UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

PROYECTO DE TEXTO PARA CALCULO ACTUARIAL I

TESIS QUE PARA OBTENER EL TITULO DE ACTUARIO PRESENTA

F. ALONSO PEREZ TEJADA LOPEZ

1985

P R E F A C I O

La necesidad de contar con un texto, acorde a las necesidades del programa vigente para el curso de Cálculo Actuarial I que se imparte en la facultad de Ciencias de la Universidad Nacional Autónoma de México, me indujo a la elaboración de este trabajo cuyo objetivo primordial es: facilitar el aprendizaje de los principios fundamentales del Cálculo Actuarial e introducir al conocimiento de las Diferencias Finitas.

Inútil sería negar mi interés por dejar en forma explícita, la demostración de la forma de Woolhouse y su utilización en el ámbito actuarial.

Sin embargo, el contenido de este trabajo se adecuó a la duración del curso, por lo que fué imposible cubrir en su totalidad lo referente al Cálculo Actuarial para el ramo de vida individual.

Imposible terminar este prefacio sin expresar mi agradecimiento al Act. Aurora Valdéz Michel por la dirección de esta Tesis; a la Srita. Cony Santiago, por la colaboración inapreciable que me brindó en la mecanografía de la mayor parte del manuscrito; a todas las personas que de una u otra forma me otorgaron su ayuda; y, muy especialmente a Rogelio Prado por su apoyo y confianza.

I N D I C E

CAPITULO III

CAPITULO IV

CAPITULO V

INTRODUCCION

El Cálculo Actuarial es una rama de las matemáticas aplicadas destinada al análisis de capitales sujetos a contingencias. Se consideran aquí, contingencias sobre la vida humana, aún cuando los -- conceptos vertidos tienen una aplicación mucho más amplia.

Este trabajo está diseñado para ser usado como texto en los cursos de Cálculo Actuarial I y comprende material suficiente para completar un semestre. Su contenido está presentado en seis capítulos estrechamente relacionados y dos apéndices.

Los primeros dos capítulos están dedicados a la definición y construcción de tablas de mortalidad. En el capítulo III se presenta el concepto de anualidad contingente en sus diferentes modalidades.

Las primas netas únicas de seguros en caso de muerte se exponen en el siguiente capítulo. El capítulo V estudia lo referente a - primas netas periódicas.

Finalmente, en el capítulo VI se analiza la formación de reservas terminales y medias, así como algunos métodos para su determinación.

Puesto que este trabajo se diseñó con fines didácticos, se incluye en cada capítulo una serie de ejercicios teóricos y prácticos de diferentes grados de dificultad a fin de lograr la reafirmación de los conocimientos adquiridos.

En el apéndice A se resalta la importancia de las Diferencias Finitas en el campo actuarial y se demuestra la fórmula de Woolhouse; así mismo se deducen algunas expresiones de gran utilidad en problemas prácticos.

Por último, el apéndice B contiene diferentes tablas de mortalidad incluyendo sus Valores Conmutados y un extracto de la tabla Selecta y Ultima de la Experiencia Mexicana Básica.

CAPITULO I

TABLA DE MORTALIDAD

1.1 INTRODUCCION

El cálculo Actuarial tiene como objetivo fundamental la determinación de pagos que dependen de la sobrevivencia o muerte e involucran el concepto interés; por ello es necesario el análisis y medida de las contingencias de vida humana para hacer inferencias acerca de su comportamiento futuro.

La tabla de mortalidad es un conjunto de funciones biométricas que representa el comportamiento de una población ante el evento muerte. Aunque es posible construir tablas de mortalidad específicas desagregando las muertes por casualidad (accidente, cancer, enfermedades infeccionsas,etc), nos avocaremos aquí exclusivamente a la tabla General de Mortalidad y a ella se hará referencia.

1.2 FUNCIONES BIOMETRICAS

Supóngase que se tiene un número suficientemente grande de ratas recien nacidas, si se aisla a cada una en un cajón individual de tal forma que cada cajón tenga las mismas características a fin de homogeneizar el medio ambiente y se registra adecuadamente su fecha de nacimiento y muerte, al término de cinco años aproximadamente este grupo se habrá extinguido y su comportamiento respecto a la mortalidad podrá delinearse por medio de una tabla que indique el número de ratas vivas y muertas en cada período considerado.

Este método de medición de la mortalidad es muy simple pero raramente es utilizado por la dificultad de aislar el grupo ó efectuar su seguimiento hasta su extinción.

1.2.1 Funciones elementales.- Sea l_x un conjunto de personas con la característica de que todos sus elementos tienen exactamente la edad x.

Si se considera a l_x cerrado ante el proceso migratorio y se sujeta a observación hasta que todos sus elementos se destruyen por la acción de la mortalidad, el número de sobrevivientes en cada instante t formará una sucesión decreciente l_y, y = x+t, que constituye la función fundamental de la tabla de mortalidad.

Llamaremos a w la edad límite de vida si:

$$w = \min\left\{ y \mid l_y = 0\right\}$$

Si x es la edad inicial de la tabla, la cardinalidad de l_x le llamaremos "radix" ó "base"

Aunque comunmente se elige como radix alguna potencia conveniente de 10, su magnitud deberá ser tal que permita la significancia de la inferencia estadística y proporcione el grado de precisión deseado en los cálculos basados en la tabla de mortalidad.

Para facilitar el desarrollo matemático del cálculo actuarial, en lo sucesivo supondremos que l_x es una función contínua y diferenciable.

Si denotamos por d_x el número de personas que fallecen entre las edades x y x+1, entonces:

$$d_x = l_x - l_{x+1} \qquad (1.1)$$

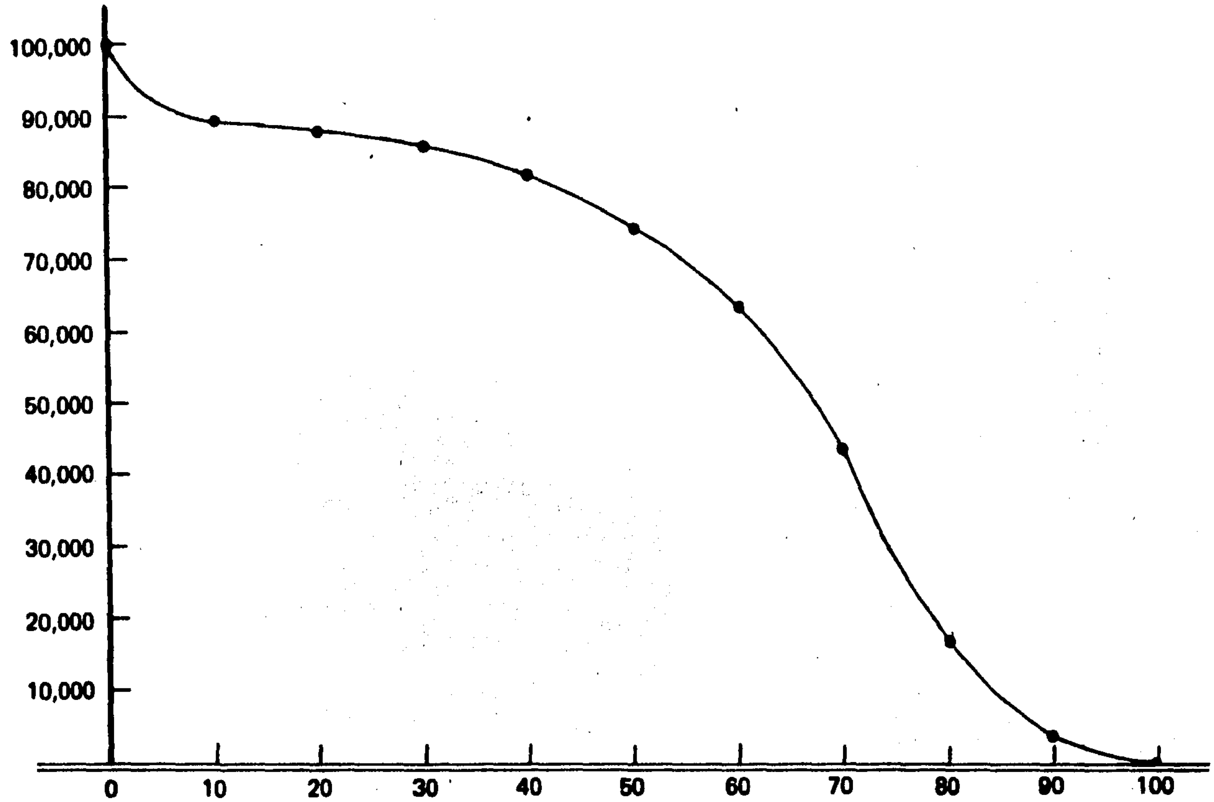


FIGURA 1.– Gráfica de l_x correspondiente a la Tabla de Vida Inglesa No. 10

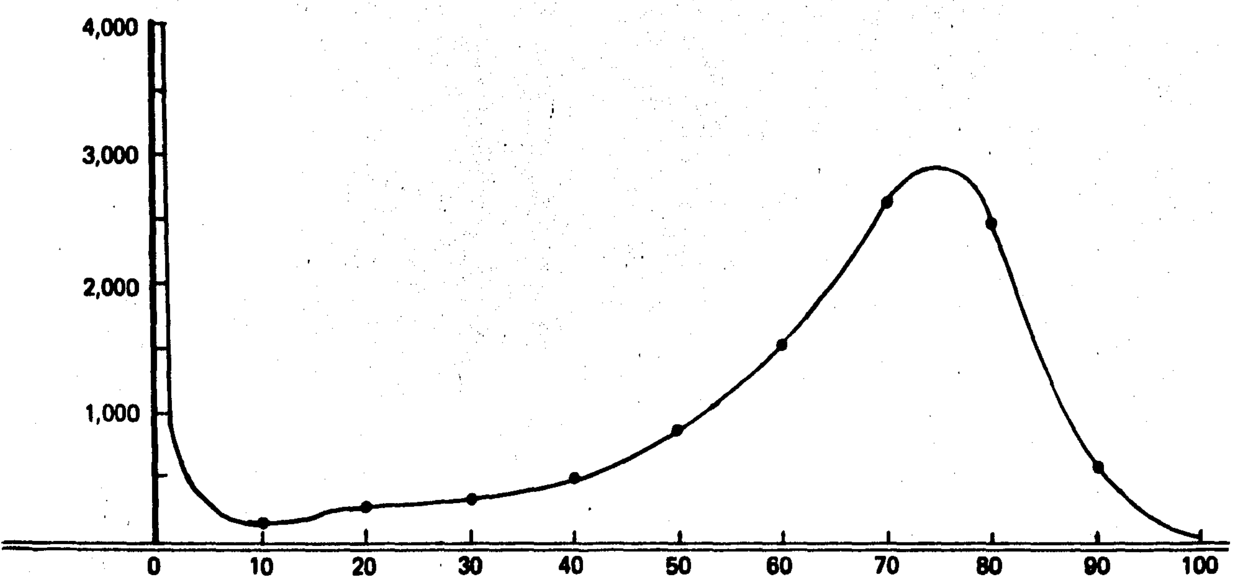


FIGURA 2.– Gráfica de d_x correspondiente a la Tabla Inglesa No. 10

1.2.2 Probabilidades de vida y muerte.- En lo sucesivo p y q denotarán probabilidades de vida y muerte respectivamente; estos símbolos tendrán asociados sufijos y prefijos correspondiendo el primero a la edad exacta de la persona y el segundo al número de años involucrados en la probabilidad en cuestión; así ${}_np_x$ representa la probabilidad de que una persona de edad exacta x, que abreviaremos de aquí en adelante (x), sobreviva a la edad x+n y ${}_nq_x$, la probabilidad de que (x) fallezca entre las edades x y x+n; esto es:

$$ {}_np_x = \frac{l_{x+n}}{l_x} = \prod_{t=0}^{n-1} {}_1p_{x+t} \qquad (1.2) $$

$$ {}_nq_x = \frac{l_x - l_{x+n}}{l_x} = 1 - {}_np_x \qquad (1.3) $$

Si se omite el prefijo, se supondrá que este es igual a la unidad.

Comunmente se conoce a q_x como "Tasa de Mortalidad".

La probabilidad de que (x) muera entre las edades x+n y x+n+m se representa por ${}_{n/m}q_x$, y

$$ {}_{n/m}q_x = \frac{l_{x+n} - l_{x+n+m}}{l_x} = {}_np_x - {}_{n+m}p_x \qquad (1.4) $$

$$ = ({}_np_x)\,({}_mq_{x+n}) \qquad (1.5) $$

$$ = \sum_{t=n}^{n+m-1} {}_{t/1}q_x = \sum_{t=n}^{n+m-1} \frac{d_{x+t}}{l_x} \qquad (1.6) $$

En la figura 3 se muestra la gráfica de q_x, en ella se puede apreciar claramente que la mortalidad durante la infancia es muy fuerte, decreciendo durante la juventud y acelerándose en edades cercanas, a w.

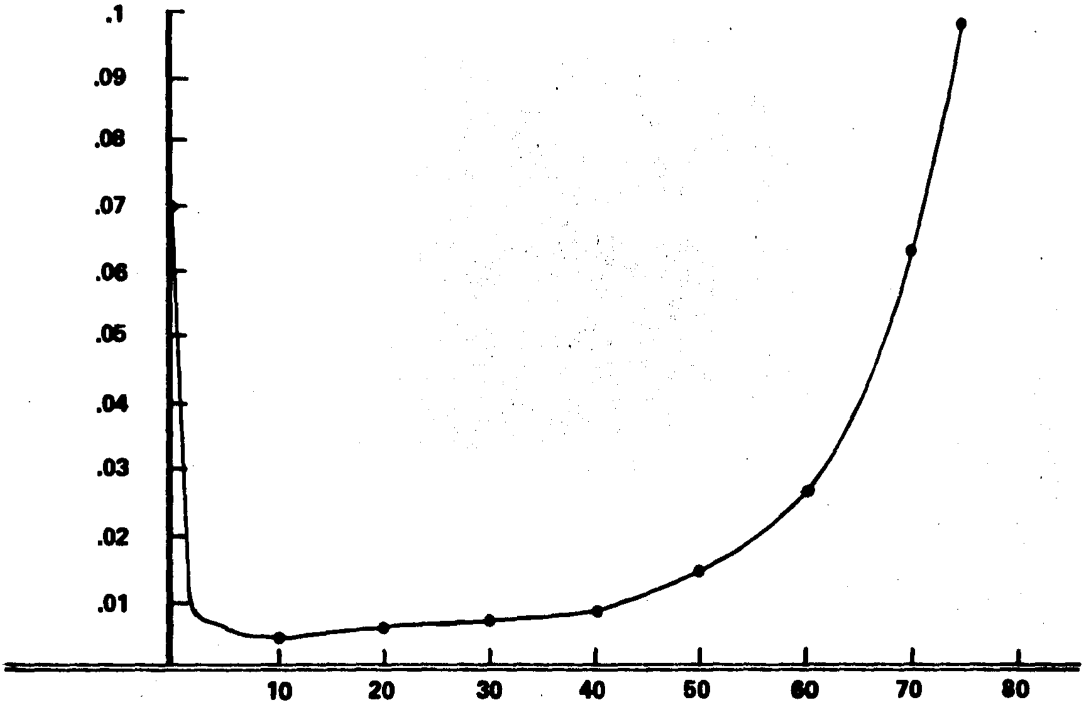


FIGURA 3.– Gráfica de q_x correspondiente a la Tabla Inglesa No. 10

1.2.3 Función de Supervivencia.- Considerando la probabilidad de que una persona de edad cero sobreviva hasta alcanzar la edad x $({}_xp_0)$, podemos escribir.

$$l_x = l_0 \ {}_xp_0 = l_0 \ S_{(x)} \qquad (1.7)$$

donde $S_{(x)}$ será conocida como "función de supervivencia".

Definida así la función de supervivencia, cumple las siguientes condiciones:

i) Es una función decreciente, por ser un cociente de una función decreciente (l_x) y una constante (el radix)

ii) Es una función contínua y diferenciable en el intervalo (0, w); - características atribuídas a l_x con anterioridad.

iii) $0 \leq S_{(x)} \leq 1$ por ser una probabilidad; se conoce que $S_{(w)} = 0$ y $S_{(0)} = 1$

Podemos construir funciones que cumplan estos requisitos y utilizando la expresión (1.7) calcular una tabla de mortalidad hipotética, no obstante, determinar una expresión algebraica que cumpla las condiciones antes descritas y corresponda al comportamiento - de una población no es cosa fácil; aun más, implica el conocimiento mismo del patrón de mortalidad y por ende la tabla de mortalidad respectiva.

Aunque de interés puramente teórico, podemos determinar las expresiones antes descritas en función de $S_{(x)}$; esto es:

$$d_x = l_0 \left(S_{(x)} - S_{(x+1)} \right)$$

$$_n p_x = \frac{S_{(x+n)}}{S_{(x)}}$$

$$_n q_x = \frac{S_{(x)} - S_{(x+n)}}{S_{(x)}}$$

$$_{n/m} q_x = \frac{S_{(x+n)} - S_{(x+n+m)}}{S_{(x)}}$$

1.2.4 Tasa Central de Mortalidad.- El área bajo la curva definida por l_x representa el número de años vividos en conjunto por todos los componentes del grupo inicial; si consideramos el área bajo la curva en el intervalo $(0,t)$ con $t < w$, esta representa el número de años vividos -- por todos los componentes del grupo desde su nacimiento hasta que alcanzaron la edad t y su complemento denotará el número de años que deberá aun vivir todos los componentes del grupo.

En este contexto, si representamos por L_x el área bajo la curva l_x en el intervalo $(x, x+1)$:

$$L_x = \int_x^{x+1} l_t \, dt = \int_0^1 l_{x+t} \, dt \qquad (1.8)$$

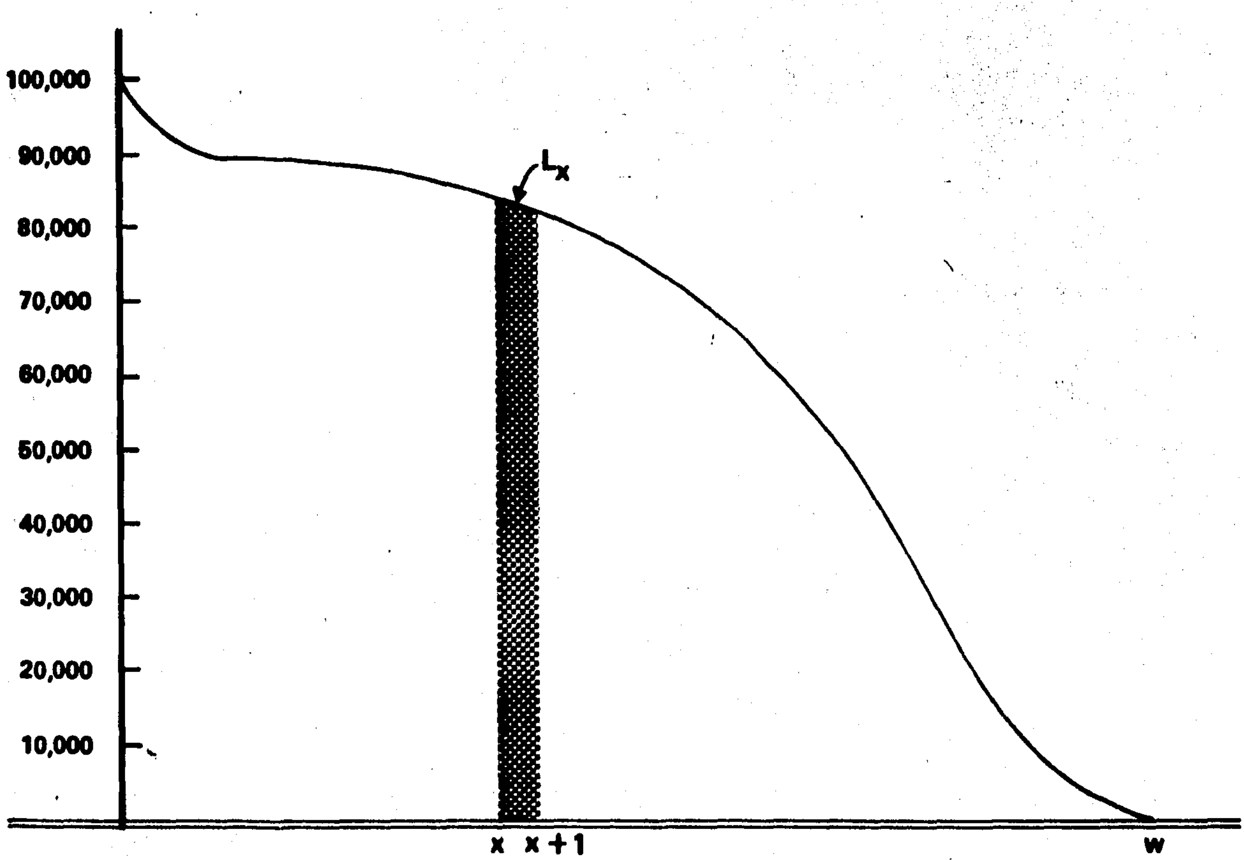


FIGURA 4.– Gráfica de L_x

Suponiendo uniformidad en las muertes (linealidad en l_x) en el intervalo de referencia y utilizando el teorema del valor medio para integrarles, podemos escribir:

$$L_x \doteq l_{x+1/2} \doteq l_x - \frac{1}{2}\ d_x = \frac{1}{2}\ (l_x + l_{x+1}) \qquad (1.9)$$

Otra forma de interpretar L_x - suponiendo que el número de nacimientos y muertes durante cualquier año se distribuye uniformemente - es considerarla como el número de personas que habiendo cumplido la edad x no han alcanzado la edad x+1; aquí l_{x+t} dt representa la cantidad de personas vivas de l_0 dt que nacieron hace exactamente x+t años con $0<t<1$

Definiremos como "tasa central de mortalidad" (m_x) a la relación existente entre d_x y L_x, esto es:

$$m_x = \frac{d_x}{L_x} \qquad (1.10)$$

$$\doteq \frac{2(l_x - l_{x+1})}{(l_x + l_{x+1})} = \frac{2(1 - p_x)}{(1 + p_x)} \qquad (1.11)$$

ó

$$m_x \doteq \frac{2(q_x)}{2 - q_x} \qquad (1.12)$$

de donde:

$$p_x \doteq \frac{2 - m_x}{2 + m_x} \qquad (1.13)$$

y

$$q_x \doteq \frac{2\ m_x}{2 + m_x} \qquad (1.14)$$

De la expresión (1.8) se deduce que:

$$\frac{d}{d_x} L_x = l_{x+1} - l_x = - d_x \qquad (1.15)$$

entonces:

$$m_x = - \frac{1}{L_x} \frac{d}{dx} L_x = - \frac{d}{dx} \ln (l_{x+1/2}) \qquad (1.16)$$

1.2.5 Esperanza de vida.- Si se interpreta a L_x como el número de personas - que habiendo cumplido la edad x no han alcanzado la edad x+1 y definimos:

$$T_x = \sum_{t=0}^{\infty} L_{x+t} = \int_0^{\infty} l_{x+t}\, dt \qquad (1.17)$$

T_x denotará el número de personas vivas de edad mayor ó igual a x.

Utilizando la expresión (1.9) tenemos:

$$T_x = \sum_{t=1}^{\infty} l_{x+t} + \frac{1}{2} l_x \qquad (1.18)$$

Puede también interpretarse a T_x como el tiempo que deben aun vivir todos los componentes del grupo; si denotamos por $\mathring{e}_x$ al tiempo promedio de vida de cada uno de los que sobrevivieron a la edad x, entonces:

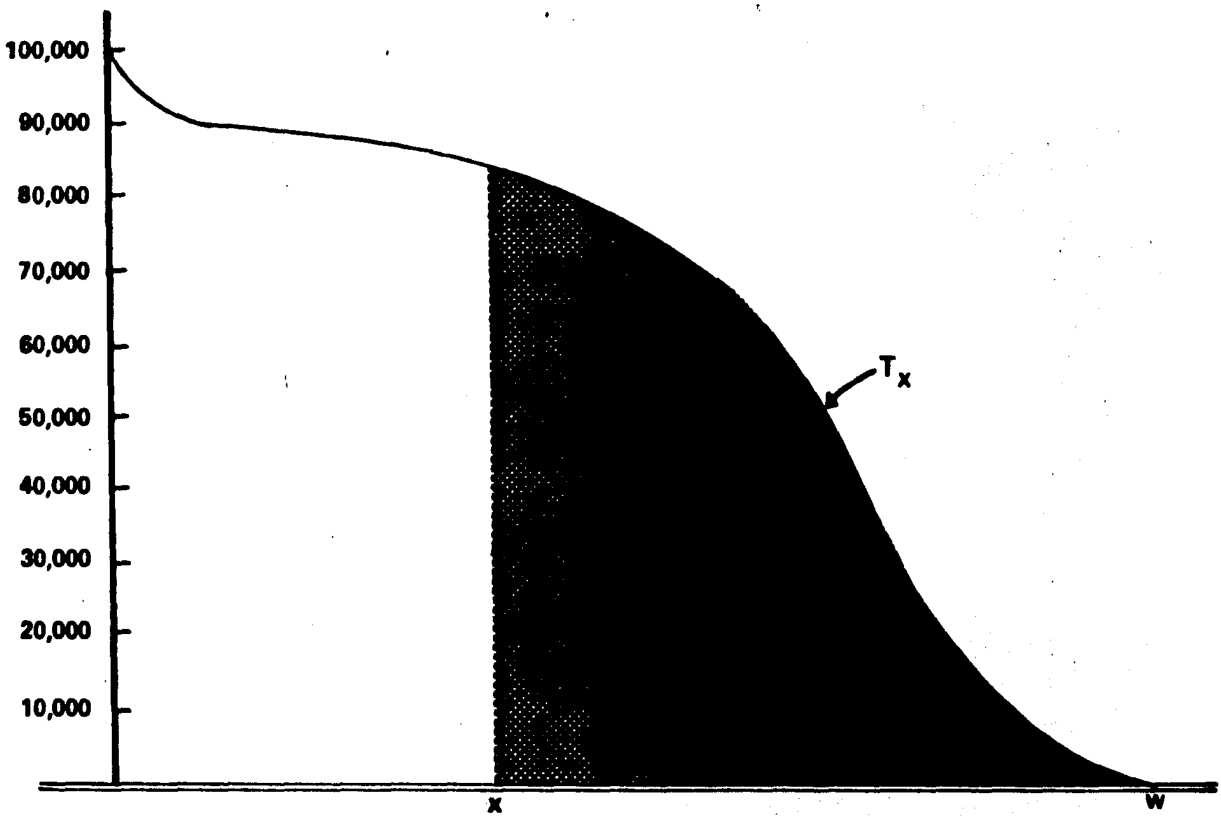


FIGURA 5.– Gráfica de T_x

$$\mathring{e}_x = \frac{T_x}{l_x} = \int_0^{\infty} \frac{l_{x+t}}{l_x}\, dt = \int_0^{\infty} {}_tp_x\, dt \qquad (1.19)$$

se conoce a $\mathring{e}_x$ como "Esperanza completa de vida"

Si suponemos que las muertes ocurren al inicio de cada año, simbolizando por e_x el tiempo esperado de vida, entonces:

$$e_x = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{l_{x+t}}{l_x} = \sum_{t=1}^{\infty} {}_tp_x = \mathring{e}_x - \frac{1}{2} \qquad (1.20)$$

Donde e_x se conoce como "esperanza abreviada de vida", ó simplemente "esperanza de vida".

Pueden definirse fórmulas para esperanzas de vida (completa ó abreviada) diferidas ó temporales; esto es:

$$_{n/}e_x = \sum_{t=n+1}^{\infty} {}_tp_x \qquad _{n/}\mathring{e}_x = \int_n^{\infty} {}_tp_x \, dt \qquad (1.21)$$

$$e_{x:\overline{n|}} = \sum_{t=1}^{n} {}_tp_x \qquad \mathring{e}_{x:\overline{n|}} = \int_0^{n} {}_tp_x \, dt \qquad (1.22)$$

$$_{n/}e_{x:\overline{m|}} = \sum_{t=n+1}^{n+m} {}_tp_x \qquad _{n/}\mathring{e}_{x:m} = \int_n^{n+m} {}_tp_x \, dt \qquad (1.23)$$

1.3 METODO PARA EDADES FRACCIONALES

Si se conoce la expresión matemática de la función de supervivencia, la valuación de probabilidades de vida y muerte para edades y períodos fraccionales no presenta problema alguno; sin embargo, comunmente l_x esta definida únicamente por la tabla de mortalidad que proporciona valores sólo para edades enteras; esto implica la utilización de métodos aproximados para l_y con $y \notin \mathbb{Z}$

La solución mas sencilla es la interpolación lineal. La utilización de este método supone que la función se comporta linealmente en el intervalo de interpolación, por lo que conviene que este sea lo mas pequeño posible para que el error incurrido no sea de consideración. Este método de aproximación, usado adecuadamente, ha demostrado ser suficientemente preciso.

Como:

$$l_y = l_{x+t} \qquad \text{con } x \in \mathbb{Z} \quad 0 < t < 1$$

Bajo la suposición de linealidad tenemos:

$$l_{x+t} \doteq l_x - t\, d_x \ , \qquad 0 \leq t \leq 1 \tag{1.24}$$

Usando esta expresión se deduce:

$$_t p_x = 1 - (t)\, q_x \tag{1.25}$$

$$_t q_x = (t)\, q_x \tag{1.26}$$

Otra suposición que ha demostrado resultados satisfactorios, consiste en asumir que el recíproco de l_x se comporta linealmente en intervalos pequeños.

$$\frac{1}{l_{x+t}} = \frac{1}{l_x} - t\left[\frac{1}{l_x} - \frac{1}{l_{x+t}}\right] , \quad 0 \leq t \leq 1 \tag{1.27}$$

Bajo esta suposición:

$$_{1-t}q_{x+t} = (1-t)\, q_x \qquad 0 \leq t \leq 1 \tag{1.28}$$

Esta expresión se conoce como la hipótesis de Balducci.

1.4 FUERZA DE MORTALIDAD

Si dividimos el intervalo (x, x+1) en t partes iguales y consideramos la probabilidad de fallecimiento en cualquier t-ésimo igual a ${}_{1/t}q_x$, entonces, $q_x^{(t)}$ será una tasa anual de mortalidad si:

$$q_x^{(t)} = (t) \ {}_{1/t}q_x = (t) \ \frac{l_x - l_{x+1/t}}{l_x}$$

y si $t \to \infty$, su valor límite denotará la fuerza de mortalidad.

$$\mu_x = \lim_{t \to \infty} q_x^{(t)}$$

$$= \frac{1}{l_x} \lim_{1/t \to 0} \frac{l_x - l_{x+1/t}}{1/t}$$

$$= - \frac{1}{l_x} \frac{d}{dx} l_x$$

Representando a la derivada de l_x con respecto a x por Dl_x, tenemos:

$$\mu_x = - \frac{Dl_x}{l_x} = - D \ln l_x \qquad (1.29)$$

El papel de μ_x en el cálculo actuarial es similar al de δ en la teoría de interés compuesto.

Puesto que μ_x ha sido definida como una tasa nominal anual de mortalidad, puede suceder que $\mu_x > 1$ para valores de x situados al inicio o final de la tabla.

De (1.29) se deduce:

$$l_x = \int_0^{\infty} l_{x+t}\,\mu_{x+t}\; dt \qquad (1.30)$$

$l_x \mu_x$ representa el número de muertes que ocurren en el momento de alcanzar la edad x y su gráfica es llamada "La curva de muertes".

La gráfica de $l_x \mu_x$ es similar a la figura 2 puesto que:

$$d_x \doteq l_{x+1/2}\,\mu_{x+1/2}$$

Utilizando (1.30) se obtienen fácilmente las siguientes expresiones:

$$d_x = \int_0^{1} l_{x+t}\,\mu_{x+t}\; dt \qquad (1.31)$$

$$_nq_x = \frac{1}{l_x}\int_0^{n} l_{x+t}\,\mu_{x+t}\; dt = \int_0^{n} {}_tp_x\,\mu_{x+t}\; dt \qquad (1.32)$$

$$_{n/m}q_x = \int_n^{m} {}_tp_x\,\mu_{x+t}\; dt \qquad (1.33)$$

puesto que $\mu_y = -\, Dl_n\, l_y$, si integramos en el intervalo (0, x)

$$\int_0^{x} \mu_y\; d_y = -\int_0^{x} D\ln\, l_y = -\ln \frac{l_x}{l_0}$$

de donde:

$$l_x = l_0\, e^{-\int_0^{x} \mu_y\; d_y} \qquad (1.34)$$

De esta expresión pueden obtenerse las correspondientes a las probabilidades de vida y muerte.

1.5 ESTIMACION DE μ_x

Si se desconoce la expresión matemática de $S_{(x)}$, la valuación de μ_x puede ser determinada mediante aproximaciones.

Si suponemos que l_x es una función de segundo grado, empleando la aproximación:

$$\frac{d\,f(x)}{dx} = \frac{1}{2}\left(f(x+1) - f(x-1) \right) \quad , \quad f(x) \text{ de segundo grado}$$

se deduce:

$$\mu_x = \frac{l_{x-1} - l_{x+1}}{(2)\, l_x} = \frac{d_{x-1} + d_x}{(2)\, l_x} \qquad (1.35)$$

Si suponemos que l_x es una función de cuarto grado:

$$l_x = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4$$

$$\frac{d}{dx} l_x = b + 2cx + 3dx^2 + 4ex^3$$

$$\left.\frac{d}{dx} l_x\right|_{x=0} = b$$

$$l_{-1} - l_1 = -\,2b - 2d$$

$$l_{-2} - l_2 = -\,4b - 16d$$

Entonces:

$$\frac{8(l_{-1} - l_1) - (l_2 - l_2)}{12} = - b = - \left.\frac{d}{dx} l_x\right|_{x=0}$$

Por lo tanto:

$$\mu_x = \frac{8(l_{x-1} - l_{x+1}) - (l_{x-2} - l_{x+2})}{12\, l_x} \qquad (1.36)$$

$$= \frac{7(d_{x-1} + d_x) - (d_{x-2} + d_{x+1})}{12\, l_x} \qquad (1.37)$$

De la relación entre los operadores derivada (D) y diferencia (Δ) se tiene:

$$D l_x = \left[\Delta l_x - \frac{\Delta^2 l_x}{2} + \frac{\Delta^3 l_x}{3} - \frac{\Delta^4 l_x}{4} + - \ldots\ldots \right]$$

De donde se deduce:

$$\mu_x = - \frac{1}{l_x} \left[\Delta l_x - \frac{\Delta^2 l_x}{2} + \frac{\Delta^3 l_x}{3} - \frac{\Delta^4 l_x}{4} + - \ldots\ldots \right]$$

$$= \frac{1}{l_x} \left[d_x - \frac{\Delta d_x}{2} + \frac{\Delta^2 d_x}{3} - \frac{\Delta^3 d_x}{4} + - \ldots\ldots \right] \qquad (1.38)$$

$$= \left[- \Delta \ln l_x + \frac{\Delta^2 \ln l_x}{2} - \frac{\Delta^3 \ln l_x}{3} + - \ldots\ldots \right]$$

1.6 LEYES DE MORTALIDAD

Se conoce como "Ley de mortalidad" a toda expresión matemática de l_x ó μ_x, que reproduzca el comportamiento de un grupo inicial ante el evento muerte.

La proposición mas simple corresponde a la presentada por Moivre (1725), se basa en la hipótesis de que l_x decrece en progresión aritmética, esto es:

$$l_x = k(w-x) \tag{1.39}$$

bajo la cual $q_x = \mu_x \; \forall x$

Un siglo despues, Gompertz enunció que la muerte se presentaba a consecuencia de dos causas generalmente coexistentes: el azar y el deterioro biológico ó la creciente impotencia de resistir la muerte. No obstante, su expresión sólo involucra la segunda causa; esto es:

$$\mu_x = BC^x \tag{1.40}$$

de donde se sigue:

$$\int_0^x \mu_y \, dy = \int_0^x BC^y \, dy = \frac{B}{\ln C} \int_0^x C^y \ln C \, dy$$

$$= \frac{B}{\ln C} \left[C^y \right]_0^x$$

$$= \frac{B}{\ln C} (C^x - 1)$$

haciendo:

$$\ln g = -\frac{B}{\ln C}$$

y utilizando (1.34), se tiene:

$$l_x = kg^{C^x} \qquad (1.41)$$

donde:

$$k = \frac{l_0}{g}$$

Gompertz demostró que (1.41) proporciona valores aceptables para edades comprendidas entre los 20 y 60 años, debiendo efectuar ajustes fuera de este rango.

En 1860, Makeham sugirió modificar la fórmula de Gompertz de la siguiente forma:

$$\mu_x = A+BC^x \qquad (1.42)$$

Donde A es una constante que representa el factor azar enunciado con anterioridad por Gompertz.

La expresión correspondiente para l_x bajo esta ley:

$$l_x = KS^x \, g^{C^x} \qquad (1.43)$$

con:

$$K = \frac{l_0}{g} \quad , \quad \ln S = -A \; , \quad \ln g = -\frac{B}{\ln C} \quad .$$

Proporciona valores aceptables para edades mayores ó iguales a 20.

Aunque se han propuesto otras leyes de mortalidad, las fórmulas de - Gompertz y Makeham presentan ventajas en aplicaciones prácticas debido a las cuales aún se utilizan.

Entre las leyes propuestas se puede citar:

La segunda ley de Makeham (1889)

$$\mu_x = A + Hx + BC^x \tag{1.44}$$

La generalización de la fórmula de Makeham por Perks (1931)

$$\mu_x = \frac{A + BC^x}{1+KC^{-x} + DC^x} \tag{1.45}$$

La ley de Lazarus (1935)

$$\mu_x = A + B_1 C_1^x + B_2 C_2^x \tag{1.46}$$

Ogborn sugirió en 1953:

$$\mu_x = \frac{A + x^2}{b_0+b_1x+b_2x^2+b_3x^3} \tag{1.47}$$

Analizando la gráfica de d_x (Figura 2), esta sugiere la existencia en l_x de al menos dos puntos de inflexión. A continuación, suponiendo la ley de Makeham, determinaremos valores de μ_x para los cuales el número de muertos alcanza el valor máximo y mínimo respectivamente.

como:

$$d_x \doteq l_{x+1/2}\,\mu_{x+1/2}$$

entonces:

$$\frac{d}{dx}(\mu_x\, l_x) = \mu_x \frac{d}{dx} l_x + l_x \frac{d}{dx}\mu_x$$

de (1.29) se sigue:

$$\frac{d}{dx}(\mu_x\, l_x) = -\,l_x\left[(\mu_x)^2 - \frac{d}{dx}(A+BC^x)\right]$$

$$= -\,l_x\left[(\mu_x)^2 - BC^x \ln C\right]$$

$$= -\,l_x\left[(\mu_x)^2 - (\mu_x - A)\ln C\right]$$

Si:

$$\frac{d}{dx}(\mu_x\, l_x) = -\,l_x\left[(\mu_x)^2 - \mu_x \ln C + A \ln C\right] = 0$$

y como $l_x \neq 0$

$$(\mu_x)^2 - \mu_x \ln C + A \ln C = 0$$

entonces:

$$\mu_x = \frac{\ln C \pm \sqrt{(\ln C)^2 \; - 4A \ln C}}{2}$$

$$= \ln C \left[\frac{1 \pm \sqrt{1 - (4A/\ln C)}}{2} \right] \qquad (*)$$

son los puntos de inflexión de la curva de muertes.

Ahora, usando el criterio de la segunda derivada:

$$\frac{d^2}{dx^2} (\mu_x \, l_x) = - l_x \left[2 \, \mu_x \, BC^x \ln C - BC^x \, (\ln C)^2 \right]$$

$$- \left[(\mu_x)^2 - BC^x \ln C \right] \frac{d}{dx} l_x$$

donde el segundo término de esta expresión se anula cuando μ_x toma alguno de los valores descritos en (*), ya que el máximo y mínimo en d_x corresponden a puntos de inflexión en l_x.

por lo tanto:

$$\frac{d^2}{dx^2} (\mu_x \, l_x) = - l_x \, BC^x \, (\ln C)^2 \left[\pm \sqrt{1 - (4A/\ln C)} \right]$$

Considerando que los rangos de los parámetros de la ley de Makeham son:

$$.001 < A < .003$$

$$10^{-6} < B < 10^{-3}$$

$$1.08 < C < 1.12$$

Cuando $\mu_x = \ln C \left[\frac{1 + \sqrt{1 - (4A/\ln C)}}{2} \right]$, la curva de muertes alcanza el máximo.

Para $\mu_x = \ln C \left[\frac{1 - \sqrt{1 - (4A/\ln C)}}{2} \right]$, $\frac{d^2}{dx^2}(\mu_x l_x) > 0$ por lo que - en ese punto de curva, alcanza el mínimo.

1.7 DETERMINACION DE LOS PARAMETROS DE μ_x

Si una tabla de mortalidad sigue la ley de Makeham, podemos determinar el valor de los parámetros de la fuerza de mortalidad a partir de valores equidistantes de l_x ó μ_x; el número de valores requeridos para - este cálculo estará en función del número de parámetros desconocidos.

La expresión de l_x correspondiente a la ley de Makeham (1.43) consta de cuatro parámetros, por ello, para su determinación se necesitará igual número de valores equidistantes de l_x, considerese los que corresponden a las edades x, x+t, x+2t, y x+3t; entonces.

$$\left.\begin{aligned} \ln l_x &= \ln K + x \ln S + C^x \ln g \\ \ln l_{x+t} &= \ln K + (x+t) \ln S + C^{x+t} \ln g \\ \ln l_{x+2t} &= \ln K + (x+2t) \ln S + C^{x+2t} \ln g \end{aligned}\right\} \quad (\alpha)$$

$$\ln l_{x+3t} = \ln K + (x+3t) \ln S + C^{x+3t} \ln g$$

Tomando primeras y segundas diferencias.

$$\Delta \ln l_x = t \ln S + C^x (C^t-1) \ln g$$

$$\Delta \ln l_{x+t} = t \ln S + C^{x+t} (C^t-1) \ln g \qquad (\beta)$$

$$\Delta \ln l_{x+2t} = t \ln S + C^{x+2t} (C^t-1) \ln g$$

y $$\Delta^2 \ln l_x = C^x (C^t-1)^2 \ln g \qquad (\gamma)$$

$$\Delta^2 \ln l_{x+t} = C^{x+t} (C^t-1)^2 \ln g$$

de donde:

$$\frac{\Delta^2 \ln l_{x+t}}{\Delta^2 \ln l_x} = C^t$$

ó $$\ln C = \frac{\ln (\Delta^2 \ln l_{x+t}) - \ln (\Delta^2 \ln l_x)}{t}$$

Sustituyendo el valor de C en cualquiera de las ecuaciones (γ) se determina g; procediendo de igual forma para las ecuaciones (α) y (β) se obtienen los valores de los parámetros restantes.

Con estos valores se determinarán los parámetros de la fuerza de mortalidad.

Notese que para determinar los parámetros únicamente se necesitaron -- cuatro valores equidistantes de l_x; para evitar esta inconveniencia, - se propuso tomar cuatro grupos de cuatro edades cada uno obteniendo -- así cuatro grupos de parámetros que, promediados adecuadamente, generan un nuevo grupo de parámetros.

Las cuatro series propuestas corresponden a las edades:

15, 35, 55 y 75
20, 40, 60 y 80
25, 45, 65 y 85
30, 50, 70 y 90

que cubren el rango de aplicabilidad de la fórmula de Makeham.

Para mayor precisión, se sugiere dividir el rango de aplicabilidad en tantos grupos como parámetros desconocidos se tenga, indexar los elementos de cada grupo obteniendo grupos de parámetros con los elementos de un mismo índice y promediar adecuadamente estos parámetros para obtener valores más representativos. Esto es, en nuestro ejemplo:

$$(x_{1,1}\ ,\ x_{2,1}\ ,\ x_{3,1}\ ,\ x_{4,1}) \rightarrow (k_1,\ g_1,\ s_1,\ c_1)$$

$$(x_{1,2}\ ,\ x_{2,2}\ ,\ x_{3,2}\ ,\ x_{4,2}) \rightarrow (k_2,\ g_2,\ s_2,\ c_2)$$

$$\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots$$

$$(x_{1,n}\ ,\ x_{2,n}\ ,\ x_{3,n}\ ,\ x_{4,n}) \rightarrow (k_n,\ g_n,\ s_n,\ c_n)$$

donde $x_{i,j}$ es el j-esimo elemento del grupo i.

entonces:

$$\left\{(k_i,\ g_i,\ S_i,\ C_i) \text{ con } i\in\overline{1,n}\right\} \xrightarrow{F} (k,\ g,\ S,\ C)$$

el 'promedio adecuado" se logra haciendo:

$$l_x = \left[\prod_{i=1}^{n} l_x^{(i)}\right]^{1/4}$$

donde $l_x^{(i)}$ representa la expresión para l_x usando el i-esimo grupo de parámetros.

entonces:

$$\ln k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \ln k_i$$

$$\ln S = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \ln S_i$$

$$\ln C = \frac{\ln\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} C_i^{x+t} \ln g_i\right] - \ln\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} C_i^{x} \ln g_i\right]}{t}$$

$$C^x \ln g = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} C_i^x \ln g_i$$

$$\ln g = \frac{1}{C^x} \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} C_i^x \ln g_i\right]$$

En la tabla de Mortalidad H^m, George King y Hardy determinaron los parámetros de μ_x formando sumas de los elementos de cada grupo en que se divide el rango de aplicabilidad de la ley de mortalidad y con estas, calcularon el valor de los parámetros usando primeras y segundas diferencias según el procedimiento descrito al inicio de esta sección.

1.8 EJERCICIOS

1.8.1 Completa el siguiente fragmento de tabla de mortalidad:

x	l_x	d_x	q_x	p_x
0		14358		.88720
1			.03508	
2				
3	106588		.01544	
4				.98737
5				

1.8.2 Utilizando la tabla 2 del apéndice, calcule la probabilidad de que una persona de edad 30:

a) Sobreviva a la edad 40
b) Muera antes de alcanzar la edad 50
c) Muera entre las edades 49 y 50
d) Muera entre las edades 40 y 50

1.8.3 Dada $S_{(x)} = \left[\dfrac{Z - T\,(x)^2}{Z}\right]^{1/2}$ con $Z = 3600$, $T = 0{,}5625$

a) Verificar que $S_{(x)}$ es función de supervivencia.
b) Calcular la probabilidad de que una persona de edad 15 fallezca entre las edades 21 y 24.
c) Calcular la probabilidad de que una persona de edad 0 fallezca antes de alcanzar la edad 13.

1.8.4 Dadas las tasas centrales de mortalidad

$m_{35} = 0.00865$; $m_{36} = 0.00889$; $m_{37} = 0.00914$; $m_{38} = 0.00942$

y considerando $l_{35} = 30000$, calcular: l_{36}, l_{37}, l_{38} y l_{39}

1.8.5 Demuestra que:

a) $${}_{n/}\mathring{e}_x = {}_n p_x\, \mathring{e}_{x+n} = e_{x:\overline{n}|} + \frac{1}{2}\, {}_n p_x$$

b) $${}_{n/}\mathring{e}_{x:m} = {}_{n/}\mathring{e}_x - {}_{n+m/}\mathring{e}_x$$

c) $$\mathring{e}_{x:\overline{n}|} = e_{x:n} + \frac{1}{2}(1 - {}_n p_x)$$

d) $$\mathring{e}_x = \frac{1}{l_x}\int_0^\infty t\, l_{x+t}\, \mu_{x+t}\, dt$$

e) $$\mu_x \doteq \frac{1}{\mathring{e}_x}\left[1 + \frac{1}{2}(\mathring{e}_{x+1} - \mathring{e}_{x-1})\right]$$

1.8.6 Bajo la hipótesis de Balducci, demuestra:

a) $${}_t q_x = \left[\frac{t}{1 - (1-t)\, q_x}\right] q_x$$

$$\mu_{x+t} = \frac{q_x}{1 - (1-t)\, q_x}$$

$${}_t p_x\, \mu_{x+t} = \frac{q_x\,(1-q_x)}{\left[1 - (1-t)\, q_x\right]^2}$$

1.8.7 Si $\mu_x = A + B_1\, C_1^x + B_2\, C_2^x$, demuestra que:

$$l_x = K\, S^x\, g_1^{C_1^x}\, g_2^{C_2^x}$$

y encontrar expresiones para determinar los valores de los paráme-
tros de μ_x suponiendo conocidos valores para l_x .

1.8.8 De una tabla de mortalidad estandar, se prepara una segunda tabla - duplicando la fuerza de mortalidad si q'_x denota la tasa de mortalidad de la nueva tabla, como es q'_x en relación a $2q_x, \forall x$?

1.8.9 Si $\mu_{50} = 0.01542$ y $\mu_{51} = 0.01631$, determina p_{50} .

CAPITULO II

CONSTRUCCION DE TABLAS DE MORTALIDAD

2.1 TABLA GENERAL

Construir una tabla de mortalidad mediante el seguimiento de un grupo suficientemente numeroso es practicamente imposible, aún cuando se lograra, carecería de valor práctico debido a la magnitud del período de observación y los cambios en las condiciones de vida; para evitar esta inconveniencia, se prefiere determinar las probabilidades de muerte seleccionando adecuadamente grupos de personas de una misma edad (estratificando la población) que estarán sujetos a observación durante un período menor.

Las tasas de mortalidad pueden obtenerse también de datos censales y registros oficiales de defunciones; en este procedimiento las muertes contabilizadas pueden no estar en relación con las personas censadas si se considera una población abierta a proceso migratorio; en tal caso el análisis de la medida de la mortalidad es mas minucioso y deberá recurrirse a bibliografía especializada en el tema.

2.2 TABLAS DE MORTALIDAD DE ASEGURADOS

Las compañías de seguros no pueden utilizar la tabla general de mortalidad debido a que los asegurados constituyen una población especial (depurada) a la cual un sujeto puede ingresar solo si goza de buena salud ó bajo condiciones especiales (extraprimados) a juicio de la propia aseguradora.

En la práctica, las personas aseguradas son seleccionadas por medio de un exámen médico u otro dispositivo (cuestionarios exhaustivos) que muestre su aceptabilidad a tasas regulares de seguro y se les llama "vidas selectas" desde este punto de vista. Es de esperarse que las tasas de mortalidad entre tales vidas selectas sea menor en relación al resto de las personas, al menos durante un lapso de tiempo después de efectuada la selección (usualmente este período es de 3 ó 5 años).

Podemos entonces clasificar a la población asegurada en tres categorías:

a) La que esta dentro del período de selección
b) La que esta fuera del período de selección
c) Toda la población asegurada sin distinción alguna.

y por tanto, elaborar tres tipos de tablas de mortalidad a las que respectivamente llamaremos; selectas, finales y agregadas.

Las investigaciones sobre mortalidad basadas en los registros de las compañías aseguradoras permiten rastrear la experiencia de cada asegurado - cuando ingresa al seguro, si muere, si se retira ó si continua en el gremio de asegurados al final del período de observación.

Es obvio que no todos los asegurados estan expuestos al riesgo de muerte durante el mismo tiempo; se deberá entonces determinar en primera instancia el número de personas expuestas al riesgo de muerte para cada edad, mismos que denotaremos por E_x, para a continuación obtener la tasa de mortalidad como la razón del número de muertes y los expuestos al riesgo; esto es:

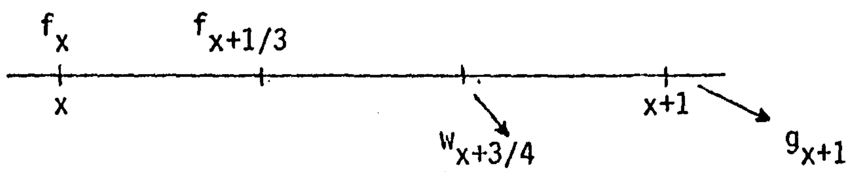
$$q_x = \frac{\theta_x}{E_x} \tag{2.1}$$

donde θ_x representa el número de <u>asegurados</u> que fallecieron entre las edades x y x+1 .

Para ejemplificar, aunque en forma muy simplificada, como pueden determinarse las tasas de mortalidad, supongase que una compañía aseguradora opera bajo las siguientes condiciones:

a) Asegura únicamente a personas de edad exacta x ó x+1/3 (x no necesariamente entero).
b) Todas las pólizas vencen a la edad exacta x+1
c) Sólo se permiten retiros voluntarios a la edad exacta x+3/4 .

Si f_x denota el número de personas aseguradas a la edad exacta x, w_x el número de asegurados que abandonan el plan (por causas distintas de muerte) a edad exacta x, θ_x el número de personas que fallecen entre las edades x y x+1 mientras estan aseguradas y g_{x+1} el número de personas que alcanzan la edad x+1 estando aseguradas;



se deduce que:

$$g_{x+1} = f_x + f_{x+1/3} - w_{x+3/4} - \theta_x$$

y

$$\theta_x = f_x\ (q_x) + f_{x+1/3}\ ({}_{\frac{2}{3}}q_{x+1/3}) - w_{x+3/4}\ ({}_{\frac{1}{4}}q_{x+3/4})$$

En esta última ecuación se desconocen tres parámetros, siendo evidente la incorporación de alguna suposición que permita determinar la tasa de mortalidad. Si suponemos válida de hipótesis de Balducci, (1.28), es decir que ${}_{1-t}q_{x+t}$ se comporta linealmente para $0 < t < 1$, tenemos:

$$q_x = \frac{\theta_x}{f_x + \frac{2}{3} f_{x+1/3} - \frac{1}{4} w_{x+3/4}}$$

De (2.1) se sigue que:

$$E_x = f_x + \frac{2}{3} f_{x+1/3} - \frac{1}{4} w_{x+3/4}$$

donde los coeficientes de las variables involucradas corresponden al tiempo de exposición a la muerte durante el ejercicio de este seguro.

En la práctica deben considerarse las terminaciones de pólizas y los existentes en el momento de verificarse la investigación que denotaremos por t_x y h_x respectivamente. Si se considera la edad entera mas cercana a la edad de ingreso como la equivalente de la edad exacta de entrada al gremio de asegurados y se contabilizan las terminaciones y retiros voluntarios de acuerdo a la edad entera mas próxima, los expuestos al riesgo pueden determinarse por la expresión:

$$E_{x+1} = E_x + n_{x+1} + \frac{1}{2} (h_x + h_{x+1}) - (\theta_x + w_{x+1} + \frac{1}{2} (t_x + t_{x+1}))$$

con $E_x = n_x - w_x$ para la edad mas baja.

Donde n_x denota el número de entrantes a edad x.

La forma de calcular los expuestos al riesgo variará de acuerdo al tipo de tabla de que se trate. Así, para tablas agregadas se agrupará todas las personas que corresponden a una misma edad alcanzada para determinar su experiencia de mortalidad.

En las tablas finales se agruparán, de acuerdo a la edad alcanzada, únicamente las personas que esten fuera del período de selección, es decir, aquéllas con una antigüedad en el seguro mayor al período en que se admite actua la selección.

Si se trata de tablas selectas, se debe efectuar el cálculo de la tasa de mortalidad para cada edad y durante el período de selección; en tal caso, el elemento "entrantes" solo se considera en la primera edad de cada grupo. Esto implica la introducción de funciones que dependan de la edad de selección y el tiempo transcurrido desde entonces. Se ha adoptado encerrar entre corchetes la edad de ingreso al seguro de tal forma que:

$l_{[x]+t}$ representa el número de personas que alcanzan la edad x+t de las $l_{[x]}$ que fueron seleccionadas a edad x.

En este contexto $q_{[x]}$ y $q_{[x-2]+2}$ representan la probabilidad de que una persona de edad x fallezca antes de alcanzar la edad x+1, pero corresponden a grupos diferentes en su composición; es decir:

$q_{[x]}$ es la probabilidad de que una persona que ingresó a edad x fallezca durante el primer año de aseguramiento.

y

$q_{[x-2]+2}$ es la probabilidad de que una persona que ingresó a edad x-2 fallezca durante el tercer año de aseguramiento.

Las expresiones para las funciones d, p, q, y μ correspondientes a la tabla selecta, suponiendo un período de selección de 5 años son:

$$d_{[x]+n} = \begin{cases} l_{[x]+n} - l_{[x]+n+1} & \text{si} \quad n<4 \\ l_{[x]+n} - l_{x+n+1} & \text{si} \quad n=4 \\ l_{x+1} - l_{x+n+1} & \text{si} \quad n>4 \end{cases} \qquad (2.2)$$

$$_np_{[x]} = \begin{cases} \dfrac{l_{[x]+n}}{l_{[x]}} & \text{si} \quad n<5 \\ \\ \dfrac{l_{x+n}}{l_{[x]}} & \text{si} \quad n\geq 5 \end{cases} \qquad (2.3)$$

$$
{}_{n/m}q_{[x]} = \begin{cases} \dfrac{l_{[x]+n} - l_{[x]+n+m}}{l_{[x]}} & \text{si} \quad n + m < 5 \\[2ex] \dfrac{l_{[x]+n} - l_{x+n+m}}{l_{[x]}} & \text{si} \quad n < 5 \ \text{y} \ n+m > 5 \\[2ex] \dfrac{l_{x+n} - l_{x+n+m}}{l_{[x]}} & \text{si} \quad n \geqslant 5 \end{cases} \qquad (2.4)
$$

$$
\mu_{[x]} = - D \ln l_{[x]}
$$

$$
\mu_{[x]} = \Delta l_{[x]} - \frac{\Delta^2 l_{[x]}}{2} + \frac{\Delta^3 l_{[x]}}{3} - \frac{\Delta^4 l_{[x]}}{4} + - \dots\dots \qquad (2.5)
$$

Las tasas de mortalidad proporcionadas por la tabla selecta muestran - a paridad de edades - una convergencia hacia las tasas correspondientes de la tabla última a medida que se aleja la época de la selección; esto es:

$$
q_{[x]} < q_{[x-1]+1} < q_{[x-2]+2} < q_{[x-3]+3} < q_x
$$

si se supone un período de selección de 4 años.

Esto puede verse con claridad en el cuadro siguiente, extraído de la tabla 4 del Apêndice B, donde se considera un período de selección de 4 - años.

Edad de Ingresos	Valores de q_{x+t} (al millar)				q_x (al millar)	x
x	t = 0	t = 1	t = 2	t = 3		
					1.2199	26
					1.2100	27
24	0.6099	0.8539	1.0369	1.1495	1.2099	28
25	0.6100	0.8540	1.0285	1.1494	1.2900	29
26	0.6099	0.8470	1.0285	1.2255	1.3699	30
27	0.6050	0.8469	1.0965	1.3015	1.4499	31
28	0.6049	0.9029	1.1645	1.3774	1.5299	32

Nótese que la tabla anterior comprende tasas de mortalidad dentro y fuera del período de selección, este tipo de tabla es conocida como SELECTA Y ULTIMA.

Una vez que se han obtenido las tasas de mortalidad para todas las edades (dentro y fuera del período de selección) se determinan los distintos valores de l_x eligiendo un radix y utilizando la expre-- sión.

$$l_{x+n} = l_x \prod_{t=1}^{n-1} p_{x+t}$$

Con los valores de l_x se obtienen en forma sucesiva los de

$$l_{[x]+t} \; , \; l_{[x]+t-1} \; , \; \ldots \; , \; l_{[x]} \quad \text{ya que:}$$

$$l_{[x]+t} = (l_{[x]+t+1}) \; / \; p_{[x]+t}$$

donde $l_{[x]+t+1} = l_{x+t+1}$ si $t+1$ es mayor o igual al período de selección.

2.3 AJUSTE DE TABLAS DE MORTALIDAD

Generalmente los datos que sirven de base para la determinación de la tasa de mortalidad presentan inexactitudes que afectan los resultados obtenidos; es necesario entonces, efectuar un ajuste previo a la construccion de la tabla para eliminar errores, cualquiera que sea su causa.

Los procedimientos de ajuste pueden clasificarse en: gráficos, mecánicos y analíticos. En los primeros se sustituye la poligonal resultante de la investigación por una curva lo mas regular posible, teniendo como principal desventaja la dependencia del criterio personal de quien efectúa el ajuste.

Los métodos mecánicos se basan en el empleo de promedios para eliminar las asperezas originales, deduciendo fórmulas algebráicas del cálculo de diferencias finitas; el inconveniente de este método consiste en la imposibilidad de ajuste en los valores extremos, estando estos en correspondencia con el número de elementos utilizados en la determinación de los promedios.

En cuanto a los métodos analíticos se supone una expresión algebráica para alguna función biométrica, obteniendo de los datos observados los correspondientes parámetros; posteriormente, dando valores a la variable independiente se determinan los valores ajustados y con ellos el resto de la tabla de mortalidad. En el capítulo anterior se hizo referencia a la determinación de los parámetros cuando se suponen válidas las leyes de Gompertz ó Makeham.

2.4 EJERCICIOS

2.4.1 Dado el siguiente fragmento de tabla, determinar los correspondientes que muestren el número de personas que permanecen con vida y las que fallecen para cada edad si se supone un radix a edad 20 de 10000.

Edad ingreso	$q_{[x]+t}$ (al millar)					q_x	Edad alcanzada
	t = 0	t = 1	t = 2	t = 3	t = 4	(al millar)	X
						3.92	20
						4.02	21
						4.12	22
						4.18	23
						4.25	24
20	2.73	3.59	3.80	3.96	4.13	4.31	25
21	2.78	3.66	3.86	4.01	4.18	4.35	26
22	2.83	3.72	3.91	4.06	4.21	4.39	27
23	2.86	3.76	3.96	4.08	4.24	4.41	28
24	2.91	3.80	3.99	4.11	4.26	4.43	29

2.4.2 Utilizando la tabla 4 del Apéndice B determine

$$\mu_{[25]},\ \mu_{[25]+1} \text{ y } \mu_{[25]+4}$$

2.4.3 De una expresión para ${}_{2/6}q_{[30]+2}$ suponiendo un período de selección de 5 años.

2.4.4 Utilizando la tabla 4 del Apéndice B, calcule:

a) La probabilidad de que una persona de edad 25, que ingreso al seguro a edad 23 fallezca antes de alcanzar la edad 27 .

b) La probabilidad de que una persona de edad 24, que fue asegurada hace tres años fallezca entre las edades 28 y 30 .

CAPITULO III

ANUALIDADES CONTINGENTES

3.1 INTRODUCCION

En este capítulo nos avocaremos a desarrollar fórmulas para calcular el valor presente de una serie de pagos futuros, los cuales son contingentes a la sobrevivencia de una persona designada. A este valor presente se le conoce como PRIMA NETA UNICA (PNU); neta porque se calcula sin tomar en cuenta los gastos que origina la operación; única, porque se paga en una sola ocasión (al contratar la operación).

3.2 DOTAL PURO

Supongamos que l_x personas de edad x desean contribuir en igual cantidad para formar un fondo que provea de una unidad monetaria a cada uno de los que sobrevivan a un período de n años; de acuerdo a la tabla de mortalidad, al término de ese lapso habrá l_{x+n} sobrevivientes. Si ${}_nE_x$ representa la contribución de cada una de las l_x personas, entonces:

$$ {}_nE_x = V^n \frac{l_{x+n}}{l_x} = V^n \; {}_nP_x \qquad (3.1) $$

$$ = \frac{D_{x+n}}{D_x} \qquad (3.2) $$

donde $D_{x+t} = V^{x+t} \quad l_{x+t}$

Los beneficios anteriormente descritos constituyen lo que se conoce como: "seguro dotal puro" cuya prima neta única puede ser representada también por $A_{x:\overset{1}{\overline{n|}}}$; el "1" sobre la "$\overline{n|}$" en el símbolo anterior significa que el pago (unitario) se verificará solo si transcurren n años y (x) permanece vivo.

${}_nE_x$ puede ser interpretado como el valor presente de una unidad monetaria que será pagada a (x) si y solo si sobrevive a un período de n - años. Podemos entonces decir que ${}_nE_x$ juega, en el calculo actuarial, el mismo papel que V^n en la teoría de interés compuesto.

3.3 ANUALIDADES

Una anualidad contingente (ó anualidad de vida) es una serie de pagos - periodicos que dependen de la sobrevivencia de una persona (anualidad - simple) ó de un grupo de vidas (anualidad compuesta). Definida asi, es evidente que una anualidad simple (únicamente trataremos aqui este tipo de anualidades) puede ser representada como una serie de dotales puros de vencimientos periodicos.

Las anualidades simples se clasifican de acuerdo a:

a) la fecha de inicio del intervalo de pago en relación al momento de contratación.- Se dice que la anualidad es ordinaria si el intervalo de pago inicia en el momento de la contratación ó diferida si - empieza después de transcurrido un período preestablecido.

b) la forma en que se realizan los pagos.- Anticipada si los pagos se verifican al inicio cada período ó Vencida si se realizan en el final de cada período.

c) la temporalidad de los pagos (o intervalo de pago).- Vitalicias si se pagan mientras la persona este viva, sin límite de tiempo ó -- Temporales si es a lo mas por un lapso preestablecido.

d) la frecuencia de pago por período.- Pagaderas una vez por período, pagaderas m-veces por período o pagaderas en forma contínua.

e) a la tasa de los pagos.- Constantes o niveladas si los pagos son - iguales durante todo el intervalo de pago; en caso contrario seran Variables.

Las anualidades tienen una característica de cada subclasificación y a menos que otra cosa sea especificada, al hablar de anualidad se estará haciendo referencia a una anualidad ordinaria, vencida, vitalicia, pagadera una vez por período (períodos anuales) y con pagos constantes (Unitarios).

Clasificacion de Anualidades				
inicio de pagos	forma de pago	temporalidad de pagos	frecuencia de pago	tasa de los pagos
ordinarias	vencidas	vitalicias	una vez por período	constantes
diferidas	anticipadas	temporales	m-veces por período	
			contínuas	Variables

TABLA 3.1 clasificación de anualidades

3.3.1 Anualidades pagaderas una vez por período.- La anualidad mas simple consiste de pagos unitarios que se efectuaran al final de cada año que (x) complete, a esta anualidad se le conoce como "anualidad vitalicia". Si a_x representa la prima neta única, entonces:

$$a_x = \sum_{t=1}^{\infty} {}_tE_x = \sum_{t=1}^{\infty} v^t \, {}_tp_x = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{D_{x+t}}{D_x} \qquad (3.3)$$

Definiendo $N_{x+r} = \sum_{t=r}^{\infty} D_{x+t}$, se tiene:

$$a_x = \frac{N_{x+1}}{D_x} \qquad (3.4)$$

Si los pagos contingentes a la sobrevivencia de (x) se limitan a un período máximo de n años (anualidad temporal a n años) representaremos su PNU por $a_{x:\overline{n}|}$ ó $_{/n}a_x$; esto es:

$$a_{x:\overline{n}|} = \sum_{t=1}^{n} {}_tE_x = \sum_{t=1}^{n} \frac{D_{x+t}}{D_x}$$

$$= \frac{1}{D_x}\left[\sum_{t=1}^{\infty} D_{x+t} - \sum_{t=n+1}^{\infty} D_{x+t}\right]$$

$$= \frac{N_{x+1} - N_{x+n+1}}{D_x} \qquad (3.5)$$

Una anualidad vitalicia diferida n años es aquélla en la cual el intervalo de pagos contingentes a la sobrevivencia de (x) ha de empezar a correr despues de transcurridos n años; representando por $_{n/}a_x$ la PNU de esta anualidad:

$$_{n/}a_x = \sum_{t=n+1}^{\infty} {}_tE_x = \sum_{t=n+1}^{\infty} \frac{D_{x+t}}{D_x}$$

$$= \frac{N_{x+n+1}}{D_x} \qquad (3.6)$$

$$= a_x - a_{x:\overline{n}|} \qquad (3.7)$$

$$= {}_nE_x\, a_{x+n} \qquad (3.8)$$

$_{n/m}a_x$ ó $_{n/}a_{x:\overline{m}|}$ representa la PNU de una anualidad diferida n y y temporal a m años, entonces;

$$_{n/m}a_x = \sum_{t=n+1}^{m+n} {}_tE_x$$

$$= (\ N_{x+n+1} - N_{x+n+m+1}\ ) / D_x \qquad (3.9)$$

$$= {}_{n/}a_x - {}_{n+m/}a_x \qquad (3.10)$$

$$= a_{x:\overline{n+m|}} - a_{x:\overline{n|}} \qquad (3.11)$$

Cuando los pagos son hechos al inicio de cada año, las primas netas únicas se denotan mediante el uso de diéresis sobre la "a"; asi:

$$\ddot{a}_x = \sum_{t=0}^{\infty} {}_tE_x = \frac{N_x}{D_x} \qquad (3.12)$$

$$\ddot{a}_{x:\overline{n|}} = \sum_{t=0}^{n-1} {}_tE_x = \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x} \qquad (3.13)$$

$$_{n/}\ddot{a}_x = \sum_{t=n}^{\infty} {}_tE_x = \frac{N_{x+n}}{D_x} \qquad (3.14)$$

$$_{n/m}\ddot{a}_x = \sum_{t=n}^{\infty} {}_tE_x = \frac{N_{x+n} - N_{x+n+m}}{D_x} \qquad (3.15)$$

de donde se deducen con facilidad las relaciones siguientes:

$$\ddot{a}_x = 1 + a_x \qquad (3.16)$$

$$\ddot{a}_{x:\overline{n|}} = 1 + a_{x:\overline{n-1|}} \qquad (3.17)$$

$$_{n/}\ddot{a}_x = {}_{n-1/}a_x \qquad (3.18)$$

$$_{n/m}\ddot{a}_x = {}_{n-1/m}a_x \qquad (3.19)$$

TABLA 3.2

DIAGRAMA DE PAGOS

Bajo la suposición de que (x) fallece despues de n+m años

año en que fallece (x) ↓

	x	x+1	x+2	...	x+n-1	x+n	x+n+1	x+n+2	...		x+n+m	...		
${}_nE_x$:						1								
a_x :		1	1		1	1	1	1		1	1		1	1
$\ddot{a}_x$:	1	1	1		1	1	1	1		1	1		1	1
$a_{x:\overline{n}\rceil}$:		1	1		1	1								
$\ddot{a}_{x:\overline{n}\rceil}$:	1	1	1		1									
${}_{n/}a_x$:							1	1		1	1		1	1
${}_{n/}\ddot{a}_x$:						1	1	1		1	1		1	1
${}_{n/m}a_x$:							1	1		1	1			
${}_{n/m}a_x$:						1	1	1		1				

TABLA 3.3 EXPRESIONES PARA ANUALIDADES

Tipo de Anualidad		Simbolo	Equivalencias en termino de: $_tP_x$	Equivalencias en termino de: D_x	Equivalencias en termino de: N_x y D_x
VENCIDAS	Vitalicia	a_x	$\sum_{t=1}^{\infty} v^t \, _tP_x$	$\frac{1}{D_x} \sum_{t=1}^{\infty} D_{x+t}$	$\frac{N_{x+1}}{D_x}$
	Temporal a n años	$a_{x:\overline{n}\rceil}$	$\sum_{t=1}^{n} v^t \, _tP_x$	$\frac{1}{D_x} \sum_{t=1}^{n} D_{x+t}$	$\frac{N_{x+1} - N_{x+n+1}}{D_x}$
	Diferida n años	$_{n/}a_x$	$\sum_{t=n+1}^{\infty} v^t \, _tP_x$	$\frac{1}{D_x} \sum_{t=n+1}^{\infty} D_{x+t}$	$\frac{N_{x+n+1}}{D_x}$
	Diferida n años y temporal a m años	$_{n/m}a_x$	$\sum_{t=n+1}^{n+m} v^t \, _tP_x$	$\frac{1}{D_x} \sum_{t=n+1}^{n+m} D_{x+t}$	$\frac{N_{x+n+1} - N_{x+n+m+1}}{D_x}$
ANTICIPADAS	Vitalicia	$\ddot{a}_x$	$\sum_{t=0}^{\infty} v^t \, _tP_x$	$\frac{1}{D_x} \sum_{t=0}^{\infty} D_{x+t}$	$\frac{N_x}{D_x}$
	Temporal a n años	$\ddot{a}_{x:\overline{n}\rceil}$	$\sum_{t=0}^{n-1} v^t \, _tP_x$	$\frac{1}{D_x} \sum_{t=0}^{n-1} D_{x+t}$	$\frac{N_x - N_{x+n}}{D_x}$
	Diferida n años	$_{n/}\ddot{a}_x$	$\sum_{t=n}^{\infty} v^t \, _tP_x$	$\frac{1}{D_x} \sum_{t=n}^{\infty} D_{x+t}$	$\frac{N_{x+n}}{D_x}$
	Diferida n años y temporal a n años.	$_{n/m}\ddot{a}_x$	$\sum_{t=n}^{n+m-1} v^t \, _tP_x$	$\frac{1}{D_x} \sum_{t=n}^{n+m-1} D_{x+t}$	$\frac{N_{x+n} - N_{x+n+m}}{D_x}$

En la tabla 3.3, observe que las expresiones para anualidades en términos de valores conmutados (N_n, D_x) son de la forma:

$$\frac{N_z - N_{z+k}}{D_x}$$

donde z es la edad en que se verifica el primer pago, k es el número de pagos que componen la anualidad y x es la edad en que se realiza la operación (edad focal).

Cuando, en las anualidades diferidas, el período de diferimiento es una fracción de año, la PNU puede ser aproximada utilizando la expresión (A.31); esto es:

$$\begin{aligned} {}_{\frac{1}{k}/}\ddot{a}_x &= \sum_{t=0}^{\infty} {}_{t+\frac{1}{k}}E_x \qquad , \qquad k \text{ entero} \\ &= \frac{1}{D_x} \sum_{t=0}^{\infty} D_{x+t+\frac{1}{k}} \\ &= \ddot{a}_x - \frac{1}{k} + \frac{k-1}{2k^2}\frac{\Delta D_x}{D_x} - \frac{(k-1)\ (2k-1)}{6k^3}\frac{\Delta^2 D_x}{D_x} + \ldots \qquad (3.20) \end{aligned}$$

En la práctica se omiten los terminos que involucran ΔD_x, $\Delta^2 D_x$,... lo que equivale a suponer que D_x se comporta linealmente; entonces:

$$ {}_{\frac{1}{k}/}\ddot{a}_x = \ddot{a}_x - \frac{1}{k} \qquad (3.21)$$

Esta expresión puede obtenerse interpolando linealmente entre ${}_{0/}\ddot{a}_x$ y ${}_{1/}\ddot{a}_x$

De (3.8) y (3.21) se deduce fácilmente:

$$ {}_{\frac{1}{k}/}\ddot{a}_{x:n} = \ddot{a}_{x:\overline{n}|} - \frac{1}{k}(1 - {}_nE_x) \qquad (3.22)$$

Hasta este momento únicamente hemos considerado anualidades con pagos constantes; nos ocuparemos ahora de aquellas en las que la tasa de pago varía con el tiempo, mismas que llamaremos: anualidades variables.

Genericamente representaremos por $(Va)_z$ a la PNU de anualidades variables, donde z indicará si se trata de una anualidad vitalicia ó de una temporal, debiendo especificar en cada caso la tasa de pago por período.

Consideraremos aquí el caso mas simple de anualidades variables, aquellas en las que los pagos forman una progresión aritmética de razón h y primer elemento k; si suponemos que el período de pago se limita a un máximo de n años (anualidad temporal), los pagos y períodos correspondientes son:

	k	k+h	k+2h	...	k+(n-2)h	k+(n-1)h
x	x+1	x+2	x+3	...	x+n-1	x+n

que pueden ser representados en "forma piramidal" como:

						h	
					h	h	
				.	.	.	n-1 elementos
			h		h	h	
		h	h		h	h	
	k	k	k		k	k	
x	x+1	x+2	x+3	...	x+n-1	x+n	

donde cada nivel corresponde a una anualidad nivelada temporal y diferida; entónces:

$$(Va)_{x:\overline{n}|} = k\,a_{x:n} + h\left({}_{1/}a_{x:\overline{n-1}|} + {}_{2/}a_{x:\overline{n-2}|} + \ldots + {}_{n-1/}a_{x:\overline{1}|}\right)$$

$$= k\,\frac{N_{x+1} - N_{x+n+1}}{D_x} + \frac{h}{D_x}\sum_{t=1}^{n-1}(N_{x+t+1} - N_{x+n+1})$$

definiendo $S_{x+r} = \sum_{t=r}^{\infty} N_{x+t} = \sum_{t=r}^{\infty} t\, D_{x+t}$.

$$(V\ddot{a})_{x:n} = \frac{k(N_{x+1} - N_{x+n+1}) + h\,(S_{x+2} - S_{x+n+1} - (n-1)N_{x+n+1})}{D_x}$$

$$= \frac{k(N_{x+1} - N_{x+n+1}) + h\,(S_{x+2} - S_{x+n+2} - nN_{x+n+1})}{D_x}$$

(3.23)

Cuando k = h = 1 , la PNU será denotada por $(I\ddot{a})_{x:\overline{n}|}$, esto es:

$$(I\ddot{a})_{x:\overline{n}|} = \frac{S_{x+1} - S_{x+n+1} - (n)N_{x+n+1}}{D_x} \qquad (3.24)$$

Si k = n y h = -1 , la PNU será denotada por $(D\ddot{a})_{x:\overline{n}|}$(anualidad decreciente), entonces:

$$(D\ddot{a})_{x:\overline{n}|} = \frac{(n)N_{x+1} - (S_{x+2} - S_{x+n+2})}{D_x} \qquad (3.25)$$

Los pagos correspondientes a una anualidad variable vitalicia bajo el esquema planteado, pueden tambien ser representados en forma piramidal donde cada nivel corresponde a una anualidad nivelada vitalicia.

$$(V\ddot{a})_x = k\ddot{a}_x + h({}_{1/}\ddot{a}_x + {}_{2/}\ddot{a}_x + \ldots..)$$

$$= \frac{1}{D_x}\left(k\, N_{x+1} + h \sum_{t=1}^{\infty} N_{x+t+1}\right)$$

$$= \frac{1}{D_x}\left(k\, N_{x+1} + h\, S_{x+2}\right) \qquad (3.26)$$

Cuando k = h = 1 , se tiene;

$$(I a)_x = \frac{N_{x+1} + S_{x+2}}{D_x} = \frac{S_{x+1}}{D_x} \qquad (3.27)$$

En algunos casos, la variación en la tasa de pagos cesa despues de un determinado período, en tal caso representaremos la PNU por: $(V_{\overline{n|}} a)_x$; donde $\overline{n|}$ significa el número de período en que varía la tasa de pagos.

Representando los pagos en forma piramidal, podemos expresar la PNU como una combinación de anualidades niveladas, esto es:

$$\begin{array}{cccccccccc}
 & & & & & & h & h & h & \ldots \\
 & & & & & h & h & h & h & \ldots \\
 & & & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\
 & & & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\
 & & & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\
 & & & h\ \ldots & & h & h & h & h & \ldots \\
 & & h & h\ \ldots & & h & h & h & h & \ldots \\
 & k & k & k\ \ldots & & k & k & k & k & \ldots \\
\hline
x & x+1 & x+2 & x+3 & \ldots & x+n-1 & x+n & x+n+1 & x+n+2 &
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
(V_{\overline{n|}} a)_x &= k\, a_x + h \sum_{t=1}^{n-1} {}_{t/}a_x \\
&= \frac{1}{D_x} \left(k\, N_{x+1} + h \sum_{t=1}^{n-1} N_{x+t+1} \right) \\
&= \frac{1}{D_x} \left(k\, N_{x+1} + h\, (S_{x+2} - S_{x+n+1}) \right) \qquad (3.28)
\end{aligned}$$

Si k = h = 1 , resulta:

$$(I_{\overline{n|}} a)_x = \frac{1}{D_x} (S_{x+1} - S_{x+n+1}) \qquad (3.29)$$

La PNU de una anualidad variable diferida n años; $(V_{n/}a)_x$, en similitud con la expresión (3.8), se define como:

$$(V_{n/}a)_x = {}_nE_x\,(Va)_{x+n} \tag{3,30}$$

o en su caso particular:

$$(I_{n/}a)_x = {}_nE_x\,(Ia)_{x+n} \tag{3.31}$$

Razonando de igual forma se deducen facilmente expresiones de anualidades variables anticipadas.

$$(V\ddot{a})_x = \frac{1}{D_x}\,(N_x + h\,S_{x+1}) \tag{3,32}$$

$$(I\ddot{a})_x = \frac{1}{D_x}\,S_x \tag{3,33}$$

$$(V\ddot{a})_{x:\overline{n|}} = \frac{1}{D_x}\,(\,k(N_x - N_{x+n}) + h\,(S_{x+1} - S_{x+n+1} - n\,N_{x+n})\,) \tag{3,34}$$

$$(I\ddot{a})_{x:\overline{n|}} = \frac{1}{D_x}\,(S_x - S_{x+n} - (n)N_{x+n}) \tag{3.35}$$

$$(D\ddot{a})_{x:\overline{n|}} = \frac{1}{D_x}\,(n\,N_x - S_{x+1} + S_{x+n+1}) \tag{3.36}$$

$$(V_{\overline{n|}}\ddot{a})_x = \frac{1}{D_x}\,(k\,N_x + h\,(S_{x+1} - S_{x+n})\,) \tag{3.37}$$

$$(I_{\overline{n|}}\ddot{a})_x = \frac{1}{D_x}\,(S_x - S_{x+n}) \tag{3.38}$$

$$(V_{n/}\ddot{a})_x = {}_nE_x\,(V\ddot{a})_{x+n} \tag{3.39}$$

$$(I_{n/}\ddot{a})_x = {}_nE_x\,(I\ddot{a})_{x+n} \qquad (3.40)$$

3.3.2 Anualidades pagaderas m veces por período.- En la práctica, con frecuencia se presentan casos en los cuales el pago de las rentas se efectua m veces por período, por ello es importante el poder determinar la PNU de anualidades de este tipo.

En la notación de las anualidades vistas con anterioridad añadiremos un supraindice de la forma: (m), que indicará que la renta es pagadera m veces por período. Asi $a_x^{(m)}$ denota el valor presente de una anualidad unitaria pagadera m veces al año; es decir, pagos de 1/m cada m-ésimo de tiempo.

	1/m	1/m	1/m	...	1/m	1/m ...
x	$x+\frac{1}{m}$	$x+\frac{2}{m}$	$x+\frac{3}{m}$	...	$x+1$	$x+\frac{m+1}{m}$ ...

Entonces tenemos que:

$$a_x^{(m)} = \frac{1}{m}\sum_{t=1}^{\infty} {}_{\frac{t}{m}}E_x = \frac{1}{m}\sum_{t=1}^{\infty} v^{t/m}\,{}_{\frac{t}{m}}p_x$$

$$= \frac{1}{m\,D_x}\sum_{t=1}^{\infty} D_{x+\frac{t}{m}}$$

Utilizando la expresión (A.31):

$$a_x^{(m)} = \frac{1}{D_x}\left[\sum_{t=1}^{\infty} D_{x+t} + \frac{m-1}{2m}D_x + \frac{m^2-1}{12m^2}D'_x - \dots\right]$$

$$\doteq a_x + \frac{m-1}{2m} - \frac{m^2-1}{12m^2}\,(\mu_x+\delta) \qquad (3.41)$$

puesto que:

$$\frac{D'_x}{D_x} = \frac{d}{dx}\ln D_x = \frac{d}{dx}\ln l_x + \frac{d}{dx}\ln V^x = -(\mu_x + \delta)$$

En la práctica, es usual considerar como aproximación los dos primeros términos de (3.41), esto es:

$$a_x^{(m)} \doteq a_x + \frac{m-1}{2m} \qquad (3.42)$$

La expresión anterior puede obtenerse considerando una anualidad cuyos pagos cada m-ésimo fueran de una unidad monetaria; es decir:

	1	1	1	...	1	1	...
x	x+1/m	x+2/m	x+3/m	...	x+1	$\frac{x+m+1}{m}$	...

$$(m)\, a_x^{(m)} = \sum_{t=1}^{m} {}_{\frac{t}{m}/}\ddot{a}_x$$

De (3.21) se sigue:

$$(m)\, a_x^{(m)} \doteq \sum_{t=1}^{m} \left(a_x + \frac{m-t}{m} \right) = (m)\, a_x + \sum_{t=1}^{m-1} \frac{t}{m}$$

$$\doteq (m)\, a_x + \frac{(m-1)\ m}{2m}$$

de donde:

$$a_x^{(m)} \doteq a_x + \frac{m-1}{2m}$$

En la derivación de formulas para anualidades diferidas y temporales - pagaderas m veces al año, utilizaremos la expresión (3.42).

Para una anualidad diferida n años, pagadera m veces al año, se tiene:

$$_{n/}a_x^{(m)} = {}_nE_x \; a_{x+n}^{(m)} = {}_nE_x \left(a_{x+n} + \frac{m-1}{2m}\right)$$

$$= {}_{n/}a_x + \frac{m-1}{2m}\; {}_nE_x \qquad (3.43)$$

Y para una temporal a n años:

$$a_{x:\overline{n|}}^{(m)} = a_x^{(m)} - {}_{n/}a_x^{(m)}$$

$$= \left(a_x + \frac{m-1}{2m}\right) - \left({}_{n/}a_x + \frac{m-1}{2m}\; {}_nE_x\right)$$

$$= a_{x:\overline{n|}} + \frac{m-1}{2m}\left(1 - {}_nE_x\right) \qquad (3.44)$$

Las anualidades variables pueden ser pagaderas m veces por período; - la representación de los pagos en forma piramidal permite deducir con facilidad las expresiones correspondientes, esto es:

$$(Ia)_x^{(m)} = \sum_{t=0}^{\infty} {}_{t/}a_x^{(m)}$$

$$= \frac{1}{D_x}\sum_{t=0}^{\infty}\left(N_{x+t+1} - \frac{m-1}{2m} D_{x+t}\right)$$

$$= \frac{1}{D_x}\left(S_{x+1} - \frac{m-1}{2m} N_x\right) \qquad (3.45)$$

$$= (Ia)_x - \frac{m-1}{2m}\,\ddot{a}_x \qquad (3.46)$$

Aun mas, podemos pedir que la tasa de pago se incremente m veces por - período y que el pago anual total sea pagadero m veces por período. Supongamos que la tasa de pago es de 1/m anual pagadera m veces al año, incrementandose en 1/m al final de cada m-ésimo; los pagos y períodos correspondientes son:

$$
\begin{array}{cccccccc}
 & \frac{1}{m^2} & \frac{2}{m^2} & \frac{2}{m^2} & & \frac{t}{m^2} & \cdots \\
\hline
x & x+\frac{1}{m} & x+\frac{2}{m} & x+\frac{3}{m} & \cdots & x+\frac{t}{m} & \cdots
\end{array}
$$

Si $(I^{(m)}a)_x^{(m)}$ representa la PNU de esta anualidad, entonces:

$$(I^{(m)}a)_x^{(m)} = \frac{1}{D_x} \sum_{t=1}^{\infty} \frac{t}{m^2} D_{x+\frac{t}{m}}$$

utilizando (A.31) se sigue:

$$(I^{(m)}a)_x^{(m)} = \frac{1}{D_x} \left[\sum_{t=1}^{\infty} t\, D_{x+t} + \frac{m-1}{2m} \left(t\, D_{x+t} \right)_{t=0} + \frac{m^2-1}{12m^2} \left(\frac{d}{dt}\, t\, D_{x+t} \right)_{t=0} - \cdots \right]$$

$$\doteq (Ia)_x + \frac{m^2-1}{12m^2} \qquad (3.47)$$

puesto que:

$$\frac{d}{dt}\, t\, D_{x+t} \Big|_{t=0} = \Big[D_{x+t} - t\, D_{x+t} \left(\mu_{x+t} + \delta \right) \Big]_{t=0} = D_x$$

Las fórmulas correspondientes para anualidades anticipadas pueden dedu cirse de manera similar; algunas de ellas son:

$$\ddot{a}_x^{(m)} \doteq a_x + \frac{m+1}{2m} \qquad (3.48)$$

$$\doteq \ddot{a}_x - \frac{m-1}{2m} \qquad (3.49)$$

$$ {}_{n/}\ddot{a}_x^{(m)} = {}_nE_x\, \ddot{a}_{x+n}^{(m)} \doteq {}_nE_x\, (\ddot{a}_x - \frac{m-1}{2m}) \qquad (3.50)$$

$$ \doteq {}_{n/}\ddot{a}_x - \frac{m-1}{2m}\, {}_nE_x $$

$$ \ddot{a}_{x:\overline{n|}}^{(m)} = \ddot{a}_x^{(m)} - {}_{n/}\ddot{a}_x^{(m)} $$

$$ \doteq \ddot{a}_{x:\overline{n|}} - \frac{m-1}{2m}\, (1 - {}_nE_x) \qquad (3.51)$$

$$ (I\ddot{a})_x^{(m)} = \sum_{t=0}^{\infty} {}_{t/}\ddot{a}_x^{(m)} $$

$$ \doteq \frac{1}{D_x}\, (S_x - \frac{m-1}{2m}\, N_x) \qquad (3.52)$$

$$ \doteq (I\ddot{a})_x - \frac{m-1}{2m}\, \ddot{a}_x \qquad (3.53)$$

3.3.3 Anualidades contínuas.- Se conoce como anualidad contínua a aquella serie de pagos infinitamente pequeños que se efectuan a intervalos tam-bien infinitamente pequeños; puede decirse que se trata de un caso particular de una anualidad pagadera m veces por período donde m es infinitamente grande.

Para representar la PNU de este tipo de anualidades, sobrepondrémos una línea sobre la "a", asi $\bar{a}_x$ representará la PNU de una anualidad unitaria, vitalicia, pagadera en forma contínua.

$$ \bar{a}_x = \lim_{m \to \infty} a_x^{(m)} \doteq a_x + \frac{1}{2} \qquad (3.54)$$

$$ \bar{a}_{x:\overline{n|}} = \lim_{m \to \infty} a_{x:\overline{n|}}^{(m)} $$

$$ \doteq a_{x:\overline{n|}} + \frac{1}{2}\, (1 - {}_nE_x) \qquad (3.55)$$

$$\doteq \frac{1}{2}(\ddot{a}_{x:\overline{n}|} + a_{x:\overline{n}|}) \qquad (3.55')$$

De manera similar pueden obtenerse expresiones para otras anualidades - contínuas, aún cuando estas son de valor puramente teórico.

La PNU de anualidades contínuas puede tambien expresarse en términos - de una integral; esto es:

$$\bar{a}_x = \lim_{m \to \infty} \frac{1}{m} \sum_{t=1}^{\infty} {}_{\frac{t}{m}}E_x$$

$$= \int_0^{\infty} {}_tE_x \, dt = \int_0^{\infty} \frac{D_{x+t}}{D_x} dt$$

$$= \int_0^{\infty} v^t \, {}_tp_x \, dt \qquad (3.56)$$

Si definimos:

$$\bar{D}_x = \int_0^1 D_{x+t} \, dt \qquad (3.57)$$

$$\bar{N}_{x+r} = \sum_{t=r}^{\infty} \bar{D}_{x+t} = \int_0^{\infty} D_{x+t} \, dt \qquad (3.58)$$

entonces:

$$\bar{a}_x = \frac{\bar{N}_x}{\bar{D}_x} \qquad (3.59)$$

En la práctica, para calcular $\bar{D}_x$ y $\bar{N}_x$ se asume un comportamiento li-- neal de D_{x+t} para $0 \leq t \leq 1$, lo que conduce a:

$$\bar{D}_x \doteq D_{x+1/2} = \frac{1}{2}(D_x + D_{x+1}) \qquad (3.60)$$

$$\bar{N}_x \doteq \frac{1}{2}(N_x + N_{x+1}) = N_{x+1} + \frac{1}{2} D_x \qquad (3.61)$$

Para anualidades contínuas temporales y diferidas se tiéne:

$$\bar{a}_{x:\overline{n|}} = \int_0^n v^t \; {}_tp_x \, dt = \frac{\bar{N}_x - \bar{N}_{x+n}}{D_x} \qquad (3.62)$$

$$_{n/}\bar{a}_x = \int_n^\infty v^t \; {}_tp_x \, dt = \frac{\bar{N}_{x+n}}{D_x} \qquad (3.63)$$

$$_{n/m}\bar{a}_x = \int_n^{n+m} v^t \; {}_tp_x \, dt = \frac{\bar{N}_{x+n} - \bar{N}_{x+n+m}}{D_x} \qquad (3.64)$$

Y para anualidades contínuas variables:

$$(I\bar{a})_x = \sum_{t=0}^{\infty} {}_{t/}\bar{a}_x = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{\bar{N}_{x+t}}{D_x}$$

definiendo: $S_{x+r} = \sum_{t=r}^{\infty} \bar{N}_{x+t}$

$$(I\bar{a})_x = \frac{\bar{S}_x}{D_x} \qquad (3.65)$$

$$\doteq (Ia)_x + \frac{1}{2} \ddot{a}_x \qquad (3.66)$$

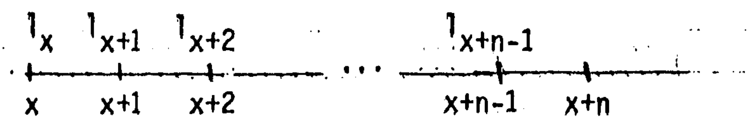
$$(\bar{I}\bar{a})_x = \lim_{m \to \infty} (I^{(m)}a)_x^{(m)} = \int_0^\infty tv^t \; {}_tp_x \, dt$$

$$= \frac{1}{D_x} \int_0^\infty t \, D_{x+t} \, dt \qquad (3.67)$$

3.3.4 Otros tipos de anualidades.- Supongase que cada miembro de un grupo de l_x personas conviene en hacer un pago de una unidad monetaria al principio de cada año durante un período de n años, bajo la condición de repartir proporcionalmente el fondo acumulado a ese momento entre los sobrevivientes; el capital que le corresponde a cada sobreviviente recibe el nombre de "anualidad de vida paciente" ó "anualidad de -

paciencia" y se denota por $\ddot{s}_{x:\overline{n}|}$.

De acuerdo a la tabla de mortalidad las contribuciones al fondo son de la forma:



por lo que:

$$\ddot{s}_{x:\overline{n}|} = \frac{1}{l_{x+n}} \sum_{t=0}^{n-1} l_{x+t}\,(1+i)^{n-t}$$

$$= \frac{1}{v^{x+n}\, l_{x+n}} \sum_{t=0}^{n-1} l_{x+t}\, v^{x+t}$$

$$= \frac{1}{D_{x+n}} \sum_{t=0}^{n-1} D_{x+t} = \frac{1}{D_{x+n}} (N_x - N_{x+n}) \qquad (3.68)$$

$$= \frac{D_x}{D_{x+n}}\, \ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \frac{1}{{}_nE_x}\, \ddot{a}_{x:\overline{n}|} \qquad (3.69)$$

Observe que $\ddot{s}_{x:\overline{n}|}$ es el valor acumulado de una serie de pagos de los - cuales $\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$ es su valor presente; entonces:

$$s_{x:\overline{n}|} = \frac{1}{{}_nE_x}\, a_{x:\overline{n}|} \qquad (3.70)$$

Cuando se trata de anualidades de vidas selectas, basta sustituir x - por [x] en las expresiones deducidas con anterioridad, correspondiendo los valores conmutados a las siguientes relaciones:

$$D_{[x]+t} = v^x\, l_{[x]+t} \qquad (3,71)$$

$$N_{[x]+r} = \sum_{t=r}^{\infty} D_{[x]+t} \qquad (3.72)$$

$$S_{[x]+r} = \sum_{t=r}^{\infty} N_{[x]+t} \qquad (3.73)$$

$$\bar{D}_{[x]+n} = \int_0^1 D_{[x]+n+t}\, dt \qquad (3.74)$$

$$\bar{N}_{[x]+n} = \sum_{t=0}^{\infty} \bar{D}_{[x]+n+t} \qquad (3.75)$$

$$\bar{S}_{[x]+n} = \sum_{t=0}^{\infty} N_{[x]+n+t} \qquad (3.76)$$

3.3.5 Efectos de variaciones del interés y la mortalidad.- Resulta interesante el poder analizar los cambios que se presentan en la PNU de las anualidades como resultado de variaciones en la tasa de interés o de mortalidad, trataremos aqui el caso mas sencillo de anualidad, es decir: a_x

De (3.3) se infiere que a_x depende del interés y la mortalidad referida ésta a una tabla particular. Consideremos primero la influencia en a_x de un cambio en la tasa de interés, efecto que puede determinarse mediante la derivada de a_x con respecto a i .

De (3.3) se sigue:

$$\frac{d}{di} a_x = \frac{d}{di} \sum_{t=1}^{\infty} v^t \; {}_tp_x = \sum_{t=1}^{\infty} - t(1+i)^{-t-1} \; {}_tp_x$$

$$= - v \sum_{t=1}^{\infty} t \, v^t \; {}_tp_x$$

$$= - v \, (i a)_x \qquad (3.77)$$

La expresión anterior (que indica que $\mathcal{A}_x$ decrece cuando la tasa de interés crece), en terminos de diferenciales, puede reescribirse como:

$$d\,\mathcal{A}_x = -\,V\,(I\mathcal{A})_x\,di$$

ó en término de incrementos:

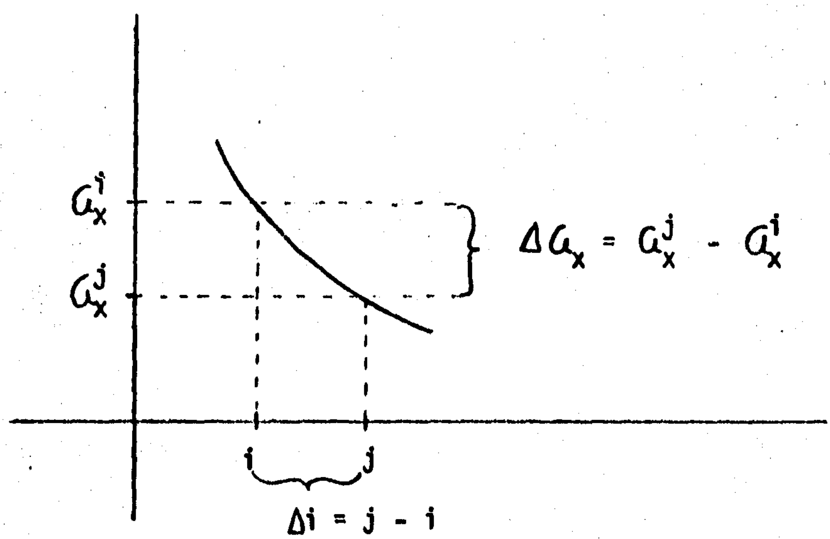
$$\Delta\mathcal{A}_x \doteq -\,V(I\mathcal{A})_x\Delta i \qquad (3.78)$$

que proporciona una estimación satisfactoria cuando Δi es pequeño.

Si la nueva tasa de interés es j, de (3.78) se obtiene:

$$\mathcal{A}_x^j = \mathcal{A}_x^i - \frac{j-i}{1+i}\,(I\mathcal{A})_x^i \qquad (3.79)$$

donde el supraíndice indica la tasa a que esta calculada la prima neta única; lo anterior puede verse gráficamente como:



Las variaciones en la mortalidad pueden ser muy diversas, trataremos - aqui únicamente los siguientes casos:

a) modificación en la tasa de mortalidad de una edad

b) adición de una constante a la fuerza de mortalidad para toda edad.

En el primer caso, supongamos que la edad es x+n y consideremos una -- anualidad vitalicia.

$$a_x = a_{x:\overline{n}|} + {}_nE_x \, a_{x+n}$$

$$= a_{x:\overline{n}|} + {}_nE_x \, v \, (1 - q_{x+n}) \, \ddot{a}_{x+n+1}$$

$$= a_{x:\overline{n}|} + v^{n+1} \, {}_np_x \, (1 - q_{x+n}) \, \ddot{a}_{x+n+1}$$

si reemplazamos q_{x+n} por $(q_{x+n} + C)$, la modificación en a_x será:

$$(- Cv^{n+1} \, {}_np_x \, \ddot{a}_{x+n+1})$$

En el segundo caso, puesto que toda anualidad puede ser expresada en terminos de dotales puros, bastará analizar la modificación sobre - - ${}_nE_x$:

Puesto que:

$$v^n = e^{-n\delta} = e^{-\int_0^n \delta \, dt}$$

se sigue;

$$ {}_nE_x = e^{-\int_0^n (\mu_{x+t} + \delta)\, dt} $$

Si $\mu'_x = \mu_x + c \;\; \forall x$, entonces:

$$ {}_nE'_x = e^{-\int_0^n (\mu_{x+t} + c + \delta)\, dt} $$

$$ = e^{-\int_0^n (\mu_{x+t} + \delta')\, dt} $$

donde $\delta' = \delta + c$

Lo anterior implica que un cambio constante en la fuerza de mortalidad es equivalente a hacer el mismo cambio en la fuerza de interés.

3.4 EJERCICIOS

3.4.1 Si $S_{(x)} = \frac{98-x}{98}$, cual será el valor presente al 3% de un dotal puro a 10 años, unitario, para una persona de edad 23?

3.4.2 Utilizando la tabla E.M. 62-67 al 4.5%, determina cual será la prima neta única de un dotal puro a 10 años de 50000 unidades monetarias para una persona de edad 26.

3.4.3 Demuestra que:

a) $a_{x:\overline{n|}} = \dfrac{V - A_{x:\overline{n+1|}}}{d}$

b) $(1+i)\,a_x < e_x$

c) $\ddot{a}_x = 1 + V\,p_x\,\ddot{a}_{x+1}$

3.4.4 Una persona de edad 25 paga 40000 unidades monetarias a una compañía aseguradora, misma que se ha comprometido a retribuirle anualmente y, en forma vitalicia, cantidades que se duplicarán cada dos años debiendo efectuarse el 1er. pago cuando la persona alcance la edad 65.

Determinar la cantidad que deberá pagarla empresa en el décimo pago (si es que aún está viva la persona) si se utiliza la tabla E.M. 62-67 al 4.5% .

3.4.5 Demuestra que:

a) $${}_{\frac{1}{t}/}\ddot{a}_x^{(m)} \doteq \ddot{a}_x^{(m)} - \frac{1}{t} + \frac{t-m}{2t^2} D'_x$$

$${}_{\frac{1}{t}/}\ddot{a}_{x:\overline{n}|}^{(m)} = \frac{(N_x - N_{x+n}) - (\frac{m-1}{2m} + \frac{1}{t})(D_x - D_{x+n})}{D_x}$$

3.4.6 Determina expresiones en función de conmutados para:

a) ${}_{k/}a_{x:\overline{n}|}^{(m)}$

b) $(Ia)_{x:\overline{n}|}^{(m)}$

c) $(I_{\overline{k}|}a)_{x:\overline{n}|}^{(m)}$ $\quad$ $k \ll n$

d) ${}_{m/}s_{x:\overline{n}|}$

3.4.7 Si las muertes se distribuyen uniformemente entre las edades x y $x+1$, demuestra que:

a) $\bar{D}_x = \left(\frac{\delta - d}{\delta^2}\right) D_x + \left(\frac{i-\delta}{\delta^2}\right) D_{x+1}$

b) $\bar{a}_{x:\overline{1|}} = \frac{1}{\delta} - \frac{d}{\delta^2} - p_x \left(\frac{V}{\delta} - \frac{d}{\delta^2}\right)$

c) $p_x = \dfrac{\bar{a}_x - 1/\delta + d/\delta^2}{V\,\bar{a}_{x+1} - V/\delta + d/\delta^2}$

3.4.8 Si $l_{x+t} = l_x\,(1-bt)$ para $0 \leq t \leq n$, dá una expresión para valuar $\bar{a}_{x:\overline{n|}}$

3.4.9 Demuestra que:

a) $\bar{a}_x = \int_0^{\infty} {}_tp_x\, \mu_{x+t}\, \bar{a}_{\overline{t|}}\, dt$

b) $\frac{d}{dx}\bar{a}_x = \bar{a}_x\,(\mu_x + \delta) - 1$

c) $\frac{d}{dx}\bar{a}_{x:\overline{n|}} = (\mu_x + \delta)\,\bar{a}_{x:\overline{n|}} + {}_nE_x - 1$

3.4.10 Cual será la expresión en términos de conmutados para:

a) ${}_{k/}(D\ddot{a})^{(m)}_{x:\overline{n|}}$

b) ${}_{k/}(\bar{I}\bar{a})_{x:\overline{n|}}$

3.4.11 Demuestra que:

$$(I\ddot{a})_x = -(1+i)\frac{d}{di}\ddot{a}_x$$

3.4.12 De una tabla de mortalidad estandar se calcula una nueva tabla donde $p'_x = p_x(1+r)$ para todos los valores de x, donde p_x corresponde a la tabla estandar y p'_x a la nueva tabla. Demuestra que los valores de las anualidades de la nueva tabla calculados a la tasa de interés i son iguales a los obtenidos de la tabla estandar a la tasa de interés $i' = (i-r)/(1+r)$.

3.4.13 Demuestra que si en la expresión de Makeham para la fuerza de mortalidad se sustituye la C por C' de forma que $\mu'_x = A+BC^{kx}$ donde $k = \log C'/\log C$, entonces $\bar{a}'_x$ es igual a $1/k \cdot \bar{a}_{kx}$ calculada a la tasa de interés i' tal que $\delta' = 1/k(\delta - \ln S)+\ln S$

3.4.14 Si la fuerza de mortalidad es constante entre las edades x y x+n, demuestra que:

$$\bar{a}_{x:\overline{n}|} = \frac{1- v^n\, {}_np_x}{\mu + \delta}$$

donde μ denota la fuerza de mortalidad entre las edades mencionadas.

CAPITULO IV

SEGUROS EN CASO DE MUERTE

4.1 INTRODUCCION

Las funciones descritas en el capítulo anterior corresponden a una serie de pagos sujetos a la sobrevivencia de una persona, en este capítulo nos ocuparemos del desarrollo de fórmulas que determinen el valor presente (PNU) de un pago contingente a la muerte de una persona (asegurado) comunmente conocido como seguro de muerte o simplemente seguro, aún cuando las anualidades constituyen seguros sobre la vida.

Los seguros pueden clasificarse de acuerdo a:

a) el inicio de la cobertura.- Ordinarios si se inicia en la fecha de contratación ó diferido si debe transcurrir un determinado tiempo para que entre en vigor el seguro.

b) la temporalidad de la cobertura.- Temporales si la cobertura es únicamente por un determinado período ó vitalicio en caso contrario.

c) la variabilidad de la suma asegurada respecto al tiempo.- Constantes si la suma asegurada es siempre la misma, variables en otro caso.

d) la forma de pago.- Pagaderos al final del año ó en el momento en que ocurre el fallecimiento.

La clasificación anterior se sintetiza en la siguiente tabla:

CLASIFICACION DE SEGUROS			
INICIO DE COBERTURA	TEMPORALIDAD DE LA COBERTURA	FORMA DE PAGO	LA TASA DE PAGO
Ordinarios	vitalicios	pagaderos al final del año del deceso	constantes
Diferidos	temporales	pagaderos en el momento del deceso	variables

El seguro dotal mixto resulta ser una combinación de una anualidad y un seguro.

En la determinación de la prima neta única se hacen las siguientes suposiciones:

a) La edad de cálculo es entera

b) La mortalidad se comporta de acuerdo a la tabla adoptada

c) La compañía invierte los fondos a la tasa estipulada

En la práctica la edad se obtiene como la mas cercana a la edad de cumpleaños del asegurado facilitando con ello los cálculos derivados de la tabla de mortalidad.

4.2 SEGUROS PAGADEROS AL FINAL DEL AÑO DE FALLECIMIENTO

Tradicionalmente los seguros han sido calculados bajo la suposición de que el pago de la suma asegurada se efectua al final del año en que ocurre el deceso, aunque en la práctica el pago se verifique inmediatamente después de comprobarse la muerte del asegurado.

A menos que otra cosa sea especificada, al hacer referencia a un tipo de seguro se asumirá que la suma asegurada será pagada al final del - año en que ocurra el fallecimiento del asegurado y será de una unidad monetaria.

4.2.1 Seguro vitalicio.- Un seguro que garantiza el pago de la suma - asegurada al final del año en que fallezca (x) en cualquier -- tiempo que esto suceda, es conocido como seguro vitalicio, de - vida completa u ordinario de vida (OV).

Supóngase que l_x personas contratan a la vez este tipo de póliza; durante el primer año de aseguramiento fallecerán d_x de - - ellos, por lo que deberán pagarse d_x unidades monetarias al finalizar el año por concepto de reclamaciones. Durante el segundo año, fallecerán d_{x+1} y deberá pagarse igual cantidad por reclamaciones y así sucesivamente. El valor presente de las reclamaciones constituye el compromiso del asegurador que (por omitirse cargos adicionales) deberá ser igual a los compromisos de los asegurados.

Si denotamos por A_x la cantidad que deberá pagar cada asegurado para tener derecho a esta cobertura, entonces.

$$l_x \, A_x = V \, d_x + V^2 \, d_{x+1} + V^3 \, d_{x+2} + \,.....$$

$$A_x = \sum_{t=0}^{\infty} V^{t+1} \frac{d_{x+t}}{l_x} \qquad (\ 4.1\ )$$

$$= \sum_{t=0}^{\infty} V^{t+1} \;{}_{t/}q_x$$

$$A_x = \frac{M_x}{D_x} \qquad (\ 4.2\ )$$

donde

$$M_{x+r} = \sum_{t=r}^{\infty} C_{x+t} \qquad (4.3)$$

$$C_{x+t} = v^{x+t+1}\, d_{x+t} \qquad (4.4)$$

4.2.2 Seguro temporal.- Un seguro que garantiza el pago de la suma - asegurada únicamente si la muerte ocurre dentro de un período - limitado es conocido como seguro temporal. Si el término del seguro es de n años, denotaremos por $A^{1}_{x:\overline{n|}}$ su prima neta única. - Igualando los compromisos tenemos:

$$\left.\begin{aligned} l_x\, A^{1}_{x:\overline{n|}} &= \sum_{t=0}^{n-1} v^{t+1}\, d_{x+t} \\ A^{1}_{x:\overline{n|}} &= \sum_{t=0}^{n-1} v^{t+1}\, {}_{t/}q_x \end{aligned}\right\} \qquad (4.5)$$

$$= \sum_{t=0}^{\infty} v^{t+1}\, {}_{t/}q_x - \sum_{t=n}^{\infty} v^{t+1}\, {}_{t/}q_x$$

$$= \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x} \qquad (4.6)$$

4.2.3 Seguro dotal mixto.- En este tipo de seguro se garantiza el pago de la suma asegurada al final del año en que ocurra el fallecimiento siempre que éste ocurra dentro de un período preestablecido ó al final de dicho período si el asegurado permanece - con vida aún.

Si el término del seguro es de n años y denotamos por $A_{x:\overline{n|}}$ la PNU de esta póliza e igualamos los compromisos; se tiene:

$$l_x\, A_{x:\overline{n}|} = \sum_{t=0}^{n-1} v^{t+1}\, d_{x+t} + v^n\, l_{x+n}$$

$$A_{x:\overline{n}|} = \sum_{t=0}^{n-1} v^{t+1}\ {}_{t/}q_x + v^n\ {}_np_x$$

$$= A^1_{x:\overline{n}|} + A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}} \qquad (4.7)$$

$$= \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{D_x} \qquad (4.8)$$

4.2.4 Seguros diferidos.- Los seguros diferidos son aquellos en los que las obligaciones de la compañía entran en vigor después de un período preestablecido, es decir, que la suma asegurada podrá ser exigible sólo si el asegurado fallece después de un determinado período (período de diferimiento) y dentro del término de vigencia del seguro.

Si denotamos por ${}_{n/}A_x$ la PNU de un seguro OV diferido n años, entonces.

$$l_x\ {}_{n/}A_x = v^{n+1}\, d_{x+n} + v^{n+2}\, d_{x+n+1} + \ldots..$$

$$= \sum_{t=n}^{\infty} v^{t+1}\, d_{x+t}$$

$${}_{n/}A_x = \sum_{t=n}^{\infty} v^{t+1}\ {}_{t/}q_x \qquad (4.9)$$

$$= \frac{M_{x+n}}{D_x} \qquad (4.10)$$

$$= {}_nE_x\ A_{x+n} \qquad (4.11)$$

Si ${}_{n/}A^{1}_{x:\overline{n|}}$ denota la PNU de un seguro temporal a m años diferido a n años y ${}_{n/}A_{x:\overline{m|}}$ denota la PNU de un seguro dotal a m años diferido n -- años, puede deducirse fácilmente que:

$$ {}_{n/}A^{1}_{x:\overline{m|}} = \frac{M_{x+n} - M_{x+n+m}}{D_x} \qquad (4.12) $$

$$ = {}_{n/}A_x - {}_{n+m/}A_x \qquad (4.13) $$

$$ {}_{n/}A_{x:\overline{m|}} = \frac{M_{x+n} - M_{x+n+m} + D_{x+n+m}}{D_x} \qquad (4.14) $$

$$ = {}_{n/}A^{1}_{x:\overline{m|}} + {}_{n}E_x \; A_{x+n:\overline{m|}}^{\;\;1} \qquad (4.15) $$

4.3 RELACIONES ENTRE ANUALIDADES Y SEGUROS.

Se pueden determinar las expresiones deducidas con anterioridad en función de anualidades, ya que los valores conmutados C_x y M_x pueden ser expresados como:

$$ C_x = V\, D_x - D_{x+1} \qquad (4.16) $$

$$ M_x = V\, N_x - N_{x+1} \qquad (4.17) $$

Sustituyendo las expresiones anteriores en las primas netas únicas de seguros, se obtienen equivalencias entre anualidades y seguros. Otra forma de obtener estas relaciones es utilizar la expresión (1.4), asi:

$$ A_x = \sum_{t=0}^{\infty} V^{t+1} \; {}_{t/}q_x = \sum_{t=0}^{\infty} V^{t+1} \left({}_{t}p_x - {}_{t+1}p_x \right) $$

$$= v \sum_{t=0}^{\infty} v^{t} \; {}_{t}p_{x} \; - \; \sum_{t=0}^{\infty} v^{t+1} \; {}_{t+1}p_{x}$$

$$= v\ddot{a}_{x} - a_{x} \qquad (4.18)$$

donde $v\ddot{a}_x$ representa la PNU de una serie de pagos de V unidades monetarias pagaderos al inicio de cada año que (x) inicie; si estos pagos se depositan en un fondo a la tasa de interés estipulada, se tendría al finalizar cada año una unidad monetaria que será retornada al asegurador si es que el asegurado permanece con vida en ese momento. Evidentemente, al finalizar el año en que ocurre el deceso de (x) queda en el fondo una unidad monetaria, misma que será entregada al beneficiario por concepto de reclamación.

Otra forma de expresar (4.18) es:

$$A_x = 1 - d\ddot{a}_x \qquad (4.19)$$

que puede interpretarse de la siguiente forma:

Al contratar el seguro, el asegurador deposita en un fondo a la tasa de interés establecida, la suma asegurada descontando de ella los intereses que se generarán durante un año; así, al finalizar el año se tendrá en el fondo la suma asegurada completa. De este fondo y siempre que el asegurado permanezca con vida, el asegurador retira los intereses que se devengarán para el siguiente año y así sucesivamente hasta que al finalizar el año en que fallece (x) el fondo es entregado al beneficiario.

Puede fácilmente deducirse e interpretarse las siguientes relaciones:

$$A^{1}_{x:\overline{n}|} = v\,\ddot{a}_{x:\overline{n}|} - a_{x:\overline{n}|} \qquad (4.20)$$

$$= 1 - d\,\ddot{a}_{x:n} - {}_{n}E_{x} \qquad (4.21)$$

$$A_{x:\overline{n}|} = v\,\ddot{a}_{x:n} - a_{x:\overline{n-1}|} \qquad (4.22)$$

$$= 1 - d\,\ddot{a}_{x:n} \qquad (4.23)$$

4.4 SEGUROS VARIABLES

Consideramos ahora un seguro en el que la suma asegurada varía respecto al tiempo. Supóngase que si el asegurado fallece durante el primer año de aseguramiento, su beneficiario recibe K unidades monetarias; si fallece durante el segundo año, recibe K+h unidades monetarias, si fallece durante el tercer año K+2h y asi sucesivamente. Si el termino del seguro sorresponde a un O.V. denotaremos la PNU de este seguro por $(VA)_x$; esto es:

$$(VA)_x = K\,V\,q_x + (K+h)\,V^2\,{}_{1/}q_x + (K+2h)V^3\,{}_{2/}q_x + \ldots\ldots$$

$$= \sum_{t=0}^{\infty} V^{t+1}\,(K+th)\,{}_{t/}q_x$$

$$= \sum_{t=0}^{\infty} (K+th)\,\frac{C_{x+t}}{D_x}$$

$$= \frac{1}{D_x}\Big[K(C_x + C_{x+1} + C_{x+2} + C_{x+3} + \ldots) +$$

$$h(C_{x+1} + C_{x+2} + C_{x+3} + \ldots) +$$

$$h(C_{x+2} + C_{x+3} + \ldots) + \ldots\Big]$$

$$= \frac{1}{D_x}\left[K\, M_x + h(M_{x+1} + M_{x+2} + \ldots)\right]$$

haciendo $$R_{x+r} = \sum_{t=r}^{\infty} M_{x+t}$$

$$(VA)_x = \frac{K\, M_x + h\, R_{x+1}}{D_x} \qquad (4.24)$$

Otra forma de obtener la expresión anterior consiste en representar los beneficios en "forma piramidal" y expresar la PNU del seguro como una combinación de seguros con suma asegurada constante; es decir:

$$\begin{array}{cccccc}
 & & & & h & \cdot^{\cdot^{\cdot}} \\
 & & & h & h & \cdots \\
 & & h & h & h & \cdots \\
 & K & K & K & K & \cdots \\
\hline
0 & 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots
\end{array}$$

donde el primer nivel representa las obligaciones de un seguro OV de K unidades monetarias; el segundo, tercero, ... las de seguros OV diferidos 1, 2, ... de suma asegurada h; esto es:

$$(VA)_x = KA_x + h\,(\,{}_{1/}A_x + {}_{2/}A_x + \ldots\,)$$

$$= K\, A_x + h \sum_{t=1}^{\infty} {}_{t/}A_x$$

$$= K\, \frac{M_x}{D_x} + h \sum_{t=1}^{\infty} \frac{M_{x+t}}{D_x}$$

$$= \frac{K\,M_x + h\,R_{x+1}}{D_x}$$

Si el têrmino del seguro es de n años, denotaremos la PNU por $(VA)^1_{x:\overline{n}|}$; esto es:

$$(VA)^1_{x:\overline{n}|} = K\,A^1_{x:\overline{n}|} + h\left({}_{1/}A^1_{x:\overline{n-1}|} + {}_{2/}A^1_{x:\overline{n-2}|} + \cdots + {}_{n-1/}A^1_{x:\overline{1}|}\right)$$

$$= K\,A^1_{x:\overline{n}|} + h\sum_{t=1}^{n-1} {}_{t/}A^1_{x:\overline{n-t}|}$$

$$= K\,\frac{(M_x - M_{x+n})}{D_x} + h\sum_{t=1}^{n-1}\frac{(M_{x+t} - M_{x+n})}{D_x}$$

$$= \frac{1}{D_x}\left[K(M_x - M_{x+n}) + h(R_{x+1} - R_{x+n+1} - (n)\,M_{x+n})\right] \qquad (4.25)$$

Supongamos que en un seguro OV la suma asegurada se incrementa durante los n primeros años, permaneciendo después constante.

Si denotamos por $(V_{\overline{n}|}A)_x$ la PNU y representamos en "forma piramidal" los beneficios se tienen:

							h	h	. . .
						h	h	h	. . .
						⋮			
				h	. . .	h	h	h	. . .
			h	h	. . .	h	h	h	. . .
		h	h	h	. . .	h	h	h	. . .
	K	K	K	K	. . .	K	K	K	. . .
0	1	2	3	4		n-1	n	n+1	. . .

$$(V_{\overline{n|}}\ A)_x = K\ A_x + h\ \left(\sum_{t=1}^{n-1} {}_{t/}A_x \right)$$

$$= \frac{1}{D_x} \left[(K)\ M_x + h\ (R_{x+1} - R_{x+n}) \right] \qquad (4.26)$$

La notación para seguros variables es de la forma:

$$(V^{(m)}_{\overline{n|}}\ A)_{\alpha}$$

donde α identifica el término de cobertura del seguro (vitalicio, temporal ó dotal), $\overline{n|}$ el período de variabilidad de la suma asegurada - (asumiéndose igual a la cobertura del seguro en caso de omitirse) y (m) la frecuencia de variación por período (asumiéndose 1 en caso de omisión).

Se ha convenido en sustituir la V por I cuando K = h = 1 ó por D si K = 1 y h = -1 ; así:

$$(IA)_x = \frac{R_x}{D_x} \qquad (4.27)$$

$$(IA)^{1}_{x:\overline{n|}} = \frac{1}{D_x}\left[R_x - R_{x+n} - nM_{x+n} \right] \qquad (4.28)$$

$$(I_{\overline{n|}}\ A)_x = \frac{1}{D_x}\left[R_x - R_{x+n} \right] \qquad (4.29)$$

$$(D\ A)^{1}_{x:\overline{n|}} = \frac{1}{D_x}\left[(n)\ M_x - (R_{x+1} - R_{x+n+1}) \right] \qquad (4.30)$$

Si $(I^{(m)}\ A)_x$ denota la PNU de un seguro con beneficios de 1/m durante el primer m-ésimo de año e incrementos de 1/m cada m-ésimo de año y suponiendo que las reclamaciones serán pagadas al finalizar el año en - que ocurra el fallecimiento del asegurado aún cuando la suma asegurada se incremente cada m-ésimo, puede obtenerse una aproximación a la PNU considerando linealidad en las reclamaciones; esto es, que el pago promedio de los beneficios entre el año x+t y x+t+1 es $t+\frac{m+1}{2m}$ y por lo tanto:

$$(I^{(m)} A)_x = \sum_{t=0}^{\infty} (t + \tfrac{m+1}{2m})\, v^{t+1} \quad {}_{t/}q_x$$

$$= \sum_{t=0}^{\infty} (t + \frac{m+1}{2m})\, \frac{C_{x+t}}{D_x}$$

$$= \frac{1}{D_x}\left[\sum_{t=0}^{\infty} (t)\, C_{x+t} + \frac{m+1}{2m} \sum_{t=0}^{\infty} C_{x+t}\right]$$

$$= \frac{1}{D_x}\left[R_x - \frac{m-1}{2m} M_x\right]$$

$$= (IA)_x - \frac{m-1}{2m} A_x \qquad (4.31)$$

Cuando el crecimiento de los beneficios no corresponden a una progresión aritmética, la PNU puede determinarse igualando el valor presente de las obligaciones del asegurado y asegurador; esto es:

$$(PNU) = \frac{1}{l_x} \sum_{t=r}^{k} f_{(t)}\, v^{t+1}\, d_{x+t}$$

$$= \frac{1}{D_x} \sum_{t=r}^{k} f_{(t)}\, C_{x+t} \qquad (4.32)$$

donde $f_{(t)}$ denota los beneficios garantizados por la póliza si el asegurado fallece entre las edades x+t y x+t+1 siendo (r, k) el período de cobertura del seguro.

4.5 SEGUROS PAGADEROS EN EL MOMENTO DE LA MUERTE.

Hasta ahora, hemos asumido que la suma asegurada será pagada al final del año en que fallece el asegurado; si convenimos que la suma asegurada sea pagada al finalizar el m-ésimo de año en que ocurre el deceso y denotamos la PNU de un seguro OV por $A_x^{(m)}$, se tiene:

$$A_x^{(m)} = \frac{1}{l_x}\left[v^{1/m}\,(l_x - l_{x+1/m}) + v^{2/m}\,(l_{x+1/m} - l_{x+2/m}) + \dots \right]$$

$$= -\frac{1}{l_x} \sum_{t=1}^{\infty} v^{t/m}\,\Delta l_{x+\frac{t-1}{m}}$$

siendo 1/m la magnitud del intervalo entre cada argumento. Si hacemos m infitamente grande, el seguro será pagadero en el momento en que ocurra el deceso.

La simbología utilizada para representar la PNU de los seguros pagaderos en el momento de ocurrir el fallecimiento difiere de la empleada con anterioridad sólamente por la inserción de una "barra" sobre la A; esto es:

$$\bar{A}_x = \lim_{m\to\infty} A_x^{(m)}$$

$$= -\frac{1}{l_x} \lim_{m\to\infty} \sum_{t=1}^{\infty} v^{t/m}\,\Delta l_{x+\frac{t-1}{m}}$$

puesto que si $1/m \to 0$, $l_{x+\frac{t-1}{m}} \to d\,l_{x+t}$ y $dl_{x+t} = -l_{x+t}\,\mu_{x+t}\,dt$,

entonces:

$$\bar{A}_x = \frac{1}{l_x}\int_0^{\infty} v^t\,l_{x+t}\,\mu_{x+t}\,dt$$

$$= \int_0^{\infty} v^t \;\; {}_tp_x \; \mu_{x+t} \; dt \qquad (4.33)$$

Integrando por partes se tiene:

$$\frac{1}{l_x} \int_0^{\infty} v^t \, l_{x+t} \, \mu_{x+t} = \frac{1}{l_x} \left\{ \left[-v^t \, l_{x+t} \right]_0^{\infty} - \delta \int_0^{\infty} v^t \, l_{x+t} \, dt \right\}$$

entonces:

$$\bar{A}_x = 1 - \delta \, \bar{a}_x \qquad (4.34)$$

De manera similar puede deducirse que:

$$\bar{A}^1_{x:\overline{n}|} = \int_0^n v^t \;\; {}_tp_x \, \mu_{x+t} \, dt$$

$$= 1 - \delta \, \bar{a}_{x:\overline{n}|} - {}_nE_x \qquad (4.35)$$

$$\bar{A}_{x:\overline{n}|} = 1 - \delta \, \bar{a}_{x:n} \qquad (4.36)$$

Podemos definir valores conmutados de la forma:

$$\bar{C}_x = \int_0^1 v^{x+t} \;\; l_{x+t} \, \mu_{x+t} \;\; dt$$

$$\bar{M}_{x+r} = \sum_{t=r}^{\infty} \bar{C}_{x+t} = \int_r^{\infty} D_{x+t} \, \mu_{x+t} \;\; dt$$

$$\bar{R}_{x+r} = \sum_{t=r}^{\infty} \bar{M}_{x+t}$$

Podemos entonces escribir

$$\bar{A}_x = \frac{\bar{M}_x}{D_x} \qquad (4.37)$$

$$\bar{A}^{1}_{x:\overline{n}|} = \frac{\bar{M}_x - \bar{M}_{x+n}}{D_x} \qquad (4.38)$$

$$\bar{A}_{x:\overline{n}|} = \frac{\bar{M}_x - \bar{M}_{x+n} + D_{x+n}}{D_x} \qquad (4.39)$$

Suponiendo uniformidad en las muertes, es posible obtener relaciones - prácticas entre los seguros pagaderos en el momento de la muerte y los pagaderos al final del año de fallecimiento.

Bajo la suposición anterior:

$$l_{x+t}\,\mu_{x+t} = -\,D\,l_{x+t} \doteq d_x \qquad 0 < t < 1$$

ó

$$q_x \doteq {}_tp_x\,\mu_{x+t} \qquad 0 < t < 1$$

de donde:

$$\int_0^1 q_x\,v^t\,dt \doteq \int_0^1 v^t\,{}_tp_x\,\mu_{x+t}\,dt$$

$$q_x \int_0^1 v^t\,dt \doteq \bar{A}^{1}_{x:\overline{1}|}$$

$$\bar{A}^{1}_{x:\overline{1}|} \doteq q_x\,\bar{a}_{\overline{1}|}$$

Puesto que $\bar{a}_{\overline{1|}} = \frac{1-v}{\delta} = \frac{iv}{\delta}$ podemo escribir:

$$\bar{A}^{1}_{x:\overline{1|}} \doteq \frac{i}{\delta}\ v\ q_x = \frac{i}{\delta}\ A^{1}_{x:\overline{1|}} \qquad (4.40)$$

Cualquier otro tipo de seguro puede calcularse como una combinación de seguros temporales a un año diferido t años; por ejemplo:

$$\bar{A}^{1}_{x:\overline{n|}} = \sum_{t=0}^{n-1}\ {}_{t/}\bar{A}^{1}_{x:\overline{1|}}$$

$$= \sum_{t=0}^{n-1}\ {}_{t}E_x\ A^{1}_{x+t:\overline{1|}}$$

$$\doteq \frac{i}{\delta}\ A^{1}_{x:\overline{n|}} \qquad (4.41)$$

De manera similar se deduce:

$$\bar{A}_x \doteq \frac{i}{\delta}\ A_x \qquad (4.42)$$

$$\bar{A}_{x:n} \doteq \frac{i}{\delta}\ A^{1}_{x:\overline{n|}} + {}_{n}E_x \qquad (4.43)$$

Ya hemos visto con anterioridad que cualquier tipo de seguro puede ser expresado en términos de seguros OV, temporal o dotal; por lo que su cálculo no involucra mayor dificultad.

Otra suposición que puede hacerse para obtener expresiones prácticas es la de asumir que las muertes ocurren a la mitad del año, siendo $(1+i)^{1/2}$ el valor al final del año de la reclamación correspondiente; se sigue entonces:

$$\bar{A}^{1}_{x:\overline{1|}} \doteq (1+i)^{1/2}\ A^{1}_{x:\overline{1|}} \qquad (4.44)$$

Puede fácilmente deducirse que:

$$\bar{A}^{1}_{x:\overline{n}|} \doteq (1+i)^{1/2} \; A^{1}_{x:\overline{n}|} \qquad (4.45)$$

$$\bar{A}_x \doteq (1+i)^{1/2} \; A_x \qquad (4.46)$$

$$\bar{A}_{x:\overline{n}|} \doteq (1+i)^{1/2} \; A^{1}_{x:\overline{n}|} + {}_nE_x \qquad (4.47)$$

En las expresiones anteriores puede aproximarse $(1+i)^{1/2}$ por $(1+\frac{i}{2})$

De acuerdo a las suposiciones hechas puede decirse que:

$$\bar{C}_x = \begin{cases} \frac{i}{\delta} \; C_x \\ (1+i)^{1/2} \; C_x \\ (1+i/2) \; C_x \end{cases}$$

4.6 EJERCICIOS

4.6.1 Demuestra que:

a) $A_x = v \, (q_x + p_x \, A_{x+1})$

b) $vq_x = \dfrac{A_x - v \, A_{x+1}}{1 - A_{x+1}}$

c) $\dfrac{d}{dx} \bar{A}_x = \bar{A}_x \, (\mu_x + \delta) - \mu_x$

4.6.2 Describe los beneficios y expresa en función de conmutados las siguientes primas netas únicas:

a) $(I_{\overline{4}|} A)_{30:\overline{10}|}$

b) $(D A)^{1}_{30:\overline{10}|}$

c) $\bar{A}_{30:\overline{20}|}$

d) $_{10/}A^{1}_{30:\overline{10}|}$

4.6.3 Demuestra que:

$$(\bar{I}\,\bar{A})_x = (I\,\bar{A})_x - \frac{1}{2}\,\bar{A}_x$$

4.6.4 Si una tabla de mortalidad sigue la ley de Makeham, demuestra que:

$$\bar{A}_x = A\,\bar{a}_x + (\mu_x - A)\,\bar{a}'_x$$

donde A es la constante de Makeham y encuentra la tasa de interés i' que sirve de base para calcular $\bar{a}'_x$.

4.6.5 Si una tabla de mortalidad sigue la ley de Gompertz, demuestra que:

$$\bar{A}_x = \mu_x\,\bar{a}'_x$$

donde $\ddot{a}'_x$ es calculada a la tasa de interés $i' = \frac{1+i}{C} - 1$

4.6.6 Una persona de 50 años de edad está sujeta a la mortalidad de la tabla E.M. 62-67 al 4.5% excepto para la edad 54. En esa edad dicha persona estará sujeta a un riesgo extra equivalente al 400% de la tasa de mortalidad para tal edad de dicha tabla. Calcula la prima neta única de un seguro temporal a 5 años de 200 000 unidades monetarias.

4.6.7 Demuestra que:

$$a_{x:\overline{n|}} = \frac{v - A_{x:\overline{n+1|}}}{d}$$

$$A_x^{(m)} = m(v^{1/m}\ \ddot{a}_x^{(m)} - a_x^{(m)}) = 1 - d^{(m)}\ \ddot{a}_x^{(m)}$$

4.6.8 Cual será la prima neta única de un seguro variable temporal a n años tal que el beneficio durante el primer año es de T unidades monetarias y los k sucesivos ($k \ll n$) se incrementan en L unidades monetarias permaneciendo constantes los beneficios posteriores?

4.6.9 Demuestra que si q_{x+n} es incrementada a $(q_{x+n} + C)$, entonces A_x se incrementará en $Cv^{n+1}\ {}_np_x\ (1 - A_{x+n+1})$.

4.6.10 Cual será la prima neta única de una póliza emitida a edad 30 - cuyos beneficios se describen en la siguiente tabla:

años de vigencia del seguro	1	2	6 a 5	6 a 10	+ de 10
beneficios por muerte	1000	2000	5000	10000	50000

CAPITULO V

PRIMAS NETAS PERIODICAS

5.1 INTRODUCCION

La prima neta única, según su definición, es la cantidad que deberá pagar de contado quien pretenda asegurarse. Si las compañías aseguradoras convinieran en celebrar todos sus contratos bajo este principio -- únicamente se asegurarían quienes dispusieran de fuertes capitales desvirtuando con ello la finalidad del seguro. A fin de hacer mas accesible la adquisición de los seguros, se ha convenido en "diluir" la obligación del asegurado a través del tiempo, esto significa: aceptar pagos periódicos anticipados contingentes a la vida del asegurado (primas periódicas), cuyo valor presente sea equivalente a la PNU del seguro.

En la práctica, es usual considerar primas periódicas constantes (primas niveladas) pagaderas al inicio de cada año póliza y durante un período menor o igual al período de cobertura del seguro.

5.2 PRIMA NETA ANUAL

La notación para primas netas niveladas anuales, cuando estas son pagaderas durante todo el período de cobertura del seguro, es muy similar a la utilizada para primas netas únicas de los seguros básicos (temporal, O.V. dotal), únicamente se sustituye la A por P; por ejemplo P_x denota la prima neta anual (PNA) de un O.V. de una unidad monetaria - pagadera al final del año de fallecimiento y $P^1_{x:\overline{n}|}$ la PNA de un temporal a n años.

Si las primas son pagaderas durante un número limitado de períodos, incluiremos en la notación anterior un prefijo que identifique esta condición; así ${}_tP_{x:\overline{n}|}$ denotará la PNA de un seguro dotal a t pagos limitados.

En el caso de seguros variables ó seguros pagaderos en el momento de la muerte, se utiliza el símbolo P en conjunción con la notación de la PNU del seguro respectivo. Por ejemplo:

$P(\bar{A}_x)$ denota la PNA de un seguro OV pagadero en el momento de la muerte.

$P\left[(IA)_x\right]$ denota la PNA de un seguro creciente de vida entera.

${}_tP\ (\bar{A}_{x:\overline{n|}})$ denota la PNA de un seguro dotal a n años a t pagos limitados, pagadero en el momento del fallecimiento.

Las relaciones correspondientes a las diferentes PNA pueden determinarse mediante la ecuación:

(VALOR PRESENTE DE PRIMAS FUTURAS) = (VALOR PRESENTE DE BENEFICIOS FUTUROS)

que puede expresarse como:

$$P\ddot{a} = A \qquad (5.1)$$

donde P representa la PNA, $\ddot{a}$ la PNU de una anualidad cuyo término corresponde al período de pago de primas valuada a la edad de adquisición de la póliza y A la PNU de los beneficios de la póliza en cuestión.

Para el seguro vitalicio con pago de primas durante la sobrevivencia de (x) se tiene:

$$P_x = \frac{A_x}{\ddot{a}_x} = \frac{M_x}{N_x} \qquad (5.2)$$

$$= \frac{1}{\ddot{a}_x} - d \qquad (5.3)$$

Para un seguro temporal a n años con período de pago de primas igual - al de cobertura del seguro la relación es:

$$P^1_{x:\overline{n}|} = \frac{A^1_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} = \frac{M_x - M_{x+n}}{N_x - N_{x+n}} \qquad (5.4)$$

Para un dotal a n años con características similares de pago:

$$P_{x:\overline{n}|} = \frac{A_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} = \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{N_x - N_{x+n}} \qquad (5.5)$$

Si el pago de primas se limita a t años, las relaciones para los seguros anteriores son de la forma:

$${}_tP_x = \frac{A_x}{\ddot{a}_{x:\overline{t}|}} = \frac{M_x}{N_x - N_{x+t}} \qquad (5.6)$$

$$= \frac{d\ A_x}{(1-A^1_{x:\overline{n}|})} \qquad (5.7)$$

$${}_tP^1_{x:\overline{n}|} = \frac{A^1_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{t}|}} = \frac{M_x - M_{x+n}}{N_x - N_{x+t}} \qquad (5.8)$$

$${}_tP_{x:\overline{n}|} = \frac{A_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{t}|}} = \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{N_x - N_{x+t}} \qquad (5.9)$$

De manera similar pueden determinarse expresiones referentes a otros - tipos de seguros.

Si consideramos ahora que la prima neta anual varía respecto al tiempo de forma tal que la correspondiente al t-ésimo período es de la forma: $(P\ f_{(t)})$, podemos escribir:

$$P \sum_{t=r}^{k} f_{(t)}\ {}_tE_x = A \qquad (5.10)$$

siendo (r, k) el período de pago de primas.

Un caso particular es cuando $f_{(t)} = t+1$, $r=0$, $k=n-1$ y se trata de un - seguro temporal a n años; entonces:

$$\sum_{t=0}^{n-1} f_{(t)}\ {}_tE_x = (I\ddot{a})_{x:\overline{n|}}$$

por lo que:

$$P = \frac{A^1_{x:\overline{n|}}}{(I\ddot{a})_{x:\overline{n|}}} \qquad (5,11)$$

5.3 PRIMAS NETAS FRACCIONADAS

Se conoce por primas fraccionadas aquellas cuya frecuencia de pago por año es mayor a uno, es decir, primas pagaderas m veces por año. Cuando se opta por este tipo de primas (si la suma asegurada es pagadera al final del año de fallecimiento), su cálculo puede estar determinado por cualquiera de las siguientes consideraciones:

a) si en el año de fallecimiento únicamente se han cubierto p cuotas, las (m-p) restantes serán deducidas de la suma asegurada al pago - de la misma.

b) el pago de primas cesa al fallecimiento del asegurado sin que el - asegurador tenga derecho a retener las cuotas no cubiertas del año en curso.

c) la parte de la cuota parcial "no gastada" será reembolsada al asegurado en el momento del pago de la suma asegurada.

Las primeras son conocidas como primas fraccionadas a plazos; las subsecuentes como primas fraccionadas reales y primas fraccionadas a prorrata respectivamente. Cuando no se haga referencia alguna, se asumirá válida la condición b).

En la notación establecida para primas anuales, añadiremos un supraíndice de la forma $[m]$, $\{m\}$ ó (m) para describir respectivamente primas anuales pagaderas m veces al año calculadas a plazos, a prorrata o reales. Asi:

$P_x^{(m)}$ denotará la prima neta anual real pagadera m veces al año de un seguro O.V. unitario cuya suma asegurada será pagada al final del año en que fallezca (x).

$P_{x:n}^{[m]}$ denotará la prima neta anual calculada a plazos, pagadera m veces al año de un seguro dotal a n años, que - garantiza una unidad monetaria.

$P'^{\{m\}}_{x:\overline{n|}}$ denotará la prima neta anual calculada a prorrata, pagadera m veces al año de un seguro temporal a n años.

5.3.1 Primas fraccionadas reales.- Si $P_x^{(m)}$ es la prima anual que se - paga en m-ésimas partes cada m-ésimo de año, de acuerdo a (5.1) se tiene:

$$P_x^{(m)} \ddot{a}_x^{(m)} = A_x$$

por lo que:

$$P_x^{(m)} \doteq \frac{A_x}{\ddot{a}_x - \frac{m-1}{2m}} \qquad (5.12)$$

$$\doteq \frac{P_x}{1 - \frac{m-1}{2m}\frac{1}{\ddot{a}_x}} \qquad (5.13)$$

De (4.19) se deduce:

$$P_x + d = \frac{1}{\ddot{a}_x} \qquad (5.14)$$

por lo que:

$$P_x^{(m)} \doteq \frac{P_x}{1 - \frac{m-1}{2m}\ (P_x + d)} \qquad (5.15)$$

$$P_x^{(m)} \doteq P_x + \frac{m-1}{2m} P_x^{(m)} P_x + \frac{m-1}{2m} P_x^{(m)} d \qquad (5.16)$$

En la expresión anterior se aprecia claramente que $P_x^{(m)}$ excede a P_x debido a: la posible pérdida de prima en el año de muerte y, la pérdida de interés debido al fraccionamiento de la prima.

Consideremos la pérdida de prima por fallecimiento; si (x) falleciera en el primer m-ésimo dejaría de pagar (m-1) cuotas, si falleciera en el segundo m-ésimo, (m-2) y así sucesivamente. Suponiendo una distribución uniforme de muertes, la probabilidad de fallecer en cualquier m-ésimo particular sería 1/m; la pérdida promedio de prima sera entonces:

$$\frac{1}{m} \; P_x^{(m)} \sum_{t=1}^{m-1} \frac{t}{m} = \frac{1}{m} \; P_x^{(m)} \; \frac{(m-1)}{2}$$

por lo que la prima neta anual de un seguro O.V. que garantice esta suma al final del año de fallecimiento será:

$$\frac{m-1}{2m} \; P_x^{(m)} \quad P_x$$

La pérdida de interés de las diferentes porciones de la prima fraccional es:

$$\frac{1}{m} \, P_x^{(m)} \quad d \sum_{t=1}^{m-1} \frac{t}{m} = \frac{m-1}{2m} \; P_x^{(m)} \; d$$

Pueden deducirse e interpretarse fácilmente las siguientes expresiones:

$$P_{x:\overline{n|}}^{(m)} = P_{x:\overline{n|}} + \frac{m-1}{2m} \; P_{x:\overline{n|}}^{(m)} \quad (P^{\prime}_{x:n} + d) \qquad (5.17)$$

$$P^{\prime(m)}_{x:\overline{n|}} = P^{\prime}_{x:\overline{n|}} + \frac{m-1}{2m} \quad P^{\prime(m)}_{x:\overline{n|}} \; (P^{\prime}_{x:\overline{n|}} + d) \qquad (5.18)$$

$${}_tP_x^{(m)} = {}_tP_x + \frac{m-1}{2m} \; {}_tP_x^{(m)} \quad (P^{\prime}_{x:\overline{t|}} + d) \qquad (5.19)$$

5.3.2 Primas fraccionadas a plazos. - Para el cálculo de esta modalidad de primas fraccionadas, debe considerarse que al inicio del año en que fallece (x) la primera cuota queda cubierta, faltando (m-1) pagos fraccionados por verificarse. Suponiendo una distribución uniforme en las muertes el promedio de las cuotas no pagadas será de $\frac{m-1}{2}$.

Así, para un seguro O.V., la deducción por concepto de primas no pagadas es $\frac{m-1}{2m}\ P_x^{[m]}$; puesto que asumimos una suma asegurada de una unidad monetaria, la cantidad que entregará la aseguradora al beneficiario designado es de $(1 - \frac{m-1}{2m}\ P_x^{[m]})$ unidades monetarias.

De (5.1) se deduce:

$$P_x^{[m]}\ \ddot{a}_x^{(m)} = A_x \left[1 - \frac{m-1}{2m}\ P_x^{[m]}\right]$$

$$P_x^{[m]} = \frac{A_x \left[1 - \frac{m-1}{2m}\ P_x^{[m]}\right]}{\ddot{a}_x - \frac{m-1}{2m}}$$

$$= P_x + \frac{m-1}{2m}\ P_x^{[m]}\ d \qquad (5.20)$$

Esta expresión muestra que la prima fraccionada a plazos puede ser considerada en dos partes; la prima neta anual y el ajuste de la pérdida de intereses debido al fraccionamiento de la prima.

Usando el mismo procedimiento anterior pueden deducirse:

$${}_tP_x^{[m]} = \frac{{}_tP_x}{1 - \frac{m-1}{2m}\ d} \qquad (5.21)$$

$$P^{[m]}_{x:\overline{n}|} = \frac{P_{x:\overline{n}|}}{1 - \frac{m-1}{2m}\, d} \qquad (5.22)$$

$$_tP^{[m]}_{x:\overline{n}|} = \frac{_tP_{x:\overline{n}|}}{1 - \frac{m-1}{2m}\, d} \qquad (5.23)$$

5.3.3 Primas fraccionadas a prorrata.- El reembolso correspondiente a la prima no gastada, suponiendo uniformidad en las muertes, será en promedio la mitad de la prima pagada al inicio del m-ésimo en que ocurre el deceso. De acuerdo a (5.1) para un seguro O.V. unitario se tiene:

$$P^{\{m\}}_x \ddot{a}^{(m)}_x = A_x \left[1 + \frac{1}{2m}\, P^{\{m\}}_x\right]$$

$$P^{\{m\}}_x = P^{(m)}_x \left(1 + \frac{1}{2m}\, P^{\{m\}}_x\right) \qquad (5.24)$$

$$= \frac{P_x}{1 - \frac{m-1}{2m}\, d - \frac{1}{2} P_x} \qquad (5.25)$$

De manera similar pueden deducirse fácilmente:

$$P^{\{m\}}_{x:\overline{n}|} = \frac{P_{x:\overline{n}|}}{1 - \frac{m-1}{2m}\, d - \frac{1}{2} P^1_{x:\overline{n}|}} \qquad (5.26)$$

$$_tP^{\{m\}}_x = \frac{_tP_x}{1 - \frac{m-1}{2m}\, d - \frac{1}{2} P^1_{x:\overline{t}|}} \qquad (5.27)$$

5.4 PRIMAS CONTINUAS

Cuando los pagos se hacen con mayor frecuencia, de tal manera que m es -

infinitamente grande, las primas se conocen como primas contínuas. La notación utilizada es similar a la utilizada hasta ahora, sustituyendo el supraíndice por una "barra" sobre el símbolo P. En esta modalidad de primas únicamente se considera la hipótesis de cese de pago de primas al fallecimiento del asegurado.

Las expresiones relativas a los distintos tipos de seguros pueden deducirse de la expresión (5.1) ó de los pagaderos m veces haciendo tender m a infinito; así:

$$\bar{P}_x = \frac{A_x}{\bar{a}_x} \qquad (5.28)$$

$$= \frac{P_x}{1 - \frac{1}{2}(P_x + d)} \qquad (5.29)$$

$$= \lim_{m \to \infty} P_x^{(m)} \qquad (5.30)$$

$$\bar{P}(\bar{A}_x) = \frac{\bar{A}_x}{\bar{a}_x} = \frac{\bar{M}_x}{\bar{N}_x} \qquad (5.31)$$

$$= \lim_{m \to \infty} P^{(m)} (\bar{A}_x) \qquad (5.32)$$

5.5 EJERCICIOS.

5.5.1 Una cierta póliza emitida a edad 45 provee los beneficios mostrados en la siguiente tabla:

años de vigencia	1	2	3	4	5	6	7	8	9	despues
beneficios	1000	1200	1400	1600	1800	2000	1500	1000	500	0

Cual será la prima neta anual a pagar durante 5 años?

5.5.2 Demuestra que:

a) $P'_{x:\overline{n}|} = v - a_{x:\overline{n}|} \; (P_{x:\overline{n}|} + d)$

b) $P_x = \dfrac{d \; A_x}{1 - A_x}$

c) $P_x = \dfrac{v \; q_x + P_{x+1} \; a_x}{\ddot{a}_x}$

5.5.3 Si $A_x = (0.01)x$ y $i = 0.02$, hallar expresiones para $\ddot{a}_x$ y P_x .

5.5.4 Demuestra que:

$$\lim_{m \to \infty} P_x^{\{m\}} = \lim_{m \to \infty} P_x^{(m)}$$

5.5.5 Demuestra que:

a) $\bar{P}(\bar{A}_x) = \dfrac{1}{\bar{a}_x} - \delta$

b) $P_x^{[m]} = P_x \; \dfrac{d^{(m)}}{d}$

c) $P\left[(IA)_x\right] = 1 - d\,(I\ddot{a})_x \,/\, \ddot{a}_x$

5.5.6 Una persona de 30 años de edad, desea adquirir una póliza que le garantice: mensualidades de 100 000 unidades monetarias a partir del momento en que cumpla 48 años y mientras permanezca con vida y un pago de 2 500 000 unidades monetarias en el momento en que fallezca independientemente de la cobertura anterior.

Utilizando la tabla E.M. 62-67 al 4.5% determina:

a) La prima neta anual si el período de pago de primas es de 10 años.

b) La prima neta fraccionada calculada a plazos pagadera en forma mensual con período de pago de primas de 15 años.

c) La prima neta fraccionada calculada a prorrata, pagadera en forma semestral con período de pago de primas de 8 años.

CAPITULO VI

RESERVA DE PRIMAS NETAS

6.1 INTRODUCCION

Considerando las tasas de mortalidad e interés como factores únicos en la determinación de primas (primas netas), podemos expresar cualquier póliza como una combinación de seguros diferidos temporales a un año; lo anterior permite que una persona, en lugar de pagar la prima única ó la serie de primas periódicas constantes, pueda optar por renovar anualmente un seguro temporal a un año con beneficios idénticos a los ofrecidos en la póliza original pagando la PNU que año en año va siendo necesaria.

La cantidad a cubrir en el t-ésimo período (si la suma asegurada es unitaria y pagadera al final del año de fallecimiento) es $V\ q_{x+t-1}$; esta cuota se conoce como "prima natural" y es proporcional a la probabilidad de muerte.

Sin embargo, como la tasa anual de mortandad se incrementa año con año (excepto para edades pequeñas), la tendencia creciente de la prima natural ocasionaría que - a edades avanzadas - el seguro quedara fuera de las posibilidades económicas de la mayoría.

La prima neta nivelada está diseñada para evitar los incrementos en las primas periódicas y asegurar con ello la permanencia dentro de la población asegurada.

La figura 6.1 muestra que para los primeros años de aseguramiento la prima nivelada es mayor a la natural, invirtiéndose esta relación en los años subsecuentes. Es necesario entonces, que la compañía forme un fondo acumulativo con los "excesos" de los primeros años para solventar los "déficits" posteriores; dicho fondo recibe el nombre de RESERVA.

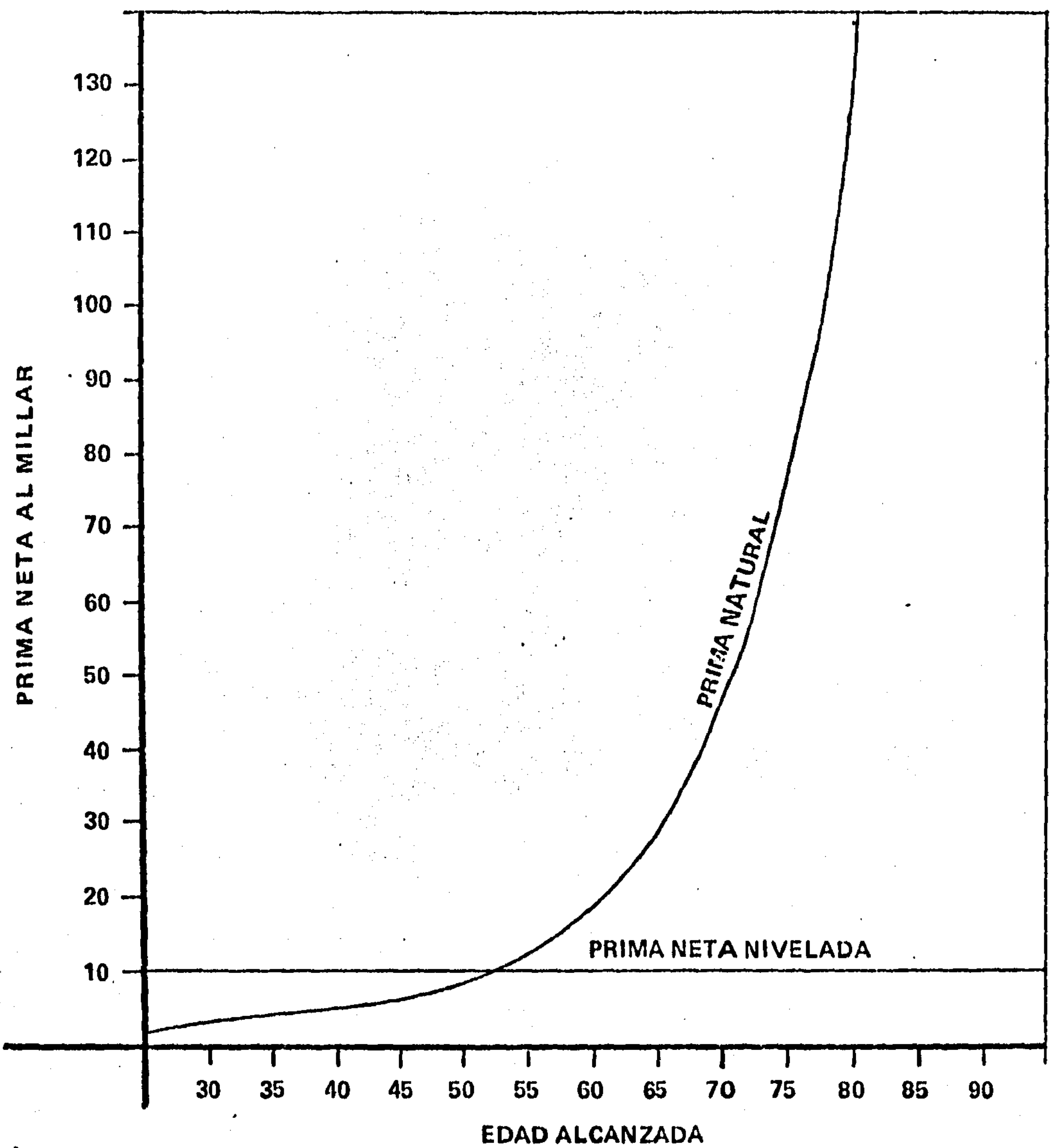


FIG. 6.1.- GRAFICA COMPARATIVA DE PRIMAS NETAS DE UN SEGURO ORDINARIO DE VIDA PARA UNA PERSONA DE EDAD 25 BAJO LA TABLA E.M. 62-67, (4.5 %)

Puesto que hemos asumido con anterioridad que un número suficientemente grande de personas adquieren un tipo determinado de póliza, deberá dividirse la Reserva (ó fondo común) entre el número de sobrevivientes para encontrar el fondo correspondiente a cada póliza individual.

La reserva puede entonces definirse como la diferencia entre el valor presente de los compromisos contraídos por parte del asegurado y asegurador.

En lo sucesivo, el término "reserva terminal" (ó simplemente "reserva") hará referencia a fondos individuales - valuados al finalizar cada período - formados en base a primas netas niveladas.

El siguiente ejemplo ilustra el comportamiento de la reserva. Supóngase que cada una de 1000 personas, todas de edad 30, adquieren un seguro temporal a 10 años de mil unidades monetarias. De acuerdo a la tabla E. M. 62-67 al 4.5%, la prima neta nivelada anual que deberá pagar cada asegurado es de 2.7389 unidades monetarias; la prima natural correspondiente al primer año de aseguramiento sería de 2.2915 unidades monetarias existiendo un exceso de 0.4474 por póliza, esto es, un exceso total de (0.4474) (1000) que acumulado al 4.5% al finalizar el año es de 467.53. Durante el transcurso del año fallecieron 2 personas, por lo que el fondo acumulado deberá dividirse entre 998 para determinar la reserva individual al final del 1er. año, correspondiendo 0.4685 unidades monetarias a cada póliza.

Para el siguiente año cada asegurado paga un exceso de 0.3660; el exceso total sumado al fondo anterior y acumulado a la tasa de interés estipulada forma la reserva del segundo año, por lo que la reserva individual es: 870.28/995 = 0.8747 .

La tabla 6.1 muestra el comportamiento de la reserva durante todo el período de cobertura del seguro.

Año	Prima natural (al millar)	Prima neta constante (al millar)	Diferencia	Asegurados a inicio de año	Exceso ó déficit total	Fondo al Finalizar el año	Reserva terminal por póliza
1	2.2915	2.7389	0.4474	1000	447.40	467.53	0.4685
2	2.3729	2.7389	0.3660	998	365.27	870.28	0.8747
3	2.4629	2.7389	0.2760	995	274.62	1196.42	1.2049
4	2.5635	2.7389	0.1754	993	174.17	1432.27	1.4467
5	2.6745	2.7389	0.0644	990	63.76	1563.35	1.5839
6	2.7968	2.7389	(0.0579)	987	(57.15)	1573.98	1.5996
7	2.9338	2.7389	(0.1949)	984	(191.78)	1444.40	1.4724
8	3.0849	2.7389	(0.3460)	981	(339.43)	1154.69	1.1807
9	3.2521	2.7389	(0.5132)	978	(501.91)	682.15	0.6996
10	3.4388	2.7389	(0.6999)	975	(682.40)	(0.25)	0.0003

Tabla 6.1 Comportamiento de la reserva de 1000 pólizas temporales a 10 años de 1000 unidades monetarias emitidas a edad 30 bajo la tabla E.M. 62-67 al 4.5%.

NOTA: La reserva al final del décimo año debería ser cero; la diferencia existente corresponde a errores de redondeo.

La notacion que se utilizará para la reserva individual al final del - t-ésimo año de seguros básicos (O.V., temporal ó dotal) pagaderos al - final del año de fallecimiento, es de la forma:

$$ {}^{n}_{t}V^{m}_{\propto} $$

donde t indica la fecha de valuación de la reserva, n el período de pago de primas, $\propto$ el tipo de cobertura de la que se trata y m la frecuencia de pago de primas por período y su forma de cálculo (reales, a plazos ó a prorrata).

Para otro tipo de coberturas omitirémos el sufijo, conjugando la expresión con la notación utilizada para la PNU adecuada; así:

${}^{n}_{t}V^{(m)}_{x}$ denotará la reserva al final del t-ésimo año de un seguro O.V. con primas fraccionadas reales pagaderas m veces al año durante n años.

${}_{t}V_{x:\overline{n|}}$ denotará la reserva al final del t-ésimo año de un seguro dotal a n años.

${}^{n}_{t}V\left[(IA)_{x}\right]$ denotará la reserva al final del t-ésimo año de un seguro vitalicio y creciente con período de pago de primas de n años.

6.2 METODO PARA DETERMINAR LA RESERVA.

Dado que la reserva se forma con "excesos" de primas pagadas durante - los primeros años de aseguramiento y sirve para cubrir parte de los - riesgos futuros, pueden determinarse expresiones para su valuación - al final de un determinado año - considerando:

a) la diferencia del valor presente de los beneficios futuros que otorgará el asegurador y el valor presente de las primas periódicas que falta de cubrir el asegurado. (Método Prospectivo).

b) el valor actual de la diferencia entre las primas pagadas por el asegurado y los beneficios otorgados en el pasado por el asegurador (Método Retrospectivo).

La equivalencia entre estos dos métodos puede demostrarse fácilmente.

6.2.1 Método Prospectivo.- Desde el punto de vista prospectivo, la reserva al final del t-ésimo año deberá cubrir la diferencia en las obligaciones futuras entre asegurado y asegurador valuadas en ese momento. Para una póliza cualquiera emitida a edad x lo anterior puede ser expresado como:

$$A_{(t)} = P\,\ddot{a}_{(t)} + {}_tV \qquad (6.1)$$

donde $A_{(t)}$ representa la PNU a edad x+t de los beneficios futuros estipulados en la póliza, P es la prima periódica convenida en el momento de la contratación, $\ddot{a}_{(t)}$ es la anualidad valuada a edad x+t correspondiente a las características de la prima periódica y ${}_tV$ es la reserva acumulada valuada al finalizar el t-ésimo año.

En el caso de un seguro O.V. unitario, pagadero al final del año de fallecimiento, la reserva terminal al cabo de t años es:

$${}_tV_x = A_{x+t} - P_x\,\ddot{a}_{x+t} \qquad (6.2)$$

$$= \frac{M_{x+t}}{D_{x+t}} - \frac{M_x}{N_x}\,\frac{N_{x+t}}{D_{x+t}} = 1 - \frac{\ddot{a}_{x+t}}{\ddot{a}_x}$$

Para un seguro O.V. unitario con período de pago de primas de n años se tiene:

$$
{}_t^nV_x = \begin{cases} A_{x+t} - {}_nP_x\, \ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|} & \text{si} \quad t < n \\ \\ A_{x+t} & \text{si} \quad t \geqslant n \end{cases} \qquad (6.3)
$$

La reserva al final de t-ésimo año de un seguro O.V. con primas fraccionadas reales pagaderas m veces al año, se tiene:

$$
{}_tV_x^{(m)} = A_{x+t} - P_x^{(m)}\, \ddot{a}_{x+t}^{(m)} \qquad (6.4)
$$

$$
= A_{x+t} - \frac{A_x}{\ddot{a}_x^{(m)}}\, \ddot{a}_{x+t}^{(m)}
$$

Sustituyendo (3.42) y (5.16) tenemos:

$$
{}_tV_x^{(m)} = A_{x+t} - P_x^{(m)}\left[\ddot{a}_{x+t} - \frac{m-1}{2m}\right]
$$

$$
= A_{x+t} - \left[P_x + \frac{m-1}{2m}\; P_x^{(m)}\; (P_x+d)\right]\ddot{a}_{x+t} + \frac{m-1}{2m}\, P_x^{(m)}
$$

$$
= A_{x+t} - P_x\, \ddot{a}_{x+t} + \frac{m-1}{2m}\, P_x^{(m)}\left[\; 1-(P_x+d)\; \ddot{a}_{x+t}\right]
$$

$$
= {}_tV_x\left[1 + \frac{m-1}{2m}\; P_x^{(m)}\right] \qquad (6.5)
$$

En la expresión anterior se aprecia con claridad la formación de la reserva correspondiente a la parte de primas que en promedio deja de percibirse en el año en que ocurre el fallecimiento.

Para un seguro O.V., con primas fraccionadas calculadas a plazos se tiene:

$$ {}_tV_x^{[m]} = A_{x+t}\left(1 - \frac{m-1}{2m} P_x^{[m]}\right) - P_x^{[m]}\, \ddot{a}_{x+t}^{(m)} $$

$$ \doteq A_{x+t} - \frac{m-1}{2m} P_x^{[m]} \left(1 - d\, \ddot{a}_{x+t}\right) - P_x^{[m]}\left(\ddot{a}_{x+t} - \frac{m-1}{2m}\right) $$

$$ \doteq A_{x+t} - \ddot{a}_{x+t} P_x^{[m]} \left(1 - \frac{m-1}{2m} d\right) $$

$$ \doteq A_{x+t} - P_x\, \ddot{a}_{x+t} $$

por lo tanto:

$$ {}_tV_x^{[m]} \doteq {}_tV_x \qquad (6.6) $$

Para un seguro O.V. con primas fraccionadas calculadas a prorrata se tiene:

$$ {}_tV_x^{\{m\}} = A_{x+t}\left(1 + \frac{1}{2m} P_x^{\{m\}}\right) - P_x^{\{m\}}\, \ddot{a}_{x+t}^{(m)} $$

$$ = A_{x+t}\left(1 + P_x^{\{m\}}\left(\frac{1}{2} - \frac{m-1}{2m}\right)\right) - P_x^{\{m\}}\, \ddot{a}_x^{(m)} $$

$$\doteq A_{x+t}\ (1 + \tfrac{1}{2}\ P_x^{\{m\}}) - \tfrac{m-1}{2m}\ P_x^{\{m\}}(1 - d\ \ddot{a}_{x+t})$$

$$- P_x^{\{m\}}(\ddot{a}_{x+t} - \tfrac{m-1}{2m})$$

$$\doteq A_{x+t}\ (1 + \tfrac{1}{2}\ P_x^{\{m\}}) - P_x^{\{m\}}\ \ddot{a}_{x+t}\ (1 - \tfrac{m-1}{2m}\ d)$$

De (5.25) se tiene:

$$P_x^{\{m\}}(1 - \tfrac{m-1}{2m}\ d) \doteq P_x\ (1 + \tfrac{1}{2}\ P_x^{\{m\}})$$

por lo que:

$${}_tV_x^{\{m\}} \doteq A_{x+t}\ (1 + \tfrac{1}{2}\ P_x^{\{m\}}) - \ddot{a}_{x+t}\ (1 + \tfrac{1}{2}\ P_x^{\{m\}})\ P_x$$

$$= (A_{x+t} - P_x\ \ddot{a}_{x+t})\ (1 + \tfrac{1}{2}\ P_x^{\{m\}})$$

$$= {}_tV_x\ (1 + \tfrac{1}{2}\ P_x^{\{m\}}) \qquad (6.7)$$

Para un seguro vitalicio con beneficios de k unidades moneta-- rias durante el k-ésimo año de aseguramiento, la fórmula prospectiva de la reserva al final del año t es:

$$\begin{array}{cccc}
 & & & \cdot \\
 & & & \cdot \\
 & & & \cdot \\
 & & & 1 \\
 & & 1 & 1\ \ldots \\
 & 1 & 1 & 1\ \ldots \\
 & t & t & t\ \ldots \\
\hline
x+t & x+t+1 & x+t+2 & x+t+3
\end{array}$$

$$ {}_tV\left[(IA)_x\right] = \left[(t)\,A_{x+t} + (I\,A)_{x+t}\right] - P\left[(IA)_x\right]\ddot{a}_{x+t} \qquad (6.8) $$

Para otro tipo de coberturas, las fórmulas prospectivas de la reserva se obtienen de manera similar.

Cabe mencionar que en el momento de elegir la forma de la prima periódica debe tenerse cuidado de evitar la formación de reservas negativas; el ejemplo mas obvio corresponde al seguro con beneficios decrecientes y primas netas niveladas. Ese tipo de reservas se evitan acortando el período de pago de primas o combinando seguros dotales puros con otros beneficios.

6.2.2 Método Retrospectivo.- Otra forma de calcular la reserva - al final de un determinado año - , es considerarla como la diferencia entre el valor acumulado de las primas ya pagadas y el valor acumulado de los beneficios pasados.

Para una póliza cualquiera emitida a edad x, con primas anuales durante k años, lo anterior puede ser expresado mediante la relación:

$$ {}_tV = P\,{}_tU_x - {}_tk_x \qquad (6.9) $$

con

$$ {}_tU_x = \begin{cases} \ddot{s}_{x:\overline{t|}} & \text{si} \quad k \geqslant t \\ \dfrac{\ddot{s}_{x:\overline{k|}}}{{}_{t-k}E_k} & \text{si} \quad k < t \end{cases} $$

$$ {}_{t}k_{x} = \frac{1}{{}_{t}E_{x}} \sum_{r=0}^{t-1} b_{(r+1)} \; {}_{r/}q_{x} \; V^{r+1} $$

donde $b_{(r+1)}$ representa los beneficios estipulados en la póliza correspondiente al r-ésimo año de aseguramiento.

La fórmula retrospectiva de la reserva al final del t-ésimo año de un seguro O.V. unitario es entonces:

$$ {}_{t}V_{x} = \left[P_{x} \; \ddot{a}_{x:t} - A^{1}_{x:\overline{t}|} \right] \frac{1}{{}_{t}E_{x}} $$

$$ = \frac{P_{x} \; (N_{x} - N_{x+t}) - (M_{x} - M_{x+t})}{D_{x+t}} \qquad (6.10) $$

Para un seguro O.V. unitario con período de pago de primas de n años se tiene:

$$ {}^{n}_{t}V_{x} = \begin{cases} \left[P_{x} \; \ddot{a}_{x:\overline{t}|} - A^{1}_{x:\overline{t}|} \right] \frac{1}{{}_{t}E_{x}} & \text{si} \quad n \geq t \\ \\ \left[P_{x} \; \ddot{a}_{x:\overline{n}|} - A^{1}_{x:\overline{t}|} \right] \frac{1}{{}_{t}E_{x}} & \text{si} \quad n < t \end{cases} $$

Para un seguro vitalicio con beneficios de k unidades monetarias durante el k-ésimo año de aseguramiento, la fórmula retrospectiva de la reserva al final del año t es:

$$ {}_{t}V \left[(IA)_{x} \right] = \left[P \left[(IA)_{x} \right] \ddot{a}_{x:t} - (IA)^{1}_{x:\overline{t}|} \right] \frac{1}{{}_{t}E_{x}} $$

6.2.3 Método de Recurrencia.- Si ${}_tV$ es la reserva al final del t-ésimo año, P es la prima anual pagadera al inicio del año t+1 y S es la suma asegurada correspondiente pagadera al final del t+1-ésimo año, puede determinarse ${}_{t+1}V$ considerando a $({}_tV + P)$ como la prima natural de una póliza temporal a un año que garantiza S unidades monetarias en caso de fallecimiento y ${}_{t+1}V$ en caso de sobrevivencia; esto es:

$$l_{x+t}\,({}_tV + P) = \frac{(S)\,d_{x+t} + {}_{t+1}V\,l_{x+t+1}}{1+i}$$

$${}_{t+1}V = \frac{l_{x+t}\,({}_tV+P)\,(1+i) - (S)\,d_{x+t}}{l_{x+t+1}}$$

$$= \frac{({}_tV+P)\,(1+i) - (S)\,q_{x+t}}{p_{x+t}} \qquad (6.11)$$

$${}_{t+1}V = ({}_tV+P)\,U_{x+t} - (S)\,k_{x+t} \qquad (6.12)$$

$$\text{con}\quad U_{x+t} = \frac{(1+i)}{p_{x+t}}\,,\quad k_{x+t} = \frac{q_{x+t}}{p_{x+t}}\quad y\quad {}_0V = 0$$

La expresión (6.12) es conocida como fórmula de Fackler.

Este método es muy conveniente cuando se trata de beneficios pagaderos al final del año de fallecimiento no constantes ó cuando la obtención de las primas periódicas es muy laboriosa; por ejemplo, primas periódicas crecientes.

6.3 PRIMA DE RIESGO Y PRIMA DE AHORRO

De (6.11) puede deducirse fácilmente la siguiente expresión:

$$P = (S - {}_{t+1}V)\,\frac{q_{x+t}}{(1+i)} + \left[\frac{{}_{t+1}V}{(1+i)} - {}_{t}V\right] \qquad (6.13)$$

donde se aprecia con claridad la parte de la prima destinada a cubrir el desembolso complementario a la reserva formada al final del período, momento en que se efectúa el pago de las reclamaciones; así, si la suma asegurada es de S unidades monetarias y al final del t+1 año la reserva formada es de ${}_{t+1}V$, el desembolso complementario de cada una de las reclamaciones esperadas (de acuerdo a la tabla de mortalidad) será de $S - {}_{t+1}V$ unidades monetarias, por lo que $(S - {}_{t+1}V)\, q_{x+t}/(1+i)$ es la parte de la prima destinada a cubrir el desembolso complementario y recibe el nombre de "prima de riesgo".

Por otro lado, ${}_{t+1}V/(1+i) - {}_{t}V$ representa la cantidad de prima destinada a "completar" la reserva necesaria al finalizar el año t+1 , esta diferencia se conoce como "prima de ahorro".

En los seguros dotales y vitalicios se cumple:

$${}_{t}V < {}_{t+1}V$$

para toda t entera comprendida en el período de cobertura; sin embargo, esta relación no se cumple para seguros temporales (ver tabla 6.1) en las que la "prima de ahorro" podrá tomar valores negativos.

Es fácil de demostrar que la suma de las primas de ahorro acumuladas al interés preestablecido al final de año m es igual a la reserva acumulada a esa fecha.

6.4 RESERVAS MEDIAS.

Para efectos de balance, es necesario que las compañías aseguradoras - calculen (a la fecha del balance) el total de reservas de las pólizas - en vigor.

Debido a que las reservas terminales se calculan al final de cada año - póliza y que la cartera de una compañía aseguradora cuenta con pólizas emitidas en distintas fechas, es preciso poder determinar la reserva de una póliza en un momento cualquiera, para lo cual se utiliza un método de aproximación.

Definiremos la reserva inicial de una póliza, como la reserva a inicios de año justamente después de que ha sido pagada la prima correspondiente; si denotamos a la reserva inicial del año t por ${}_tI$, entonces:

$$ {}_tI = {}_{t-1}V + P \qquad (6.14) $$

ó

$$ {}_tI = {}_{t-1}V $$ si el período de pago de primas ha fenecido.

Si se quiere determinar la reserva en el momento t+h con $0 < h < 1$, puede utilizarse como aproximación una interpolación lineal entre la reserva inicial y terminal del año t+1; esto es:

$$ {}_{t+h}V = (1-h)\ {}_{t+1}I + h\ {}_{t+1}V \qquad (6.15) $$

La reserva media (cuando h = 1/2) será denotada con una simbología muy similar a la utilizada para reservas terminales, donde la única variante es la sustitución de la V por M; esto es:

$$ {}_tM = {}_{t+1/2}V = \frac{1}{2}\left(P + {}_tV + {}_{t+1}V\right) \qquad (6.16) $$

La expresión anterior es utilizada para calcular la reserva de balance bajo la suposición de que todas las pólizas correspondientes a un determinado año calendario fueron emitidas justamente a la mitad de ese año.

6.5 METODO DE VALUACION.

Se conoce como valuación al proceso de cálculo de la reserva conjunta - de un grupo de pólizas. Consideraremos aquí ciertos aspectos prácticos del proceso de valuación.

Uno de los métodos de valuación está basado en la fórmula retrospectiva para la determinación de la reserva, que es válida para seguros básicos (O.V., temporal y dotal) cuyo período de pago de primas no ha cesado.

Por este método, se agrupan todas las pólizas básicas de acuerdo a la edad y año de emisión calculando la reserva de cada grupo resultante de acuerdo a estas dos características, donde se considera como prima a la suma de las primas correspondientes de las pólizas que conforman el grupo y la suma asegurada como la suma de las correspondientes a cada póliza del grupo; esto es:

$$ \sum_{j\in G(n,p)} P_j \;(N_x - N_{x+t})/D_{x+t} - \sum_{j\in G(n,p)} S_j \;(M_x - M_{x+t})/D_{x+t} = \sum_{j\in G(n,p)} {}_tV = {}_tV_{G(n,p)} $$

$$ {}_t(VT) = \sum_{\forall\, n,p} {}_tV_{G(n,P)} \qquad (6.17) $$

donde G(n,p) es el conjunto de índices que identifican las pólizas emitidas el año n con edad de emisión P, ${}_tV_{G(n,p)}$ es la reserva total del grupo G(n,p) al final del año t y ${}_t(VT)$ es la reserva de todos los grupos formados.

El método de valuación a edad alcanzada es una modificación del método descrito con anterioridad y tiene la característica de calcular la reserva conjunta agrupando todas las pólizas básicas, cuyo período de pago de primas no se ha extinguido, de acuerdo a la característica de edad alcanzada. La fórmula de cálculo se deduce partiendo de la fórmula retrospectiva para la reserva sumando al numerador $(M_x - P_x N_x)$; obteniéndose así:

$$ {}_tV = A_{x+t} - P\ddot{a}_{x+t} + \frac{(P - P_x)\, N_x}{D_{x+t}} \qquad (6.18) $$

donde P representa la prima neta anual del plan que se esta valuando y P_x la correspondiente a un O.V. calculada a la edad de emisión del plan.

Si hacemos $\theta_x = (P - P_x)\, N_x$, el valor de θ_x será constante durante todo el período de cobertura de cada póliza y deberá ser calculado una sola vez (de preferencia en el momento de la emisión).

Puesto que la reserva conjunta de las pólizas que conforman un grupo es la suma de las reservas individuales entonces:

$$ V_{G(p)} = \sum_{j\in G(p)} {}_tV = \sum_{j\in G(p)} S_j A_{x+t} - \sum_{j\in G(p)} P_j \ddot{a}_{x+t} + \sum_{j\in G(p)} \theta_j / D_{x+t} $$

y $\qquad (6.19)$

$$ {}_t(VT) = \sum_{\forall p} {}_tV_{G(p)} $$

6.6. COMPARACION DE RESERVAS DE DIFERENTES TABLAS.

Dadas dos tablas de mortalidad (T y T') en las cuales las tasas de inte rés son i e i' y las de mortalidad q_x y q'_x respectivamente, las reservas correspondientes a una cobertura determinada (de una unidad monetaria) pueden escribirse de la forma:

$$({}_tV + P)\ (1+i) = {}_{t+1}V + q_{x+t}\ (1 - {}_{t+1}V) \qquad (6.20)$$

y

$$({}_tV' + P')\ (1+i) = {}_{t+1}V' + q'_{x+t}\ (1 - {}_{t+1}V') \qquad (6.21)$$

Restando las expresiones anteriores se tiene:

$$({}_tV+P)(i'-i)+({}_tV'-{}_tV + P'-P)(1+i') = (q'_{x+t} - q_{x+t})(1 - {}_{t+1}V)$$

$$+ (1 - q'_{x+t})\ ({}_{t+1}V' - {}_{t+1}V) \qquad (6.22)$$

Suponiendo que las reservas correspondientes a estas dos tablas son -- iguales para todas las edades, se tiene:

$$({}_tV+P)\ (i'-i)+(P'-P)(1+i) = (q'_{x+t} - q_{x+t})\ (1 - {}_{t+1}V) \qquad (6.23)$$

La expresión anterior se conoce como "ecuación de equilibrio" y tiene - aplicaciones en problemas relacionados con riesgos extra y valuación.

Cuando las tasas de interés son idénticas, puede demostrarse fácilmente que la condición de equilibrio para (6.23) es:

$$q'_x - q_x = \frac{k(1+i)}{\ddot{a}_{x+1}}$$

donde $k = (\ddot{a}_x / \ddot{a}'_x) - 1$

La relación que guardan las reservas de una misma póliza obtenidas a través de la tabla T y T' dependerá tanto de la relación existente entre tasas de interés como en la referente a tasas de mortalidad. La contribución más importante en relación a los efectos de cambios en las tasas de interés y mortalidad se debe a G.J. Lidstone quien en 1905 demostró en teorema (válido para seguros O.V. y dotales) del que se desprenden los siguientes resultados:

a) al incrementar la tasa de interés de una tabla de mortalidad se produce un decremento en la reserva; sucediendo lo contrario cuando la tasa se decrementa.

b) Si la tasa de mortalidad se incrementa por una constante, la reserva se decrementa, sucediendo lo contrario ante un decremento constante en la tasa de mortalidad.

La relación entre las reservas puede ser obtenida también a partir del criterio de las relaciones de anualidades. Así, para un seguro O.V. se tiene:

$$ {}_tV_x \; > = < \; {}_tV'_x $$

dependiendo de:

$$ \frac{\ddot{a}_{x+t}}{\ddot{a}_x} > = < \frac{\ddot{a}'_{x+t}}{\ddot{a}'_x} $$

Puede entonces, por simple inspección sobre el cociente $\ddot{a}_{x+t} / \ddot{a}_x$, determinarse si la reserva obtenida a través de una tabla T es mayor o menor que la obtenida a través de una tabla T'.

6.7 EJERCICIOS

6.7.1 Proporciona las expresiones en función de conmutados para:

a) ${}^{10}_{5}V\left[(DA)_{x:\overline{20}|}\right]$

b) ${}_{10}V\,(A^{1}_{30:\overline{25}|})$

c) ${}_{3}V\left[(I\bar{A})_{30:\overline{15}|}\right]$

6.7.2 Demuestra que:

a) $${}_{t}V_{x} = \frac{A_{x+t} - A_{x}}{1 - A_{x}} = A_{x+t}\left(1 - \frac{P_{x}}{P_{x+t}}\right)$$

b) $${}_{t}V^{1}_{x:n} = (P^{1}_{x+t:\overline{n-t}|} - P^{1}_{x:\overline{n}|})\,\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}$$

6.7.3 Dados $P^{1}_{40:\overline{10}|} = 0.00426$, $P_{40:\overline{5}|} = 0.18972$ y $P^{1}_{40:\overline{5}|} = 0.00343$ determina ${}_{5}V^{1}_{40:\overline{10}|}$

6.7.4 Proporciona las expresiones para:

a) ${}_{t}V^{(m)1}_{x:\overline{n}|}$

b) ${}^{k}_{t}V^{[m]}_{x}$ para $t < k$

c) ${}_{t}V^{[m]}_{x:\overline{n}|}$

d) ${}_{t}V^{\{m\}}_{x:\overline{n}|}$

6.7.5 Demuestra las siguientes identidades:

a) ${}_{t+r}V_{x} = 1 - (1 - {}_{r}V_{x})\,(1 - {}_{t}V_{x+r})$

b) $P_{x+t}\,(1 - {}_{t}V_{x}) = P_{x} + d\;\; {}_{t}V_{x}$

6.7.6 Demuestra que:

$$P + d\;{}_{t}V = v\,q_{x+t}\,(\,1 - {}_{t}V) + v\,p_{x+t}\,({}_{t+1}V - {}_{t}V)$$

y dá una interpretación verbal de esta ecuación.

CONCLUSION.

La importancia del Cálculo Actuarial radica en que por medio de él se valúan los riesgos de los seguros, lo que permite determinar las primas a pagar por cada uno de los asegurados de una determinada cobertura y constituir las reservas necesarias para el buen funcionamiento de una empresa aseguradora.

El presente trabajo constituye una recopilación bibliográfica acerca del Cálculo Actuarial para el ramo de vida individual; aun cuando no se tocaron algunos puntos que son de interés en la práctica, los conceptos aquí vertidos facilitan su comprensión, sin que ésto implique el abandono de aquellos.

En relación a Tablas Selectas de Mortalidad, su desarrollo integral está fuera del alcance de este trabajo, aunque es un tema básico y de amplia utilización en los planes de seguros de vida; queda pues, como punto de estudio para los interesados en el tema.

Se hace tambien énfasis en la importancia de otras ramas de las matemáticas aplicadas en problemas prácticos en el campo actuarial

Es importante entonces, contar con profesionistas que tengan los conocimientos necesarios para el desarrollo de planes de aseguramiento sobre bases sólidas y acordes a las necesidades actuales, garantizando con ello el buen funcionamiento del seguro.

B I B L I O G R A F I A

Athearn, James. Risk and insurance. Appleton Century Crofts., New York, 1962.

Freeman, Harry. Finite differences for actuarial students. Cambridge University Press, 1965.

Gershenson, Harry. Measurement of mortality. Chicago Ill., 1961.

González Gale, J. Elementos de cálculo actuarial. Ediciones Macchi, Buenos Aires, 1968.

Haycoks, H. W. and Perks, W. Mortality and other investigations. Cambridge University Press, 1955.

Hooker, P. F. and Longley - Cook, L. H. Life and other contingencies, vol. I, Cambridge University Press, 1953.

Jordan, Karoly. Calculus of finite differences. Chelsea Publishing Company, New York, 1960.

Jordan, Chester W. Life contingencies. The Society of Actuaries, Chicago, 1967.

Larson, Robert E. and Gaumnitz, erwin. Life insurance mathematics. John Wiley and Sons, Inc., U.S.A., 1960.

Menge, Walter O. and Glover, James W. An introduction to the mathematics of life insurance. The Macmillan Company, New York, 1958.

Moore J. H. Manual de matemáticas financieras. U.T.E.H.A., México, 1975.

Pedoe, Arthur. Life insurance annuities and pensions. University of Toronto Press, Toronto, 1964.

Richardson, Clarence H. Calculus of finite differences. O. Van Nostrand Company, Inc., U.S.A., 1966.

Scarborough, James B. Numerical mathematical analysis. The Jhons Hopekins Press, Baltimore, 1966.

Spurgeon, E. F. Life contingencies. Cambridge University Press, 1951.

APENDICE A

APENDICE A

DIFERENCIAS FINITAS

A.1 INTRODUCCION

En la práctica con frecuencia tenemos que conformarnos con valores aproximados de funciones cuya forma analítica se desconoce o es de tal naturaleza que es deseable sustituirla por otra más simple; puesto que los polinomios son las funciones más simples, es común encontrar fórmulas aproximativas de este tipo.

Weierstrass en 1885* demostró los siguientes teoremas:

Teor. 1 Si $f_{(x)}$ es contínua en (a,b), es posible encontrar un polinomio $P_{(x)}$ tal que $\left| f_{(x)} - P_{(x)} \right| < \varepsilon \ , \forall x \in (a,b)$

Teor. 2 Si $f_{(x)}$ es una función contínua de período 2π, es posible encontrar una función de la forma:

$$g_{(x)} = a_0 + \sum_{t=1}^{n} a_t \ \text{sen}\ (tx) + \sum_{t=1}^{n} b_t \cos\ (tx)$$

$$\text{tal que} \left| f_{(x)} - g_{(x)} \right| < \varepsilon \ , \forall x \in (a.b)$$

que justifican la sustitución de una función por un polinomio o una serie trigonométrica.

---

* Über die analytische Darstellbarkeit sogenannter willkürlicher Funktionen einer reelen Veränderlichen(Sitzungsberichte der kgl. Ak. der Wiss., 1885).

Utilizando diferencias finitas se pueden deducir fórmulas polinomiales aproximativas; en este apéndice estableceremos las bases necesarias para la obtención de la fórmula de Woolhouse; dando un breve esboso de - diferencias finitas y omitiendo lo referente a la determinación del -- error inherente a toda aproximación.

A.2 DEFINICION DEL OPERADOR Δ.

Sea f_x una función cualquiera de x, si consideramos valores equidistantes del argumento, definiremos las t-ésimas diferencias de f_x como:

$$\Delta^t f_x = \Delta^{t-1} f_{x+h} - \Delta^{t-1} f_x \quad , \quad \text{con } \Delta^0 = I$$

donde Δ^t debe ser entendido como la t-ésima aplicación del operador Δ .

Ejemplo:

$$\Delta^3 f_x = \Delta^2 f_{x+h} - \Delta^2 f_x = (\Delta f_{x+2h} - \Delta f_{x+h}) - (\Delta f_{x+h} - \Delta f_x)$$

$$= f_{x+3h} - 3f_{x+2h} + 3f_{x+h} - f_x$$

Si definimos al operador $E=I+\Delta$, donde I es el operador identidad, - entonces:

$$Ef_x = (I+\Delta)f_x = f_x + \Delta f_x = f_{x+h}$$

$$E^2 f_x = E((I+\Delta)f_x) = Ef_{x+h} = (I+\Delta)\, f_{x+h} = f_{x+2h}$$

$$E^3 f_x = f_{x+3h}$$

$$\begin{matrix} \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \end{matrix}$$

$$E^n f_x = f_{x+nh}$$

por lo tanto:

$$f_{x+nh} = (I+\Delta)^n f_x = \sum_{r=1}^{n} \binom{n}{r} \Delta^r f_x \quad + f_x \qquad (A.1)$$

Esta expresión se utiliza en la aproximación de integrales; por ejemplo:

$$L_x = \int_0^1 l_{x+t}\, dt$$

como

$$l_{x+t} = E^t\, l_x \doteq l_x + (t)\,\Delta l_x = l_x - td_x$$

entonces

$$L_x = \int_0^1 (l_x - td_x) = l_x - \frac{1}{2} d_x = \frac{1}{2} (l_x + l_{x+1})$$

que corresponde a la expresión (1.9); se puede inferir la equivalencia entre la aproximación utilizando las primeras diferencias y suponer que la función se comporta linealmente.

A.3 RELACION ENTRE LOS OPERADORES D Y Δ.

Utilizando la serie de Taylor podemos escribir:

$$f_{x+rh} = f_x + \frac{rh}{1!} Df_x + \frac{(rh)^2}{2!} D^2 f_x + \frac{(rh)^3}{3!} D^3 f_x + \ldots..$$

$$= \left\{ I + (rh)\, D + \frac{(rh)^2}{2!}\, D^2 + \frac{(rh)^3}{3!}\, D^3 + \ldots.\right\} f_x$$

$$= e^{rhD} f_x$$

Por otro lado

$$f_{x+rh} = E^r f_x$$

entonces:

$$e^{hD} = E = (I + \Delta)$$

$$hD = \ln (I + \Delta)$$

Aplicando la serie de Maclaurin tenemos:

$$D = \frac{1}{h} \left(\Delta - \frac{\Delta^2}{2} + \frac{\Delta^3}{3} - \frac{\Delta^4}{4} + - \ldots.. \right) \qquad (A.2)$$

La expresión anterior, permite determinar (aprox.) el coeficiente diferencial de una función partiendo de sus diferencias.

Ejemplo:

Determinar μ_{30} dados los siguientes valores de l_x

x	30	31	32	33	33	35
l_x	9705398	9682154	9658142	9633282	9607474	9580621

La tabla de diferencias es:

x	l_x	Δl_x	$\Delta^2 l_x$	$\Delta^3 l_x$	$\Delta^4 l_x$	$\Delta^5 l_x$
30	9705398	-23244	- 768	- 80	- 20	23
31	9682154	-24012	- 848	-100	3	3
32	9658142	-24860	- 948	- 97		
33	9633282	-25808	-1045			
34	9607474	-26853				
35	9580621					

Como $\mu_x = \frac{-1}{l_x} \frac{d}{dx} l_x$

y $$\frac{d}{dx} l_{30} \doteq - 23244 + 384 - 26.666 + 5 + 4.6$$

$$= - 22882.066$$

entonces

$$\mu_{30} = \frac{22882.066}{9705398} = 0.0024$$

A.4 POLINOMIOS DE BERNOULLI

Sea $P_n\ (x)$ una polinomial de grado n en x tal que:

$$\Delta P_n\ (x) = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \qquad (\text{A.3})$$

ó

$$P_n(x) = \Delta^{-1}\ \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + C \qquad (\text{A.4})$$

donde asumimos que $P_n\ (x)$ es de la forma:

$$P_n\ (x) = \sum_{i=o}^{n} A_i \frac{x^{n-i}}{(n-i)!} = A_0\ \frac{x^n}{n} + A_1\ \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \ldots\ldots + A_{n-1}x + A_n \qquad (\text{A.5})$$

De (A,3) se tiene:

$$\Delta P_n(x) = P_n(x+1) - P_n(x) = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \qquad (\text{A.6})$$

$$\Delta P_{n-1}(x) = \frac{x^{n-2}}{(n-2)!} \qquad (\text{A.7})$$

Diferenciando (A.6) respecto a x:

$$\Delta P'_n(x) = P'_n(x+1) - P'_n(x) = \frac{x^{n-2}}{(n-2)!}$$

de donde:

$$\Delta P_n'(x) = \Delta P_{n-1}(x) \qquad (A.8)$$

ó

$$P_n'(x) = P_{n-1}(x) + K \qquad (A.9)$$

De (A.5):

$$P_n' (0) = A_{n-1}$$

$$P_{n-1}(0) = A_{n-1}$$

lo que implica que en (A.9), K=0; es decir:

$$P_n'(x) = P_{n-1}(x) \qquad (A.10)$$

Podemos entonces decir que $P_n(x)$ es una función Bernoulli si:

$$\Delta P_n(x) = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$$

y

$$P_n'(x) = P_{n-1}(x)$$

Para determinar los coeficientes de (A.5), se puede proceder de la siguiente forma:

de (A.10), (A.3) y (A.4) respectivamente se obtiene:

$$P_2'(x) = A_0x + A_1 = P_1(x)$$

$$\Delta P_1(x) = 1$$

$$P_1(x) = x + C_1$$

esto implica: $A_0 = 1$

Sustituyendo el valor de A_0 en $P_3'(x)$ se obtiene el correspondiente para A_1:

$$P_3'(x) = \frac{x^2}{2!} + A_1x + A_2 = P_2(x)$$

$$\Delta P_2(x) = x$$

$$P_2(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + C \Rightarrow A_1 = -\frac{1}{2}$$

De igual forma podemos encontrar A_2, A_3, etc., ó de la relación:

$$\Delta P_n(0) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{A_i}{(n-1)!} = 0 \qquad \text{para } n > 1$$

Asi tenemos:

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
A_i	1	$\frac{-1}{2}$	$\frac{1}{12}$	0	$\frac{-1}{720}$	0	$\frac{1}{30240}$	0	$\frac{-8}{1209600}$

Puede demostrarse que $A_{2k-1} = 0$ para $k > 1$

A.4.1 Números de Bernoulli.- Los valores de $B_n(0)$ con:

$$B_n(x) = n!\, P_n(x) \qquad (\text{A.11})$$

son conocidos como números de Bernoulli.

Por simplicidad de notación, $B_n = B_n(0)$

A continuación se presentan algunos valores para B_n

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
B_i	1	$\frac{-1}{2}$	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{-1}{30}$	0	$\frac{1}{40}$	0	$\frac{-1}{30}$	0

A.4.2 Propiedades de los polinomios de Bernoulli. - Puesto que:

$$P_n'(x) = P_{n-1}(x)$$

entonces:

$$\int_a^b P_n(x)\, dx = P_{n+1}(b) - P_{n+1}(a)\,, \qquad \text{para } n>0$$

En particular, $P_n(0) = A_n$ y $P_n(1) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{A_i}{(n-i)!} + A_n = A_n$.

de donde:

$$\int_0^1 P_n(x)dx = P_{n+1}(1) - P_{n+1}(0) = A_{n+1} - A_{n+1} = 0$$

En relación a $B_n(x)$ se tiene:

$$B_n'(x) = n!\, P_n'(x) = n\, B_{n-1}(x) , \qquad n \geqslant 1$$

de donde:

$$\int_a^b B_n(x)\, dx = \frac{1}{n+1} (B_{n+1}(b) - B_{n+1}(a)) .$$

En particular:

$$\int_0^1 B_n(x)\, dx = \frac{1}{n+1} (B_{n+1}(1) - B_{n+1}(0))$$

$$= \frac{1}{n+1} ((n+1)!\, P_{n+1}(1) - (n+1)!\, P_{n+1}(0))$$

$$= 0$$

Como $B_i = i!\, P_i(0) = i!\, A_i$, entonces:

$$P_n(x) = B_0 \frac{x^n}{n!} + B_1 \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{B_2}{2!} \frac{x^{n-2}}{(n-2)!} + \ldots\ldots + B_n$$

$$= \frac{1}{n!} \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} B_i\, x^{n-i} \qquad (\text{A}.12)$$

ó simbólicamente:

$$P_n(x) = \frac{1}{n!}(x + B)^n \qquad (A.13)$$

con $B^i \equiv B_i$

Los números de Bernoulli, para x suficientemente pequeño, pueden definirse por:

$$\frac{x}{e^x - 1} = \left(1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \ldots\ldots\right)^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty} B_i \frac{x^i}{i!} \qquad (A.13')$$

esta demostración puede verse en libros de cálculos avanzado*.

A.5 METODOS DE INTEGRACION POR APROXIMACIONES.

Consideremos el problema de valuar una integral definida en un intervalo finito:

$$I = \int_a^b f_x \, dx$$

donde f_x es una función contínua de x en el intervalo $a \leq x \leq b$; podemos sustituir la función f_x por una expresión de la forma:

$$g_x = \sum_{r=1}^{x} \binom{x}{r} \Delta^r f_0 + f_0 \qquad (A.14)$$

---

* Sokolnikoff, I.S. Advanced Calculus; Wilson, E.B. Advanced Calculus.

de modo que:

$$\int_a^b f_x \, dx = \int_a^b g_x^t \, dx + \varepsilon$$

donde g_x^t representa un truncamiento en g_x de las diferencias cuyo orden es mayor que t; dicho de otra forma, lo que se esta haciendo es aproximar la función f_x por un polinomio de orden t.

A.5.1 Regla de Simpson.- considerando como fórmula aproximativa un polinomio de primer orden, la valuación de la integral dependerá únicamente de dos valores del integrando. Si quisiéramos determinar el área bajo una curva suponiendo conocidos tres valores equidistantes del integrando, la curva a ajustar sería una polinomial de segundo orden; esto es:

$$\int_0^2 f_x \, dx = \int_0^2 (f_0 + x \, \Delta f_0 + \frac{x(x-1)}{2} \, \Delta^2 f_0) \, dx$$

$$= \left[x f_0 + \frac{x^2}{2} (\Delta f_0 - \frac{1}{2} \, \Delta^2 f_0) + \frac{x^3}{6} \, \Delta^2 f_0 \right]_{x=0}^{2}$$

$$= \frac{1}{3} (f_0 + 4f_1 + f_2) \qquad (A.15)$$

En la expresión anterior se asume que la magnitud del intervalo entre cada argumento es unitario; si esta magnitud fuera del tamaño n (los valores conocidos de f_x serían f_0, f_n y f_{2n}), bastaría con hacer un cambio de variable (z = nx) para obtener:

$$\int_0^{2n} f_z \, dz = \frac{n}{3} (f_0 + 4f_n + f_{2n}) \qquad (A.16)$$

la expresión anterior es conocida como "regla de Simpson".

Si n es par y $\left|x_i - x_{i+1}\right| = h$ para $i \in \overline{1, n-1}$ y se conoce f_{x_i}, $i \in \overline{1, n}$.

entonces:

$$\int_{x_0}^{x_0+nh} f_x\, dx = \int_{x_0}^{x_0+2h} f_x\, dx + \int_{x_2}^{x_2+2h} f_x\, dx + \ldots\ldots + \int_{x_{n-2}}^{x_{n-2}+2h} f_x\, dx$$

como:

$$\int_{x_i}^{x_i+2h} f_x\, dx = \frac{h}{3}\left(f_{x_i} + 4f_{x_i+h} + f_{x_i+2h}\right)$$

entonces:

$$\int_{x_0}^{x_0+nh} f_x\, dx = \frac{h}{3}\left(f_{x_0} + 4(f_{x_1} + f_{x_3} + f_{x_5} + \ldots\ldots f_{x_{n-1}})\right.$$

$$\left. + 2(f_{x_2} + f_{x_4} + \ldots\ldots + f_{x_{n-2}}) + f_{x_n}\right) \qquad (\text{ A.17 })$$

esta fórmula se conoce como la extensión de la regla de Simpson.

A.5.2 Fórmula de Hardy.

$$\text{Sea } f_x = \sum_{i=0}^{5} a_i\, x^i \qquad (\text{ A.18 })$$

entonces

$$\int_{-3}^{3} f_x\, dx = \left[\sum_{i=1}^{6} a_{i-1} \frac{x^i}{i}\right]_{x=-3}^{3}$$

$$= 6a_0 + 18a_2 + \frac{486}{5} a_4 \qquad (\text{ A.19 })$$

como:

$$f_0 = a_0$$

$$f_{-2} + f_2 = 2a_0 + 8a_2 + 32a_4$$

$$f_{-3} + f_3 = 2_{a_0} + 18_{a_2} + 162_{a_4}$$

se tienen dos ecuaciones con dos incognitas, esto es:

$$f_{-2} + f_2 - 2f_0 = 8a_2 + 32a_4$$

$$f_{-3} + f_3 - 2f_0 = 18a_2 + 162a_4$$

cuya soluciôn es:

$$a_4 = \frac{(f_{-2} + f_2 - 2f_0)}{104} - \frac{(f_{-3} + f_3 - 2f_0)}{234}$$

y

$$a_2 = (f_{-2} + f_2 - 2f_0)\left(\frac{1}{8} - \frac{1}{(8)\ 104}\right) + \frac{1}{(8)\ 234}(f_{-3} + f_3 - 2f_0)$$

Sustituyendo estos valores en (A.19) se tiene:

$$\int_{-3}^{3} f_x\, dx = (2.2)\ f_0 + (1.62)\ (f_{-2} + f_2) + (0.28)\ (f_{-3} + f_3)$$

o cambiando el origen:

$$\int_{0}^{6} f_x\, dx = (2.2)f_3 + (1.62)\ (f_1 + f_5) + (0.28)\ (f_0 + f_6) \qquad (\text{A.20})$$

Si la magnitud del intervalo entre cada argumento fuera n, entonces:

$$\int_0^{6n} f_x\, dx = n\,(0.28\,(f_0 + f_{6n}) + 1.62\,(f_n + f_{5n}) + 2.2\,(f_{3n}))$$

y

$$\int_0^{\infty} f_x\, dx = \int_0^{6n} f_x\, dx + \int_{6n}^{12n} f_x\, dx + \int_{12n}^{18n} f_x\, dx + \ldots..$$

$$= n\left[0.28 \sum_{t=0}^{\infty} f_{n6t} + 1.62\,\left(\sum_{t=0}^{\infty} f_{n(6t+1)} + \sum_{t=1}^{\infty} f_{n(6t-1)}\right) + 2.2 \sum_{t=0}^{\infty} f_{n(6t+3)}\right] \qquad (\text{A.21})$$

Esta expresión es conocida como la "Fórmula de Hardy".

Observe que la suma de los coeficientes de los valores de f_x es igual al rango de integración cuando éste es finito.

A.5.3 Expansión de Maclaurin.- Las fórmulas anteriores expresan la integral de una función en término de un número particular de ordenadas; pueden desarrollarse otras fórmulas bajo la suposición de que el polinomio -- aproximativo es de un determinado orden.

La Fórmula de Euler-Maclaurin permite aproximar el valor de una integral o de la suma de valores consecutivos de una función f_x para valores equidistantes de x, en terminos de una sumatoria o integral respectivamente y ciertas derivadas de la función valuadas en x = 0 y x = n.

Sea $\sum_{x=0}^{n-1} f_x = F_n - F_0$, donde $f_x = \Delta F_x$

entonces:

$$F_x = \Delta^{-1} f_x = (e^{D} - I)^{-1} f_x$$

$$= \left[\left(I + D + \frac{D^2}{2!} + \frac{D^3}{3!} + \ldots\ldots\right) - I \right]^{-1} f_x$$

$$= D^{-1} \left[I + \frac{D}{2!} + \frac{D^2}{3!} + \ldots\ldots \right]^{-1} f_x$$

Utilizando (A.13')

$$F_x = D^{-1} \left[B_0 + B_1 D + \frac{B_2\, D^2}{2!} + \frac{B_3\, D^3}{3!} + \ldots\ldots \right] f_x$$

$$= B_0\, D^{-1} f_x + B_1\, f_x + \frac{B_2}{2!} D\, f_x + \frac{B_3}{3!}\, D^2\, f_x + \ldots\ldots$$

$$= D^{-1}\, f_x - \frac{1}{2}\, f_x + \frac{1}{12}\, Df_x - \frac{1}{720}\, D^3\, f_x + \frac{1}{28800}\, D^5\, f_x - + \ldots\ldots$$

Valuando entre los límites x=0 y x=n tenemos:

$$F_n - F_0 = \int_0^n f_x\, dx - \frac{1}{2}\,(f_n - f_0) + \frac{1}{12}\,(f'_n - f'_0)$$

$$- \frac{1}{720}\,(f'''_n - f'''_0) + - \ldots\ldots \qquad (\text{A.22})$$

por lo tanto:

$$\int_0^n f_x\, dx = \sum_{x=0}^{n-1} f_x + \frac{1}{2}\,(f_n - f_0) - \frac{1}{12}\,(f'_n - f'_0)$$

$$+ \frac{1}{720}\,(f'''_n - f'''_0) -+ \ldots\ldots \qquad (\text{A.23})$$

Estas fórmulas son conocidas como la "Expansión de Euler-Maclaurin".

Puede obtenerse una fórmula más general cambiando el origen al punto - x_0 y considerando una magnitud del intervalo entre las ordenadas de h; esto es:

$$\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+nh} f_x\,dx = \frac{1}{2}f_{x_0} + \sum_{t=1}^{n-1} f_{x_0+th} + \frac{1}{2}f_{x_0+nh}$$

$$- \frac{h}{12}(f'_{x_0+nh} - f'_{x_0}) + \frac{h^3}{720}(f'''_{x_0+nh} - f'''_{x_0}) - + \ldots\ldots$$

(A.24)

A.5.4 Fórmula de Woolhouse.- Utilizando la expansión de Euler-Maclaurin.

$$\int_0^m f_x\,dx = \frac{1}{2}f_0 + \sum_{t=0}^{m-1} f_t + \frac{1}{2}f_m - \frac{1}{12}(f'_m - f'_0)$$

$$+ \frac{1}{720}(f'''_m - f'''_0) - + \ldots\ldots$$

(A.25)

Si la magnitud del intervalo entre las ordenadas es $\frac{1}{n}$, entonces:

$$n\int_0^m f_x\,dx = \frac{1}{2}f_0 + \sum_{t=1}^{mm-1} f_{\frac{t}{m}} + \frac{1}{2}f_m - \frac{1}{12n}(f'_m - f'_0)$$

$$+ \frac{1}{720n^3}(f'''_m - f'''_0) - + \ldots\ldots$$

(A.26)

Multiplicando (A.25) por n:

$$n\int_0^m f_x\,dx = n\left(\frac{1}{2}f_0 + \sum_{t=0}^{m-1} f_t + \frac{1}{2}f_m\right) - \frac{n}{12}(f'_m - f'_0)$$

$$+ \frac{n}{720}(f'''_m - f'''_0) - + \ldots\ldots \quad (\text{ A.27 })$$

De las expresiones (A.26) y (A.27) se sigue:

$$\sum_{t=0}^{mn} f_{\frac{t}{m}} - \frac{1}{2}(f_0 + f_m) - \frac{1}{12n}(f'_m - f'_0) + \frac{1}{720n^3}(f'''_m - f'''_0) - + \ldots\ldots$$

$$= n \sum_{t=0}^{m} f_t - \frac{n}{2}(f_0 + f_m) - \frac{n}{12}(f'_m - f'_0) + \frac{n}{720}(f'''_m - f'''_0) - + \ldots\ldots$$

de donde:

$$\sum_{t=0}^{mn} f_{\frac{t}{m}} = n \sum_{t=0}^{m} f_t - \frac{n-1}{2}(f_0 + f_m) - \frac{n^2-1}{12n}(f'_m - f'_0)$$
$$+ \frac{n^4-1}{720n^3}(f'''_m - f'''_0) - + \ldots\ldots \qquad (A.28)$$

Cambiando la unidad de medida a n, tenemos:

$$\sum_{t=0}^{mn} f_t = n \sum_{t=0}^{mn} f_t - \frac{(n-1)}{2}(f_0 + f_{mn}) - \frac{n^2-1}{12}(f'_{mn} - f'_0)$$
$$+ \frac{n^4-1}{720}(f'''_{mn} - f'''_0) - + \ldots\ldots \qquad (A.29)$$

Estas expresiones se conocen como la fórmula de Woolhouse.

A.5.5 Aplicaciones al cálculo actuarial.- En la práctica, cuando se trata con funciones biométricas, con frecuencia se cae en el error de aproximar - las funciones mediante un polinomio de primer grado, siendo esta aproximación injustificable - excepto para contadas ocasiones - . La fórmula de Hardy ha demostrado resultados satisfactorios en la valuación de integrales de funciones biométricas; basta elegir n de tal forma que 7n caiga justamente dentro de la edad límite (sin incluirla); se tiene entonces:

$$\int_0^{\infty} f_x \, dx = n \, (0.28 \, f_0 + 1.62 \, f_n + 2.2 \, f_{3n} + 1.62 \, f_{5n} + 0.56 \, f_{6n} + 1.62 \, f_{7n}) \qquad (\text{A.30})$$

En la valuación de anualidades pagaderas m veces al año, la fórmula de Woolhouse permite determinar expresiones prácticas de gran uso.

Aplicando esta fórmula para ciertas funciones actuariales, los valores de f_x, $\frac{d}{dx} f_x$, $\frac{d^3}{dx^3} f_x$,..... para x fuera de la tabla son iguales a cero, la fórmula puede entonces replantearse como:

$$\frac{1}{m} \sum_{t=0}^{\infty} f_{\frac{t}{m}} = \sum_{t=0}^{\infty} f_t - \frac{m-1}{2m} f_0 + \frac{m^2-1}{12m^2} f'_0 - \frac{m^4-1}{720m^4} f'''_0 + - \ldots\ldots \qquad (\text{A.31})$$

A P E N D I C E B

T A B L A 1
TABLA DE VIDA INGLESA NO. 10
3 %

x	l_x	d_x	q_x	D_x	N_x	S_x	C_x	M_x	R_x	x
0	100000	7186	.07186	100000	2580436	60143443	6976	24790	825965	0
1	92814	1420	.01530	90110	2480400	57563043	1338	17614	801175	1
2	91394	600	.00656	86147	2390290	55082643	549	16476	783361	2
3	90794	400	.00441	83089	2304143	52692353	355	15927	766885	3
4	90394	325	.00360	80313	2221054	50388210	280	15572	750958	4
5	90069	309	.00343	77694	2140741	48167156	258	15292	735386	5
6	89760	233	.00260	75172	2063047	46026415	189	15034	720094	6
7	89527	195	.00218	72793	1987875	43963368	153	14845	705060	7
8	89332	165	.00185	70519	1915082	41975493	126	14692	690215	8
9	89167	144	.00161	68339	1844563	40060411	107	14566	675523	9
10	89023	130	.00146	66241	1776224	38215848	93	14459	660957	10
11	88893	124	.00139	64218	1709983	36439624	86	14366	646498	11
12	88769	125	.00141	62260	1645765	34729641	85	14280	632132	12
13	88644	134	.00151	60362	1583505	33083876	88	14195	617852	13
14	88510	150	.00169	58515	1523143	31500371	96	14107	603657	14
15	88360	174	.00197	56714	1464628	29977228	108	14011	589550	15
16	88186	200	.00227	54954	1407914	28512600	121	13903	575539	16
17	87986	228	.00259	53232	1352960	27104686	133	13782	561636	17
18	87758	249	.00284	51548	1299728	25751726	142	13649	547854	18
19	87509	264	.00302	49905	1248180	24451998	146	13507	534205	19
20	87245	276	.00316	48305	1198275	23203818	148	13361	520698	20
21	86969	283	.00325	46750	1149970	22005543	147	13213	507337	21
22	86686	286	.00330	45240	1103220	20855573	144	13066	494124	22
23	86400	289	.00334	43778	1057980	19752353	142	12922	481058	23
24	86111	287	.00333	42360	1014202	18694373	137	12780	468136	24
25	85824	283	.00330	40990	971842	17680171	131	12643	455356	25
26	85541	280	.00327	39664	930852	16708329	126	12512	442713	26
27	85261	280	.00328	38383	891188	15777477	122	12386	430201	27
28	84981	281	.00331	37143	852805	14886289	119	12264	417815	28
29	84700	284	.00335	35942	815662	14033484	117	12145	405551	29
30	84416	287	.00340	34778	779720	13217822	114	12028	393406	30
31	84129	294	.00349	33650	744942	12438102	114	11914	381378	31
32	83835	303	.00361	32556	711292	11693160	114	11800	369464	32
33	83532	316	.00378	31493	678736	10981868	115	11686	357664	33
34	83216	331	.00398	30460	647243	10303132	117	11571	345978	34
35	82885	349	.00421	29455	616783	9655889	120	11454	334407	35
36	82536	369	.00447	28477	587328	9039106	123	11334	322953	36
37	82167	389	.00473	27524	558851	8451778	126	11211	311619	37
38	81778	411	.00503	26596	531327	7892927	129	11085	300408	38
39	81367	432	.00531	25691	504731	7361600	132	10956	289323	39

T A B L A 1

TABLA DE VIDA INGLESA NO. 10 (Continuación)

3 %

x	l_x	d_x	q_x	D_x	N_x	S_x	C_x	M_x	R_x	x
40	80935	455	.00562	24311	479040	6856869	135	10824	278367	40
41	80480	481	.00598	23953	454229	6377829	138	10689	267543	41
42	79999	511	.00639	23116	430276	5923600	142	10551	256854	42
43	79488	546	.00687	22299	407160	5493324	148	10408	246303	43
44	78942	585	.00741	21501	384861	5086164	154	10260	235895	44
45	78357	626	.00799	20720	363360	4701303	160	10106	225635	45
46	77731	669	.00861	19956	342640	4337943	166	9946	215529	46
47	77062	713	.00925	19208	322684	3995303	172	9780	205583	47
48	76349	756	.00990	18476	303476	3672619	177	9608	195803	48
49	75593	799	.01057	17760	285000	3369143	182	9431	186195	49
50	74794	844	.01128	17061	267240	3084143	186	9249	176764	50
51	73950	892	.01206	16377	250179	2816903	191	9063	167515	51
52	73058	946	.01295	15708	233802	2566724	197	8872	158452	52
53	72112	1005	.01394	15053	218094	2332922	203	8675	149580	53
54	71107	1066	.01499	14411	203041	2114828	209	8472	140905	54
55	70041	1130	.01613	13781	188630	1911787	215	8263	132433	55
56	68911	1202	.01744	13164	174849	1723157	222	8048	124170	56
57	67709	1280	.01890	12558	161685	1548308	230	7826	116122	57
58	66429	1362	.02050	11961	149127	1386623	238	7596	108296	58
59	65067	1447	.02224	11375	137166	1237496	245	7358	100700	59
60	63620	1536	.02414	10798	125791	1100330	253	7113	93342	60
61	62084	1633	.02630	10230	114993	974539	261	6860	86229	61
62	60451	1738	.02875	9671	104763	859546	269	6599	79369	62
63	58713	1849	.03149	9119	95092	754783	278	6330	72770	63
64	56864	1965	.03456	8575	85973	659691	287	6052	66440	64
65	54899	2081	.03791	8037	77398	573718	295	5765	60388	65
66	52818	2198	.04161	7508	69361	496320	303	5470	54623	66
67	50620	2312	.04567	6985	61853	426959	309	5167	49153	67
68	48308	2422	.05014	6472	54868	365106	315	4858	43986	68
69	45886	2525	.05503	5969	48396	310238	318	4543	39128	69
70	43361	2617	.06035	5476	42427	261842	320	4225	34585	70
71	40744	2695	.06614	4995	36951	219415	320	3905	30360	71
72	38049	2757	.07243	4529	31956	182464	318	3585	26455	72
73	35292	2801	.07937	4079	27427	150508	314	3267	22870	73
74	32491	2826	.08698	3645	23348	123081	307	2953	19603	74
75	29665	2824	.09520	3231	19703	99733	298	2646	16650	75
76	26841	2791	.10398	2839	16472	80030	286	2348	14004	76
77	24050	2724	.11326	2469	13633	63558	271	2062	11656	77
78	21326	2626	.12314	2126	11164	49925	254	1791	9594	78
79	18700	2501	.13374	1810	9038	38761	235	1537	7803	79

TABLA 1

TABLA DE VIDA INGLESA NO. 10

(Continuación)

3 %

x	l_x	d_x	q_x	D_x	N_x	S_x	C_x	M_x	R_x	x
80	16199	2349	.14501	1522	7223	29723	214	1302	6266	80
81	13850	2173	.15690	1263	5706	22495	192	1088	4964	81
82	11677	1977	.16931	1034	4443	16789	170	896	3876	82
83	9700	1768	.18227	834	3409	12346	147	726	2980	83
84	7932	1555	.19604	662	2575	8937	126	579	2254	84
85	6377	1342	.21044	516	1913	6362	105	453	1675	85
86	5035	1135	.22542	396	1397	4449	86	348	1222	86
87	3900	939	.24077	298	1001	3052	69	262	874	87
88	2961	756	.25532	219	703	2051	54	193	612	88
89	2205	596	.27029	158	484	1348	41	139	419	89
90	1609	460	.28589	112	326	864	31	98	280	90
91	1149	348	.30287	78	214	538	22	67	182	91
92	801	256	.31960	52	136	324	16	45	115	92
93	545	184	.33761	34	84	188	11	29	70	93
94	361	129	.35734	22	50	104	7	18	41	94
95	232	87	.37500	13	28	54	5	11	23	95
96	145	58	.40000	8	15	26	3	6	12	96
97	87	36	.41379	4	7	11	1	3	6	97
98	51	23	.45098	2	3	4	1	2	3	98
99	28	28	1.00000	1	1	1	1	1	1	99

T A B L A 2

TABLA DE MORTALIDAD CSO - 58

(THE COMMISSIONERS 1958 STANDARD ORDINARY MORTALITY TABLE)

3 %

x	l_x	d_x	q_x	D_x	N_x	S_x	C_x	M_x	R_x	x
0	10000000	70800	.00708	10000000	288963032	6979644418	68738	1583602	85672310	0
1	9929200	17475	.00176	9640000	278963032	6690681386	16472	1514864	84088708	1
2	9911725	15066	.00152	9342751	269323032	6411718354	13788	1498392	82573844	2
3	9896659	14449	.00146	9056845	259980281	6142395322	12838	1484604	81075452	3
4	9882210	13835	.00140	8730216	250923436	5882415041	11934	1471766	79590848	4
5	9868375	13322	.00135	8512547	242143220	5631491605	11157	1459832	78119082	5
6	9855053	12812	.00130	8253452	233630673	5389348385	10417	1448675	76659250	6
7	9842241	12401	.00126	8002643	225377221	5155717712	9789	1438258	75210575	7
8	9829840	12091	.00123	7759767	217374578	4930340491	9267	1428469	73772317	8
9	9817749	11879	.00121	7524487	209614811	4712965913	8839	1419202	72343848	9
10	9805870	11865	.00121	7296488	202090324	4503351102	8572	1410363	70924646	10
11	9794005	12047	.00123	7075398	194793836	4301260778	8450	1401791	69514283	11
12	9781958	12325	.00126	6860869	187718438	4106466942	8393	1393341	68112492	12
13	9769633	12896	.00132	6652645	180857569	3918748504	8526	1384948	66719151	13
14	9756737	13562	.00139	6450353	174204924	3737890935	8705	1376422	65334203	14
15	9743175	14225	.00146	6253774	167754571	3563686011	8865	1367717	63957781	15
16	9728950	14983	.00154	6062760	161500797	3395931440	9065	1358852	62590064	16
17	9713967	15737	.00162	5877110	155438037	3234430643	9244	1349787	61231212	17
18	9698230	16390	.00169	5696688	149560927	3078992606	9347	1340543	59881425	18
19	9681840	16846	.00174	5521418	143864239	2929431679	9327	1331196	58540882	19
20	9664994	17300	.00179	5351273	138342821	2785567440	9300	1321869	57209686	20
21	9647694	17655	.00183	5186111	132991548	2647224619	9214	1312569	55887817	21
22	9630039	17912	.00186	5025845	127805437	2514233071	9076	1303355	54575248	22
23	9612127	18167	.00189	4870386	122779592	2386427634	8937	1294279	53271893	23
24	9593960	18324	.00191	4719593	117909206	2263648042	8752	1285342	51977614	24
25	9575636	18481	.00193	4573377	113189613	2145738836	8570	1276590	50692272	25
26	9557155	18732	.00196	4431603	108616236	2032549223	8433	1268020	49415682	26
27	9538423	18981	.00199	4294094	104184633	1923932987	8296	1259587	48147662	27
28	9519442	19324	.00203	4160727	99890539	1819748354	8200	1251291	46888075	28
29	9500118	19760	.00208	4031341	95729812	1719857815	8141	1243091	45636784	29
30	9480358	20193	.00213	3905782	91698471	1624128003	8077	1234950	44393693	30
31	9460165	20718	.00219	3783945	87792689	1532429532	8046	1226873	43158743	31
32	9439447	21239	.00225	3665687	84008744	1444636843	8008	1218827	41931870	32
33	9418208	21850	.00232	3550912	80343057	1360628099	7998	1210819	40713043	33
34	9396358	22551	.00240	3439489	76792145	1280285042	8014	1202821	39502224	34
35	9373807	23528	.00251	3331296	73352656	1203492897	8118	1194807	38299403	35
36	9350279	24685	.00264	3226150	70021360	1130140241	8269	1186689	37104596	36
37	9325594	26112	.00280	3123915	66795210	1060118881	8492	1178420	35917907	37
38	9299482	27991	.00301	3024135	63671295	993323671	8838	1169928	34739487	38
39	9271491	30132	.00325	2927506	60646860	929652376	9237	1161090	33569559	39

T A B L A 2
TABLA DE MORTALIDAD CSO - 58
3 %

x	l_x	d_x	q_x	D_x	N_x	S_x	C_x	M_x	R_x	x
40	9241359	32622	.00353	2833002	57719354	869005516	9709	1151853	32408469	40
41	9208737	35362	.00384	2740778	54886352	811286162	10218	1142144	31256616	41
42	9173375	38253	.00417	2650732	52145574	756399810	10732	1131926	30114472	42
43	9135122	41382	.00453	2562794	49494842	704254236	11271	1121194	28982546	43
44	9093740	44741	.00492	2476878	46932048	654759394	11831	1109923	27861352	44
45	9048999	48412	.00535	2392905	44455170	607827346	12429	1098092	26751429	45
46	9000587	52473	.00583	2310780	42062265	563372176	13079	1085663	25653337	46
47	8948114	56910	.00636	2230396	39751485	521309911	13772	1072584	24567674	47
48	8891204	61794	.00695	2151661	37521089	481558426	14519	1058812	23495090	48
49	8829410	67104	.00760	2074473	35369428	444037337	15307	1044293	22436278	49
50	8762306	72902	.00832	1998744	33294955	408667909	16145	1028986	21391985	50
51	8689404	79160	.00911	1924383	31296211	375372954	17020	1012841	20362999	51
52	8610244	85758	.00996	1851313	29371828	344076743	17902	995821	19350158	52
53	8524486	92832	.01089	1779489	27520515	314704915	18814	977919	18354337	53
54	8431654	100337	.01190	1708845	25741026	287184400	19743	959105	17376418	54
55	8331317	108307	.01300	1639330	24032181	261443374	20691	939362	16417313	55
56	8223010	116849	.01421	1570392	22392851	237411193	21672	918671	15477951	56
57	8106161	125970	.01554	1503466	20821959	215018342	22683	896999	14559280	57
58	7980191	135663	.01700	1436992	19318493	194196383	23717	874316	13662281	58
59	7844528	145830	.01859	1371420	17881501	174877890	24752	850599	12787965	59
60	7698698	156592	.02034	1306724	16510081	156996389	25805	825847	11937366	60
61	7542106	167736	.02224	1242859	15203357	140486308	26836	800042	11111519	61
62	7374370	179271	.02431	1179824	13960498	125282951	27846	773206	10311477	62
63	7195099	191174	.02657	1117614	12780674	111322453	28830	745360	9538271	63
64	7003925	203394	.02904	1056232	11663060	98541779	29780	716530	8792911	64
65	6800531	215917	.03175	995688	10606828	86878719	30692	686750	8076381	65
66	6584614	228749	.03474	935995	9611140	76271891	31569	656058	7389631	66
67	6355865	241777	.03804	877164	8675145	66660751	32395	624489	6733573	67
68	6114088	254835	.04168	819220	7797981	57985606	33151	592094	6109084	68
69	5859253	267241	.04561	762209	6978761	50187625	33752	558943	5516990	69
70	5592012	278426	.04979	706256	6216552	43208864	34140	525191	4958047	70
71	5313586	287731	.05415	651546	5510296	36992312	34254	491051	4432856	71
72	5025855	294766	.05865	598315	4858750	31482016	34069	456797	3941805	72
73	4731089	299289	.06326	546819	4260435	26623266	33584	422728	3485008	73
74	4431800	301894	.06812	497308	3713616	22362831	32890	389144	3062280	74
75	4129906	303011	.07337	449934	3216308	18649215	32050	356254	2673136	75
76	3826895	303014	.07918	404779	2766374	15432907	31117	324204	2316882	76
77	3523881	301997	.08570	361872	2361595	12666533	30109	293087	1992678	77
78	3221884	299829	.09306	321223	1999723	10304938	29022	262978	1699591	78
79	2922055	295683	.10119	282844	1678500	8305215	27787	233956	1436613	79

T A B L A 2

TABLA DE MORTALIDAD CSO - 58

3 %

x	l_x	d_x	q_x	D_x	N_x	S_x	C_x	M_x	R_x	x
80	2626372	288848	.10998	246819	1395656	6626715	26354	206169	1202657	80
81	2337524	278983	.11935	213275	1148837	5231059	24713	179815	996488	81
82	2058541	265902	.12917	182351	935562	4082222	22868	155102	816673	82
83	1792639	249858	.13938	154171	753211	3146660	20863	132234	661571	83
84	1542781	231433	.15001	128318	599040	2393449	18761	111371	529337	84
85	1311348	211311	.16114	106305	470222	1794409	16631	92610	417966	85
86	1100037	190108	.17282	86578	363917	1324187	14527	75979	325356	86
87	909929	168455	.18513	69529	277339	960270	12497	61452	249377	87
88	741474	146997	.19825	55007	207810	682931	10588	48955	187925	88
89	594477	126303	.21246	42818	152803	475121	8832	38367	138970	89
90	468174	106809	.22814	32738	109985	322318	7251	29535	100603	90
91	361365	88813	.24577	24533	77247	212333	5854	22284	71068	91
92	272552	72480	.26593	17965	52714	135086	4638	16430	48784	92
93	200072	57881	.02893	12803	34749	82372	3596	11792	32354	93
94	142191	45026	.31666	8834	21946	47623	2716	8196	20562	94
95	97165	34128	.35124	5861	13112	25677	1999	5480	12366	95
96	63037	25250	.40056	3692	7251	12565	1436	3481	6886	96
97	37787	18456	.48842	2148	3559	5314	1019	2045.	3405	97
98	19331	12916	.66815	1067	1411	1755	692	1026	1360	98
99	6415	6415	1.00000	344	344	344	334	334	334	99

T A B L A 3
TABLA DE MORTALIDAD MEXICANA
(E. M. 62 - 67)
4.5 %

x	q_x*	l_x	d_x	μ_x*	D_x	N_x	S_x	C_x	M_x	R_x	x
15	1.781	10000000	17810		5167204	105319385	1883973452	8806	610331	24189807	15
16	1.799	9982190	17958		4935886	100652481	1778153767	8497	601525	24079476	16
17	1.819	9964232	18125	1.810	4714839	95716595	1677501286	8207	593028	23477951	17
18	1.841	9946107	18311	1.831	4503601	91001756	1581784691	7734	584821	22884923	18
19	1.866	9927796	18525	1.855	4301731	86498155	1490782935	7681	576887	22300102	19
20	1.893	9909271	18758	1.881	4108808	82196424	1404284780	7442	569206	21723215	20
21	1.923	9890513	19019	1.909	3924431	78097616	1322088356	7221	561764	21154009	21
22	1.957	9871494	19319	1.941	3748215	74163185	1244000740	7019	554543	20592245	22
23	1.994	9852175	19645	1.977	3579789	70414970	1169837555	6830	547524	20037702	23
24	2.035	9832530	20009	2.016	3418805	66835181	1099422585	6657	540694	19490178	24
25	2.080	9812521	20410	2.059	3264926	63416376	1032587404	6498	534037	18949484	25
26	2.131	9792111	20867	2.107	3117832	60151450	969171028	6357	527539	18415447	26
27	2.187	9771244	21370	2.150	2977213	57033618	909019578	6230	521182	17887908	27
28	2.249	9749874	21927	2.219	2842777	54056405	851985960	6117	514952	17366726	28
29	2.318	9727947	22549	2.285	2714243	51213628	797929555	6020	508835	16851774	29
30	2.395	9705398	23244	2.358	2591341	48499385	746715927	5938	502815	16342939	30
31	2.480	9682154	24012	2.439	2473813	45908044	698216542	5870	496877	15840124	31
32	2.574	9658142	24860	2.529	2361414	43434231	652308498	5816	491007	15343247	32
33	2.679	9633282	25808	2.623	2253910	41072817	608874267	5778	485191	14852240	33
34	2.795	9607474	26853	2.739	2151074	38818907	567801450	5753	479413	14367049	34
35	2.923	9580621	28004	2.861	2052690	36667833	528982543	5741	473660	13887636	35
36	3.066	9552617	29288	2.996	1958555	34615143	492314710	5746	467919	13413976	36
37	3.224	9523329	30703	3.147	1868469	32656588	457699567	5764	462173	12946057	37
38	3.399	9492626	32265	3.314	1782244	30788119	425042979	5796	456409	12483884	38
39	3.594	9460361	34001	3.499	1699700	29005875	394254860	5845	450613	12027475	39
40	3.809	9426360	35905	3.705	1620661	27306175	365248985	5907	444768	11576862	40
41	4.048	9390455	38013	3.932	1544965	25685514	337942810	5984	438861	11132094	41
42	4.314	9352442	40346	4.165	1472451	24140549	312257296	6078	432877	10693233	42
43	4.608	9312096	42910	4.466	1402965	22668098	288116747	6186	426799	10260356	43
44	4.934	9269186	45734	4.777	1336364	21265133	265448649	6309	420613	9833557	44
45	5.295	9223452	48838	5.121	1272507	19928769	244183516	6447	414304	9412944	45
46	5.696	9174614	52259	5.504	1211263	18656262	224254747	6602	407857	8998640	46
47	6.141	9122355	56020	5.928	1152501	17444999	205598485	6772	401255	8590783	47
48	6.634	9066335	60146	6.399	1096099	16292498	188153486	6958	394483	8189528	48
49	7.180	9006189	64664	6.921	1041940	15196399	171860988	7158	387525	7795045	49
50	7.786	8941525	69619	7.501	989913	14154459	156664589	7375	380367	7407520	50
51	8.457	8871906	75030	8.143	939909	13164546	142510130	7606	372992	7027153	51
52	9.201	8796876	80940	8.855	891928	12224637	129345584	7852	365386	6654161	52
53	10.026	8715936	87386	9.646	845572	11332809	117120947	8112	357534	6288775	53
54	10.940	8628550	94396	10.522	801047	10487237	105788138	8386	349422	5931241	54

*** Al millar.**

TABLA 3
TABLA DE MORTALIDAD MEXICANA
(E. M. 62 - 67)
4.5 %

x	q_x*	l_x	d_x	μ_x*	D_x	N_x	S_x	C_x	M_x	R_x	x
55	11.954	8534154	102017	11.495	758166	9686190	95300901	8472	340836	5581619	55
56	13.076	8432137	110259	12.575	716845	8928024	85614711	8969	332364	5240783	56
57	14.320	8321878	119169	13.771	677006	8211179	76686687	9277	323395	4908419	57
58	15.697	8202709	128758	15.098	638575	7534173	68475508	9592	314118	4585024	58
59	17.223	8073951	139058	16.571	601485	6895598	60941335	9913	304526	4270906	59
60	18.912	7934893	150065	18.203	565670	6294113	54045737	10237	294613	3966380	60
61	20.783	7784828	161792	20.015	531074	5728443	47751624	10562	284376	3671767	61
62	22.854	7623036	174217	22.024	497643	5197369	42023181	10883	273814	3387391	62
63	25.146	7448819	187308	24.253	465330	4699726	36825812	11197	262931	3113577	63
64	27.682	7261511	201013	26.725	434094	4234396	32126086	11499	251734	2850646	64
65	30.488	7060498	215260	29.468	403902	3800302	27891690	11783	240235	2598912	65
66	33.590	6845238	229932	32.510	374725	3396400	24091388	12045	228452	2358677	66
67	37.019	6615306	244892	35.883	346544	3021675	20694988	12276	216407	2130225	67
68	40.809	6370414	259970	39.625	319344	2675131	17673313	12470	204131	1913818	68
69	44.995	6110444	274939	43.776	293122	2355787	14998182	12621	191661	1709687	69
70	49.618	5835505	289546	48.381	267878	2062665	12642395	12719	179040	1518026	70
71	54.718	5545959	303464	53.489	243624	1794787	10579730	12756	166321	1338986	71
72	60.344	5242495	316353	59.154	220376	1551163	8784943	12725	153565	1172665	72
73	66.546	4926142	327815	65.438	198160	1330787	7233780	12618	140840	1019100	73
74	73.376	4598327	337407	72.409	177008	1132627	5902993	12428	128222	878260	74
75	80.894	4260920	344683	80.140	156957	955619	4770366	12150	115794	750038	75
76	89.163	3916237	349183	88.716	138048	798662	3814747	11778	103644	634244	76
77	98.247	3567054	350452	98.229	120324	660614	3016085	11312	91866	530600	77
78	108.217	3216602	348091	108.780	103830	540290	2355471	10752	80554	438734	78
79	119.148	2868511	341777	120.434	88607	436460	1815181	10102	69802	358180	79
80	131.115	2526734	331293	133.467	74688	347853	1378721	9371	59700	288378	80
81	144.200	2195441	316583	147.867	62101	273165	1030868	8569	50329	228678	81
82	158.483	1878858	297767	163.839	50857	211064	757703	7713	41760	178349	82
83	174.043	1581091	275186	181.557	40954	160207	546639	6821	34047	136589	83
84	190.976	1305905	249397	201.210	32370	119253	386432	5915	27226	102542	84
85	209.348	1056508	221178	223.011	25060	86883	267179	5020	21311	75316	85
86	229.238	835330	191489	247.193	18960	61823	180296	4159	16291	54005	86
87	250.717	643841	161422	274.019	13984	42863	118473	3355	12132	37714	87
88	273.841	482419	132106	303.779	10027	28879	75610	2627	8777	25582	88
89	298.658	350313	104624	336.792	6967	18852	46731	1991	6150	16805	89
90	325.194	245689	79897	373.420	4676	11885	27879	1455	4159	10655	90
91	353.455	165792	58600	414.050	3019	7209	15994	1021	2704	6496	91
92	383.421	107192	41100	459.123	1868	4190	8785	685	1683	3792	92
93	415.037	66092	27431	509.125	1102	2322	4595	437	998	2109	93
94	448.214	38661	17328	564.550	617	1220	2273	264	561	1111	94

T A B L A 3
TABLA DE MORTALIDAD MEXICANA
(E. M. 62 - 67)
4.5 %

x	q_x	l_x	d_x	μ_x	D_x	N_x	S_x	C_x	M_x	R_x	x
95	482.819	21333	10300	625.959	325	603	1053	150	297	550	95
96	518.669	11033	5722	693.948	161	278	450	80	147	253	96
97	555.536	5311	2950	768.907	74	117	172	39	67	106	97
98	593.136	2361	1400	838.875	31	43	55	17	28	39	98
99	1000.000	961	961		12	12	12	11	11	11	99

NOTA: Los valores mostrados para μ_x corresponden a la aproximación:

$$x \doteq \frac{7(d_{x-1} + d_x)-(d_{x-2}+d_{x+1})}{12\, l_x}$$

TABLA 4

SECCION DE LA TABLA SELECTA Y ULTIMA DE LA EXPERIENCIA MEXICANA BASICA

x	$l_{[x]}$	$l_{[x]+1}$	$l_{[x]+2}$	$l_{[x]+3}$	$l_{[x]+4}$	x+4
20	9943081	9937264	9928986	9918774	9907184	20
21	9931263	9925354	9916947	9906579	9985097	21
22	9919300	9913299	9904764	9894493	9883025	22
23	9907230	9901137	9892681	9882422	9870968	23
24	9895097	9889061	9880616	9870370	9859024	24
25	9883041	9877012	9868577	9858427	9847095	25
26	9870974	9864953	9856597	9846459	9834392	26
27	9858823	9852858	9844513	9833718	9820919	27
28	9846493	9840541	9831655	9820206	9806679	28
29	9833797	9827454	9818029	9805928	9791675	29
30	9820323	9813596	9803635	9790885	9775910	30

x	$d_{[x]}$	$d_{[x]+1}$	$d_{[x]+2}$	$d_{[x]+3}$	$d_{[x]+4}$	x+4
20	5817	8278	10212	11590	12087	20
21	5909	8407	10368	11482	12072	21
22	6001	8535	10271	11468	12057	22
23	6093	8456	10259	11454	11944	23
24	6036	8445	10246	11346	11929	.24
25	6029	8435	10150	11332	12703	25
26	6021	8356	10138	12067	13473	26
27	5965	8345	10795	12799	14240	27
28	5957	8886	11449	13527	15004	28
29	6343	9425	12101	14253	15765	29
30	6727	9961	12750	14975	16717	30

x	$q_{[x]}$	$q_{[x]+1}$	$q_{[x]+2}$	$q_{[x]+3}$	$q_{[x]+4}$	x+4
20	0.5850	0.8330	1.0285	1.1684	1.2200	20
21	0.5949	0.8470	1.0454	1.1590	1.2199	21
22	0.6049	0.8609	1.0369	1.1590	1.2199	22
23	0.6150	0.8540	1.0370	1.1590	1.2100	23
24	0.6099	0.8539	1.0369	1.1495	1.2099	24
25	0.6100	0.8540	1.0285	1.1494	1.2900	25
26	0.6099	0.8470	1.0285	1.2255	1.3699	26
27	0.6050	0.8469	1.0965	1.3015	1.4499	27
28	0.6049	0.9029	1.1645	1.3774	1.5299	28
29	0.6450	0.9590	1.2325	1.4535	1.6100	29
30	0.6850	1.0150	1.3005	1.5294	1.7100	30

NOTA; las tasas de mortalidad estan dadas al millar.