterior.



III.4 PROPIEDADES DEL PROCEDIMIENTO

En el capítulo I se enunciaron las denominadas propiedades de Malinvaud, ahora se verá cuales de éstas cumple el procedimiento de Malinvaud.

a) Procedimiento bien definido:

Por una parte, el cálculo de las empresas para determinar las proposiciones que enviarán a la oficina de planificación, siempre tiene solución ya que los conjuntos Y_k son compactos y no vacíos ($y_k^o \in Y_k \quad \forall k \in \overline{1,n}$) por lo tanto siempre existe el máximo para $\overline{P}^t y_k$ en Y_k.

A nivel de la oficina de planificación es necesario resolver un problema de programación matemática de la forma:

$$\begin{array}{l} \text{Máx} \quad U(x) \\ \text{s.a.} \\ \qquad x \in F^t = X \cap T^t \end{array} \qquad (3.11)$$

donde $T^t = \left\{ x \mid \exists\, y_k \in Y_k^t \quad \forall k \in \overline{1,n} \text{ tal que } x - \sum_{k=1}^{n} y_k \leq w \right\}$

El conjunto F^t, dadas las hipótesis planteadas, cumple con ser compacto y convexo; ya que si todos los Y_k son compactos y convexos, los Y_k^t también tendrán esa propie dad por su construcción, por lo tanto los conjuntos T^t serán compactos ya que son subconjuntos de los Y_k ; por hipótesis, X es cerrado y convexo, por lo tanto $X \cap T^t$ cumplirá con lo- postulado (F^t es compacto y convexo).

Además U(x) al estar definida en X, cumplirá con estarlo en F^t (pues $F^t \subset X$). Finalmente, bastaría aceptar que la intersección de X con T^t es no vacía para que exista solución óptima para (3.11). Esto es posible ya que los y_k^o $\forall k \in \overline{1,n}$ seguramente corresponderán a un periodo base y se puede esperar que el x^o correspondiente haya sido aceptable ($x^o \in X$) por lo que la intersección de X y T^t sería no vacía en todas las etapas.

Por último, dado que (3.11) tiene solución óptima, - U (x) es cóncava y que F^t es convexo $\forall t$, estará asociado a - la solución óptima un vector de multiplicadores de Lagrange- P^t tal que $\sum_{i=1}^{m} P_i^t > 0$; por consiguiente, existe un vector - de precios $\bar{P}^t$ que satisface (3.4), (3.5),...(3.8) y (3.9)

b) Procedimiento estrictamente bien definido:

Sólo puede ser garantizado el cumplimiento de esta - propiedad, si todos los conjuntos Y_k son estrictamente con - vexos, condición que no necesariamente se cumple ya que en - la hipótesis 1 solamente se pide que todos los conjuntos Y_k- sean convexos.

c) Procedimiento factible:

No se requiere mucho esfuerzo para demostrar que se cumple la propiedad de factibilidad. Por la construcción de los conjuntos Y_k^t, todo plan que satisfaga las restricciones:

$$x - \sum_{k=1}^{n} y_k \leq w$$

$$x \in X$$

$$y_k \in Y_k^t \quad \forall k \in \overline{1,n}$$

también satisface, necesariamente, las restricciones globales.

$$x - \sum_{k=1}^{n} y_k \leq w$$

$$x \in X$$

$$y_k \in Y_k \quad \forall k \in \overline{1,\ n}$$

por lo que es un plan factible. Por construcción, el plan propuesto en la t-ésima etapa ($\overline{x}^t$, $\overline{y}_k^t$ $\forall k \in \overline{1,n}$) satisface el primer bloque de restricciones, entonces también cumple el segundo bloque de restricciones y, por consiguiente, es un plan factible. Naturalmente, este resultado depende crucialmente del supuesto de que los conjuntos Y_k son convexos. Si-este supuesto no es cierto. puede suceder que Y_k^t no esté contenido en Y_k, y por lo tanto, el argumento anterior no sería válido.

d) Procedimiento monótono:

Para probar que el proceso de Malinvaud es monótono- basta con observar que en cada etapa aumenta el conocimiento de los conjuntos de producción de las empresas por parte del centro, o por lo menos no disminuye. En efecto. en la etapa- t todas las alternativas disponibles en las etapas 1,2,3,.... t-1 siguen estando disponibles. por lo que es evidente que - el centro podrá encontrar un plan por lo menos tan bueno como los propuestos en las etapas anteriores. Para formalizar- esta idea, considere los dos problemas siguientes:

$$\begin{aligned}
&\text{Máx } U(x)\\
&\text{s.a.}\\
&\qquad x - \sum_{k=1}^{n} y_k \leqq w\\
&\qquad x \in X\\
&\qquad y_k \in Y_k^{t-1} \quad \forall k \in \overline{1,n}
\end{aligned}$$

$$\text{Máx } U(x)$$
$$\text{s.a.}$$
$$x - \sum_{k=1}^{n} y_k \leq w$$
$$x \in X$$
$$y_k \in Y_k^t \qquad \forall k \in \overline{1,n}$$

Para todo k, Y_k^t contiene a Y_k^{t-1}. Por lo tanto cualquier plan que satisfaga las restricciones del primer problema satisfará también las del segundo. La afirmación contraria no es necesariamente cierta. De ello es tautológico que todo valor de la función objetivo alcanzable en el primer problema es también alcanzable en el segundo y que pueden existir valores de la función objetivo alcanzables en el segundo problema que no lo sean en el primero. De este modo, si $\bar{x}^{t-1}$ es la solución del primer problema y $\bar{x}^t$ es la solución del segundo, se cumplirá:

$$U(\bar{x}^t) \geq U(\bar{x}^{t-1})$$

Como pone de relieve el argumento que se acaba de realizar, la propiedad de monotonía se cumple siempre. Tenemos por lo tanto monotonía respecto a la función objetivo, lo que, acompañado al hecho de que en cada etapa se determina un plan factible, favorece al procedimiento, especialmente en los casos en que sea demasiado largo el llegar a la etapa óptima.

e) Procedimiento estrictamente monótono:

Es más difícil demostrar que se cumple la propiedad de monotonía estricta y lo cierto es que no siempre se cumple. Para ser precisos, diremos que es posible demostrar que el procedimiento es estrictamente monótono si se cumplen las condiciones siguientes:

i) Las líneas de contorno de la función objetivo deben ser diferenciables y el conjunto de puntos -- por lo menos tan preferidos como un punto cual -- quiera (curvas de indiferencia) es convexo.

ii) Dado un vector y cualquiera tal que $y \in X$, definamos:

$$P(y) = \left\{ x \in X \mid U(x) \geq U(y) \right\}$$

Entonces si x^o pertenece a $P(y)$ pero no pertenece a la frontera de dicho conjunto, $U(x^o) > U(y)$. (En otras palabras, los planificadores deben tener curvas de indiferencia delgadas)

f) Procedimiento convergente:

Antes de intentar demostrar esta propiedad, es necesario demostrar que la regla de alto da una prueba de optimalidad inmediata.

Demostración: (por reducción al absurdo)

Supongamos que encontramos T tal que:

i) $\bar{p}^T y_k^T = \bar{p}^T \bar{y}_k^T \quad \forall k \in \overline{1,n}$

ii) el plan ($\bar{x}^T$, $\bar{y}_k^T$ $\forall k \in \overline{1,n}$) obtenido en la etapa T no es óptimo.

Entonces $\exists$ un plan alternativo ($\hat{x}$, $\hat{y}_k$ $\forall k \in \overline{1,n}$) tal que es mejor que el plan obtenido en la etapa T (en términos de la función objetivo) y además factible, es decir - tal que cumple las siguientes condiciones:

i) $U(\hat{x}) > U(\bar{x}^T)$

ii) $\hat{x} - \sum_{k=1}^{n} \hat{y}_k \leq w$

iii) $\hat{x} \in X$

iv) $\hat{y}_k \in Y_k \quad \forall k \in \overline{1,n}$

aplicando (3.4) obtenemos: $\bar{P}^T\hat{x} > \bar{P}^T\bar{x}^T$ (3.12)

por hipótesis sabemos que:

$$\bar{P}^T y_k^T = \bar{P}^T \bar{y}_k^T \quad \forall k \in \overline{1,n} \quad (3.13)$$

también para toda k, y_k^T es el óptimo del problema (3.10),- entonces se cumple que:

$$\bar{P}^T y_k^T \geq \bar{P}^T y_k \quad \forall y_k \in Y_k \quad \forall k \in \overline{1,n} \quad (3.14)$$

utilizando (3.13) y (3.14) obtenemos:

$$\bar{P}^T \bar{y}_k^T \geq \bar{P}^T y_k \quad \forall y_k \in Y_k \quad \forall k \in \overline{1,n} \quad (3.15)$$

por (3.3) sabemos que:

$\bar{P}^T w = \bar{P}^T\bar{x}^T - \sum_{k=1}^{n} \bar{P}^T\bar{y}_k^T$ aplicando (3.12) obtenemos:

$\bar{P}^T w < \bar{P}^T\hat{x} - \sum_{k=1}^{n} \bar{P}^T\bar{y}_k^T$ aplicando (3.15) obtenemos:

$$\bar{P}^T w < \bar{P}^T\hat{x} - \sum_{k=1}^{n} \bar{P}^T\hat{y}_k \quad (3.16)$$

por hipótesis sabemos que: $\hat{x} - \sum_{k=1}^{n} \hat{y}_k \leq w$,

multiplicado por $\bar{P}^T$ obtenemos: $\bar{P}^T\hat{x} - \sum_{k=1}^{n} \bar{P}^T\hat{y}_k \leq \bar{P}^T w$ (3.17) utilizando (3.16) y (3.17) obtenemos:

$\overline{p}^T w < \overline{p}^T w$ ¡!

Entonces $\nexists$ un plan alternativo $(\hat{x}, \hat{y}_k \quad \forall k \in \overline{1,n})$ tal que sea factible y proporcione una utilidad superior a la que se logra con el plan $(\overline{x}^T, \overline{y}_k^T \quad \forall k \in \overline{1,n})$

Podemos entonces concluir que el plan $(\overline{x}^T, \overline{y}_k^T \quad \forall k \in \overline{1,n})$ es óptimo. Y por consiguiente la regla de alto propuesta es una prueba de optimalidad inmediata.

Es claro que, si al aplicar el procedimiento de Malinvaud se encuentra una etapa t para la cual se cumple la regla de alto, entonces el problema global (3.1) tiene solución óptima y ésta está dada por la solución del problema (3.2) en la etapa t; es decir, el plan óptimo es $(\overline{x}^t, \overline{y}_k^t \quad \forall k \in \overline{1,n})$ y, por consiguiente, el procedimiento converge.

Supongamos que la regla de alto no se aplica, es decir que el procedimiento no es finito. Sabemos que para cualquier plan factible se cumple que:

i) $x \leq \sum_{k=1}^{n} y_k + w$

ii) $x \in X$

iii) $y_k \in Y_k \qquad \forall k \in \overline{1,n}$

donde los conjuntos Y_k son acotados (hipótesis 1) y el conjunto X es acotado inferiormente (hipótesis 3). Entonces el vector x pertenece a un conjunto acotado; de aquí se sigue que la función continua U(x) está acotada superiormente para todo plan factible. Sea $\bar{u}$ la más pequeña de esas cotas superiores ($\bar{u}$ es el supremo). Sabemos que en cada iteración, la oficina de planificación conoce un plan factible ($\bar{x}^t$, $\bar{y}_k^t$ $\forall k \in \overline{1,n}$), definimos la sucesión $\{u(t)\}$ donde $u(t)=u(\bar{x}^t)$, la monotonía del procedimiento nos dice que la sucesión $\{u(t)\}$ es no decreciente, está definida en un conjunto acotado y está acotada superiormente; entonces existe el límite de la sucesión, es decir $\exists$ u^* tal que $\lim u(t)=u^*$ cuando $t \longrightarrow \infty$ y $u^* \leq \bar{u}$.

Para mostrar que este límite de hecho es igual a $\bar{u}$, se utilizará un argumento de reducción al absurdo, basado en la hipótesis de que $u^* < \bar{u}$, pero primero es necesario establecer ciertas relaciones entre los límites de nuestras variables.

Considérese la siguiente sucesión $\{\bar{P}^t,\ \bar{P}^t\bar{x}^t,\ \bar{P}^t\bar{y}_k^t,\ \bar{P}^t y_k^t\ \forall k \in \overline{1,n}\}$ constituida por 2(n+1) subsucesiones, donde cada una de ellas está contenida en un conjunto acotado, así que todas y cada una de las 2(n+1) subsucesiones convergen. Sea P^* el límite de $\bar{P}^t$, a^* el límite de $\bar{P}^t\bar{x}^t$, $\bar{b}_k^*$ el límite de $\bar{P}^t\bar{y}_k^t$, y b_k^* el límite de $\bar{P}^t y_k^t$. Por (3.3) sabemos que:

$$\bar{p}^t w + \sum_{k=1}^{n} \bar{p}^t \bar{y}_k^t - \bar{p}^t \bar{x}^t = 0$$

entonces:

$$\left(\lim_{t \to \infty} \bar{p}^t \right) w + \sum_{k=1}^{n} \lim_{t \to \infty} \bar{p}^t \bar{y}_k^t - \lim_{t \to \infty} \bar{p}^t \bar{x}^t = 0$$

substituyendo obtenemos:

$$P^* w + \sum_{k=1}^{n} \bar{b}_k^* - a^* = 0 \qquad (3.18)$$

sabemos que $y_k^r \in Y_k^t$ para todo $r < t$, (por la construcción de los conjuntos Y_k^t). si aplicamos (3.5) obtenemos la siguiente relación:

$$\bar{p}^t y_k^r \leq \bar{p}^t \bar{y}_k^t \qquad \forall r < t$$

si r está fija y se pasa el límite sobre t se obtiene:

$$P^* y_k^r \leq \bar{b}_k^* \qquad \forall r \qquad (3.19)$$

Se puede asegurar que la sucesión $\{P^* - \bar{p}^r\}$ converge a cero puesto que el límite de la sucesión $\{\bar{p}^r\}$ es precisamente P^*, se sabe que la sucesión $\{y_k^r\}$ está definida en un conjunto acotado; por consiguiente, se puede asegurar que la sucesión $\{(P^* - \bar{p}^r)\, y_k^r\}$ converge a cero, es decir:

$$\lim_{r \to \infty} (P^* - \bar{P}^r) \; y_k^r = 0$$

entonces:

$$\lim_{r \to \infty} P^* y_k^r = \lim_{r \to \infty} \bar{P}^r y_k^r = b_k^*$$

aplicando (3.19) se obtiene:

$$b_k^* \leq \bar{b}_k^* \qquad (3.20)$$

Supongase que $u^* < \bar{u}$, donde u^* es el límite de la sucesión $\{ u(t) \}$, entonces existe un plan factible $(\hat{x}, \hat{y}_k \; \forall k \in \overline{1,n})$ que proporciona una utilidad mayor a u^*, es decir, tal que- $u(\hat{x}) > u^*$, por consiguiente se cumple que $\hat{x} \in X$ y $u(\hat{x}) > u(\bar{x}^t)$ $\forall t$, aplicando (3.4) obtenemos:

$$\bar{p}^t \hat{x} > \bar{p}^t \bar{x}^t$$

aplicando límite sobre t se obtiene:

$$p^* \hat{x} > a^* \qquad (3.21)$$

Se sabe que y_k^t es la solución óptima del problema (3,10) y- que $\hat{y}_k \in Y_k$ (constituye un plan factible) , entonces se pue de afirmar que se satisface la siguiente desigualdad:

$$\bar{p}^t \hat{y}_k \leq \bar{p}^t y_k^t$$

aplicando límite sobre t se obtiene:

$$p^* \hat{y}_k \leq b_k^* \qquad (3.22)$$

se sabe que el plan $(\hat{x}, \hat{y}_k \quad \forall k \in \overline{1,n})$ es realizable, entonces se cumple que:

$$x - \sum_{k=1}^{n} \hat{y}_k \leq w$$

multiplicando por P^* se obtiene:

$$p^* \hat{x} - \sum_{k=1}^{n} p^* \hat{y}_k \leq p^* w$$

aplicando (3.21) se obtiene:

$$a^* - \sum_{k=1}^{n} p^* \hat{y}_k < P^* w$$

de acuerdo a (3.22):

$$a^* - \sum_{k=1}^{n} b_k^* \leq P^* w$$

con (3.20) se obtiene:

$$a^* \quad \sum_{k=1}^{n} \bar{b}_k^* < P^* w$$

y aplicando (3.18) se obtiene:

$$P^{*}w < P^{*}\hat{w}$$

$\therefore$ es falso que $\bar{u} > u^{*}$

es decir en algún momento $\bar{u} = u^{*}$, por lo que se puede concluir que el procedimiento es convergente.

g) Procedimiento finito:

El procedimiento será finito con seguridad sólo en el caso lineal. Nótese que aún en los casos lineales puede no ser de mucha utilidad la finitud del procedimiento, ya que la iteración en la que el procedimiento termina (se encuentra el óptimo) aún siendo finita puede ser demasiado grande para fines prácticos.

III.-5 REPRESENTACION GRAFICA

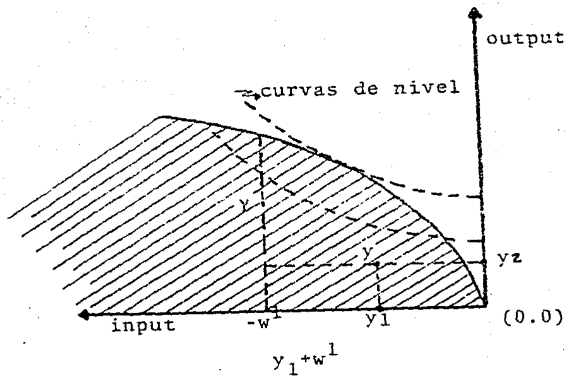
El procedimiento que hemos estudiado hasta ahora puede ilustrarse perfectamente en el contexto de un modelo gráfico sencillo.

Supongamos que la economía se compone de una sola empresa (o varias empresas idénticas), que utilizan un solo factor (input) para producir un solo producto (output). En la gráfica (3.1) se representa su conjunto de posibilidades de producción (Y) y algunas curvas de nivel de la función objetivo. La economía dispone de una cantidad inicial fija w' del input y nula del output. Las disponibilidades iniciales pueden ser expresadas por el vector $w=(w',0)^t$, donde la primera componente indica la cantidad de input y la segunda la cantidad de output. Si se supone que cualquier nivel de consumo es aceptable, entonces el problema global de planificación puede enunciarse del siguiente modo:

$$\begin{array}{l} \text{Máx} \quad U(x) \\ \text{s.a.} \\ \quad x \leq y + w \\ \quad y \in Y \end{array}$$

y se puede interpretar de la siguiente manera. Supongase que el input es trabajo, y el output es un bien de consumo.

El conjunto Y representa entonces las posibilidades de transformar el trabajo en bienes de consumo y la cantidad w' indica la cantidad máxima de trabajo de la que se puede disponer en la economía. Si $y=(y_1,y_2)$, y_1 es el input asociado al plan de producción y, (que por convención será un número negativo véase capítulo I). La expresión y_1+w indica la cantidad total de trabajo que no es utilizada en el proceso productivo y, por lo tanto, la cantidad que puede consumirse en forma de ocio, es decir, el nivel máximo de consumo del producto 1, que en términos del vector x (vector de consumo final) estaría dado por x_1. En la figura 3.1 el input en el proceso productivo se mide a partir del punto (0,0) hacia la izquierda, mientras que la cantidad de ocio se mide a partir de $-w'$ hacia la derecha. Entonces en el punto y, la demanda de trabajo es $\overline{oy_1}$ y el ocio del que se puede disfrutar es $\overline{-w'y_1}$. La primera componente del vector x no debe ser mayor que (y_1+w'), o cantidad de ocio disponible, y la segunda no es mayor que y_2 o cantidad producida del bien de consumo, el conjunto de consumos factibles está representado por la zona doblemente rayada de la figura (3.1). Las curvas de nivel de la función objetivo nos indican que la oficina de planificación considera deseables tanto el bien de consumo como el ocio. En efecto, partiendo de un punto inicial cualquiera, el valor de la función objetivo aumenta cuando se incrementa la cantidad de output o la cantidad de ocio consumidos.



Gráfica 3.1

La oficina de planificación dispone inicialmente - de un plan factible y^o , es decir y^o pertenece a Y y utiliza una cantidad de input $-y_1^o \leq w'$. Esto se representa en la gráfica (3.2). Para calcular los precios iniciales, el-centro resuelve el problema.

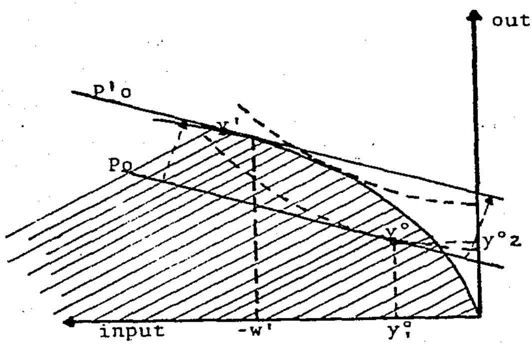
$$\text{Máx} \quad U(x)$$

$$\text{s.a.}$$

$$x \leq y + w$$
$$y \in Y^1$$

Es obvio que Y^1 tan solo contiene un punto y es - precisamente el plan y^o (vease sección 3.1), es decir - --

$Y^1 = \{ y^o \}$. Dada la restricción que exige que y pertenezca a Y^1, se puede asegurar que el mejor plan de producción será y^o y, por la forma de las curvas de nivel de la función objetivo se observa que el mejor plan de consumo será: consumir y_2^o unidades del bien de consumo y $(w'+y_1^o)$ unidades de ocio. Desde luego existen otras alternativas (como consumir menos de y_2^o unidades del bien de consumo, desperdiciando el resto), pero sin duda alguna dichas alternativas conducirían a valores menores de la función objetivo. Sean P_1 y P_c los precios determinados para el trabajo y el bien de consumo respectivamente. Entonces el cociente P_1/P_c indica la relación según la cual se pueden sustituir ambos bienes manteniendo constante el valor de la función objetivo. Como es bien sabido, esta razón es igual a la pendiente de la recta tangente a la curva de nivel de la función objetivo en el punto considerado. Por lo tanto los precios P_1 y P_c que la oficina de planificación anunciará en la primera etapa serán tales que la razón P_1/P_c sea igual a la pendiente de la recta P_o

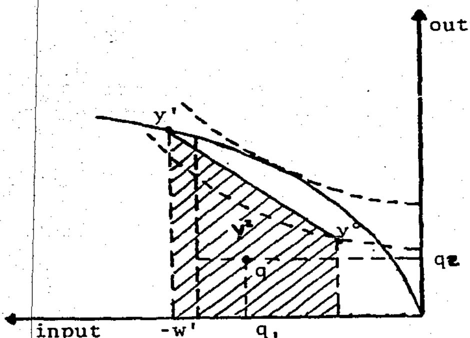


Gráfica 3.2

La oficina de planificación envía estos precios a la empresa, la cual deberá responder comunicando a la oficina de planificación las cantidades de input y output que maximizan sus beneficios a dichos precios. Se sabe que el punto que maximiza los beneficios será aquel punto de la frontera del conjunto Y en el cual la frontera de producción es tangente a una recta con pendiente igual a la de P_o, para encontrar dicho punto se desliza la recta P_o hasta encontrar el punto en el cual sea tangente al conjunto Y. En la gráfica (3.2) puede observarse que el punto que se busca es y^1, el cual, aunque constituye un plan de producción factible ($y^1 \in Y$), no forma parte de ninguna solución factible del problema de planificación, puesto que en él la demanda de trabajo por parte de la empresa es superior a la oferta disponible.

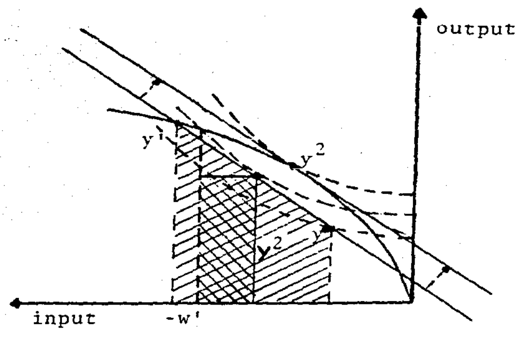
El centro conoce ahora dos puntos del conjunto de posibilidades de producción de la empresa; y^1 y y^o. Como el conjunto Y es convexo, se sabe que el segmento de línea que los une también pertenece al conjunto. Supóngase que además la oficina de planificación sabe que si es posible producir un output dado, utilizando una cantidad de input determinada, entonces también será posible producir un output menor con el mismo input. En este caso el centro sabe que tanto el segmento $\overline{y^1y^o}$ como los puntos situados por debajo de él pertenecen al conjunto de producción. Esta área constituye el conjunto

Y^2 (estrictamente Y^2 sería tan solo el segmento de línea que une a los puntos y^1 y y^o, según el procedimiento de Malivaud) Y^2 es la aproximación al conjunto Y elaborada por la oficina de planificación en la segunda etapa y se representa en la figura 3.3 mediante la zona rayada. Los planes de producción que el centro sabe que son factibles son aquellos que además de pertenecer a Y^2, utilizan una cantidad de trabajo menor o igual que w', es decir, los puntos de Y^2 situados a la derecha de la línea vertical que pasa por -w'.



Gráfica 3.3

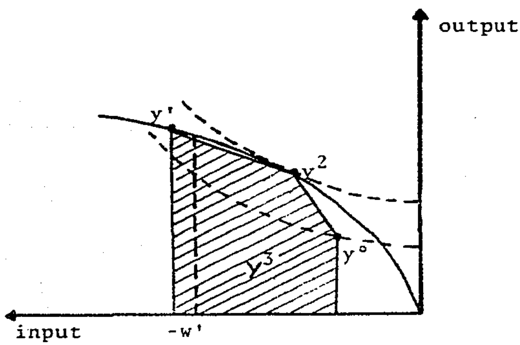
En la gráfica 3.3 mostraremos los vectores de consumo x que son factibles en la etapa 2. Supongamos que la empresa está produciendo el punto q, entonces el consumo del bien producido puede tomar cualquier valor comprendido entre cero y q_2 y el del ocio puede tomar cualquier valor comprendido entre 0 y q_1+w'. Por lo tanto, el vector de consumo puede estar situado en cualquier punto de la zona doblemente rayada. Teniendo en cuenta esta interpretación de la figura, es fácil determinar cuáles serán el nivel de producción y el nivel de consumo factibles que maximizan el valor de la función objetivo. El plan óptimo con respecto a lo que la oficina de planificación conoce sobre la economía consiste en producir y consumir lo indicado en el punto q^1 de la figura (3.4)



Gráfica 3.4

El area doblemente rayada indica el conjunto de todos los vectores de consumo que son factibles cuando se produce q^1. Obviamente el mejor de todos ellos es el mismo q^1 puesto que ningún otro nivel de producción permite consumir-un vector que dé un valor tan elevado a la función objetivo. Por el razonamiento anterior, el cociente de los precios asociados a q^1 está dado por la pendiente de la recta que pasa por y^o y y^1, ya que es la tangente a la curva de nivel de la función objetivo en el punto q^1. Entonces, en la segunda etapa la oficina de planificación anuncia unos precios cuyo cociente es igual a la pendiente de esa recta y la empresa responde comunicando al centro de planificación el plan de producción que maximice sus beneficios a dichos precios, que es el punto y^2 de la figura (3.5)

Tras recibir la respuesta y^2, el centro lleva a cabo la tercera etapa y procede a elaborar una aproximación Y^3 del conjunto Y. Esta incluye ahora el área situada por debajo del segmento $\overline{y^1y^2}$ y del segmento $\overline{y^2y^o}$. Como antes, el conjunto de planes factibles es la parte de ese conjunto situa-



Gráfica 3.5

da a la derecha de la recta vertical que pasa por $-w'$, y el plan óptimo con respecto a esta nueva aproximación es precisamente el punto y^2. Los precios asociados a este plan serían los mismos que los propuestos en la etapa anterior y, por consiguiente la empresa responderá comunicándole a la oficina de planificación el punto y^2, con lo cual la oficina de planificación sabe que ha encontrado el plan óptimo.

Es obvio que no tendría sentido continuar con el procedimiento, puesto que la oficina de planificación no aprendería nada nuevo en las iteraciones sucesivas y, además, ése es efectivamente el plan óptimo para la empresa.

III.-6 DUALIDAD EN CADA ETAPA DEL PROCEDIMIENTO

En el capítulo anterior se dio una interpretación económica del valor de las variables tanto primales como duales - asociadas al plan óptimo del problema de planificación descentralizada, también se dio la interpretación del estado de las- restricciones (desigualdad estricta o igualdad) que delimitan- el conjunto de soluciones factibles del mismo problema. Todo - lo anterior se logró al aplicar los resultados que la teoría - de dualidad nos proporciona para los problemas de maximización condicionada. Cabe señalar que todos los resultados que se obtuvieron en el capítulo II son también válidos para el plan -- óptimo que se obtiene mediante el procedimiento de Malinvaud.- Por consiguiente en esta sección tan sólo se dará una interpretación económica de los planes obtenidos en cada etapa del procedimiento, así como del comportamiento general del mismo; de- hecho, se mostrará que el procedimiento de Malinvaud cumple la función del mercado competitivo, el cual se rige básicamente -- por la ley de oferta y demanda.

El programa de producción ($\bar{x}^t$, $\bar{y}_k^t$ $\forall k \in \overline{1,n}$) es un - plan de producción factible desde el punto de vista de los consumidores, así como también por parte de las empresas y es determinado por la oficina de planificación en la iteración t, - al optimizar el problema siguiente:

$$\begin{aligned} &\text{Máx} \quad U(x) \\ &\text{s.a.} \\ &\qquad x - \sum_{k=1}^{n} y_k \leq w \\ &\qquad x \in X \\ &\qquad y_k \in Y_k \qquad \forall k \in \overline{1,n} \end{aligned}$$

donde Y_k^t son las aproximaciones elaboradas por la oficina de planificación de los conjuntos Y_k, al considerar las combinaciones lineales convexas de los programas de producción que las empresas le han enviado en las iteraciones anteriores.

Aunque el plan ($\bar{x}^t$, $\bar{y}_k^t$ $\forall k \in 1,n$) no es conocido por ninguna empresa, los precios que la oficina de planificación propone son un reflejo del estado en el que se encontraría la economía si se llevara acabo el plan obtenido en la iteración t. Se sabe que el vector de precios $\bar{p}^t$ que la oficina de planificación envía a las empresas en la etapa t cumple:

$$\bar{p}^t x > \bar{p}^t \bar{x}^t \quad \text{para todo} \quad x \in X \quad \text{tal que} \quad U(x) > U(\bar{x}^t)$$

$$\bar{p}^t y_k \leq \bar{p}^t \bar{y}_k^t \quad \text{para todo } y_k \in Y_k^t \text{ y para todo } k \in \overline{1,n}$$

$$w_i + \sum_{k=1}^{n} y_{ik}^t - \bar{x}_i^t > 0 \longrightarrow \bar{p}_i^t = 0$$

$$\bar{P}_i^t > 0 \longrightarrow w_i + \sum_{k=1}^{n} \bar{y}_{ik}^t - \bar{x}_i^t = 0$$

Las últimas dos propiedades se pueden interpretar de la siguiente manera: si el producto i está en excedente, es decir si la oferta es superior a la demanda, entonces se puede afirmar que el precio dual asociado a dicho producto será nulo. Si, por el contrario, el precio dual asociado al producto i es positivo, se puede afirmar que dicho producto es totalmente utilizado en el plan determinado en la iteración t, es decir, la demanda superará a la oferta. Es precisamente por esta característica que se dice que el procedimiento de Malinvaud cumple con la función del mercado competitivo.

Nótese que si se acepta que $\bar{P}_i^t$ sea el incremento que sufren los precios base (antes de iniciarse la elaboración del plan determinado en la iteración t) de la economía, entonces se puede hacer la siguiente comparación:

Según el mercado competitivo, si la oferta supera a la demanda entonces el precio base no se incrementa, lo cual equivale en el procedimiento de Malinvaud a la tercera condición de que el precio $\bar{P}_i^t$ será nulo: por otro lado, el precio base solo se incrementa si la demanda supera a la oferta o al menos la alcanza, lo que equivale en el procedimiento de Malinvaud a la cuarta condición que dice que si el precio $\overline{P}_i^t$ es mayor que cero, entonces en el plan que se - está llevando a cabo se consume totalmente toda la produc -- ción del bien i; nótese que pueden haber bienes para los cuales la oferta sea menor que la demanda y sin embargo, su precio dual asociado sea nulo, esto se puede explicar si se considera el bien como un bien de lujo, el cual será demandado- por la clase alta y no afecta positivamente a la función objetivo que representa a toda la comunidad, ya que la comunidad preferiría que los recursos que se están asignando a la- producción de dicho bien, se utilizarán en la producción de- bienes de consumo básico.

En el mercado competitivo cuando se han determinado- los cambios que sufren los precios base, entonces cada empresa reconsidera su plan de producción tratando de maximizar - sus beneficios; obsérvese que en el procedimiento de Malin - vaud se realiza la misma acción al enviarles a las empresas - los precios duales $\overline{P}^t$ y pedirles que determinen el plan de - producción que maximice sus beneficios con dichos precios.

En el mercado competitivo una vez que se han determinado los nuevos planes de producción, se ponen en vigencia repitiéndose así el ciclo, mientras que en el procedimiento- de Malinvaud la oficina de planificación todavía revisa los planes de producción para evitar que se utilicen demasiados recursos en la producción de bienes de lujo que podría servir para la producción de bienes de consumo básico, los cuales darían un mejor nivel de vida a la comunidad vista como conjunto y no sólo a ciertas clases. Entonces la oficina de planificación determina cuáles deberían de ser los consumos finales y los planes de producción que den mayor satisfacción a toda la sociedad, a partir de los cuales vuelve a calcular los precios duales, si dicho plan se pusiera en funcionamiento repitiéndose así el ciclo. Puede pues observarse que tanto el mercado competitivo como el procedimiento de Malinvaud están fuertemente ligados con la conocida ley de oferta y demanda; sin embargo se puede considerar que el procedimiento de Malinvaud es más equitativo desde el punto de vista de la justicia distributiva.

Un atributo más que tendría el procedimiento de Malinvaud sobre el mercado competitivo, sería que; el mercado competitivo se tiene que dar en la realidad, es decir, cada plan deberá ser puesto en práctica, por lo que sería más tardado llegar al punto de equilibrio (óptimo) de la economía, mientras que utilizando el procedimiento de Malinvaud los planes tanto de consumo como de producción no tienen que ser puestos en práctica para continuar con el procedimiento.

Sin embargo, no debe perderse de vista que las dificultades mencionadas en el capítulo II, relativas a la casi segura nulidad del precio dual asociado a la mano de obra no calificada, no es solamente un problema que se presente en el plan óptimo. Por el contrario se presentará en todas y cada una de las iteraciones y, dado que seguramente el procedimiento será detenido antes de llegar al óptimo, podemos asegurar que todavía quedan problemas por resolver para que el procedimiento de Malinvaud deje de ser un procedimiento meramente académico y pueda ser aplicado para encontrar el plan óptimo en los sistemas económicos reales, o al menos aplicable a la resolución descentralizada de problemas más pequeños que tengan una matriz de restricciones con una estructura tan especial como la de los problemas de planificación de una economía.

NOTAS

1 En el apéndice C se describe el procedimiento de Dantzig-Wolfe al mismo tiempo que se le compara con el procedimiento de Malinvaud. Por lo que si se desea confirmar la afirmación es conveniente referirse al apéndice C.

2 E. Malinvaud, 'Decentralized Procedures for Planning', capítulo 7 de 'Activity Analysis in the Theory of Growth and Planning', edición a cargo de E. Malinvaud y M.O.L. Bacharach, Mac Millan, London, 1967.

3 Ver apéndice A

4 Ver apéndice B

5 Ver apéndice C

C A P I T U L O IV

PROCEDIMIENTO DE PLANIFICACION GUIADO POR CANTIDADES: EL PROCEDIMIENTO DE WEITZMAN

IV.-1 OBSERVACIONES GENERALES

En 1970 Weitzman[1] propuso un procedimiento de planificación descentralizada, en el cual se utilizan los niveles de producción como índices prospectivos. Este procedimiento pertenece a la clase de algoritmos por hiperplanos cortantes, introducidos por Kelley en la Teoría de optimización.

Este nuevo procedimiento al igual que el procedimiento Malinvaud, tiene una característica muy atractiva y es el hecho de que la decisión a ser tomada por la oficina de planificación en cualquier etapa se tomará en base a todas las proposiciones hechas por las empresas hasta ese momento. Además, este procedimiento (denominado procedimiento de Weitzman) pertenece a la clase de procedimientos de relajación, descritos por Lasdon[2]. En efecto, la idea de la relajación consiste en optimizar sin considerar algunas de las restricciones, y añadir, en cada iteración, alguna o algunas de las restricciones hasta el momento omitidas y que no se han satisfecho. La descripción hecha por Lasdon conduce a un procedimiento convergente y es bastante general, porque se pueden examinar diversas modalidades de los cambios de información entre la oficina de planificación y las empresas.

Primeramente se enunciarán las hipótesis bajo las cuales funciona el procedimiento de Weitzman.

Hipótesis 1: El conjunto de consumo X es cerrado

Hipótesis 2: La función objetivo $U(x)$ es continua; y en algunos casos se supone la siguiente definición de monotonía:

$$\text{Si} \quad x \in X \quad y \quad x \geqslant \hat{x} \quad \text{entonces} \quad U(x) \geqslant U(\hat{x})$$

Hipótesis 3: Los conjuntos de producción Y_k son convexos, cerrados y acotados superiormente, en algunos casos se requiere que se cumpla la hipótesis de libre disponibilidad de excedente, la cual se puede enunciar de la siguiente forma:

$$\text{Si } y_j \in Y_j \quad y \quad \hat{y}_j \leq y_j \quad \text{entonces} \quad \hat{y}_j \in Y_j$$

Hipótesis 4: La oficina de planificación conoce una estimación por exceso Y'_k de cada conjunto de producción Y_k; Y'_k se supone cerrado y acotado superiormente.

Se podrá observar que el conjunto X no se ha supuesto convexo, ni la función $U(x)$ cóncava; esto generalmente no es necesario mientras no haya un interés particular desde el punto de vista económico.

La hipótesis 4 es bastante restrictiva: representa la idea según la cual, interiormente en cada intercambio de información, la oficina de planificación tiene ya una cierta idea de las capacidades de producción de las empresas. La oficina de planificación puede así estimar por exceso los diferentes conjuntos Y_k. Los conjuntos Y'_k pueden ser escogidos tan grandes como se quiera; sin embargo, el procedimiento no será realmente funcional desde el punto de vista de la velocidad de convergencia, si los cojuntos Y'_k difieren demasiado de los conjuntos Y_k, lo cual se debe a que, como ya se dijo, el procedimiento resolverá el problema global sin considerar las restricciones tecnológicas (la oficina de planificación no conoce los conjuntos Y_k) y, por consiguiente, la tarea de las empresas será indicar de alguna manera las restricciones que deben cumplir los objetivos de producción para que puedan ser realizados por cada una de las empresas.

Para aclarar esta idea, supóngase que las proposiciones hechas por las empresas a la oficina de planificación fueran vectores de producción pertenecientes a la frontera de Y_k. Entonces tras t-1 etapas la oficina de planificación conoce t-1 vectores de producción y_k^r $r \in 1,\overline{t-1}$ pertenecientes a la frontera de Y_k, si además para cada y_k^r $r \in \overline{1,t-1}$ se determina un hiperplano de apoyo a Y_k en y_k^r, es decir, se determina Π_k^r (vector director) tal que:

$$\Pi_k^r \, y_k \leq \Pi_k^r \, y_k^r \qquad \forall y_k \in Y_k$$

entonces en la etapa t, la oficina de planificación puede -- aproximar por exceso al conjunto de producción Y_k como sigue:

$$Y_k^t = \left\{ \quad y_k \in Y_k' \quad \middle| \quad \Pi_k^r \, y_k \leq \Pi_k^r \quad y_k^r \qquad r \in \overline{1,t-1} \right\}$$

obviamente Y_k' ya es conocido por la oficina de planifica -- ción (hipótesis 4).

IV.-2 DESCRIPCION DEL PROCEDIMIENTO

En esta sección se presenta la descripción del procedimiento, pero antes es necesario recordar que el problema global de planificación descentralizada podría ser definido como:

$$
\begin{aligned}
&\text{Máx} \quad U(x) \\
&\text{s.a.} \\
&\qquad x - \sum_{k=1}^{n} y_k \leq w \qquad\qquad (4.1) \\
&\qquad x \in X \\
&\qquad y_k \in Y_k \qquad \forall k \in \overline{1,n}
\end{aligned}
$$

donde:

$x=(x_i)$ $i \in \overline{1,m}$ es el vector columna de consumo final

$y_k = (y_{ik})$ $i \in \overline{1,m}$ es el vector columna de producción neta de la empresa k (+ outputs -inputs)

$w=(w_i)$ $i \in \overline{1,m}$ es el vector columna de recursos iniciales.

$U(x)$ es la función objetivo o función de utilidad colectiva.

Y_k es el conjunto de posibilidades de producción de la empresa k.

X es el conjunto de consumos aceptables.

Se sabe que la oficina de planificación no puede resolver el problema (4.1) de una sola vez, puesto que no conoce los conjuntos de producción Y_k. Sin embargo, es factible que en la t-ésima iteración la oficina de planificación conozca una aproximación por exceso Y_k^t de los consumos Y_k y, por consiguiente, en la etapa t podría resolver el siguiente problema

$$\begin{aligned} &\text{Máx} \quad U(x) \\ &\text{s.a.} \\ &\qquad x - \sum_{k=1}^{n} y_k \leq w \qquad\qquad (4.2) \\ &\qquad x \in X \\ &\qquad y_k \in Y_k^t \qquad \forall k \subset \overline{1, n} \end{aligned}$$

Resolvería pues un problema similar al problema global de planificación (4.1), pero que difiere de éste en que la restricción $y_k \in Y_k$ ha sido sustituida por la restricción $y_k \in Y_k^t$. Se puede afirmar que la sucesión $\left\{ Y_k^t \right\}$ cumple la siguiente relación de contención:

$$Y_k \subset \cdots \subset Y_k^t \subseteq Y_k^{t-1} \subset \cdots \subset Y_k' \qquad \forall k \in \overline{1,n}$$

lo que nos permite afirmar que las aproximaciones por exceso que elabora la oficina de planificación de cada conjunto Y_k, son cada vez más y más precisas, por lo que la solución de (4.2) se aproxima cada vez más a la solución de (4.1) y, por consiguiente, la solución de (4.2) tiende hacia el plan óptimo.

Entonces, en la etapa t la oficina de planificación resuelve el problema (4.2), obteniendo así $\bar{x}^t$ y $\bar{y}_k^t$. Como se trata de un problema de maximización condicionada, su solución, además de proporcionar un plan óptimo según las restricciones de (4.2), proporciona un vector (1xm) de multiplicadores de Lagrange o precios sombra[3] que sabemos cumple con las siguientes condiciones:

i) $P^t x > P^t \bar{x}^t$ para todo $x \in X$ tal que $U(x) > U(\bar{x}^t)$

ii) $P^t y_k \leq P^t \bar{y}_k{}^t$ para todo $y_k \in Y_k^t$ y para todo $k \in \overline{1, n}$

iii) $P^t \left(\bar{x}^t \quad \sum_{k=1}^{n} \bar{y}_k^t \right) = P^t w$ (4.3)

iv) $P^t \geqslant 0$

Nótese que la condición (4.3) puede reescribirse como:

$$P^t \left(\bar{x}^t - \sum_{k=1}^{n} y_k^t - w \right) = 0$$

donde:

$$P_i^t \geqslant 0 \qquad \forall\, i \in \overline{1,m}$$

$$\bar{x}_i^t - \sum_{k=1}^{n} y_{ik}^t - W_i \leq 0 \qquad \forall\, i \in \overline{1,m}$$

Por lo tanto la condición anterior puede descomponerse como sigue:

$$w_i + \sum_{k=1}^{n} \bar{y}_{i_k}{}^t - \bar{x}_i{}^t > 0 \longrightarrow P_i{}^t = 0$$

$$P_i{}^t > 0 \longrightarrow w_i + \sum_{k=1}^{n} \bar{y}_{ik}^t - \bar{x}_i{}^t = 0$$

A partir de este vector (P^t) se puede construir un -- nuevo vector de precios $\bar{P}^t$, el cual cumplirá con ser un vec - tor cuya norma es uno; para lograr normalizarlo definamos:

$$\bar{P}^t = P^t \Big/ \sum_{i=1}^{m} P_i^t$$

Podemos así concluir que a la solución ($\bar{x}^t$, $\bar{y}_k^t$ - - $\forall k \in \overline{1, n}$) del problema (4.2) está asociado un vector de pre cios $\bar{P}^t$ que cumple las siguientes condiciones:

i) $\bar{P}^t \ x > \bar{P}^t \bar{x}^t$ para todo $x \in X$ tal que $U(x) > U(\bar{x}^t)$. (4.4)

ii) $\bar{P}^t \ y_k \leq \bar{P}^t \bar{y}_k^t$ para todo $y_k \in Y_k^t$ $\forall k \in \overline{1, n}$ (4.5)

iii) $w_i + \sum_{k=1}^{n} \bar{y}_{ik}^t - \bar{x}_i^t > 0 \longrightarrow \bar{P}_i^t = 0$ (4.6)

iv) $\bar{P}_i^t > 0 \longrightarrow w_i + \sum_{k=1}^{n} \bar{y}_{ik}^t - \bar{x}_i^t = 0$ (4.7)

v) $\bar{P}_i^t > 0 \qquad \forall i \in \overline{1,m}$ (4.8)

vi) $\sum_{i=1}^{m} P_i^t = 1$ (4.9)

para conocer la interpretación económica de cada una de estas condiciones puede recurrirse a la página 84 del capítulo III,

Conocido este vector de precios, la oficina de plani ficación lo envía a cada una de las empresas junto con el - correspondiente nivel de producción ($\bar{y}_k^t$), en cada una de - las empresas pueden suceder dos casos:

I Si $\bar{y}_k^t \in Y_k$, entonces la empresa k podrá cumplir con el objetivo de producción que le propuso la oficina de planificación. y se lo hace saber a la oficina de planificación.

II Si $\bar{y}_k^t \notin Y_k$, entonces la empresa deberá buscar un - vector de producción que asegure la realización de los objetivos y que minimice el costo que tendrá - que pagar la empresa por cumplir con los objetivos planteados a costa de salirse de sus posibilidades de producción. Antes de indicar cómo es que se logra realizar lo anterior, es necesario dar una definición.

Considérese el problema (4.10); en él, la empresa está suponiendo poder comprar los diferentes bienes que no le es posible producir a los precios $\bar{P}^t$, entonces, la empresa buscará determinar un vector de producción y_k y un vector de compra z_k, de tal manera que se minimice el costo de la penalización ($\bar{P}^t \;\; z_k$), correspondiente al total de compras -- que la empresa debe efectuar para poder realizar el objetivo de producción ($\bar{y}_k^t$) .

$$\text{Min } \bar{p}^t z_k$$

s.a.

$$y_k + z_k \geq \bar{y}_k^t \qquad (4.10)$$

$$y_k \in Y_k$$

$$z_k \geq 0$$

Sean y_k^t y z_k^t la solución óptima del problema (4.10) por la estructura del problema podemos suponer que:

$$y_k^t + z_k^t = \bar{y}_k^t$$

de hecho se puede demostrar que y_k^t también es la solución óptima del problema:

$$\text{Máx } \bar{p}^t y_k$$

s.a. (4.11)

$$y_k \leq \bar{y}_k^t$$

$$y_k \in Y_k$$

por ser y_k^t solución óptima del problema (4.11) diremos que:

y_k^t es un vector $\bar{y}_k^t$ - eficaz

Como puede observarse, el número de restricciones y el número de variables involucradas en el problema (4.10) es superior a las involucradas en el problema (4.11) y, dado que la solución óptima de ambos problemas coincide, es conveniente resolver únicamente el problema (4.11), el cual nos proporciona un nivel de producción que está contenido en el conjunto de posibilidades de producción y que además es lo más cercano posible al objetivo de producción planteado por la oficina de planificación. Por lo tanto si $\bar{y}_k^t \notin Y_k$ la k-ésima empresa deberá resolver el problema (4.11).

Supóngase que la empresa k se encuentra en el caso II, entonces deberá resolver un problema de la forma (4.11), obteniendo así un vector de producción (y_k^t); además, por el teorema de Kuhn y Tucker, podemos asegurar la existencia de un vector (λ_k^t) de multiplicadores de Kuhn y Tucker[4] asociado al problema (4.11) y que cumple las siguientes condiciones:

i) $\lambda_k^t \geqslant 0$

ii) $\lambda_k^t \; (\bar{y}_k^t - y_k^t) = 0$

iii) $\bar{P}^t y_k + \lambda_k^t \; (\bar{y}_k^t - y_k)$ es máximo en y_k^t sobre Y_k.

Sea $\Pi_k^t = \bar{P}^t - \lambda_k^t$ entonces:

por iii) $\bar{P}^t y_k + \lambda_k^t(\bar{y}_k^t - y_k) \leqslant \bar{P}^t y_k^t + \lambda_k^t(\bar{y}_k^t - y_k^t) \quad \forall y_k \in Y_k$

por consiguiente: $\bar{P}^t y_k - \lambda_k^t y_k \leqslant \bar{P}^t y_k^t - \lambda_k^t y_k^t \quad \forall y_k \in Y_k$

de donde: $(\bar{P}^t - \lambda_k^t) y_k \leqslant (\bar{P}^t - \lambda_k^t) y_k^t \quad \forall y_k \in Y_k$

$$\text{por lo tanto:}\quad \Pi_k^t\, y_k \leqslant \Pi_k^t\, y_k^t \qquad \forall y_k \in Y_k \qquad (4.12)$$

$$\text{entonces:}\quad \Pi_k^t (y_k^t - y_k) \geqslant 0 \qquad \forall y_k \in Y_k \qquad (4.13)$$

Sea $\hat{y}_k$ un vector de producción tal que $\hat{y}_k \leq y_k^t$, si se aplica la hipótesis 3 (libre disponibilidad de excedentes), se puede afirmar que $\hat{y}_k \in Y_k$, entonces $\hat{y}_k \in Y_k$ y $y_k^t - \hat{y}_k \geqslant 0$ y por consiguiente (por la condición (4.13)) se puede afirmar que:

$$\Pi_k^t \geqslant 0 \qquad (4.14)$$

$$\text{por ii)}\quad \text{Si}\ \ \bar{y}_{ik}^t > y_{ik}^t \rightarrow \lambda_{ik}^t = 0 \rightarrow \Pi_{ik}^t = \bar{P}_i^t > 0$$

$$\text{entonces:}\quad \text{Si}\ \ \bar{y}_{ik}^t > y_{ik}^t \rightarrow \Pi_{ik}^t > 0 \qquad (4.15)$$

$$\text{por ii)}\quad \text{Si}\ \ \lambda_{ik}^t > 0 \rightarrow \bar{y}_{ik}^t = y_{ik}^t$$

$$\text{por lo tanto:}\quad \text{Si}\ \ \Pi_{ik}^t < \bar{P}_i^t \rightarrow y_{ik}^t = y_{ik}^t \qquad (4.16)$$

Finalmente, se sabe que $y_k^t \leqslant \bar{y}_k^t$ por la restricción del problema (4.11) y también que $\bar{y}_k^t \notin Y_k$ (recuérdese que se está analizando el caso II), por lo que se puede asegurar que existe al menos un índice i tal que:

$$y_{ik}^t < \bar{y}_{ik}^t$$

y por consiguiente $\bar{p}^t y_k^t < \bar{p}_k^t \bar{y}_k^t$ (4.17)

de ii) se deduce que:

$$\lambda_k^t \bar{y}_k^t = \lambda_k^t y_k^t$$

utilizando (4.17) se obtiene:

$$\bar{p}^t y_k^t - \lambda_k^t y_k^t < \bar{p}^t \bar{y}_k^t - \lambda_k^t \bar{y}_k^t$$

entonces: $(\bar{p}^t - \lambda_k^t) \; y_k^t < (\bar{p}^t - \lambda_k^t) \; \bar{y}_k^t$

por lo tanto $\Pi_k^t \; y_k^t < \Pi_k^t \; \bar{y}_k^t$ (4.18)

resumiendo:

En la etapa t, la empresa K además de obtener y_k^t, - propone un vector Π_k^t que cumple con las siguientes condicio nes:

i) $\Pi_k^t \geqslant 0$ (4.14)

ii) Si $\bar{y}_{ik}^t > y_{ik}^t \rightarrow \Pi_{ik}^t > 0$ (4.15)

iii) Si $\Pi_{ik}^t < \bar{p}_i^t \rightarrow \bar{y}_{ik}^t = y_{ik}^t$ (4.16)

iv) $\Pi_k^t \; y_k < \Pi_k^t \; y_k^t \quad \forall y_k \in Y_k$ (4.12)

v) $\Pi_k^t \; y_k^t < \Pi_k^t \; \bar{y}_k^t$ (4.18)

Las condiciones (4.12) y (4.18) indican que Π_k^t es- el vector director de un hiperplano de apoyo en y_k^t del conjunto Y_k y que excluye al vector de producción $\bar{y}_k^t$ del conjunto Y_k; las restantes condiciones, tan sólo son condiciones de signo. Si cada empresa le envía a la oficina de planificación los vectores $\left\{y_k^t , \Pi_k^t\right\}$, entonces la oficina de planificación podría elaborar una mejor aproximación de los conjuntos Y_k, es decir, podría construir Y_k^{t+1} y en base a estas nuevas aproximaciones repetir el procedimiento.

Para iniciar el procedimiento es necesario conocer una aproximación por exceso Y_k' de cada conjunto de producción Y_k; sabemos que este requerimiento es satisfecho, ya que está contemplado en la hipótesis 4.

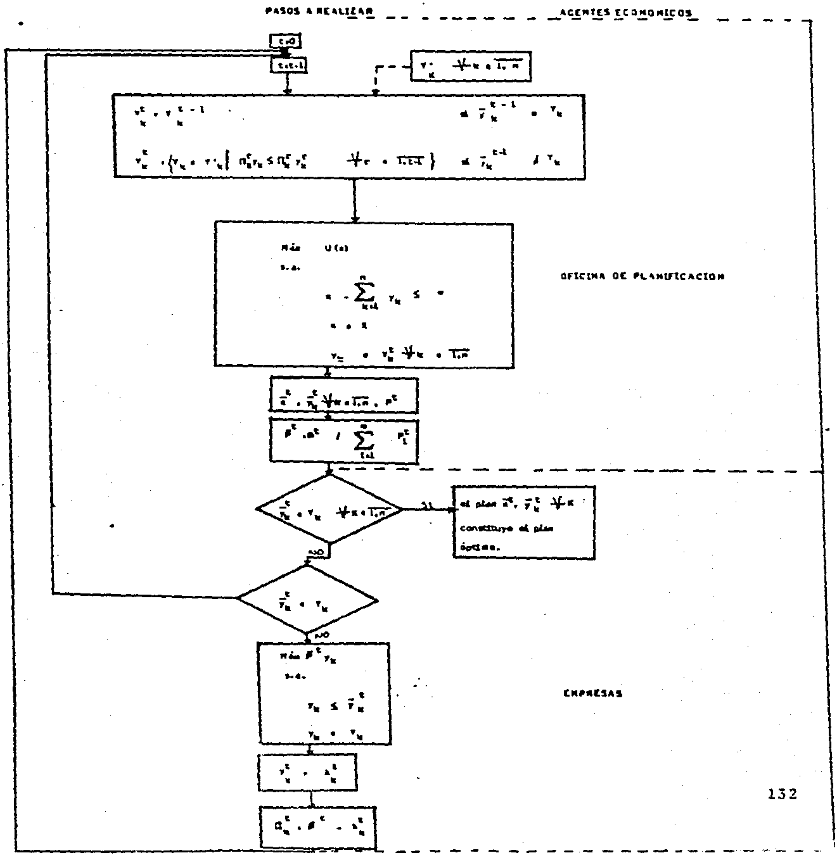
Podemos observar que si en la etapa t, los objetivos de producción propuestos por la oficina de planificación son factibles, entonces habremos llegado al óptimo, ya que ninguna empresa tendrá que pagar un costo adicional para poder cumplir con los objetivos de producción. Estamos pues en condiciones de establecer formalmente la regla de alto.

Regla de alto: El procedimiento se detiene cuando se encuentra una etapa t para la cual se cumple:

$$\bar{y}_k^t \in Y_k \qquad \forall k \in \overline{1, n}$$

4.3 DIAGRAMA DE FLUJO

Habiendo mostrado el funcionamiento del procedimiento de Weitzman, estamos en posibilidades de construir el diagrama de flujo asociado al mismo.



IV.-4 PROPIEDADES DEL PROCEDIMIENTO

Es fácil demostrar que la regla de alto da una prueba de optimalidad inmediata. Por construcción de los conjuntos Y_k^t se sabe que, para todo t, Y_k^t contiene a Y_k. Por lo tanto, cualquier plan que satisfaga las restricciones del problema de planificación (4.1) satisfará también las del problema (4.2); sin embargo, la afirmación contraria no es necesariamente cierta. De ello se deduce que si el plan óptimo de (4.2) cumple las restricciones del problema global de planificación (4.1), entonces este plan será también el plan óptimo del problema global. Para formalizar esta idea supóngase que se encuentra T tal que:

a) $\bar{y}_k^t \in Y_k \qquad \forall k \in \overline{1,n}$

b) y que el plan asociado $(\bar{x}^t , \bar{y}_x^t \quad \forall k \in \overline{1,n})$ no es óptimo.

Entonces $\exists$ un plan alternativo $(\hat{x} , \hat{y}_k \quad \forall k \in \overline{1,n})$ tal que es mejor que P^t (en términos de la función objetivo) y además factible, es decir, tal que cumple las siguientes condiciones.

i) $U(\hat{x}) > U(\bar{x}^t)$

ii) $x - \sum_{k=1}^{n} \hat{y}_k \leq w$

iii) $\hat{x} \in X$

iv) $\hat{y}_k \in Y_k \qquad \forall k \in \overline{1,n}$

Por hipôtesis ($\bar{x}^T$, $\bar{y}_k^T$ $\forall k \in \overline{1,n}$) es el plan óptimo del problema siguiente:

$$\text{Máx} \quad U(x)$$

s.a.

$$x - \sum_{k=1}^{n} y_k \leq w \qquad (4.19)$$

$$x \in X$$

$$y_k \in Y_k^T \qquad \forall k \in \overline{1,n}$$

Por construcción de Y_k^T se sabe que contiene a Y_k; -- por la condición iv) se sabe que $\hat{y}_k \in Y_k$, por lo que se puede asegurar que $\hat{y}_k \in Y_k^T$, este resultado aunado a las -- condiciones ii), y iii) nos muestran que el plan ($\hat{x}$, $\hat{y}_k$ -- $\forall k \in \overline{1,n}$) es un plan factible para el problema (4.19) y - por consiguiente se deberá cumplir la siguiente relación:

$$U(\hat{x}) \leq U(\bar{x}^T)$$

lo cual contradice a la condición i), por lo tanto se puede- afirmar que el plan ($\bar{x}^T$, $\bar{y}_k^T$ $\forall k \in \overline{1,n}$) es un plan - óptimo y por consiguiente la regla de alto propuesta da una-prueba de optimalidad inmediata.

Ahora pasaremos a analizar cuáles de las denominadas propiedades de Malinvaud cumple el procedimiento de Weitzman.

a) Procedimiento bien definido:

Por una parte, el cálculo de las empresas para efectuar las proposiciones a la oficina de planificación, siempre tiene solución, ya que los conjuntos Y_k, son compactos, convexos y supuestamente no vacíos, y las restricciones son lineales; por lo tanto, siempre existe el máximo para $\overline{P}^t y_k$ en el conjunto de soluciones factibles del problema (4.11). La existencia del vector (λ_k^t) es asegurada por el teorema de Kühn y Tucker; supongamos que se pueda definir $\overline{P}^t$ entonces la resta de vectores $P^t - \lambda_k^t$ también está definida y por consiguiente también lo está Π_k^t. Se puede, pues, concluir que las operaciones que deben efectuar las empresas para obtener las proposiciones que le harán a la oficina de planificación siempre tienen solución.

A nivel de la oficina de planificación es necesario resolver un problema de programación matemática de la forma:

$$
\begin{aligned}
&\text{Máx} \quad U(x) \\
&\text{s.a.} \\
&\qquad x - \sum_{k=1}^{n} y_k \leq w \\
&\qquad x \in X \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (4.20) \\
&\qquad y_k \in Y_k^t \qquad \forall\, k \in \overline{1,\ n}
\end{aligned}
$$

Por hipótesis, el conjunto X es cerrado, los conjuntos Y_k^t son cerrados y acotados superiormente y las restricciones son lineales; por lo que se puede suponer que la región de soluciones factibles del problema (4.20) cumplirá con formar un conjunto compacto y convexo; es válido suponer que la región de soluciones factibles sea no vacía, puesto que, en caso contrario, no existiría ningún plan factible según las restricciones del problema global (esto debido a que para todo t, $Y_k \subset Y_k^t$) . Además, si U(x) está definida en X, también lo estará en la región de soluciones factibles del problema (4.20), ya que es un subconjunto de X. Por lo tanto, se puede concluir que el problema (4.2) tiene solución. Por último, dado que (4.20) tiene solución óptima y si suponemos que U(x) es cóncava se puede garantizar que a la solución óptima estará asociado un vector de multiplicadores de Lagrange P^t tal que $\sum_{i=1}^{m} P_i^t > 0$. Por consiguiente, es posible calcular el vector de precios $\overline{P}^t$. Se puede concluir que las operaciones que debe efectuar la oficina de planificación para obtener los planes provisionales y los índices prospectivos que le envía a las empresas siempre tienen solución. Por lo tanto, el procedimiento está bien definido.

b) Procedimiento estrictamente bien definido:

Al igual que el procedimiento de Malinvaud, el cumplimiento de esta propiedad sólo se puede garantizar si todos -- los conjuntos Y_k son estrictamente convexos.

c) Procedimiento Factible:

Dado que las aproximaciones a los conjuntos Y_k son por exceso, ningún plan provisional (a excepción del óptimo) es factible.

d) Procedimiento monótono:

No tiene sentido hablar de monotonía, pues el procedimiento no es factible, sin embargo es posible afirmar que la sucesión $\left\{U(x^t)\right\}$ tiene una evolución monótona decreciente.- Para demostrarlo considérense los siguientes problemas:

$$\begin{aligned} &\text{Máx} \quad U(x) \\ &\text{s.a.} \\ &\qquad x - \sum_{k=1}^{n} y_k \leq w \\ &\qquad x \in X \\ &\qquad y_k \in Y_k^t \qquad \forall k \in \overline{1, n} \end{aligned}$$

$$\text{Máx} \quad U(x)$$

s.a.

$$x - \sum_{k=1}^{n} y_k \leq w$$

$$x \in X$$

$$y_k \in Y_k^{t+1} \qquad \forall k \in \overline{1,n}$$

Por definición de los conjuntos Y_k^t se cumple que $\forall k$ -- $Y_k^{t+1} \subset Y_k^t$. Por lo tanto, cualquier plan que satisfaga las- restricciones del primer problema satisfará también las -- del segundo problema. La afirmación contraria no es necesa - raimente cierta. De ello se deduce que todo valor de la fun- ción objetivo alcanzable en el primer problema también es al canzable en el segundo y que pueden existir valores alcanza- bles de la función objetivo en el primer problema que no lo- sean en el segundo. De este modo si $\bar{x}^t$ es la solución del -- primer problema y $\bar{x}^{t+1}$ es la solución del segundo, se --- cumplirá:

$$U(\bar{x}^t) \geqslant U(\bar{x}^{t+1})$$

e) Procedimiento estrictamente monótono:

Está claro que si no tiene sentido hablar de monoto- nía, menos lo tiene hablar de monotonía estricta y también - es claro que para determinar cuando se debe parar el procedi miento, la monotonía creciente (la cual se cumple en este -- procedimiento) no es de gran utilidad.

f) Procedimiento convergente:

Es claro que si al aplicar el procedimiento de Weitzman, se encuentra una etapa t para la cual se cumpla la regla de alto, entonces el problema global (4.1) tiene solución óptima y está dada por la solución del problema (4.2) - en la etapa t, es decir, el plan óptimo es $(\bar{x}^t, \bar{y}_k^t \ \forall k \in \overline{1,n})$ y por consiguiente el procedimiento es convergente.

Falta demostrar que aún cuando no se utilice la regla de alto, el procedimiento sigue siendo convergente. Para lograrlo, supongase ahora que el procedimiento no es finito. Sabemos que para cualquier plan factible se cumple que:

i) $x \leq \sum_{k=1}^{n} y_k + w$

ii) $x \in X$

iii) $y_k \in Y_k \quad \forall k \in \overline{1,n}$

donde los conjuntos Y_k son acotados superiormente (hipótesis 3) y es válido suponer que el conjunto X esté acotado inferiormente (económicamente no tendría sentido que algún x_i -- fuera negativo). Entonces, el vector x pertenece a un conjun to acotado y según la hipótesis 2 la función objetivo $U(x)$ - es contínua, de aquí se sigue que la función $U(x)$ está aco - tada superiormente para todo plan factible. Sea $\bar{u}$ la más pe queña de esas cotas, entonces $\bar{u}$ cumple que:

i) $\bar{u} \geqslant U(x) \quad \forall x \in X$

ii) Si $u' \geqslant U(x) \quad \forall x \in X$
entonces $\bar{u} \leq u'$

Ya se demostró que la sucesión $\{U(\bar{x}^t)\}$ es no creciente, además, está definida en un conjunto acotado y está- acotada inferiormente, entonces existe el límite de la sucesión $\{U(\bar{x}^t)\}$, es decir, $\exists\ u^*$ tal que:

$$\lim_{t \to \infty} U(\bar{x}^t) = u^* \quad \text{y} \quad u^* \leq U(\bar{x}^t) \quad \forall t$$

además $\bar{x}^t \in X \quad \forall t$

entonces por i): $\bar{u} \geqslant U(\bar{x}^t) \quad \forall t$

aplicando límite sobre t se obtiene:

$$\bar{u} \geqslant u^*$$

Para demostrar que el procedimiento es convergente - es necesario demostrar que u^* de hecho es igual a $\bar{u}$. Para lograrlo, supóngase que $\bar{u} > u^*$, entonces existe un plan factible $(\hat{x}, \hat{y}_k \quad \forall k \in \overline{1,n})$ tal que $U(\hat{x}) > u^*$. Con sidérese el siguiente problema:

$$\text{Máx} \quad U(x)$$

s.a.

$$x - \sum_{k=1}^{n} y_k \leq w$$

$$x \in X$$

$$y_k \in Y_k^t \qquad \forall\, k \in \overline{1,n}$$

dado que Y_k está contenido en Y_k^t para toda t, se deduce que el plan $(\hat{x}\ ,\ \hat{y}_k \quad \forall\, k \in \overline{1,n})$ también es factible según las-restricciones del problema anterior, de aquí que:

$$U(\hat{x}) \leq U(\bar{x}^t) \qquad \forall\, t$$

aplicando límite sobre t se obtiene:

$$U(\hat{x}) \leq u^* \quad !$$

por consiguiente: $\quad \bar{u} = u^*$

por lo tanto se puede concluir que el procedimiento es con - vergente.

g) Procedimiento Finito:

Esta propiedad sólo puede garantizarse si los conjuntos de producción son poliedros, ya que sólo así se puede -- asegurar que despues de un número finito de iteraciones los-conjuntos de posibilidades de producción Y_k habrán sido bien definidos (al menos en el punto en donde se encuentra el óptimo) por los hiperplanos de apoyo generados por los vectores Π_k^t que han enviado cada una de las empresas.

IV.-5 REPRESENTACION GRAFICA

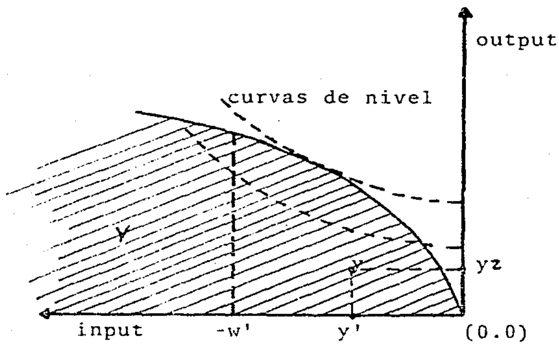
Al igual que en el capítulo anterior, utilizaremos - un modelo gráfico sencillo para explicar el desarrollo del - procedimiento de Weitzman.

Supongamos que la economía se compone de una sola - - empresa (o varias empresas idénticas) que utilizan un solo- factor (input) para producir un solo producto (output). En - la gráfica (4.1) se representa su conjunto de posibilidades- de producción (Y) y algunas curvas de nivel de la función objetivo, La economía dispone de una cantidad inicial fija w' - del input y nula del output. Las disponibilidades iniciales- pueden ser representadas por el vector $w=(w',0)^t$, donde la -- primera componente indica la cantidad de input y la segunda- la cantidad de output. Si suponemos que los consumidores consideran aceptable cualquier nivel de consumo, entonces el -- problema global de planificación puede enunciarse de la si - guiente forma:

$$\begin{aligned} &\text{Máx} \quad U(x) \\ &\quad \text{s.a.} \\ &\qquad x \leq y + w \\ &\qquad y \in Y \end{aligned}$$

y lo podríamos interpretar del siguiente modo. Supongamos -- que el input es trabajo, y el output es un bien de consumo.-

El conjunto Y representa entonces las posibilidades de transformar el trabajo en bienes de consumo y la cantidad w' indica la cantidad máxima de trabajo de la que se puede disponer en la economía. Si $y=(y_1,y_2)$, y_1 es el input asociado al plan de producción y, que por convención será un número negativo (ver capítulo I). La expresión $w'+y_1$ indica la cantidad total de trabajo que no se utiliza en el proceso productivo y por lo tanto, la cantidad que puede consumirse en forma de ocio. En la gráfica (4.1) el input en el proceso productivo se mide a partir del punto (0.0) hacia la izquierda, mientras que la cantidad de ocio se mide a partir de -w' hacia la derecha. Entonces en el punto y, la demanda de trabajo es $\overline{Oy_1}$ y el ocio del que se puede disfrutar es $\overline{-w'y_1}$. La primera componente del vector x no debe ser mayor que $(w'+y_1)$, o cantidad de ocio disponible, y la segunda no es mayor que y_2 o cantidad producida del bien de consumo. Las curvas de nivel de la función objetivo muestran que la oficina de pla



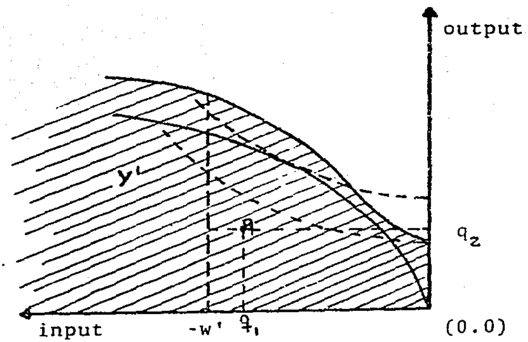
Gráfica 4.1

nificación considera deseables tanto el bien de consumo como el ocio. En efecto, partiendo de un punto incial cualquiera, el valor de la función objetivo aumenta la cantidad de out - put o la cantidad de ocio consumidos.

Una de las hipótesis del procedimiento es que la -- oficina de planificación conoce una aproximación por exceso- Y' (zona rayada, gráfica 4.2) del conjunto de posibilidades- de producción Y. para calcular los precios y los objetivos - de producción iniciales, la oficina de planificación resuel- ve el problema siguiente:

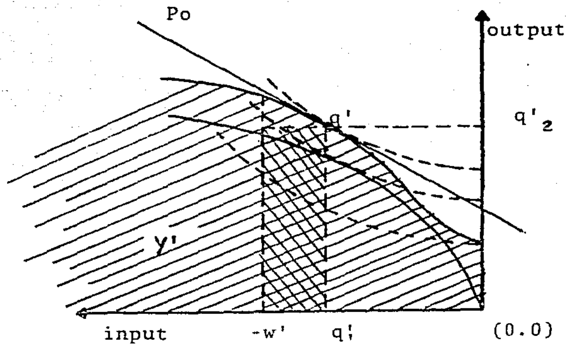
$$\begin{aligned} &\text{Máx } U(x) \\ &\text{s.a.} \\ &\quad x \leq y + W \\ &\quad y \in Y' \end{aligned}$$

entonces, los programas de producción factibles serán aque - llos que pertenezcan a Y' y cumplan además que la demanda de trabajo por parte de la empresa sea menor o igual a la ofer- ta disponible de ésta, es decir, los programas de producción situados a la derecha de -w'. Supongamos que la empresa está produciendo el punto q, entonces el consumo del bien produci do puede tomar valores comprendidos entre O y q_2 y el del - ocio puede tomar cualquier valor comprendido entre O y q_1+w'. Por lo tanto, el vector de consumo puede estar situado en -- cualquier punto de la zona doblemente rayada.



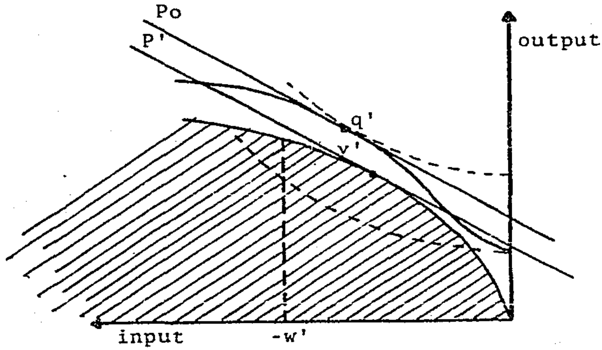
GRAFICA 4.2

Es fácil ver cuáles serán los programas de producción y el vector de consumo factibles que maximizan el valor de la función objetivo. El plan óptimo con respecto a lo que la -- oficina de planificación conoce sobre la economía consiste - en producir y consumir lo indicado en el punto q^1 de la gráfica (4.3)



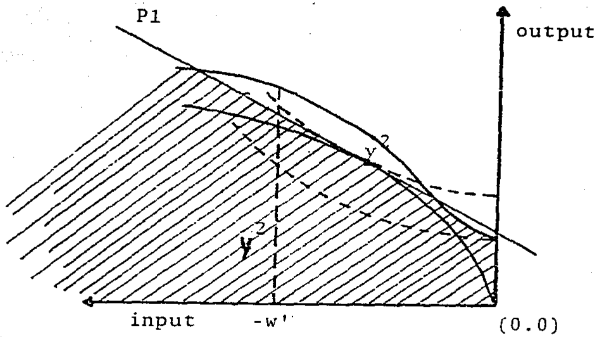
Gráfica 4.3

Sean P_1^1 y p_c^1 los precios del trabajo y el bien - de consumo respectivamente. Entonces, el cociente P_1^1/P_c^1 indica la relación según la cual pueden sustituirse ambos bienes, manteniendo constante el valor de la función objetivo. Como es bien sabido, esta razón es igual a la pendiente de- la recta tangente a la curva de nivel de la función objetivo en el punto q^1. Entonces, los precios P_1^1 y P_c^1 que la -- oficina de planificación anunciará en la primera etapa se - rán tales que la razón P_1^1/P_c^1 sea igual a la pendiente de la recta P_o , y la empresa deberá responder comunicando a la - oficina de planificación un programa de producción q^1-eficaz y el vector director de una recta de apoyo al conjunto- Y en el programa de producción determinado. El punto q^1-efi caz será el punto de la frontera del conjunto Y en el cual - la frontera de producción es tangente a una recta con pen -- diente igual a la de P_o. El punto y^1 de la figura 4.4 será - q^1-eficaz; además, determina una recta de apoyo a Y en y^1.



Gráfica 4.4

En la gráfica ésta será P_1, con la cual la oficina de planificación podrá mejorar su conocimiento del conjunto de posibilidades de producción de la empresa. Entonces, el conjunto- Y^2 estará constituído por los puntos que pertenecen a Y' y- se encuentran por debajo de la recta P_1 (zona rayada de la - gráfica 4.5). Los programas de producción que la oficina de- planificación sabe que son factibles son aquellos que además de pertencer a Y^2 están situados a la derecha de la línea -- vertical que pasa por -w'.



Gráfica 4.5

Es fácil ver que el plan óptimo con respecto a la nueva aproximación Y^2 consiste en producir y consumir lo indicado en el punto q^2 de la figura 4.5. Obviamente el plan q^2 es el óptimo ya que q^2 pertenece al conjunto de posibilidades de producción de la empresa.

IV.-6 DUALIDAD EN CADA ETAPA DEL PROCEDIMIENTO

Como vimos en el capítulo III existen ciertos resultados de la teoría de dualidad que son aplicables en todos los planes obtenidos en cada iteración de los procedimientos que hemos estudiado. En esta sección se verá que implicaciones tiene la teoría de dualidad en el procedimiento de Weitzman.

Precios duales propuestos por el centro:

Sabemos que en la iteración t, la oficina de planificación determina un plan óptimo desde el punto de vista de la función objetivo que ella misma determinó con anterioridad y, de acuerdo a lo que hasta el momento conoce de los conjuntos de posibilidades de producción de cada empresa; se sabe que también determina un vector de precios, el cual refleja el estado en el que se encontraría la economía si se pudiera realizar el plan obtenido en la iteración t. Para entender con mayor claridad esta afirmación, considérese el vector de precios $\bar{P}^t$ que la oficina de planificación determina en la iteración t y el cual cumple las siguientes relaciones:

i) $w_i + \sum_{k=1}^{n} \bar{y}_{ik}^t - \bar{x}_i^t > 0 \longrightarrow \bar{P}_i^t = 0$

ii) $\bar{P}_i^t > 0 \longrightarrow w_i + \sum_{k=1}^{n} \bar{y}_{ik}^t - \bar{x}_i^t = 0$

Económicamente las podemos interpretar de la siguiente manera: si el producto i se encuentra en excedente, es decir, la demanda del bien es inferior a su oferta, entonces se puede afirmar que su precio dual es nulo. E, inversamente, si el precio dual asociado al bien i es positivo, entonces se puede afirmar que ese bien es totalmente utilizado en el plan determinado por la oficina de planificación en la iteración t; es decir, la demanda iguala a la oferta. Es claro que el resultado anterior es válido para cualquier bien o servicio (mano de obra, capital, recursos disponibles, divisas, etc..); entonces, podemos concluir que la utilización incompleta de cualquier factor trae la nulidad del precio dual correspondiente y la no nulidad de ese precio implica la utilización completa del mismo.

En el capítulo II vimos que una gran dificultad para que se pudiera implementar en la realidad un sistema de precios de la naturaleza de $\overline{P}^t$ radicaba en la nulidad del precio dual de ciertos bienes o servicios tales como el asociado a la mano de obra no calificada. Como se puede observar este problema prevalece en cada plan determinado por la oficina de planificación, por lo que aún si el procedimiento fuera detenido antes de llegar al plan óptimo se tendrían que hacer ciertos ajustes para corregir estas desviaciones, en la mayoría de los sistemas económicos estas medidas de corrección son adoptadas bajo la forma de impuestos-o subsidios.

Vector director propuesto por las empresas:

En la iteración t la empresa k determina un vector-director Π_k^t que cumple cuatro condiciones, de las cuales en este momento sólo nos interesan las siguientes:

$$\bar{y}_{ik}^t > y_{ik}^t \longrightarrow \Pi_{ik}^t > 0$$

$$\Pi_{ik}^t < P_i^t \longrightarrow \bar{y}_{ik}^t = y_{ik}^t$$

que se pueden interpretar de la siguiente manera: Si la empresa decide no cumplir el objetivo de producción de bien i que le fue enviado por la oficina de planificación, entonces deberá pagar un costo de penalidad; el cual está intimamente relacionado con la no nulidad del termino Π_{ik}^t. Podría pensarse que si se cumple con dicho objetivo entonces la penalización debería ser nula; sin embargo esto no siempre sucede así, por lo que representa un gran problema que ha sido tratado por los teóricos como un problema de incentivos.

Supóngase que la empresa k decide no cumplir el objetivo de producción del bien i, entonces:

$$\bar{y}_{ik}^t > y_{ik}^t \longrightarrow \text{implica} \quad \Pi_{ik}^t > 0$$

supongase que $\Pi_{ik}^{t} < P_{i}^{t}$ entonces $\bar{y}_{ik}^{t} = y_{ik}^{t}$

por lo tanto $\Pi_{ik}^{t} \geq P_{i}^{t}$

se puede concluir que si la empresa K decide no cumplir el objetivo de producción del bien i deberá pagar un costo de penalización superior al simple costo de la producción faltante.

N O T A S

1 Weitzman. -Iterative Multilevel Planning with Production targets, Econométrica. Junio 1970.

2 Lasdon.- Optimization Theory for Large Sistems. Mac--Millan.

3.- Ver apéndice B

4.- Ver apéndice B

C A P I T U L O V

RELACIONES ENTRE LOS PROCEDIMIENTOS DE MALINVAUD Y WEITZMAN

V.-1 COMPARACION BASADA EN LAS PROPIEDADES DE MALINVAUD

En la presente sección se establecen algunas relaciones existentes entre los dos procedimientos estudiados y se hace una comparación de ellos en términos de las propiedades que cumplen y la carga informacional implícita en cada uno de ellos.

En secciones anteriores se demostró que el procedimiento de Weitzman no verifica dos de las propiedades más importantes de un procedimiento de planificación. En efecto, todos los planes obtenidos en el procedimiento de Weitzman son no factibles (excepto en el óptimo); además se demostró que la sucesión $\{U(x^t)\}$ es no creciente. Estas dos dificultades, aunadas a que el procedimiento es finito sólo si los conjuntos de producción son poliedros, lo sitúa muy por debajo del procedimiento de Malinvaud cuando el objetivo es determinar el procedimiento a seguir para resolver el problema de planificación descentralizada.

Por lo que se refiere a la velocidad de convergencia, no existe ningún fundamento teórico para afirmar que los algoritmos por hiperplanas de apoyo tengan la propiedad de converger 'rápidamente'. Más aún, en el caso particular del procedimiento de Weitzman, la rapidez de convergencia estará en función de la precisión del conjunto Y'_k como aproximación -

del conjunto Y_k de posibilidades de producción de cada empresa k.

Basados en el razonamiento anterior, parecería que utilizando el procedimiento de Weitzman, la oficina de planificación podría provocar que el procedimiento convergiera rápidamente, al elegir adecuadamente los conjuntos de aproximación Y'_k (particularidad que en el procedimiento de Malinvaud no existe), pero realmente esto no es así, ya que por ejemplo, en el caso de empresas nuevas, resultaría extremadamente difícil para la oficina de planificación, estimar de manera satisfactoria las capacidades de producción de dichas empresas y, por consiguiente, el avance que se obtiene al obtener una buena aproximación de los conjuntos de posibilidades de producción de empresas ya conocidas se perdería por la mala aproximación que se podría obtener del conjunto de posibilidades de producción de estas empresas nuevas. Por lo tanto, en el aspecto de la velocidad de convergencia podríamos decir que ambos procedimientos se encuentran al mismo nivel.

Por lo que concierne al costo administrativo de los procedimientos, existen dos aspectos que deberemos tomar en cuenta: el que se refiere al costo que implica el envío de los índices prospectivos y proposiciones y por otro lado el que se deriva del costo de almacenamiento de la información.

En el procedimiento de Malinvaud, en cada iteración la oficina de planificación envía un vector de precios $\bar{p}^t$ y las empresas responden con un programa de producción y_k^t lo-cual implica un total de (2·m·n) datos que se envían en cada iteración, donde m es el número de bienes y n el número de - empresas que constituyen el sistema económico que se está -- planificando.

En cada iteración del procedimiento de Weitzman, la - oficina de planificación envía un vector de precios $\bar{p}^t$ y un- objetivo de producción $\bar{y}_k^t$ a cada empresa, en total son - - (2·m·n) índices prospectivos, las proposiciones que la oficina de planificación recibe de cada empresa comprenden un programa de producción y_k^t y un vector director Π_k^t, son un total de (2·m·n) proposiciones, por lo que en el procedimiento de Weitzman el número total de datos que se envían en cada iteración son (4·m·n).

De aquí se deduce que el costo derivado por el envío- recíproco de información es considerablemente superior en el procedimiento de Weitzman con respecto al procedimiento de - Malinvaud.

Por otro lado, en el procedimiento de Malinvaud, en - cada iteración la oficina de planificación tendrá que añadir a su memoria los programas de producción y_k^t enviados por cada empresa, por lo tanto la carga informacional se incrementa en un total de (m·n) datos.

En el procedimiento de Weitzman, en cada iteración la oficina de planificación deberá agregar a su memoria los programas de producción y_k^t y los vectores directores Π_k^t enviados por cada empresa, por lo que la carga informacional aumentará en un total de $(2 \cdot m \cdot n)$ datos.

De aquí concluimos que el costo de almacenamiento en el procedimiento de Malinvaud es mucho menor que el originado si se utiliza el procedimiento de Weitzman. Por lo tanto podemos concluir que también en función del costo administrativo de los procedimientos, es preferible utilizar el procedimiento de Malinvaud.

V.2 FLUJOS DE INFORMACION

Al parecer todas las ventajas (en términos de las -- propiedades ideales que debería tener todo procedimiento de planificación y la carga informacional que éste origina), -- las tendría el procedimiento de Malinvaud sobre el procedi - miento de Weitzman. Sin embargo, no todo es desventaja en el procedimiento de Weitzman, ya que éste posee una teoría in - teresante de la cual señalaremos algunos puntos:

- En la iteración t cada empresa determina su programa de producción basándose en dos parámetros: los - precios que le son enviados y los objetivos de producción que debe tratar de cumplir, por lo que de - termina su programa de producción al maximizar sus- beneficios cuidándose de no violar los objetivos mínimos de producción (a menos que esto sea indispensable) ya que esto le acarrearía un costo, el cual- obviamente disminuiría sus beneficios.

  Recordemos que en el procedimiento de Malinvaud las empresas tratarán de minimizar sus beneficios sin - tener que respetar ningún nivel mínimo de producción. Podría pues concluirse que en el procedimiento de -- Weitzman la oficina de planificación tiene más con - trol sobre la producción de cada empresa, mientras -

que en el procedimiento de Malinvaud se tendrá que conformar con el control que le permita el manipular los precios.

- En la iteración t el vector de precios $\overline{p}^t$ puede ser individualizado para cada empresa, el fijar ciertos componentes del vector $\overline{p}^t$ a un nivel elevado; así la oficina de planificación puede mostrar la intensidad sobre la necesidad de realizar ciertos objetivos. Supongamos que la empresa k sea monoproductiva, si la oficina de planificación fija los precios asociados a sus inputs a un nivel muy elevado y los precios de sus outputs a un nivel muy bajo, entonces la empresa fijará sus inputs prácticamente iguales a los correspondientes para cumplir el objetivo $\overline{y}_k^t$, una actitud así podría tomarse con las empresas dedicadas a producir artículos de lujo. Inversamente, si la oficina de planificación fija el precio de sus outputs a un nivel muy elevado y el precio de los inputs a un nivel muy bajo, la empresa fijará su programa de producción lo más próximo posible a su objetivo $\overline{y}_k^t$ si es que no le es posible alcanzarlo o bien al máximo de su producción, en caso contrario. Por lo que el procedimiento representa satisfactoriamente las preferencias que la oficina de planificación pueda tener sobre la realización de ciertos bienes o servicios.

V.3 RELACIONES DE DUALIDAD

Además de las relaciones enunciadas en las dos secciones anteriores, existen ciertas relaciones de simetría entre los dos procedimientos que se han estudiado.

- En el procedimiento de Weitzman, la oficina de planificación utiliza una aproximación por exceso de los conjuntos de posibilidades de producción Y_k, a la cual podemos llamar linealización externa, es decir:

$$Y_k \subset \cdots Y_k^{t+1} \subset Y_k^t \subset Y_k^{t-1} \subset \cdots Y_k^{\prime} \qquad \forall k \in \overline{1,n}$$

  mientras que en el procedimiento de Malinvaud, la oficina de planificación utiliza una aproximación por carencia de los conjuntos de posibilidades de producción Y_k, a la cual podríamos denominar linealización interna, esto es:

$$Y_K^0 \subset \cdots Y_k^{t-1} \subset Y_k^t \subset Y_k^{t+1} \subset \cdots Y_k \qquad \forall k \in \overline{1,n}$$

- En el procedimiento de Weitzman la sucesión $\{U(\bar{x}^t)\}$ es no creciente, es decir:

$$U(\bar{x}^t) \geq U(\bar{x}^{t+1}) \qquad \forall t$$

mientras que en el procedimiento de Malinvaud sucede lo contrario, es decir, la sucesión $\{U(\bar{x}^t)\}$ es no decreciente, por lo tanto:

$$U(\bar{x}^{t+1}) \geq U(\bar{x}^t) \qquad \forall t$$

- En el procedimiento de Malinvaud, los índices prospectivos enviados por la oficina de planificación (los precios $\bar{p}^t$) están constituídos por un vector de variables duales asociadas a las restricciones recursos-disponibilidad, en un programa por aproximación y las proposiciones de las empresas están constituídas por un vector de producción, se puede considerar que en este caso la responsabilidad de la determinación de los bienes a producir se delega a las empresas, mientras que la responsabilidad de como distribuir los bienes producidos entre los miembros de la comunidad se delega a la oficina de planificación.

En el procedimiento de Weitzman, por el contrario los índices prospectivos son establecidos en términos de cantidades (objetivos de producción $\bar{y}_k^t$), con la eventual adición de un vector de precios y las proposiciones de las empresas comprenden a la vez elementos cuantitativos (los programas de producción y_k^t) y el vector de director Π_k^t que puede ser interpretado en términos de valores marginales. Por lo tanto se puede asumir que la responsabilidad de determinar cuales y cuanto de los bienes deberá producirse está determinado tanto por la oficina de planificación como por las empresas, mientras que la responsabilidad de distribuir la producción está delegada únicamente a la oficina de planificación. Puede pensarse que en el procedimiento de Weitzman la oficina de planificación se adjudica una responsabilidad que le tocaría a las empresas asumir.

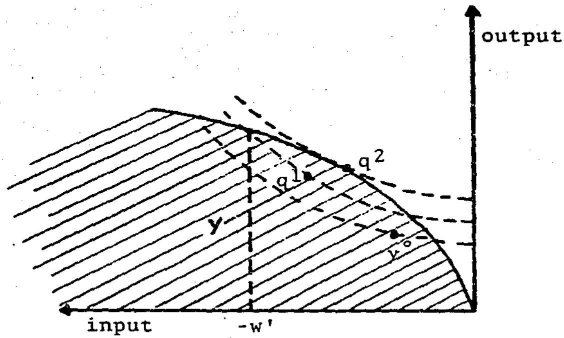
Por otra parte se puede observar que en el procedimiento de Malinvaud los índices prospectivos son precios, mientras que en el procedimiento de Weitzman éstos son cantidades. En la teoría de dualidad estos dos tipos de variables (precios y cantidades) tradicionalmente son consideradas como duales entre sí.

En la teoría de la programación matemática existen algoritmos que se consideran como duales entre sí; entre los más conocidos se encuentran el algoritmo simplex y el dual simplex, en el primero se tiene factibilidad y se busca optimalidad; es decir, en cada iteración la solución es factible pero el valor de la función objetivo asociado a ella está por debajo de la solución óptima. En el segundo tipo de algoritmos se tiene optimalidad, y se busca factibilidad, es decir en cada iteración se obtiene una solución que no es factible (no cumple algunas de las restricciones del problema)

pero para la cual el valor de la función objetivo asociado a dicha solución es superior al de la función objetivo.

- En el procedimiento de Malinvaud el plan determinado en la iteración t, $(\bar{x}^t, \bar{y}_k^t \quad \forall k \in \overline{1,n})$ es un plan factible, ya que es una solución de una aproximación por carencia del problema global de planificación por consiguiente se puede afirmar que el procedimiento goza de la propiedad de factibilidad y dado que la sucesión $\{U(\bar{x}^t)\}$ es no decreciente, es decir, siempre se está mejorando (o al menos no se aminora) el valor de la función objetivo, se puede afirmar que el procedimiento de Malinvaud tiene factibilidad y busca optimalidad .

A la luz del modelo gráfico que utilizamos en la sección 3.4 podemos observar que efectivamente los planes que determina la oficina de planificación siempre están dentro del conjunto de posibilidades de producción de la empresa, a la vez que cumple la condición de que la demanda sea inferior a la oferta (estar a la derecha de la linea vertical que pasa por -w') y puede observarse que y^0 nos daría un nivel de satisfacción menor que el que nos daría q^1 y a la vez q^1 nos daría un nivel de satisfacción menor al que nos daría q^2.

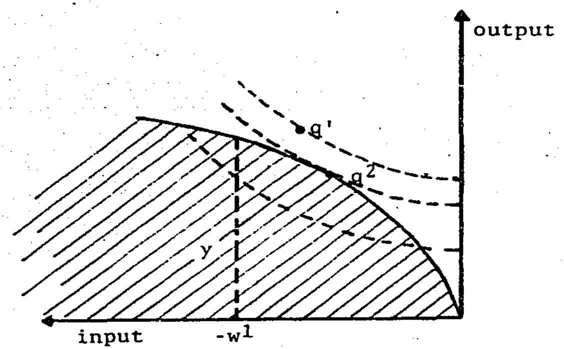


Gráfica 5.1

En el procedimiento de Weitzman la sucesión - - $\{U(\bar{x}^t)\}$ es no creciente y dado que el procedimien to es convergente podemos asegurar que se tiene op timalidad, además en todas las etápas el plan - - $(\bar{x}^t, \bar{y}_k^t \quad \forall k \in \overline{1,n})$ es no factible excepto en - el plan óptimo, lo cual implica que el procedimien to de Weitzman tiene optimalidad y busca factibili dad.

Utilizando el modelo gráfico de la sección 4.4 obtenemos los planes q^1 y q^2 que determina la oficina de planificación en la iteración 1 y 2 respectivamente (gráfica 5.2) y puede observarse que el - -

plan q^1 nos daría un nivel de satisfacción mayor -- que el que nos puede ofrecer q^2 pero como este no- es factible, apesar de cumplir la condición de -- oferta y demanda, ya que no pertenece al conjunto- de posibilidades de producción de la empresa, pue- de interpretarse como que se sacrifica cierto nivel de satisfacción para lograr que el plan sea facti - ble, claro está que se pretende sacrificar el míni mo de satisfacción.



Gráfica 5.2

En virtud de la similitud de condiciones de ambos algoritmos con los que teóricamente se consideran algoritmos duales se puede concluir que el proce- dimiento de Malinvaud y el procedimiento de Weitz man forman una pareja de algoritmos duales.

C O N C L U S I O N E S

En los capítulos precedentes se han examinado dos procedimientos que pretenden resolver el problema de la preparación descentralizada de los planes, los cuales representan -- solo algunos de los algoritmos que permiten determinar los -- planes en forma descentralizada. Las conclusiones que se pueden obtener del análisis anterior se pueden resumir de la siguiente manera:

1.- El algoritmo de Malinvaud cumple con dos propiedades - - (factibilidad y monotonía) sumamente importantes en la - práctica, ya que permiten detener el procedimiento en alguna etapa anterior a la óptima (considerada como satisfactoria) sin dejar de obtener un plan factible.

    Debido a que el algoritmo se inicia con un plan factible y mediante la realización del mismo se busca la optimalidad del plan es posible determinar la conveniencia de -- realizar una iteración más, en base al costo que implicaría la realización de ésta y el incremento en la función objetivo que se podría tener si se realiza la nueva iteración.

2.- En la práctica el Procedimiento de Weitzman no sería muy aconsejable ya que para poder obtener un plan factible -

sería necesario realizar las etapas necesarias hasta -- que el algoritmo por si sólo llegue a su fin. Otro punto que lo desfavorece es la cantidad de información que necesita retener, así como la que necesita comunicar -- (flujo de información) la cual asciende al doble de la utilizada por el algoritmo de Malinvaud.

3.- Para poner en practica cualquiera de los dos algoritmos es necesario:

a) Evaluar si el grado de descentralización de la información, amerita que el problema sea resuelto mediante algún algoritmo descentralizador o bastaría con el algoritmo simplex.

b) Analizar la estructura organizacional del sector al - que adolece el problema, para poder determinar así la autoridad que ostentaría la que funja como oficina - de planificación, sobre los sectores a planificar, - así como los estímulos que les podría proporcionar.

En el caso de que la autoridad concedida a la oficina de planificación no fuere lo suficientemente buena, sería más conveniente utilizar el algoritmo de - Weitzman ya que proporciona un mejor sistema de incentivos que el procedimiento de Malinvaud.

4.- Este breve estudio muestra que falta mucho camino por -

recorrer para poder pasar de los modelos académicos a la utilización practica de los mismos.

Una de las razones principales que apoyan la afirmación anterior reside en el marco tan limitante fijado por las hipótesis que se requieren para el buen funcionamiento de los procedimientos; sin perder de vista que implícitamente se están haciendo hipótesis no menos restrictivas que las que explícitamente se piden, tal es el caso de la ley de los rendimientos decrecientes, la cual no ha sido considerada al maximizar los beneficios de cada empresa. Sin embargo, existen procedimientos que sí la toman en cuenta, entre ellos se puede mencionar al algoritmo de Heal.

Estos aspectos restrictivos tienen su origen en el hecho de que los procedimientos de alguna forma tratan de utilizar los precios como elemento descentralizador y como se demuestra en la programación matemática, la existencia de estos precios y su capacidad de regular la economía están supeditadas al cumplimiento de la estricta-convexidad. En los casos que sólo se cumple la convexidad simple, como los estudiados, surgen los problemas de la no unicidad, lo cual impide el buen funcionamiento de los procedimientos. Este problema ha sido estudiado entre otros por: Charnes, Clower, Kortanek, Ghellink, Fiacco y Littlechild; los cuales han sugerido introducir algún término perturbador de la indeterminación, ya sea en la función objetivo o en el sistema de condicionantes (restricciones). Sin embargo, estos autores, se han preocupado del problema desde el punto de vista de la descentralización de las decisiones y no del problema de la preparación de planes en forma descentralizada. Esto significa que el problema que se ha planteado es el de como motivar o controlar a cada una de las unidades de un consorcio industrial para que operen de acuerdo a un plan establecido (sin violar las reglas, con el fin de obtener mayor beneficio) y en estos casos se supone que la solución óptima del problema global de planificación ya es conocida y lo único que se debe hacer es entregarle a cada unidad un vector de precios para que maximice sus beneficios.

Es claro que en el problema tratado en este trabajo, por definición se desconoce a priori la solución óptima del problema global de planificación, estas soluciones no tienen relevancia. Más aún, la no convexidad implica la inseguridad de que existan los precios. Sin embargo, es claro que el supuesto de estricta convexidad se convierte en un supuesto difícil de satisfacer en la realidad.

La razón para el empleo de los precios como elemento descentralizador parece radicar en que el desarrollo de cualquier disciplina parte considerando los resultados que pueden serle útil de lo desarrollado en otras disciplinas adyacentes a ella. En este sentido, la teoría de asignación de recursos, al tratar de mostrar la eficiencia de los mercados, adopta una caracterización de la economía y de su funcionamiento, que asegure la eficiencia de un sistema de mercado. En este contexto, resulta clara la existencia de precios implícitos. Desgraciadamente, al considerar caracterizaciones más realistas, desde el punto de vista de las abstracciones efectuadas por la teoría, nos encontramos con que no existen desarrolladas teorías, al respecto, ya que la teoría de asignación de recursos, sólo se ha preocupado de la caracterización y estabilidad de la asignación óptima (considerándola como dada) y de la posible consistencia del resultado de los mercados con ella. Por otra parte, para la descentralización de las decisiones (de la cual mucho se ha tomado) los precios son el elemento esencial, lo que hace que cualquier avance en este campo implique la utilización predominante de los precios.

En vista de la gran dificultad que se tiene al utilizar los precios como elemento descentralizador, surge la idea de los procedimientos por cantidades, como un camino más fructífero, no sólo por ser más representativo de lo que es la preparación de un plan, sino porque aparentemente, la convexidad no jugaría un papel tan importante. Sin embargo, como vimos en el procedimiento de -- Weitzman, se tienen algunos inconvenientes para poder -- ser puestos en práctica, y además, en este caso particular, los precios también juegan un papel como indicado - res de eficiencia, evaluan la capacidad que tiene cada - sector para cumplir con los objetivos de producción propuestos.

5. Otro camino que también parece importante y que no ha sido presentado en este trabajo, lo constituyen las metodologías que surgen en el campo de la agregación. En éstas se pretende también utilizar métodos iterativos, pero en los cuales en cada iteración se determinarían planes para toda la economía, con un grado de desagregación cre - ciente conforme aumente el número de etapas realizadas.- Esto significa que en la etapa final se construiría un - plan con un gran nivel de agregación, y para el cual - - existiría información en la oficina de planificación, -- plan que sería entregado a los sectores (las partes respectivas) y con la información recibida se construiría- otro plan con un nivel de agregación menor. En esta di - rección se han desarrollado trabajos en países socialistas.

Otro aspecto también importante para la posible utilización de diversas metodologías en nuestro campo es el que se refiere a que los procedimientos sean finitos. Tal como hemos observado, esta propiedad sólo se verá satisfecha en algunos de los casos lineales. En este sentido parece necesario desarrollar metodologías que de no poseer esta propiedad sean monótonas factibles y tengan incorporados criterios eficientes para detener el proceso antes del óptimo, ya que en el caso de metodologías no finitas es imposible la realización del número infinito de iteraciones que se requiere para la convergencia.

Por último señalaremos un aspecto que pude haber pasado desapercibido por el lector y es el hecho de que el problema planteado tiene un carácter estático. Esto significa, que tan solo nos hemos preocupado por cómo asignar una serie de recursos a una serie de actividades en un periodo determinado, lo que resultará restrictivo en la medida en que no existirá movilidad de recursos en periodos menores al considerado, situación que se presenta con frecuencia.

A N E X O   A
DEFINICIONES MATEMATICAS

Definición: Un conjunto C contenido en el espacio $\mathbb{R}^n$ es convexo si $\alpha x + (1-\alpha)y \in C$ cuando $x, y \in C$ y $0 \leq \alpha \leq 1$. La idea de esta definición es que, dados dos puntos cualesquiera del conjunto C, cada punto del segmento que los une es también un elemento del conjunto.

Definición: Un conjunto C contenido en el espacio $\mathbb{R}^n$ es abierto si para cualquier punto de C $a \in C$. $\exists$ $\varepsilon > 0$ tal que $S \subset C$ donde

$$S = \left\{ (x \in \mathbb{R}^n) \; / \; d\,(x,a) < \varepsilon \right\}$$

En otras palabras un conjunto es abierto, si para cualquier punto que pertenezca a él, existe una bola abierta con centro en dicho punto, totalmente contenida en el conjunto.

Definición: Un conjunto C contenido en el espacio $\mathbb{R}^n$ es cerrado si su complemento es abierto.

Definición: Sea E un conjunto de números reales. Si $\exists$ un número y tal que $x \leq y$ para todo $x \in E$, se dice que E está acotado superiormente y se dice que y es una cota superior de E.

Del mismo modo se define la cota inferior. Si E está acotado superior e inferiormente, se dice simplemente que E está acotado.

Sea X un espacio métrico. Se entiende que todos los puntos y conjuntos mencionados a continuación son elementos y subconjuntos de X

Definición: E es acotado si $\exists$ un número real M y un punto $q \in X$ tales que $d(p,q) < M$ para todo $p \in E$

Definición: Sea f(x) una función de $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, se dice que f(x) es cóncava si para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$ se cumple la siguiente condición.

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \geq \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y)$$

donde $\alpha \in [0, 1]$

y se dice que es estrictamente cóncava si se cumple la desigualdad estricta.

Definición: Supóngase que X e Y son espacios métricos $E \subset X$, $P \in E$. En estas condiciones, se dice que f es continua en p si para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que:

$$d_Y(f(x), f(p)) < \varepsilon$$

para todos los puntos $x \in E$, para los cuales $d_X(x,p) < \delta$

A N E X O B

FUNDAMENTOS DE PROGRAMACION MATEMATICA

Uno de los aspectos más importantes en el análisis del problema de programación lineal es la caracterización analítica de sus soluciones óptimas. Esta caracterización y sus consecuencias son el punto de partida de los métodos de solución -- del problema lineal. El propósito de este apéndice es establecer los teoremas fundamentales de la programación lineal y presentar algunas de sus formas equivalentes, así como sus consecuencias más elementales.

Este apéndice se desarrolla como sigue. Primeramente- se establecen algunas definiciones para proceder a especificar y demostrar el teorema fundamental de la programación lineal. Este teorema demuestra la importancia del concepto de - soluciones básicas de un sistema de ecuaciones lineales en la solución del problema de programación lineal. A continuación- se establece el teorema de dualidad y su forma equivalente, - el teorema de complementaridad. Estos teoremas representan la caracterización analítica de las soluciones óptimas del problema lineal. Finalmente, se presentan algunos ejemplos y - - aplicaciones de estos resultados al análisis y solución de - problemas lineales.

1.- Definiciones

Considere el sistema de ecuaciones lineales

$$Ax = b$$

donde A es una matriz mxn; b, un vector columna de m componentes; y x, un vector columna de n incógnitas. Sea B una submatriz de A de orden mxm que es no singular y suponga que los n-m componentes del vector x no asociados a las columnas de B se hacen igual a cero. Entonces, la solución del conjunto de ecuaciones resultante se denomina una solución básica con respecto a la base B. Los componentes de x asociados a las columnas de B se denominan variables básicas. Se dice que la solución básica es degenerada si una o más de las variables básicas tiene valor cero.

La idea de definir la solución básica del sistema $Ax = b$ es que si podemos escribir, por simplificar $A=\left[B, R,\right]$ donde B es una matriz no singular, entonces una solución de este sistema de ecuaciones puede determinarse observando que, si hacemos $Bx_B = b$ el vector $x = \left[x_B, 0\right] = \left[B^{-1}b, 0\right]$ es la solución que deseamos. Note que en una solución básica no degenerada es inmediata la identificación de las columnas de A que forman la matriz no singular B. Sin embargo, en una solución degenerada existe cierta ambigüedad para identificar B, pues, las variables básicas con valor cero pueden ser confundidas con las variables no básicas cuyo valor es cero también.

Sea el problema lineal

$$\begin{aligned} &\text{minimice} \quad cx \\ &\text{s.a.} \\ &\qquad Ax = b \\ &\qquad x \geq 0 \end{aligned}$$

donde A es una matriz de orden mxn; b, un vector columna de m componentes, c, un vector renglon de n componentes; y x, el - vector columna de n variables a determinar. Se dice que x es- una solución factible si satisface las restricciones de este problema. Si la solución factible es también básica se dice - que es una solución factible básica. Si algunas de las variables básicas son iguales a cero, se dice que es una solución- básica factible degenerada. Finalmente una solución factible que adquiere el valor mínimo de la función objetivo en el problema lineal se denomina solución óptima.

2.- Teorema fundamental de la programación lineal.

En esta sección procedemos a establecer, a través del teorema fundamental de la programación lineal, la importancia de las soluciones factibles básicas para resolver el problema de programación lineal. Específicamente, el teorema demuestra que en la determinación de soluciones óptimas del problema -- lineal, en forma estándar, es únicamente necesario considerar las soluciones factibles básicas de este problema.

TEOREMA FUNDAMENTAL- Dado un problema lineal en la forma - estándar en donde A es una matriz mxn y de rango m,

a. Si existe una solución factible, existe una solución factible básica.

b. Si existe una solución factible óptima, existe una solución factible básica que es óptima.

Prueba a. Denote por $a_1, a_2, \ldots, a_n$ las columnas de A y suponga que $x = (x_1, \ldots, x_n)$ es una solución factible. En términos de las columnas de A, esta solución satisface

$$x_1 a_1 + x_2 a_2 + \ldots + x_n a_n = b \quad . \quad . \quad . \quad (B.1)$$

Supongamos que exactamente p de las x_i variables son mayores que cero, y por conveniencia, que éstas son las primeras p variables. Esto es, el sistema anterior es equivalente a

$$x_1 a_1 + x_2 a_2 + \ldots + a_p x_p = b \quad . \quad . \quad . \quad (B.2)$$

y $x_k = 0$, $k = p+1, \ldots, n$. Tenemos dos casos que considerar:

Caso I: Suponga $a_1, \ldots, a_p$ son vectores linealmente independientes. Es claro que $p \leq m$. Si $p = m$ la solución es factible - básica. Si $p < m$, entonces, podemos encontrar entre los n-p vectores columnas restantes de A, m-p vectores que sean linealmente independientes, por ser A de rango m. Usando el valor de las variables correspondientes a estos m-p vectores, se obtiene una solución factible básica (degenerada.)

Caso 2: Suponga $a_1,...,a_p$ son vectores linealmente dependientes. Entonces, existen escalares $y_1,...,y_p$ alguno mayor que cero, tales que

$$y_1 a_1 + y_2 a_2 + ... + y_p a_p = 0$$

Multiplicando esta ecuación por un escalar ε y restándosela a la ecuación (B.1) se tiene

$$(x_1 - \varepsilon y_1) a_1 + (x_2 - \varepsilon y_2) a_2 + ... + (x_p - \varepsilon y_p) a_p = b$$

Note que esta ecuación es cierta para cualquier ε. Sin embargo, dado un ε las desigualdades $x_i - \varepsilon y_i \geq 0$ $i=1, ..., p$ no se cumplen necesariamente. Sea el vector $y = (y_1, y_2, ..., y_p, 0, 0, 0)$. Observe que $x - \varepsilon y$ es una solución de la ecuación (B.1) y en particular, Si $\varepsilon = 0$ se tiene $x \geq 0$, la solución factible original. Ahora bien, conforme ε aumenta su valor positivamente, cada componente i-ésimo de $x - \varepsilon y$ aumenta, disminuye o permanece constante dependiendo de que y_i sea negativo, positivo o cero. Como existe un y_i que es positivo, al menos uno de los componentes de $x - \varepsilon y$ disminuye cuando ε aumenta. Aumentamos ε hasta que uno o varios de los componentes $x - \varepsilon y$ sea cero.

Esto es, hagamos

$$\underline{\varepsilon} = \min (x_i / Y_i : Y_i > 0)$$

Para este valor $\underline{\varepsilon}$ tenemos que $x - \underline{\varepsilon} y$ es una solución-factible con, cuando más, p-1 variables positivas. Repitiendo este proceso podemos seguir eliminando variables positivas hasta obtener una solución factible con vectores columna que sean linealmente independientes. En este evento aplicamos el resultado del caso 1 y la prueba de a termina.

Prueba b. Sea $x = (x_1, \ldots, x_n)$ una solución óptima. De manera semejante a la prueba de a suponga que las primeras p componentes de x son positivas. Tendremos dos casos que analizar:

Caso 1: Los vectores $a_1, \ldots, a_p$ son linealmente independientes. La prueba es similar al caso 1 de a

Caso 2: Los vectores $a_1, \ldots, a_p$ son linealmente dependientes. La prueba es como en el caso 2 de a y sólo demostraremos que el vector $x-\varepsilon y$ ahí considerado es óptimo. Primeramente, se observa que el valor de la función objetivo para esta solución factible básica es $cx-\varepsilon cy$. Es claro que si $cy = 0$ la prueba termina. Suponga que cy es diferente de cero. Entonces, se observa que para valores de ε suficientemente pequeños, positivos o negativos, el vector $x-\varepsilon y$ es una solución factible. Para alguno de estos ε se tiene que $\varepsilon \cdot cy > 0$. Por lo tanto,

$$cx - \varepsilon cy < cx$$

que es una contradicción, pues x es la solución óptima. Esto termina la prueba del teorema fundamental.

La importancia del teorema fundamental es que permite reducir la búsqueda de soluciones óptimas del problema lineal en forma estándar, a su subconjunto finito formado por las soluciones factibles básicas. Teóricamente este problema resuelve el problema de programación lineal. En particular se observa que el número de soluciones factibles básicas en un problema lineal con m ecuaciones y n variables es a lo -- más

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!\ (n-m)\ !}$$

correspondiente al número de maneras de seleccionar m de las n columnas de la matriz A.

Es conveniente puntualizar que el teorema fundamental es sólo una alternativa para resolver el problema lineal; en general, esta alternativa resulta computacionalmente ineficaz. Sin embargo, la extensión de los argumentos de prueba de este teorema han servido de base para diseñar métodos de solución eficientes, tal como el método simplex.

El concepto de solución básica en un problema de programación lineal está relacionado con el concepto de punto -- extremo de un cierto politope convexo. Esta relación de conceptos, uno algebráico y otro geométrico, se describe a continuación.

Teorema 2 (Equivalencia de puntos extremos y soluciones básicas). Sea K el polítope convexo que consiste de los vectores x en R^n que satisfacen

$$\begin{aligned} Ax &= b \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

donde A es una matriz mxn de rango m y b es un vector columna de m componentes. Entonces un vector x es un punto extremo de K sí y sólo si $x \geq 0$ y x es una solución básica de $Ax = B$.

Para finalizar se establecerá un interesante resultado que se deduce de los teoremas de esta sección y que resume las propiedades del polítope convexo formado por las restricciones de un problema de programación lineal en forma estándar.

Teorema 3. Considere el conjunto convexo K del teorema 2.

a.- K tiene, al menos, un punto extremo si es no vacío.

b.- K tiene un número finito de puntos extremos

c.- El mínimo de la función lineal $z = cx$ sujeto a $x \in K$ se adquiere en un punto extremo de K.

3.- Dualidad en los problemas lineales.

Considere los problemas lineales

$$(P) \quad \begin{array}{l} \text{Minimice } cx \\ Ax \geq b \\ x \geq 0 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{l} \text{maximice } b^t y \\ A^t y \leq c^t \\ y \geq 0 \end{array} \quad (D)$$

donde A es una matriz mxn; b, un vector columna de m compo - nentes: c, un vector renglon de n componentes; x, un vector columna de n incógnitas; y, y, un vector columna de m variables. Estos problemas se denominan problemas lineales duales y se dice que (P) es el problema primal y (D) el correspon - diente problema dual. También se dice que estos problemas -- están en forma simétrica, pues, el vector de variables a determinar en ambos problemas es no-negativo y el número de -- restricciones del primal (dual) es igual al número de variables a determinar del problema dual (primal).

Esta definición de problemas lineales duales permite determinar el problema dual de un problema lineal cualquiera. Esto se obtiene, mediante la transformación del problema lineal original a la forma del problema (P). Por ejemplo, considérese el problema lineal en forma estándar.

$$(P') \quad \begin{array}{l} \text{Minimice } \quad cx \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{array}$$

que puede escribirse en forma equivalente como

$$\begin{aligned} &\text{Minimice } cx \\ &Ax \geq b \\ &-Ax \geq -b \\ &x \geq 0 \end{aligned}$$

cuyo correspondiente problema del dual sería

$$\begin{aligned} &\text{maximice } b^t y_1 - b^t y_2 \\ &A^t y_1 - A^t y_2 \leq c^t \\ &y_1 \geq 0 \quad y_2 \geq 0 \end{aligned}$$

donde y_1 y y_2 son vectores hilera de m componentes. Si -- $\lambda = y_1 - y_2$ podemos concluir que el correspondiente par de -- problemas duales asociados es

$$\text{(P')} \quad \begin{aligned} &\text{minimice } cx \\ &Ax = b \\ &x \geq 0 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} &\text{minimice } b^t \lambda \\ &A^t \lambda \leq c^t \end{aligned} \quad \text{(D')}$$

denominada la forma asimétrica, pues en un problema el vec - tor de variables es restringido y en el otro es no restrin - gido. En general, se cumple que si alguna de las desigualda- des del problema primal se cambia a igualdad, el componente- correspondiente del vector λ en el problema dual será una va riable no restringida. Recíprocamente, si alguno de los - - componentes del vector x en el problema primal es no restrin gido, la desigualdad correspondiente en el problema dual será igualdad.

4.- Teorema de dualidad

La relación más importante y significativa de los problemas definidos anteriormente será considerada ahora.

Con el propósito de establecer esta relación, denominada el teorema de dualidad, es conveniente considerar el siguiente resultado de los problemas lineales duales.

Proposición 1. Se cumple que

$$\min\,(cx;Ax\geq b,\ \ x\geq 0)\ \geq\ \max(b^t y;A^t y\ \leq c^t,\ y\ \geq\ 0)$$

Prueba. Sean x y y soluciones factibles (arbitrarias) de los respectivos problemas lineales duales. Entonces

$$c^t x \geq A^t y\ x = y^t A\ x \geq y^t b = b^t y$$

que es equivalente al resultado del teorema.

Corolario 1. Sean x^* y y^* soluciones factibles de los problemas lineales anteriores. Si $cx^* = b^t\, y^*$ se tiene que x^* y y^* son soluciones óptimas de estos problemas.

Se observa de estos resultados que las soluciones factibles de los problemas lineales duales permiten acotar el valor óptimo de las funciones objetivo. Asimismo, si el valor de la función objetivo de estas soluciones factibles es el mismo, las soluciones son óptimas. El resultado recíproco se implica del teorema de dualidad.

TEOREMA DE DUALIDAD.

Considere los problemas lineales duales

$$(P)\quad \begin{array}{l} \min\ z = cx \\ Ax \geq b \\ x \geq 0 \end{array} \qquad\qquad (D)\quad \begin{array}{l} \max\ w = b^t y \\ A^t y \leq c^t \\ y \geq 0 \end{array}$$

a. Si (P) y (D) son factibles tenemos min z = max w (finito)

b. Si (P) factible y (D) no factible tenemos min z - no acotado.

c. Si (D) factible y (P) no factible tenemos max w - no acotado.

d. Los problemas (P) y (D) pueden ser ambos no factibles.

Prueba a. Si x y y son soluciones factibles de (P) y (D) respectivamente, se tiene que $cx \geq b^t y$ (Proposición 1). Dedonde, a queda demostrada si existen soluciones factibles x y y tales que $cx \leq b^t y$. Probaremos que el sistema

$$Ax \geq b \quad : \quad A^t y \leq c^t \ ; \quad cx \leq b^t y; \quad x \geq 0 \quad y \geq 0$$

tiene solución. Este sistema puede escribirse como

$$\begin{bmatrix} A^t & 0 \\ 0 & -A \\ -b^t & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} c^t \\ -b \\ 0 \end{bmatrix} ; \quad \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix} \geq 0 \qquad (1)$$

Sin embargo, si este sistema no tiene solución sabemos que

$$[u,v,s]\begin{bmatrix} A^t & 0 \\ 0 & -A \\ -b^t & c \end{bmatrix} \geq 0 \qquad [u,v,s]\begin{bmatrix} c^t \\ -b \\ 0 \end{bmatrix} < 0 \qquad (2)$$

donde $u \geq 0$, $v \geq 0$ y $s \geq 0$, tiene solución

Note que s es un escalar y que los vectores hilera u y v tienen tantos componentes como número de columnas e hileras tiene la matriz A respectivamente. Analizaremos dos casos.

Caso 1: $s > 0$. Sin pérdida de generalidad, hagamos $s=1$. En este caso se tiene que existe $u \geq 0$ y $v \geq 0$, tales que.

$$Au^t \geq b \quad ; \quad A^t v^t \leq c^t \quad ; \quad cu^t < b^t v^t$$

Sin embargo, ésto contradice la proposición 1.

Caso 2: $s = 0$. Si el sistema (2) tiene solución se tiene que

$$\begin{bmatrix} A^t & 0 \\ 0 & -A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} c^t \\ -b \end{bmatrix} \quad ; \quad \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix} \geq 0$$

no tiene solución. Sin embargo, ésto contradice la suposición inicial, esto es, (P) y (D) son factibles. Estos argumentos demuestran que a se cumple.

Dada la simetría b y c sólo probaremos b. Primera -

mente, si (D) es no factible, se tiene que:

$$A^t \quad y \leq c' \quad ; \quad y \geqslant 0$$

no tiene solución. Consecuentemente,

$$A\lambda \geqslant 0 \quad ; \quad c\lambda < 0 \quad ; \quad \lambda \geqslant 0$$

tiene solución. Por otra parte, sea x una solución factible de (P), esto es, $Ax \geqslant b$; $x \geqslant 0$. Entonces, se observa que el vector $x + \alpha\lambda$ donde $\alpha > 0$, satisface las restricciones

$$A\ (x+\alpha\lambda) \geqslant b \quad ; \quad x + \alpha\lambda \geqslant 0$$

y el valor de la función objetivo es $z = cx + \alpha c\lambda$. Sin embargo, si α tiende a infinito el valor de z tiende a menos infinito. De ésto se concluye que el mínimo de z es no acotado. Finalmente, es sencillo construir ejemplos de problemas lineales duales que sean ambos no factibles.

Una forma equivalente y simple de establecer el teorema de dualidad se resume a continuación.

Corolario 2. (Teorema de dualidad)

Si alguno de los problemas lineales duales (P) o (D) tiene solución óptima, lo mismo es cierto del otro problema y el correspondiente valor de la función objetivo es el mismo. Por otra parte, si uno de los problemas tiene función objetivo no acotada, el otro problema no tiene solución factible.

Las soluciones óptimas de los problemas lineales duales satisfacen ciertas relaciones adicionales que permiten establecer una interpretación económica de los mismos. Estas relaciones se resumen en el siguiente resultado denominado el -- Teorema de complementaridad.

<u>TEOREMA DE COMPLEMENTARIDAD</u>. Considere los problemas lineales-duales.

$$\text{(P)} \quad \begin{array}{l} \min \quad z = cx \\ Ax \geq b \\ x \geq 0 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{l} \max \quad w = b^t y \\ A^t y \leq c^t \\ y \geq 0 \end{array} \quad \text{(D)}$$

Sean x* y y* soluciones factibles de los problemas respectivos. Entonces, una condición necesaria y suficiente para que x* y y* sean soluciones óptimas es que satisfagan las relaciones.

a. $x_i^* > 0$ implica $a^i y = c_i$

b. $x_i^* = 0$ si $a^i y < c_i$

c. $y_i^* > 0$ implica $a_j x = b_j$

d. $y_j^* = 0$ si $a_j x > b_j$

donde a_j (a^i) es el i-ésimo (j-ésimo) vector renglón (columna) de la matriz A.

<u>Prueba</u>. Si x* y y* son soluciones factibles de (P) y (D) respectivamente.

$$\alpha = y^t \cdot (Ax^* - b) \geq 0$$

$$\beta = (c - y^t \cdot A)\, x^* \geq 0$$

De donde, $\alpha + \beta = cx^* - b^t y^*$. Sin embargo, el teorema de dualidad establece que x^* y y^* son soluciones óptimas sí y sólo sí se cumple que $cx^* = b^t y^*$; que es equivalente a $\alpha = 0$ y $\beta = 0$. Esto termina la prueba, pues las relaciones del teorema son fáciles de implicar dado que α y β resultan del producto de vectores no negativos.

5.- Ejemplos y aplicaciones

En esta sección se considera la aplicación del teorema de dualidad o su equivalente, el teorema de complementaridad, al análisis o solución de algunos problemas de programación lineal.

1.- Considere el problema lineal.

$$\text{maximice} \quad z = 20x_1 + 10x_2 + x_3 + 15x_4$$

$$(P) \quad \begin{array}{l} 3x_1 + 2x_2 + 10x_3 + 3x_4 \leq 10 \\ 2x_1 + 4x_2 + 20x_3 + x_4 \leq 15 \\ x_1 \geq 0 \;;\; x_2 \geq 0 \;;\; x_3 \geq 0 \;;\; x_4 \geq 0 \end{array}$$

Determine la solución óptima de este problema y de su dual.

El problema dual de (P) es

$$
\text{Minimice } w = 10\lambda_1 + 15\lambda_2
$$

$$
(D) \quad
\begin{aligned}
3\lambda_1 + 2\lambda_2 &\geqslant 20 \\
2\lambda_1 + 4\lambda_2 &\geqslant 10 \\
10\lambda_1 + 20\lambda_2 &\geqslant 1 \\
3\lambda_1 + \lambda_2 &\geqslant 15 \\
\lambda_1 \geqslant 0 \; ; \; \lambda_2 &\geqslant 0
\end{aligned}
$$

cuya solución óptima, obtenida graficamente es,

$$
w^* = 200/3 \quad ; \quad \lambda_1^* = 20/3 \; ; \quad \lambda_2^* = 0
$$

Usando esta información y el teorema de complementaridad se implica que la solución óptima x^* de (P) satisface -

$$
x_2^* = 0 \quad ; \quad x_3^* = 0 \quad ; \quad x_4^* = 0
$$

pues la segunda, tercera y cuarta restricciones del problema-dual se satisfacen con estricta desigualdad cuando se sustituye la solución óptima $(\lambda_1^*, \lambda_2^*)$. Por otra parte, dado que -- λ_1^* es positivo se implica que la solución óptima del problema (P), satisface con igualdad la primera de las restricciones de desigualdad, esto es, se cumple que

$$
3x_1^* + 2x_2^* + 10x_3^* + 3x_4^* = 10
$$

Sin embargo, dado que $x_2^* = x_3^* = x_4^* = 0$ se tiene --

$x_1^*=10/3$. Finalmente, es fácil verificar que el vecto x^* es una solución factible del problema (P), y que el valor de la función objetivo es $z^* = 200/3$. Esto demuestra que x^* es la solución óptima del problema (P)

6.- Asignación de recursos en una economía en competencia perfecta.

Considere una economía formada por m industrias ($k=1,\ldots,m$) que planean sus actividades para maximizar sus respectivas ganancias. Suponga que cada industria k tiene caracterizado su nivel de actividades por un vector x_k, y sus restricciones de producción o tecnológicas por medio del sistema

$$B_k x_k \leq b_k$$

$$x_k \geqslant 0$$

donde B_k es una matriz $m_k x n_k$; y b_k un vector columna de m_k - componentes. Puede decirse que b_k es el vector de máxima capacidad (i.e. número de máquinas, horas-hombre, etc). disponible en la industria k. Asimismo, cada elemento (i,j) de la matriz b_k puede interpretarse como la cantidad de recurso i necesario para tener una unidad de nivel de la actividad j. Las ganancias en la industria son dadas por $c_k x_k$, donde c_k es un vector hilera de n_k componentes.

Las industrias consumen un determinado número de recursos básicos cuya cantidad depende del nivel de actividad a que operen. Específicamente, la industria k consume un vector de recursos $A_k x_k$, donde A_k es una matriz $m_0 x n_k$. Sin embargo, los recursos básicos son limitados, e igual al vector s.

Consecuentemente, la suma de los recursos básicos consumidos por todas las industrias deben ser menor o igual a s, esto es:

$$(0) \qquad \sum_{k=1}^{m} A_k x_k \leq s$$

Ante esta situación, el gobierno decide que los precios de los recursos básicos sean cero si al seleccionar las industrias separadamente sus niveles óptimos de actividades se satisface la restricción anterior. En el caso contrario, el gobierno establecerá un vector de precios p sobre los recursos de manera tal que la restricción (0), se satisfaga. En tal caso cada industria k=1,...,m buscará

$$\text{maximizar } z_k = (c_k - pA)x_k$$

$$B_k x_k \leq b_k$$

$$x_k \geq 0$$

Podemos interpretar a la función objetivo de este problema diciendo que la ganancia de la industria k será $c_k X_k$

menos la cantidad de dinero que debe pagar por los recursos básicos que consume, esto es, pAx_k.

El Departamento de Control del Estado procede a la determinación del vector de precios que permitirá reducir el consumo de recursos básicos por las industrias a una cantidad menor o igual a s. Con este propósito, el Departamento plantea el problema lineal:

$$(1) \qquad \max z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_mx_m$$

$$(2) \qquad \begin{array}{lllll} A_1x_1 & + A_2x_2 & + \cdots & + A_mx_m & \leq s \\ B_1x_1 & & & & \leq b_1 \\ & B_2x_2 & & & \leq b_2 \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & B_mx_m & \leq b_m \\ x_1 \geq 0 & x_2 \geq 0 & \cdots & x_m \geq 0 & \end{array}$$

Este problema correspondería a pedir que el conjunto de industrias maximicen sus ganancias totales, pero que el consumo de recursos básicos no exceda el vector de cantidades disponibles. Supongamos que en este problema las ganancias totales son acotadas. Equivalentemente, existe una solución óptima a este problema. En consecuencia, existe solución óptima del problema lineal dual asociado a (1)-(2), i.e.,

(4) $\min w = ps + y_1b_1 + y_2b_2 + \dots y_mb_m$

$$pA_1+y_1B_1 \geqslant c_1$$

$$pA_2+y_2B_2 \geqslant c_2$$

(5) $$\dots\dots\quad .$$

$$pA_m+y_mB_m \geqslant c_m$$

(6) $$p \geqslant 0 \ ; \ y_i \geqslant 0 \ \ i=j,\dots m.$$

A N E X O   C

ALGORITMO DE DANTZIG WOLFE

En el capítulo tres se hizo la siguiente afirmación: 'El procedimiento de Malinvaud es una mera generalización -- del algoritmo de Dantzig Wolfe'. Para justificar dicha afirmación, es necesario conocer el procedimiento de Dantzig - - Wolfe, el cual se desarrollará en el presente anexo.

Supóngase que una economía se puede describir mediante un modelo lineal. Y que los recursos de la economía se -- pueden dividir en dos categorías: aquellos que son de uso común de todos los sectores de la economía, y que por lo tanto habrá que asignarlos óptimamente, y aquellos que ya están - distribuidos entre los sectores (con moviliada nula).

Llamaremos H_k y L_k a las matrices de coeficiente técnicos de los procesos productivos del sector k, con respecto a los recursos fijos del sector y a los recursos comunes que deberán de ser distribuidos, respectivamente. Sea x_k un vector columna cuyas componentes serán los niveles de actividad de cada uno de los procesos existentes en el sector k. Por - tanto, H_k x_k corresponde al vector de demandas de recursos - fijos del sector k, y L_k x_k al vector de demandas de los recursos comunes del mismo sector. Sea c_k el vector hilera de-ponderaciones de las actividades del sector k en la función objetivo. Por último, sea b el vector columna de recursos existentes en el sector k y d el vector columna de recursos a ser asignados.

Por lo tanto en este caso el problema de asignación consistiría en:

$$\text{Máx} \sum_{k=1}^{n} c_k x_k$$

$$\begin{aligned} \text{s.a.} & \\ & H_k\, x_k \leq b_k \qquad \forall\, k \in \overline{1,n} \\ & \sum_{k=1}^{n} L_k\, x_k \leq d \\ & x_k \geq 0 \qquad \forall\, k \in \overline{1,n} \end{aligned} \tag{C.1}$$

Se tratará de llegar al óptimo de una manera descentralizada, la cual consistirá en dar un conjunto de precios para los recursos comunes a ser asignados y entregar dichos precios a cada uno de los sectores para que maximicen sus beneficios.

Cabe señalar la estructura especial que tiene la matriz de restricciones de problema, puede verse que algunos renglones de la matriz sólo involucran a un bloque de variables, por ejemplo la matriz H_k sólo involucra a las variables del sector k, mientras que otro bloque de restriccio - nes involucra a casi todas las variables del problema; por- ejemplo, L_k.

De hecho la aplicación de todos los metodos de planificación descentralizada están basados en esta característica especial de la matriz de restricciones del problema a resolver, y esta misma característica nos da idea de la multitud de problemas que se pueden resolver mediante algún -- algoritmo de planificación descentralizada sin ser necesa - riamente la planificación de una economía. (Obśervese que a nivel de una empresa esta sería casi siempre la estructura- de la matriz de restricciones).

Si se llama p al vector hilera de precios asociados al vector d tendríamos que el costo unitario por proceso de los recursos comunes estaría dado por el elemento correspondiente en el vector pL_k; por lo tanto, el vector de beneficios unitarios será $c_k - pL_k$. Con esto el problema que debería plantearse cada sector sería:

$$\begin{aligned} &\text{Máx} \quad (c_k - pL_k) \; x_k \\ &\text{s.a.} \\ &\quad H_k \, x_k \leq b_k \qquad\qquad (C.2) \\ &\quad x_k \geq 0 \end{aligned}$$

Obsérvese que el problema (C.1) puede escribirse simplemente como:

$$\begin{aligned} &\text{Máx } c.x \\ &\text{s.a.} \\ &\qquad A.x \leq b \\ &\qquad x \geq 0 \end{aligned}$$

donde: $c=(c_1,c_2,\ldots c_k,\ldots c_n)$

$b=(d,b_1,b_2,\ldots b_k,\ldots b_n)^t$

$x=(x_1,x_2,\ldots x_k,\ldots x_n)^t$

$$A = \begin{bmatrix} L_1 & L_2 & \ldots & L_k & \ldots & L_n \\ H_1 & \emptyset & \ldots & \emptyset & \ldots & \emptyset \\ \emptyset & H_2 & \ldots & \emptyset & \ldots & \emptyset \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \emptyset & \ldots\emptyset & \ldots & H_k & \ldots & \emptyset \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \emptyset & \ldots\emptyset & \ldots & \emptyset & \ldots & H_n \end{bmatrix}$$

Este problema es factible de ser resuelto por el algoritmo simplex; sin embargo la existencia de matrices con este tipo de estructura, hizo pensar en la posibilidad de efectuar alguna modificación para aprovechar la existencia-de submatrices nulas así distribuidas, con el objeto de reducir la dimensión del problema a ser resuelto y disminuir el tiempo computacional a ser empleado.

Llamemos G_k al conjunto de soluciones factibles para la unidad productiva k (lo que en el procedimiento de Malinvaud se denomino Y_k), o sea:

$$G_k = \left\{ x_k \mid H_k\ x_k \leq b_k\ ;\ \ x_k \geqslant 0 \right\}$$

Es fácil ver que este conjunto es convexo y cerrado, si además se supone que es acotado, se puede asegurar que los conjuntos G_k son poliedros convexos. Y por consiguiente, se podría utilizar una propiedad de los poliedros, la cual consiste en que cualquier punto del conjunto puede ser expresado como combinación lineal convexa de sus puntos extremos.

Si se denomina x_{ki} a los puntos extremos del poliedro convexo G_k, se tendrá que:

$$x_k = \sum_{i=1}^{g_k} \lambda_{ki} x_{ki} \quad \forall\, x_k \in G_k \qquad \forall\, k \in \overline{1,n}$$

con $$\sum_{i=1}^{g_k} \lambda_{ki} = 1 \quad \forall\, k \in \overline{1,n} \qquad \text{y} \qquad \lambda_{ki} > 0 \quad \forall\, i \in \overline{1,g_k}$$

donde g_k corresponderá al número de puntos extremos (finito) dado que G_k es un poliedro.

Se puede llamar l_{ki} al vector de demandas de recursos comunes, si el sector k estuviera produciendo lo indicado por el punto extremo x_{ki}, o sea:

$$l_{ki} = L_k \; x_{ki}$$

y c_{ki} al valor de la producción del sector k, si estuviera --operando en el punto extremo x_{ki}, o sea:

$$c_{ki} = c_k \, x_{ki}$$

Entonces el problema C.1 puede reescribirse como:

$$\text{Máx} \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{g_k} \lambda_{ki} c_{ki}$$

$$\text{s.a.}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{g_k} \lambda_{ki} l_{ki} \leq d \qquad (C.3)$$

$$\sum_{i=1}^{g_k} \lambda_{ki} = 1 \qquad \forall k \in \overline{1,n}$$

$$\lambda_{ki} \geq 0$$

donde las variables a determinar serían las ponderaciones --asociadas a los puntos extremos de los diferentes poliedros-G_k.

Esta nueva versión del problema de asignación se diferencía de (C.1) en el hecho de que se produce una disminución en el número de restricciones (ahora solo hay una restricción por cada sector), conjuntamente con un aumento -- del número de variables (el número de puntos extremos en - un poliedro normalmente es mayor que la dimensión del espacio, en que está definido); aún así el balance es positivo, ya que lo que determina la dimensión del problema y, en consecuencia, el número de iteraciones es el número de restricciones, el cual ha disminuido; en cambio, el aumento de variables no afectará en forma importante el número de iteraciones.

Aparentemente, se requiere de una enumeración completa de los puntos extremos, lo cual haría perder mérito a esta variante del problema, debido a los problemas de información que originaría. Sin embargo esto no es así. Supongase- que en la etapa t, se contara con una matriz básica Bt, asociada a la iteración t del algoritmo simplex.

Es sabido que a cada una de las iteraciones del método simplex, está asociada una cierta asignación de recursos, la cual a su vez tiene implícitos un conjunto de precios que están asociados a las restricciones del problema (dichos precios serían precisamente las variables duales). Dicho conjunto de precios se obtiene al premultiplicar el vector de ponderaciones asociado a las actividades básicas (c^{Bt}) por la matriz básica inversa (Bt^{-1}).

Pero en este caso se tienen dos tipos de restricciones, unas relacionadas con los recursos a ser asignados y las otras con el hecho de que la suma de las ponderaciones en la combinación convexa de los puntos extremos debe ser unitaria. Para facilitar el tratamiento de los diferentes tipos de precios, particiónese el vector ($c^{Bt}Bt^{-1}$) en (P^t, V^t), correspondiendo P^t a los asociados a las restricciones de recursos y V^t al resto de las restricciones. El vector P^t puede interpretarse como un conjunto de precios para los recursos, en la asignación determinada por la base Bt; por su parte, el vector V^t sólo puede ser interpretado como un conjunto de precios en el sentido de que valoran cuál sería el impacto sobre la función objetivo (estando en la base Bt) si aumenta marginalmente la capacidad productiva del sector.

Se tienen ya los elementos para aplicar el criterio del simplex en nuestro problema, con objeto de saber si existe una base que sea adyacente a Bt y que tenga asociado un mejor valor de la función objetivo. El criterio simplex compara c_{ki} con z^t_{ki} tal que si $c_{ki} - z^t_{ki}$ es positivo para algún ki significa que existe una base adyacente a Bt que proporciona un mayor valor de la función objetivo.

Siendo z^t_{ki} el escalar que resulta de postmultiplicar el vector (P^t,V^t) por la columna de la matriz de coeficien - tes correspondiente a las variables λ_{ki}, es decir:

$$z^t_{ki} = (P^t,V^t).\ (1_{ki} + c_k)$$

$$= P^t 1_{ki} + V^t c_k = P^t 1_{ki} + V^t_k$$

Por lo que:

$$c_{ki} - z^t_{ki} = c_{ki} - P^t 1_{ki} - V^t_k$$

según el criterio simplex, se deberá encontrar una actividad sr tal que:

$$c_{sr} - z^t_{sr} = \underset{\forall ik}{\text{Máx}} \left\{ c_{ki} - z^t_{ki} \right\} = \underset{\forall ik}{\text{máx}} \left\{ c_{ki} - P^t 1_{ki} - V^t_k \right\}$$

y una vez encontrada, si es positivo, se deberá incorporar a la base y pasar a la siguiente iteración; el caso contrario- significará haber llegado a la base óptima.

Para encontrar la actividad que maximiza los coefi-- cientes de costo reducido, se pueden realizar dos etapas. La primera consistiría en buscar entre los índices i y, para todo k, aquel que lo haga máximo; y, la segunda en buscar el - máximo para los subíndices k dados los resultados de la etapa anterior.

Dado que V_k^t no depende de i, la primera etapa consistiría en:

$$\underset{i}{\text{máx}} \left\{ c_{ki} - P^t l_{ki} \right\} \qquad \forall k \in \overline{1,n} \qquad (C.4)$$

si se recuerda la definición de c_{ki} y l_{ki}, lo anterior es equivalente a:

$$\underset{i}{\text{máx}} \left\{ \left(c_k - P^t L_k \right) \cdot x_{ki} \right\} \qquad \forall k \in \overline{1,n}$$

donde x_{ki} corresponde a un punto extremo de G_k

Y sí se recuerda que el teorema fundamental de la programación lineal establece que si el conjunto determinado por las restricciones es acotado, entonces por lo menos en uno de los puntos extremos estará definido al máximo; por lo tanto, resolver (C.4) es quivalente a:

$$\begin{aligned} &\text{Máx} \quad \left(c_k - P^t L_k \right) \cdot x_k \\ &\text{s.a.} \\ &\qquad B_k x_k \leq b_k \qquad\qquad \forall k \in \overline{1,n} \\ &\qquad x_k \geqslant 0 \end{aligned}$$

y se llega finalmente a un problema que tiene la forma del problema planteado inicialmente (C.2)

Con esto se puede ver que el problema (C.4) consiste en que todos los sectores determinen cual es el programa de producción que maximiza sus beneficios, dado el vector - de precios para los recursos entregados por la oficina de - planificación en cada etapa. Este cálculo puede ser realizado en cada sector y lo único que se requiere para continuar el procedimiento es que la oficina de planificación reciba- la información respecto al punto extremo en el que se situará cada unidad productiva. A diferencia del procedimiento - de Malinvaud los programas de producción que envían las - - empresas a la oficina de planificación no son necesariamente puntos extremos, pero se obtienen bajo el mismo principio de maximizar los beneficios de la empresa dado los precios- que determino la oficina de planificación.

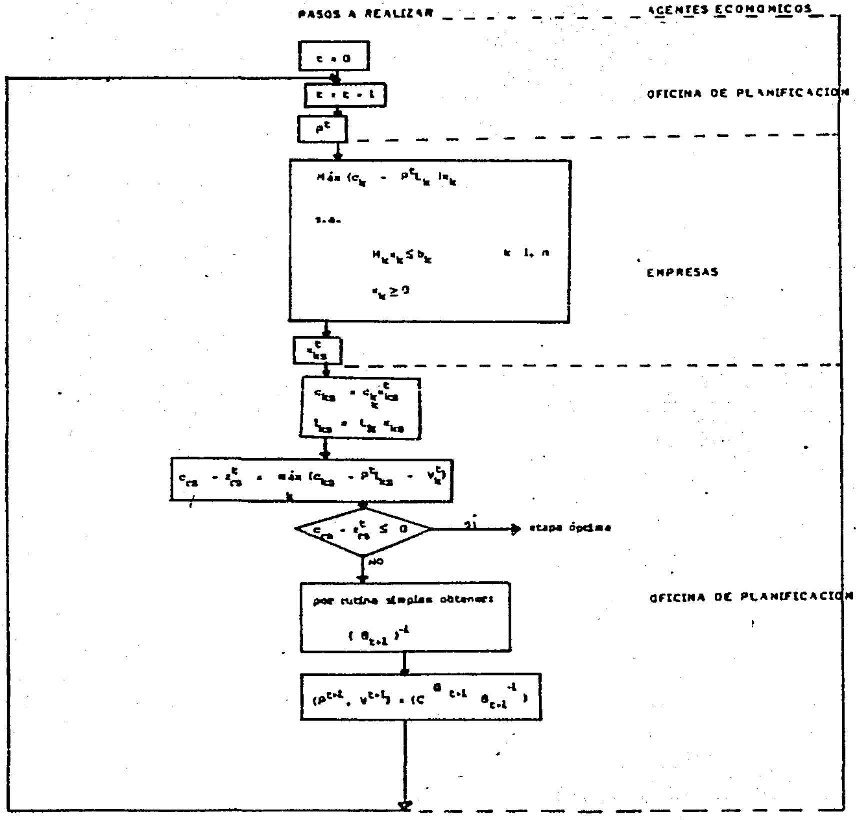
Si se llama x_{ks}^{t} al punto extremo en el que se situa el sector k en la etapa t del procedimiento, la oficina de- planificación procederá a buscar la actividad rs tal que:

$$c_{rs} - z_{rs}^{t} = \max_{k} \left\{ \left(c_{ks} - P^{t} 1_{ks} - V_{k}^{t} \right) \right\}$$

Esta expresión es bastante interesante; ya que nos- dice que es necesario comparar el beneficio que genera la - actividad ks, con algo que se podría denominar precio de su capacidad. Si el beneficio es mayor que dicho precio, significa que es rentable el aumentar la producción de la empresa k, y por lo tanto, se le podrían asignar más recursos a-través de introducir dicha actividad en la base. Conocidos los sectores para los cuales es rentable el asignar más recursos, se escogerá aquel en que el beneficio tenga la mayor diferencia con el precio de su capacidad, introduciendo la actividad correspondiente a la base (obteniéndose, por tanto, B_{t+1}). Así pues, la oficina de planificación está en condiciones de volver a repetir el procedimiento.

Aparentemente la oficina de planificación necesitaría conocer todos los puntos extremos de los conjuntos de posibilidades de producción de cada sector para poder resolver el problema que le corresponde; pero esto no es así, ya que sólo necesita conocer aquellos puntos extremos que están en la base inicial, y conforme se vayan realizando las iteraciones subsecuentes los sectores le darán a conocer los puntos extremos, de los cuales escogerá el que entre a la base. Puede observarse que, aunque no realiza explícitamente ninguna nueva aproximación al conjunto de posibilidades de producción de cada sector, como en el procedimiento de Malinvaud, el hecho de cambiar de base implica un mayor conocimiento de los conjuntos de posibilidades de producción de cada sector.

Se está pues en condiciones de mostrar el diagrama de flujo asociado al procedimiento de Dantzig-Wolfe.


PASOS A REALIZAR
AGENTES ECONOMICOS
t = 0
t = t + 1
OFICINA DE PLANIFICACION
Máx
s.a.
EMPRESAS
máx
etapa óptima
NO
por rutina simplex obtener:
OFICINA DE PLANIFICACION

Se a presentado un método de resolver el problema -- (C.1) a partir de la solución de subproblemas de la forma -- (C.2), y por lo tanto es conveniente señalar algunas relaciones existentes entre ambas alternativas.

La primera relación consiste en que la solución óptima del problema (C.1) es solución óptima de los subproblemas de la forma (C.2). Para demostrar esto se plantean los problemas duales asociados a cada uno.

El dual de (C.1) es :

$$\text{mín } Pd + \sum_k w_k b_k$$

s.a.

$$PL_k + w_k H_k \geq c_k \qquad \forall k \in \overline{1,n} \qquad (C.5)$$

$$P,\ w_k \geq 0 \qquad \forall k \in \overline{1,n}$$

El dual de (C.2) es:

$$\text{Mín } w_k b_k$$

s.a.

$$w_k H_k \geq c_k - PL_k \qquad \forall k \in \overline{1,n} \qquad (C.6)$$

$$w_k \geq 0$$

donde w_k corresponde al vector de precios duales asociados a las restricciones b_k y P a las restricciones d.

Tanto (C.5) como (C.6) tienen solución, en virtud de que los conjuntos de solución de los problemas primales son acotados y no vacíos y, por lo tanto, existe una solución - óptima para ambos problemas.

Si x_k^* , w_k^* y P^* son soluciones de (C.1) y (C.5) respectivamente, se tendrá que demostrar que también son soluciones óptimas de (C.2) y (C.6).

Se puede observar que son soluciones factibles de los subproblemas, dado que satisfacen las restricciones de (C.2) y (C.6). Por lo tanto se cumple que:

$$(c_k - P^*L_k) \quad x_K^* \leq w_k^* b_k \qquad \forall k \in \overline{1,n}$$

es decir: $$w_k^* b_k + P^* L_k x_k^* - c_k x_k^* \geq 0 \quad \forall k \in \overline{1,n}$$

Para que sean soluciones óptimas de (C.2) y (C.6) res pectivamente, se requiere que la expresión anterior se cumpla estrictamente como igualdad. Si se suma sobre k obtenemos:

$$\sum_k w_k^* b_k + \sum_k P^* L_k x_k^* - \sum_k c_k x_k^* \geq 0 \quad (C.7)$$

Pero en virtud de que x_k^* , w_k^* y P^* son solucio - nes óptimas de (C.1) y (C.5) se cumple que;

$$\sum_k c_k x_k^* = P^* d + \sum_k w_k^* b_k$$

por lo tanto (C.7) es equivalente a:

$$\sum_k P^* L_k x_k^* - P^* d \geq 0$$

Como x_k^* es solución óptima de (C.1) se puede suponer que:

$$\sum_k L_k x_k^* = d$$

multiplicando por P^* $\sum_k P^* L_k x_k^* - P^* d = 0$

Se puede concluir que:

$$\sum_k w_k^* b_k + \sum_k P^* L_k x_k^* - \sum_k c_k x_k^* \geq 0$$

y dado que para cualquier k el término correspondiente es mayor o igual que cero, se puede asegurar que:

$$w_k^* b_k + P^* L_k x_k^* - c_k x_k^* = 0 \qquad \forall k \in \overline{1,n}.$$

que es lo que se quería demostrar.

Uno de los grandes problemas de este procedimiento -- surge del hecho de que, aunque la solución óptima del problema (C.1) es solución óptima del problema (C.2), la implicación contraria no es necesariamente cierta.

Se puede observar que si $\overset{\circ}{x}_k$ y $\overset{\circ}{w}_k$ son soluciones óptimas de (C.2) y (C.6) respectivamente (con $P=P^*$), los -- $\overset{\circ}{x}_k$ satisfacen en el problema (C.1) las restricciones de re -

cursos fijos; sin embargo, no existe razón para asegurar que se satisfagan las restricciones de recursos a ser asignados; a su vez, los $\overset{o}{w}_k$ son soluciones factibles de (C.5), sin embargo no tienen porqué ser óptimas.

Este hecho parecería contradictorio con todo lo antes señalado; sin embargo esto no es así, ya que el problema (C.3) que es equivalente al problema (C.1), no tiene porqué dar como resultado, niveles de actividad que correspondan a puntos extremos de los conjuntos G_k, lo cual si sucede con los $\overset{o}{x}_k$. El problema (C.3) da a la solución óptima valores para las ponderaciones de los puntos extremos de los G_k y la combinación lineal de los puntos extremos no tiene porqué corresponder a un punto extremo del conjunto G_k.

Existe un caso bastante significativo, que es una buena muestra de este problema. Supongamos que en la solución óptima de (C.3) resultara que la capacidad productiva del sector k no debe estar ocupada plenamente. Esto significa que los precios duales asociados a los factores fijos del sector son nulos ($w_k^* = 0$). Pero dado que existe correspondencia de la solución óptima de (C.1) y (C.5) con (C.2) y (C.6) respecivamente, se tiene que:

$$(c_k - P^* L_k) \ \bar{x}_k^* = \hat{w}_k b_k = 0$$

Además, al estar la capacidad productiva del sector - desocupada en el problema central, x_k^* será un punto inte -- rior de G_k. Pero sucede que dado que x_k^* es solución óptima- de (C.2) y y $\overset{\circ}{x}_k$ también lo es, se tiene:

$$(c_k - P^* L_k) \; \overset{\circ}{x}_k = (c_k - P^* L_k) \; x_k^* = 0$$

Lo cual significa que $c_k - P^* L_k$, constituyen un vec - tor nulo, pues si no lo fuera, sería imposible que un punto- extremo (que es frontera), originará el mismo beneficio que un punto interior.

Está por demás decir lo que significa el que las pon- deraciones de una función objetivo sean nulas, en términos - de tratar de tomar una decisión.

Finalmente cabe señalar que sería equivalente, que al sector se le entregará alguna instrucción que no significara maximizar beneficios, siempre y cuando ésta implicará si -- tuarse en un punto extremo de G_k. Esto se debe a que el cri- terio del simplex para obtener la actividad que entra en la- base, teóricamente no disminuye el número de iteraciones pa- ra llegar a la solución óptima. Por lo tanto, cualquier - - otro criterio que implique que el sector se sitúe en un pun- to extremo de G_k sería igualmente válido, y originaría proce dimientos alternativos.

B I B L I O G R A F I A

Teoría de la Planificación Económica
Heal, G.M.,
Claraso, S.A. 1977 España
North-Holland Publishing Company 1973

Procedimientos descentralizados en la preparación de planes
Ocampo Arenal Emilio
Serie C-Docencia No. 10
Publicaciones del Centro de Estudios Estadístico-Matemáti - cos de la Universidad de Chile.

Activity analysis in the theory of growth and planning
Malinvaud, Edmond, ed
Mac. Millan 1967

Notes sur l'etude des procedures de planification
Malinvaud, Edmond, ed
Cjnadian Journal of Economics
Fe'vrier 1968

Théorie des prix et décentralisation des décisions por dua- lité
Monographies du séminaire d'econometre publicés sous la di- rection de Rene Roy et Edmon Malinvaud par Dominique Lacaze
Editions du centre national de la recherche scientifique -- 1976-France

Socialismo y Capitalismo Comparados / La teoría General de- Keynes
Arthur Cecil Pigou. Traducción castellana de Manuel Sacris- tán y Alfredo Pastor
5ta. Edición, Editorial Ariel, S.A.

Sobre la Teoría Económica del Socialismo
Oskar Lange y Fred M. Taylor. Traducción castellana de Antonio Bosch Doménech y Alfredo Pastor Bodmer.
4ta. Edición. Editorial Ariel, S.A.

Introduction to Linear and Nonlinear Programming.
Luenberger, D.Q.
Addisson-Wesley, 1973.

Linear Programming and Network Flows.
Bazara, M.S. y Jarvis J.J.
Addisson-Wesley, 1976

Linear Programming
Katta Murty.
John-Waley, 1983.