UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

Facultad de Ciencias

Proyecto de Texto para el Colegio de Bachilleres en Matemáticas Financieras I y II

TESIS PROFESIONAL

Que para obtener el título de:

licenciado en actuaria

p r e s e n t a :

JUAN GERARDO PESCADOR RAMIREZ

MEXICO, D. F. 1985

PROLOGO

Aprovecho esta preliminar para mencionar dos cosas; el motivo que me hizo pensar en la presente tesis y el propósito con el que puede contribuir.

Antes de ingresar a la Facultad de Ciencias, recibí clases de matemáticas financieras en el Colegio de Bachilleres plantel no. 3 momento desde el cuál me gustó dicha materia, por lo que al final de la carrera no descarté la posibilidad de considerar ésta área para este trabajo.

Al cabo del tiempo encontré en la biblioteca del Sistema de Enseñanza Abierta del Colegio de Bachilleres, una guía de estudios para los exámenes correspondientes a ese sistema, elaborada por la Act. Himmelstine E. Lilia y el Act. Toledano y C. M. Alfonso; guía que tomé como base para cubrir gran parte del programa de matemáticas financieras del Colegio de Bachilleres.

El propósito de esta tesis es precisamente, tratar cada objetivo del programa o plan de estudios de matemáticas financieras del Colegio de Bachilleres de modo que el estudiante de dicha institución pueda encontrar en una sola fuente, ahorrando tiempo, toda la información que necesita, obteniendo una concreta y clara idea de cada concepto.

INDICE GENERAL

INTRODUCCION

Las operaciones bancarias y comerciales se pueden llevar bajo un buen control mediante una adecuada administración, contabilidad, investigación de operaciones, etc, y utilizando la herramienta de las matemáticas financieras. En dichas operaciones se busca una ganancia, la cuál es la que se obtiene mediante el interés, representado por una tasa o porcentaje que se aplica sobre un total que se invierte durante el tiempo que dura la transacción.

Hay operaciones en las que se maneja una cantidad o pago, otras, en las que se trata de una serie de pagos. En el primer caso se aplican los conceptos de depreciación, interés simple, prorrateo de facturas, etc; cuando se trata de varios pagos, se utilizan los conceptos de ecuación de valor, descuentos sucesivos, racionales, bancarios, etc. En el caso de una serie de pagos, se aplican las llamadas anualidades que corresponden a deudas e inversiones generalmente.

Los conceptos financieros tambien tienen su base en el algebra; los aquí tratados se relacionan con los capitulos del 15 al 21 que hablan de progresiones, interpolación lineal, teorema del binomio, etc.

Matemáticas financieras I que corresponde al 5o. semestre como materia optativa del Colegio de Bachilleres, cubre lo que concierne al primer caso mencionado. Y el segundo caso lo cubre matemáticas financieras II correspondiente al 6o. semestre de dicho colegio, cuyo plan de estudios está vigente desde el 1o. de marzo de 1976.

En cuanto al contenido; el capitulo de exponentes contiene sólo el caso de exponentes racionales; útil y suficiente para los conceptos aquí expuestos.

Las tablas de logaritmos en el anexo, pueden servir para encontrar el logaritmo de un número de 4 o más cifras, aplicando el método de interpolación lineal obteniendo una aproximación aceptable.

Las tablas financieras a las que hacemos referencia, son las elaboradas por el Act. Benjamín de la Cueva, las que se sugiere consultar (ver. referencia bibliográfica).

Para el buen aprendizaje de la materia, se sugiere que el alumno cuente con una calculadora científica ó en su defecto, el profesor debe sugerir que cuente con tablas financieras.

I. INTERES SIMPLE

Interés: Interés es la cantidad que se paga por el uso de un -- capital en base a la unidad de tiempo (un año).

1.0 Interés Simple.

La cantidad que se forma al aplicar una tasa de interés a dicho capital por el tiempo en que se usa el capital, es el interés. Cuando dicho interés no se añade al capital original o inicial, se llama interés simple.

Los elementos del interés simple son: el capital, el tiempo la tasa o tipo de interés.

El capital es la cantidad que se utiliza por cierto tiempo a determinada tasa.

El tiempo está considerado en años, meses o días, según el caso.

La tasa de interés es la razón sobre \$100.= en la unidad de tiempo que generalmente es de un año o 360 días; así una tasa de 10% significa 10/100 = .10 , un décimo del total, representado por 100.

1.1 Cálculo del Interés Simple.

Se calcula según un tanto por ciento, en un tiempo determinado, el tanto por ciento recibe el nombre de tasa o tipo de interés y generalmente es anual.

El interés es el producto que resulta de multiplicar el capital por la tasa de interés (puesta en forma decimal) y por la unidad de tiempo, es decir:

$$I = Cit$$

I; interés simple — i; tasa de interés

C; capital — t; tiempo, cuya base es un año

despejando tenemos:

$$C = \frac{I}{it} \qquad i = \frac{I}{Ct} \qquad t = \frac{I}{Ci}$$

Suponiendo que la tasa es anual (en caso contrario se convierte, ver ejemplos), la formula general del interés presenta una de las siguientes tres formas, dependiendo de como expresamos el tiempo:

a) si el viene expresado en años:

$$I = Cit \qquad \text{(F.1)}$$

b) si el tiempo viene expresado en meses:

$$I = \frac{Cit}{12} \qquad \text{(F.2)}$$

c) si el tiempo viene expresado en días:

$$I = \frac{Cit}{360} \qquad \text{(F.3)}$$

Ejemplos:

1. Calcular el interés producido por $1960.- al 5% semestral en 3 años 5 meses.

DATOS	FORMULA	SUSTITUCION
$C = 1960$	$I = \frac{Cit}{12}$	$I = \frac{1960 \times 41 \times 0.10}{12}$
$t = 41$ meses		
$i = .05x2 = .10$ anual		$\underline{I = 669.67}$

2. Hallar el interés producido por un capital de $1028.75 al 4% trimestral en 2 años, 6 meses, 15 días.

DATOS	FORMULA	SUSTITUCION
$C = 1028.75$	$I = \frac{Cit}{360}$	$I = \frac{1028.75 \times 915 \times 0.16}{360}$
$t = 915$ días		
$i = 0.04x4 = .16$ anual (4 trimestres del año)		$\underline{I = \$418.35}$

Para calcular la fórmula general del monto simple, es decir, la fórmula para la cantidad que se forma al sumar al capital inicial los intereses, denotaremos a dicha cantidad con la letra S; es decir;

$$S = C + I$$

y recordando que I = Cit, tenemos:

$$S = C+Cit = C(1 + it) \qquad (F.4)$$

de ésta fórmula obtenemos lo siguiente:

$$C = \frac{S}{1+it} \qquad (F.5)$$

$$i = \frac{S/C - 1}{t} \qquad (F.6)$$

$$t = \frac{S/C - 1}{i} \qquad (F.7)$$

Ejemplo:

1. En tres meses un capital de $21000.- produjo un monto de -- $24250.-, ¿bajo qué tasa trabajó dicho capital?

DATOS	FORMULA	SUSTITUCION
$C = 21000$	$i = \frac{S/C - 1}{t}$	$i=\frac{(24250/21000)-1}{.25}$
$t = 3/12 = 0.25$		$=\frac{1.154761905 - 1}{.25}$
$S = 24250$		$= 0.619047619$
		$i = 61.9\%$

Ejercicios:

1. ¿Cuál es el interés de $4500.- al 8% anual en 8 meses, 16 días? R. $256.-
2. Calcular el interés de $2560.- al 10% anual en 1 año, 4 meses y 18 días. R. $354.13.
3. ¿Qué interés tendrá un capital de $8135.- al 3% trimestral en 4 años? R. $3904.80.

4. ¿Cuánto acumulará un señor en el banco, si invierte \$45000.= a una tasa del 20% anual, en 3 años? R. \$72000.=
5. ¿Durante cuánto tiempo se requiere invertir \$22500.= para tener \$41000.= a una tasa del 42% anual? R. 1.95 años o 1 año y 342 días (para obtener la cantidad de días, ver sec.16.2).
6. ¿A qué tasa debe trabajar un capital de \$10000.= para formar un monto de \$15000.= en 6 meses? R. 100%.

1.2 Gráfica del monto bajo Interés Simple.

Bajo cierta tasa de interés que es constante dentro de cierto período, el monto simple, varía según varíe el tiempo, es decir el tiempo es la variable independiente (t) y el monto la variable dependiente f(t) = Y.

donde S=C(1+it) según (F.4), por tener t grado 1, con pendiente Ci y ordenada al origen C, vemos que Y es una recta:

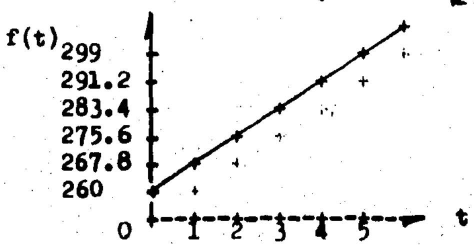
$$Y = Cit + C = S$$

Ejemplo:

1. Graficar el monto de \$260.=, cuando el interés simple es del 3% anual, durante 5 años.

DATOS	FORMULA	SUSTITUCION
C = 260		
i = .03	S = C(1+it)	
t = 5		

t	0	1	2	3	4	5
S=f(t)	260	267.8	275.6	283.4	291.2	299



Ejercicios:

1. Construir la gráfica para un capital de \$200.= con interés e del 1.5 anual.
2. Graficar el monto de \$370.= al 7% anual.

1.3 Valor Presente o Valor Actual o Capital Inicial.

Se denomina valor presente o valor actual, al capital que se tiene disponible en éste instante (antes de aplicar los intereses), al cuál se le aplica una tasa de interés para obtener el interés simple y luego el monto sumando I=Cit a dicho capital, después de transcurrir cierto tiempo.

Se obtiene de(F.5), es decir: $C = \frac{S}{1+it}$ (F.8)

Ejemplo:

1. ¿Cuál es el valor actual de \$13300.= cuya tasa es del 12% anual para un tiempo de 2 años?

DATOS	FORMULA	SUSTITUCION
$S = 13300$ $i = .12$ $t = 2$	$C=\frac{S}{1+it}$	$C=\frac{13300}{1+(.12)(2)}=\frac{13300}{1.24}$

C=\$10725.80

es decir, la cantidad que es necesaria invertir a una tasa del 12% anual para acumular \$13300.= durante 2 años es \$10725.80.

Ejercicios:

1. ¿Qué cantidad se necesita invertir para acumular \$10200.= durante 1 año a una tasa del 31% anual? R: \$7786.26
2. Para acumular 25000.= en 2 años a una tasa del 16% anual, ¿qué cantidad se necesita invertir? R. \$18939.40.

1.4 Ecuación de Valor.

Una ecuación de valor es, como su nombre lo indica, una igualdad de valores, en donde cada miembro de la igualdad representa una obligación del deudor, pero, con fecha de pago distinta a la del otro miembro. Mediante ésta ecuación, el deudor tiene la ventaja de cambiar la fecha de pago (fecha de valuación o fecha focal) para su comodidad, siempre y cuando el acreedor acepte.

En ocaciones varía aunque ligeramente el valor de la obligación, dependiendo de la fecha focal escógida, para el caso de usar tasa de interés simple(para el caso de la tasa no anual, ver sección 5.1. que utiliza interés compuesto).

Ejemplos:

1. Determinar el valor de las siguientes obligaciones, en el día de hoy, suponiendo una tasa de 4% de interés simple: \$1000.= con vencimiento el día de hoy, \$2000.= con vencimiento en 6 meses con interes del 5% anual y \$3000.= con vencimiento en 1 año con intereses al 6% anual. Utilizar el día de hoy como fecha focal.

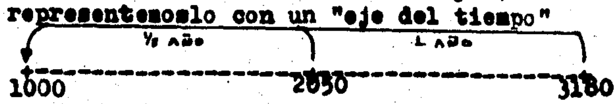
Designemos con X el valor requerido. \$X será la suma de los valores presentes al 4%, de las tres obligaciones:

a) \$1000 el día de hoy,

b) $2000(1+(.05)(1/2)) = \$2050$ ver(F.4)

c) $3000(1+(.06)(1)) = \$3180$

donde b) se vence en 6 meses y c) se vence en 1 año representemoslo con un "eje del tiempo"



por ser valores presentes tenemos:

$$X = 1000 + \frac{2050}{1+(.04)(1/2)} + \frac{3180}{1+(.04)(1)}$$

$$= 1000 + 2009.80 + 3057.69 = \$6067.49$$

por lo tanto si la fecha focal es el día de hoy:

$$X = 6067.49$$

Ahora cambiemos la fecha focal a un año despues, es decir:

$$\underbrace{1000 \text{------------------} 2050}_{\text{1 año}} \qquad \underbrace{2050 \text{------------------} 3180}_{\text{½ año}}$$

por ser ahora un monto para cada caso, tenemos:

$$X(1.04) = 1000(1.04) + 2050(1+(.04)(1/2)) + 3180$$
$$= 1040 + 2091 + 3180 = 6311$$
$$X = \frac{6311}{1.04} = \$6068.27$$

por lo tanto si la fecha de valuación es dentro de 1 año el valor de las obligaciones varía en (6068.27-6067.49) 78 centavos.

2. Una señorita debe \$1000.- por un préstamo con vencimiento en 6 meses, contratado originalmente a 1.5 años a la tasa de 4% y debe, además, \$2500.- con vencimiento en 9 meses, sin intereses. El desea pagar \$2000.- de inmediato y liquidar el saldo mediante un pago único dentré de 1 año. Suponiendo un rendimiento de 5% y considerando la fecha focal dentro de un año, determinar el pago único mencionado.

El valor al vencimiento del préstamo con intereses es $1000(1+(.04)(3/2))=1060$. Designemos con X el pago requerido. Coloquemos, por encima de una linea de tiempo, las obligaciones originales (\$1060 al final de 6 meses y \$2500.- al final de 9 meses) y por debajo el nuevo sistema de pagos (\$2000 en la fecha y X al final de 12 meses).

12 meses / 6 meses / 3 meses — fecha focal

1060 2500

0 — 6 — 9 — 12 meses

2000 X

calculando cada valor en la fecha focal e igualando la suma del valor resultante de las obligaciones originales con el de las nuevas obligaciones, tenemos

$$2500(1.05)+X = 1060(1+(.05)(1/2)) + 2500(1+(.05)(1/4))$$
$$2100+X = 1086.50 + 2531.25$$
$$X = 1086.50 + 2531.25 - 2100$$
$$\underline{X = \$1517.75}$$

1.5 Pagos Parciales.

1.5 Pagos Parciales.

No siempre las deudas se cubren con un pago único; dentro del período de obligación se pueden hacer pagos parciales hasta pagar la deuda total. El deudor hará los pagos por la cantidaddad que el guste disponiendose a pagar el saldo de la deuda en la fecha de vencimiento.

Ejemplo:

1. Se tienen que pagar \$2000.= en 1 año a la tasa del 5%, el deudor paga \$600.= en 5 meses y \$800.= en 9 meses. Hallar el saldo de la deuda en la fecha de vencimiento.

lo solucionaremos de 2 formas:

a) Se determina el interés simple sobre el 1er. pago parcial (\$600) por 12-5=7 meses y sobre el 2do. pago parcial (\$800) por 12-9=3 meses y sobre la deuda original de \$2000 por un año;

600x0.05=30	interes al año
30/12=2.5	interes por mes
2.5x7=17.5	interes por 7 meses

así para el 2do. pago, tendríamos:

800x0.05=40; 40/12=3.33; 3.33x3=10

y para el monto:

2000x0.05=100; 2000+100=2100

la suma de los pagos parciales y los intereses de cada pago es la suma que se restará al monto acumulado al final del año, para obtener el saldo de la deuda en la fecha de vencimiento:

600+17.50+800+10 = 672.50

b) Si tomamos como fecha focal el final de un año, tenemos

```
                     7 meses       3 meses
                  600          800          X
+------+------+------+------+------+------+
                   5            9          12
                 meses                    2100
```

X+600(1+(.05)(7/12))+800(1+(.05)(3/12))=2000(1+(.05)1)

X + 617.50 + 810 = 2100

X = 672.50

Ejercicios:

1. El costo de un televisor es de \$36500.= y se pagará en 6 meses a una tasa del 8% anual, ¿cuál es el saldo al final de los 6 meses, si en el 1er. mes se pagan \$12600.= y al 5o. se pagan \$10000.=? R. \$14873.33.
2. Una calculadora cuesta \$25000.= y para pagarse en 8 meses nos imponen una tasa del 5% anual, ¿cuál será el saldo a pagar, si en el 2do. mes pagamos \$7500.= y en el 6to. mes la cantidad de \$9000.=? R.9070.83.

2 DESCUENTO

2.0 Descuento.

Descuento es una rebaja sobre una cantidad; la cantidad que se rebaja puede ser vista como un tanto por ciento (sec.13.0)- de la cantidad inicial considerada como el 100%.

2.1 Descuentos Sucesivos.

Los descuentos sucesivos forman un conjunto de descuentos que se conceden por un motivo distinto cada uno, ya sea por pago por adelantado, por la temporada de descuento que ofrece una tienda, por la posesión de una tarjeta especial, etc.

Cada descuento se aplica a la cantidad ya descontada por algún otro descuento, es decir:

Sea C la cantidad a descontar.

r la tasa de tanto por ciento que se aplica para el descuento.

con un subíndice indicamos el orden de los descuentos y suponiendo como unidad de tiempo un año.

Cr es la cantidad que se descuenta de C, es decir:

1er. descuento:

$$C - Cr_1 = C(1-r_1)$$

a la cantidad resultante se le aplica otro descuento representado por la tasa r_2:

2do. descuento:

$$\begin{aligned} C(1-r_1) - C(1-r_1)r_2 &= C((1-r_1)-(1-r_1)r_2) \\ &= C(1-r_1-r_2+r_1r_2) \\ &= C(1-r_1)(1-r_2) \end{aligned}$$

a la cantidad resultante se le aplica r_3:

3er. descuento:

$$\begin{aligned} C(1-r_1)(1-r_2) - C(1-r_1)(1-r_2)r_3 &= \\ &= C((1-r_1)(1-r_2)-(1-r_1)(1-r_2)r_3) \\ &= C(1-r_1-r_2+r_1r_2-r_3+r_1r_3+r_2r_3-r_1r_2r_3) \\ &= C(1-r_1)(1-r_2)(1-r_3) \end{aligned}$$

y así sucesivamente dependiendo del número de descuentos, de modo que, para el n-ésimo descuento, tendríamos:

$$CD_n = C(1-r_1)(1-r_2)\dots(1-r_n) \qquad \text{(F.9)}$$

Ejemplo:

1. Una tienda ofrece el 2.5% de descuento para un conjunto modular que cuesta $120000.- y un joven presenta su tarjeta de plan joven y le conceden un descuento de 3.5%, ¿cuánto paga por el conjunto?

DATOS	FORMULA	SUSTITUCION
$C = 120000$ $r_1 = 2.5\% = .025$ $r_2 = 3.5\% = .035$	$CD_2 = C(1-r_1)(1-r_2)$	$CD_2 = 120000(1-.025)(1-.035)$ $= 120000(.975)(.965)$ $= 112905$

Esto es, la cantidad ya descontada CD_n es el precio que se paga por el conjunto.

Ejercicios:

1. ¿Cuál fué el costo original (es decir, sin descuento) de un artículo cuya cantidad descontada o precio final es de \$28900 cuando se le aplicó un descuento de 1.5% y despues otro del 2%? R. \$29 938.88
2. ¿Cuál es la cantidad que paga finalmente una señora al comprar una máquina de coser con costo de \$58000.- si le hicieron descuentos de 1%, otro del 1.5% y otro del 1%? R. \$55993.11.

Los descuentos sucesivos se aplican generalmente a los precios de mercancías al igual que el descuentc comercial, que es un descuento sobre el precio de lista de un artículo.

2.2 Descuento Bancario o Simple.

Hemos visto que para obtener un monto simple es necesario aplicar una tasa de interés a un cierto capital durante cierto tiempo; la cantidad resultante (I) de aplicar la tasa al capital(C), se suma al mismo (C) y se obtiene así el monto (S).

Ahora aplicaremos una tasa llamada tasa de descuento (d) a una cantidad (S) (acumulada en algun momento por un capital C, a una tasa de interés) en cierto tiempo t que por lo general es un año y la cantidad resultante (D) será restada a la cantidad S obteniendo así el valor presente (C)(ver sec.1.3) de S, a dicha cantidad que se resta se le llama descuento simple o descuento bancario.

El descuento simple D sobre una cantidad S por t años a la tasa de descuento d, está dado por:

$$D = Sdt \qquad (F.10)$$

y el valor presente de S está dado por:

$$C = S-D = S-Sdt = S(1-dt) \qquad (F.11)$$

Ejemplo:

1. Hallar el descuento simple sobre una deuda de \$1500.- con un vencimiento en 9 meses a una tasa de descuento de 6% anual, ¿cuál es el valor presente de la deuda?

DATOS	FORMULA	SUSTITUCION
$S = 1500$ $d = .06$ $t = 9/12 = 3/4$	$C=S(1-dt)$	$C = 1500(1-(.06x.75))$ $= 1500(.955)$ $C = 1432.50$

el descuento simple es $D=Sdt$, $D=1500x.06x(3/4)=67.50$ y el valor presente de la deuda es $1432.50

Ejercicios:

1. Hallar el descuento simple para una deuda de $2600.= cuyo vencimiento es de 8 meses y la tasa de descuento es del 5.5% anual. R. $95.33.
2. Si una deuda de $3250.= que vence en 10 meses, se le aplicó una tasa de descuento de 7% anual, ¿cuál es el valor actual o presente de dicha deuda? R. $3060.42.

2.3 Descuento Racional o Justo.

Para que exista el monto simple tuvo que existir un capital que lo genera mediante una tasa de interés simple durante cierto tiempo, el monto es mayor que el capital inicial (valor presente o actual), hay pues un valor que diferencía al capital de el monto; si ese valor o diferencia lo descontamos del monto S obtenemos el capital C, a tal diferencia se le llama descuento racional sobre S, es decir $D_r = S - C$ (F.12)

Ejemplo:

1. Determinar el capital inicial o valor presente, al 6% de interés simple, de $1500.= con vencimiento en 9 meses y ¿cuál es descuento racional?

DATOS	FORMULAS	SUSTITUCION
$S = 1500$	$C = \frac{S}{1+it}$	$C = \frac{1500}{1+(.06)(3/4)}$
$i = .06$		$= \frac{1500}{1.045}$
$t = 9/12 = 3/4$	$D_r = S-C$	$= 1435.41$
		$D_r = 1500-1435.41$
		$= 64.59$

Observación: Al comparar éste ejemplo con el ejemplo de la sec 2.2 (anterior) vemos que cuando el descuento está involucrado, el uso de la tasa de descuento en lugar de la tasa de interés, simplifica los cálculos; por ésta razón, el descuento racional rara vez se utilisa. Al descuento bancario se le conoce frecuentemente como interés por adelantado.

Ejercicios:

1. Si se tiene un monto de $2300.= que se logró en 7 meses a un una tasa del 7% de interes simple, ¿cuál es su descuento racional y cuál el valor presente? R. $D_r=90.23$ y $C=2209.77$
2. Durante 5 meses se obtuvo un monto de $13650.= a una tasa del 9% de interés simple, determinar el valor presente y el descuento racional correspondiente. R. $C=13156.63$ y $D_r=49337$

3 INTERES COMPUESTO

3.0 Interés Compuesto.

El interés simple devengado al final de un período especificado, puede añadirse al capital original para formar un nuevo capital. El interés del siguiente período se calcula sobre este nuevo capital. Si éste proceso se repite por dos o más períodos el aumento total del capital original se llama interés compuesto.

3.1 Monto Compuesto.

La suma del capital inicial mas el interés compuesto se llama monto compuesto.

3.2 Período de Capitalización.

Es el tiempo en que un capital inicial se convierte en un nuevo capital, constituido por el capital inicial y los interéses generados.

3.3 Frecuencia de Capitalización.

Es el número de períodos de capitalización que se dan en un año. Así la frecuencia puede ser anual (una vez al año), semestral (dos veces al año), trimestral (4 veces al año), etc.

3.4 Tasa Nominal.

La tasa de interés que se enuncia con base anual en el caso de interés simple, es también aplicable al caso de interés compuesto.

3.5 Descripción del Cálculo del Interés Compuesto.

(ver 3.0), Como un ejemplo de aplicación de los términos precedentes, observemos el efecto de acumular a interés compuesto un capital original de $1000.= con capitalización trimestral y con tasa nominal de 4%. La tasa de interés en cada uno de los períodos de 3 meses es entonces igual a 1%. En la siguiente tabla se detalla la acumulación en un período de un año:

Trimestre	Capital al inicio del período	Interés por período	Interés compuesto al final del período.	Monto compuesto al final del período.
primero	1000.=	1000x0.01 = 10.=	10.=	1010.=
segundo	1010.=	1010x0.01 = 10.10	20.10	1020.10
tercero	1020.10	1020.10x0.01=10.20	30.30	1030.30
cuarto	1030.30	1030.30x0.01=10.30	40.60	1040.60

3.6 Tasa Efectiva.

Es la tasa que se aplica a cada período de capitalización , cualquiera que sea este, la tasa efectiva es aquella en que realmente esta trabajando el capital; se puede obtener de la tasa nominal, dividiendo esta entre el número de períodos por año en que el interés forma parte del nuevo capital (o bien, en que el interés se capitaliza en cada período).

3.7 Equivalencia entre Tasa Nominal de Interés y Tasa Efectiva de Interés.

Cuando la convertibilidad de la tasa o el número de períodos de capitalización son 1 o más al año; la tasa efectiva, la obtenemos así:

$$\text{tasa efectiva por período} = \frac{\text{tasa nominal}}{\text{número de períodos de capitalización al año}}$$

observamos que si el número de períodos es 1, las tasas son iguales, es decir al cabo de un año (que es el período en éste caso), el interés simple es igual al interés compuesto; es por eso que la tasa que hemos usado en el interés simple la identificamos como anual.

Cuando el número de capitalizaciones es mayor a 1, tenemos que:

la tasa efectiva por período $<$ la tasa nominal

$$i' = \frac{i^{(m)}}{m} < i^{(m)}$$

donde m es el número de capitalizaciones por año y la notación (m) no representa un exponente, es sólo para indicar el número de conversiones o veces en que el interés forma parte de un nuevo capital durante el año.

Podemos expresar i en términos de $i^{(m)}$ y viceversa, llegando a establecer primero una relación entre ambas:

Supongamos que nuestro capital inicial es de \$1 que trabajara durante m emésimos de año es decir un año; para cada emésimo de año, el interés es $i^{(m)}/m = i'$; así para el final del 1er. emésimo de año el nuevo capital es:

$$(1) + (1)i' = 1 + i'$$

siguiendo la definición de monto compuesto (3.0), para el 2do. emésimo de año el nuevo capital es;

$$(1+i') + (1+i')i'$$

$$(1+i')+(1+i')i' = 1+i'+i'+i'^2 = 1+2i'+i'^2 = (1+i')^2$$

así para el r-ésimo período de capitalización, tendrémos:

$$(1+i')^{r-1} + (1+i')^{r-1}i'$$

factorizando:

$$(1+i')^{r-1}+(1+i')^{r-1}i' = (1+i')^{r-1}(1+i') = (1+i')^r$$

y al final del año tendrémos:

$$(1+i')^m$$

de modo que al final del año el monto compuesto de \$1.= bajo una tasa nominal capitalizable m veces al año es el mismo monto compuesto de \$1.= para una tasa efectiva anual i:

$$(1+i')^m = (1+i)^1 \qquad \text{(F.13)}$$

al final de n años se tendría:

$$(1+i')^{mn} = (1+i)^{n} \qquad (F.14)$$

así, según las leyes de exponentes (cap.20):

$$i = (1+i')^{m} - 1 \qquad (F.15)$$

$$i' = (1+i)^{1/m} - 1 \qquad (F.16)$$

$$i^{(m)} = m((1+i)^{1/m} - 1) \qquad (F.17)$$

simbolos:

n = número de años del plazo.
m = número de períodos de capitalización por año.
nm = número total de períodos de capitalización en los n - años.
C = Capital original o inicial.
S = monto compuesto al final de mn períodos.
i = tasa de interés efectiva anual o de un período de capitalización al año.
$i^{(m)}$ = tasa de interés nominal anual que se convierte m veces al año.
i' = tasa de interés efectiva por período de capitalización.

Ejemplos:

1. Determinar la tasa efectiva que equivale a una tasa nominal del 7% anual convertible semestralmente.

DATOS	FORMULA	SUSTITUCION
$m = 2$		
$i^{(m)}=i^{(2)}=.07$	$i=(1+i')^{m}-1$	$i=(1+.035)^{2}-1$
$i'=.07/2=.035$		$=.071225$

por lo tanto la tasa efectiva anual es del 7.1225%

2. Determinar la tasa nominal convertible semestralmente equivalente a una tasa efectiva del 7.1225% anual.

DATOS	FORMULA	SUSTITUCION
$m = 2$		
$i = .071225$	$i^{(m)}=m((1+i)^{1/m}-1)$	$i^{(2)}=2((1+.071225)^{1/2}-1)$
$i^{(2)}= ?$		$=2(.035)$
		$=0.07$

por lo tanto la tasa anual es del 7%

Ejercicios:

1. Determinar la tasa efectiva convertible cada 4 meses, si se tiene una tasa efectiva anual del 9.2727%. R. $i'=0.03=3\%$
2. Determinar la tasa efectiva trimestral a partir de una tasa efectiva anual del 11.4621259%. R. $i'=.0275=2.75\%$

3.8 Deducción de la Fórmula del Monto Compuesto.

Sea C el capital original, S el monto y sea i' la tasa efectiva por período.

Si se aplica el interés i' al capital; al final del 1er. período tendrémos:

$$S = C+Ci' = C(1+i')$$

donde C(1+i') es el nuevo capital al empezar el 2do. período y el interés al final del 2do. período es C(1+i')i', de modo que el monto final del 2do. período es:

$$\begin{aligned} S &= C(1+i')+C(1+i')i' \\ &= C(1+i')(1+i') \\ &= C(1+i')^2 \end{aligned}$$

analogamente, el monto final del tercer período es:

$$S = C(1+i')^3$$

por haber m períodos de capitalización al año, al final del m-ésimo período, que es el final del 1er. año, tendremos:

$$S = C(1+i')^{m\times 1} = C(1+i')^m$$

si el capital trabajara durante 2 años, habría m+m=2m períodos de capitalización, así:

$$S = C(1+i')^{2m}$$

si fueran n años:

$$S = C(1+i')^{nm} \qquad \text{(F.18)}$$

y usando la formula (F.14), tenemos:

$$S = C(1+i)^n \qquad \text{(F.19)}$$

donde i es la tasa efectiva anual.

Ejemplos:

1. Determinar el monto compuesto de un capital de $3250.- que trabajó a una tasa efectiva del 1% anual durante 2 años:

DATOS	FORMULA	SUSTITUCION
$C = 3250$		$S=3250(1+0.01)^2$
$i = .01$	$S = C(1+i)^n$	$=3250(1.0201)$
$n = 2$		$=3315.325$

es decir S=$3315.33

2. Determinar el monto compuesto de $1630.- que se invirtió a na tasa nominal del 4.5% convertible bimestralmente durante 3 años.

DATOS	FORMULA	SUSTITUCION
$C = 1630$		$S=1630(1+0.0075)^{3\times 6}$
$m = 6$	$S = C(1+i')^{mn}$	$=1630(1.0075)^{18}$
$i^{(6)}=0.045$		$=1864.655434$
$i'=.045/6=0.0075$	el monto es de $1864.66	
$n = 3$		

observación: el factor $(1+i)^n$, lo encontramos generalmente en tablas financieras de las que se hace mención en la introducción. Puede obtenerse su valor mediante logaritmos (cap.20) o desarrollando el binomio (cap21) o bien con calculadora con exponente.

Ejercicios:

1. Determinar el monto compuesto de un capital de \$2700.= a la tasa nominal del 4% convertible semestralmente durante 4 año R. \$3163.48.
2. Si un capital de \$4100.= trabajó a la tasa efectiva del 2% -anual durante 9 años, ¿cuál es el monto compuesto? R.\$4899.88

3.9 Obtención de los Elementos de la Fórmula del Monto Compuesto.

Los elementos C, i, i', n, los despejaremos de la fórmula $S=C(1+i')^{mn}$ o bien de $S=C(1+i)^{n}$.

3.9.1 Cálculo del Capital inicial o Valor Presente o Valor Actual.

En las relaciones (F.18) y (F.19), el capital original C es el valor actual del monto S y despejando tenemos:

$$C = \frac{S}{(1+i)^{n}} = S(1+i)^{-n} \quad y \quad C = \frac{S}{(1+i')^{mn}} = S(1+i')^{-mn} \qquad (F.20)$$

Ejemplo:

1. Determinar el valor actual de \$4000.= pagaderos dentro de 3 años, si la tasa nominal es de 4% convertible trimestralmente.

DATOS	FORMULA	SUSTITUCION
$S = 4000$		
$n = 3$	$C=S(1+i')^{-mn}$	$C=4000(1+.01)^{-4x3}$
$m = 4$		$=4000(1.01)^{-12}$
$i^{(4)}=.04$		$=4000(.8874492253)$
$i' = .04/4 = 0.01$		$=3549.7969$

el capital que se invertirá es de: \$3549.80

observación: el factor $(1+i)^{-n}$ se identifica como V^{n} en las tablas financieras de las que se hace mención en la introducción. puede obtenerse su valor tambien -por logaritmos (cap.20) o desarrollando el binomio (cap.21) o bien con calculadora con exponente.

Ejercicios:

1. Si la tasa nominal es de 3.5% convertible mensualmente para \$3100.= a pagarse dentro de 2 años, ¿cuál es el valor actual? R. \$2890.72
2. Si la tasa efectiva por período es del 2% semestral para la cantidad de \$2800.= pagaderos en 4 años, determinar el valor actual. R. \$2585.75.

3.9.2 Cálculo del tiempo.

En las relaciones (F.18) y (F.19), n es el tiempo en que se forma el monto S. De (F.18) y usando logaritmos (cap.20), tenemos:

$$\log S = \log(C(1+i')^{mn})$$
$$= \log C + mn\log(1+i')$$

de donde

$$mn = \frac{\log S - \log C}{\log(1+i')}$$

así: $n = \frac{\log S - \log C}{m \log(1+i')}$ (F.20.1)

de (F.19) analogamente tenemos:

$\log S = \log C + n\log(1+i)$

así

$$n = \frac{\log S - \log C}{\log(1+i)} \qquad (F.20.2)$$

otro modo de obtener n es, usar las tablas financieras (mención en la introducción), buscando el valor de S/C ya que $(1+i)^n = \frac{S}{C}$ en caso de que dicho valor no se encuentre en tablas, usar el método de interpolación lineal (cap.17.); el siguiente ejemplo lo resolverémos usando logaritmos y el método de interpolación lineal.

Ejemplos:

1. Determinar el tiempo durante el cuál un capital de $1360.= que ha de transformarse en un monto de $3000.=, si la tasa nominal es del 2.5% convertible trimestralmente.

DATOS	FORMULA	SUSTITUCION
$C = 1360$	$n=\frac{\log S-\log C}{m \log(1+i')}$	$n=\frac{\log 3000 - \log 1360}{4 \log 1.00625}$
$S = 3000$		$=\frac{3.477121255-3.133538908}{4(0.0027058934)}$
$m = 4$		$=\frac{.3435823466}{.0108235736}$
$i^{(4)}=.025$		$=31.74552257$
$i'=.025/4=.00625$		
$i=(1+.00625)^4-1=.025235353$		

aquí se usó calculadora y la tabla de logaritmos que se encuentra en el anexo.

Ahora por el método de interpolación lineal:

En tablas financieras buscamos $\frac{3000}{1360} = 2.205882353$ en la columna de $(1+i)^n$ a la tasa .025=2.5%; para ésta forma de encontrar n, para buscar en tablas es necesario encontrar i, la tasa efectiva anual, pues bajo ésta está elaborada dicha columna, para efectos prácticos dado que i=.025235353, se considera i=.025, pero en éste ejemplo lo harémos con la tasa i=.025235353 para aproximarnos más al resultado correcto, para lo cuál elaboraremos una parte de la columna:

n	$(1+i)^n$
28	2.009370662
29	2.060077840
30	2.112064632
31	2.165363328
32	2.220007036
33	2.276029697

nuestro valor $\frac{3000}{1360}=2.205882353$ se encuentra entre los años n=31 y n=32 expresado según la forma de la sección 17.6:

$$a\begin{bmatrix} 2.220007036 \\ 2.205882353 \\ 2.165363328 \end{bmatrix}c \qquad d\begin{bmatrix} 32 \\ X \\ 31 \end{bmatrix}b$$

donde cada letra indica la diferencia de los valores indicados:

$$d = X-31 = \frac{(2.205882353-2.165363328)(32-31)}{(2.220007036-2.165363328)}$$

$$X-31 = \frac{(0.040519025)(1)}{0.054643708}$$
$$= 0.7415130942$$

de donde $X = 31.7415130942$, es decir;

usando proporciones tenemos: (sec.16.2)

$$1.00 : 360 \text{ días comerciales}$$
$$.74 : y \quad " \quad "$$
$$y = 0.74 \times 360/1.00 = 266.4 \text{ días}$$

de modo que n = 31 años 8 meses 26 días.

Hay otra manera de encontrar n dentro de lo que respecta al método de interpolación lineal, en la que no es necesario obtener i, basta trabajar con i':

2. **¿En qué tiempo el capital de $1850.- será de $3250.- al** 3.5% convertible semestralmente?

DATOS	FORMULA	SUSTITUCION
S = 3250	buscar en tablas S/C:	
C = 1850	$\frac{S}{C} = (1+i')^{mn}$	$(1.0175)^{2n}=1.756756757$
m = 2		
$i^{(2)}=.035$		usando las formas F.172 y F.175
$i'=.035/2=0.0175=1.75\%$		y según la tabla de la tasa del 1.75% = i':

$$\begin{bmatrix} 1.742213 \\ \begin{bmatrix} 1.756757 \\ 1.772702 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 32 \\ \begin{bmatrix} 2n \\ 33 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

de donde

$$2n-33 = \frac{(1.756757-1.772702)(32-33)}{(1.742213-1.772702)}$$
$$= \frac{0.015945}{-0.030489}$$

de donde $2n = -0.5229754994 + 33$
$$= 32.4770245$$

y $n = 16.23851225$, es decir;

usando proporciones (sec.16.2)

$$\left.\begin{matrix} 1.00 : 360 \\ .24 : z \end{matrix}\right\} z=86.4 \text{ días}$$

así n = 16 años 2 meses 26 días.

De las dos anteriores maneras de calcular n, es convenien te utilizar la primera en caso de que mn > 100 que es el límite de las tablas financieras a las que hacemos referencia en la introducción, ya que nos basamos en mn para hacer la in - terpolación.

Ejercicios;

1. **Determinar el tiempo que necesita un capital de $2200.- para formar un monto de $14665.8072 a la tasa efectiva del 10.5% anual. R. 19 años.**
2. **¿En qué tiempo el capital de $2000.- será de $3000.- al 2% convertible semestralmente? R. 20.374; 20 años 4 meses 14 días.**

3.9.3 Cálculo de las Tasas de Interés $(i, i^{(m)})$

Para obtener las tasas de interés i y $i^{(m)}$ podemos proceder de las siguientes tres maneras:

-Despejando sin logaritmos:

de $S = C(1+i')^{mn}$

tenemos:

$$S/C = (1+i')^{mn}$$

$$(S/C)^{1/mn} = (1+i')$$

$$i' = (S/C)^{1/mn} - 1 \qquad \text{(F.21)}$$

de donde

$$i^{(m)} = i'm = m((S/C)^{1/mn} - 1) \qquad \text{(F.22)}$$

ahora despejando i de $S=C(1+i)^n$

$$(1+i)^n = \frac{S}{C}$$

$$1+i = (S/C)^{1/n}$$

$$i = (S/C)^{1/n} - 1 \qquad \text{(F.23)}$$

-Despejando con logaritmos (ver, cap.20)

$$\log S = \log(C(1+i')^{mn})$$

$$\log S = \log C + mn\log(1+i')$$

$$\log(1+i') = \frac{\log S - \log C}{mn}$$

$$\text{antilog}(\log(1+i')) = \text{antilog}\left(\frac{\log S - \log C}{mn}\right)$$

$$1+i' = \text{antilog}\left(\frac{\log S - \log C}{mn}\right)$$

$$i' = \text{antilog}\left(\frac{\log S - \log C}{mn}\right) - 1 \qquad \text{(F.24)}$$

de donde

$$i^{(m)} = i'm = m\left(\text{antilog}\left(\frac{\log S - \log C}{mn}\right) - 1\right) \qquad \text{(F.25)}$$

ahora despejando i de $S=C(1+i)^n$

$$\log S = \log(C(1+i)^n)$$

$$\log S = \log C + n\log(1+i)$$

$$\log(1+i) = \frac{\log S - \log C}{n}$$

$$1+i = \text{antilog}\left(\frac{\log S - \log C}{n}\right)$$

$$i = \text{antilog}\left(\frac{\log S - \log C}{n}\right) - 1 \qquad \text{(F.26)}$$

-Buscando en tablas financieras el cociente $\frac{S}{C} = (1+i)^n = (1+i')^{mn}$ y en caso de no encontrar el valor de dicho cociente en tablas, usar el método de interpolación lineal (ver cap.-17)

El ejemplo siguiente se resolverá por las 3 formas precedentes:

1. ¿A qué tasa nominal convertible trimestralmente, el capital de \$1600.- será de \$2250.- en ocho años?

DATOS:

$m = 4$
$n = 8$
$C = 1600$
$S = 2250$
$i^{(4)} = ?$

resolución sin logaritmos:

$$i^{(m)}=m((S/C)^{1/mn}-1) \qquad i^{(4)}=4((\tfrac{2250}{1600})^{1/32}-1)$$
$$=4((1.40625)^{1/32}-1)$$
$$= 0.042843644$$

es decir $i^{(4)}=4.2843644\%$

resolución con logaritmos:

$$i^{(m)}=m(\text{antilog}(\frac{\log S - \log C}{mn}) - 1)$$
$$i^{(4)}=4(\text{antilog}(\frac{\log 2250-\log 1600}{32}) -1)$$
$$=4(\text{antilog}(\frac{3.3522-3.2041}{32}) - 1)$$
$$=4(\text{antilog}(0.004628125)-1)$$

para encontrar el antilogaritmo ver (cap.20)

$$=4(1.01071 - 1)$$
$$=0.04284$$

es decir $i^{(4)}=4.284\%$

resolución por interpolación lineal:

$S/C = 2250/1600 = 1.40625$

En tablas, el valor 1.40625 está entre las tasas de interés del 4% y 4.5% en la fila que corresponde al renglón 8 y los valores son: 1.368569 y 1.422101 aplicando la forma de la sección 17, , tenemos:

$$a \begin{bmatrix} 1.368569 \\ 1.406250 \\ 1.422101 \end{bmatrix} c \qquad d \begin{bmatrix} 0.040 \\ i^{(4)} \\ 0.045 \end{bmatrix} b$$

$$d = bc/a$$

de modo que:

$$i^{(4)}-0.045 = \frac{(.040-.045)(1.406250-1.422101)}{(1.368569 - 1.422101)}$$

de donde
$$=-0.0014805163$$
$$i^{(4)}=0.0435194837$$
$$i^{(4)}=4.35\%$$

Dado que el método de interpolación lineales sólo de aproximación, el resultado varía en 0.06% con respecto a los dos resultados anteriores.

Ahora si en las tablas buscamos el valor del cociente en la fila que corresponde a 32, es decir, el número total de períoodos durante los 8 años, tenemos que 1.40625 se encuentra entre 1.374941 y 1.430451 de las tasas 1% y 1.125% es decir:

$$\begin{bmatrix} 1.430451 \\ \begin{bmatrix} 1.406250 \\ 1.374941 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0.01125 \\ \begin{bmatrix} i^{(4)} \\ 0.01000 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

así:

$$i^{(4)}-0.01 = \frac{(0.00125)(0.031309)}{0.05551}$$

de donde $\quad i^{(4)} = 0.0107050306$

dado que consideramos el numero total de períodos mn, la tasa $i' = i^{(4)}/4$ es precisamente $i^{(4)}$, tenemos:

$$\begin{aligned} i^{(4)} &= 4(0.0107050306 \\ &= 0.0428201224 \end{aligned}$$

esta aproximación resulta mejor ya que:

$i^{(4)} = 4.282\%$ como en los dos casos anteriores

Ejercicios:

1. ¿A qué tasa nominal $i^{(m)}$ convertible semestralmente, la cantidad de \$500.- será de \$1400.- en 4 años? R. $i^{(2)}=27.47\%$.
2. ¿A qué tasa efectiva anual el monto de \$750.- será de \$5500. en 10 años? R. $i=22.048\%$.

4 DESCUENTO COMPUESTO

4.0 Definiciones:

Descuento: Es una rebaja por el pago hecho por adelantado-por el uso del dinero a crédito.
Esa rebaja se calcula en base a una tasa que se aplica al valor que estipula el documento.

Valor Nominal de un Pagaré:
El documento estipula un valor que debe liquidarse en cierta fecha, dicho valor es independiente de los intereses, si los hay.

Monto Nominal de un Pagaré:
Es la cantidad que se forma del valor nominal y los intereses aplicados a este hasta la fecha de pago.

Tasa de Descuento:
Se define como la razón del descuento aplicada a la cantidad sobre el cuál esta dado el descuento bajo la unidad de tiempo (un año). La tasa de descuento anual se expresa como un porcentaje.

Valor Líquido:
Es la cantidad neta que recibe el acreedor habiendo ya considerado el descuento que se aplicó o bien al monto nominal, o al valor nominal del documento.

Descuento Bancario Compuesto.
Es la diferencia entre el monto de una deuda a su vencimiento y el valor liquido cuando se descuenta la deuda a una tasa de descuento nominal convertible m veces al año.

Descuento Compuesto Verdadero.
Es el interés compuesto total acumulado hasta el final de n períodos, llamado también descuento sobre el monto.

4.1 Descuento Compuesto Verdadero en Problemas con Tasas de Interés Capitalisable.

Como mencionamos en 4.0 el descuento compuesto verdadero(D) o descuento sobre el monto, es el interés compuesto que sin el capital no generaría al monto y puede ser visto como S-C donde C es el capital:

$$D = S-C \qquad (F.27)$$

Usando (F.20) tenemos:

$$D=S-\left(\frac{S}{(1+i)^n}\right) \quad \text{o bien} \quad D=S(1-(1+i)^{-n}) \qquad (F.28)$$

según sea la frecuencia de capitalización otra forma de expresar D es:

$$D=S-\left(\frac{S}{(1+i')^{mn}}\right) \quad \text{o bien} \quad D=S(1-(1+i')^{-mn} \qquad (F.29)$$

$$D=S-\left(\frac{S}{(1+i')^{mn}}\right) \text{ o bien } \quad D=S(1-(1+i')^{-mn}) \qquad (F.29)$$

Ejemplos:

1. Si se obtuvo un monto de \$1950.- a una tasa del 17.5% convertible semestralmente durante 3 años, ¿cuál es el descuento compuesto verdadero correspondiente?

DATOS	FORMULA	SUSTITUCION
$S = 1950$		
$m = 2$	$D=S(1-(1+i')^{-mn})$	$D=1950(1-(1+0.0875)^{-2x3}$
$i^{(2)}=.175$		$=1950(1-(1.0875)^{-6})$
$n = 3$		$=1950(0.3954608845)$
$i'=0.175/2=0.0875$		$=771.1487$

así D=\$771,15

2. Determinar el descuento sobre \$6010.- a pagarse dentro de 3.5 años, si la tasa nominal es del 3.5% bimestral.

DATOS	FORMULA	SUSTITUCION
$S = 6010$		
$m = 6$	$D=S(1-(1+i')^{-mn})$	$D=6010(1-(1+.005833)^{-6x3.5}$
$i^{(6)}=.035$		$=6010(1-(1.005833)^{-21}$
$i'=0.0058333..$		$=6010(.1149791587)$
$n = 3.5$		$=691.0247439$

así D=\$691.02

Ejercicios:

1. Determinar el descuento compuesto verdadero de \$7320.- a pagarse dentro de 4 años, si la tasa es del 9% anual efectivo. R. \$2134.32.
2. Determinar el descuento compuesto verdadero de \$12122.- a pagarse en 2.5 años, si la tasa efectiva anual es del 14%. R. \$3386.01.

4.2 Deducción de la Fórmula para Calcular el Valor Líquido de una Deuda Descontada Anualmente a una Tasa de Descuento por un Período Determinado.

Basandonos en la definición expuesta en 4.0, el descuento es (Monto nominal)(tasa de descuento)(tiempo) = Sdt, el valor líquido es $C=S-Sdt$

Supongamos que cada año hacemos un descuento y que d es una tasa anual efectiva, entonces, al final del 1er. año, tenemos: $C=S(1-d)$

Para el final del 2do. año la tasa se aplica al capital anterior, obteniendose un nuevo capital descontado, es decir:

$$C = S(1-d) - S(1-d)d$$

factorizando tenemos:

$$C = S(1-d)(1-d) = S(1-d)^2$$

de modo que al final del n-ésimo año tendríamos:

$$C = S(1 - d)^n \qquad \text{(F.30)}$$

4.3 Equivalencia entre la Tasa Nominal de Descuento y la Tasa Efectiva de Descuento.

Analogamente a las definiciones de tasa de interés nominal y tasa de interés efectiva (3.4 y 3.6, respectivamente), tenemos las siguientes definiciones:

Tasa Nominal de Descuento:

Como su nombre lo indica aparenta una tasa global por año (dado que el capital se descuenta efectivamente o realmente a otra tasa, que es la tasa efectiva por período), es la tasa bajo la que se descuenta el capital durante el año.

Tasa Efectiva de Descuento:

Es la tasa con que se descuenta al capital en cada período de capitalización, cualquiera que sea este, es aquella en que realmente afecta al capital; se puede obtener de la tasa nominal de descuento dividiendo esta entre el número de capitalizaciones por año.

Ahora tenemos la tasa d como una tasa anual efectiva de descuento; si tenemos \$1.= de capital que se capitalizará por períodos menores a un año, trabajará con una tasa nominal de descuento convertible m veces por año, de modo que la tasa de descuento efectiva por período es:

$$d' = \frac{d^{(m)}}{m}$$

donde $d^{(m)}$ es la tasa nominal de descuento capitalizable m veces al año.

Así, al final del 1er. período o m-ésimo de año, tendremos:

$$(1) - (1)d' = (1 - d')$$

al final del 2do. m-ésimo de año tendrémos el descuento aplicado al nuevo capital:

$$(1 - d') - (1 - d')d' = (1-d')(1-d') = (1-d')^2$$

de modo que al final del año habrémos llegado al m-ésimo período de año y el descuento compuesto de \$1.= bajo una tasa nominal de descuento convertible m veces al año, genera el mismo valor para \$1.= colocado a una tasa de descuento efectiva anual, es decir:

$$(1 - d) = (1 - d')^m \qquad \text{(F.31)}$$

y al final de n años se tendría:

$$(1 - d)^n = (1 - d')^{nm} \qquad \text{(F.32)}$$

4.4 Descuento Bancario Compuesto o Descuento Exterior Propio que se obtiene en Problemas con Tasas de Descuento Compuesto.

Recordando la definición de (4.0) tenemos:

D = (Monto al vencimiento) - (Valor líquido o nuevo capital) es decir: $D = S - C$

sustituyendo (F.30) en la igualdad anterior, tenemos:

$$D = S - S(1 - d)^n \qquad \text{(F.33)}$$

y usando la igualdad (F.32), tenemos:

$$D = S - S(1 - d')^{mn} \qquad \text{(F.34)}$$

Ejemplos:

1. Determinar el descuento compuesto al 5.5% de descuento anual sobre $9510.- en 6 años.

DATOS	FORMULA	SUSTITUCION
$S = 9510$	$D=S(1-(1-d)^n)$	$D = 9510(1-(1-.055)^6)$
$d = .055$		$=9510(1-(.7121817674))$
$n = 6$		$=9510(.2878182326)$
		2737.151392

el descuento compuesto es $2737.15.

2. ¿Cuál es el descuento compuesto al 5.5% de descuento capitalizable trimestralmente sobre $9005.- durante 3 años?

DATOS	FORMULA	SUSTITUCION
$S = 9005$		
$d^{(m)}=.055$	$D=S(1-(1-d')^{mn})$	$D=9005(1-(1-.01375)^{12})$
$m = 4$		$=9005(1-(.98625)^{12})$
$d'= .055/4=.01375$		$=9005(1-.8469235214)$
$n = 3$		$=9005(.1530764786)$
		1378.453689

el descuento compuesto es de $1378.45

observación: los valores de $(1-d)^n$ y $(1-d')^{mn}$ pueden obtenerse mediante logaritmos (cap.20) o desarrollando el binomio (cap.21) o bien con calculadora con exponente.

Ejercicios:

1. Para una cantidad de $1100.- a pagarse en 2 años, ¿cuál es el descuento compuesto al 3% de descuento trimestral? R.$ R. $64.30
2. ¿Cuál es el descuento compuesto bimestral del 4% sobre $6990 durante 4 años? R. $1036.71

4.5 Relación entre la Tasa de Interés i y la Tasa de Descuento d.

Podemos expresar la tasa de descuento en términos de la tasa de interés simple y esta en términos de la tasa de descuento.

4.5.1 La Tasa Efectiva de Descuento Anual d.

Supongamos que tenemos un préstamo de $1.- por un año a un interés i.

Para liquidar el préstamo hay que hacer el pago de 1+i al terminar el año.

Según la definición de 4.0 de tasa de descuento, 1+i es esa cantidad sobre la que se aplica el descuento. Si vemos la formula de tanto por ciento estudiada en el capitulo 13 y si consideramos a 1+i como la base y a i como el porcentaje que se paga por el uso de \$1.=, es decir de $\frac{T}{100} = \frac{P}{B}$, tenemos:

$$d = \frac{T}{100} = \frac{i}{1+i} \qquad \text{así:} \quad d = \frac{i}{1+i}$$

de modo que d es el porcentaje de descuento sobre el monto 1+i.

4.5.2 La Tasa Efectiva de Interés Anual i.

Ahora supongamos que S es el monto nominal de un pagaré y C el valor líquido (ver.4.0)
Sea S= \$1.= y d la tasa que al descontarse de S genera el valor líquido y partiendo de la fórmula (F.4) que es:

$$S = C + Cit$$

de donde

$$S-C = Cit$$

$$i = \frac{S-C}{Ct}$$

dado que el tiempo es de 1 año:

$$i = \frac{S-C}{C}$$

si S=1 y d la tasa, tenemos según 4.3:

$$i = \frac{1-(1-d)}{1-d}$$

es decir:

$$i = \frac{d}{1-d}$$

la relación de i y d es;
si $d = \frac{i}{1+i}$

$i = d(1+i)$
$i = d + di$
$i - di = d$
$i(1-d) = d$
$i = \frac{d}{1-d}$

por lo tanto $$d = \frac{i}{1+i} \quad e \quad i = \frac{d}{1-d} \qquad (F.35)$$

Asi por ejemplo:

1. Dada una tasa efectiva de interés anual del 3.5%, determinar la tasa efectiva de descuento anual.

DATOS	FORMULA	SUSTITUCION
$i = .035$	$d = \frac{i}{1+i}$	$d = \frac{.035}{1+0.035} = 0.0338164251$

así d=3.38%

2. Determinar la tasa efectiva de interés anual si la tasa efectiva de descuento anual es de 3.38164251%.

DATOS	FORMULA	SUSTITUCION
i=0.0338164251	$i = \frac{d}{1-d}$	

$$i = \frac{0.0338164251}{1-0.033816425}$$

$$= 0.035$$

así $i=3.5\%$

Ejercicios:

1. ¿Cuál es la tasa efectiva de interés anual, si la tasa efectiva de descuento que se tiene es de 5.75%? R. $i=6.1\%$
2. Si se tiene una tasa efectiva de interés anual del 8.34% determinar la tasa efectima de descuento anual.
   R. $d = 7.70\%$

5 ECUACION DE VALOR

5.0 Capitales Equivalentes.

Dos capitales C_1 y C_2 pagaderos respèctivamente dentro de n_1 y n_2 períodos, son equivalentes, si descontados con la misma tasa producen el mismo valor actual de modo que se verifique la siguiente igualdad:

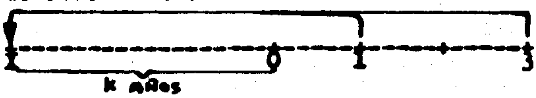
$$C_1(1 + r)^{-n_1} = C_2(1 + r)^{-n_2}$$

Calculando con el interés compuesto, dos capitales equivalentes en cierta fecha, son siempre equivalentes, porque adquieren constantemente los mismos valores.

Así dos capitales uno de \$2500.- y otro de \$2056.7560 pagaderos el primero dentro de 3 años y el segundo dentro de 1 año descontados al 10% semestral, valen actualmente \$1865.5384 cada uno. Dentro de k años, cada uno valdrá según (F.20): $1865.5384(1.05)^{-2k}$, es decir:

$1865.5384(1.05)^{-2k}$ $\quad$ 1865.5384

O bien, de otra forma:



$2056.756(1.05)^{-2(k+1)}$

$2500(1.05)^{-2(k+3)}$

Así, si tenemos que k es 6 años:

$$\begin{aligned} 1865.5384(1.05)^{-2x6} &= 1038.8015 \\ &= 2056.756(1.05)^{-2(6+1)} \\ &= 2500(1.05)^{-2(6+3)} . \end{aligned}$$

5.1 Pago Unico - Problemas con Tasa Nominal Convertible m veces al año.

La ecuación de valor es como vimos en 1.4 una igualdad en las obligaciones de un deudor cuando estas tienen diferentes fechas de valuación.

Para obtener el pago único, basta obtener la suma de los valores al momento de la fecha de valuación.

Ahora veremos mas ejemplos en los que aplicaremos la fórmula del interés compuesto.

EjemploS:

1. Se obtuvo el día de hoy un préstamo de $61000.- que se van a pagar dentro de 9 meses sin intereses, habiendose contraído una deuda de $16000.- exactamente un mes atrás y debía pagarse en 6 meses sin intereses apartir de esa fecha, ¿cuánto se tiene que reunir para pagar ambas deudas dentro de 5 meses si la tasa de interés es del 4% convertible semestralmente?

   Sea X el valor requerido que es igual a la suma de los valores en la fecha de valuación de las dos obligaciones:

   a) $16000.- en el momento de la fecha de valuación.

   b) para la segunda deuda tenemos:

   $n = 4/12$

   $m = 2$

   $i^{(2)} = .04$

   $i' = .02$ $\qquad\qquad C = 61000(1+.02)^{-(4/12)(2)}$

   $S = 61000.-$

   es decir:

   fecha de valuación

   +---+---+---+---+---+---+---+---+---+

   $16000 $\qquad\qquad$ 61000

   $X = 16000 + 61000(1+.02)^{-\frac{8}{12}}$

   $= 16000 + 61000(1.02)^{-.6666667}$

   desarrollando el binomio (cap.21) o usando logaritmos (cap.20) o con calculadora con exponente, tenemos:

   $X = 16000 + 61000(.9868850094)$

   $X = 76199.98557$

   el pago único dentro de 5 meses es de $76199.98

2. El mismo ejemplo anterior pero con intereses distintos en cada deuda: Se obtuvo el día de hoy un prestamo de $61000. que se van a pagar en 9 meses a una tasa del 3% convertible trimestralmente, un mes antes se obtuvo un préstamo de - $16000.- a pagarse en 6 meses a una tasa del 2% convertible cada 4 meses, ¿cuánto se tiene que reunir para pagar dentro de 5 meses a partir de hoy, si la tasa es del 4% convertible semestralmente?

   monto de la 1era. deuda:

   $C = 16000$

   $n = 9/12$ $\qquad\qquad S = 16000(1+.0075)^{(9/12)(4)}$

   $m = 4$ $\qquad\qquad = 16000(1.0075)^{3}$

   $i^{(4)} = .03$ $\qquad\qquad = 16000(1.022669172)$

   $i' = .03/4 = .0075$ $\qquad\qquad = 16362.70675$

   monto de la 2da. deuda:

   $C = 61000$

   $n = 1/2$

$m = 3$

$i^{(3)} = .02$

$i' = .02/3 = .006666667$

$$S = 61000(1+.00666667)^{(1/2)(3)}$$
$$= 61000(1.006666667)^{1.5}$$
$$= 61000(1.010016647)$$
$$= 61611.01548$$

de modo que:

$n = 4/12 = 1/3$

$m = 2$

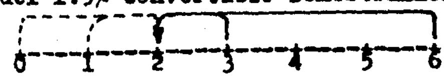
$i^{(2)} = .04$

$i' = .02$

$$X = 16362.70675+61611.01548(1.02)^{-(4/12)(2)}$$
$$= 16362.70675+60802.98759$$
$$= 77165.69434$$

el pago único dentro de 5 meses es de \$77165.89

3. E l día de hoy se pagan \$2930.= de una deuda cuyo monto es de \$5400.= a pagarse dentro de 3 años, dentro de 1 año se abonarán \$3400.= de una deuda cuyo monto es de \$7300.= a pagarse en 6 años. Determinar el pago único que cubriría ambas deudas al finalizar el 2do. año a partir de ahora si la tasa de interés es del 1.5% convertible semestralmente.



X = el pago único

$m = 2$

$i^{(2)} = 0.015$

$i' = .015/2 = .0075$

la ecuación es:

$$2930(1+.0075)^{2x2} + 3400(1.0075)^{2x1} + X = 5400(1.0075)^{-2x1} + 7300(1.0075)^{-4x2}$$

de donde:

$$X = 5400(1.0075)^{-2}+7300(1.0075)^{-8}-2930(1.0075)^{4}-3400(1.0075)^{2}$$
$$= 5400(.9851670782)+7300(.9419754006)-2930(1.030339191)-3400(1.01505625)$$
$$= 5319.902222+6876.420424-3018.89383-3451.19125$$
$$= 5726.237566$$

el pago único al final del 2do. año es de \$5726.24

Ejercicios:

1. Se tienen 3 deudas cuyos montos son de \$6210.= a pagarse en 1 año \$3720.= a pagarse en 2 años y \$8520.= a pagarse en 4 años; determinar el pago único al final del 3er. año si la tasa de interés es del 9% convertible semestralmente.
   R. \$3665.85.
2. Dentro de 1 año se pagarán \$5555.= de una deuda cuyo monto es de \$13333.= a pagarse en 3 años. Determinar el pago único al final del 2do. año si la tasa de interés es del 9% trimestral.
   R. \$6125.53.

5.2 Determinación de la Fecha del Pago Único.

La fecha en la cual un conjunto de obligaciones, con vencimiento en fechas diferentes, puede ser liquidado mediante un pago único igual a la suma de las distintas deudas, se conoce como fecha de vencimiento promedio de las deudas o fecha de vencimiento común.

El tiempo por transcurrir hasta dicha fecha se conoce como tiempo equivalente, o plazo medio.

Ejemplo:

1. ¿Cuál es el tiempo equivalente para el pago de unas deudas cuyos montos son de \$2850.- con vencimiento en 2 años y \$1600 con vencimiento en 1 año suponiendo una tasa del 5% convertible bimestralmente?

```
                                1er. año      2do. año
+----+----+----+----+----+----+----++++------+
+    1    2    3    4    5    6              12 bimestre
+         bimestres
```

como fecha focal tenemos el inicio del 1er. bimestre.

$2850+1600 = 4450$

$$4450\left(1+\frac{.05}{6}\right)^{-6n} = 1600\left(1+\frac{.05}{6}\right)^{-6x1} + 2850\left(1+\frac{.05}{6}\right)^{-6x2}$$
$$= 1600(1.00833)^{-6} + 2850(1.00833)^{-12}$$
$$= 1600(.9514265236)+2850(.9052124298)$$
$$= 1522.282438 + 2579.855425$$
$$= 4102.137863$$

$$(1.00833)^{-6n} = 4102.137863/4450 = 0.9218287333$$

interpolando, según (17.6) tenemos; además de usar tablas financieras:

$$\begin{bmatrix} 0.928032 \\ 0.921829 \\ 0.920362 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 9 \\ 6n \\ 10 \end{bmatrix} 1$$

$$6n - 10 = \frac{(0.921829-0.920362)(9-10)}{(0.928032-0.920362)}$$
$$= \frac{(+.001467)(-1)}{(.00767)}$$
$$= -.1912646675$$

de donde:

$$6n = -.1912646675 + 10$$
$$n = 9.808735332/6$$
$$n = 1.63478$$

Regla práctica para obtener el tiempo equivalente:

1- Multiplíquese cada deuda por el tiempo (años) que falte hasta su vencimiento.

2- Súmense los productos obtenidos y divídanse entre la suma de las deudas.

Ejemplo:

En nuestro caso tenemos:

$$n = \frac{1600(1) + 2850(2)}{4450} = \frac{1600 + 5700}{4450} = \frac{7300}{4450} = 1.64 \text{ años}$$

Si tomamos como fecha de comparación (o fecha f o c a l) el el inicio del 1er. bimestre y le agregamos 1.64 años, obtenemos la fecha de vencimiento común.

El plazo medio es de 1.64 años o bien usando proporciones (sec.16.2) tenemos:

$$\begin{aligned} .64 &: z \text{ días} \\ 1.00 &: 360 \text{ días comerciales} \end{aligned}$$

de donde

$$z = 230 \text{ días}$$

de modo que el plazo medio es de 1 año 7 meses 20 días.

6 ANUALIDADES

En los capitulos anteriores estudiamos bases suficientes para tratar ahora, los casos de varios pagos que se efectúan despues de transcurrir determinado tiempo entre cada uno de ellos, los cuales se acumulan, o bien se descuentan en una fecha específica (en casi la totalidad de los casos).

6.0 Concepto de Anualidad.

Una anualidad es una sucesión de pagos periódicos iguales.

Una anualidad parece indicar que los pagos se hacen anualmente; sin embargo éste no es necesariamente el caso. Son ejemplos sencillos de anualidades los pagos mensuales por concepto de renta y el pago de primas de seguro de vida.

6.1.0 Clasificación General de las Anualidades.

Existen dos tipos de series de pagos y son anualidades ciertas y anualidades contingentes;

6.1.1 Anualidades Ciertas.

Las anualidades ciertas son aquellas en que el plazo está previamente determinado, como por ejemplo, abonos para la compra de un auto, el pago de las rentas por contrato para un departamento, etc.

6.1.2 Anualidades Contngentes o Eventuales.

Es la serie de pagos que se relacionan con cosas o hechos que en algun momento no determinado sufriran algo inconveniente o inesperado con lo cual se termina dicha serie de pagos. Un ejemplo sería la muerte de un individuo que tenía seguro de vida.

6.2 Elementos de una Anualidad.

Renta:

Es el valor de cada pago de la anualidad.

Renta anual:

Es el total de los pagos en un año-

Plazo o término de la anualidad:

Es el tiempo comprendido entre el inicio del 1er. período de la anualidad y el término del último período de la misma.

Período o intervalo de pago:

Es el tiempo comprendido entre cada pago.

Tasa de la anualidad:

Es la tasa que genera la renta, por lo que generalmente es efectima por período.

Observación:

Dado que en la práctima son muy frecuentes los pasos de rentas, pagos de primas de seguro de vida, seguro automovilistico y toda clase de seguros, así como bonos semanales, etc la palabra PAGO utilizada en los capitulos posteriores es adecuada para estos casos. En los casos en que el valor del pago gane intereses como en los casos de monto de una anualidad o en los casos que dicho valor se descuente, como en los casos de valor presente de una anualidad, dicho valor lo interpretaremos como una cantidad de inversión y no como una cantidad de deuda en la mayoría de los casos.

6.3 Clasificación de las Anualidades Ciertas.

Las anualidades ciertas se dividen en dos y son: anualidades a plazo fijo y rentas perpetuas;

Anualidades a plazo fijo son las series de pagos en las que se conoce la fecha del último pago, como son los pagos en la compra a crédito de un televisor.

Rentas perpetuas son cantidades que se pagan en cada período sin final, por ejemplo, las donaciones a algún orfanatorio o algún asilo.

6.4 Subdivisión de las Anualidades Atendiendo a la Fecha en que el Pago tiene lugar.

La subdivisión la expresamos así:

ANUALIDADES
- ordinarias o vencidas
- anticipadas
- diferidas
  - ordinarias
  - anticipadas
- perpetuas
  - ordinaria
  - diferida
    - ordinaria
    - anticipada
  - anticipada

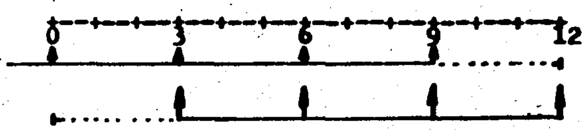
Las anualidades ordinarias o vencidas son aquellas en las que el pago de cada período se realiza al final de este.

Las anualidades anticipadas son aquellas en las que el pago de cada período se realiza al inicio de este.

Supongamos que el siguiente "eje del tiempo" representa un año dividido en trimestres y que las flechas indican el momento de cada pago:

a) anticipada

b) ordinaria



Anualidades Diferidas son aquellas cuyo primer pago inicia despues de un tiempo prefijado.

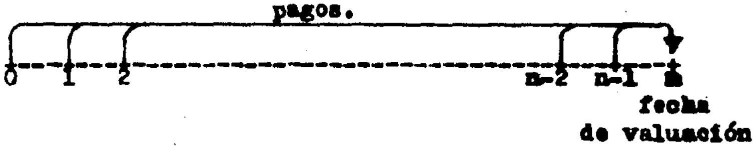
Rentas Perpetuas son aquellas que no tienen un último pago.

Supongamos que el siguiente "eje del tiempo" representa una cantidad infinita de trimestres a partir del r-ésimo año.

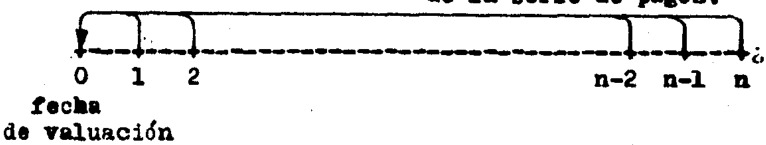
6.5 Epoca de Valuación de una Anualidad.

El calculo de una anualidad depende de la época de valuación la cual puede ser al inicio del plazo, en un punto intermedio del plazo y al final del plazo:

a) Monto de una anualidad: Es el valor de la anualidad que se calcula al final de la serie de pagos.

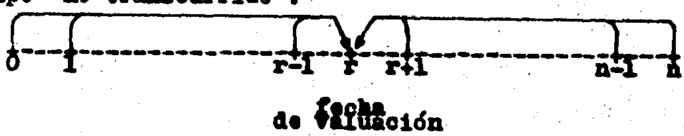


b) Valor Actual de la anualidad: Es el valor de la anualidad que se calcula al principio de la serie de pagos.



c) Valor de una anualidad en un punto intermedio:

Es el valor que resulta de agregar al monto del tiempo "transcurrido", el valor actual del tiempo "no transcurrido".



7 MONTO DE ANUALIDADES CIERTAS ORDINARIAS

7.0 Concepto.

Consideremos que en una anualidad cada pago gana interés compuesto desde el momento en que se hace el pago hasta el final del plazo, siendo el período (nO el plazo) de la anualidad igual al período de capitalización del interés compuesto o bien, distinto (7.2.1), así, el monto de una anualidad al final de su término o plazo, se define como la suma de los montos compuestos de todos los pagos de la anualidad acumulados hasta el fin del plazo.

7.1.0 Deducción de la Fórmula del Monto de una Anualidad Cierta Ordinaria de una Unidad Monetaria por año durante n años a una Tasa de Interés Efectiva anual.

Si consideramos una anualidad ordinaria en donde R es el pago hecho al final de cada uno de n años, e i la tasa de interes por año y la fecha de valuación al final del plazo, tenemos:

El 1er. pago de R se hace al final del año y el interés se aplicará por n-1 años que es el tiempo en que se acumulará dicho pago:

0---1---2-------------------------------------n-1---n

Según la formula (F.19), su monto al final del plazo será

$$R(1+i)^{n-1}$$

Analogamente para el 2do. pago de R, gana interés por n-2 años y su monto al final del plazo será:

$$R(1+i)^{n-2}$$

0---1---2-------------------------------------n

Continuando así vemos que el pago de orden n-1 producirá un monto de:

$$R(1+i)^{n-(n-1)}$$

o bien

$$R(1+i)$$

0---1---2-------------------------------------n-1---n

Y el pago n-ésimo o pago final, tendrá como monto su propio valor, R, ya que:

$$R(1+i)^{0}=R$$

es decir, ya no hay años por transcurrir para lograr otro monto mayor a R:

0---1---2-------------------------------------n-1---n

Escribiendo estos montos en orden inverso tenemos:

$R.\ R(1+i),\ R(1+i)^2,\ \ldots\ R(1+i)^{n-2},\ R(1+i)^{n-1}$

Partiendo de la definición del monto de una anualidad ordinaria, dada en 7.0 y designando la letra S para representar el monto, tenemos:

$$S = R + R(1+i) + R(1+i)^2 + R(1+i)^{n-2} + R(1+i)^{n-1}$$

$$S = R(1 + (1+i) + \ldots + (1+i)^{n-1})$$

La fórmula se puede obtener usando el concepto de progresión geométrica estudiado en (cap.19) y lo dejamos como ejercicio al estudiante. Deduciremos la fórmula de la siguiente manera:

Asignando el simbolo $S_{\overline{n|}i}$ al 2do. factor del 2do. miembro de la ecuación, tenemos:

$$S_{\overline{n|}i} = 1+(1+i)+\ldots+(1+i)^{n-1}$$

$$S = R\, S_{\overline{n|}i} \qquad (1)$$

observemos que:

$$(1+i)S_{\overline{n|}i} = (1+i)+(1+i)^2+\ldots+(1+i)^n \qquad (2)$$

ahora restando (2) de $S_{\overline{n|}i}$, tenemos:

$$\begin{aligned} S_{\overline{n|}i} - (1+i)S_{\overline{n|}i} &= 1+(1+i)+\ldots+(1+i)^{n-1} \\ &\quad -(1+i)-\ldots-(1+i)^{n-1}-(1+i)^n \\ &= 1 - (1+i)^n \end{aligned}$$

de modo que:

$$S_{\overline{n|}i}(1 - (1+i)) = 1 - (1+i)^n$$

así:

$$S_{\overline{n|}i} = \frac{1 - (1+i)^n}{1 - (1+i)} = \frac{1 - (1+i)^n}{-i}$$

multiplicando numerador y denominador por (-1) tenemos:

$$S_{\overline{n|}i} = \frac{(-1)(1-(1+i)^n)}{(-1)(-i)} = \frac{(1+i)^n - 1}{i} \qquad (F.36)$$

sustituyendo $S_{\overline{n|}i}$ en (1), tenemos:

$$S = R\left(\frac{(1+i)^n-1}{i}\right) \qquad (F.37)$$

o bien

$$S = RS_{\overline{n|}i} \qquad (F.38)$$

por lo tanto si la renta es de $1, tenemos:

$$S = S_{\overline{n|}i}$$

Observación: el simbolo $S_{\overline{n|}i}$ se encuentra en tablas financieras a las que hacemos referencia en la introducción. El valor de $(1+i)^n$ lo podemos obtener mediante loga -

ritmos (cap.20) o desarrollando el binomio (cap.21) o con calculadora con exponente.

Ejemplo:

1. Determinar el valor acumulado al final de 2 años si se invierte un capital de \$53.= al final de cada año que trabaja a una tasa efectiva anual del 45%.

DATOS

$n = 2$
$R = C = 53$
$i = .45$

FORMULA

$S = R s_{\overline{2|}.45}$

SUSTITUCION

$S=53(\frac{(1+0.45)^2-1}{.45})$

usando logaritmos encontraremos el valor de $(1.45)^2$:

$$M = (1.45)^2$$
$$\log M = 2\log 1.45$$
$$\log M = 2(.1613680022)$$
$$\log M = .3227360045$$
$$M = \text{antilog}(.3227360045)$$
$$M = 2.1024$$

de modo que:

$$S=53(\frac{2.1024 - 1}{.45})$$
$$=53(2.449777778)$$
$$=129.8382$$

el monto es de \$129.84 al final de 2 años.

Ejercicios:

1. Determinar el valor que se acumulará al final de 7 años si al final de cada año se invierten \$90000.= a una tasa del 10% anual. R. \$853,845.30.
2. ¿Cuál es el monto de una deuda al final de 4 años, si al final de cada año se pagan \$1315.= a una tasa del 6.5% anual efectivo? R. 5795.43.

7.1.1 Cálculo de la Renta Anual.

La renta anual que bajo una tasa efectiva anual se transforma en un cierto monto al través de n años, se obtiene despejando R de (F.37), es decir:

$$R = \frac{S}{s_{\overline{n|}i}} = \frac{S}{\frac{(1+i)^n-1}{i}} \text{, es decir:}$$

$$R = \frac{Si}{(1+i)^n - 1} \qquad (F.39)$$

Ejemplo:

1. Determinar la cantidad que al finalizar cada año se debe invertir a una tasa del 45% anual efectivo para acumular la cantidad de \$129.8382. R:

DATOS

$n = 2$
$i = .45$

FORMULA

$R = \frac{S}{s_{\overline{n|}i}}$

SUSTITUCION

$R = \frac{129.8382}{2.449777778}$
$=53$

así R = \$53.=

Ejercicios:

1. ¿Qué cantidad anual es necesaria para que en 6 años se acu - mulen \$150000.- si cada cantidad se invertirá al 40% anual. R. \$9189.01.
2. Si se tiene un monto de \$92000.- que se acumuló en 17 años a una tasa efectiva anual del 14%, ¿cuánto tuvo que invertir se al final de cada año? R. \$1556.22.

7.1.2 Cálculo de el tiempo.

El tiempo que hace que un capital se transforme en monto bajo una tasa de interés, se obtiene de dos maneras:

- despejando n de (F.37)

$$(1+i)^n - 1 = \frac{Si}{R}$$

$$(1+i)^n = \frac{Si}{R} + 1$$

$$n\log(1+i) = \log\left(\frac{Si}{R} + 1\right)$$

de donde:

$$n = \frac{\log\left(\frac{Si}{R} + 1\right)}{\log(1+i)} \qquad \text{(F.40)}$$

- basandose en tablas financieras, buscando el cociente siguiente:

$$s_{\overline{n}|i} = \frac{S}{R}$$

si dicho cociente no se encuentra en tablas, se deter - mina mediante el método de interpolación lineal([illegible]) y la n que corresponde a dicho valor, es el tiempo buscado.

Ejemplo:

1. ¿Cuál es el tiempo en que tiene que invertirse al final de cada año, un capital de \$2000.- para formar un monto de \$35600 si la tasa efectiva de interés es del 11%.

DATOS

$R = 2000.$

$S = 35600$

$i = .11$

FORMULA

$$n = \frac{\log\left(\frac{Si}{R} + 1\right)}{\log(1+i)}$$

SUSTITUCION

$$n = \frac{\log((35600 \times 0.11)/2000 + 1)}{\log(1+0.11)}$$

$$= \frac{\log(2.958)}{\log(1.11)}$$

$$= \frac{0.4709981697}{0.0453229788}$$

$$= 10.39203914$$

n=10.39 años

$$s_{\overline{n}|i} = \frac{S}{R} \qquad s_{\overline{n}|.11} = \frac{35600}{2000} = 17.8$$

en tablas financieras, según (cap.17; F.172 y F.175) el método de interpolación:

$$\begin{bmatrix} 19.56143 \\ \begin{bmatrix} 17.80000 \\ 16.72201 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 11 \\ \begin{bmatrix} n \\ 10 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$n-10 = \frac{(17.8 - 16.72201)(11-10)}{(19.56143-16.72201)}$$

$$= \frac{(1.07799)(11-10)}{2.83942}$$

$$= 0.3796514781$$

de donde $n = 10.38$

usando proporciones (sec. 16.2)

$$\begin{matrix} .38 : z \\ 1.00 : 360 \end{matrix} \qquad z = 136.8 \text{ días}$$

por lo tanto n = 10 años 4 meses 16 días.

Ejercicios:

1. Si se quiere formar un monto de \$27900.= bajo una tasa efectiva anual del 9% con pagos de \$3100.= al final de cada año, ¿cuánto tiempo se necesita? R. n=6.8849 o bien 6 años 10 meses 18 días.
2. ¿En qué tiempo se acumularán \$100000.= si al final de cada año se invierten \$9000.= a una tasa del 7% anual? R. 8.503 o bien 8 años 6 meses 1 día.

7.1.3 Cálculo de la Tasa de Interés Anual Efectiva.

Para obtener la tasa anual podemos buscar en tablas financieras el cociente $S_{\overline{n}|i} = \frac{S}{R}$, fijandonos en la fila de n y en la columna de $S_{\overline{n}|i}$ en las paginas que contengan el valor $\frac{S}{R}$ con la posibilidad de aplicar el método de interpolación (ver. cap.17).

Mediante el desarrollo del binomio (cap.21), podríamos encontrar alguna expresión para i, sin embargo no es muy práctica como buscar en tablas, por lo que aquí no la veremos.

Ejemplo:

1. Para un valor acumulado de \$210000.= que se logró en 5 años mediante cantidades de \$13000.= pagaderas al final de cada año, ¿cuál es la tasa efectiva anual correspondiente?

DATOS	FORMULA	SUSTITUCION
S = 210000	en tablas financieras:	
n = 5	$S_{\overline{5}|i} = 16.15384615 = \frac{S}{R}$	
R = 13000	e interpolando (F.172 y F.175), tenemos:	

$$\begin{bmatrix} 18.85510 & & 70\% \\ 16.15384 & & i \\ 15.80960 & & 60\% \end{bmatrix}$$

$$i-60 = \frac{(16.15384-15.80960)(70-60)}{(18.85510-15.80960)}$$

$$= \frac{3.44246}{3.0455} = 1.13034313$$

de donde:

$$i = 61.130343$$

$$i = 61.13\%$$

Ejercicios:

1. ¿Cuál es la tasa efectiva anual necesaria para acumular \$89000 en 6 años con cantidades pagaderas al final de cada año de \$9500.- R. i=17.687%.
2. ¿Cuál es la tasa que mediante cantidades de \$5560.- pagaderas al final de cada año forman un monto de \$75000.- en 4 años i = 90.737%.

7.2 Desarrollo de la Fórmula del Monto Unitario $s_{\overline{n}|i}$ correspondiente a valores que están fuera de los límites de las Tablas Financieras.

La formula que obtendrémos es para cualquier valor de n; las tablas a las que hémos hecho referencia en la introducción, tienen como límite n = 100 y hasta la tasa del 15%, para la del 16% en adelante n=50. Si vamos a trabajar con n > 100 o n > 50 según el caso podemos utilizar dos valores k y t tales que k+t es igual a n y ambos esten en tablas, tenemos:

$$\text{Si } k+t = n$$

entonces:

$$s_{\overline{n}|i} = s_{\overline{k+t}|i}$$

así

$$s_{\overline{n}|i} = s_{\overline{k+t}|i} = \frac{(1+i)^{k+t} - 1}{i}$$

si sumamos cero al numerador, siendo $(1+i)^k - (1+i)^k = 0$, tenemos:

$$s_{\overline{n}|i} = s_{\overline{k+t}|i} = \frac{(1+i)^{k+t} - (1+i)^k + (1+i)^k - 1}{i}$$

$$= \frac{(1+i)^{k+t} - (1+i)^k}{i} + \frac{(1+i)^k - 1}{i}$$

así:

$$= (1+i)^k \times \frac{(1+i)^t - 1}{i} + \frac{(1+i)^k - 1}{i}$$

observamos que:

$$= (1+i)^k \, s_{\overline{t}|i} + s_{\overline{k}|i}$$

de modo que:

$$s_{\overline{k+t}|i} = (1+i)^k s_{\overline{t}|i} + s_{\overline{k}|i} \qquad (1)$$

sustituyendo en (F.38), tenemos:

$$S = R\, s_{\overline{k+t|}\,i} \qquad \text{(F.41)}$$

o bien $$S = R((1+i)^k\, s_{\overline{t|}\,i} + s_{\overline{k|}\,i} \qquad \text{(F.42)}$$

Ejemplo:

1. Encontrar el monto de una serie de pagos de $200.= pagaderos al final de cada año durante 125 años si la tasa efectiva anual es del 10%.

DATOS	FORMULA	SUSTITUCION
$R = 200$	$S = R((1+i)^k s_{\overline{t|}\,i} + s_{\overline{k|}\,i})$	
$n = 125$		
$i = .10$		
sea $k = 80$		$S = 200((1+.10)^{80} s_{\overline{45|}\,.10} + s_{\overline{80|}\,.10})$
y $t = 45$		

$= 2048.400215(718.90484)200 + 200(20474.00215)$

$= 294520965.80 + 4094800.43$

$\underline{S = 298615766.20} = \underline{\$298'615,766.20}$

Ejercicio :

1. Hallar el monto que produce una serie de pagos de $200.= al final de cada año si la tasa efectiva anual es del 8% durante 130 años. R. $55 086 717.56.

7.3.0 Deducción de la Fórmula General del Monto de una Anualidad Cierta Ordinaria de una Unidad Monetaria pagadera p veces al Año durante n años a una Tasa Nominal de Interés Capitalizable m veces al año.

Anteriormente, cuando hablamos de interés compuesto teníamos que el monto al final del 1er. año era:

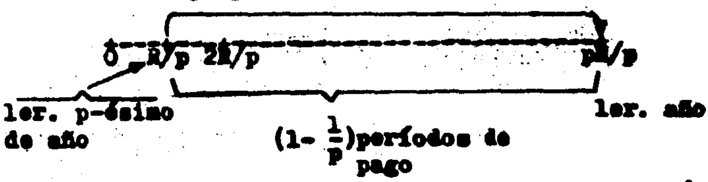
$$S = C(1+i')^m$$

y al final del n-ésimo año $S = C(1+i')^{mn}$ donde C era el capital y la única cantidad y la única cantidad sobre la que el interés trabajaba.

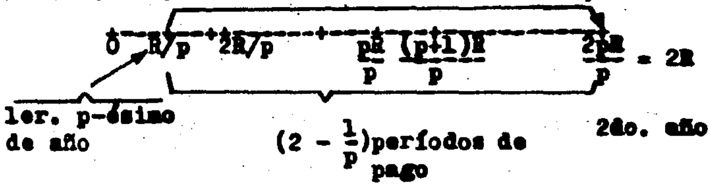
Ahora estudiaremos el caso de no uno, sino de una serie de pagos o cantidades a las que a cada una se les aplica el interés durante el tiempo que falte hasta la fecha de vencimiento. Supongamos primero que por cada año hay p períodos de pago, es decir para reunir en un año la cantidad R, en cada p-ésimo de año se paga (R/p) existiendo m períodos al año en que se convierte la tasa. De acuerdo a (F.18) donde n es en años el tiempo que falta por transcurrir para formarse un monto, el 1er. pago o cantidad R/p hecho al final del 1er. período tiene como monto al final del 1er. año:

$$\frac{R}{p}(1+i')^{m(1-\frac{1}{p})}$$

es decir el tiempo para que se forme el monto es:



si se trata del monto a acumularse en 2 años, tendríamos:



es decir:

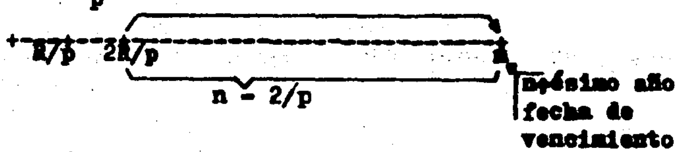
$$\frac{R}{p}(1+i')^{m(2-\frac{1}{p})}$$

Ahora para el caso de n años el monto del 1er. pago sería:

$$\frac{R}{p}(1+i')^{m(n-\frac{1}{p})}$$

así para el 2do. pago de R/p (que al efectuarse se acumularían dos pagos es decir R/p + R/p) el monto al final del n-ésimo año sería:

$$\frac{R}{p}(1+i')^{m(n-\frac{2}{p})}$$



Dado que el p-ésimo pago se efectua al finalizar el 1er. año el monto sería de:

$$\frac{R}{p}(1+i')^{m(n-\frac{p}{p})} = \frac{R}{p}(1+i')^{mn-m}$$

al finalizar el 2do. año se efectuaría el 2p-ésimo pago, por hacerse p pagos cada año, y el monto sería:

$$\frac{R}{p}(1+i')^{m(n-2p/p)} = \frac{R}{p}(1+i')^{mn-2m}$$

Así el penúltimo pago se acumulará por (1/p) de año, es decir el monto es de:

$$\frac{R}{p}(1+i')^{m(1/p)} = \frac{R}{p}(1+i')^{m/p}$$

De modo que el último pago se efectuaría al final del n-ésimo año y el monto sería de:

$$\frac{R}{p}(1+i')^{m(n - np/p)} = \frac{R}{p}(1+i')^{mn-mn} = \frac{R}{p}$$

Como vimos en 7.0 el monto de la anualidad cierta ordinaria es la suma de todos los montos compuestos acumulados hasta la fecha de vencimiento, es decir, denotando a dicha suma con la letra S y factorizando R de cada pago:

$$S=R(\frac{1}{p}(1+i')^{mn-\frac{m}{p}} + \frac{1}{p}(1+i')^{mn-\frac{2m}{p}}+\ldots+ \frac{1}{p}(1+i')^{\frac{m}{p}} + \frac{R}{p})$$

Asignando el símbolo $S^{(p)}_{\overline{n}|i'}$, al 2do. factor del 2do. miembro de la ecuación, tenemos:

$$S^{(p)}_{\overline{n}|i'} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p}(1+i')^{m/p} + \ldots + \frac{1}{p}(1+i')^{mn-2m/p} + \frac{1}{p}(1+i')^{mn-\frac{m}{p}}$$

$$= \frac{1}{p}+\frac{1}{p}(1+i')^{m/p}+\ldots+\frac{1}{p}(1+i')^{\frac{m}{p}(np-2)}+\frac{1}{p}(1+i')^{\frac{m}{p}(np-1)}$$

es decir:

$$S = R\, S^{(p)}_{\overline{n}|i'} \qquad (1)$$

Si aplicamos el concepto de progresión geométrica (cap.19) tenemos los datos siguientes:

$\frac{1}{p}$ es el 1er. término de la sucesión

np número de términos (p períodos por año)

$(1+i')^{m/p}$ razón de la progresión

$\frac{1}{p}(1+i')^{mn-\frac{m}{p}}$ último término

sustituyendo éstos datos en (F.180), tenemos:

$$X_1 = \frac{1}{p},\ r = (1+i')^{m/p},\ X_n = \frac{1}{p}(1+i')^{mn-\frac{m}{p}},\ S_n = S^{(p)}_{\overline{n}|i}$$

de modo que:

$$S^{(p)}_{\overline{n}|i'} = \frac{1/p - (1+i')^{m/p}(1/p)(1+i')^{mn-\frac{m}{p}}}{1 - (1+i')^{m/p}}$$

$$= \frac{1/p - 1/p(1+i')^{mn}}{1 - (1+i')^{m/p}}$$

multiplicando por 1 el cociente de manera que $1 = \frac{(-1)}{(-1)}$:

$$S\left(p\right)_{\overline{n}|i'} = \frac{-\frac{1}{p}(-1)(1+i')^{mn} + (-1)(1/p)}{-(-1)(1+i')^{m/p} + 1(-1)} = \frac{\frac{1}{p}(1+i')^{mn} - 1/p}{(1+i')^{m/p} - 1}$$

es decir:

$$S\left(p\right)_{\overline{n}|i'} = \frac{1}{p}\left(\frac{(1+i')^{mn} - 1}{(1+i')^{m/p} - 1}\right) \qquad (F.43)$$

sustituyendo $S\left(p\right)_{\overline{n}|i'}$ en (1), tenemos:

$$s = R\left(\frac{(1+i')^{mn} - 1}{p\left((1+i')^{m/p} - 1\right)}\right) \qquad (F.44)$$

o bien

$$S = R\ S\left(p\right)_{\overline{n}|i'} \qquad (F.45)$$

entonces, si la renta anual R es de \$1.=, tenemos:

$$S = S\left(p\right)_{\overline{n}|i'}$$

7.3.1 Casos Particulares.

La formula (F.43) incluye cualquier caso relacionado con la frecuendia de los pagos P y la convertibilidad de la tasa nominal $i^{(m)}$ (recordemos que $i' = \frac{i^{(m)}}{m}$), sin embargo simplificaremos la fórmula para cada caso.

Los casos son:

a) $m > 1$ y $p > 1$; m/p no es entero, p/m no es entero
b) $m = 1$ y $p = 1$; $m = p$
c) $m > 1$ y $p > 1$; $m = p$
d) $m > 1$ y $p > 1$; p/m entero; $p > m$
e) $m > 1$ y $p > 1$; m/p entero; $m > p$
f) $m > 1$ y $p = 1$
g) $m = 1$ y $p > 1$

a) Es el caso más general y la formula es aplicable tal como se expresa en (F.44).

Ejemplo:

1. Durante 5 años y al final de cada semestre se invierten \$12500.= a una tasa del 4% capitalizable cada 4 meses , ¿cuál será el monto correspondiente?

DATOS	FORMULA	SUSTITUCION
$n = 5$		
$p = 2$		
$R = 12500 \times 2 = 25000$	$S = R/p \times \frac{(1+i')^{mn} - 1}{(1+i')^{m/p} - 1}$	
$m = 3$		
$i^{(3)} = .04$		
$i' = .04/3 = 0.013333$		

$$S = \frac{2500}{2} x \frac{(1+.01333)^{3x5}-1}{(1+.01333)^{3/2}-1}$$

$$= 12500x\frac{.219789614}{.020066519}$$

$$= 12500x10.9530579$$

$$=136913.1425$$

Ejercicios:

1. Durante 3 años y al final de cada trimestre se invierten \$1230 a una tasa del 1.5% convertible cada 4 meses, determinar el monto correspondiente. R. \$3767.016986.
2. Al final de cada 4 meses se abonan \$4100.= a una tasa del 2% convertible trimestralmente durante 3 años, determinar el monto correspondiente. R. \$12633.44.

b) Caso en que los pagos son anuales y la tasa es efectiva anual es decir i'=i.

Sustituyendo m=1, p=l e i'=i en (F.43), tenemos:

$$S_{\overline{n|}i}^{(1)} = \frac{(1+i)^{1.n}-1}{1((1+i)^{1}-1} = \frac{(1+i)^{n}-1}{i}$$

caso ya conocido, ejemplo con ejercicios en 7.1.0.

c) Hay p pagos por año y m conversiones de la tasa nominal al año y m=p.

Sustituyendo m=p en (F.43), tenemos:

$$S_{\overline{n|}i'}^{(p)} = \frac{(1+i')^{mn}-1}{p((1+i')-1)} = \frac{1}{p} x \frac{(1+i')^{mn}-1}{i'} = \frac{1}{p} S_{\overline{mn|}i'} \quad (F.46)$$

Ejemplo:

1. Al final de cada trimestre se efectuan pagos de \$17210.= que trabajan a una tasa del 5.5% convertible trimestralmente durante 4 años, ¿cuál sería el monto correspondiente?

DATOS	FORMULA	SUSTITUCION
$p = 4$ $R = 17210x4 = 68840$ $m = 4$ $i^{(4)} = .055$ $i' = .055/4 = .01375$ $n = 4$	$S = \frac{R}{p} x S_{\overline{mn|}i'}$	$S = \frac{68840}{4} S_{\overline{4x4|}.01375}$ $=17210(\frac{(1.01375)^{16}-1}{.01375})$ $=17210(\frac{.244210538}{.01375})$ $=305\ 662.79$

así S=\$305662.80

Ejercicios:

1. Durante 5 años y al final de cada mes se invierten \$2050.= a una tasa del 2.5% convertible mensualmente. Determinar el monto correspondiente. R. \$109067099
2. Al final de cada cuatro meses se abonan \$1090.= a una tasa del 3.5% convertible cada cuatro meses durante 6 años. Determinar el monto correspondiente. R. \$7230.7289.

d) Caso en el que hay p pagos por año y m conversiones de la tasa nominal por año, cuando p/m es entero y p > m.

Dividiendo numerador y denominador de la fórmula general entre i', obtenemos:

$$S^{(p)}_{\overline{n}|i'} = \frac{1}{p} \times \frac{((1+i')^{mn}-1)/i'}{((1+i')^{m/p}-1)/i'}$$

$$= \frac{1}{p} \times \frac{(1+i')^{mn}-1}{i'} \times \frac{i'}{(1+i')^{m/p}-1}$$

$$= \frac{1}{p} \times s_{\overline{mn}|i'} \times \frac{i'}{(1+i')^{m/p}-1}$$

multiplicando el denominador del 2do. factor por $1 = \frac{m}{m}$

$$S^{(p)}_{\overline{n}|i'} = s_{\overline{mn}|i'} \times \frac{1}{\frac{m}{m}p} \times \frac{i'}{(1+i')^{m/p}-1}$$

conmutando los factores tenemos:

$$S^{(p)}_{\overline{n}|i'} = \frac{1}{m}\, s_{\overline{mn}|i'} \times \frac{i'}{p/m((1+i')^{m/p}-1)} \qquad \text{(F.46-bis)}$$

Observación:

Al denominador del último factor lo denotamos como $\frac{i'}{i'^{(p/m)}}$ el denominador de esta expresión no representa un exponente y tampoco tiene relación de equivalencia con la fórmula (F.17) no obstante su parecido. El valor de $i'/i'^{(p/m)}$ lo encontramos en tablas financieras buscando la forma $\frac{i}{i^{(m)}}$ en donde i' toma el lugar de i e $i'^{(p/m)}$ el $i^{(m)}$ lugar de $i^{(m)}$.

de modo que:

$$S^{(p)}_{\overline{n}|i'} = \frac{1}{m}\, s_{\overline{mn}|i'} \times \frac{i'}{i'^{(p/m)}} \qquad \text{(F.47)}$$

Ejemplo:

1. Al final de cada bimestre se efectuan pagos de $1100.= que trabajan a una tasa del 7% convertible semestralment te durante 3 años, ¿cuál será el monto correspondiente?

DATOS	FORMULA	SUSTITUCION
$p = 6$	$S = \frac{R}{m}\, s_{\overline{mn}|i'} \times \frac{i'}{i'^{(p/m)}}$	
$R = 1100 \times 6 = 6600$		
$m = 2$		
$i^{(2)} = .07$		
$i' = .07/2 = .035$		
$n = 3$		

$$S=\frac{6600}{2}\, S_{\overline{3x2}|.035} \times \frac{0.035}{0.035^{(3)}}$$

$$=3300x6.55015x1.01157748$$

$$=21\ 865.74796$$

el último factor lo encontramos por interpolación lineal (ver 17.6) si usamos tablas financieras, tambien se puede obtener su valor por medio de aplicar la formula (F.4[illegible]-bis).

Ejercicios:

1. Al final de cada mes se depositan \$1180.= a una tasa del 2% convertible bimestralmente durante 7 años. Determinar el monto correspondiente. R. \$8857.724743.
2. Durante 9 años y al final de cada trimestre se invierten \$5215.= a una tasa del 14% convertible semestralmente. Determinar el monto correspondiente. R. \$90177.64783.

e) Caso en que m/p es entero y m > p.

Como en el caso anterior dividimos numerador y denominador de (F.43) entre i', tenemos:

$$S^{(p)}_{\overline{n}|i'} = \frac{1}{p} \times S_{\overline{mn}|i'} \times \frac{i'}{(1+i')^{m/p}-1}$$

de donde:

$$S^{(p)}_{\overline{n}|i'} = \frac{1}{p} \times S_{\overline{mn}|i'} \times \frac{1}{S_{\overline{m/p}|i'}} \qquad (F.48)$$

Ejemplo:

1. Durante 8 años y al final de cada semestre se invierten \$1110.= a una tasa del 3.5% convertible bimestralmente. Determinar el monto correspondiente.

DATOS

n=8

p=2

R=1110x2=2220

m=6

$i^{(6)}=.035$

$i'=.035/6=0.005833$

FORMULA

$$S=\frac{R}{p}\, S_{\overline{mn}|i'} \times \frac{1}{S_{\overline{m/p}|i'}}$$

SUSTITUCION

$$S=\frac{2220}{2} S_{\overline{6x8}|.005833} \times \frac{1}{S_{\overline{3}|.005833}}$$

$$=1110x55.20924x\frac{1}{3.01753}$$

$$=20\ 308.748$$

así S=20308.75

Ejercicios:

1. Al final de cada cuatro meses se invierten \$980.= a una tasa del 1% bimestral durante 2 años; determinar el monto correspondiente. R. \$983.2726412.
2. Durante 8 años y al final de cada semestre se invierten \$1000.= a una tasa del 2.5% convertible mensualmente; determinar el monto correspondiente.

f) Caso en que los pagos son anuales y hay m conversiones al año de la tasa nominal de interés.

Sustituyendo p = 1 en (F.43) y dividiendo numerador y denominador por i', tenemos:

$$S^{(p)}_{\overline{n}|i'} = \frac{\dfrac{(1+i')^{mn}-1}{i'}}{\dfrac{(1+i')^{m}-1}{i'}}$$

$$= \frac{(1+i')^{mn}-1}{i'} \times \frac{i'}{(1+i')^{m}-1}$$

de donde

$$S^{(p)}_{\overline{n}|i'} = S_{\overline{mn}|i'} \times \frac{1}{S_{\overline{m}|i'}} \qquad \text{(F.49)}$$

Ejemplo:

1. Al final de cada año se invierten $2780.= a una tasa del 5% trimestral, durante 5 años, determinar el monto correspondiente.

DATOS	FORMULA	SUSTITUCION
$p = 1$		
$R = 2780$	$S = R\, S_{\overline{mn}|i'} \times \frac{1}{S_{\overline{m}|i'}}$	$S = 2780 S_{\overline{5x4}|.0125} \times \frac{1}{S_{\overline{4}|.0125}}$
$m = 4$		
$i^{(4)} = .05$		$= 2780(22.56298) \times \frac{1}{4.07563}$
$i' = .05/4 = .0125$		
$n = 5$		$= 15390.27939$

el monto es $15390.=

Ejercicios:

1. Durante 5 años y al final de cada año se depositan $1200.= a una tasa del 6% semestral, determinar el monto correspondiente. R. $6776.681.
2. Al final de cada año se invierten $500.= a una tasa del 3% cada cuatro meses; determinar el monto correspondiente que se forma en 4 años. R. $2092.752714.

g) Caso en que hay p pagos al año a una tasa efectiva anual de interés.

Sustituyendo i' por i y m=1 en (F.43), tenemos:

$$S^{(p)}_{\overline{n}|i'} = \frac{(1+i')^{n}-1}{p((1+i')^{1/p}-1)}$$

dividiendo numerador y denominador por i:

$$S^{(p)}_{\overline{n}|i'} = \frac{\dfrac{(1+i)^{n}-1}{i}}{\dfrac{p((1+i)^{1/p}-1)}{i}}$$

de donde:

$$s^{(p)}_{\overline{n}|i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i} \times \frac{i}{p((1+i)^{1/p}-1)}$$

así:

$$= s_{\overline{n}|i} \times \frac{1}{p} \times \frac{1}{s_{\overline{1/p}|i}}$$

observación: Es más dificil obtener el valor de $s_{\overline{1/p}|i}$ en tablas por lo que es conveniente cambiar este 2do. factor del 2do. miembro de la igualdad por su equivalente, es decir:

$$\frac{1}{s_{\overline{1/p}|i}} = \frac{i}{p((1+i)^{1/p}-1)} = \frac{i}{i^{(p)}} \qquad (\text{ ver.(F.17)})$$

en donde $\frac{i}{i^{(p)}}$ se encuentra en tablas buscando la forma $\frac{i}{i^{(m)}}$.

por lo tanto:

$$s^{(p)}_{\overline{n}|i} = s_{\overline{n}|i} \times \frac{i}{i^{(p)}} \qquad (\text{F.50})$$

Ejemplo:

1. Durante 4 años y al final de cada semestre se invierten $390.- a una tasa del 4.5% anual; determinar el monto correspondiente.

DATOS	FORMULA	SUSTITUCION
$n = 4$		
$p = 2$	$S = Rs_{\overline{n}|i} \times \frac{i}{i^{(p)}}$	$S = 780s_{\overline{4}|.045} \times \frac{.045}{.045^{(2)}}$
$R = 390 \times 2 = 780$		$= 780 \times 4.27819 \times 1.0111262$
$i = .045$		$= 3374.116198$

el monto es de $3374.17

Ejercicios:

1. Al final de cada trimestre se pagan $680.- durante 10 años a una tasa del 8.5% anual, determinar el monto correspondiente. R. $10403.95.
2. Durante 9 años se pagan $900.- al final de cada bimestre que trabajará a una tasa del 10.5% anual; determinar el monto correspondiente. R. $13017.02843.

7.4.0 Cálculo de los Elementos de la Fórmula General para el Monto de Anualidades Ciertas Ordinarias.

En caso de no conocer la renta anual ó el tiempo ó la tasa de interés podemos basarnos en la fórmula general despejando nuestra incognita o bien basandonos en la fórmula propia para el caso particular en que nos encontremos (7.3.1) y despejar de esta formula nuestra incognita.

Obtendremos solo la formula general para la renta anual y el tiempo ya que es muy complicado despejar la tasa de la formula general y de algunos casos particulares.

7.4.1 Cálculo de la Renta Anual.

Basandonos en (F.44) y despejando R, tenemos:

$$R = \frac{Sp((1+i')^{m/p}-1)}{(1+i')^{mn} - 1} \qquad (F.51)$$

Ejemplo:

1. Durante 5 años al final de cada semestre se invierte una cantidad de dinero que a la tasa del 5% convertible cada 4 meses genera un monto de $51500.=. Determinar la renta anual correspondiente.

DATOS	FORMULA	SUSTITUCION
$n = 5$	$R=\frac{Sp((1+i')^{m/p}-1)}{(1+i')^{mn}-1}$	$R=\frac{51500x2((1.01666)^{3/2}-1\ )}{(1.016666)^{3x5} - 1}$
$p = 2$		$=\frac{103000(.025103879)}{.281256412}$
$m = 3$		$=9193.388761$
$i^{(3)}=.05$		
$i'= .05/3=.016666$		
$S = 51500.=$		

cada 6 meses se pagan 9193.388/2=4596.69438

Ejercicio:

1. Al final de cada 4 meses se deposita cierta cantidad que trabaja a una tasa del 7% convertible trimestralmente durante 7 años que producirán un monto de $70000.=; determinar la renta anual correspondiente. R. $7857.59.

7.4.2 Cálculo del Tiempo en años.

Basandonos en:

$$S = \frac{R}{p} x \frac{(1+i')^{mn} - 1}{(1+i')^{m/p}- 1}$$

tenemos:

$$(1+i')^{mn}- 1 = \frac{Sp((1+i')^{m/p}- 1)}{R}$$

$$(1+i')^{mn}= \frac{Sp((1+i')^{m/p}- 1)}{R}+ 1$$

$$mnlog(1+i')=log(\frac{Sp((1+i')^{m/p} - 1)}{R} + 1\ )$$

$$mn = \frac{log(\frac{Sp((1+i')^{m/p}- 1)}{R} + 1)}{log(\ 1 + i'\ )}$$

$$n = \frac{log(\frac{Sp((1+i')^{m/p} - 1)}{R} + 1)}{m\ log(1+i')} \qquad (F.52)$$

Ejemplo:

1. Al final de cada cuatro meses se depositan $5500.= que trabajan a una tasa del 5% convertible trimestralmente, ¿en qué tiempo producirán un monto de $63500.=? R:

DATOS	FORMULA	SUSTITUCION
$p = 3$		
$R = 5500x3=16500$		

DATOS

$p = 3$
$R = 5500 \times 3 = 16500$
$m = 4$
$i^{(4)} = 0.05$
$i' = .05/4 = 0.0125$
$S = 63500$

FORMULA

ver, F.52

SUSTITUCION

$$n = \frac{\log\left(\frac{63500 \times 3\left((1.0125)^{4/3} - 1\right)}{16500} + 1\right)}{4\log(1.0125)}$$

$$= \frac{\log\left(\frac{190500(.016700293)}{16500} + 1\right)}{4\log(1.0125)}$$

$$= \frac{\log(1.192824019)}{4\log(1.0125)}$$

$$= \frac{0.0765763757}{0.0215801275}$$

$$n = 3.548467251$$

usando proporciones (sec. 16.2):

$$\begin{array}{ll} .5484 & : z \\ 1.0000 & : 360 \text{ días} \end{array} \qquad z = 197 \text{ días}$$

el tiempo necesario es de 3 años 6 meses 17 días.

Ejercicio:

1. Al final de cada cuatro meses se depositan \$5500.- que trabajan a una tasa del 4% convertible cada cuatro meses, ¿en qué tiempo producirán un monto de \$71000.-? R. n=16.87 o bien 16 años 10 meses 13 días.

8 VALOR PRESENTE DE ANUALIDADES CIERTAS ORDINARIAS

8.0 Concepto.

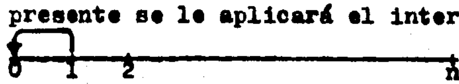
Como dijimos en la sec.1.3 el valor actual o presente es una cantidad a la que todavía no se le aplican los intereses para acumular un monto, lo cual, tambien lo podemos interpretar de la siguiente manera, es la cantidad que resulta de descontar del monto los intereses acumulados.

Considrremos que en una anualidad a cada pago se le descuenta un interés compuesto desde el momento en que se hace el pago hasta el inicio del plazo, de modo que el valor presente o valor actual de una anualidad al inicio de su plazo, se define como la suma de los valores presentes(obtenidos a una tasa efectiva anual o a una convertible varias veces al año) de todos los pagos hechos al final de cada período, descontados al inicio del plazo.

8.1.0 Deducción de la Fórmula General del Valor Presente de una Anualidad Cierta Ordinaria de una Unidad Monetaria pagadera por año durante n años a una Tasa Efectiva de Interés Anual.

Si consideramos una anualidad cierta ordinaria en donde R es el pago hecho al final de cada uno de n años e i es la tasa de interés anual y que la fecha de valuación es el inicio del plazo.

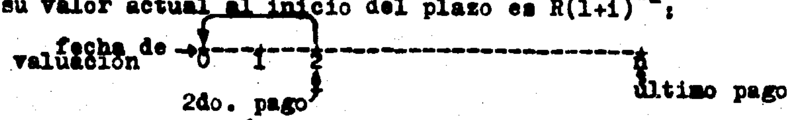
El ler. pago de R se hace al final del ler. año, para el cuál al valor presente se le aplicará el interés por un año:



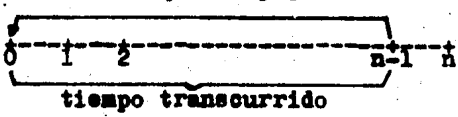
según la formula (F.20) el valor actual al inicio del plazo es:

$$R(1+i)^{-1}$$

Analogamente el 2do. pago de R es descontado por 2 años y su valor actual al inicio del plazo es $R(1+i)^{-2}$:



Continuando así vemos que el pago de orden n-1 tiene como valor actual:



es decir:

$$R(1+i)^{-(n-1)}$$

De modo que el pago de orden n tiene como valor actual:

$$R(1+i)^{-n}$$

Escribiendo estos valores presentes tenemos:

$$R(1+i)^{-1},\ R(1+i)^{-2},\ \ldots,\ R(1+i)^{-(n-1)},\ R(1+i)^{-n}$$

Partiendo de la definición del valor actual de una anualidad cierta ordinaria dada en 8.0 y designando la letra A para representar el valor actual, tenemos:

$$A = R(1+i)^{-1}+ R(1+i)^{-2} + R(1+i)^{-3}+\ldots+ R(1+i)^{-(n-1)}+ R(1+i)^{-n}$$
$$= R((1+i)^{-1}+(1+i)^{-2}+\ldots+(1+i)^{-n+1}+ (1+i)^{-n})$$

La fórmula la podemos obtener basandonos en que esta sucesión de valores forma una progresión geometrica, sin embargo, lo dejamos como ejercicio para el estudiante (cap.19).

La obtendrémos de la siguiente manera:

Asignando el simbolo $a_{\overline{n}|i}$ al 2do. término del 2do. miembro de la ecuación, tenemos:

$$a_{\overline{n}|i} = (1+i)^{-1}+ (1+i)^{-2}+ (1+i)^{-3}+\ldots+ (1+i)^{-n} \qquad (F.53)$$

es decir:

$$A = R\,a_{\overline{n}|i} \qquad (1)$$

observamos que:

$$(1+i)a_{\overline{n}|i} = 1+(1+i)^{-1}+\ldots+(1+i)^{-n+1} \qquad (2)$$

ahora, restando (1) de (2), tenemos:

$$(1+i)a_{\overline{n}|i} - a_{\overline{n}|i} = 1+(1+i)^{-1}+\ldots+(1+i)^{-n+1}$$
$$-(1+i)^{-1}-\ldots-(1+i)^{-n+1}- (1+i)^{-n}$$
$$= 1 - (1+i)^{-n}$$

de modo que:

$$a_{\overline{n}|i}((1+i)-1) = 1 - (1+i)^{-n}$$

así:

$$a_{\overline{n}|i} = \frac{1 - (1+i)^{-n}}{(1+i)-1} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \qquad (F.54)$$

sustituyendo (F.54) en (1) tenemos:

$$A = R \times \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} \qquad (F.55)$$

o bien

$$A = R\,a_{\overline{n}|i} \qquad (F.56)$$

por lo tanto si la renta anual es de \$1.=, tenemos:

$$A = a_{\overline{n}|i} \qquad (F.57)$$

Observación: el simbolo $a_{\overline{n}|i}$ lo encontramos en tablas financieras a las que hacemos referencia en la introducción.

Como ya se ha indicado, el factor $(1+i)^{-n}$ lo encontramos en en tablas financieras representado por V^n, dicho factor lo po - demos calcular tambien por medio de logaritmos (cap.20) o teo - rema del binomio (cap.21), o bien con calculadora con exponente

Ejemplo:

1. Obtener el valor actual correspondiente a un conjunto de pagos al final de cada año de \$6290.= que trabajan a una tasa del 3% anual durante 7 años.

DATOS	FORMULA	SUSTITUCION
R = 6290		
i = .03	$A = R a_{\overline{n}\rceil i}$	$A = 6290\, a_{\overline{7}\rceil .03}$
n = 7		$= 6290(6.23028)$
		$= 39188.4612$

el valor presente es de \$39.88.46

Ejercicios:

1. Un conjunto de pagos efectuados al final de cada año de - \$7170.= trabajan a una tasa del 6.5% anual durante 3 años, ¿ ¿cuál es el valor presente correspondiente? R. \$18989.60.
2. Durante 5 años se hacen pagos al final de cada año de \$1900. que trabajan a una tasa efectiva anual del 5%, ¿cuál es el valor actual de la anualidad? R. \$8226.01.

8.1.1 Cálculo de la Renta Anual.

Para conocer la renta anual necesitamos despejar R de la formula (F.55) o (F.56):

de (F.55):

$$R = \frac{Ai}{1-(1+i)^{-n}} \qquad (F.58)$$

de (F.56):

$$R = \frac{A}{a_{\overline{n}\rceil i}} \qquad (F.59)$$

Ejemplo:

1. Un valor actual de \$20 890.= calculado en base a una tasa del 4.5% anual y a un plazo de 3 años, ¿cuál es el valor de cada pago?

DATOS	FORMULA	SUSTITUCION
A = 20890	$R = \frac{Ai}{1-(1+i)^{-n}}$	$R = \frac{(20890)(.045)}{1-(1.045)^{-3}}$
i = .045		$= \frac{940.05}{.1237033959}$
n = 3	$R = \frac{A}{a_{\overline{n}\rceil i}}$	$= 7599.225495$
		$R = \frac{20890}{a_{\overline{3}\rceil .045}} = \frac{20890}{2.74896}$
		$\underline{R = 7599.23753}$

Ejercicios:

1. Obtener la cantidad a pagar al final de cada año para cubrir u una cantidad de \$69000.= en 4 años si la tasa efectiva anual es del 4%. R. \$19008.81.
2. Al final de 9 años se debe pagar una deuda de \$72000.= si la tasa de interés anual efectivo es del 5%; determinar la renta anual. R. \$10129.688.

1.2 Cálculo del Tiempo.

Para conocer el plazo de la anualidad ordinaria podemos despejar n de la fórmula (F.55) o bien al través del cociente A/R usando tablas financieras y el método de interpolación (cap.17) si es necesario como a continuación veremos:

- despejamos n:

$$A = R \times \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

$$1-(1+i)^{-n} = \frac{Ai}{R}$$

$$(1+i)^{-n} = 1 - \frac{Ai}{R}$$

usando logaritmos (cap.20)

$$-n\log(1+i) = \log(1 - \frac{Ai}{R})$$

de donde:

$$n = \frac{(-1)\log(1-\frac{Ai}{R})}{\log(1+i)} \qquad (F.60)$$

en tablas:

$$\frac{R}{A} = a_{\overline{n}|i}$$

Ejemplo:

1. ¿Durante cuánto tiempo se cubre una deuda de \$85000.= cuyos pagos al final de cada año son de \$11500.= que trabajan a una tasa del 9% anual efectivo?

DATOS

A = 85000.=
R = 11500
i =.09

FORMULA

$$n=\frac{(-1)\log(1-\frac{Ai}{R})}{\log(1+i)}$$

SUSTITUCION

$$n=\frac{-1x\log(1-\frac{85000x0.09}{11500})}{\log(1.09)}$$

$$=\frac{-1x\log(0.334782608)}{\log 1.09}$$

$$=\frac{0.4752371117}{0.0374264979}$$

$$=12.6978782$$

es decir: $n = 12.69787$

$$a_{\overline{n}|i} = \frac{A}{R} \qquad a_{\overline{n}|.09}= \frac{85000}{11500}$$

$$=7.391304348$$

e interpolando según (cap.17 y F.172)

$$\begin{bmatrix} 7.16073 \\ \begin{bmatrix} 7.39130 \\ 7.48690 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 12 \\ \begin{bmatrix} n \\ 13 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$n-13 = \frac{(7.39130-7.48690)(12-13)}{(7.16073-7.48690)} = \frac{(-.0956)(-1)}{-.32617}$$

$$= -.2930986909$$

de donde

$$n = 12.70690131$$

usando proporciones (1$.2), tenemos:

$$.70 : z \text{ días}$$

$$1.00 : 360 \text{ días}$$

$$z = 252 \text{ días}$$

por lo tanto n = 12 años 8 meses 14 días

Ejercicios:

1. ¿Cuál es el tiempo a transcurrir para pagar una deuda de \$91000.= si los pagos al final de cada año son de \$16000.= que trabajan a una tasa del 4% anual? R. n=6.58 o bien 6 años 209 días.
2. Se efectuan pagos de \$13130.= al final de cada año, ¿durante cuánto tiempo cubrirán una deuda de \$82000.= si la tasa es del 5% anual? R. 7.67 o bien 7 años 241 días.

8.1.3 Cálculo de la Tasa de Interés.

En este caso solo conoceremos i al través de usar las tablas financieras y el método de interpolación si es necesario, ya que el despeje de i de (F.55) es muy complicado. Así pues, buscaremos el cociente $A/R = a_{\overline{n}|i}$ como a continuación ejemplificamos:

Ejemplo:

1. Una deuda de \$270000.= se cubre con pagos al final de cada año de \$31000.= durante 9 años, ¿cuál es la tasa de interés anual?

DATOS	FORMULA	SUSTITUCION
A = 270000.=		
R = 21000	$a_{\overline{n}\|i} = \frac{A}{R}$	$a_{\overline{n}\|i} = \frac{270000}{31000}$
n = 9		

$$= 8.709677419$$

interpolando (cap.17)

$$-.03583 \begin{bmatrix} 8.70719 \\ \begin{bmatrix} 8.70967 \\ 8.74302 \end{bmatrix} -.03335 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} .006666 \\ \begin{bmatrix} i \\ .005833 \end{bmatrix} \end{bmatrix} .0008333$$

$$i - .005833 = \frac{(.000833)(-.03335)}{-0.03583}$$

$$i = .007753433 + .005833$$
$$i = .0066083433$$

es decir: $i = .6608\%$

Ejercicios:

1. Una deuda de \$52000.- se cubre con pagos al final de cada año, de \$12500.- durante 7 años, ¿cuál es la tasa de interés anual? R. i=15.0034%.
2. Una deuda de \$63500.- se cubre con pagos al final de cada año de \$31093.31 durante 3 años, ¿cuál es la tasa de interes anual? R. i = 22%.

8.2 Desarrollo de la Fórmula del Valor Presente Unitario $a_{\overline{n}|i}$ Correspondiente a valores que estan fuera de los Límites de las Tablas Financieras.

La formula que obtendrémos es para cualquier valor de n, las tablas a las que hemos hecho referencia en la introdución, tienen como límite n=100 hasta la tasa del 15% y de la del 16% en adelante n=50. Si vamos a trabajar con $n > 100$ o $n > 50$ según sea el caso podemos utilizar dos valores k y t tales que k+t=n y ambos estén en tablas.

Si $k+t = n$
entonces:

$$a_{\overline{n}|i} = a_{\overline{k+t}|i}$$

así

$$a_{\overline{n}|i} = a_{\overline{k+t}|i} = \frac{1-(1+i)^{-(k+t)}}{i}$$

si sumamos cero al numerador, siendo $(1+i)^{-k} - (1+i)^{-k} = 0$ tenemos:

$$a_{\overline{n}|i} = a_{\overline{k+t}|i} = \frac{1-(1+i)^{-k} + (1+i)^{-k} - (1+i)^{-(k+t)}}{i}$$

$$= \frac{1-(1+i)^{-k}}{i} + \frac{(1+i)^{-k} - (1+i)^{-(k+t)}}{i}$$

así

$$= a_{\overline{k}|i} + (1+i)^{-k} a_{\overline{t}|i}$$

de modo que;

$$a_{\overline{n}|i} = a_{\overline{k+t}|i} = a_{\overline{k}|i} + (1+i)^{-k} a_{\overline{t}|i}$$

y sustituyendo en (F.56), tenemos:

$$A = R a_{\overline{k+t}|i} \qquad (F.61)$$

o bien

$$A = R \left(a_{\overline{k}|i} + (1+i)^{-k} a_{\overline{t}|i}\right) \qquad (F.62)$$

Ejemplo:

1. ¿Cuál es la deuda que se cubre con pagos al final de cada año de $1700.- durante 113 años a una tasa del 13% anual efectivo?

DATOS	FORMULA	SUSTITUCION
$R = 1700$	$A=R(a_{\overline{k}\|i}+(1+i)^{-k}a_{\overline{t}\|i})$	
$n = 8$		$A=1700(a_{\overline{43}\|.13}+(1.13)^{-43}a_{\overline{70}\|.13})$
$i = .13$		$A=1700(7.65216+0.005219\times7.69083)$
sean:		$=1700(7.692298442)$
$k = 43$		$A=13076.90735$
$t = 70$		

Ejercicios:

1. ¿Cuál es la deuda que se cubre con pagos al final de cada año de $150.- durante 105 años a una tasa del 11% anual efectivo? R. $1363.32.
2. Obtener el valor actual de $250.- pagaderos al final de cada año durante 115 años a una tasa del 8% anual. R. $3110.76

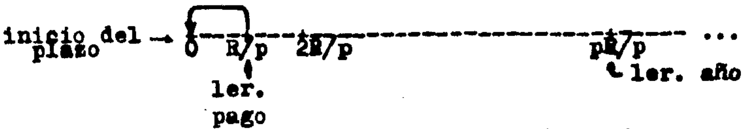
8.3.0 Fórmula General del Valor Presente de una Anualidad Cierta Ordinaria de una Unidad Monetaria Pagadera p veces al año durante n años a una Tasa Nominal de Interés Capitalizable m veces al año.

Anteriormente, cuando hablamos de interés compuesto teníamos que el valor presente de m capitalizaciones del interés en un año era: $C = S(1+i')^{-m}$ y para m capitalizaciones en n años era: $C = S(1+i')^{-mn}$ donde $i'=i_{(m)}/m$ y donde S era la única cantidad que se descontaba al inicio de los m p períodos.

Ahora estudiaremos el caso de una serie de cantidades a descontar desde el momento en que se efectuan estas hasta el inicio del plazo. Supongamos que por cada año pagamos la renta R y que en cada año hay p períodos de pago, es decir para reunir en un año la cantidad R, en cada p-ésimo de año (1/p) se paga (R/p) existiendo m períodos al año en que se convierte la tasa. De acuerdo a (F.20) donde n es en años el momento en que se efectua el pago y a su vez es el tiempo que ha transcurrido a partir del inicio del plazo de la anualidad. El 1er. pago, monto o cantidad R/p tiene como valor presente valuado desde el final del 1er. período del 1er. año:

$$\frac{R}{p}(1+i')^{-m(1/p)}$$

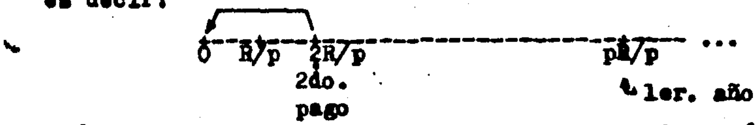
es decir, el tiempo transcurrido a partir del inicio es:



el valor presente del 2do. pago de R/p sería:

$$\frac{R}{p}\,(1+i')^{-m(2/p)}$$

es decir:



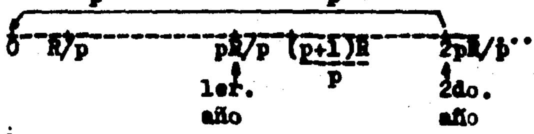
así al final del 1er. año el valor presente del p-ésimo pago es:

$$\frac{R}{p}(1+i')^{-m(p/p)}=\frac{R}{p}\,(1+i')^{-m\times 1}=\frac{R}{p}\,(1+i')^{-m}$$

de modo que al final del 2do. año el valor presente del 2p-ésimo pago es:

$$\frac{R}{p}(1+i')^{-m(2p/p)}=\frac{R}{p}(1+i')^{-2m}$$

es decir:



al final del n-1 año tenemos que el valor presente es:

$$\frac{R}{p}\,(1+i')^{-m\left(\frac{(n-1)p}{p}\right)}=\frac{R}{p}\,(1+i')^{-m(n-1)}$$

y al final del n-ésimo año el valor presente correspondiente es:

$$\frac{R}{p}(1+i')^{-m\left(\frac{np}{p}\right)}=\frac{R}{p}(1+i')^{-\frac{m}{p}(np)}=\frac{R}{p}(1+i')^{-mn}$$

Como vimos en 8.0 el valor presente de una anualidad cierta ordinaria es la suma de los valores presentes de todos los pagos de la anualidad y descontados al inicio del plazo, es decir denotando a dicha suma con la letra A y factorizando R de cada pago:

$$A=R\left(\frac{1}{p}(1+i')^{-m\left(\frac{1}{p}\right)}+\frac{1}{p}(1+i')^{-m\left(\frac{2}{p}\right)}+\dots+\frac{1}{p}(1+i')^{-mn+m}+\frac{1}{p}(1+i')^{-mn}\right)$$

Asignando el símbolo $a^{(p)}_{\overline{n}|i'}$ al 2do. factor del 2do. miembro de la ecuación tenemos:

$$a^{(p)}_{\overline{n}|i'}=\frac{1}{p}(1+i')^{-\frac{m}{p}}+\frac{1}{p}(1+i')^{-\frac{m}{p}(2)}+\dots+\frac{1}{p}(1+i')^{-\frac{m}{p}(np)}$$

(F.63)

es decir:

$$A=R\,a^{(p)}_{\overline{n}|i'} \qquad (1)$$

Si aplicamos el concepto de progresión geométrica (cap.19), tenemos los datos siguientes:

$$X_1=\frac{1}{p}(1+i')^{-\frac{m}{p}}\ ,\ r=(1+i')^{-\frac{m}{p}}\ ,\ X_n=\frac{1}{p}(1+i')^{-mn}\ \text{y}\ S_n=a^{(p)}_{\overline{n}|i'}.$$

es decir:

$\frac{1}{p}(1+i')^{-\frac{m}{p}}$: 1er. término de la sucesión.

np m : número de término (p, períodos por año)

$(1+i')^{-\frac{m}{p}}$: razón de la progresión

según (F.180) del cap.19, tenemos:

$$a_{\overline{n}|i'}^{(p)} = \frac{\frac{1}{p}(1+i')^{-(m/p)} - (1+i')^{-(m/p)}(1/p)(1+i')^{-mn}}{1-(1+i')^{-m/p}}$$

$$= \frac{1}{p}(1+i')^{-\frac{m}{p}} \times \frac{1-(1+i')^{-mn}}{1-(1+i')^{-(m/p)}}$$

dividiendo numerador y denominador por $(1+i')^{-(m/p)}$

$$= \frac{\frac{1}{p}(\ 1-(1+i')^{-mn})}{\frac{1}{(1+i')^{-(m/p)}} - \frac{(1+i')^{-(m/p)}}{(1+i')^{-(m/p)}}}$$

así:

$$a_{\overline{n}|i'}^{(p)} = \frac{1}{p} \times \frac{1-(1+i')^{-mn}}{(1+i')^{m/p}-1} \qquad (F.64)$$

sustituyendo en (1), tenemos:

$$A = \frac{R}{p} \times \frac{1-(1+i')^{-mn}}{(1+i')^{m/p}-1} \qquad (F.65)$$

o bien

$$A = R\,a_{\overline{n}|i'}^{(p)}$$

si la renta anual es de \$1.=, tenemos:

$$A = a_{\overline{n}|i'}^{(p)}$$

8.3.1 Casos Particulares.

La fórmula (F.65) incluye cualquier caso relacionado con la frecuencia de los pagos p y la convertibilidad de la tasa nominal $i^{(m)}$ (recordemos que $i' = i^{(m)}/m$). Sin embargo simplificaremos la fórmula para cada caso.

Los casos son:

a) $m>1$ y $p>1$; m/p no es entero, p/m no es entero
b) $m=1$ y $p=1$; $m=p$
c) $m>1$ y $p>1$; $m=p$
d) $m>1$ y $p>1$; p/m entero, $p>m$
e) $m>1$ y $p>1$; m/p entero, $m>p$
f) $m>1$ y $p=1$
g) $m=1$ y $p>1$

a) Es el caso más general y la fórmula es aplicable tal como se expresa en (F.64).

Ejemplo:

1. Durante 5 años y al final de cada semestre se invierten $12500.= a una tasa del 4% capitalizable cada 4 meses, ¿cuál será el valor actual?

DATOS	FORMULA	SUSTITUCION
$n = 5$		
$p = 2$		$A=\frac{2500}{2}x\frac{1-(1.0133)^{-3x5}}{(1.0133)^{3/2}-1}$
$R = 12500x2=25000$		
$m = 3$	$A=R/p \; x \; \frac{1-(1+i')^{-mn}}{(1+i')^{m/p}-1}$	
$i^{(3)}=.04$		$=12500(\frac{.180186494}{.020066519})$
$i' = .04/3=.01333$		$=12500(8.979459467)$
		$\underline{A =112243.2433}$

Ejercicios:

1. Durante 3 años y al final de cada trimestre, se invierten $1380.= a una tasa del 5.1% convertible cada 4 meses, determinar el valor actual correspondiente. R. $15268.07
2. Al final de cada 4 meses se abonan $3750.= a una tasa del 2% convertible trimestralmente durante 3 años. Determinar el valor actual correspondiente. R. $32651.06.

b) Caso en el que los pagos son anuales y la tasa es efectiva anual, es decir $i'=i$.

Sustituyendo $m=1$ y $p=1$ e $i'=i$ en (F.64) tenemos:

$$a^{(p)}_{\overline{n}|i'} = \frac{1-(1+i)^{-1xn}}{1(1+i)^{1}-1} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \qquad (F.68)$$

caso ya conocido, ver ejemplos y ejercicios en (8.1.0).

c) Hay p pagos por año y m conversiones de la tasa nominal al año y $m=p$.

Sustituyendo m 1 y p 1 y $m=p$ en (F.64):

$$a^{(p)}_{\overline{n}|i'} = \frac{1}{p} x \frac{1-(1+i')^{mn}}{(1+i')^{1}-1} = \frac{1}{p} x \frac{1-(1+i')^{mn}}{i'}$$

$$= \frac{1}{p} a_{\overline{mn}|i'} \qquad (F.69)$$

Ejemplo:

1. Al final de cada trimestre se efectuan pagos de $17210. que trabajan a una tasa del 5.5% convertible trimestralmente durante 4 años, ¿cuál será el monto correspondiente?

DATOS FORMULA SUSTITUCION

$p = 4$

$R = 17210x4=68840$

DATOS	FORMULA	SUSTITUCION
$p = 4$	$A = \frac{R}{p} a_{\overline{mn}\mid i'}$	$A = \frac{68840}{4} a_{\overline{4x4}\mid .01375}$
R 17210x4=68840		$=17210\left(\frac{1-(1.01375)^{-16}}{.01375}\right)$
$m = 4$		$=17210\left(\frac{.196277503}{.01375}\right)$
$i^{(4)}=.055$		$=245668.0609$
$i'=.055/4=.01375$		
$n = 4$		

así $245 668.0609

Ejercicios:

1. Durante 6 años y al final de cada mes se invierten $2050.- a una tasa del 2.5% convertible mensualmente. Determinar el valor presente correspondiente. R. $136 931.39.
2. Al final de 4 meses se abona $1095.- a una tasa del 3.5% convertible cada 4 meses durante 6 años. Determinar el valor actual correspondiente. R. $17 685.48.

d) Caso en el que hay p pagos por año y m conversiones de la tasa nominal por año, cuando p/m es entero y p> m.
Dividiendo numerador y denominador por i' de la fórmula (F.64) tenemos:

$$a_{\overline{n}\mid i'} = \frac{1}{p} \times \frac{\dfrac{1-(1+i')^{-mn}}{i'}}{\dfrac{(1+i')^{m/p}-1}{i'}}$$

$$= \frac{1}{p} \times \frac{1-(1+i')^{-mn}}{i'} \times \frac{i'}{(1+i')^{m/p}-1}$$

observamos que:

$$= \frac{1}{p} a_{\overline{mn}\mid i'} \times \frac{i'}{(1+i')^{m/p}-1}$$

conmutando los factores del 2do. miembro tenemos:

$$= a_{\overline{mn}\mid i'} \times \frac{1}{p} \times \frac{i'}{(1+i')^{m/p}-1}$$

multiplicando al denominador del 2do. factor por m/m:

$$= a_{\overline{mn}\mid i'} \times \frac{1}{\frac{mp}{m}} \times \frac{i'}{(1+i')^{m/p}-1}$$

conmutando los factores:

$$= \frac{1}{m} a_{\overline{mn}\mid i'} \times \frac{i'}{p/m((1+i')^{m/p}-1)}$$

Observación:

Al denominador del último factor lo denotamos como $\frac{i'}{i'^{(p/m)}}$ el denominador de esta expresión no representa un exponente y tampoco tiene relación con la fórmula (F.17) no obstante su parecido. El valor de $i'/i'^{(p/m)}$ lo encontramos en tablas financieras buscando la forma $\frac{i}{i^{(m)}}$ en donde i' toma el lugar de i e $i'^{(p/m)}$ el lugar de $i^{(m)}$.

por lo tanto tenemos:

$$a_{\overline{n}|i'}^{(p)} = \frac{1}{m} a_{\overline{mn}|i'} \times \frac{i'}{i'^{(p/m)}} \qquad \text{(F.70)}$$

Ejemplo:

1. Al final de cada bimestre se efectuan pagos de \$1100.= que trabajan a una tasa del 7% convertible semestralmente durante 3 años, ¿cuál es el valor actual correspondiente?

DATOS	FORMULA	SUSTITUCION
$p = 6$		
$R = 1100\text{x}6 = 6600$	$A = \frac{R}{m} a_{\overline{mn}|i'} \times \frac{i'}{i'^{(p/m)}}$	
$m = 2$		
$i^{(2)} = .07$		$A = \frac{6600}{2} a_{\overline{2\text{x}3}|.035} \times \frac{.035}{.035^{(6/2)}}$
$i' = .07/2 = .035$		
$n = 3$		$= 3300 a_{\overline{6}|.035} \times \frac{.035}{.035^{(3)}}$
		$= 3300 \times 5.32855 \times 1.01157748$
		<u>A=17 787.79</u>

Ejercicios:

1. Al final de cada mes se depositan \$1180.= a una tasa del 2% convertible bimestralmente durante 7 años; determinar el valor presente correspondiente. R. \$92427.01.
2. Durante 9 años y al final de cada trimestre se invierten \$5215.= a una tasa del 14% convertible semestralmente; determinar el valor presente correspondiente. R.\$106721.29.

e) Caso en que m/p es entero y m > p.

Como en el caso anterior dividimos numerador y denominador de (F.64) entre i', tenemos:

$$a_{\overline{n}|i'}^{(p)} = \frac{1}{p} \times \frac{(1-(1+i')^{-mn})/i'}{((1+i')^{m/p}-1)/i'}$$

$$= \frac{1}{p} \times \frac{1-(1+i')^{-mn}}{i'} \times \frac{i'}{(1+i')^{m/p}-1}$$

de donde:

$$a_{\overline{n}|i'}^{(p)} = \frac{1}{p} \times a_{\overline{mn}|i'} \times \frac{1}{s_{\overline{m/p}|i'}} \qquad \text{(F.71)}$$

Ejemplo:

1. Durante 8 años y al final de cada semestre se invierten $1110.- a una tasa del 3.5% convertible bimestralmente; determinar el valor presente correspondiente.

DATOS	FORMULA	SUSTITUCION
$n = 8$		
$p = 2$	$A = \frac{R}{p} a_{\overline{mn}|i'} \times \frac{1}{s_{\overline{m/p}|i'}}$	
$R = 1110 \times 2 = 2220$		
$m = 6$		
$i^{(6)} = .035$		$A = \frac{2220}{2} a_{\overline{6x8}|.005833} \times \frac{1}{s_{\overline{6/2}|.005833}}$
$i' = .035/6 = .005833$		

$$= 1110\, a_{\overline{48}|.005833} \times \frac{1}{s_{\overline{3}|.005833}}$$

$$= 1110 \times 41.76020 \times \frac{1}{3.01753}$$

$$= 15361.51157$$

Ejercicios:

1. Al final de cada cuatro meses se invierten $991.- a una tasa del 4% bimestral durante 2 años; determinar el valor presente correspondiente. R. $5677.23.
2. Durante 8 años y al final de cda semestre se invierten $1000.- a una tasa del 3% convertible mensualmente, ¿cuál es el valor presente correspondiente?. R. $14120.55.

f) Caso en el que los pagos son anuales y hay m conversiones al año de la tasa nominal de interés.

Sustituyendo p=1 en (F.64) y dividiendo numerador y denominador por i', tenemos:

$$a_{\overline{n}|i'}^{(p)} = \frac{(1-(1+i')^{-mn})/i'}{((1+i')^{m}-1)/i'}$$

$$= \frac{1-(1+i')^{-mn}}{i'} \times \frac{i'}{(1+i')^{m}-1}$$

es decir:

$$a_{\overline{n}|i'}^{(p)} = a_{\overline{mn}|i'} \times \frac{1}{s_{\overline{m}|i'}} \qquad \text{(F.72)}$$

Ejemplo:

1. Al final de cada año se invierten $2780.- a una tasa del 5% trimestral, durante 5 años; determinar el valor presente correspondiente.

DATOS	FORMULA	SUSTITUCION
$p = 1$ $R = 2780$ $m = 4$ $i^{(4)} = .05$ $i' = .05/4 = .0125$ $n = 5$	$A = R\, a_{\overline{mn}|\, i'} \times \dfrac{1}{s_{\overline{m}|\, i'}}$	$A = 2780\, a_{\overline{4x5}|\, .0125} \times \dfrac{1}{s_{\overline{4}|\, .0125}}$ $A = 2780 x 17.59932 x \dfrac{1}{4.07563}$ $\underline{A = 12004.55135}$

Ejercicios:

1. Durante 5 años y al final de cada año se depositan $1200. a una tasa del 6% semestral; determinar el valor presente correspondiente. R. $5042.48
2. Al final de cada año se invierten $500.- a una tasa del 3% cada 4 meses durante 3 años; determinar el valor presente correspondiente. R. $1413.49.

g) Caso en el que hay p pagos al año a una tasa efectiva anual de interés.

Sustituyendo i' por i y m=1 en (F.64), tenemos:

$$a^{(p)}_{\overline{n}|\, i} = \frac{1}{p} \times \frac{1 - (1+i)^{-nx1}}{(1+i)^{1/p} - 1}$$

dividiendo numerador y denominador por i:

$$= \frac{1}{p} \times \frac{(1-(1+i)^{-nx1})/i}{((1+i)^{1/p}-1)/i}$$

$$= \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \times \frac{i}{p((1+i)^{1/p}-1)}$$

y escribiendo el 2do. factor como se menciona en (F.17) (aquí si podemos hacer referencia a dicha fórmula, ya que se trata de una tasa de interés efectiva anual):

$$a^{(p)}_{\overline{n}|\, i} = a_{\overline{n}|\, i} \times \frac{i}{i^{(p)}} \qquad \text{(F.73)}$$

Ejemplo:

1. Durante 4 años y al final de cada semestre se invierten $390.- a una tasa del 4.5% anual; determinar el valor actual correspondiente.

DATOS	FORMULA	SUSTITUCION
$n = 4$ $p = 2$ $R = 390x2 = 780$ $i = .045$	$A = R\, a_{\overline{n}|\, i} \times \dfrac{i}{i^{(p)}}$	$A = 780\, a_{\overline{4}|\, .045} \times \dfrac{.045}{.045^{(2)}}$ $= 780(3.58753)(1.0111269)$ $A = 2829.409508$

el valor actual es de A=$2829.409508

Ejercicios:

1. Al final de cada trimestre se pagan \$680.= durante 10 años a una tasa del 8% anual, ¿cuál es el valor actual correspondiente? R. \$18790.18.
2. Durante 9 años se pagan \$900.= al final de cada bimestre que trabajará a una tasa del 11% anual; determinar el valor actual correspondiente. R. \$31 242.69.

8.4.0 Cálculo de los Elementos de la Fórmula General para el Valor Presente de Anualidades Ciertas Ordinarias.

En caso de no conocer la renta anual ó el tiempo ó la tasa de interés podemos basarnos en la fórmula general despejando nuestra incognita o bien basandonos en la fórmula propia para el caso particular en que nos encontremos (8.3.1) y despejar de esta nuestra incognita.

Obtendrémos solo la fórmula general para la renta anual y el tiempo ya que es muy complicado despejar la tasa de la formula general y de algunos casos particulares.

8.4.1 Cálculo de la Renta Anual.

Basandonos en (F.64) y despejando R, tenemos:

$$R = \frac{Ap((1+i')^{m/p} - 1)}{1 - (1+i')^{-mn}} \qquad (F.74)$$

Ejemplo:

1. Durante 5 años al final de cada semestre se invierte una cantidad de dinero que a la tasa del 5% convertible cada 4 meses y cuyo valor actual es de \$51500.=. Determinar la renta anual correspondiente.

DATOS

$n = 5$
$p = 2$
$m = 3$
$i^{(3)} = .05$
$i' = .05/3 = .01666$
$A = 51500$

FORMULA

$$R = \frac{Ap((1+i')^{m/p} - 1)}{1 - (1+i')^{-mn}}$$

SUSITUCION

$$R = \frac{51500 \times 2((1.01666)^{3/2} - 1)}{1 - (1.01666)^{-3\times 5}}$$

$$= \frac{103000(.025103879)}{1-(.2195928664)}$$

$$= 11774.97056$$

la renta anual es de \$11 774.97

Ejercicio:

1. Al final de cada 4 meses se deposita cierta cantidad que trabaja a una tasa del 7% convertible trimestralmente durante 7 años y cuyo valor actual es de \$70000.=; determinar la renta anual correspondiente. R.12771.824.

8.4.2 Cálculo del Tiempo.

Basandonos en (F.64), tenemos:

$$1-(1+i')^{-mn}=\frac{Ap((1+i')^{m/p}-1)}{R}$$

$$(1+i')^{-mn}=1-\frac{Ap((1+i')^{m/p}-1)}{R}$$

usando logaritmos (cap.20):

$$-mn\log(1+i')=\log\left(1-\frac{Ap((1+i')^{m/p}-1)}{R}\right)$$

de donde:

$$n=\frac{(-1)\log\left(1-\frac{Ap((1+i')^{m/p}-1)}{R}\right)}{m\log(1+i')} \qquad (F.75)$$

Ejemplo:

1. Al final de cada 4 meses se depositan \$5500.= que trabajan a una tasa del 5% convertible trimestralmente. Obtener el tiempo que determina un valor actual de \$63500.=

DATOS	FORMULA	SUSTITUCION
$p=3$	(ver. F.75)	
$R=5500\times3=16500$		
$m=4$		
$i^{(4)}=.05$		
$i'=.05/4=.0125$		
$A=63500$		

$$n=\frac{(-1)\log\left(1-\frac{63500\times3((1.0125)^{4/3}-1)}{16500}\right)}{4\log1.0125}$$

$$=\frac{(-1)\log\left(1-\frac{190500(.016701293)}{16500}\right)}{4(.0053950319)}$$

$$=\frac{-1(\log(.8071759808))}{0.0215801275}$$

$$=4.310992598$$

usando proporciones (sec.16.2):

.3109 : z días
1.0000 : 360 días

z = 111 días

el tiempo necesario es de 4 años 3 meses 21 días.

Ejercicio:

1. Al final de cada tres meses se invierten \$2970.= que trabajan a una tasa del 4% convertible cada cuatro meses. Obtener el tiempo necesario para un valor actual de \$71000.=
   R. 6.86 o bien 6 años 10 meses 9 días.

8.5 Relación que Existe entre Valor Presente y Monto de una Anualidad Cierta Ordinaria a una Tasa de Interés Efectiva.

Sabemos que:

$$a_{\overline{n}|i} = (1+i)^{-1}+(1+i)^{-2}+\ldots+(1+i)^{-(n-1)}+(1+i)^{-n}$$

$$= (1+i)^{-1}+(1+i)^{-2}+\ldots+(1+i)^{1-n} + (1+i)^{-n} \qquad \text{(ver.8.1.0)}$$

y

$$s_{\overline{n}|i} = (1+i)^{n-1}+(1+i)^{n-2}+\ldots+(1+i) + 1 \qquad \text{(ver.7.1.0)}$$

Ahora si multiplicamos ambos miembros de la 1er. ecuación por el factor $(1+i)^n$, tenemos:

$$(1+i)^n a_{\overline{n}|i} = (1+i)^n((1+i)^{-1}+(1+i)^{-2}+\ldots+(1+i)^{1-n}+(1+i)^{-n})$$

$$= (1+i)^{n-1}+ (1+i)^{n-2}+\ldots+ (1+i) + 1$$

$$= s_{\overline{n}|i}$$

de modo que:

$$s_{\overline{n}|i} = (1+i)^n a_{\overline{n}|i} \qquad \text{(F.76)}$$

y así tenemos que:

$$a_{\overline{n}|i} = (1+i)^{-n} s_{\overline{n}|i} \qquad \text{(F.77)}$$

Por lo tanto podemos encontrar el monto de una anualidad cierta ordinaria de n años a una tasa efectiva i, conociendo el valor presente de dicha analidad, tambien, obtener el valor presente de la anualidad cuando se conoce el monto de la misma.

Si la renta anual no es unitaria, sustituímos (F.76) y (F.77) en (F.38) y (F.56) respectivamente obteniendo así:

$$S = R\ (1+i)^n a_{\overline{n}|i} = A\ (1+i)^n \qquad \text{(F.78)}$$

$$A = R\ (1+i)^{-n} s_{\overline{n}|i} = S\ (1+i)^{-n} \qquad \text{(F.79)}$$

Ejemplo:

1. Al final de cada año se efectuan pagos de \$13760.= durante 7 años que trabajan a una tasa del 8% anual; determinar el valor actual y en base a este valor, calcular el monto correspondiente.

DATOS	FORMULA	SUSTITUCION
$R = 13760$ $n = 7$	$S = R(1+i)^n a_{\overline{n}|i}$	$S = 13760(1.08)^7 a_{\overline{7}|.08}$ $= 13760(1.713824 \times 5.20637)$ $\underline{S = \$122777.75}$

Ejercicios:

1. Durante 5 años y al final de cada año se pagan $6800.= que trabajan a una tasa del 5% anual. Obtener el valor actual en base al valor $S_{\overline{n}|i}$. R. $29440.43.
2. Durante 3 años y al final de cada año se pagan $5120.= que trabajan a una tasa del 3% anual. Obtener el monto en base al valor $a_{\overline{n}|i}$. R. $15825.40.

9 ANUALIDADES CIERTAS ANTICIPADAS

Como dijimos en (6.1.1), las anualidades ciertas son aquellas en que el plazo esta previamente determinado y en (6.4) vimos que las anualidades anticipadas son aquellas en las que la renta se paga al inicio de cada período. Por lo tanto en un número deter - minado de períodos se efectuan pagos al inicio de cada período cuando se trata de una anualidad cierta anticipada.

MONTO DE UNA ANUALIDAD CIERTA ANTICIPADA

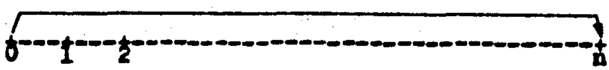
9.0 Concepto.

Consideremos que en una anualidad, cada pago gana interés compuesto desde el momento en que se hace el pago hasta el final del plazo, de modo que el monto de una anualidad cierta anticipada al final del plazo, se define como la suma de los montos compuestos (obtenidos bajo una tasa de interés simple o compuesto) de todos los pagos de la anualidad acumulados hasta el fin del plazo.

9.1.0 Deducción de la Fórmula del Monto de una Anualidad Cierta Anticipada de una Unidad Monetaria por año durante n años a una Tasa de Interés Efectiva Anual.

Si consideramos una anualidad anticipada en donde R es el pago hecho al inicio de cada uno de n años e i es la tasa de interés por año y que la fecha de valuación es al final del plazo, tenemos que:

El 1er. pago de R se hace al inicio del año y el interés se aplicará por n períodos o años, en este caso, que es el tiempo en que se acumulará dicho pago:

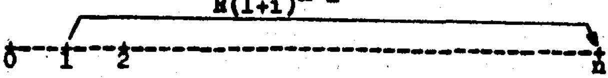


según la fórmula (F.19), su monto al final del plazo será

$$R(1+i)^n$$

Analogamente para el 2do. pago de R, gana interés por n-1 períodos y su monto al final del plazo será:

$$R(1+i)^{n-1}$$



Continuando así vemos que el pago de orden n-2 o penúltimo pago tendrá un monto de:

$$R(1+i)^{n-(n-2)}$$

0 — 1 — 2 — … — n-2 — n-1 — n

1er. pago — último pago

o bien

$$R(1+i)^2$$

Y el pago nésimo o último pago, tendrá un monto de $R(1+i)$ ya que se acumulará por un año.

0 — 1 — 2 — … — n-1 — n

Escribiendo estos montos en orden inverso, tenemos:

$$R(1+i),\ R(1+i)^2,\ R(1+i)^3,\ldots,R(1+i)^{n-1},\ R(1+i)^n$$

Ahora partiendo de la definición de 9.0, tenemos que el monto es la suma de todos los montos compuestos acumulados, y si denotamos con la letra S a dicha suma tenemos:

$$\begin{aligned} S &= R(1+i) + R(1+i)^2 + \ldots + R(1+i)^{n-1} + R(1+i)^n \\ &= R\left((1+i)+(1+i)^2+\ldots+(1+i)^{n-1} + (1+i)^n \right) \end{aligned}$$

si utilizamos el simbolo $\ddot{s}_{\overline{n}|i}$ para designar al 2do. factor de la ecuación anterior, tenemos:

$$\ddot{s}_{\overline{n}|i} = (1+i) + (1+i)^2 + \ldots + (1+i)^{n-1} + (1+i)^n$$

es decir:

$$S = R\ \ddot{s}_{\overline{n}|i} \qquad (1)$$

si aplicamos el concepto de progresión geométrica (cap.19 P.180), tenemos que:

$X_1 = (1+i)$: es el 1er. término

$r = (1+i)$: es la razón geométrica

$X_n = (1+i)^n$: es el último término

$S_n = \ddot{s}_{\overline{n}|i}$

es decir:

$$\ddot{s}_{\overline{n}|i} = \frac{(1+i)-(1+i)(1+i)^n}{1-(1+i)} \qquad (2)$$

$$= \frac{-(1+i)^{n+1}+1+i}{1-1-i}$$

multiplicando por $\frac{(-1)}{(-1)}=1$:

$$= \frac{(1+i)^{n+1}-1-i}{i}$$

$$= \frac{(1+i)^{n+1}-1}{i} - \frac{i}{i}$$

observamos que:

observamos que: $\ddot{s}_{\overline{n}|i} = s_{\overline{n+1}|i} - 1$ (F.80)

sustituyendo en (1) tenemos:

$$S = R(s_{\overline{n+1}|i} - 1) \qquad \text{(F.81)}$$

o bien

$$S = R\ddot{s}_{\overline{n}|i} \qquad \text{(F.82)}$$

por lo tanto si la renta anual es de \$1.=, tenemos:

$$S = \ddot{s}_{\overline{n}|i}$$

la formula (F.81) habla del monto de una anualidad cierta anticipada en términos del monto de una anualidad cierta ordinaria. Ahora obtendrémos otra expresión con las mismas características, la cual puede ser útil para facilitar los cálculos:

Partiendo de (2) podemos factorizar (1+i), tenemos:

$$\ddot{s}_{\overline{n}|i} = (1+i)x\frac{1-(1+i)^n}{1-(1+i)}$$

$$= (1+i)\ x\ \frac{(-1)(1-(1+i)^n)}{(-1)(1-(1+i))}$$

$$= (1+i)\ x\ \frac{(1+i)^n-1}{i}$$

observamos que:

$$\ddot{s}_{\overline{n}|i} = (1+i)s_{\overline{n}|i} \qquad \text{(F.83)}$$

si sustituimos en (F.82), tenemos:

$$S = R(1+i)s_{\overline{n}|i} \qquad \text{(F.84)}$$

y si la renta anual es de \$1.= , tenemos:

$$S = (1+i)s_{\overline{n}|i}$$

Ejemplos:

1. Determinar el valor acumulado al final de 2 años si se invierte un capital de \$53.= al inicio de cada año que trabaja a una tasa efectiva anual del 40%.

DATOS	FORMULA	SUSTITUCION
$n = 2$	$S = R(s_{\overline{n+1}|i} - 1)$	$S=53(s_{\overline{2+1}|.40} - 1)$
$R = 53$		$=53(4.3600-1)$
$i = .40$		$=178.08$
	$S = R(1+i)s_{\overline{n}|i}$	$S=53(1.40)s_{\overline{2}|.40}$
		$=53(1.40)2.40$
		$=178.08$

el monto será de \$178.08

Ejercicios:

1. Detrminar el valor que se acumulará al final de 7 años si al

inicio de cada año se invierten $90000.- a una tasa efectiva anual del 10% R. $939229.80.

2. ¿Cuál es el monto de una deuda al final de 4 años si al inicio de cada año se pagan $1315.- a una tasa del 6.5% anual? R. $6172.13.

.1.1 Cálculo de la Renta Anual.

Para obtener el valor de la renta necesitamos despejar R de las fórmulas (F.81) y (F.84) es decir:

$$R = \frac{S}{S_{\overline{n+1}|\,i} - 1} \quad \text{o} \quad R = \frac{S}{(1+i)S_{\overline{n}|\,i}} \qquad (F.85)$$

Ejemplo:

1. Determinar la cantidad que al inicio de cada año se debe invertir a una tasa del 20% anual efectivo para acumular la cantidad de $85600.- durante 5 años.

DATOS	FORMULA	SUSTITUCION
i=.20 S=85600 n=5	$R=\frac{S}{S_{\overline{n+1}|\,.20} - 1}$	$R=\frac{85600}{S_{\overline{5+1}|\,.20} - 1}$ $=\frac{85600}{8.92992}$ $=9585.752168$
	$R=\frac{S}{(1+i)S_{\overline{n}|\,i}}$	$R=\frac{85600}{(1.20)S_{\overline{5}|\,.20}}$ $=\frac{85600}{1.20x7.44160}$ $=9585.752168$

la renta anual anticipada será de: $9585.75

Ejercicios:

1. ¿Qué cantidad pagadera al inicio de cada año es necesaria para que en 6 años se acumulen $150000.-, si cada cantidad se invierte al 40% anual? R. $6563.58.
2. Si se tiene un monto de $92000.- que se acumuló en 17 años a una tasa efectiva anual del 14%, ¿cuánto tuvo que invertirse al inicio de cada año? R. $1365.11

.1.2 Cálculo del Tiempo.

El tiempo lo podemos obtener despejando n de las fórmulas anteriores o bien usando las tablas financieras como a continuación veremos:

- despejando n:

$$S = R(S_{\overline{n+1}|\,i} - 1)$$

$$S = Rx\frac{(1+i)^{n+1}-1}{i} - R$$

$$\frac{S+R}{R} = \frac{(1+i)^{n+1} - 1}{i}$$

$$(1+i)^{n+1} - 1 = \frac{i(S+R)}{R}$$

$$(n+1)\log(1+i) = \log\left(\frac{i(S+R)}{R} + 1\right)$$

de donde:

$$n = \frac{\log\left(\frac{i(S+R)}{R} + 1\right)}{\log(1+i)} - 1 \qquad \text{(F.86)}$$

usando tablas: de $S = R(1+i)s_{\overline{n|}\,i}$

$$s_{\overline{n|}\,i} = \frac{S}{R(1+i)}$$

el valor de dicho cociente lo buscamos en tablas y si es necesario usamos el método de interpolación lineal (cap.17)

Ejemplo:.

1. ¿Cuál es el tiempo en que tiene que invertirse al inicio de cada año un capital de $2000.= para formar un monto de $35600.= si la tasa efectiva de interés es del 11%?

DATOS	FORMULA	SUSTITUCION
$R = 2000$	$n = \frac{\log\left(\frac{i(S+R)}{R}+1\right)}{\log(1+i)} - 1$	$n = \frac{\log\left(\frac{0.11(35600+2000)}{2000} + 1\right)}{\log(1.11)} - 1$
$S = 35600$		
$i = 0.11$		

$$= \frac{\log 3.068}{\log 1.11} - 1$$

$$= \frac{0.4868553553}{0.0453229789} - 1$$

$$n = 9.74190989$$

es decir:

$$s_{\overline{n|}\,i} = \frac{S}{R(1+i)} \qquad s_{\overline{n|}\,.11} = \frac{35600}{2000(1.11)} = 16.03603604$$

en tablas financieras según (cap.17 y F.172), tenemos:

$$\begin{bmatrix} 16.72201 \\ \begin{bmatrix} 16.03603 \\ 14.16397 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 10 \\ \begin{bmatrix} n \\ 9 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$n-9 = \frac{(16.03603 - 14.16397)(10-9)}{(16.72201 - 14.16397)}$$

$$n-9 = \frac{1.87206}{2.55804} = .7318333475$$

de donde:

$$n = 9.7318337477$$

usando proporciones:

$$.731833 : z \text{ días}$$
$$1.000000 : 360 \text{ días}$$

$$z = 263 \text{ días}$$

así n = 9 años 8 meses 23 días,

cuando obtenemos n por fórmula es mejor, más exacta que por el método de interpolación; en este caso la aproximación falla por 4 días, que es mucho.

Ejercicios:

1. Si se quiere formar un monto de \$27900.= bajo una tasa efectiva anual del 9%, con pagos de \$3100.= al inicio de cada año, ¿cuánto tiempo tendrá que transcurrir? R. 6.44 o bien 6 años 158 días, que son 6 años 5 meses 8 días.
2. ¿En qué tiempo se acumularan \$100000.= si al inicio de cada año se invierten \$9000.= a una tasa del 7% anual? R. n=8.07 ó bien 8 años 25 días.

9.1.3 Cálculo de la Tasa de Interés Anual Efectiva.

Dado que es muy complicado despejar i de cualquiera de las fórmulas anteriores procederemos a obtener i usando tablas y el método de interpolación lineal (cap.17) si es necesario.

de $S = R(S_{\overline{n+1}|i} - 1)$ (la única fórmula de la cuál es mas fácil obtener i)

tenemos:

$$S_{\overline{n+1}|i} = \frac{S}{R} + 1$$

Ejemplo:

1. Para un valor acumulado de \$210000.= que se logró en 5 años mediante cantidades de \$13000.= pagaderos al inicio de cada año, ¿cuál es la tasa efectiva anual correspondiente?

DATOS	FORMULA	SUSTITUCION
S = 210000		
n = 5	$S_{\overline{n+1}\|i} = \frac{S}{R} + 1$	$S_{\overline{5+1}\|i} = \frac{210000}{13000} + 1$
R = 13000		
		$S_{\overline{6}\|i} = 17.15384015$

en tablas financieras y aplicando el método de interpolación (cap.17):

$$\begin{bmatrix} 20.78125 \\ \begin{bmatrix} 17.15384 \\ 16.32384 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} .50 \\ \begin{bmatrix} i \\ .40 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$i-.40 = \frac{(17.15384-16.32384)(.50-.40)}{(20.78125-16.32384)}$$

$$= \frac{(.83)(.1)}{4.45741}$$

$$=0.0186206788$$

de donde:

$$i = .41862$$

$$i = 41.862\%$$

Ejercicios:

1. ¿Cuál es la tasa efectiva anual necesaria para acumular \$89000.= en 6 años con \$9500.= pagaderos al inicio de cada año? R. i=12.89%.
2. ¿Cuál es la tasa que mediante cantidades de \$5560.= pagaderas al inicio de cada año forman un monto de \$75000.= en 9 años. R. i=8.0037%.

9.2.0 Deducción de la Fórmula General del Monto de una Anualidad Cierta Anticipada de una Unidad Monetaria por año pagadera en p pagos al año Durante n años a una Tasa Nominal capitalizable m veces al año.

Cuando hablamos de interés compuesto el monto al final del 1er. año era $S = C(1+i')^m$ y al final del n-ésimo año era $S = C(1+i')^{mn}$ donde C era la única cantidad sobre la que se aplicaba el interés.

Por tratarse de una anualidad serán tantos montos como pagos se hagan y donde la fecha de vencimiento es al final del plazo.

Supongamos primero que por cada año pagamos la renta R y que en cada año hay p períodos de pago, es decir para reunir en un año la cantidad R, en cada p-ésimo de año (1/p) se paga (R/p) existiendo m períodos al año en que se convierte la tasa.

De acuerdo a (F.18) donde n es en años el tiempo que falta por transcurrir para acumular un monto, el 1er. pago o cantidad R/p hecho al inicio del 1er. período tiene como monto al final del 1er. año:

$$\frac{R}{p}(1+i')^{m(1)}$$

es decir el tiempo para que se forme el monto es:

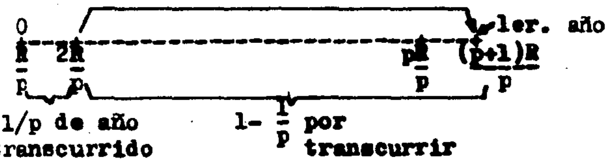
$$\begin{array}{llcl} & 0 & \overbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}^{} & \text{1er. año} \\ \text{1er. pago} & \frac{R}{p} & \text{+---+---+-------------------------+} & \frac{pR}{p} \end{array}$$

de modo que, al final del n-épimo año el monto del 1er.

de modo que, al final del n-ésimo año el monto del 1er. pago es:

$$\frac{R}{p}(1+i')^{mn}$$

el 2do. pago se efectuaría $\frac{1}{p}$ - ésimo de año después pero antes del $\frac{2}{p}$ - ésimo de año y se acumularían 2 pagos es decir $R/p + R/p = 2R/p$ y si el plazo es de un año, tendríamos



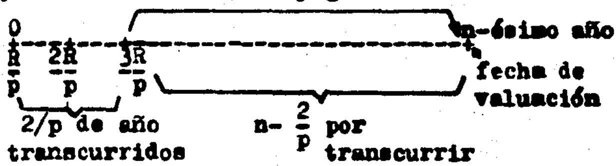
ha transcurrido $1/p$ de año y el tiempo en que se acumulará el 2do. pago es: $1-1/p$ y el monto es:

$$\frac{R}{p}(1+i')^{m(1-\frac{1}{p})}$$

así al final del n-ésimo año el monto del 2do. pago sería:

$$\frac{R}{p}\,(1+i')^{m(n-\frac{1}{p})}$$

de modo que el monto del 3er. pago al final del n-ésimo añ año es:

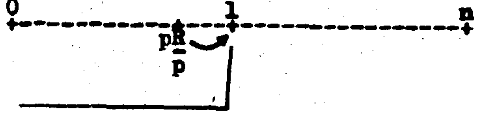


es decir:

$$\frac{R}{p}(1+i')^{m(n-\frac{2}{p})}$$

Dado que el p-ésimo pago se efectua al inicio del último período del 1er. año, se acumularía solo por un p-ésimo de año si se tratara de obtener el monto al final del 1er. año este sería:

$$\frac{R}{p}(1+i')^{m(1-\frac{(p-1)}{p})} = \frac{R}{p}(1+i')^{m(\frac{1}{p})}$$



Si se tratara de obtener el monto al final del 2do. año, el último pago se haría un ~~p-ésimo~~ de año antes del final del 2do. año y por lo tanto dicho pago se acumularía por $1/p$ y su monto sería:

$$\frac{R}{p}(1+i')^{m(2-\frac{2p-1}{p})} = \frac{R}{p}(1+i')^{m(\frac{1}{p})}$$

el monto del penúltimo pago o $(np-1)$-ésimo pago al final del año n sería:

$$\frac{R}{p}(1+i')^{m(n-\frac{(np-1)-1}{p})} = \frac{R}{p}(1+i')^{m(n-\frac{np-2}{p})} = \frac{R}{p}(1+i')^{m(\frac{2}{p})}$$

es decir:

$$+\text{-----------------------------}\underbrace{+\text{---}+\text{---}+}$$

penúltimo pago — 2/p de año por transcurrir

y el último pago se acumulará por $\frac{1}{p}$ de año y su monto al año n es:

$$\frac{R}{p}(1+i')^{m/p}$$

así pues, la serie de montos compuestos es:

$$\frac{R}{p}(1+i')^{mn},\ \frac{R}{p}(1+i')^{m(n-\frac{1}{p})},\ \ldots,\ \frac{R}{p}(1+i')^{2m/p},\ \frac{R}{p}(1+i')^{m/p}$$

Como vimos en 9.0 el monto de una anualidad cierta anticipada es la suma de todos los montos compuestos acumulados hasta la fecha de vencimiento, es decir, denotando a dicha suma con la letra S y factorizando R de cada pago:

$$S = R\left(\frac{1}{p}(1+i')^{\frac{m}{p}} + \frac{1}{p}(1+i')^{\frac{2m}{p}} + \ldots + \frac{1}{p}(1+i')^{m(n-\frac{1}{p})} + \frac{1}{p}(1+i')^{mn}\right)$$

dado que por cada año hay p períodos de pago, en los n años hay np períodos de pago, así tenemos:

$$= R\left(\frac{1}{p}(1+i')^{\frac{m}{p}} + \frac{1}{p}(1+i')^{\frac{m}{p}(2)} + \ldots + \frac{1}{p}(1+i')^{\frac{m}{p}(np-1)} + \frac{1}{p}(1+i')^{\frac{m}{p}(np)}\right)$$

asignando el símbolo $\ddot{s}^{(p)}_{\overline{n}|i}$, al 2do. factor del 2do. miembro tenemos:

$$S = R\ \ddot{s}^{(p)}_{\overline{n}|i}. \qquad (1)$$

si aplicamos el concepto de progresión geométrica (cap.19) tenemos los datos siguientes:

$X_1 = \frac{1}{p}(1+i')^{m/p}$; 1er. término de la progresión

$r = (1+i')^{m/p}$; razón de la progresión

$X_n = \frac{1}{p}(1+i')^{mn}$; último término

$S_n = \ddot{s}^{(p)}_{\overline{n}|i}$.

sustituyendo los valores anteriores en (F.180, cap.19), tenemos:

$$\ddot{s}_{\overline{n}|i'}^{(p)} = \frac{\frac{1}{p}(1+i')^{\frac{m}{p}} - (1+i')^{\frac{m}{p}}(1/p(1+i')^{mn})}{1-(1+i')^{m/p}}$$

$$= \frac{1}{p}(1+i')^{m/p} x \frac{1-(1+i')^{mn}}{1-(1+i')^{m/p}}$$

multiplicando por $1=\frac{(-1)}{(-1)}$ y conmutando el factor $\frac{1}{p}$, tenemos:

$$=(1+i')^{m/p} x \frac{1(-1)(1-(1+i')^{mn})}{p(-1)(1-(1+i')^{m/p})}$$

$$\ddot{s}_{\overline{n}|i'}^{(p)} = (1+i')^{m/p}\left(\frac{1}{p} x \frac{(1+i')^{mn}-1}{(1+i')^{m/p}-1}\right) \qquad \text{(F.87)}$$

observamos que:

$$\ddot{s}_{\overline{n}|i'}^{(p)} = (1+i')^{m/p}\, s_{\overline{n}|i'}^{(p)} \qquad \text{(F.88)}$$

sustituyendo en (1), tenemos:

$$S = R(1+i')^{m/p}\, s_{\overline{n}|i'}^{(p)} \qquad \text{(F.89)}$$

o bien

$$S = \frac{R}{p}(1+i')^{m/p} x \frac{(1+i')^{mn}-1}{(1+i')^{m/p}-1} \qquad \text{(F.90)}$$

o bien

$$S = R\, \ddot{s}_{\overline{n}|i'}^{(p)} \qquad \text{(F.91)}$$

por lo tanto si la renta anual es de $1.-, tenemos:

$$S = (1+i')^{m/p}\, s_{\overline{n}|i'}^{(p)} \qquad \text{(F.92)}$$

9.2.1 Casos Particulares.

La fórmula (F.87) incluye cualquier caso relacionado con la frecuencia de los pagos p y la convertibilidad de la tasa nominal $i^{(m)}$ (recordando $i' = i^{(m)}/m$).

Sin embargo podemos simplificar la formula para cada caso:

Los casos son:

a) $m>1$ y $p>1$; m/p no es entero; p/m no es entero
b) $m=1$ y $p=1$; $m=p$
c) $m>1$ y $p>1$; $m=p$
d) $m>1$ y $p>1$; p/m entero, $p>m$
e) $m>1$ y $p>1$; m/p entero, $m>p$
f) $m>1$ y $p=1$
g) $m=1$ y $p>1$

a) Es el caso más general y la fórmula es aplicable tal como se expresa en (F.87).

Ejemplo:

1. Durante 5 años y al inicio de cada semestre se invierten \$12500.= a una tasa del 4% capitalizable cada 4 meses, ¿cuál será el monto correspondiente?

DATOS	FORMULA	SUSTITUCION
$n = 5$		
$p = 2$	$S = \frac{R}{p}(1+i')^{m/p} \times \frac{(1+i')^{mn}-1}{(1+i')^{m/p}-1}$	
$R = 12500 \times 2 = 25000$		
$m = 3$		
$i^{(3)} = .04$		
$i' = .04/3$		

$$S = \frac{25000}{2}(1.0133)^{3/2} \times \frac{(1.0133)^{3 \times 5}-1}{(1.0133)^{3/2}-1}$$

$$= 12500(1.020066519)\frac{0.219789614}{0.020066519}$$

$$= 12750.83149 \times 10.9530514$$

$$\underline{S = 139660.5127}$$

Ejercicios:

1. Durante 3 años y al inicio de cada trimestre, se invierten \$1230.= a una tasa del 1.5% convertible cada 4 meses, determinar el monto correspondiente. R. \$15124.54.
2. Al inicio de cada 4 meses se abonan \$4100.= a una tasa del 2% convertible trimestralmente durante 3 años. Determinar el monto correspondiente. R. \$38153.18.

b) Caso en el que los pagos son anuales y la tasa es efectiva anual, es decir $i' = i$ y $m = 1$.

Sustituyendo $m=1$, $p=1$ e $i=i'$ en (F.87), tenemos:

$$\ddot{s}^{(p)}_{\overline{n}|i} = (1+i)^1 \times \frac{(1+i)^n - 1}{1(1+i)^1 - 1}$$

$$= \frac{(1+i)^{n+1} - (1+i)}{1+i-1}$$

$$= \frac{(1+i)^{n+1} - 1 - i}{i}$$

$$= \frac{(1+i)^{n+1} - 1}{i} - \frac{i}{i}$$

$$\ddot{s}^{(p)}_{\overline{n}|i} = s_{\overline{n+1}|i} - 1 \qquad \text{(F.93)}$$

caso ya conocido, ver ejemplos y ejercicios en 9.1.0.

c) Hay p pagos por año y m conversiones de la tasa nominal al año y $m=p$.

Sustituyendo $m=p$ en (F.87), tenemos:

$$\ddot{s}^{(p)}_{\overline{n}|i'} = (1+i')^{1} \times \frac{(1+i')^{mn} - 1}{p((1+i')^{1} - 1)}$$

$$= \frac{(1+i')^{mn+1} - (1+i')}{p(1 + i - 1)}$$

$$= \frac{1}{p} \times \frac{(1+i')^{mn+1} - 1 - i'}{i'}$$

$$= \frac{1}{p}\left(\frac{(1+i')^{mn+1} - 1}{i'} - \frac{i'}{i'}\right)$$

$$\ddot{s}^{(p)}_{\overline{n}|i'} = \frac{1}{p}\left(s_{\overline{mn+1}|i'} - 1\right) \qquad \text{(F.94)}$$

Ejemplo:

1. Al inicio de cada trimestre se efectuan pagos de \$17210.= que trabajan a una tasa del 5.5% convertible trimestralmente durante 4 años, ¿cuál sería el monto correspondiente?

DATOS

$p = 4$
$R = 17210 \times 4 = 68840$
$m = 4$
$i^{(4)} = .055$
$i' = .055/4 = .01375$
$n = 4$

FORMULA

$$S = \frac{R}{p}\left(s_{\overline{mn+1}|i'} - 1\right)$$

SUSTITUCION

$$S = \frac{68840}{4}\left(s_{\overline{4\times4+1}|.01375} - 1\right)$$

$$= 17210\left(s_{\overline{17}|.01375} - 1\right)$$

$$S = 17210\left(\frac{(1.01375)^{17} - 1}{.01375} - 1\right)$$

$$= 17210(18.00497697)$$

$$S = 309865.6537$$

Ejercicios:

1. Durante 6 años y al inicio de cada mes se invierten \$2050. a una tasa del 2.5% convertible mensualmente. Determinar el monto correspondiente. R. \$159397.91.
2. Al inicio de cada 4 meses se abonan \$1710.= a una tasa del 3.5% convertible cada 4 meses durante 6 años. Determinar el monto correspondiente. R. \$34 427.89.

d) Caso en el que hay p pagos por año y m conversiones de la tasa nominal por año, cuando p/m es entero y $p > m$.

En el caso de anualidades ciertas ordinarias, obtuvimos la fórmula (F.47) y es:

$$s^{(p)}_{\overline{n}|i'} = \frac{1}{m}\, s_{\overline{mn}|i'} \times \frac{i'}{i'(p/m)}$$

Dado que la fórmula (F.88) no puede simplificarse más en este caso, lo que harémos es sustituir (F.47) en (F.88) y obtenemos:

$$\ddot{s}^{(p)}_{\overline{n}|i'} = (1+i')^{m/p} \times \frac{1}{m} \times s_{\overline{mn}|i'} \times \frac{i'}{i'(p/m)} \qquad \text{(F.95)}$$

Ejemplo:

1. Al inicio de cada bimestre se efectuan pagos de \$1100.- que trabajan a una tasa del 7% convertible semestralmente durante 3 años, ¿cuál será el monto correspondiente?

DATOS	FORMULA	SUSTITUCION
$p = 6$		
$R = 1100 \times 6 = 6600$	$S = \frac{R}{m}(1+i')^{m/p} s_{\overline{mn\rceil} i'} \ x \ \frac{i'}{i'_{(p/m)}}$	
$m = 2$		
$i^{(2)} = .07$		
$i' = .07/2 = .035$		$S = \frac{6600}{2}(1.035)^{2/3} s_{\overline{2x3\rceil} .035} \ x \ \frac{.035}{.035_{(3)}}$
$n = 3$		

$$= 3300 \times 1.023099257 \times 6.55015 \times 1.01157$$

$$\underline{S = 22373.01794}$$

recordemos que en $\frac{.035}{.035_{(3)}}$ el 3 no es exponente, es una expresión que se encuentra en tablas financieras, aunque con el número hay que interpolar (17.6).

Ejercicios:

1. Al inicio de cada mes se depositan \$1780.- a una tasa del 2% convertible bimestralmente durante 7 años;; determinar el monto correspondiente. R. \$160606.84.
2. Durante 9 años y al inicio de cada trimestre se invierten \$5215.- a una tasa del 14% convertible semestralmente determinar el monto correspondiente. R. \$373121.94.

e) Caso en que m/p es entero y m > p.

Según la fórmula (F.87) podemos sustituir (F.48) en (F.87), es decir:

$$\ddot{s}^{(p)}_{\overline{n\rceil} i'} = (1+i')^{m/p}\left(1/p \ s_{\overline{mn\rceil} i'} \ x \ \frac{1}{s_{\overline{m/p\rceil} i'}}\right) \qquad \text{(F.96)}$$

desarrollando la fórmula anterior tenemos:

$$= (1+i')^{m/p}(1/p \ s_{\overline{mn\rceil} i'}) \ \frac{i'}{(1+i')^{m/p}-1}$$

$$= \frac{1}{p} s_{\overline{mn\rceil} i'} \ x \ \frac{(1+i')^{m/p} i'}{(1+i')^{m/p}-1}$$

multiplicando por $1 = \frac{(1+i')^{-m/p}}{(1+i')^{-m/p}}$ tenemos:

$$= \frac{1}{p} s_{\overline{mn\rceil} i'} \ x \ \frac{(1+i')^{m/p}(1+i')^{-m/p} i'}{(1+i')^{m/p}(1+i')^{-m/p} - (1+i')^{-m/p}}$$

$$= \frac{1}{p} s_{\overline{mn\rceil} i'} \ x \ \frac{\quad}{1 - (1+i')^{-m/p}}$$

$$= \frac{1}{p} s_{\overline{mn}|\, i'} \times \frac{i'}{1-(1+i')^{-m/p}}$$

observamos que:

$$\ddot{s}^{(p)}_{\overline{n}|\, i'} = \frac{1}{p} s_{\overline{mn}|\, i'} \times \frac{1}{a_{\overline{m/p}|\, i'}} \qquad \text{(F.97)}$$

Ejemplo:

1. Durante 8 años y al final de cada semestre se invierten \$1110.= a una tasa del 3.5% convertible bimestralmente; determinar el monto correspondiente.

DATOS / FORMULA / SUSTITUCION

$n = 8$

$p = 2$

$R = 1110 \times 2 = 2220$

$m = 6$

$i^{(6)} = .035$

$i' = .035/6 = .005833$

$$S = \frac{R}{p} s_{\overline{mn}|\, i'} \times \frac{1}{a_{\overline{m/p}|\, i'}}$$

$$S = \frac{2220}{2} s_{\overline{6x8}|\, .005833} \times \frac{1}{a_{\overline{6/2}|\, .005833}}$$

$$= 1110 s_{\overline{48}|\, .005833} \times \frac{1}{a_{\overline{3}|\, .005833}}$$

$$= 1110 \times 55.20924 \times \frac{1}{2.96534}$$

así $\underline{S = 20666.18209}$

Ejercicios:

1. Al inicio de cada 4 meses se invierten \$889.= a una tasa del 1% bimestral durante 2 años; determinar el monto correspondiente. R.\$5396.63.
2. Durante 8 años y al inicio de cada semestre se invierten \$1000.= a una tasa del 2.5% convertible mensualmente; determinar el monto correspondiente. R. 17821.12.

f) Caso en que los pagos son anuales y hay m conversiones al año de la tasa nominal de interés.

Sustituyendo p=1, en (F.87), tenemos:

$$\ddot{s}^{(p)}_{\overline{n}|\, i'} = (1+i')^{m} \times \frac{1}{1} \times \frac{(1+i')^{mn}-1}{(1+i')^{m}-1}$$

multiplicando por $1 = \frac{i'}{i'}$, tenemos:

$$= (1+i')^{m} \times \frac{(1+i')^{mn}-1}{(1+i')^{m}-1} \times \frac{i'}{i'}$$

$$= \frac{(1+i')^{mn}-1}{i'} \times \frac{(1+i')^{m} i'}{(1+i')^{m}-1}$$

multiplicando por $1 = \frac{(1+i')^{-m}}{(1+i')^{-m}}$, tenemos:

$$= \frac{(1+i')^{mn}-1}{i'} \times \frac{i'}{1-(1+i')^{-m}}$$

observamos que:

$$\ddot{s}^{(p)}_{\overline{n}|i'} = s_{\overline{mn}|i'} \times \frac{1}{a_{\overline{m}|i'}} \qquad (F.98)$$

Ejemplo:

1. Al inicio de cada año se invierten \$2780.= a una tasa del 5% trimestral durante 5 años; determinar el monto correspondiente.

DATOS	FORMULA	SUSTITUCION
$p = 1$	$S = R\, s_{\overline{mn}|i'} \times \frac{1}{a_{\overline{m}|i'}}$	
$R = 2780.=$		
$m = 4$		
$i^{(4)} = .05$		
$i' = .05/4 = .0125$		$S = 2780 s_{\overline{4x5}|}\, .0125 \times \frac{1}{a_{\overline{4}|}\, .0125}$
$n = 5$		$= 2780 \times 22.56298 \times \frac{1}{3.87806}$
		$S = 16174.34$

Ejercicios:

1. Durante 5 años y al inicio de cada año se depositan \$1200.= a una tasa del 6% semestral. Determinar el monto correspondiente. R. \$7189.38.
2. Al inicio de cada año durante 6 años se invierten \$500.= a una tasa del 3% convertible cada cuatro meses; determinar el monto correspondiente. R. \$3334.72.

g) Caso en que hay p pagos al año a una tasa efectiva anual de interés.

Sustituyendo $i'=i$ y $m=1$ en (F.87), tenemos:

$$\ddot{s}^{(p)}_{\overline{n}|i'} = (1+i')^{1/p} \times \frac{1}{p} \times \frac{(1+i')^{n}-1}{(1+i)^{1/p}-1}$$

multiplicando por $1=\frac{i}{i}$, tenemos:

$$= (1+i)^{1/p} \times \frac{(1+i)^{n}-1}{p((1+i)^{1/p}-1)} \times \frac{i}{i}$$

$$= (1+i)^{1/p} \times \frac{(1+i)^n - 1}{i} \times \frac{i}{p((1+i)^{1/p}-1)}$$

según (F.17), tenemos:

$$\ddot{s}^{(p)}_{\overline{n}|i} = (1+i)^{1/p}\, s_{\overline{n}|i} \times \frac{i}{i^{(p)}} \qquad \text{(F.99)}$$

Ejemplo:

1. Durante 4 años y al inicio de cada semestre se invierten \$390.= a una tasa del 4.5% anual; determinar el monto correspondiente.

DATOS	FORMULA	SUSTITUCION
$n = 4$		
$p = 2$	$S = R(1+i)^{1/p} s_{\overline{n}|i} \times \frac{i}{i^{(p)}}$	
$R = 390\text{x}2 = 780$		
$i = .045$		

$$S = 780(1.045)^{1/2} s_{\overline{4}|.045} \times \frac{.045}{.045^{(2)}}$$

$$= 780 \text{x} 1.02225241 \text{x} 4.27819 \text{x} 1.011126$$

$$= 3449.198432$$

así el monto es de \$3449.198

Ejercicios:

1. Al inicio de cada trimestre se pagan \$680.= durante 10 años a una tasa del 8.5% anual; determinar el monto correspondiente. R. \$42473.29.
2. Durante 9 años se pagan \$900.= al inicio de cada bimestre que trabajan a una tasa del 10.5% anual; determinar el monto correspondiente. R. \$79412.73.

9.3.0 Cálculo de los Elementos de la Fórmula General para el Monto de Anualidades Ciertas Ordinarias.

En caso de no conocer la renta anual ó el tiempo ó la tasa de interés podemos basarnos en la fórmula general despejando nuestra incognita o bien basandonos en la formula general propia para el caso particular en que nos encontremos (9.2.1) y despejar nuestra incognita.

Obtendremos solo la fórmula general para la renta anual y el tiempo ya que es muy complicado despejar la tasa de la fórmula general y de algunos casos particulares.

9.3.1 Cálculo de la Renta Anual.

Basandonos en (F.90) y despejando R, tenemos:

$$R = \frac{Sp\,((1+i')^{m/p} - 1)}{(1+i')^{m/p}((1+i')^{mn} - 1)} \qquad \text{(F.100)}$$

Ejemplo:

1. Durante 5 años al inicio de cada semestre se invierte una cantidad de dinero que a la tasa del 5% convertible cada 4 meses genera un monto de $51500.=. Determinar el monto anual correspondiente.

DATOS	FORMULA	SUSTITUCION
$n = 5$		
$p = 2$	$R = \dfrac{Sp((1+i')^{m/p}-1)}{(1+i')^{m/p}((1+i')^{mn}-1)}$	
$m = 3$		
$i^{(3)}=.05$		
$i'=.05/3=.01666$		$R=\dfrac{51500x2((1.0166)^{3/2}-1)}{(1.01666)^{3/2}((1.0166)^{3x5}-1)}$
$S = 51500.$		

$$\frac{103000(.025103879)}{1.025103879(.281256412)}$$

$$=8968.250929$$

la renta es de $8968.250929

Ejercicios:

1. Al inicio de cada 4 meses se deposita cierta cantidad que trabaja a una tasa del 7% convertible trimestralmente durante 7 años que producirán un monto de $70000.=; determinar la renta anual correspondiente.

9.3.2 Cálculo del Tiempo en años.

Basandonos en:

$$S = \frac{R}{p}(1+i')^{m/p}x\ \frac{(1+i')^{mn}-1}{(1+i')^{m/p}-1}$$

$$(1+i')^{mn}-1 = \frac{Sp((1+i')^{m/p}-1)}{R(1+i')^{m/p}}$$

$$(1+i')^{mn} = \frac{Sp((1+i')^{m/p}-1)}{R(1+i')^{m/p}} + 1$$

aplicando logaritmos (cap.20):

$$mn\log(1+i') = \log\left(\frac{Sp((1+i')^{m/p}-1)}{R(1+i')^{m/p}} + 1\right)$$

de donde:

$$n = \frac{\log\left(\dfrac{Sp((1+i')^{m/p}-1)}{R(1+i')^{m/p}} + 1\right)}{m\log(1+i')} \quad (F.101)$$

Ejemplo:

1. Al inicio de cada 4 meses se depositan $5500.- que trabajan a una tasa del 5% convertible trimestralmente, ¿en qué tiempo producirán un monto de $63500.-?

DATOS

$p = 3$

$R = 5500x3=16500$

$m = 4$

$i^{(4)}=.05$

$i' = .05/4=.0125$

$S = 63500$

FORMULA

SUSTITUCION

sustituyendo en (F.101) tenemos:

$$n = \frac{\log\left(\frac{63500x3((1.0125)^{4/3}-1)}{16500(1.0125)^{4/3}} + 1\right)}{4\log(1.0125)}$$

$$= \frac{\log\left(\frac{3181.596304}{16775.57133} + 1\right)}{4\log(1.0125)}$$

$$= \frac{\log(1.18965651)}{4\log 1.0125}$$

$$= \frac{0.0754215853}{0.0215801275}$$

$$=3.4949555$$

usando proporciones; (sec.16.2)

.4949 : z días
1.0000 : 360 días

z = 178 días

es decir el tiempo necesario es de:

3 años 5 meses 28 días

Ejercicio:

1. Al inicio de cada tres meses se invierten $2970.- que trabajan a una tasa del 4% convertible cada cuatro meses, ¿en qué tiempo producirán un monto de $71000.-? R. 5.338 o bien 5 años 4 meses 1 día.

10 VALOR PRESENTE DE UNA ANUALIDAD CIERTA ANTICIPADA

10.0 Concepto.

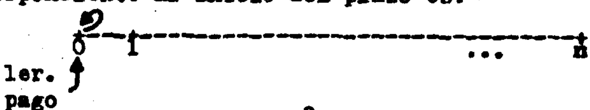
En (1.3) mencionamos que el valor actual es una cantidad a la que todavía no se le aplican los intereses para acumular un monto, lo cuál, tambien lo podemos ver como la cantidad que resulta de descontar del monto, los intereses acumulados.

Consideremos que en una anualidad a cada pago se le descuenta un interés compuesto desde el momento en que se hace el pago hasta el inicio del plazo. De modo que el valor autual o valor presente de una anualidad cierta anticipada se define como la suma de todos los valores presentes correspondientes a los pagos hechos al inicio de cada período de la anualidad, descontados al inicio del plazo.

10.1.0 Deducción de la Fórmula del Valor Presente de una Anualidad Cierta Anticipada de una Unidad Monetaria por año Durante n años a una Tasa Efectiva de Interés Anual.

Si consideramos una anualidad cierta anticipada en donde R es el pago hecho al inicio de cada uno de n años, e i es la tasa de interés por año y que la fecha de valuación es al inicio del plazo.

El 1er. pago de R se hace al inicio del 1er. período y de acuerdo a la fórmula (F.20) tenemos que el valor presente correspondiente al inicio del plazo es:

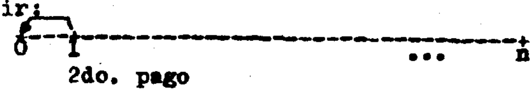


es decir: $R(1+i)^{-0} = R$

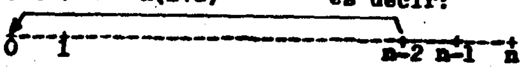
Analogamente, el 2do. pago de R es descontado por un período y su valor presente al inicio del plazo es:

$$R(1+i)^{-1}$$

es decir:



Continuando así vemos que el pago de orden n-1 tiene como valor presente: $R(1+i)^{-(n-2)}$ es decir:



El pago de orden n tiene como valor presente:

$$R(1+i)^{-(n-1)} = R(1+i)^{1-n}$$

0 — 1 — — — — — — — — — — — — — — — — — n-1 — n

último pago

Escribiendo estos valores presentes tenemos:

$R,\ R(1+i)^{-1},\ R(1+i)^{-2}, \ldots,\ R(1+i)^{-(n-2)},\ R(1+i)^{-(n-1)}$

Partiendo de la definición del valor actual o valor presente de una anualidad anticipada dada en 9.0 y designando la letra A para representar el valor actual, tenemos:

$$A = R + R(1+i)^{-1} + R(1+i)^{-2} + \ldots + R(1+i)^{-(n-2)} + R(1+i)^{-(n-1)}$$

$$= R(1+(1+i)^{-1} + (1+i)^{-2} + \ldots + (1+i)^{-(n-2)} + (1+i)^{-(n-1)})$$

la fórmula la podemos obtener basandonos en que esta sucesión de valores forma una progresión geométrica (cap.19) sin embargo, lo dejamos como ejercicio para el estudiante, la obtendrémos de la siguiente manera:

Asignando el simbolo $\ddot{a}_{\overline{n}|i}$ al 2do. término del 2do. miembro de la ecuación tenemos:

$$\ddot{a}_{\overline{n}|i} = 1 + (1+i)^{-1} + (1+i)^{-2} + \ldots + (1+i)^{2-n} + (1+i)^{1-n} \qquad \text{(F.102)}$$

es decir:

$$A = R\ddot{a}_{\overline{n}|i} \qquad (1)$$

observamos que:

$$(1+i)^{-1}\ddot{a}_{\overline{n}|i} = (1+i)^{-1} + (1+i)^{-2} + \ldots + (1+i)^{1-n} + (1+i)^{-n}$$

y de acuerdo a la expresión (F.53), tenemos:

$$(1+i)^{-1}\ddot{a}_{\overline{n}|i} = a_{\overline{n}|i} \qquad \text{(F.103)}$$

o bien

$$\ddot{a}_{\overline{n}|i} = (1+i)a_{\overline{n}|i} = (1+i) \times \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \qquad \text{(F.104)}$$

sustituyendo F.104 en (1), tenemos:

$$A = R(1+i)a_{\overline{n}|i} \qquad \text{(F.105)}$$

$$A = R\ddot{a}_{\overline{n}|i} \qquad \text{(F.106)}$$

por lo tanto si la renta anual es de \$1.=, tenemos:

$$A = (1+i)a_{\overline{n}|i} \qquad \text{(F.107)}$$

Observación:

El simbolo $a_{\overline{n}|i}$ se encuentra en tablas financieras a las que hacemos referéncia en la introducción.

El factor $(1+i)^{-n}$ lo encontramos en tablas representado por V^n y que tambien podemos calcularlo por logaritmos (ver cap. 20) o por el teorema del binomio (cap.21)

Desarrollando F.104, tenemos:

$$\ddot{a}_{\overline{n}|i} = (1+i) \times \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

$$= \frac{(1+i)-(1+i)^{-n+1}}{i}$$

$$= \frac{1-(1+i)^{-(n-1)}}{i} + \frac{i}{i}.$$

observamos que:

$$\ddot{a}_{\overline{n}|i} = a_{\overline{n-1}|i} + 1 \qquad (F.108)$$

si sustituimos en (F.106) la expresión anterior:

$$A = R(a_{\overline{n-1}|i} + 1) \qquad (F.109)$$

Ejemplo:

1. Obtener el valor actual correspondiente a un conjunto de pagos al inicio de cada año de $6290.= que trabajan a una tasa del 3% anual durante 7 años.

DATOS	FORMULA	SUSTITUCION
$R = 6290$	$A = R(1+i)a_{\overline{n}|i}$	$A=6290(1.03)a_{\overline{7}|.03}$
$i = .03$		$=6478.7x6.23028$
$n = 7$		$=40364.11504$

el valor presente es de $40,364.16

Ejercicios:

1. Un conjunto de pagos efectuados al inicio de cada año de $7170.= trabajan a una tasa del 6.5% anual durante 3 años ¿cuál es el valor presente correspondiente? R. $20,223.93.
2. Durante 5 años se hacen pagos al inicio de cada año de $1900.= que trabajan a una tasa efectiva anual del 5%, ¿cuál es el valor actual de la anualidad? R. $8,637.37.

10.1.1 Cálculo de la Renta.

Para conocer la renta anual necesitamos despejar R de la fórmula (F.105) o bien de (F.109).

$$R = \frac{A}{(1+i)a_{\overline{n}|i}} \quad \text{o} \quad R = \frac{A}{a_{\overline{n-1}|i} + 1} \qquad (F.110)$$

Ejemplo:

1. Un valor actual de $20890.= calculado en base a una tasa del 4.5% anual y a un plazo de 3 años, ¿cuál es el valor de cada pago?

DATOS	FORMULA	SUSTITUCION
$A = 20890$	$R = \frac{A}{(1+i)a_{\overline{n}|i}}$	$R = \frac{20890}{(1.045)a_{\overline{3}|.045}}$
$i = .045$		
$n = 3$		

$$R = \frac{20890}{(1.045)2.74896}$$

$$\underline{R = 7271.997636}$$

Ejercicios:

1. Obtener la cantidad a pagar al inicio de cada año para cubrir una cantidad de \$69000.= en 4 años si la tasa efectiva anual es del 4%. R. \$18277.68.
2. Al inicio de 9 años se debe pagar una deuda de \$72000.= si la tasa de interés anual efectivo es del 5%; determinar la renta anual. R. \$9647.32.

10.1.2 Cálculo del Tiempo.

Para conocer el plazo de una anualidad anticipada podemos despejar n de la fórmula (F.105) o bien al través del cociente que a continuación mencionamos usando tablas financieras y el método de interpolación (cap.14) si es necesario.

- por despeje:

$$A = R(1+i) \times \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

$$1-(1+i)^{-n} = \frac{Ai}{R(1+i)}$$

$$(1+i)^{-n} = 1 - \frac{Ai}{R(1+i)}$$

usando logaritmos (cap.20)

$$-n\log(1+i) = \log\left(1 - \frac{Ai}{R(1+i)}\right)$$

$$n = \frac{(-1)\log(1 - Ai/R(1+i))}{\log(1+i)} \qquad \text{(F.111)}$$

- por tablas financieras:

$$\text{de } A = R(1+i)a_{\overline{n}|i}$$

$$a_{\overline{n}|i} = \frac{A}{R(1+i)}$$

el valor de dicho cociente lo buscamos en tablas.

Ejemplo:

1. ¿Durante cuánto tiempo se cubre una deuda de \$85000.= cuyos pagos al inicio de cada año son de \$11500.= que trabajan a una tasa del 9% anual efectivo?

DATOS	FORMULA	SUSTITUCION
$A = 85000$	$n = \frac{(-1)\log(1-Ai/R(1+i))}{\log(1+i)}$	
$R = 11500$		
$i = .09$		

$$n = \frac{(-1)\log\left(1 - \frac{(85000)(.09)}{(11500)(1.09)}\right)}{\log(1.09)}$$

$$= \frac{(-1)\log\left(1 - \frac{7650}{12535}\right)}{\log(1.09)}$$

$$= \frac{(-1)\log 0.3897088153}{\log 1.09}$$

$$= \frac{.4092597702}{.0374264979}$$

$$n = 10.93502714$$

$$a_{\overline{n}|\,i} = \frac{A}{R(1+i)} \qquad a_{\overline{n}|\,.09} = \frac{85000}{11500(1.09)}$$

$$= 6.7810131 63$$

interpolando (cap.[illegible])

$$\begin{bmatrix} 6.80519 \\ \begin{bmatrix} 6.78101 \\ 6.41766 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 11 \\ \begin{bmatrix} n \\ 10 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$n-10 = \frac{(6.78101-6.41766)(11-10)}{(6.80579-6.41766)}$$

$$= \frac{(.36335)(1)}{.38753}$$

$$= .9376048306$$

$$n = 10.9376048306$$

usando proporciones (cap.10)

$$\left.\begin{array}{l} .93 : x \\ 1.00 : 360 \text{ días} \end{array}\right\} x = 334 \text{ días}$$

por lo tanto el tiempo necesario es de 10 años 334 días

Ejercicios:

1. ¿Cuál es el tiempo a transcurrir para pagar una deuda de $91000.=, si los pagos al inicio de cada año son de $16000.= que trabajan a una tasa del 4% anual. R. 6.29 o 6 años 104 días.
2. Se efectuan pagos de $13130.= al final de cada año, ¿durante cuánto tiempo cubrirán una deuda de $82000.= si la tasa es del 5% anual?. R. 7.23 o 7 años 82 días.

10.1.3 Cálculo de la Tasa de Interés.

En este caso solo conoceremos i al través de usar tablas financieras y el método de interpolación si es necesario ya que el despeje de i de cualquier fórmula excepto (F.109) es complicado:

$$A = R(a_{\overline{n-1}|\,i} + 1)$$

de donde:

$$a_{\overline{n-1}|\,i} + 1 = \frac{A}{R}$$

$$a_{\overline{n-1}|\,i} = \frac{A}{R} - 1$$

Ejemplo:

1. Una deuda de $270000.- se cubre con pagos al inicio de cada año de $31000.- durante 9 años, ¿cuál es la tasa de interés anual?

DATOS	FORMULA	SUSTITUCION
A = 270000 R = 31000 n = 9	$a_{\overline{n-1}|\,i} = \frac{A}{R} - 1$	$a_{\overline{8}|\,i} = \frac{270000}{31000} - 1$ $= 7.709677419$

interpolando (E3TR)

$$\begin{bmatrix} 7.70815 \\ 7.70967 \\ 7.73661 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} .00833 \\ i \\ .0075 \end{bmatrix}$$

$$i - .0075 = \frac{(.00833-.0075)(7.70967-7.73661)}{(7.70815-7.73661)}$$

$$= \frac{(.00833)(-.02694)}{-0.02846}$$

$$= .0007856711$$

de donde:

$$i = .008285$$

$$i = .828\%$$

Ejercicios:

1. Una deuda de $52000.- se cubre con pagos al inicio de cada año de $12500.- durante 7 años, ¿cuál es la tasa de interés anual?
2. Una deuda de $94 593.11 se cubre con pagos al inicio de cada año de $31093.31 durante 4 años, ¿cuál es la tasa d de interés anual? R. i=22%.

10.2.0 Deducción de la Fórmula General del Valor Actual de una Anualidad Cierta Anticipada de una Unidad Monetaria por año en p pagos al año Durante n años a una Tasa Nominal de Interés Capitalizable m veces al Año.

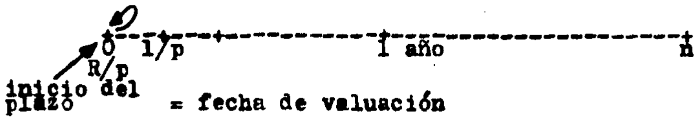
Cuando hablamos de interés compuesto teníamos que el valor presente de m capitalizaciones del interés en un año era $C = S(1+i')^{-m}$ y en n años era $C = S(1+i')^{-mn}$ donde $i' = i^{(m)}/m$ y donde S éra la única cantidad que se descontaba al inicio de los mn períodos.

Ahora estudiaremos el caso de una serie de cantidades a descontar desde el momento en que se efectuan éstas hasta el inicio del plazo. Supongamos que por cada año pagamos la renta R y que en cada año hay p períodos de pago, es decir, para reunir en un año la cantidad R, en cada pésimo de año$(1/p)$ se paga (R/p) existiendo m períodos al año en que se convierte la tasa. De acuerdo a (F.20) donde n es en años el tiempo en que se efectua el pago y a su vez es el tiempo que ha transcurrido a partir del inicio del plazo de la anualidad.

El 1er. pago, monto o cantidad R/p, tiene como valor presente valuado desde el inicio del 1er. período del 1er. año:

$$\frac{R}{p}(1+i')^{-m(0)} = \frac{R}{p}$$

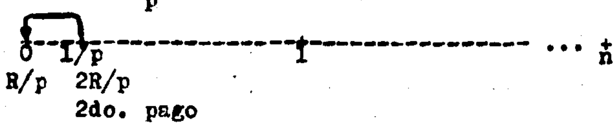
es decir, no hay tiempo transcurrido:



= fecha de valuación

el valor presente del 2do. pago de R/p sería:

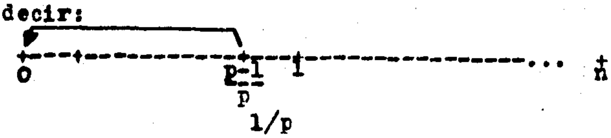
$$\frac{R}{p}(1+i')^{-m(1/p)}$$



así el valor presente del p-ésimo pago que se efectua $1/p$ de año antes del final del 1er. año, es:

$$\frac{R}{p}(1+i')^{-m(\frac{p-1}{p})} = \frac{R}{p}(1+i')^{-m+\frac{m}{p}}$$

es decir:



así, el valor presente del 2do. p-ésimo pago es:

$$\frac{R}{p}(1+i')^{-m(\frac{2p-1}{p})} = \frac{R}{p}(1+i')^{-2m+\frac{m}{p}}$$

y el valor presente del np-1-ésimo o penúltimo pago que se efectua $2/p$ de año antes del final del n-ésimo año es:

$$\frac{R}{p}(1+i')^{-m(\frac{np-2}{p})} = \frac{R}{p}(1+i')^{-mn+\frac{2m}{p}}$$

es decir:

$$0 \quad \frac{1}{p} \quad \cdots \quad \frac{np-2}{p} \quad \frac{np-1}{p} \quad np$$

y el valor presente del np-ésimo o último pago que se efectua 1/p de año antes del final del n-ésimo año es:

$$\frac{R}{p}(1+i')^{-m\left(\frac{np-1}{p}\right)} = \frac{R}{p}(1+i')^{-mn+\frac{m}{p}}$$

es decir:

$$0 \quad \frac{1}{p} \quad \cdots \quad \frac{np-1}{p} \quad \frac{np}{p}=n$$

1er. pago　　　　　　　　　　último pago

Escribiendo los valores presentes anteriores, tenemos:

$$\frac{R}{p},\ \frac{R}{p}(1+i')^{-\frac{m}{p}},\ \frac{R}{p}(1+i')^{-\frac{2m}{p}},\ldots,\ \frac{R}{p}(1+i')^{-mn+\frac{2m}{p}},\ \frac{R}{p}(1+i')^{-mn+\frac{m}{p}}$$

Como vimos en 10.0 el valor presente de la anualidad cierta anticipada es la suma de los valores presentes de todos los pagos de la anualidad y descontados al inicio del plazo es decir, denotando a dicha suma con la letra A y factorizando a R de cada pago:

$$A=R\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{p}(1+i')^{-\frac{m}{p}}+\ldots+\frac{1}{p}(1+i')^{-mn+\frac{2m}{p}}+\frac{1}{p}(1+i')^{-mn+\frac{m}{p}}\right)$$

Asignando el símbolo $\ddot{a}^{(p)}_{\overline{n|}i'}$ al 2do. factor del 2do. miembro de la ecuación tenemos:

$$\ddot{a}^{(p)}_{\overline{n|}i'} = \frac{1}{p}+\frac{1}{p}(1+i')^{-\frac{m}{p}}+\ldots+\frac{1}{p}(1+i')^{-mn+\frac{2m}{p}}+\frac{1}{p}(1+i')^{-mn+\frac{m}{p}} \qquad \text{(F.112)}$$

$$= \frac{1}{p}+\frac{1}{p}(1+i')^{-\frac{m}{p}}+\ldots+\frac{1}{p}(1+i')^{-\frac{m}{p}(np-2)}+\frac{1}{p}(1+i')^{-\frac{m}{p}(np-1)}$$

es decir:

$$A = R\ddot{a}^{(p)}_{\overline{n|}i'} \qquad (1)$$

Si aplicamos el concepto de progresión geométrica (cap.19) tenemos los datos siguientes:

$X_1 = \frac{1}{p}$: es el 1er. término de la progresión

$(1+i')^{-\frac{m}{p}}$: es la razón $= r$

$\frac{1}{p}(1+i')^{-\frac{m}{p}(np-1)}$: es el último término $= X_n$

$\ddot{a}^{(p)}_{\overline{n|}i'}$: es la suma S_n

Substituyendo estos valores en (F.180), tenemos:

$$\ddot{a}^{(p)}_{\overline{n|}i'} = \frac{1/p - (1+i')^{-m/p}(1/p)(1+i')^{-mn+m/p}}{1-(1+i')^{-m/p}}$$

$$= \frac{1}{p} \times \frac{1-(1+i')^{-mn}}{1-(1+i')^{-m/p}}$$

multiplicando por $1=\frac{(1+i')^{m/p}}{(1+i')^{m/p}}$, tenemos:

$$\ddot{a}_{\overline{n}|i'}^{(p)} = (1+i')^{m/p} \times \frac{1}{p} \times \frac{1-(1+i')^{-mn}}{(1+i')^{m/p}-1} \qquad \text{(F.113)}$$

observamos que:

$$\ddot{a}_{\overline{n}|i'}^{(p)} = (1+i')^{m/p} \times a_{\overline{n}|i'}^{(p)} \qquad \text{(F.114)}$$

si sustituimos (F.114) en (1), tenemos:

$$A = R(1+i')^{m/p} a_{\overline{n}|i'}^{(p)} \qquad \text{(F.115)}$$

es decir:

$$A = R(1+i')^{m/p} \times \frac{1-(1+i')^{-mn}}{p((1+i')^{m/p}-1)} \qquad \text{(F.116)}$$

si la renta anual es de \$1.=, tenemos:

$$A = (1+i')^{m/p} a_{\overline{n}|i'}^{(p)} \qquad \text{(F.117)}$$

10.2.1 Casos Particulares.

La fórmula (F.113) incluye cualquier caso relacionado con la frecuencia de los pagos p y la convertibilidad de la tasa nominal $i^{(m)}$ ($i' = i^{(m)}/m$).

Sin embargo simplificaremos la fórmula para cada caso:

Los casos son:

a) $m>1$ y $p>1$; m/p no es entero, p/m no es entero
b) $m=1$ y $p=1$; $m=p$
c) $m>1$ y $p>1$; $m=p$
d) $m>1$ y $p>1$; p/m entero $p>m$
e) $m>1$ y $p>1$; m/p entero $m>p$
f) $m>1$ y $p=1$;
g) $m=1$ y $p>1$

a) Es el caso más general y la fórmula es aplicable tal como se expresa en (F.116).

Ejemplo:

1. Durante 5 años al inicio de cada semestre se invierten \$12500.= a una tasa del 4% capitalizable cada 4 meses, ¿cuál será el valor actual?

DATOS	FORMULA	SUSTITUCION
$n = 5$ $p = 2$ $R = 12500 \times 2 = 25000$ $m = 3$	$A=\frac{R}{p}(1+i')^{m/p} \times \frac{1-(1+i')^{-mn}}{(1+i')^{m/p}-1}$	

$i^{(3)}=.04$

$i'=.04/3=.0133$

$$A=\frac{25000}{2}(1.0133)^{3/2}x\frac{1-(1.0133)^{-3x5}}{(1.0133)^{3/2}-1}$$

$$=12500x1.020066519x\frac{.180186494}{.020066519}$$

$$=12750.83149x8.979459467$$

$$=114495.57$$

así A=$114495.57

Ejercicios:

1. Durante 3 años y al inicio de cada trimestre se invierten $1380.- a una tasa del 15.3% convertible cada 4 meses; determinar el valor actual correspondiente. R. - R. $13600.18.
2. Al inicio de cada 4 meses se abonan $3750.- a una tasa del 2% convertible trimestralmente durante 3 años; determinar el valor actual correspondiente. R. $32868.92.

b) Caso en el que los pagos son anuales y la tasa es efectiva anual es decir i'=i.

Sustituyendo m=1, p=1 e i=i' en (F.113), tenemos:

$$\ddot{a}^{(p)}_{\overline{n}|i}=(1+i)^1x\frac{1-(1+i)^{-n}}{(1+i)^1-1}$$

$$=(1+i)x\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

$$=\frac{(1+i)-(1+i)^{-n+1}}{i}$$

$$=\frac{1-(1+i)^{-(n-1)}}{i}+\frac{i}{i}$$

$$\ddot{a}^{(p)}_{\overline{n}|i}=a_{\overline{n-1}|i}+1 \qquad (F.118)$$

Caso ya conocido, ver ejemplo y ejercicios en la sección 10.1.0.

c) Hay p pagos por año y m conversiones de la tasa nominal al año y m=p.

Sustituyendo m=p en (F.113).

$$\ddot{a}^{(p)}_{\overline{n}|i}=\frac{1}{p}(1+i')^1x\frac{1-(1+i')^{-mn}}{(1+i')^1-1}$$

$$=\frac{1}{p}\,x\,\frac{(1+i')-(1+i')^{-mn+1}}{i}$$

$$=\frac{1}{p}\,x\left(\frac{i}{i}+\frac{1-(1+i')^{-mn+1}}{i}\right)$$

$$=\frac{1}{p}\left(1+\frac{1-(1+i')^{-(mn-1)}}{i}\right)$$

observamos que:

$$\ddot{a}^{(p)}_{\overline{n}|i'} = \frac{1}{p}(a_{\overline{mn-1}|i'} + 1) \qquad (F.119)$$

Ejemplo:

1. Al inicio de cada trimestre se efectuan pagos de $17210 que trabajan a una tasa del 5.5% convertible trimestralmente durante 4 años, ¿cuál será el monto correspondiente.

DATOS	FORMULA	SUSTITUCION
$p = 4$		
$R = 68840$	$A=\frac{R}{p}(a_{\overline{mn-1}|i'} + 1)$	
$m = 4$		
$i^{(4)}=.055$		$A=\frac{68840}{4}(a_{\overline{4x4-1}|.01375} + 1)$
$i'=.055/4=.01375$		
$n = 4$		$=17210((\frac{1-(1.01375)^{-15}}{.01375})+1)$
		$=17210(14.47100504)$
		$=249045.9968$

así A=$249045.99

Ejercicios:

1. Durante 6 años y al inicio de cada mes se invierten $2000.= a una tasa del 2.5% convertible mensualmente, determinar el valor presente correspondiente. R. - R. $147 390.54.
2. Al inicio de cada 4 meses se abona $1191.= a una tasa del 3.5% convertible cada 4 meses durante 6 años; determinar el valor actual correspondiente. R. $19460.42.

d) Caso en el que hay p pagos por año y m conversiones de la tasa nominal por año, cuando p/m es entero y p > m.
Multiplicando por 1=i'/i' a la fórmula F.113, tenemos:

$$\ddot{a}^{(p)}_{\overline{n}|i'} = \frac{1}{p}(1+i')^{m/p} x \frac{(1-(1+i')^{-mn})i'}{((1+i')^{m/p}-1)i'}$$

$$= \frac{1}{p}(1+i')^{m/p} x \frac{(1-(1+i')^{-mn})}{i'} x \frac{i'}{(1+i')^{m/p}-1}$$

observamos que:

$$= \frac{1}{p}(1+i')^{m/p} a_{\overline{mn}|i'} x \frac{i'}{(1+i')^{m/p}-1}$$

$$= (1+i')^{m/p} a_{\overline{mn}|i'} x \frac{i'}{p((1+i')^{m/p}-1)}$$

multiplicando el denominador del 2do. factor por m/m:

$$= (1+i')^{m/p} a_{\overline{mn}|i'} \times \frac{1}{\frac{mp}{m}} \times \frac{i'}{(1+i')^{m/p}-1}$$

$$= \frac{1}{m}(1+i')^{m/p} a_{\overline{mn}|i'} \times \frac{i'}{p/m((1+i')^{m/p}-1)}$$

según (F.17), tenemos:

$$\ddot{a}^{(p)}_{\overline{n}|i'} = \frac{1}{m} (1+i')^{m/p} a_{\overline{mn}|i'} \times \frac{i'}{i'^{(p/m)}} \qquad (F.120)$$

observación: el denominador del último factor lo denominaremos o denotaremos como: $i^{(m)}$ para encontrar su valor en tablas financieras $i^{(m)}$ y lo que está entre parentesis no representa un exponente y dicho denominador no tiene relación con la fórmula F.17 no obstante su parecido.

Ejemplo:

1. Al inicio de cada bimestre se efectuan pagos de \$1100.- que trabajan a una tasa del 7% convertible semestralmente durante 3 años, ¿cuál será el valor presente correspondiente?

DATOS

$p = 6$
$R = 1100 \times 6 = 6600$
$m = 2$
$i^{(2)} = .07$
$i' = .07/2 = .035$
$n = 3$

FORMULA

$$A = \frac{R}{m}(1+i')^{m/p} a_{\overline{mn}|i'} \times \frac{i'}{i'^{(p/m)}}$$

SUSTITUCION

$$A = \frac{6600}{2}(1.035)^{1/3} a_{\overline{2x3}|.035} \times \frac{.035}{.035^{(6/2)}}$$

$A = 3300 \times 1.011533142 \times 5.32855 \times 1.01157748$

así $\underline{A = 17992.94507}$

Ejercicios:

1. Al inicio de cada mes se depositan \$1180.- a una tasa del 2% convertible bimestralmente durante 7 años; determinar el valor presente correspondiente. R. \$92581.86.-
2. Durante 9 años y al inicio de cada trimestre se invierten \$5215.- a una tasa del 14% convertible semestralmente; determinar el valor presente correspondiente. R R. \$110 393.36.

e) Caso en que m/p es entero y $m > p$.

Como en el caso anterior multiplicamos por $1 = \frac{i'}{i'}$, a la fórmula F.113, tenemos:

$$\ddot{a}^{(p)}_{\overline{n}|i'} = \frac{1}{p}(1+i')^{m/p} \times \frac{1-(1+i')^{-mn}}{i'} \times \frac{i'}{(1+i')^{m/p}-1}$$

observamos que:

$$\ddot{a}^{(p)}_{\overline{n}|i'} = \frac{1}{p}(1+i')^{m/p} a_{\overline{mn}|i'} \times \frac{1}{s_{\overline{m/p}|i'}} \qquad (F.121)$$

$$= \frac{1}{p} a_{\overline{mn}|i'} \times \frac{(1+i')^{m/p} i'}{(1+i')^{m/p}-1}$$

multiplicando por $1 = \frac{(1+i')^{-m/p}}{(1+i')^{-m/p}}$, tenemos:

$$= \frac{1}{p} a_{\overline{mn}|i'} \times \frac{i'}{1-(1+i')^{-m/p}}$$

es decir:

$$\ddot{a}^{(p)}_{\overline{n}|i'} = \frac{1}{p} a_{\overline{mn}|i'} \times \frac{1}{a_{\overline{m/p}|i'}} \qquad (F.122)$$

Ejemplo:

1. Durante 8 años y al inicio de cada semestre se invierten \$1110.- a una tasa del 3.5% convertible bimestralmente; determinar el valor presente correspondiente.

DATOS

$n = 8$

$p = 2$

$R = 1110 \times 2 = 2220$

$m = 6$

$i^{(6)} = .035$

$i' = .035/6 = .005833$

FORMULA

$$A = \frac{R}{p} a_{\overline{mn}|i'} \times \frac{1}{a_{\overline{m/p}|i'}}$$

SUSTITUCION

$$A = \frac{2220}{2} a_{\overline{6 \times 8}|.005833} \times \frac{1}{a_{\overline{6/2}|.005833}}$$

$$A = 1110 \times 41.76020 \times \frac{1}{2.96534}$$

$$= 15631.87423$$

así el valor actual es \$15,631.87

Ejercicios:

1. Al inicio de cada 4 meses se invierten \$980.- a una tasa del 4% bimestral durante 2 años; determinar el valor presente correspondiente. R. \$5,689.324.
2. Durante 8 años y al inicio de cada semestre se invierten \$1000.- a una tasa del 3% convertible mensualmente, ¿cuál es el valor presente correspondiente? R. \$5,343.37.

f) Caso en el que los pagos son anuales y hay m conversiones al año de la tasa nominal de interés.

Sustituyendo p=1 en (F.113), tenemos:

$$\ddot{a}^{(p)}_{\overline{n}|i'} = (1+i')^{m} \times \frac{1-(1+i')^{-mn}}{(1+i')^{m}-1}$$

multiplicando por 1=i'/i', tenemos:

$$= (1+i')^{m} \times \frac{1-(1+i')^{-mn}}{i'} \times \frac{i'}{(1+i')^{m}-1}$$

observamos que:

$$\ddot{a}^{(p)}_{\overline{n}|i'} = (1+i')^{m} a_{\overline{mn}|i'} \times \frac{1}{s_{\overline{m}|i'}} \qquad \text{(F.123)}$$

$$= a_{\overline{mn}|i'} \times \frac{(1+i')^{m} i'}{(1+i')^{m}-1}$$

multiplicando numerador y denominador por el factor: $(1+i')^{-m}$:

$$= a_{\overline{mn}|i'} \times \frac{i'}{1-(1+i')^{-m}}$$

es decir:

$$\ddot{a}^{(p)}_{\overline{n}|i'} = a_{\overline{mn}|i'} \times \frac{1}{a_{\overline{m}|i'}} \qquad \text{(F.123-bis)}$$

Ejemplo:

1. Al inicio de cada año se invierten $2780,= a una tasa del 5% trimestral, durante 5 años; determinar el valór presente correspondiente.

DATOS	FORMULA	SUSTITUCION
$p = 1$	$A = R\,a_{\overline{mn}|i'} \times \frac{1}{a_{\overline{m}|i'}}$	
$R = 2780$		
$m = 4$		
$i^{(4)} = .05$		
$i' = .05/4 = .0125$		$A = 2780.\,a_{\overline{4x5}|.0125} \times \frac{1}{a_{\overline{4}|.0125}}$
$n = 5$		$= 2780 \times 17.59932 \times 0.2578608$
		$= 12616.12576$

así A = $12616.13

Ejercicios:

1. Durante 5 años y al inicio de cada año se depositan $1200.= a una tasa del 6% semestral; determinar el valor

presente correspondiente. R. $5349.57.

2. Al inicio de cada año se invierten $500.- durante 8 año a una tasa del 3% convertible cada 4 meses; determinar el valor actual correspondiente. R. $3611.61.

g) Caso en el que hay p pagos al año a una tasa efectiva anual de interés.

Sustituyendo i' por i y m=1 en (F.113), tenemos:

$$\ddot{a}^{(p)}_{\overline{n}|i'} = (1+i')^{1/p} x \frac{1}{p} x \frac{1-(1+i')^{-n}}{(1+i)^{1/p}-1}$$

multiplicando por $1=\frac{i}{i}$, tenemos:

$$= (1+i)^{1/p} x \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} x \frac{1}{p} x \frac{i}{(1+i)^{1/p}-1}$$

$$\ddot{a}^{(p)}_{\overline{n}|i'} = (1+i)^{1/p} a_{\overline{n}|i'} x \frac{i'}{i'^{(p)}} \qquad (F.124)$$

o bien

$$\ddot{a}^{(p)}_{\overline{n}|i} = (1+i)^{1/p} a_{\overline{n}|i} x \frac{i}{i^{(p)}} \qquad (F.124)$$

observación: El denominador del 2do. factor si tiene relación con la fórmula F.17 de una tasa nominal $i^{(p)}$ que se convierte p veces al año, por tratarse aquí de una tasa de interés efectiva anual.

Ejemplo:

1. Durante 4 años y al inicio de cada semestre se invierten $390.- a una tasa del 4.5% anual; determinar el valor actual correspondiente.

DATOS
n = 4
p = 2
R = 390x2=780
i = .045

FORMULA

$$A=R(1+i)^{1/p} a_{\overline{n}|i} x \frac{i}{i^{(p)}}$$

SUSTITUCION

$$A = 780(1.045)^{1/2} a_{\overline{4}|.045} x \frac{.045}{.045^{(2)}}$$

$$=780(1.022252415)(3.58753)x(1.0111269)$$

$$A = 2892.37.$$

Ejercicios:

1. Al inicio de cada trimestre se pagan $680.- durante 10 años a una tasa del 8% anual, ¿cuál es el valor actual correspondiente? R. $19155.21.
2. Durante 9 años se pagan $900.- al inicio de cada bimestre que trabajará a una tasa del 11% anual; determinar el valor actual correspondiente. R. $31790.90.

10.3.0 Cálculo de los Elementos de la Fórmula General para el Valor Actual de Anualidades Ciertas Anticipadas.

10.3.0 Cálculo de los Elementos de la Fórmula General para el Valor Actual de Anualidades Ciertas Anticipadas.

En caso de no conocer la renta anual ó el tiempo ó la tasa de interés, podemos basarnos en la fórmula general despejando nuestra incognita o bien basandonos en la fórmula propia para el caso particular en que nos encontremos (10.2.1) y despejar de ésta nuestra incognita.

Obtendremos solo la fórmula general para la renta anual y el tiempo, ya que es muy complicado despejar la tasa de la fórmula general y de algunos casos particulares.

10.3.1 Cálculo de la Renta Anual.

Despejando R de (F.116), tenemos:

$$R = \frac{Ap((1+i')^{m/p} - 1)}{(1+i')^{m/p}(1-(1+i')^{-mn})} \qquad (F.125)$$

Ejemplo:

1. Durante 5 años al inicio de cada semestre se invierte una cantidad de dinero que a la tasa del 5% convertible cada 4 meses y cuyo valor actual es de \$51500.=. Determinar la renta anual correspondiente. R.

DATOS	FORMULA	SUSTITUCION
$n = 5$		
$p = 2$	(ver.125)	$R = \frac{51500x2((1.01666)^{3/2} - 1)}{(1.01666)^{3/2}(1-(1.01666)^{-3x5})}$
$m = 3$		$= \frac{103000(.025103879)}{1.025103879(0.2195928664)}$
$i^{(3)} = .05$		$= \frac{2585.699537}{0.2251054991}$
$i' = .05/3 = .01666$		$R = 11486.61204$
$A = 51500.=$		

Ejercicio:

1. Al inicio de cada 4 meses se deposita cierta cantidad que trabaja a una tasa del 7% convertible trimestralmente durante 7 años y cuyo valor actual es de \$58300.=; determinar la renta anual correspondiente. R. \$10393.88.

10.3.2 Cálculo del Tiempo.

Basandonos en:

$$A = R(1+i')^{m/p} x \frac{1-(1+i')^{-mn}}{p((1+i')^{m/p} - 1)}$$

$$1-(1+i')^{-mn} = \frac{Ap((1+i')^{m/p} - 1)}{R(1+i')^{m/p}}$$

$$(1+i')^{-mn} = \frac{Ap((1+i')^{m/p} - 1)}{R(1+i')^{m/p}}(-1) + 1$$

$$-mn\log(1+i') = \log\left(1 - \frac{Ap((1+i')^{m/p}-1)}{R(1+i')^{m/p}}\right)$$

de donde:

$$n = (-1)\frac{\log\left(1 - \frac{Ap((1+i')^{m/p}-1)}{R(1+i')^{m/p}}\right)}{m\log(1+i')} \qquad (F.126)$$

Ejemplo:

1. Al inicio de cada 4 meses se depositan \$5500.= que trabajan a una tasa del 5% convertible trimestralmente. Obtener el tiempo que determina un valor actual de \$63500.

DATOS	FORMULA	SUSTITUCION
$p = 3$	(ver.F.126)	
$R = 5500\times 3 = 16500$		
$m = 4$		
$i^{(4)} = .05$		
$i' = .05/4 = .0125$		
$A = 63500.=$		

$$n = \frac{(-1)\log\left(1 - \frac{63500\times 3((1.0125)^{4/3}-1)}{16500(1.0125)^{4/3}}\right)}{4\log(1.0125)}$$

$$= \frac{(-1)\log\left(1 - \frac{3181.596304}{16775.57133}\right)}{4\log(1.0125)}$$

$$= \frac{(-1)\log(0.8103434905)}{4\log(1.0125)}$$

$$= \frac{0.0913308522}{0.0215801275}$$

$$n = 4.232173892$$

usando proporciones (cap.16)

$$\left.\begin{matrix} .23 : z \\ 1.00 : 360 \text{ días} \end{matrix}\right\} z = 82 \text{ días}$$

por lo tanto el tiempo necesario es de 4 años 2 meses y 22 días.

Ejercicio:

1. Al inicio de cada tres meses se invierten \$2970.= que trabajan a una tasa del 4% convertible cada 4 meses. Obtener el tiempo necesario para un valor actual de - \$34 445.=. R. n=3.06 o 3 años 21 días.

11 ANUALIDADES DIFERIDAS

Como vimios en 6.4 las anualidades diferidas son aquellas cuyo plazo inicia después de un tiempo prefijado; ese tiempo es el que se difiere o aplaza el inicio del plazo de la anualidad, plazo en que los pagos son vencidos o anticipados. Los calculos para dichos pagos son iguales a los que hemos visto en capitulos anteriores ya que no afecta el tiempo diferido o de aplazamiento o de demora de estas anualidades.

tiempo — plazo de la anualidad

diferido — vencida ó anticipada

duración de la anualidad diferida

Si hablamos de monto, la fecha de valuación será por lo general al final del plazo de la anualidad; si hablamos de valor actual, la fecha de valuación puede ser al inicio del tiempo diferido o bien al inicio del plazo de la anualidad.

MONTO DE ANUALIDADES CIERTAS DIFERIDAS

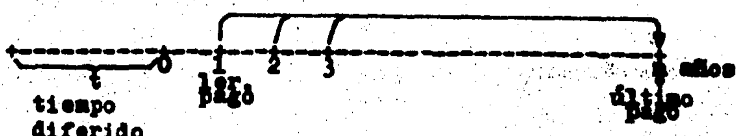
Dado que durante el tiempo en que se difiere la anualidad no existe pago alguno, tampoco hay intereses que aplicar, de modo que las operaciones sobre el capital a acumularse se efectuaran exclusivamente en el plazo de la anualidad, por lo que no hay diferencia entre anualidades diferidas y no diferidas. Aplicaremos las fórmulas antes estudiadas tanto para pagos anuales cuya tasa se convierte una vez al año como para los distintos casos de varios pagos al año con tasas m veces convertibles al año, durante n años.

11.0 Monto de una Anualidad Cierta Ordinaria Diferida Durante t años de una Unidad de Moneda por año Durante n años a una Tasa de Interés Efectiva Anual.

En la sección 7.1.0 obtuvimos la formula (F.36) que es:

$$s_{\overline{n}|i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

que corresponde a una anualidad cuyos pagos se efectuan y se acumulan de la siguiente manera:



considerando el tiempo diferido t, tenemos:

$$t/s_{\overline{n}|i} = s_{\overline{n}|i} \qquad \text{(F.127)}$$

(nota: $t/s_{\overline{n}|i}$ no es un cociente)

Cuando la renta anual no era de una anidad monetaria la denotabamos así (F.38):

$$S = Rs_{\overline{n}|i}$$

de modo que:

$$S = R\ t/s_{\overline{n}|i} \qquad \text{(F.128)}$$

por lo tanto si la renta es de \$1.=, el monto es:

$$S = t/s_{\overline{n}|i} \qquad \text{(F.129)}$$

Ejemplo:

1. Determinar el valor acumulado en el año 11, si al final el 5to. año se invierte un capital de \$1830.= al final de cada año a una tasa efectiva anual del 25%.

DATOS	FORMULA	SUSTITUCION
$t = 5$		
$n = 6$		
$R = 1830$	$S = Rs_{\overline{n}|i}$	$S = 1830s_{\overline{6}|.25}$
$i = .25$		$=1830(11.25879)$

el monto será de $S=20603.5857$

Ejercicios:

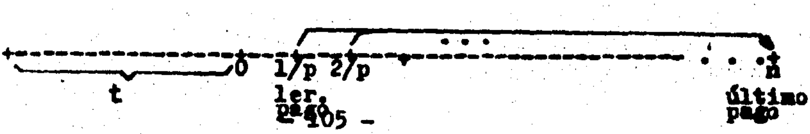
1. Determinar el valor que se acumulará al finalizar el 9no. año si al final de cada año se invierten \$90000.= a una tasa efectiva anual del 10% y si el 1er. pago se hace al finalizar el 3er. año a partir de hoy. R. \$694404.90.
2. ¿Cuál es el monto de una deuda al finalizar el año 6, si al finalizar el 2do. año se pagan \$1315.= al final de cada año a una tasa del 6% anual efectivo? R. \$5752.63.

11.1 Monto de una Anualidad Cierta Ordinaria Diferida Durante t años de una Unidad Monetaria por año pagadera en p pagos al año durante n años a una Tasa de Interés Nominal Capitalizable m veces por año.

En la seccion 7.3.0 obtuvimos la fórmula (F.43) que es:

$$s^{(p)}_{\overline{n}|i'} = \frac{1}{p} \times \frac{(1+i')^{mn}-1}{(1+i')^{m/p}-1}$$

que corresponde a una anualidad cuyos pagos se efectuan y se acumulan de la siguiente manera:



Considerando el tiempo diferido t, tenemos:

$$t/S_{\overline{n}|i'}^{(p)} = S_{\overline{n}|i'}^{(p)} \qquad (F.130)$$

(donde $t/S_{\overline{n}|i'}^{(p)}$ no representa un cociente)

cuando la renta anual no era de una unidad monetaria, el monto lo denotabamos así (F.45)

$$S = RS_{\overline{n}|i'}^{(p)}$$

de modo que:

$$S = t/S_{\overline{n}|i'}^{(p)} \qquad (F.131)$$

por lo tanto si la renta es de $1.=, el monto es:

$$S = S_{\overline{n}|i'}^{(p)} \qquad (F.132)$$

Los casos particulares correspondientes a la fórmula del monto de anualidades ciertas ordinarias diferidas tienen las mismas fórmulas que se obtuvieron en la sección 7.3.1.

Ejemplos:

1. Determinar el monto al final del año 14 de una serie de depósitos de $18110.= que se hacen al final de cada semestre desde el final del 5to. año, que trabajan a una tasa del 4% capitalizable cada 4 meses.

DATOS

$R = 18110$
$p = 2$
$t = 5$
$n = 9$
$m = 3$
$i^{(3)} = .04$
$i' = .04/3 = .01333..$

FORMULA

$$S = \frac{R}{p} \times \frac{(1+i')^{mn} - 1}{(1+i')^{m/p} - 1}$$

SUSTITUCION

$$S = \frac{18110}{2} \times \frac{(1.01333)^{3x9} - 1}{(1.01333)^{3/2} - 1}$$

$$= 9055 \times \frac{0.429923739}{0.020066519}$$

$$= 194002.7295$$

así el monto al final del año 14 es: $194002.7295

2. Un abuelo espera que su nieta cumpla 1 año de edad para que al final del 1er. trimestre pueda invertir $1090.= al final de cada trimestre, ¿cuánto acumulará para su fiesta de 15 años, si la tasa es del 11% convertible trimestralmente?

DATOS

$t = 1$
$R = 1090x4 = 4360$
$p = 4$
$n = 14$
$m = 4$
$i^{(4)} = .11$
$i' = .11/4 = .0275$

FORMULA

$$S = \frac{R}{p} S_{\overline{mn}|i'}$$

SUSTITUCION

$$S = \frac{4360}{4} S_{\overline{14x4}|.0275}$$

$$= 1090 S_{\overline{56}|.0275}$$

$$= 1090\left(\frac{(1.0275)^{56} - 1}{.0275}\right)$$

recordemos que el factor que tiene exponente lo podemos determinar al través de usar las tablas financieras y el método de interpolación lineal (cap.17) o bien por logaritmos (sec. 20) o desarrollando el binomio (cap.21) o por calculadora con exponente.

$$=1090\left(\frac{3.568593428}{.0275}\right)$$

$$=1090(129.7670337)$$

a los 15 años la nieta tendrá para su fiesta $\underline{S=141\ 446.0668}$

Ejercicios:

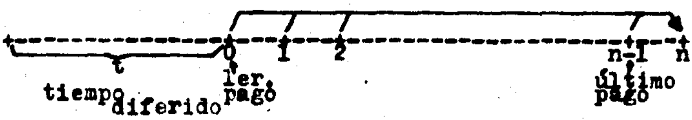
1. Al final de cada trimestre se invierten \$2385.= a una tasa del 2% convertible cada 4 meses. Determinar el monto correspondiente al final del año 20 si el 1er. deposito se hace al final del 7o. año. R. \$141219.45.
2. Al final de cada 4 meses se abonen \$4250.= a una tasa del 3% convertible trimestralmente. Determinar el monto al final del año 17, si el 1er. abono se hace al final del año 8 R. \$131010.79.

11.2 Monto de una Anualidad Cierta Anticipada Diferida Durante t años de una Unidad Monetaria por año durante n años a una Tasa de Interés Anual Efectiva.

En la sección 9.1.0 obtuvimos las fórmulas (F.80) y (F.83) que se resúmen así:

$$\ddot{s}_{\overline{n}|i} = s_{\overline{n+1}|i} - 1 = (1+i)s_{\overline{n}|i}$$

que corresponden a una anualidad cuyos pagos se efectuan y se acumulan de la siguiente manera:



Considerando el tiempo diferidot, tenemos:

$$t/\ddot{s}_{\overline{n}|i} = \ddot{s}_{\overline{n}|i} \qquad \text{(F.133)}$$

($t/\ddot{s}_{\overline{n}|i}$ no representa un cociente)

Cuando la renta anual no era de una unidad monetaria, el monto lo denotabamos así: (F.82)

$$S = R\ddot{s}_{\overline{n}|i}$$

de modo que:

$$S = R/\ddot{s}_{\overline{n}|i} \qquad \text{(F.134)}$$

por lo tanto si la renta es de \$1.=, el monto es:

$$S = t/\ddot{s}_{\overline{n}|i} \qquad \text{(F.135)}$$

Ejemplo:

1. Determinar el valor acumulado al final del 9o. año si se invierte un capital de $275.- al inicio de cada año que trabaja a una tasa efectiva anual del 30%, dado que el 1er. pago se hace al inicio del 5o. año.

DATOS	FORMULAS	SUSTITUCION
$R = 275$	$S = R(s_{\overline{n+1}\|i} - 1)$	$S = 275(s_{\overline{4+1}\|.30} - 1)$
$i = .30$	$S = R(1+i)s_{\overline{n}\|i}$	$= 275(8.04310)$
$t = 5$		$= 2211.8525$
$n = 4$		$S = 275(1.30)s_{\overline{4}\|.30}$
		$= 275(1.30)6.18700$
	el monto al final del 9o. año será: $2211.8525	$= 2211.8525$

Ejercicios:

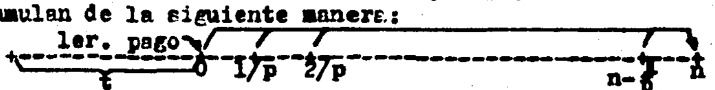
1. Determinar el monto al final de 6 años si al inicio de cada año se invierten $66000.- a una tasa efectiva anual del 12% dado que el 1er. pago se hace al inicio del 3er. año. R. $249435.65.
2. ¿Cuál será el monto de una deuda al final de 7 años si al inicio de cada año se pagan $980.- a una tasa del 6% anual dado que el 1er. pago se hace al inicio del 5to. año? R. $2139.93.

11.3 Monto de una Anualidad Cierta Anticipada Diferida Durante t años de una Unidad Monetaria por año pagadera en p pagos al año durante n años a una Tasa de Interés Nominal Capitalizable m veces por año.

En la sección 9.2.0 obtuvimos las fórmulas F.87 y F.88 que se resúmen así:

$$\ddot{s}^{(p)}_{\overline{n}|i} = (1+i')^{m/p} \times \frac{1}{p} \times \frac{(1+i')^{mn} - 1}{(1+i')^{m/p} - 1} = (1+i')^{m/p} s^{(p)}_{\overline{n}|i}$$

que corresponde a una anualidad cuyos pagos se efectuan y se acumulan de la siguiente manera:



Considerando el tiempo diferido t, tenemos:

$$t/\ddot{s}^{(p)}_{\overline{n}|i} = \ddot{s}^{(p)}_{\overline{n}|i}$$

(donde $t/\ddot{s}^{(p)}_{\overline{n}|i}$ no es un cociente)

Cuando la renta anual no era de una unidad monetaria, el monto lo denotabamos así: (F.89).

$$S = R(1+i')^{m/p} s^{(p)}_{\overline{n}|i}$$

de modo que:

$$S = Rt/S_{\overline{n}|1}^{(p)}. \qquad (F.136)$$

por lo tanto, si la renta es de $1.=, el monto es:

$$S = S_{\overline{n}|1}^{(p)}. \qquad (F.137)$$

Los casos particulares correspondientes a la fórmula del monto de anualidades ciertas anticipadas diferidas tienen las mismas fórmulas que se obtuvieron en (9.2.1).

Al aplicar las fórmulas podemos usar las tablas financieras (se mencionan en la introducción) usar el método de interpolación lineal si es necesario (cap.17) o usar logaritmos (cap.20) o desarrollar los bimomios (cap.21) o bien usando calculadora con exponente.

Ejemplos:

1. Al inicio de cada semestre se invierten $12500.= que se empiezan a pagar a partir del inicio del 4to. año a una tasa del 4% capitalizable cada 4 meses hasta el final del año 9 ¿cuál será el monto correspondiente?

DATOS	FORMULA	SUSTITUCION
$p = 2$		
$R=12500x2=25000$	$S=\frac{R}{p}(1+i')^{m/p}x\frac{(1+i')^{mn}-1}{(1+i')^{m/p}-1}$	
$t = 4$		
$m = 3$		
$i^{(3)}=.04$		$S=\frac{25000}{2}(1.0.1333)^{3/2}x\ \frac{(1.01333)^{3x5}-1}{(1.01333)^{3/2}-1}$
$i'=.04/3=.0133..$		
$n = 5$		

$$=12500(1.020066519)(\frac{0.219789614}{0.020066519})$$

$$=139660.5127$$

el monto será de: $139660.51

2. Unos novios se van a casar con el dinero que acumulen hasta el final del 10o. año, si desde el inicio del 2do. año invierten $10000.= al inicio de cada trimestre, a una tasa del 7% trimestral, ¿cuánto juntarán?

DATOS	FORMULA	SUSTITUCION
$t = 2$		
$n = 8$	$S=\frac{R}{p}(S_{\overline{mn+1}|}\ i' - 1)$	$S=\frac{40000}{4}(S_{\overline{4x8+1}|}\ .0175 - 1)$
$p = 4$		
$R=10000x4=40000$		
$m = 4$		$=10000(S_{\overline{33}|}\ .0175 - 1)$
$i^{(4)}=.07$		$=10000(43.15441)$
$i'=.07/4=.0175$		$S=\$431544.10$

Ejercicios:

1. Al inicio de cada trimestre, se invierten $4800.- a una tasa del 9% convertible cada 4 meses, desde el inicio del 3er. año. Determinar el monto al final del 8o. año. R. $101794.85.
2. Al inicio del 5o. año se pagará una deuda cuyos pagos de cada 4 meses son de $3800.- a una tasa del 20% convertible trimestralmente, ¿cuánto se habrá pagado al final del 10o. año? R. $99,750.082.

12 VALOR PRESENTE DE ANUALIDADES CIERTAS DIFERIDAS

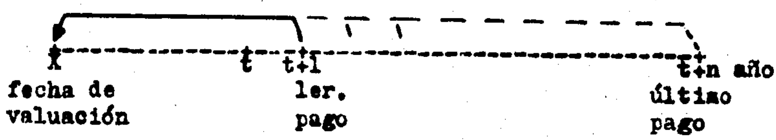
Como dijimos en 8.0 el valor presente o valor actual es la can -
idad que resulta de descontar del monto, los intereses acumulados
onde dicho descuento se hace en base a una fecha de valuación. En
l caso de anualidades diferidas la fecha de valuación puede ser al
nicio del plazo de la anualidad o bien al inicio de su duración o
o que es lo mismo al inicio del tiempo o lapso [illegible]
a anualidad que es el caso que estudiarémos.

Así pues consideremos que a cada pago se le descuenta un inte-
és compuesto desde el momento desde el momento en que se hace el
ago hasta el inicio del tiempo diferido.

2.0 Valor Presente de una Anualidad Cierta Ordinaria Diferida Durante t años de una Unidad Monetaria por año durante n años a una Tasa de Interés Anual Efectiva.

Acoplando la definición de valor presente de una anualidad ordinaria al caso diferido, tenemos que: el valor presente de una anualidad ordinaria diferida es la suma de los valores presentes de todos los pagos hechos al final de cada período dentro del plazo de la anualidad, descontados al inicio del tiempo diferido.

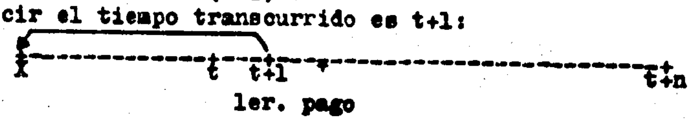
Si consideramos una anualidad ordinaria diferida t años en donde R es el pago hecho al final de cada uno de n años e i es la tasa de interés por año y que la fecha de valuación es en el inicio (X) del tiempo diferido (t) de la anualidad, tenemos



De modo que el 1er. pago de R se hace al final del 1er. período despues del tiempo t; para el valor presente en el momento X el interés se aplicará por t+1 períodos; por (F.20), el valor actual del 1er. pago al inicio del tiempo diferido es:

$$R(1+i)^{-(t+1)}$$

es decir el tiempo transcurrido es t+1:



así para el pago r-ésimo, el valor actual es $R(1+i)^{-(t+r)}$ y tendríamos los siguientes valores presentes:

$$R(1+i)^{-(t+1)},\ R(1+i)^{-(t+2)},\ldots,\ R(1+i)^{-(t+n)}$$

Recurriendo a la definición anterior, denotamos a dicha suma con el símbolo A y factorizando R tenemos:

$$A = R(\ (1+i)^{-(t+1)} + (1+i)^{-(t+2)} + \ldots + (1+i)^{-(t+n)})$$

Si denotamos al 2do. factor del 2do. miembro de la ecuación con el símbolo $t/a_{\overline{n}|i}$, tenemos:

$$t/a_{\overline{n}|i} = (1+i)^{-(t+1)} + (1+i)^{-(t+2)} + \ldots + (1+i)^{-(t+n)} \qquad (1)$$

es decir:

$$A = R\ t/a_{\overline{n}|i}$$

si factorizamos el factor $(1+i)^{-t}$ de $t/a_{\overline{n}|i}$, tenemos:

$$t/a_{\overline{n}|i} = (1+i)^{-t}((1+i)^{-1} + (1+i)^{-2} + \ldots + (1+i)^{-n})$$

según (F.53), tenemos:

$$t/a_{\overline{n}|i} = (1+i)^{-t}a_{\overline{n}|i} \qquad (F.138)$$

Si sustituimos F.138 en (1), tenemos:

$$A = R(1+i)^{-t}a_{\overline{n}|i} \qquad (F.139)$$

por lo tanto si la renta anual es de \$1.-, se tiene:

$$A = (1+i)^{-t}a_{\overline{n}|i} \qquad (F.140)$$

(el factor $(1+i)^{-t}$ lo encontramos en tablas financieras a las que hacemos referencia en la introducción, buscando la forma V^n, pues $(1+i)^{-n} = V^n$)

según F.54 y F.138, tenemos:

$$t/a_{\overline{n}|i} = (1+i)^{-t} \times \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

y desarrollando tenemos:

$$t/a_{\overline{n}|i} = \frac{(1+i)^{-t} - (1+i)^{-n-t}}{i}$$

sumando cero, es decir 1-1=0, tenemos:

$$t/a_{\overline{n}|i} = \frac{(1+i)^{-t} - (1+i)^{-(n+t)} + 1 - 1}{i}$$

conmutando los términos del numerador:

$$= \frac{1-(1+i)^{-(n+t)} - 1 + (1+i)^{-t}}{i}$$

$$= \frac{1-(1+i)^{-(n+t)}}{i} - \frac{1-(1+i)^{-t}}{i}$$

observamos que:

$$t/a_{\overline{n}|\,i} = a_{\overline{n+t}|\,i} - a_{\overline{t}|\,i} \qquad \text{(F.141)}$$

y sustituyendo (F.141) en (1), tenemos:

$$A = R(a_{\overline{n+t}|\,i} - a_{\overline{t}|\,i}) \qquad \text{(F.142)}$$

y si la renta anual es de \$1.=, tenemos:

$$A = a_{\overline{n+t}|\,i} - a_{\overline{n}|\,i} \qquad \text{(F.143)}$$

Ejemplo:

1. Un puente recién construido no necesitará reparación hasta finalizar el 5o. año y se estima se requerirán \$300000.= para reparaciones cada fin de año durante los 17 años posteriores, ¿cuánto deberá invertirse ahora en el banco para mantener dicho puente, si la tasa que otorga es del 15% anual?

DATOS	FORMULA	SUSTITUCION
t = 5	$A = R(1+i)^{-t} a_{\overline{n}|\,i}$	$A = 300000(1.15)^{-5} a_{\overline{17}|.15}$
R = 300000		
n = 17	$A = R(a_{\overline{n+t}|\,i} - a_{\overline{n}|\,i})$	$= 300000(0.497177) \times (6.04716)$
i = .15		$A = 901952.6602$

Ejercicios:

1. ¿Cuál es el valor presente de una serie de pagos de \$5070.= que se efectuan desde el final del 3er. año y al final de cada año, que trabajan a una tasa del 8% anual efectivo durante los 7 años posteriores? R. \$20954.21.
2. Determinar la cantidad a invertir el día de hoy para que a partir del inicio del 4o. año se reciba del banco una cantidad de \$7500.= al final de cada año hasta el final del 11o. año si la tasa es del 9% anual efectivo. R. \$26741.03.

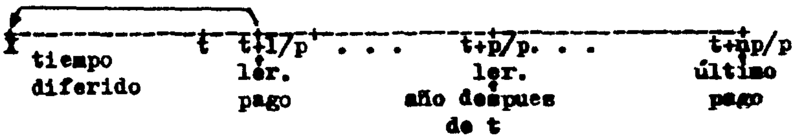
12.1 Valor Presente de una Anualidad Cierta Ordinaria Diferida Durante t años de una Unidad Monetaria por año pagadera en p pagos al año durante n años a una Tasa de Interes Nominal convertible m veces al año.

Supongamos que por cada año pagamos la renta R y que en cada año hay p períodos de pago, es decir, para reunir en un año la cantidad R, en cada p-ésimo de año se paga (R/p) existiendo m períodos al año en que se convierte la tasa.

De acuerdo a F.20 que es $C=S(1+i')^{-mn}$, el valor actual de S donde n es en años el momento en que se efectua el pago y a su vez es el tiempo que ha transcurrido a partir del inicio del plazo de la anualidad después de un tiempo diferido t el 1er. pago o cantidad R/p tiene como valor presente valuado desde el final del 1er. período del 1er. año que ha transcurrido después del tiempo t, hasta el inicio del tiempo t, es:

$$\frac{R}{p}(1+i')^{-m(t+1/p)}$$

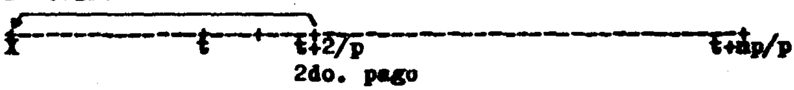
es decir el tiempo transcurrido a partir del inicio es:



para el 2do. pago de R/p, el tiempo transcurrido desde X es t años mas 2/p de año (t+2/p) y su valor actual sería:

$$\frac{R}{p}(1+i')^{-m(t+2/p)}$$

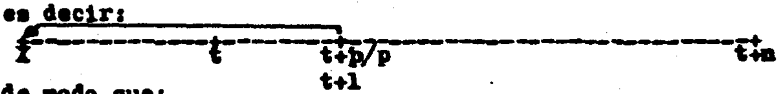
es decir:



así al final del 1er. año el valor presente del p-ésimo pago es:

$$\frac{R}{p}(1+i')^{-m(t+p/p)}=\frac{R}{p}(1+i')^{-m(t+1)}$$

es decir:



de modo que:
al final del 2do. año el valor presente del 2p-ésimo pago es:

$$\frac{R}{p}(1+i')^{-m(t+2p/p)}=\frac{R}{p}(1+i')^{-m(t+2)}$$

así al final del n-1-ésimo año el valor actual es:

$$\frac{R}{p}(1+i')^{-m(t+(n-1)p/p)}=\frac{R}{p}(1+i')^{-m(t+n-1)}$$

y al final del n-ésimo año el valor actual correspondiente es:

$$\frac{R}{p}(1+i')^{-m(t+np/p)}=\frac{R}{p}(1+i')^{-m(t+n)}$$

Como vimos en 12.0 el valor presente de la anualidad cierta ordinaria diferida es la suma de los valores presentes de todos los pagos hechos al final de cada período dentro del plazo de la anualidad, descontados al inicio del tiempo diferido; denotando a dicha suma con la letra A y factorizando R de cada pago:

$$A=R\left(\frac{1}{p}(1+i')^{-m(t+\frac{1}{p})}+\frac{1}{p}(1+i')^{-m(t+\frac{2}{p})}+\dots+\frac{1}{p}(1+i')^{-m(t+n-1)}+\frac{1}{p}(1+i')^{-m(t+n)}\right)$$

$$A = R\left(\frac{1}{p}(1+i')^{-mt-\frac{m}{p}} + \frac{1}{p}(1+i')^{-mt-\frac{2m}{p}} + \dots + \frac{1}{p}(1+i')^{-mt-mn+m} + \frac{1}{p}(1+i')^{-mt-mn}\right)$$

Asignando el simbolo $t/a_{\overline{n}|i}^{(p)}$. al 2do. factor del 2do. miembro de la ecuación, tenemos:

$$t/a_{\overline{n}|i}^{(p)}. = \frac{1}{p}(1+i')^{-mt-\frac{m}{p}} + \frac{1}{p}(1+i')^{-mt-\frac{2m}{p}} + \dots + \frac{1}{p}(1+i')^{-mt-mn+m} + \frac{1}{p}(1+i')^{-mt-mn}.$$

es decir:

$$A = R\ t/a_{\overline{n}|i}^{(p)}. \qquad (1)$$

aplicando las leyes de exponentes (cap.20) y al factorizar $(1+i')^{-mt}$, tenemos:

$$t/a_{\overline{n}|i}^{(p)}. = (1+i')^{-mt}\left(\frac{1}{p}(1+i')^{-\frac{m}{p}} + \frac{1}{p}(1+i')^{-\frac{2m}{p}} + \dots + \frac{1}{p}(1+i')^{-mn+m} + \frac{1}{p}(1+i')^{-mn} \right).$$

y de acuerdo a (F.63), tenemos:

$$t/a_{\overline{n}|i}^{(p)}. = (1+i')^{-mt} a_{\overline{n}|i}^{(p)}. \qquad (F.144)$$

y sustituyendo (F.144) en (1), tenemos:

$$A = R(1+i')^{-mt} a_{\overline{n}|i}^{(p)}. \qquad (F.145)$$

según (F.64), tenemos:

$$A = \frac{R}{p}(1+i')^{-mt} \times \frac{1-(1+i')^{-mn}}{(1+i')^{m/p}-1} \qquad (F.146)$$

si la renta anual es de \$1.=, tenemos:

$$A = (1+i')^{-mt} a_{\overline{n}|i}^{(p)}. \qquad (F.147)$$

(el factor $(1+i')^{-mt}$ lo encontramos en tablas financieras a las que hacemos mención en la introducción buscando la forma v^n ya que $(1+i)^{-n} = v^n$, otra forma de obtenerlo es en base a logaritmos (cap.20) o mediante el desarrollo del binomio (cap.21) o usando calculadora con exponente.

Para los casos particulares de una anualidad cierta ordinaria diferida, debemos multiplicar por el factor $(1+i')^{-mt}$ a la *fórmula* correspondiente de la sección 8.3.1

según indica la fórmula F.144, ver formulario.

Ejemplos:

1. Determinar el valor presente de una serie de pagos de $8200 que se efectuan desde el final del 6o. año y al final de cada semestre durante los 5 años posteriores, a una tasa del 4% capitalizable cada 4 meses.

DATOS

$t = 6$
$p = 2$
$n = 5$
$R=8200x2=16400$
$m = 3$
$i^{(3)}=.04$
$i'=.04/3=.01333$

FORMULA

$$A= \frac{R}{p}(1+i')^{-mt} x \frac{1-(1+i')^{-mn}}{(1+i')^{m/p}-1}$$

SUSTITUCION

$$A=\frac{16400}{2}(1.0133)^{-3x6} x \left(\frac{1-(1.0133)^{-3x5}}{(1.0133)^{3/2}-1}\right)$$

$$A=8200x0.7878763832x\frac{0.180186494}{0.020066519}$$

$$\underline{A=58012.57319}$$

2. Una señora quiere que su sobrina que acaba de cumplir 12 años reciba del banco $15000.= mensuales a partir del final del 1er. mes después de que ella cumpla 15 años, hasta los 22 años, para cubrir sus estudios, ¿cuál es el valor actual que necesita invertir, si la tasa que le otorga el banco es del 10% anual?

DATOS

$p = 12$
$R=15000x12=180000$
$t = 3$
$n = 7$
$m = 1$
$i^{(1)}=.10$
$i = .10$

FORMULA

$$A=R(1+i')^{-mt} a_{\overline{n}|i} x \frac{i}{i^{(p)}}$$

(ver 8.3.1 inciso g)

SUSTITUCION

$$A=180000(1.10)^{-12x3}$$
$$(a_{\overline{7}|.10})x$$
$$\left(\frac{.10}{.10^{(12)}}\right)$$

$$A=180000.032349x4.86842x1.0450447$$

$$\underline{A=29624.8575}$$

Ejercicios:

1. ¿Cuál es el valor presente necesario para que al final del 10o. año el banco otorge $10000.= al final de cada trimestre a partir del final del 1er. trimestre, después del 3er. año si la tasa es del 7% convertible cada 4 meses? R.$178772.03.
2. Un señor decide donar $5000.= cada fin de semestre a la cruz roja a partir del final del 1er. semestre del próximo año y durante 5 años, si la tasa de interés es del 8% semestral, ¿cuánto necesita invertir ahora en el banco? R. $37 494.91.

12.2 Cálculo del Tiempo Diferido Cuando se Conoce el Valor Presente de la Anualidad Cierta Ordinaria Diferida.

Antes de hablar del tiempo diferido mencionaremos que para obtener la renta anual o bien todos los pagos periódicos y el tiempo del plazo de la anualidad solo basta despejar adecuadamente nuestra incognita de F.146 o bien de la fórmula particul lar para el caso de m y p de que se trate ver sección 8.3.1 sin olvidar aplicar el factor $(1+i')^{-mt}$ en cada caso. El cálculo de la tasa de interés no es facil obtenerla pero el estudiante puede obtenerla para algun caso particular de la fórmula general por medio del método de interpolación (cap.17).

Bien, el nuevo caso que se presenta es obtener t, el tiempo diferido, incognita que despejaremos de:

$$A = \frac{R}{p}(1+i')^{-mt} x \frac{1-(1+i')^{-mn}}{(1+i')^{m/p}-1}$$

es decir:

$$(1+i')^{-mt} = \frac{Ap((1+i')^{m/p}-1}{R(1-(1+i')^{-mn})}$$

aplicando las leyes de los logaritmos (cap.20)

$$-mt\log(1+i') = \log(\frac{Ap((1+i')^{m/p}-1)}{R(1-(1+i')^{-mn})})$$

de donde:

$$t = \frac{(-1)\log(\frac{Ap((1+i')^{m/p}-1)}{R(1-(1+i')^{-mn})})}{m\log(1+i')}$$

Ejemplo:

1. ¿Cuál es el tiempo diferido de una anualidad cuyo plazo es de 5 años y pagos de $8200.= al final de cada semestre que trabajan a una tasa del 4% convertible cada 4 meses que corresponden a un valor actual de $58012.57.

DATOS

$n = 5$
$p = 2$
$m = 3$
$i^{(m)}=.04$
$i'=.04/3=.0133..$
$A=58012.57$
$R=8200x2=16400$

FORMULA

$$t=\frac{-1\log(\frac{Ap(1+i')^{m/p}-1)}{R(1-(1+i')^{-mn}})}{m\log(1+i')}$$

SUSTITUCION

$$t=\frac{-1\log(\frac{58012.57x2((1.0133)^{3/2}-1)}{16400(1-(1.01333)^{-3x5})})}{3\log(1.01333)}$$

$$=\frac{-1\log(\frac{116025.14x0.020066519}{16400x0.180186494})}{3\log1.01333}$$

$$=\frac{-1\log0.7878763398}{3\log1.013333}$$

$$=\frac{-1 x -0.1035419414}{3(.0057523287)} = 6.000001$$

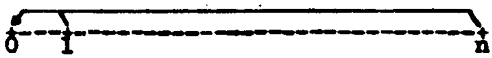
por lo tanto el tiempo diferido es de 6 años.

Ejercicio:

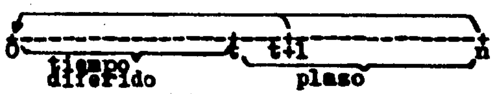
1. Determinar el tiempo que se difiere una serie de pagos de \$1750 hechos al final de cada trimestre durante 2 años y cuyo valor actual es de \$9000.- a una tasa del 4% convertible cada 4 meses. R. t=10.0008.

2.3 Relación Entre el Valor Presente de una Anualidad Ordinaria y el Valor presente de una Anualidad Ordinaria Diferida.

El valor presente de una anualidad ordinaria se valúa en el inicio del plazo de la anualidad



y el valor presente de una anualidad ordinaria diferida se valúa en el inicio del tiempo en que se difiere:



Es decir el valor actual de una anualidad ordinaria es una cantidad que se descuenta por mt períodos ya que en cada año la tasa de interés se convierte m veces, es decir aplicando la fórmula F.20 que es el valor presente de S: $C=S(1+i')^{-mn}$

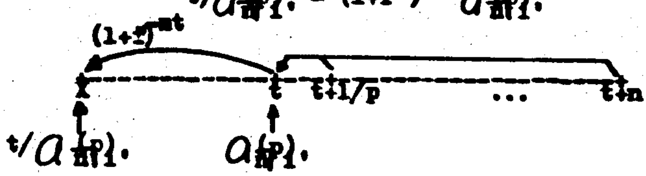
tenemos que: $C = {}_{t/}a^{(p)}_{\overline{n}|i}$.

$S = a^{(p)}_{\overline{n}|i}$.

$n = t$

es decir:

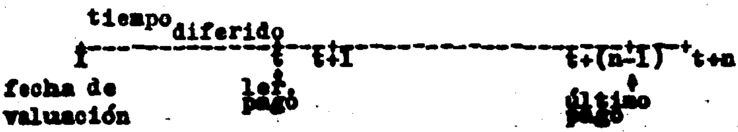
$$ {}_{t/}a^{(p)}_{\overline{n}|i} = (1+i')^{-mt} a^{(p)}_{\overline{n}|i}.$$



2.4 Valor Presente de una Anualidad Cierta Anticipada Diferida Durante t años de una Unidad Monetaria por año durante n años a una Tasa de Interés Anual Efectivo.

Acoplando la definición de valor presente de una anualidad anticipada al caso diferido, tenemos que el valor presente de una anualidad anticipada diferida es la suma de los valores presentes de todos los pagos hechos al inicio de cada período dentro del plazo de la anualidad, descontados al inicio del tiempo diferido.

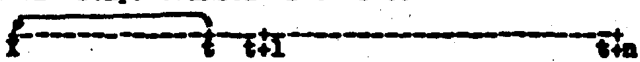
Si consideramos una anualidad anticipada diferida t años en donde R es el pago hecho al inicio de cada uno de n años e i es la tasa de interés por año y que la fecha de valuación es en el inicio (X) del tiempo diferido (t) de la anualidad tenemos:



de modo que el 1er. pago de R se hace al inicio del 1er. año después del tiempo t; para el valor presente en el momento X se aplicará el interés por t años. De acuerdo a P.20 el valor actual del 1er. pago al inicio del tiempo diferido es:

$$R(1+i)^{-(t+0)} = R(1+i)^{-t}$$

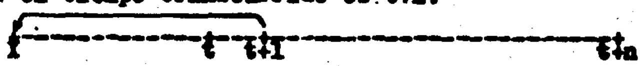
es decir el tiempo transcurrido es t:



así para el 2do. pago, el valor actual es:

$$R(1+i)^{-(t+2-1)} = R(1+i)^{-(t+1)}$$

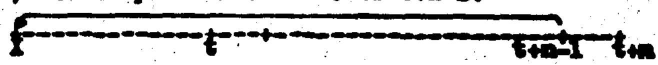
es decir el tiempo transcurrido es t+1:



para el último o n-ésimo pago el valor actual es:

$$R(1+i)^{-(t+n-1)}$$

es decir, el tiempo transcurrido es t+n-1:



Escribiendo los valores presentes anteriores, tenemos:

$$R(1+i)^{-t},\ R(1+i)^{-(t+1)},\ldots,\ R(1+i)^{-(t+n-1)}$$

Recurriendo a la definición anterior, denotamos a dicha suma con la letra A y factorizando R, tenemos:

$$A = R\left((1+i)^{-t} + (1+i)^{-(t+1)} + \ldots + (1+i)^{-(t+n-1)} \right)$$

Si denotamos al 2do. factor del 2do. miembro de la ecuación anterior con el símbolo $t/\ddot{a}_{\overline{n}|i}$, tenemos:

$$t/\ddot{a}_{\overline{n}|i} = (1+i)^{-t} + (1+i)^{-(t+1)} + \ldots + (1+i)^{-(t+n-1)}$$

es decir:

$$A = R\ t/\ddot{a}_{\overline{n}|i} \qquad (1)$$

Si factorizamos el factor $(1+i)^{-t}$ de $t/\ddot{a}_{\overline{n|}\,i}$, tenemos:

$$t/\ddot{a}_{\overline{n|}\,i} = (1+i)^{-t}(1+(1+i)^{-1}+\ldots+(1+i)^{-(n-1)})$$

según F.102, tenemos:

$$t/\ddot{a}_{\overline{n|}\,i} = (1+i)^{-t}\ddot{a}_{\overline{n|}\,i} \qquad \text{(F.148)}$$

si sustituimos F.148 en (1), tenemos:

$$A = R(1+i)^{-t}\ddot{a}_{\overline{n|}\,i} \qquad \text{(F.149)}$$

por lo tanto si la renta anual es de \$1.=, se tiene:

$$A = (1+i)^{-t}\ddot{a}_{\overline{n|}\,i} \qquad \text{(F.150)}$$

(el factor $(1+i)^{-t}$, lo encontramos en tablas financieras representado por V^n ya que $(1+i)^{-n}= V^n$, otra forma de obtener su valor es por logaritmos (cap.20) o desarrollando el binómio (cap.21) o con calculadora con exponente)

según F.104 y F.148, tenemos:

$$t/\ddot{a}_{\overline{n|}\,i} = (1+i)^{-t}(1+i) \times \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

y desarrollando tenemos:

$$= (1+i)^{-t+1} \times \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \qquad \text{(F.151)}$$

$$= \frac{(1+i)^{-t+1}-(1+i)^{-n-t+1}}{i}$$

$$= \frac{(1+i)^{-(t-1)}-(1+i)^{-(n+t-1)}}{i}$$

sumando cero 0=1-1, tenemos:

$$= \frac{(1+i)^{-(t-1)}-(1+i)^{-(n+t-1)}+1-1}{i}$$

$$= \frac{1-(1+i)^{-(n+t-1)}}{i} - \frac{1-(1+i)^{-(t-1)}}{i}$$

observamos que:

$$t/\ddot{a}_{\overline{n|}\,i} = a_{\overline{n+t-1|}\,i} - a_{\overline{t-1|}\,i} \qquad \text{(F.152)}$$

sustituyendo F.152 en (1), tenemos:

$$A = R(a_{\overline{n+t-1|}\,i} - a_{\overline{t-1|}\,i}) \qquad \text{(F.153)}$$

si la renta anual es de \$1.=, tenemos:

$$A = a_{\overline{n+t-1|}\,i} - a_{\overline{t-1|}\,i} \qquad \text{(F.154)}$$

si sustituimos F.151 en (1), tenemos:

$$A = R(1+i)^{-t+1} \times \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \qquad \text{(F.155)}$$

Ejemplo:

1. Un señor de 70 años quiere recibir del banco al inicio de cada año \$120000.= a partir del próximo año y durante 10 años si el banco le otorga una tasa de interés del 11% anual, -¿cuál es la cantidad que necesita invertir ahora?

DATOS | **FORMULA** | **SUSTITUCION**

$t = 1$
$R=120000$
$n = 10$
$i=.11$

$$A=R(a_{\overline{n+t-1}|\,i} - a_{\overline{t-1}|\,i})$$

si no se tienen tablas financieras usar F.155

$$A=120000(a_{\overline{10+1-1}|\,.11} - a_{\overline{1-1}|\,.11})$$

$$=120000\,a_{\overline{10}|\,.11}$$

$$=120000(5.88923)$$

$$A=706707.60$$

Ejercicios:

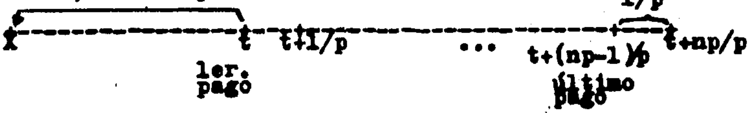
1. Determinar el valor presente de una serie de pagos de \$2000 que se efectuan desde el inicio del 5o. año y al inicio de cada año, que trabajan a una tasa del 7% anual efectivo durante los 6 años posteriores. R. \$7272.74.
2. ¿Cuál es la cantidad a invertir el día de hoy para que a partir del inicio del 6o. año se reciba del banco la cantidad de \$6125.= al inicio de cda año hasta el inicio del 9o. año si la tasa es del 10% anual efectivo? R. \$9457.86.

12.5 Valor Presente de una Anualidad Anticipada Diferida Durante t años de una Unidad Monetaria por año pagadera en p pagos al año durante n años a una Tasa de Interés Nominal Convertible m veces al año.

Supongamos que por cada año pagamos la renta R y que en cada año hay p períodos de pago, es decir, para reunir en 1 año la cantidad R, en cada p-ésimo de año (1/p) se paga (R/p) existiendo m períodos al año en que se convierte la tasa. De acuerdo a la fórmula F.20 que es $C=S(1+i)^{-mn}$ el valor actual de S, donde n es en años el momento en que se efectua el pago y a su vez es el tiempo que ha transcurrido a partir del inicio del plazo de la anualidad despues de un tiempo diferido t. El 1er. pago o cantidad R/p tiene como valor presente valuado desde el inicio del 1er. período del 1er. año después del tiempo t, hasta el inicio del tiempo t es:

$$\frac{R}{p}(1+i')^{-m(t)}$$

es decir, el tiempo transcurrido es t:



para el 2do. pago de R/p, el tiempo transcurrido desde X es t años mas 1/p de año (t+1/p) y su valor actual sería:

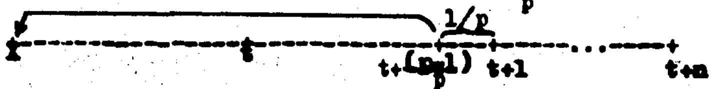
$$\frac{R}{p}(1+i')^{-m(t+1/p)}$$

es decir, el tiempo transcurrido es t+1/p:

así el valor presente del p-ésimo pago que se efectua 1/p de año antes del final del 1er. año, es:

$$\frac{R}{p}(1+i')^{-m(t+(p-1)/p)}=\frac{R}{p}(1+i')^{-mt-m+\frac{m}{p}}$$

es decir, el tiempo transcurrido es $t+1-\frac{1}{p}$:



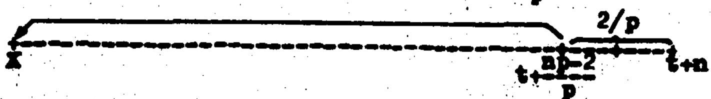
así el valor presente del 2p-ésimo pago es:

$$\frac{R}{p}(1+i')^{-m(t+\frac{2p-1}{p})}=\frac{R}{p}(1+i')^{-mt-2m+\frac{m}{p}}$$

y el valor presente del np-1-ésimo o penúltimo pago que se efectua 2/p de año antes del final del n-ésimo año,

$$\frac{R}{p}(1+i')^{-m(t+\frac{np-2}{p})}=\frac{R}{p}(1+i')^{-mt-mn+\frac{2m}{p}}$$

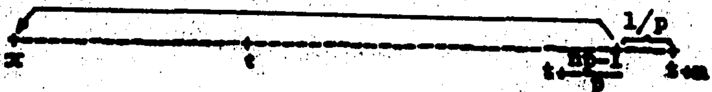
es decir, el tiempo trancurrido es: $t+n-\frac{2}{p}$



y el valor presente del np-ésimo pago que se efectua 1/p de año antes del final del n-ésimo año, es:

$$\frac{R}{p}(1+i')^{-m(t+\frac{np-1}{p})}=\frac{R}{p}(1+i')^{-mt-mn+\frac{m}{p}}$$

es decir:



Escribiendo los valores presentes anteriores, tenemos:

$$\frac{R}{p}(1+i')^{-mt},\ \frac{R}{p}(1+i')^{-mt-\frac{m}{p}},\ldots,\ \frac{R}{p}(1+i')^{-mt-mn+\frac{2m}{p}},\ \frac{R}{p}(1+i')^{-mt-mn+\frac{m}{p}}$$

Como vimos en 12.4 el valor presente de una anualidad cierta anticipada diferida es la suma de los valores presentes de todos los pagos de la anualidad y descontados al inicio del tiempo diferido, es decir, denotando a dicha suma con la letra A y factorizando R de cada pago; tenemos:

$$A = R\Big(\frac{1}{p}(1+i')^{-mt}+ \frac{1}{p}(1+i')^{-mt-\frac{m}{p}} +\ldots+ \frac{1}{p}(1+i')^{-mt-mn+\frac{2m}{p}}+ \frac{1}{p}(1+i')^{-mt-mn+\frac{m}{p}} \Big)$$

Asignando el simbolo $t/\ddot{a}^{(p)}_{\overline{n}|i'}$ al 2do. factor del 2do. miembro de la ecuación, tenemos:

$$t/\ddot{a}^{(p)}_{\overline{n}|i'} = \frac{1}{p}(1+i')^{-mt}+ \frac{1}{p}(1+i')^{-mt-\frac{m}{p}} +\ldots+ \frac{1}{p}(1+i')^{-mt-mn+\frac{2m}{p}}+ \frac{1}{p}(1+i')^{-mt-mn+\frac{m}{p}} .$$

es decir:

$$A = R\ t/\ddot{a}^{(p)}_{\overline{n}|i'} \qquad (1)$$

aplicando las leyes de los exponentes (cap.20) y al factorizar $(1+i')^{-mt}$, tenemos:

$$t/\ddot{a}^{(p)}_{\overline{n}|i'} = (1+i')^{-mt}\Big(\frac{1}{p} + \frac{1}{p}(1+i')^{-\frac{m}{p}} +\ldots+ \frac{1}{p}(1+i')^{-mn+\frac{2m}{p}} + \frac{1}{p}(1+i')^{-mn+\frac{m}{p}} \Big).$$

de acuerdo a la fórmula F.112, tenemos:

$$t/\ddot{a}^{(p)}_{\overline{n}|i'} = (1+i')^{-mt}\ \ddot{a}^{(p)}_{\overline{n}|i'} \qquad (F.156)$$

y sustituyendo F.156 en (1), tenemos:

$$A = R(1+i')^{-mt}\ \ddot{a}^{(p)}_{\overline{n}|i'} \qquad (F.157)$$

según la fórmula F.113, tenemos:

$$A = R(1+i')^{-mt}(1+i')^{m/p} \times \frac{1-(1+i')^{-mn}}{p((1+i')^{m/p}-1)} \qquad (F.158)$$

si la renta anual es de \$1.=, tenemos:

$$A = (1+i')^{-mt}\ \ddot{a}^{(p)}_{\overline{n}|i'} \qquad (F.159)$$

Para encontrar el valor del factor $(1+i')^{-mt}$ podemos buscar en tablas la forma V^n ya que $(1+i)^{-n}=V^n$, o bien mediante logaritmos (cap.20) o desarrollando el binomio (cap.21) o con ,-calculadora con exponente.

Para los casos particulares de la fórmula general del valor presente de anualidades diferidas anticipadas debemos multiplicar por el factor $(1+i')^{-mt}$ a la fórmula correspondiente de la sección 10.2.1 como indica la fórmula F.156; ver formulario.

Ejemplo#:

1. Se estima que un tractor requerirá el servicio de mantenimiento por $10000.= al inicio del 3er. año y al inicio de cada trimestre posterior durante 5 años, ¿cuánto deberá invertirse ahora para que el banco proporcione la cantidad necesaria para el servicio, si la tasa de interés trimestral es del 6%.

DATOS | FORMULA | SUSTITUCION

$t = 3$

$p = 4$

$R=10000x4=40000$

$n = 5$

$m = 4$

$i^{(4)}=.06$

$i' =.06/4=.015$

$$A=\frac{R}{p}(1+i')^{-mt}(1+a_{\overline{mn-1}|i'})$$

$$A=\frac{40000}{4}(1.015)^{-4x3}(1+a_{\overline{5x4-1}|.015})$$

$$=10000(1.015)^{-12}(1+a_{\overline{19}|.015})$$

$$=10000(0.836387)(17.42617)$$

$$=145750.2205$$

cantidad necesaria para el mantenimiento $145750.22.

2. ¿Cuánto necesita depositar una señorita que quiere viajar al final del 7o. año; para recibir $9000.= al inicio de cada mes a partir del inicio del próximo año; si la tasa que le otorga el banco es del 10% convertible semestralmente?

DATOS | FORMULA | SUSTITUCION

$p = 12$

$R=9000x12=108000$

$t = 1$

$n = 6$

$m = 2$

$i^{(2)}=.10$

$i'=.10/2=.05$

$$A=\frac{R}{m}(1+i')^{-mt}(1+i')^{m/p}a_{\overline{mn}|i'}\ x\ \frac{i'}{i'^{(12/2)}}$$

$$A=\frac{108000}{2}(1.05)^{-2x1}(1.05)^{2/12}a_{\overline{2x6}|.05}\ x\ \left(\frac{.05}{.05^{(6)}}\right)$$

$$A=54000x0.907029x1.008164846x8.86323x\frac{.05}{0.0489890763}$$

$$\underline{A=446693.1114}$$

Ejercicios:

1. Determinar el valor presente de una serie de pagos de $1750 que se efectuan desde el inicio del 3er. año y al inicio de

cada semestre, que trabajan a una tasa del 6% anual efectivo durante los 5 años posteriores. R. $12933.06.

2. ¿Cuál es la cantidad a invertir ahora para que a partir del inicio del 5o. año se reciba del banco la cantidad de $7700. al inicio de cada año hasta el inicio del 8o. año, si la tasa es del 14% semestral? R. $20451.62.

.6 Cálculo del Tiempo Diferido Cuando se Conoce el Valor Presente de una Anualidad Cierta Anticipada Diferida.

Antes de hablar del tiempo diferido mencionaremos que para obtener la renta anual o bien el valor de los pagos periódicos y el tiempo que forma el plazo de la anualidad solo basta despejar adecuadamente nuestra incognita de F.158 o bien de la fórmula particular para el caso entre m y p de que se trate (ver formulario). El cálculo de la tasa de interés no es facil (como por ejemplo una fórmula que resultára de un despeje) pero el estudiante puede obtenerla para algun caso particular de la fórmula general por medio del método de interpolación por ejemplo (cap.[illegible]).

El nuevo caso que se presenta es obtener t, el tiempo diferido, incognita que despejaremos de:

$$A = \frac{R}{p}(1+i')^{-mt}(1+i')^{m/p} \times \frac{1-(1+i')^{-mn}}{(1+i')^{m/p}-1}$$

es decir:

$$(1+i')^{-mt} = \frac{Ap((1+i')^{m/p}-1)}{R(1+i')^{m/p}(1-(1+i')^{-mn})}$$

aplicando las leyes de los logaritmos (cap.20), tenemos:

$$-mt\log(1+i') = \log\left(\frac{Ap((1+i')^{m/p}-1)}{R(1+i')^{m/p}(1-(1+i')^{-mn})}\right)$$

de donde:

$$t = \frac{(-1)\log\left(\frac{Ap((1+i')^{m/p}-1)}{R(1+i')^{m/p}(1-(1+i')^{-mn})}\right)}{m\log(1+i')} \qquad \text{(F.160)}$$

Ejemplo:

1. Determinar el tiempo en que se difiere una serie de pagos de $10000.= hechos al inicio de cada trimestre durante 5 años si el valor actual de la inversión es de $145750.22. si la tasa es del 6% trimestral.

DATOS	FORMULA	SUSTITUCION
p = 4 R=10000x4=40000 n = 5 A = 145750.22 m = 4		

$i^{(4)}=.06$ ver fórmula F.160

$i'=.06/4=.015$

$$t=\frac{(-1)\log\left(\frac{145750.22x4((1.015)-1)}{40000x1.015(1-(1.015)^{-4x5})}\right)}{4\log(1.015)}$$

$$t=\frac{(-1)\log\left(\frac{8745.0132}{10455.70102}\right)}{4\log(1.015)}$$

$$t=\frac{(-1)\log(0.8363870757)}{4\log(1.015)}$$

$$t=\frac{0.0775926868}{0.025864169}$$

$$t=3.000006$$

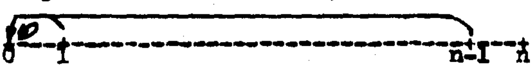
el tiempo requerido es de 3 años.

Ejercicio:

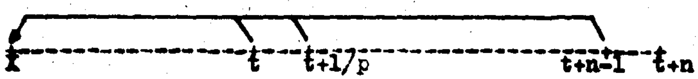
1. Determinar el tiempo que se difiere una serie de pagos de \$2930.= hechos al final de cada semestre durante 3 años y cuyo valor actual es de \$11500.= a una tasa del 5% convertible semestralmente. R. t = 7.36 o bien 7 años 129 días.

2.7 Relación Entre el Valor Presente de una Anualidad Cierta Anticipada y el Valor Presente de una Anualidad Cierta Anticipada Diferida.

El valor presente de una anualidad anticipada se valúa en el inicio del plazo de la anualidad;



y el valor presente de una anualidad anticipada diferida se valúa en el inicio del tiempo que se difiere;

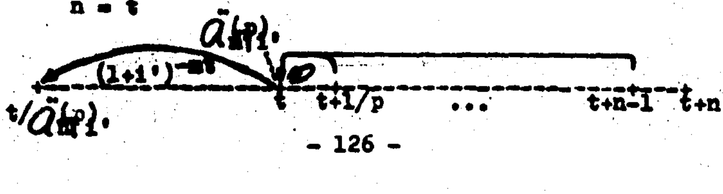


Es decir el valor actual de una anualidad anticipada diferida es una cantidad que se descuenta por mt períodos ya que en cada año la tasa de interés se convierte m veces, es decir aplicando la fórmula (F.20) que es el valor presente de S, - $C = S(1+i')^{-mn}$, tenemos que:

$C = t/\ddot{a}^{(p)}_{\overline{n|}i}$

$S = \ddot{a}^{(p)}_{\overline{n|}i}$ $\qquad t/\ddot{a}^{(p)}_{\overline{n|}i} = (1+i')^{-mt}\ddot{a}^{(p)}_{\overline{n|}i}$

$n = t$



13 DEPRECIACION

3.0 Concepto de Depreciación.

Depreciación es la disminución o rebaja del precio o valor de un objeto.

Así, una máquina de escribir electrica se deprecia cada año como consecuencia de su uso.

3.1 **Depreciación de Activos Fijos.**

Depreciación de activos fijos es la disminución del valor o precio que se refiere a inversiones permanentes como consecuencia de su uso, como la inversión de un terreno para maquinaria

Definición de Términos:

Fondo para Depreciación.

Es una reserva que sirve para sustituir alguna inversión permanente (activo fijo: Equipos de oficina, de transporte, edificios, etc.) por el desgaste sufrido al través del tiempo.

Cargos por Depreciación.

Son las cantidades provenientes de las utilidades, destinadas a formar el fondo para depreciación.

Costo.

Es el valor del activo físico desde el instante en que se compra.

Valor de Desecho.

Es el valor del activo físico después de su uso.

Depreciación Total.

Es la diferencia del valor original del activo físico y el valor al final de su uso.

Valor en Libros.

Valor en libros de un activo fisico es la diferencia del valor original del activo físico y lo acumulado para sustituir dicho activo.

C = Costo
VD = Valor de desecho
D = Depreciación total
F = Fondo por depreciación
CD = Cargos por depreciación
L = Valor en libros
así:

$$D = C - VD \qquad (F.161)$$

$$CD = \frac{D}{\text{Vida probable del activo físico}} = \frac{D}{VP} \qquad (F.162)$$

$$L = C - F \qquad (F.163)$$

Ejemplos:

1. Una camioneta de reparto tuvo un costo de $115000.= y despues de su uso vale $53650.=, ¿cuál es su depreciación?

DATOS	FORMULA	SUSTITUCION
C = 115000 VD=53650	D = C-VD	D=115000-53650 =61350

2. En base a los datos de contabilidad despues de 3 años se tuvo reservada la cantidad de $16000.= para la nueva compra de un escritorio; el escritorio antiguo costo $18500.= y ahora al cabo del 4o. año se tiene reservado $17500.=, ¿cuál es el valor en libros al final de los 3 años y cuál al final del 4o. año?

DATOS	FORMULA	SUSTITUCION
C = 18500		
F_1=16000	$L_1 = C-F_1$	$L_1 = 18500 - 16000$
F_2=17500	$L_2 = C-F_2$	$L_2 = 18500 - 17500$
		$L_1 = 2500$
		$L_2 = 1000$

3. La vida probable de un torno es de 39555 horas cuya depreciación ya es de $15200.=, ¿de cuánto fue la depreciación en las primeras 25 horas?

DATOS	FORMULA	SUSTITUCION
VP = 39555 D = 15200	para el cargo por depreciación en una hora:	CD = $\frac{39555}{15200}$---
	$CD = \frac{D}{VP}$	=2.6023026
	depreciación por horas	D =(2.6023026)(25) =65.0575
	D = CD x hrs.	

$65.06 fue la depreciación de las 25 primeras horas

Ejercicios:

1. El valor de desecho de una computadora es de $212999.=, la cuál costo $2513339, ¿cuál es su depreciación? R. $300340.
2. El departamento de contabilidad indica que se tiene reservado $999000.= para una base de datos, ¿cuál será el valor e en libros si la base de datos anterior costo $1890000.=. R. $991000.=.
3. La vida probable de una impresora es de 15040 hrs. de trabajo , la cuál tiene una depreciación de $12630.=, ¿cuál es el cargo por depreciación por hora de trabajo? R.$.83976.

14 PRORRATEO DE FACTURAS

14.0 Concepto.

El prorrateo de facturas consiste en determinar el costo de las unidades de mercancia compradas según facturas, siempre que se conozca el precio de compra total y el valor de los gastos originados por las mismas.

Definición de Términos:

Peso Neto.

Es el que tienen las mercancias sin incluir sus empaques.

Peso Bruto.

Es el que tienen las mercancias incluyendo su empaque.

Gastos al Peso.

Son aquellos que se calculan en base al peso bruto de la mercancia.

Gastos al Valor.

Son aquellos que se calculan en base al precio de compra de la mercancia.

14.1 Calculo del Costo Unitario de Mercancias por Medio del Prorrateo de Facturas.

Mediante ejemplos harémos los calculos usando los términos anteriores.

1. Se compró según factura A-128, 1500Kg. de frijol a $3.20 el kg y se pagó por empaque $60.= y por acarreo $80.=, ¿cuál será el costo de un kilogramo de frijol incluyendo sus gastos?

Precio de compra: 1500x3.20 = 4800
Gastos: 60+80=140
Costo total: 4800 + 140 = 4940
Costo total por kilogramo de frijoles:

$$\frac{\text{Costo total}}{\text{Total de Kg}} = \frac{4940}{1500} = 3.29$$

Es decir, un kilogramo de frijol costará en total $3.29 ya que el gasto de empaque y acarreo por kilogramo fue de $.09 que es la diferencia entre el costo total por kilogramo y el costo inicial, es decir: 3.29-3.20=0.09.

2. Se compró según factura A-1512,3500 litros de leche a $6.= el litro, el pago por empaque fue de $850.= y el pago por transporte fue de $150.=, ¿cuál fue el costo y gasto total por litro de leche?

Precio de compra: 3500x6=21000
Gastos: 850+150=1000
Costo total: 21000+1000=22000
Costo total por kilogramo de leche:

$$\frac{\text{Costo total}}{\text{total de litros}} = \frac{22000}{3500} = 6.2857$$

es decir, el costo por litro fue de $6.2857

Gasto al peso (por litro) - Gasto al valor =

6.2857 - 6.00000 = 0.2857

Ejercicios:

1. Se tiene una factura A-215, por la cantidad de 181 litros de gasolina donde se pagó a $3.= el litro, se pagó por transporte $55.=; por diversos gastos $155.=, ¿cuál fue el costo y el gasto total por litro? R. costo=4.1602209, gasto=1.1602209.
2. Una factura por calcetines marca X, número 112, tiene la cantidad de 1200 pares cuyo costo del par es de $23.50, se pagó por transporte $165.= por empaque $200.=, ¿cuál es el costo total de un par de calcetines? R. $23.804166.

15 RAZONES

15.0 Razón o Relación.

Es razón o relación, la comparación de dos cantidades de la misma especie.

términos: Antecedente - Cantidad que se compara.
Consecuente - Cantidad con la que se compara.

Clases de razón: Aritmética y Geométrica.

15.1 Razón por Diferencia o Aritmética.

Es el excedente de una cantidad sobre otra, ambas homo - geneas.

Ejemplo: La razón aritmética de 10 litros de gasolina a 9 litros de gasolina, es un litro de gasolina.

15.2 Razón por Cociente o Geométrica.

Es el resultado de dividir dos cantidades homogéneas que nos dice cuántas veces la una contiene o está contenida en la otra.

Ejemplo: La razón geométrica de 90m y 10m es 9m.

Observación: El consecuente es 10m y representa tambien la unidad de medida.

se expresa 90/10 o 90:10 y se lee 90 es a 10.

15.3 Propiedad Fundamental de las Razones.

Una razón no cambia cuando se multiplican o dividen sus dos términos por un mismo número.

Siendo a/b la expresión general de la razón entre 2 números a y b, la propiedad anterior se expresa, representando por m un número arbitrario:

$$\frac{a \times m}{b \times m} = \frac{a}{b} \qquad \text{(F.164)}$$

Ejercicios:

1. Dos personas tienen dinero en el banco, una tiene \$10000.- y otra \$9889.95, ¿cuáles son las razones aritmética y geomé trica? R. arit.110.5 y geo.1.0111274.
2. En una librería cierto libro cuesta \$3000.- y el mismo libro en otra librería cuesta \$3400.-, ¿cuáles son las razones aritmética y geométrica? R. arit.400 y geo. 0.8823529.

16 PROPORCIONES

16.0 Proporción.

Una proporción es un par de razones cuyo valor es igual; es decir, es de la forma:

$$\frac{m}{n} = \frac{p}{q} \qquad \text{(F.165)}$$

tambien $m:n = p:q$; $m:n :: p:q$

donde m y p son los antecedentes
n y q son los consecuentes
m y q son los extremos
n y p son los medios

16.1 Propiedad Fundamental de las Proporciones.

En toda proporción el producto de los extremos es igual al producto de los medios.

De la expresión $m/n = p/q$ la propiedad se expresa por la igualdad:

$$mq = np \qquad \text{(F.166)}$$

De tal propiedad se desprenden las siguientes reglas prácticas para el cálculo de un término de la proporción:

$$m = \frac{np}{q}\ ,\quad n = \frac{mq}{p}\ ,\quad p = \frac{mq}{n}\ ,\quad q = \frac{np}{m}$$

Ejemplo:

1. Despejar el valor de z en las siguientes proporciones:

$$\frac{r+1}{z} = \frac{t}{k} \qquad y \qquad \frac{r}{e} = \frac{z}{t+1}$$

de la propiedad fundamental de la proporción:

$$(r+1)k = tz \qquad y \qquad r(t+1) = ze$$

dividiendo entre t y e respectivamente:

$$z = \frac{(r+1)k}{t} \qquad z = \frac{r(t+1)}{e}$$

observación; los pasos anteriores explican tambien la forma de llegar a las reglas antes mencionadas.

Ejercicio:

1. Despejar z de: $\frac{2z}{mx} = \frac{m}{x}$; R. $z=m^2/2$.

16.2 Proporciones Directas Simples.

Se dice que la variable y es directamente proporcional a la variable x si la razón de dos valores correspondientes cualesquiera de x y y es constante, es decir:

si $\frac{y}{x} = k$ donde k es llamada constante de proporcionalidad

$$o\ y = kx \qquad (F.167)$$

donde y siempre será distinto de x por k unidades. si x aumentara de valor, y aumentaría k veces ese incremento de x y viceversa.

Algunas magnitudes directamente proporcionales son:

1. El valor de una mercancia y el número de unidades de la misma.
2. La longuitud de una circunferencia y su radio.
3. El número de obreros y la cantidad de trabajo que realizan.
4. El interés de un capital y el tiempo en que se impone.
5. El descuento asignado a cierto precio de un producto.

Ejemplo:

1. El kilo de tortillas cuesta $80.=, si compramos $357.= de tortilla, cuántos kilos de tortilla obtenemos?
   - por F.165, tenemos:

1Kg es a $80.= como p kg son a $357.=

$$1:80 :: p:357$$

$$1/80 = p/357$$

por F.166, tenemos:

$$p(80) = 357(1)$$

así obtenemos un equivalente de F.167:

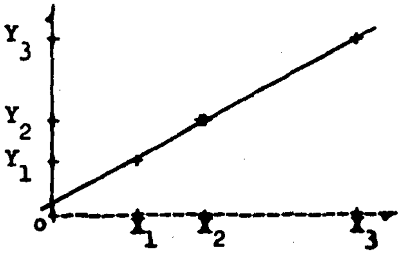
$$p = \frac{357}{80} = 4.4625$$

Ejercicios:

1. 3000g de camarón seco cuestan $7500.=, ¿qué precio tienen 255g? R. $637.50.
2. Un trabajador hace 3 moldes metálicos en 2.5 horas, ¿cuántos moldes harán 7 trabajadores en el mismo tiempo? R. 21.
3. 250g de queso cuesta $610.=, cuánto cuestan 80g? R. $195.20

16.3 Gráfica de la Proporción Directa Simple.

Como se mencionó en 16.2 para cualquier valor de x e y, la relación entre éstas variables es k cuando y es directamente proporcional a x; lo explicaremos en la siguiente gráfica:



de donde:

$$Y_2 - Y_1 = Y$$
$$X_2 - X_1 = X$$

y

$$Y_3 - Y_1 = Y_o$$
$$X_3 - X_1 = X_o$$

recordando el concepto de pendiente de Geometría Analítica, tenemos que la pendiente es la razón de crecimiento de la variable y con respecto a x, la cuál es la misma para cualquier par de puntos, y de lo anterior tenemos que:

$$\frac{Y}{X} = \frac{Y_o}{X_o}$$

cosa que nó sucede en algo como:

en donde para variaciones de la variable x, hay cambios muy grandes en y y y/x no es constante.

Ejemplo:

1. Una tonelada de carne es almacenada en un espacio de $80cm^3$, así X toneladas serán almacenadas en Y cm^3.

1 es a 80 como X es a Y

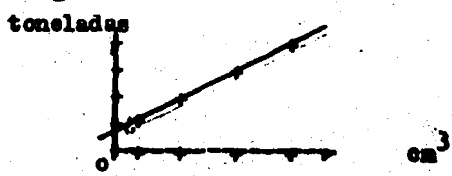
$$\frac{1}{80} = \frac{x}{y}$$

de donde:

$$y = \frac{(80)(x)}{1} = 80x$$

así:

x	y=80x
1	80
2	160
3	240
3.5	280



así 4 toneladas de carne se almacenarían en $80(4)=320 cm^3$.

Ejercicios:

1. ¿Cuál es la expresión de Y con respecto a X, si X representa el tiempo y Y el número de vuelos promedio del aeropuerto de la ciudad de México, cuando en 1 hora hay en promedio 18 vuelos? R. 18x.
2. Graficar la razón de crecimiento del número de alumnos que ingresan a primaria respecto al número de escuelas que se constituyen en México, dado que por escuela ingresa en promedio 170 alumnos.

6.4 Proporciones Inversas Simples.

Se dice que la variable y es inversamente proporcional a la variable x, si y es directamente proporcional al recíproco de x es decir aplicando (F.167), tenemos:

$$\frac{y}{1/x} = k \qquad \text{(F.168)}$$

es decir:

$$yx = k \qquad \text{(F.169)}$$

En el cociente $y=k/x$, si aumenta x, y disminuye por ser k constante, pero si x disminuye, y aumenta.

Ejemplos:

1. Si $x=10$, $k=35$ entonces $y=3.5$; $y=\frac{35}{10}$

   pero si $x=20$, $k=35$ entonces $y=35/20=1.75$ disminuye

   pero si $x=5$, $k=35$ entonces $y=35/5 = 7$ aumenta
2. Una llave llena cierto deposito en 3 minutos, ¿en cuánto tiempo se llenará el deposito con 2 llaves.

   por (F.168)

$$3:1 :: y: \frac{1}{2(=x)}$$

$$\frac{3}{1} = \frac{y}{1/2}$$

por (F.166), tenemos:

$$3(1/2) = y(1)$$

es decir:

$$y = 3/2 = 1.5 \text{ minutos}$$

Ejercicios:

1. Un ordeñador obtiene 20 litros de leche en 5 minutos, ¿en cuánto tiempo obtendrán la misma cantidad de leche 3 ordeñadores? R. 1.666 minutos.
2. Una refinería produce 2000 litros de aceite en 1.5 horas, ¿en cuánto tiempo producirán 4 refinarías los 2000 litros de aceite? R. .375 hrs. o bien 22.5 minutos.

6.5 Gráfica de la Proporción Inversa Simple.

En el caso de una proporción inversa simple, tenemos que; a valores menores de la variable x (independiente) le corresponden valores mayores de y (variable que depende de x) y vice - versa; lo cuál lo veremos en el siguiente caso:

Supongamos que una incubadora encoba 250 huevos de pollo en 5 horas y nos preguntamos ¿en cuánto tiempo encobarán 6 incubadoras, la misma cantidad de huevos?

- tenemos:

5 horas es a 1 maquina, como
y horas son 6 máquinas

$$\frac{5}{1} = \frac{y}{1/6} \qquad \text{por} \quad (F.168)$$

$$y(1) = 5(1/6) \qquad \text{por } (F.166)$$

$$y = \frac{5}{6} \text{ de hora}$$

(usando proporciones directas simples, tenemos:

60 minutos son a 1 hora, como
z minutos son a 5/6 de hora

$$\frac{60}{1} = \frac{z}{5/6} \qquad z = 50 \text{ minutos}$$

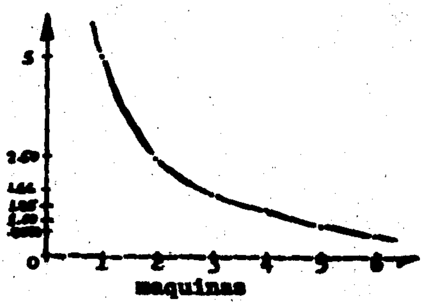
$$x(1) = 60(5/6)$$

por lo tanto y = 50 minutos.

Si el número de máquinas varía, tenemos:

$$y = \frac{5}{x}$$

# de maq. x	$y=\frac{5}{x}$ de hora
1	5
2	5/2 = 2.50
3	5/3 = 1.66
4	5/4 = 1.25
5	1 hora
6	5/6



Ejercicios:

1. Graficar los ejercicios de (16.4).

6.6 Tanto por Ciento.

Tanto por ciento indica la relación que hay entre una cier-

1o.6 Tanto por Ciento.

Tanto por ciento indica la relación que hay entre una cierta cantidad de unidades con respecto a 100 unidades. Resulta ser una razón geométrica en la que el consecuente o unidad de medida es 100.

Ejemplo: $9\% = \frac{9}{100} = 0.09$ $\qquad 10\% = \frac{10}{100} = \frac{1}{10} = 0.10$

Partiendo de la proporción:

$$\frac{\text{Tanto por ciento}}{100} = \frac{\text{Porcentaje}}{\text{Base}} \qquad \text{(F.170)}$$

donde la relación del tanto por ciento y cien, es la misma que existe entre el porcentaje y la base; y donde:

T = Tanto por ciento es la cantidad que se considera por cada 100 unidades.
B = Base es la cantidad total con la que se compara.
P = Porcentaje es la cantidad que representa el tanto, respecto a B.
Monto es la suma de P y B.
Diferencia es la resta de B menos P.

16.7 Porcentaje.

Porcentaje es el cociente que resulta de el producto de la cantidad que se toma por cada 100 unidades y la cantidad con la que se compara:

$$P = \frac{TB}{100} \qquad \text{(F.171)}$$

Ejemplos:

1. ¿cuánto importa el 12% de $450.=?
   - resolución por proporciones:

     100 es a 12 como 450 es a X

     $$\frac{100}{12} = \frac{450}{X} \; ; \; X = \frac{450 \text{x} 12}{100} = 54 \qquad \underline{X=54}$$

   - resolución por fórmula:

     $$\frac{T}{100} = \frac{12}{100} = 12\%$$

     $B = 450$

     por (F.171)

     $$P = \frac{12 \text{ x } 450}{100} = 54 \qquad \underline{P = 54}$$

2. A un mayorista el kilo de azucar le costó $95.=, pero el lo vende a $120.=, ¿cuál es el tanto por ciento que gana en cada kilo?

DATOS	FORMULA	SUSTITUCION
B = 95 P = 120	$\frac{T}{100} = \frac{P}{B}$	

$$T = \frac{P(100)}{B} \qquad T = \frac{120(100)}{95}$$

$$= 126.31579$$
$$= 126.32$$

T nos indica el tanto que es $120.= de $95.=, que es el 126.32% en donde el 100% son los $95.00 del costo y el 26.32% restante representa la ganancia por kilo que en pesos es de $25.=, es decir:

el tanto por ciento de ganancia por kilo es de 26.32% (126.32-100)

3. Al comprar un boleto en la Cineteca Nacional nos hacen un descuento del 40% sobre el precio del boleto, el cuál cuesta $120.= para la pelicula que preferimos, ¿cuánto nos descuentan?

DATOS	FORMULA	SUSTITUCION
B = 120		
P = ?	$P = \frac{TB}{100}$	$P = \frac{40 \times 120}{100}$
T = 40		P = 48

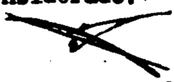
el descuento es de $48.=

Ejercicios:

1. ¿Cuál es el capital cuyo 24% es $480.=? R. $2000.=
2. ¿Qué tanto por ciento representa $60.= de $300.=? R. 20%
3. ¿Cuál es la cantidad que representa el 17% de $250.=? R. $42.5.
4. El aguinaldo de un empleado es de $20000.= y es el 52% de su sueldo mensual, ¿cuál es el sueldo mensual? R. $38461.54.
5. ¿Cuánto obtendrá de interés un joven al final de 1 año, si invirtió $30000.= a una tasa del 25%? R. $7500.=.
6. Un mueble tiene marcado un precio de $23215.= y al comprar el mueble nos cobran en total $26000.=, ¿qué tanto por ciento nos cobran de impuesto? R. 11.996%.

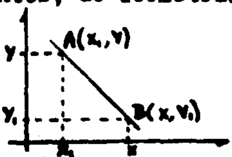
17 INTERPOLACION LINEAL

El método de interpolación lineal es un método de aproximación. Está fundado em la hipótesis de que un arco pequeño de una curva continua puede sustituirse por un segmento rectilineo sin introducir un error apreciable. Naturalmente esto es solo una aproximación, pero tiene la ventaja de que es posible mejorarla disminuyendo la longuitud del arco considerado.



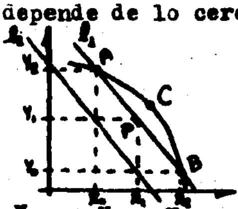
[illegible] de aproximación

Para explicar el método recurramos al concepto de la recta que pasa por 2 puntos, de Geometría Analitica:



la pendiente de la recta está dada por $m = \dfrac{y-y1}{x-x1}$

En la siguiente gráfica, lo que pretendemos conocer es el valor de la ordenada o de la abscisa del punto C que es intermedio en la curva, la aproximación depende de lo cerca que esten los puntos A y B del punto C



$$m = \frac{y_2 - y_0}{x_2 - x_0} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$ ya que l_1 y l_2 tienen la misma pendiente m; de aquí podemos despejar el valor desconocido y_1 o x_1.

los valores conocidos son valores que encontramos en tablas financieras; representaremos las ordenadas y las abscisas de la siguiente manera:

$$A \begin{bmatrix} y_2 \\ \left.\begin{matrix} y_1 \\ y_0 \end{matrix}\right] C \end{bmatrix} \qquad D \begin{bmatrix} x_2 \\ \left[\begin{matrix} x_1 \\ x_0 \end{matrix}\right. \end{bmatrix} B \qquad \text{(F.172)}$$

$$m = \frac{A}{B} = \frac{C}{D}$$

donde: $A = y_2 - y_0$ $\quad C = y_1 - y_0$

$B = x_2 - x_0$ $\quad D = x_1 - x_0$ (F.173) si queremos el valor de y_1, escribiremos:

$$C = \frac{A\ D}{B}$$

$$C = y_1 - y_o = \frac{(y2 - y_o)(x_1 - x_o)}{x_2 - x_o}$$

de donde:

$$y_1 = \frac{(y_2 - y_o)(x_1 - x_o)}{x_2 - x_o} + y_o \qquad (F.174)$$

analogamente para el valor de x_1, tenemos:

$$x_1 = \frac{(x_2 - x_o)(y_1 - y_o)}{y_2 - y_o} + x_o \qquad (F.175)$$

Así, cuando no encontremos un valor exacto para nuestra incognita, tendrémos que calcularlo en base a los valores más proximos conocidos, usando el método de interpolación lineal.
En el caso de esta tesis se usará para encontrar el valor de n o de i en la expresión $(1+i)^n$ que se encuentra en tablas financieras a las que hacemos referencia en la introducción.

18 PROGRESION ARITMETICA

18.0 Razón Aritmética.

Como sedijo anteriormente, la razón aritmética es el resultado de comparar por diferencia dos magnitudes de la misma especie; a esta diferencia haremos referencia en esta sección.

18.1 Progresión Aritmética.

Progresión aritmética es un conjunto ordenado de números tal que cada uno de los términos posteriores al primero se obtiene añadiendo al término anterior un múmero fijo llamado diferencia de la progresión.

18.2 Cálculo de la Progresión Aritmética.

De acuerdo con la definición, una progresión artimética puede escribirse en la forma:

$$X_1,\ X_1+d,\ X_1+2d,\ X_1+3d,\ \ldots,\ X_1+nd, \qquad (1)$$

donde X_1 es el primer término y d es la diferencia entre término y término.

Es decir, para construir una progresión aritmética necesitamos conocer el término inicial y la diferencia que nos llevará a obtener el n-ésimo término adicionandola al término anterior.

18.3 Fórmula para el Cálculo del n-ésimo Término de una Progresión Aritmética.

De la sucesión (1) vemos que añadiendo d a X_1 obtenemos el segundo término que es:

$$X_2 = X_1 + d$$

el 3er. término es: $X_3 = X_1 + 2d$

el 4to. término es: $X_4 = X_1 + 3d$

y en general el n-ésimo término es: $X_n = X_1 + (n-1)d$

(F.176)

18.4 Deducción de la Fórmula para el Cálculo de la Suma de los n -Primeros términos de una Progresión Aritmética.

Obtendremos una expresión para la suma S_n, de los n-primeros términos de la sucesión (1), es decir;

$$S_n = X_1 + (X_1+d) + (X_1+2d) + \ldots + (X_n-2d) + (X_n-d) + X_n \qquad (2)$$

Escribiendo los términos del 2do. miembro de (2) en orden inverso, tenemos:

$$S_n = X_n + (X_n-d) + (X_n-2d) + \ldots + (X_1+2d) + (X_1+d) + X_1 \qquad (3)$$

sumando miembro a miembro (2) y (3), tenemos:

$$2S_n = (X_1+X_n)+(X_1+X_n)+(X_1+X_n)+\ldots+(X_1+X_n)+(X_1+X_n)=n(X_1+X_n)$$

de donde:

$$S_n = \frac{n}{2}(X_1 + X_n) \qquad (F.177)$$

o bien sustituyendo el valor de X_n:

$$S_n = \frac{n}{2}(2X_1 + (n-1)d) \qquad (F.178)$$

Observación:

los cinco elementos X_1, X_n, d, n y S_n de una progresión aritmética están relacionados por medio de 2 formulas independientes (f.177 y F.178). Por tanto, si se conocen tres cualesquiera de dichos elementos, pueden calcularse los otros dos.

Ejemplos:

1. En la progresión aritmética 3,5,7,9,..., calcular el término de lugar doce y la suma de los primeros 12 términos.

DATOS	FORMULA	SUSTITUCION
$X_1 = 3$	$X_n = X_1 + (n-1)d$	$X_{12}=3+11x2 = 25$
$d = 2$		
$n = 12$	$S_n = \frac{n}{2}(X_1 + X_n)$	$S_{12}=\frac{12}{2}(3+25)=168$

2. En una progresión aritmética $X_1=2$ y $d=3$, ¿cuántos términos deben tomarse para que la suma sea 155?

DATOS	FORMULA	SUSTITUCION
$X_1 = 2$		
$d = 3$	$S_n = \frac{n}{2}(2X_1+(n-1)d)$	$155=\frac{n}{2}(2x2 + (n-1)3)$
$S_n=155$		$310=4n + 3n^2 - 3n$
		$3n^2 + n - 310 = 0$

$(3n+31)(n-10) = 0$

1) Si $(3n+31)=0$

2) Si $(n-10)=0$

$n_1 = 10$

$n_2 = -\frac{31}{3} = -10.3$

dado que n debe ser positivo

n = 10 términos.

Ejercicios:

1. Hallar la suma de todos los múltiplos positivos a 3 que son menores que 20. R. $S_n=63$.
2. Dados $X_n = 9$, $d = 3$, y $S = -66$ encontar n y X_1. R. n=11, $X_1=-21$.

8.5 Interpolación de Medios Aritméticos.

En una progresión aritmética los términos que están entre dos términos a y b se llaman medios aritméticos entre a y b, los términos a y b reciben el nombre de extremos. Por ejemplo, en la progresión aritmética 3, 6, 9,12, 15, 18,..., los medios aritméticos entre los extremos 6 y 18 son 9, 12, y 15.

La manera como se interpolan un número dado de medios aritméticos entre dos números dados se muestra en el ejemplo si - guiente;

Ejemplo:

1. Interpolar dos medios aritméticos entre -7 y 2.

Debemos encontrar 2 números que con el -7 y el 2 como extremos, formen una progresión aritmética. Por lo tanto so lo necesitamos hallar la diferencia d de una progresión arit mética de 4 términos, haciendo $a=X_1$ y $b=X_n$ y aplicar la fórmula F.176:

$$X_n = X_1 + (n-1)d$$
$$2 = -7 + (4-1)d$$
$$9 = 3d$$

de donde d=3; entonces -7+3=-4; -4+3=-1; -1+3=2

por lo tanto los medios aritméticos de -7 y 2 son -4 y -1

Si se interpola un solo medio aritmético entre dos números dados, se tiene el caso de la media aritmética o comunmente co nocido como promedio.

Digamos que A es la media aritmética de a y b

entonces $a+d=A$ y $A+d=b$

$$d = A-a = b-A$$

de donde $2A = a+b$

y $A = \dfrac{a+b}{2}$.

Ejercicios:

1. ¿Cuáles son los medios aritméticos de 19 y -9, de una progresión de 8 términos? R. -5, -1, 3, 7, 11 y 15.
2. Se tienen los extremos -1/3 y 11/21 de una progresión de cuatro términos, ¿cuáles son los medios aritméticos? R. -1/21 y 5/21.

19 PROGRESION GEOMETRICA

19.0 Razón Geométrica.

Como se dijo en 15.2, la razón geométrica es el resultado de comparar por cociente dos magnitudes de la misma especie. A esta comparación por cociente haremos referencia en esta sección.

19.1 Progresión Geométrica.

Progresión geométrica es un conjunto ordenado de números tal que cualquier término posterior al anterior se obtiene multiplicando el término anterior por un número no nulo llamado razón de la progresión.

19.2 Razón Constante.

La razón constante o razón geométrica de la progresión es el factor que diferencía termino a término del conjunto ordenado de números.

Un ejemplo de progresión geométrica es: 1, 1/2, 1/4, 1/8,.. donde el factor o razón es 1/2.

19.3 Fórmula para el Cálculo del n-ésimo Término de una Progresión Geométrica.

Según la definición podemos representar a una progresión geométrica de la siguiente forma:

$$X_1,\ X_1r,\ X_1r^2,\ X_1r^3, \ldots,\ X_1r^n, \qquad (1)$$

donde X_1 es el 1er. término y r es la razón, vemos que el segundo término lo obtenemos multiplicando por r al 1er. término que es X_1 y obtenemos: X_1r;

así el 3er. término es: X_1r^2

el 4to. término es: X_1r^3

y en general, el n-ésimo término es: $X_n = X_1r^{n-1}$ (F.179)

19.4 Deducción de la Fórmula para el Cálculo de la Suma de los n - Primeros Términos de una Progresión Geométrica.

Ahora obtendrémos la suma S_n de los n primeros términos de la sucesión (1):

$$S_n = X_1+X_1r+X_1r^2+\ldots+X_1r^{n-2}+X_1r^{n-1} \qquad (2)$$

multiplicando ambos miembros de (2) por r obtenemos:

$$rS_n = X_1r+X_1r^2+X_1r^3+\ldots+X_1r^{n-2}+X_1r^{n-1}+X_1r^n \qquad (3)$$

restando miembro a miembro (3) de (2), resulta:

$$S_n - rS_n = X_1 - X_1r^n$$

$$S_n(1 - r) = X_1(1 - r^n)$$

de donde:

$$S_n = \frac{X_1(1 - r^n)}{1 - r} = \frac{X_1 - X_1 r^n}{1 - r} \; ; \; r \neq 1$$

si multiplicamos cada miembro de F.179, tenemos:

$$rX_n = X_1 r^n$$

así simplificamos la expresión de S_n:

$$S_n = \frac{X_1 - rX_n}{1 - r} \qquad r \neq 1 \qquad \text{(F.180)}$$

Tambien sucede igual que las progresiones aritméticas; si se conocen tres cualesquiera elementos de los siguientes X_1, X_n, r, n, S_n, pueden determinarse los otros dos, usando las fórmulas F.179 y F.180.

Ejemplos:

1. En la progresión geométrica 1, 2, 4, ..., hallar el 7o. término y la suma de los 7 primeros términos.

DATOS	FORMULAS	SUSTITUCION
$X_1 = 1$	$X_n = X_1 r^{n-1}$	$X_7 = 1(\ 2^6) = 64$
$r = 2$		
$n = 7$	$S_n = \frac{X_1(1-r^n)}{1-r}$	$S_7 = \frac{1(1-2^7)}{1-2} = 127$

2. En una progresión geométrica el 1er. término es 4, el último es $30\frac{3}{8}$ y la suma de los términos es $83\frac{1}{8}$; hallar la razón y el número de términos.

DATOS	FORMULAS	SUSTITUCION
$X_1 = 4$		
$X_n = 30\frac{3}{8} = \frac{243}{8}$	$S_n = \frac{X_1 - rX_n}{1 - r}$	$\frac{665}{8} = \frac{4 - \frac{243}{8} r}{1 - r}$
$S_n = 83\frac{1}{8} = \frac{665}{8}$	$X_n = X_1 r^{n-1}$	multiplicando por 8(1-r), se obtiene:

$$665 - 665r = 32 - 243r$$

donde:

$$-422r = -633 \quad \text{y } r = \frac{3}{2}$$

sustituyendo en $X_n = X_1 r^{n-1}$

tenemos:

$$\frac{243}{8} = 4(\tfrac{3}{2})^{n-1}$$

de donde:

$$\frac{243}{32} = (\tfrac{3}{2})^{n-1}$$

y

$$(\tfrac{3}{2})^5 = (\tfrac{3}{2})^{n-1}$$

por lo tanto: $n-1=5$ y $n = 6$

Ejercicios:

1. Dados $X_n = 729$, $r = 3$ y $S_n = 1093$ encontrar X_1 y n. R. R. $X_1 = 1$, $n = 7$.
2. Hallar X_n y S_n para 2, -2/3, 2/9 hasta 7 términos. R. $X_n = 2/729$; $S_n = 1.500685$.

9.5 Interpolación de Medios Geométricos.

En una progresión geométrica, dados dos términos a y b que se llaman extremos, decimos que los términos entre a y b se llaman medios geométricos. El método para interpolar medios geométricos entre dos números dados se muestra en el siguiente ejemplo;

Ejemplo:

1. Interpolar tres medios geométricos entre 1/10 y 8/5.

Debemos encontrar 3 números tales que, con 1/10 y 8/5 como extremos, formen una progresión geométrica. Por tanto bastará determinar la razón r de una progresión geométrica de 5 términos en la que $X_1 = \frac{1}{10}$ y $X_n = \frac{8}{5}$, sustituyendo en la relación (F.179), es decir:

de: $$X_n = X_1 r^{n-1}$$

donde: $$\frac{8}{5} = \frac{1}{10} r^{5-1}$$

$$r^4 = (\tfrac{8}{5})(10)$$

$$r^4 = \frac{80}{5} = 16$$

el exponente indica que r tiene 4 valores que son -2, -2, 2 y 2, pero para evitar ambigüedades consideraremos la raiz positiva o comunmente llamada la raíz principal, así r=2 y los tres medios geométricos son: (1/10)2=1/5, (1/5)2=2/5, (2/5)2=4/5 ya que (4/5)2=8/5.

Si se interpola un solo medio geométrico entre dos números dados, se obtiene la media geométrica. Sea G la media geométrica de dos números dados a y b, lo que significa que a,G,b están en progresión geométrica, así:

$$ar = G \quad \text{y} \quad Gr = b$$

de donde:

$$r = G/a = b/G$$

y

$$G^2 = ab$$

$$G = \pm\sqrt{ab}$$

Para que G sea un número real a y b deben tener el mismo signo.

La media geométrica tambien se conoce como media proporcional.

Ejercicios:

1. ¿Cuáles son los medios geométricos de una progresión geo - métrica de 9 términos, si los extremos son 16 y 1/16?
   R. 8,4,2,1,1/2,1/4,1/8,.
2. La media geométrica de dos números positivos es 4; hallar los números, si uno de ellos es el cuadruplo del otro.
   R. a = 2 y b = 8.

20 EXPONENTES Y LOGARITMOS

0.0 Supongamos que tenemos el caso de la multiplicación y que todos los factores que se van a multiplicar son iguales. Así si multiplicamos el número a por si mismo, obtenemos el producto aa, el cuál generalmente escribimos en la forma a^2. En general el producto de n factores cada uno de ellos iguales a a, se escribe en la forma a^n, en donde n es el exponente y es un número entero y positivo y la operación se llama potenciación.

A continuación estudiaremos las leyes de los exponentes:

Sean a y b dos números cualesquiera y m y p números enteros positivos.

Ley I

$$a^m(a^p) = a^{m+p}$$

demostración: Por la ley asociativa de la multiplicación

$$\begin{aligned} a^m(a^p) &= ((a)(a)(a)\ldots \text{hasta } m \text{ factores})((a)(a)(a)\ldots \text{hasta } p \text{ factores}) \\ &= (a)(a)(a)(a)\ldots \text{ hasta } m+p \text{ factores} \\ &= a^{m+p}. \end{aligned}$$

Ley II

$$(a^m)^p = a^{mp}$$

demostración: $((a^m)(a^m)(a^m)\ldots \text{ hasta } p \text{ factores}) = (a^m)^p = a^{mp}.$

Ley III

$$(ab)^m = a^m b^m$$

demostración: $(ab)^m = ((ab)(ab)(ab)\ldots \text{hasta } m \text{ factores})$

por la ley conmutativa de la multiplicación:

$$\begin{aligned} &= ((a)(a)(a)\ldots \text{hasta } m \text{ factores})((b)\times(b)(b)(b)\ldots \text{hasta } m \text{ factores}) \\ &= a^m b^m. \end{aligned}$$

Ley IV

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$$

demostración:

$$\begin{aligned} \left(\frac{a}{b}\right)^m &= \left(\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{a}{b}\right)\ldots \text{hasta } m \text{ factores}\right) \\ &= \frac{((a)(a)(a)\ldots \text{hasta } m \text{ factores})}{((b)(b)(b)\ldots \text{hasta } m \text{ factores})} \\ &= \frac{a^m}{b^m}. \end{aligned}$$

Ley V

$$\left(\frac{a^m}{a^p}\right) = a^{m-p}; \text{ para } a\neq 0 \text{ y } m \text{ y } p \text{ enteros positivos tales que } m > p.$$

demostración: por la ley I de los exponentes:

$$(a^{m-p})(a^p) = a^{m-p+p} = a^m$$

por la definición de división:

$$a^{m-p} = \frac{a^m}{a^p}$$

Ley VI

$$\left(\frac{a^m}{a^p}\right) = \frac{1}{a^{p-m}}; \text{ para } a\neq 0 \text{ y } m \text{ y } p \text{ enteros positivos tales que } m < p.$$

demostración: dividiendo numerador y denominador por a^m no se altera el cociente.

$$\frac{a^m}{a^p} = \frac{a^m/a^m}{a^p/a^m}$$

por definición de unidad:

$$\frac{a^m}{a^p} = \frac{1}{a^p/a^m}$$

por la ley V de los exponentes:

$$\frac{a^m}{a^p} = \frac{1}{a^{p-m}}$$

Si se quiere que estas leyes sean tambien válidas para exponentes que no sean números enteros y positivos, es necesario establecer el significado que se debe dar a los exponentes negativos.

Antes hay que llegar a un acuerdo y es que para que la leyd de los exponentes I sea válida para el exponente zero, debemos tener para m=0 que:

$$(a^0)(a^p) = a^{0+p} = a^p$$

por definición de división y unidad

$$a^0 = \frac{a^p}{a^p} = 1 \quad ; \quad a\neq 0$$

por lo tanto cualquier número no nulo afectado del exponente cero es igual a la unidad. (el simbolo 0^0 no está definido).

Ahora, siendo m entero positivo y suponiendo que la ley de los exponentes I, sea válida para exponentes negativos, tendremos:

$$(a^m)(a^{-m}) = a^{m+(-m)} = a^{m-m} = a^0 = 1$$

de donde por definición de división:

$$a^{-m} = \frac{1}{a^m} \quad ; \quad a \neq 0$$

y

$$a^{m} = \frac{1}{a^{-m}} \quad ; \quad a \neq 0$$

esto nos dice que el significado de un exponente negativo queda dado por la igualdad:

$$a^{-m} = \frac{1}{a^m} \quad ; \quad a \neq 0$$

Nota: $a^{m/p} = \sqrt[p]{a^m}$, donde $a^{m/p}$ significa la raíz de índice p de la potencia de grado m de a.

0.1.0 Logaritmos.

El logaritmo de un número en una base dada es el exponente a que se eleva la base para obtener el número.

$$\log_b M = x \quad ; \quad b^x = M$$

$$\log_b N = y \quad ; \quad b^y = N$$

donde: M, N y b son números positivos.

Para establecer teoremas fundamentales de logaritmos transformaremos los siguientes conceptos.

(1) $b^x b^y = b^{x+y}$

(2) $b^x + b^y = b^{x-y}$

(3) $(b^x)^n = b^{nx}$

(4) $\sqrt[n]{b^x} = b^{x/n}$

(5) $M = b^x$ y $N = b^y$

(6) $\log_b M = x$ y $\log_b N = y$

Teorema 1.

$$\log_b MN = \log_b M + \log_b N$$

demostración: de (5) y (1) tenemos: $MN = b^x b^y = b^{x+y}$, por la definición de logaritmo y (6):

$$\log_b MN = x+y = \log_b M + \log_b N$$

el teorema puede extenderse a más factores.

Teorema 2. $\log_b \frac{M}{N} = \log_b M - \log_b N$

demostración: De (5) y (2), tenemos:

$$\frac{M}{N} = \frac{b^x}{b^y} = b^{x-y}$$

de donde, por la definición de logaritmos y (6):

$$\text{lob}_b \frac{M}{N} = x-y = \log_b M - \log_b N \quad .$$

Teorema 3.

$$(\log_b (M)^n) = n\log_b M$$

demostración: De (5) y (3) tenemos:

$$M^{\,n} = (b^x)^n = b^{nx}$$

de donde, por definición de logaritmo y (6):

$$(\log_b (M)^n) = nx = n\log_b M \quad .$$

Teorema 4.

$$\log_b M^{1/n} = \frac{1}{n} \log_b M$$

demostración: De (5) y (4), tenemos:

$$M^{1/n} = {}^n b^x = b^{x/n}$$

de donde por definición de logaritmo y por (6):

$$\log_b M^{1/n} = x/n = (\log_b M)/n \quad .$$

Aquí están tres propiedades que son consecuencia directa de la definición de logaritmo:

(7) $\log_b b = 1$

(8) $\log_b b^n = n$

(9) $b^{\log_b N} = N$

el logaritmo de un número depende de la base. El logaritmo de un número positivo en cualquier base $a > 0$ puede expresarse en función de logaritmos en otra base $b > 0$ por medio del teorema siguiente:

Teorema 5.

El logaritmo de un número positivo N en la base a, es igual al logaritmo de N en otra base b, dividido entre el logaritmo de a en la base b, es decir:

$$\log_a N = \frac{\log_b N}{\log_b a}$$

demostración:

Sea $\log_a N = x$ donde $a^x = N$

tomando logaritmos en la base b tenemos; por el teo - rema 3:

$$\log_b N = x \log_b a$$

de donde:

$$x = \frac{\log_b N}{\log_b a} \qquad \text{o sea;}$$

$$\log_a N = \frac{\log_b N}{\log_b a}$$

Para los temas tratados en esta tesis usaremos logaritmos de base 10 o decimales, que a continuación veremos:

0.1.1 Logaritmos Decimales.

Un logaritmo decimal consta de la suma de dos partes, una de ellas es un entero y la otra es una fracción decimal positiva (que puede ser cero). El entero, que puede ser positivo negativo o cero, se llama característica. La fracción decimal se llama mantisa y la proporciona una tabla de logaritmos decimales.

La regla para obtener la característica del logaritmo de un número N es la siguiente:

1. Si $N \geq 1$, la caracteristica de log N es una unidad menor que el número de dígitos de N que están a la izquierda del punto decimal.
2. Si $N < 1$ y N está escrito en forma decimal, la característica de log N es negativa y el número o dígito que lleva ese signo negativo, es el número de ceros que aparecen inmediatamente a la derecha del punto decimal más uno.

Ejemplos:

número: 4232 ; característica: 3
número: 321.3 ; característica: 2
número: 85.72 ; característica: 1
número: 1.260 ; característica: 0
número: 0.843 ; característica: -1
número: 0.04360 ; característica: -2
número: 0.00291 ; característica: -3

En el caso de un logaritmo con característica negativa escribimos el signo menos sobre la característica para mostrar que solamente ella es negativa, mientras que la mantisa es positiva. Así, por ejemplo, el número 0.142 es menor que la unidad, su logaritmo es negativo como puede apreciarse escribiendo

$$\bar{1}.1523 = -1+0.1523 = -0.8477$$

Ahora veremos como obtener la mantisa utilizando una tabla de logaritmos (ver anexo).

Si el número dado tiene tres cifras significativas o menos localizamos las primeras dos cifras en la columna izquierda y la tercera cifra en la parte superior de la tabla. La mantisa buscada está formada por el número de cuatro dígitos - que está en la fila de las primeras dos cifras y en la columna de la tercera cifra. Así, por ejemplo, para el número 142, las primeras dos cifras aparecen en la columna izquierda en la quinta fila, y la tercera cifra, aparece en la parte superior de la tercera columna. Las cifras correspondientes son 1523; por tanto, la mantisa de log 1.42 es 0.1523.

Ejercicios:

verificar los siguientes valores o resultados:

$\log 0.0000099=\bar{6}.9956=-5.0044$; $\log 888=2.9484$

$\log 8.99=0.9538$; $\log 0.337=-1.5276=-0.4724$

Si el número dado tiene cuatro cifras significativas o más la mantisa de su logaritmo no aparece en la tabla pero puede obtenerse aproximadamente por el método de interpolación lineal estudiado en el capitulo 17 y veremos un ejemplo a continuación;

Ejemplo:

1. Hallar el logaritmo de 7915.

En la tabla encontramos las mantisas de 7910 y 7920 que son .8982 y .8987 respectivamente y si usamos la forma F.172 del cap.17, tenemos:

número	mantisa
7920	.8987
7915	x
7910	.8982

$$x - .8982 = \frac{(.8987-.8982)(7915-7910)}{(7920-7910)}$$

$$= \frac{(.0005)(5)}{(10)} = \frac{0.0025}{10} = 0.00025$$

de donde

$$x = 0.898450$$

y por tener 4 cifras el número, la característica es 3, por lo tanto $\log 7915 = 3.898450$

Ejercicios:

1. Verificar los siguientes resultados:

$\log 9116 = 3.95980$

$\log 0.09577 = \bar{2}.98125 = -1.01875$

20.1.2 Antilogaritmo.

El antilogaritmo de un número x en una base dada b es el número M que se obtiene al elevar la base b al exponente x; es decir; de:

$$\log_b M = x \qquad ; \; b^x = M$$

tenemos:

$$\text{Antilog}_b x = \text{Antilog}_b(\log_b M) = M$$

Ejemplo:

1. ¿Cuál es el antilogaritmo de 3.8774?

La mantisa 0.8774 se encuentra en la tabla (anexo), en la fila que corresponde al 75 y en la columna cuyo número es 4. Por tanto las cifras significativas son 754 y el antilogaritmo es 7540 ya que log 7540=3.8774

2. ¿Cuál es el antilogaritmo de $\bar{1}.9654$?

En la tabla encontramos las mantisas de 9230 y 9240 que son .9652 y .9657 respectivamente y si usamos la forma F.172 y la fórmula F.174 del cap.17 de interpolación lineal, tenemos:

número	mantisa
9240	.9657
y	.9654
9230	.9652

$$y - 9230 = \frac{(9240-9230)(.9654-.9652)}{(.9657-.9652)}$$

$$= \frac{.002}{.0005} = 4$$

de donde:

$$y = 9234$$

tomando en cuenta la regla para obtener la característica del logaritmo de un número (20.1.1), vemos que el antilogaritmo debe ser 0.9234 para que al obtener el logaritmo de 0.9234 tengamos $\bar{1}.9654$; verifiquemos:

$$\log 0.9234 = -0.0346 = -1 + 0.9654 = \bar{1}.9654$$

Ejercicios:

1. ¿Cuál es el antilogaritmo de $\bar{2}.2555$? R. 0.01800833..
2. ¿Cuál es el antilogaritmo de $\bar{3}.1111$? R. 0.00129015..
3. ¿Cuál es el antilogaritmo de $\bar{1}.0995$? R. 0.12574285..

21 TEOREMA DEL BINOMIO

Comunmente llamamos teorema del binomio a la fórmula general de un binomio; a continuación veremos que es un binomio y los elementos necesarios para llegar a dicha fórmula.

21.0 Factorial.

Con el simbolo $n!$ o $\underline{n|}$ identificamos al factorial y representa el producto de los números enteros positivos que empie - zan en n y terminan en 1 o viceversa, es decir:

$$n! = (n)(n-1)(n-2)\ldots(3)(2)(1)$$

así

$$3! = (3)(2)(1) = 6$$

observemos que la formula anterior puede expresarse como:

$$n! = n(n-1)$$

de modo que si $n = 1$, tenemos:

$$1! = 1(0)$$

y para que se cumpla dicha igualdad conviene definir:

$$0! = 1$$

21.1 Desarrollo del Binomio con Potencias Enteras Positivas.

Un binomio es una expresión algebráica de dos términos;

$x + y$; $-y-3x$; $(-y-9x^2)^8$ binomio con potencia entera positiva (8)

El teorema del binomio es una fórmula (por esto se llama tambien fórmula del binomio) con la que se pueden escribir directamente los términos del desarrollo de una potencia entera y positiva de un binomio. Para formarnos una idea de lo que es la estructura del desarrollo de $(x+y)^n$, en donde n es un número entero positivo, escribiremos el resultado para los primeros cuatro valores de n. Así, por multiplicación directa tenemos:

$$(x + y)^1 = x + y,$$

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2,$$

$$(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3,$$

$$(x + y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4.$$

Observemos que cada uno de estos desarrollos tiene las siguientes características:

1. El número de términos es $n+1$, o sea, una unidad más que el exponente del binomio.

2. En el 1er. término el exponente de x es n y decrece de unidad en unidad en cada uno de los términos siguientes.

3. La y aparece por primera vez en el 2do. término, con exponente 1, y su exponente aumenta de unidad en unidad en cada uno de los términos siguientes. El exponente de y es siempre una unidad menor que el número de orden del término.

4. La suma de los exponentes de x e y es igual a n en cualquiera de los términos.

5. Los coeficientes de x e y presentan cierta simetría, que consiste en que los coeficientes de términos equidistantes de los extremos son iguales.

6. El coeficiente del 1er. término es la unidad y el del segundo término es n.

7. Si en cualquiera de los términos, el coeficiente se multiplica por el exponente de x y este producto se divide entre el exponente de y aumentado en uno, el resultado es el coeficiente del siguiente término.

La séptima característica tal vez no paresca tan evidente, pero dada su importancia para la determinación de coeficientes la explicaremos aplicandola al desarrollo de $(x+y)^4$. El coeficiente del 3er. término se obtiene del 2do. como sigue: se multiplica el coeficiente 4 del segundo término por el exponente 3 de x y este producto se divide entre el exponente 1 de y aumentado en 1. Es decir, $(4)(3)/1+1 = 6$, que es el coeficiente del 3er. término. Análogamente, de este coeficiente obtenemos $(6)(2)/2+1 = 4$, que es el coeficiente del cuárto término, y así sucesivamente.

En general tenemos que el teorema o fórmula del binomio elevado a una potencia n entera positiva es:

$$(x+y)^n = x^n + \frac{n}{1} x^{n-1}y + \frac{n(n-1)}{(1)(2)} x^{n-2}y^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{(1)(2)(3)} x^{n-3}y^3 +$$

$$+\ldots+ \frac{n(n-1)\ldots(n-r+2)}{(1)(2)(3)\ldots(r-1)} x^{n-r+1}y^{r-1} + \ldots + y^n \;;$$

que con el simbolo de n puede escribirse como se tiene en la siguiente sección;

..2 Término General del Desarrollo de un Binomio.

Reescribiendo la fórmula del binomio (21.1) pero con el simbolo $n!$, tenemos:

$$(x+y)^n = x^n + nx^{n-1}y + \frac{n(n-1)}{2!} x^{n-2}y^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} x^{n-3}y^3 +$$

$$+\ldots+ \frac{n(n-1)\ldots(n-r+2)}{(r-1)!} x^{n-r+1}y^{r-1} + \ldots + y^n;$$

en donde, el término de orden r, es:

$$\frac{n(n-1)\ldots(n-r+2)}{(r-1)!}\, x^{n-r+1} y^{r-1}$$

el cuál se conoce como el término general.

.3 Desarrollo de Binomios con Potencias Enteras Negativas y con Potencias Fraccionarias Positivas y Negativas.

En los casos de exponentes enteros y negativos y en los de exponentes fraccionarios positivos y negativos, el número de términos o sumandos es infinito y a medida que aumentan los sumandos, los valores van siendo cada vez más insignificantes, y lo que se hace es tomar los primeros sumandos, considerando la suma resultante como un resultado aproximado al real.

Ejemplos:

1. Desarrollar el binomio $(s+r)^{-4}$ y encontrar su valor para $s = 2$ y $r = .02$.

$$(s+r)^{-4} = s^{-4} + (-4)s^{(-4-1)}r + \frac{(-4)(-4-1)}{2!}s^{(-4-2)}r^2 +$$
$$+ \frac{(-4)(-4-1)(-4-2)}{3!}s^{(-4-3)}r^3 +$$
$$+ \frac{(-4)(-4-1)(-4-2)(-4-3)}{4!}s^{(-4-4)}r^4 - \ldots$$
$$= s^{-4} - 4s^{-5}r + 10s^{-6}r^2 - 20s^{-7}r^3 + 35s^{-8}r^4 - \ldots$$

si $s=2$ y $r=0.02$, tenemos:

$$(2+.02)^{-4} = (2)^{-4} - 4(2)^{-5}(.02) + 10(2)^{-6}(.02)^2 - 20(2)^{-7}(.02)^3 +$$
$$+ 35(2)^{-8}(.02)^4 - \ldots$$
$$= 0.0625 - 0.0025 + 0.0000625 - 0.00000125 +$$
$$+ 0.0000000219 - \ldots$$
$$= 0.0600612719 - \ldots$$

observamos que el último sumando (5o.) de los anteriores es más chico que los demás, si continuáramos obteniendo términos, estos serían menores.

2. Desarrollar el binomio $(a+b)^{-(2/3)}$.

Aplicando la fórmula del binomio, tenemos:

$$(a+b)^{-(2/3)} = a^{-(2/3)} + (-(2/3))a^{(-2/3-1)}b +$$
$$+ \frac{(-\frac{2}{3})(-\frac{2}{3} - 1)}{2!}a^{(-\frac{2}{3} - 2)}b^2 +$$
$$+ \frac{(-\frac{2}{3})(-\frac{2}{3} - 1)(-\frac{2}{3} - 2)}{3!}a^{(-\frac{2}{3} - 3)}b^3 + \ldots$$

$$(a+b)^{-\frac{2}{3}} = a^{-\frac{2}{3}} - \frac{2}{3}a^{(-3/5)}b + \frac{5}{9}a^{(-8/3)}b^2 - \frac{40}{81}a^{(-11/3)}b^3 + \ldots$$

Ejercicios:

1. Obtener el valor del 5o. término de $(2-\frac{4}{3})^7$. R. 884.9383
2. Desarrollar el binomio $(9-\frac{1}{2})^{-2}$ hasta el cuarto término y obtener la suma hasta dicho término. R. 0.0138402004.

1.4 **Aproximación de Binomios a un Número Dado de Decimales.**

En una cantidad como $(x+y)^n$ muchas veces requerimos obtener una aproximación al resultado con cierto número de cifras.

Supongamos que $y = 0.2$, entonces $y^2=0.04$; según la posición del 1er. número entero positivo después del punto decimal tenemos que el valor de y^2 está dado con una aproximación de $\frac{1}{100}$ es decir de dos cifras decimales.

Así; nuestra cantidad obtenida al realizar cierta operación tiene una exactitud que depende del número de sumandos que se van obteniendo al desarrollar por el teorema del binomio.

Si el término de algún sumando tiene el 1er. número entero después del punto decimal en la z posición, donde z es el número de cifras decimales con las que se aproxima al resultado real, podemos omitir el resto de los sumandos siguientes.

Al desarrollar un binomio cuyo exponente es fraccionario o negativo mediante el teorema del binomio se obtiene una infinidad de sumandos que cada vez van siendo más pequeños, como se aprecia en el siguiente ejemplo:

Ejemplo:

1. Calcular $\sqrt[3]{1.01}$ con 6 cifras de aproximación.

haciendo $x = 0.01$ se tiene $\sqrt[3]{1+x}$ o bien $(1+x)^{\frac{1}{3}}$,

$(1+x)^{1/3}$ lo podemos desarrollar mediante el teorema del binomio (21.1), es decir:

$$(1+x)^{\frac{1}{3}} = 1^{\frac{1}{3}} + \frac{\frac{1}{3}}{1!}1^{\left[\frac{1}{3}-1\right]}x + \frac{\left(\frac{1}{3}\right)\left[\frac{1}{3}-1\right]}{2!}1^{\left[\frac{1}{3}-2\right]}x^2 +$$

$$+ \frac{\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{3}-2\right)}{3!}1^{\left[\frac{1}{3}-3\right]}x^3 + \ldots$$

$$= 1 + \frac{1}{3}(1)(x) + \frac{-\frac{2}{9}}{2}(1)(x)^2 + \frac{\frac{10}{27}}{6}(1)(x)^3 + \ldots$$

$$= 1 + \frac{x}{3} - \frac{2}{18}x^2 + \frac{10}{162}x^3 - \ldots$$

$$= 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81} - \ldots + \ldots$$

sustituyendo x=0.01 en cada sumando tenemos:

$$= 1 + \frac{0.01}{3} - \frac{0.0001}{9} + \frac{5(0.000001)}{81} - \ldots$$

observamos que el 4o. sumando tiene el término 5(o.000001) **donde el 1er. entero después del punto decimal ocupa la 6a.** posición , por lo que se puede prescindir del 4o. sumando y de los que siguen, obteniendose un resultado cuya aproximación es de $\frac{1}{1000000}$, así:

$$(1+.01)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{1.01} = 1 + \frac{0.01}{3} - \frac{0.0001}{9} = 1.003322$$

Ejercicios:

1. **Calcular** $(1+i)^{\frac{1}{4}}$ **con aproximación de 8 cifras para i = 0.05**
   R. 1.01227223.
2. **Calcular** $(1+i)^{-9}$ **con aproximación de 9 cifras para i=0.03**
   R. 0.766416732.

FORMULARIO

MONTO DE ANUALIDADES CIERTAS ORDINARIAS

Para el monto con renta no unitaria, multiplicar el valor de la renta por la fórmula correspondiente.

$m > 1$ $p > 1$	$m/p \neq$ entero $p/m \neq$ entero	$s^{(p)}_{\overline{n}\rvert i'} = \frac{1}{p} \times \frac{(1+i')^{mn} - 1}{(1+i')^{m/p} - 1}$
$m = 1$ $p = 1$	$m = p$	$s^{(p)}_{\overline{n}\rvert i'} = \frac{(1+i)^{n} - 1}{i}$
$m > 1$ $p > 1$	$m = p$	$s^{(p)}_{\overline{n}\rvert i'} = \frac{1}{p} \times s_{\overline{mn}\rvert i'}$
$m > 1$ $p > 1$	$p > m$ $p/m =$ entero	$s^{(p)}_{\overline{n}\rvert i'} = \frac{1}{m}\, s_{\overline{mn}\rvert i'} \times \frac{i'}{i'^{(p/m)}}$
$m > 1$ $p > 1$	$m > p$ $m/p =$ entero	$s^{(p)}_{\overline{n}\rvert i'} = \frac{1}{p}\, s_{\overline{mn}\rvert i'} \times \frac{1}{s_{\overline{m/p}\rvert i'}}$
$m > 1$ $p = 1$		$s^{(p)}_{\overline{n}\rvert i'} = s_{\overline{mn}\rvert i'} \times \frac{1}{s_{\overline{m}\rvert i'}}$
$m = 1$ $p > 1$		$s^{(p)}_{\overline{n}\rvert i'} = s_{\overline{n}\rvert i} \times \frac{i}{i^{(p)}}$

Fórmula para valores que no se encuentran en tablas.

$$s_{\overline{n}\rvert i} = s_{\overline{k+t}\rvert i} = s_{\overline{k}\rvert i}(1+i)^{t} + s_{\overline{t}\rvert i}$$

Notas:

$$i' = \frac{i^{(m)}}{m}$$

FORMULARIO

VALOR PRESENTE DE ANUALIDADES CIERTAS ORDINARIAS

Para el valor actual con renta no unitaria, multiplicar el valor de la renta por la fórmula correspondiente.

$m > 1$ $\quad m/p \neq$ entero
$p > 1$ $\quad p/m \neq$ entero

$$a^{(p)}_{\overline{n}|i'} = \frac{1}{p} \times \frac{1-(1+i')^{-mn}}{(1+i')^{m/p}-1}$$

$m = 1$
$p = 1$ $\quad m = p$

$$a^{(p)}_{\overline{n}|i'} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

$m > 1$
$p > 1$ $\quad m = p$

$$a^{(p)}_{\overline{n}|i'} = \frac{1}{p} \times a_{\overline{mn}|i'}$$

$m > 1$ $\quad p > m$
$p > 1$ $\quad p/m =$ entero

$$a^{(p)}_{\overline{n}|i'} = \frac{1}{m} a_{\overline{mn}|i'} \times \frac{i'}{i'^{(p/m)}}$$

$m > 1$ $\quad m > p$
$p > 1$ $\quad m/p =$ entero

$$a^{(p)}_{\overline{n}|i'} = \frac{1}{p} a_{\overline{mn}|i'} \times \frac{1}{s_{\overline{m/p}|i'}}$$

$m > 1$
$p = 1$

$$a^{(p)}_{\overline{n}|i'} = a_{\overline{mn}|i'} \times \frac{1}{s_{\overline{m}|i'}}$$

$m = 1$
$p > 1$

$$a^{(p)}_{\overline{n}|i'} = a_{\overline{n}|i} \times \frac{i}{i^{(p)}}$$

Fórmula para valores que no se encuentran en tablas.

$$a_{\overline{n}|i} = a_{\overline{k+t}|i} = a_{\overline{k}|i} + v^k a_{\overline{t}|i}$$

Nota:

$$i' = \frac{i^{(m)}}{m}$$

FORMULARIO

MONTO DE ANUALIDADES CIERTAS ANTICIPADAS

Para un monto con renta no unitaria, multiplicar el valor de la renta por la fórmula correspondiente.

$m > 1$ $\quad m/p \neq$ entero
$p > 1$ $\quad p/m \neq$ entero

$$\ddot{s}^{(p)}_{\overline{n}|i'} = \frac{1}{p}\,(1+i')^{m/p} \times \frac{(1+i')^{mn} - 1}{(1+i')^{m/p} - 1}$$

$m = 1$ $\quad m = p$
$p = 1$

$$\ddot{s}^{(p)}_{\overline{n}|i'} = (1+i)\, s_{\overline{n}|i}$$

$$\ddot{s}^{(p)}_{\overline{n}|i'} = s_{\overline{n+1}|i} - 1$$

$m > 1$ $\quad m = p$
$p > 1$

$$\ddot{s}^{(p)}_{\overline{n}|i'} = \frac{1}{p}\,(s_{\overline{mn+1}|i'} - 1)$$

$m > 1$ $\quad p > m$
$p > 1$ $\quad p/m =$ entero

$$\ddot{s}^{(p)}_{\overline{n}|i'} = \frac{1}{m}\,(1+i')^{m/p} s_{\overline{mn}|i'} \times \frac{i'}{i'^{(p/m)}}$$

$m > 1$ $\quad m > p$
$p > 1$ $\quad m/p =$ entero

$$\ddot{s}^{(p)}_{\overline{n}|i'} = \frac{1}{p}(1+i')^{m/p} s_{\overline{mn}|i'} \times \frac{1}{s_{\overline{m/p}|i'}}$$

$$\ddot{s}^{(p)}_{\overline{n}|i'} = \frac{1}{p}\, s_{\overline{mn}|i'} \times \frac{1}{a_{\overline{m/p}|i'}}$$

$m > 1$
$p = 1$

$$\ddot{s}^{(p)}_{\overline{n}|i'} = (1+i')^{m/p} s_{\overline{mn}|i'} \times \frac{1}{s_{\overline{m}|i'}}$$

$$\ddot{s}^{(p)}_{\overline{n}|i'} = s_{\overline{mn}|i'} \times \frac{1}{a_{\overline{m}|i'}}$$

$m = 1$
$p > 1$

$$\ddot{s}^{(p)}_{\overline{n}|i'} = (1+i')^{1/p} s_{\overline{n}|i} \times \frac{i}{i^{(p)}}$$

Nota: $\quad i' = \dfrac{i^{(m)}}{m}$

FORMULARIO

VALOR PRESENTE DE ANUALIDADES CIERTAS ANTICIPADAS

Para el valor actual con renta no unitaria, multiplicar el valor de la renta por la fórmula correspondiente.

$m > 1$ $\quad m/p \neq$ entero
$p > 1$ $\quad p/m \neq$ entero

$$\ddot{a}^{(p)}_{\overline{n}|i'} = (1+i')^{m/p}\,\frac{1}{p}\times\frac{1-(1+i')^{-mn}}{(1+i')^{m/p}-1}$$

$m = 1$
$p = 1$ $\quad m = p$

$$\ddot{a}^{(p)}_{\overline{n}|i} = (1+i)\,a_{\overline{n}|i}$$

$$\ddot{a}^{(p)}_{\overline{n}|i} = 1 + a_{\overline{n-1}|i}$$

$m > 1$
$p > 1$ $\quad m = p$

$$\ddot{a}^{(p)}_{\overline{n}|i'} = \frac{1}{p}\left(1 + a_{\overline{mn-1}|i'}\right)$$

$m > 1$ $\quad p > m$
$p > 1$ $\quad p/m =$ entero

$$\ddot{a}^{(p)}_{\overline{n}|i'} = \frac{1}{m}(1+i')^{m/p}\,a_{\overline{mn}|i'}\times\frac{i'}{i'^{(p/m)}}$$

$m > 1$ $\quad m > p$
$p > 1$ $\quad m/p =$ entero

$$\ddot{a}^{(p)}_{\overline{n}|i'} = \frac{1}{p}(1+i')^{m/p}\,a_{\overline{mn}|i'}\times\frac{1}{s_{\overline{m/p}|i'}}$$

$$\ddot{a}^{(p)}_{\overline{n}|i'} = \frac{1}{p}\,a_{\overline{mn}|i'}\times\frac{1}{a_{\overline{m/p}|i'}}$$

$m > 1$
$p = 1$

$$\ddot{a}^{(p)}_{\overline{n}|i'} = (1+i)^{m/p}\,a_{\overline{mn}|i'}\times\frac{1}{s_{\overline{m}|i'}}$$

$$\ddot{a}^{(p)}_{\overline{n}|i'} = a_{\overline{mn}|i'}\times\frac{1}{a_{\overline{m}|i'}}$$

$m = 1$
$p > 1$

$$\ddot{a}^{(p)}_{\overline{n}|i} = (1+i)^{1/p}\,a_{\overline{n}|i}\times\frac{i}{i^{(p)}}$$

Nota: $i' = \dfrac{i^{(m)}}{m}$

FORMULARIO

VALOR PRESENTE DE ANUALIDADES CIERTAS ANTICIPADAS

Para el valor actual con renta no unitaria, multiplicar el valor de la renta por la fórmula correspondiente.

$m > 1$ $\quad m/p \neq$ entero
$p > 1$ $\quad p/m \neq$ entero

$$\ddot{a}^{(p)}_{\overline{n}|i'} = (1+i')^{m/p}\,\frac{1}{p} \times \frac{1-(1+i')^{-mn}}{(1+i')^{m/p}-1}$$

$m = 1$ $\quad m = p$
$p = 1$

$$\ddot{a}^{(p)}_{\overline{n}|i'} = (1+i)\,a_{\overline{n}|i}$$

$$\ddot{a}^{(p)}_{\overline{n}|i'} = 1 + a_{\overline{n-1}|i}$$

$m > 1$ $\quad m = p$
$p > 1$

$$\ddot{a}^{(p)}_{\overline{n}|i'} = \frac{1}{p}(1 + a_{\overline{mn-1}|i'})$$

$m > 1$ $\quad p > m$
$p > 1$ $\quad p/m =$ entero

$$\ddot{a}^{(p)}_{\overline{n}|i'} = \frac{1}{m}(1+i')^{m/p}\,a_{\overline{mn}|i'} \times \frac{i'}{i'^{(p/m)}}$$

$m > 1$ $\quad m > p$
$p > 1$ $\quad m/p =$ entero

$$\ddot{a}^{(p)}_{\overline{n}|i'} = \frac{1}{p}(1+i')^{m/p}\,a_{\overline{mn}|i'} \times \frac{1}{s_{\overline{m/p}|i'}}$$

$$\ddot{a}^{(p)}_{\overline{n}|i'} = \frac{1}{p}\,a_{\overline{mn}|i'} \times \frac{1}{a_{\overline{m/p}|i'}}$$

$m > 1$
$p = 1$

$$\ddot{a}^{(p)}_{\overline{n}|i'} = (1+i)^{m/p}\,a_{\overline{mn}|i'} \times \frac{1}{s_{\overline{m}|i'}}$$

$$\ddot{a}^{(p)}_{\overline{n}|i'} = a_{\overline{mn}|i'} \times \frac{1}{a_{\overline{m}|i'}}$$

$m = 1$
$p > 1$

$$\ddot{a}^{(p)}_{\overline{n}|i'} = (1+i)^{1/p}\,a_{\overline{n}|i} \times \frac{i}{i^{(p)}}$$

Nota: $i' = \frac{i^{(m)}}{m}$

FORMULARIO

MONTO DE ANUALIDADES CIERTAS DIFERIDAS ORDINARIAS

Para un monto con renta no unitaria, multiplicar el valor de la renta por la fórmula correspondiente.

$m > 1$ $p > 1$	$m/p \neq$ entero $p/m \neq$ entero	$t/S^{(p)}_{\overline{n}\rvert i'} = \frac{1}{p} \times \frac{(1+i')^{mn} - 1}{(1+i')^{m/p} - 1}$
$m = 1$ $p = 1$	$m = p$	$t/S^{(p)}_{\overline{n}\rvert i'} = \frac{(1+i)^{n} - 1}{i}$
$m > 1$ $p > 1$	$m = p$	$t/S^{(p)}_{\overline{n}\rvert i'} = \frac{1}{p} \times S_{\overline{mn}\rvert i'}$
$m > 1$ $p > 1$	$p > m$ $p/m =$ entero	$t/S^{(p)}_{\overline{n}\rvert i'} = \frac{1}{m} S_{\overline{mn}\rvert i'} \times \frac{i'}{i'^{(p/m)}}$
$m > 1$ $p > 1$	$m > p$ $m/p =$ entero	$t/S^{(p)}_{\overline{n}\rvert i'} = \frac{1}{p} S_{\overline{mn}\rvert i'} \times \frac{1}{S_{\overline{m/p}\rvert i'}}$
$m > 1$ $p = 1$		$t/S^{(p)}_{\overline{n}\rvert i'} = S_{\overline{mn}\rvert i'} \times \frac{1}{S_{\overline{m}\rvert i'}}$
$m = 1$ $p > 1$		$t/S^{(p)}_{\overline{n}\rvert i'} = S_{\overline{n}\rvert i} \times \frac{i}{i^{(p)}}$

Fórmula para valores que no se encuentran en tablas.

$$t/S_{\overline{n}\rvert i} = t/S_{\overline{k+u}\rvert i} = S_{\overline{k}\rvert i}(1+i)^{t} + S_{\overline{u}\rvert i}$$

Nota:

$$i' = \frac{i^{(m)}}{m}$$

FORMULARIO

VALOR PRESENTE DE ANUALIDADES CIERTAS DIFERIDAS ORDINARIAS

Para el valor actual con renta no unitaria, multiplicar el valor de la renta por la fórmula correspondiente.

$m > 1$ $p > 1$	$m/p \neq$ entero $p/m \neq$ entero	$t/a^{(p)}_{\overline{n}\|i'} = (1+i')^{-mt} \times \frac{1}{p} \times \frac{1-(1+i')^{-mn}}{(1+i')^{m/p}-1}$
$m = 1$ $p = 1$	$m = p$	$t/a^{(p)}_{\overline{n}\|i'} = (1+i)^{-t} a_{\overline{n}\|i}$ $t/a^{(p)}_{\overline{n}\|i'} = a_{\overline{n+t}\|i} - a_{\overline{t}\|i}$
$m > 1$ $p > 1$	$m = p$	$t/a^{(p)}_{\overline{n}\|i'} = \frac{1}{p}(1+i')^{-mt} a_{\overline{mn}\|i'}$
$m > 1$ $p > 1$	$m < p$ $p/m =$ entero	$t/a^{(p)}_{\overline{n}\|i'} = \frac{1}{m}(1+i')^{-mt} a_{\overline{mn}\|i'} \times \frac{i'}{i'^{(p/m)}}$
$m > 1$ $p > 1$	$m > p$ $m/p =$ entero	$t/a^{(p)}_{\overline{n}\|i'} = \frac{1}{p}(1+i')^{-mt} a_{\overline{mn}\|i'} \times \frac{1}{s_{\overline{\frac{m}{p}}\|i'}}$
$m > 1$ $p = 1$		$t/a^{(p)}_{\overline{n}\|i'} = (1+i')^{-mt} a_{\overline{mn}\|i'} \times \frac{1}{s_{\overline{m}\|i'}}$
$m = 1$ $p > 1$		$t/a^{(p)}_{\overline{n}\|i'} = (1+i')^{-t} a_{\overline{n}\|i} \times \frac{i}{i^{(p)}}$

Fórmula para valores que no se encuentran en tablas.

$$t/a_{\overline{n}|i} = t/a_{\overline{k+t}|i} = (1+i)^{-t}(a_{\overline{k}|i} + v^k a_{\overline{t}|i})$$

Nota:

$$i' = \frac{i^{(m)}}{m}$$

FORMULARIO

MONTO DE ANUALIDADES CIERTAS DIFERIDAS ANTICIPADAS

Para un monto con renta no unitaria, multiplicar el valor de la renta por la fórmula correspondiente.

$m > 1$ $p > 1$ $m/p \neq$ entero $p/m \neq$ entero
$$t/\ddot{s}^{(p)}_{\overline{n|}i'} = \frac{1}{p}(1+i')^{m/p} \times \frac{(1+i')^{mn}-1}{(1+i')^{m/p}-1}$$

$m = 1$ $p = 1$ $m = p$
$$t/\ddot{s}^{(p)}_{\overline{n|}i'} = (1+i)\, s_{\overline{n|}i}$$
$$t/\ddot{s}^{(p)}_{\overline{n|}i'} = s_{\overline{n+1|}i} - 1$$

$m > 1$ $p > 1$ $m = p$
$$t/\ddot{s}^{(p)}_{\overline{n|}i'} = \frac{1}{p}\left(s_{\overline{mn+1|}i} - 1\right)$$

$m > 1$ $p > 1$ $p > m$ $p/m =$ entero
$$t/\ddot{s}^{(p)}_{\overline{n|}i'} = \frac{1}{m}(1+i')^{m/p} s_{\overline{mn|}i'} \times \frac{i'}{i'^{(p/m)}}$$

$m > 1$ $p > 1$ $m > p$ $m/p =$ entero
$$t/\ddot{s}^{(p)}_{\overline{n|}i'} = \frac{1}{p}(1+i')^{m/p} s_{\overline{mn|}i'} \times \frac{1}{s_{\overline{m/p|}i'}}$$
$$t/\ddot{s}^{(p)}_{\overline{n|}i'} = \frac{1}{p}\, s_{\overline{mn|}i'} \times \frac{1}{a_{\overline{m/p|}i'}}$$

$m > 1$ $p = 1$
$$t/\ddot{s}^{(p)}_{\overline{n|}i'} = (1+i')^{m/p} s_{\overline{mn|}i'} \times \frac{1}{s_{\overline{m|}i'}}$$
$$t/\ddot{s}^{(p)}_{\overline{n|}i'} = s_{\overline{mn|}i'} \times \frac{1}{a_{\overline{m|}i'}}$$

$m = 1$ $p > 1$
$$t/\ddot{s}^{(p)}_{\overline{n|}i'} = (1+i\ )^{1/p} s_{\overline{n|}i} \times \frac{i}{i^{(p)}}$$

Nota: $i' = \frac{i^{(m)}}{m}$

FORMULARIO

VALOR PRESENTE DE ANUALIDADES CIERTAS DIFERIDAS ANTICIPADAS

Para el valor actual con renta no unitaria, multiplicar el valor de la renta por la fórmula correspondiente.

$m > 1$ $\quad m/p \neq$ entero
$p > 1$ $\quad p/m \neq$ entero

$$t/\ddot{a}^{(p)}_{\overline{n|}i'} = (1+i')^{-mt}(1+i')^{m/p}\frac{1}{p} \times \frac{1-(1+i')^{-mn}}{(1+i')^{m/p}-1}$$

$m = 1$
$p = 1$ $\quad m = p$

$$t/\ddot{a}^{(p)}_{\overline{n|}i} = (1+i)^{-t+1} a_{\overline{n|}i}$$

$$t/\ddot{a}^{(p)}_{\overline{n|}i} = a_{\overline{n+t-1|}i} - a_{\overline{t-1|}i}$$

$m > 1$
$p > 1$ $\quad m = p$

$$t/\ddot{a}^{(p)}_{\overline{n|}i'} = (1+i')^{-mt} \times \frac{1}{p}\left(1 + a_{\overline{mn-1|}i'}\right)$$

$m > 1$ $\quad p > m$
$p > 1$ $\quad p/m =$ entero

$$t/\ddot{a}^{(p)}_{\overline{n|}i'} = \frac{1}{m}(1+i')^{-mt}(1+i')^{m/p} a_{\overline{mn|}i'} \times \frac{i'}{i'^{(p/m)}}$$

$m > 1$ $\quad m > p$
$p > 1$ $\quad m/p =$ entero

$$t/\ddot{a}^{(p)}_{\overline{n|}i'} = \frac{1}{p}(1+i')^{-mt}(1+i')^{m/p} a_{\overline{mn|}i'} \times \frac{1}{s_{\overline{m/p|}i'}}$$

$$t/\ddot{a}^{(p)}_{\overline{n|}i'} = \frac{1}{p}(1+i')^{-mt} a_{\overline{mn|}i'} \times \frac{1}{a_{\overline{m/p|}i'}}$$

$m > 1$
$p = 1$

$$t/\ddot{a}^{(p)}_{\overline{n|}i'} = (1+i')^{-mt}(1+i')^{m} a_{\overline{mn|}i'} \times \frac{1}{s_{\overline{m|}i'}}$$

$$t/\ddot{a}^{(p)}_{\overline{n|}i'} = (1+i')^{-mt} a_{\overline{mn|}i'} \times \frac{1}{a_{\overline{m|}i'}}$$

$m = 1$
$p > 1$

$$t/\ddot{a}^{(p)}_{\overline{n|}i'} = (1+i')^{-t}(1+i')^{1/p} a_{\overline{n|}i} \times \frac{i}{i^{(p)}}$$

Nota: $i' = \frac{i^{(m)}}{m}$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732
15	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014
16	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279
17	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529
18	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765
19	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201
21	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404
22	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962
25	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133
26	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298
27	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456
28	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609
29	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900
31	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038
32	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172
33	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302
34	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428
35	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551
36	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670
37	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786
38	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899
39	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010
40	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117
41	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222
42	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325
43	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425
44	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522
45	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618
46	6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712
47	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803
48	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893
49	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981
50	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067
51	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152
52	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235
53	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316
54	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
55	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474
56	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551
57	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627
58	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701
59	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774
60	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846
61	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917
62	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987
63	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055
64	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122
65	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189
66	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254
67	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319
68	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382
69	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445
70	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506
71	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567
72	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627
73	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686
74	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745
75	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802
76	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859
77	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915
78	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971
79	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025
80	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079
81	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133
82	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186
83	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238
84	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289
85	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340
86	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390
87	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440
88	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489
89	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538
90	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586
91	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633
92	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680
93	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727
94	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773
95	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818
96	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863
97	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908
98	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952
99	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996

CONCLUSIONES

Al terminar de estudiar esta primera sección en los conceptos
e Matemáticas Financieras, el estudiante de matemáticas financie-
ras del Colegio de Bachilleres es capaz de tratar cualquier objeti-
vo relacionado al plan de estudios de matemáticas financieras de di-
cho colegio.

Globalmente. Puede aplicar el concepto de función lineal en la
solución de problemas de interés simple. Puede identificar la ana-
logía existente entre una progresión aritmética y el interés simple
para la comprensión de la solución de los problemas relativos a es-
te interés. Es capaz de identificar la analogía que hay entre una
progresión geométrica y el interés compuesto. De aplicar el teore-
ma del binomio en el cálculo de potencias (1+i), donde i es la tasa
de interés, para aproximaciones a un número dado de decimales. De
determinar el interés compuesto y el descuento compuesto y sus ele-
mentos para cualquier frecuencia de capitalización de la tasa, en
una operación financiera, así como plantear una ecuación de valor
cuando a cierta fecha se determina el pago de las deudas. También
apto para resolver problemas sencillos bancarios y comerciales me-
diante la aplicación de las anualidades, ya sea para determinar el
monto, el valor presente, la renta, el tiempo, o la tasa, correspon-
dientes a pagos vencidos o anticipados y si son diferidos, determi-
nar también el tiempo diferido. De identificar la semejanza entre
montos de anualidades no diferidas y diferidas. De identificar la
relación entre el valor presente de una anualidad no diferida y
una diferida cuando ambas son ordinarias o anticipadas.

REFERENCIA BIBLIOGRÁFICA

- BASICA.

1) Ayres, Frank, Jr, Ph. D. Matemáticas Financieras (teoría y problemas) Serie de Compendios Schaum; Ed. Mc. Graw - Hill, México, 1978.
2) De la Cueva G., Benjamín. Tablas Financieras; Distribuidor. Librería Porrúa Hnos. y Cía.S.A., México, 1978.
3) Act. Himmelstine de Chavarría, Lilia E. y Act. Toledano y Castillo, Mario Alfonso. Guía de Estudio de Matemáticas Financieras del Sistema de Enseñanza Abierta del Colegio de Bachilleres. Ed.-. Lugar.-. Año.-. (escritas a máquina).
4) Marin y Eyme. Tratado de Operaciones Comerciales y Financieras; Ed. Progreso, México, 1936.
5) Moore H., Justin. Manual de Matemáticas Financieras; Ed. Unión Tipográfica Editora Hispano Americana, México, 1975.

- DE CONSULTA.

1) Bruño G., M. Elementos de Algebra; Sociedad de Edición y d de Librería Franco Americana, México, 1928.
2) Lehmann H., Charles. Algebra; Ed. Limusa, México, 1979.
3) Olea Franco, Pedro y Sánchez del Carpio, Francisco L. Manual de Técnicas de Investigación Documental para la Enseñanza Media; Ed. Esfinge, México, 1980.