UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

ESTUDIO Y ANALISIS DE DIFERENTES RESOLUCIONES DEL PROBLEMA DE ASIGNACION.

T E S I S

Que para obtener el Título de

A C T U A R I O

P r e s e n t a

YURIRIA GONZALEZ RAMIREZ

México, D. F. 1985

INDICE.

Página

INTRODUCCION.

Un interesante problema de Análisis de Redes es el Problema de Asignación, cuya importancia radica en su frecuente aparición en la práctica y en su íntima relación con otros problemas como son el de Transporte, el de Flujo a costo mínimo, el de Ruta más corta y el de Acoplamiento máximo a costo mínimo, con los cuales comparte las bases teóricas necesarias para su resolución.

El Problema de Asignación se plantea de la siguiente manera:

Se tienen m individuos (i=1,...,m) que se quieren asignar a m trabajos (j=1,...,m).

El costo por asignar el individuo i al trabajo j es c_{ij}.

El propósito es asignar todos los individuos de tal manera que a cada individuo corresponda un solo trabajo y a cada trabajo un solo individuo y que además el costo total de las m asignaciones sea mínimo.

Se definen las siguientes variables de decisión:

$$x_{ij} = \begin{cases} 0 \text{ si el individuo } i \text{ no se asigna al trabajo } j \\ 1 \text{ si el individuo } i \text{ se asigna al trabajo } j \end{cases}$$

El modelo matemático que representa el problema es:

$$\begin{array}{ll} \text{(P)} & \left\{ \begin{array}{lll} \text{Minimizar } z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} c_{ij}\, x_{ij} & & \\ \text{s.a.} & & \\ & \sum_{j=1}^{m} x_{ij} = 1 & i=1,\dots,m \\ \text{Problema} & & \\ \text{Primal} & \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 1 & j=1,\dots,m \\ & x_{ij} \geq 0 & i,j=1,\dots,m \end{array} \right. \end{array}$$

El problema dual de (P) es:

(D) Problema Dual

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Maximizar } w=\sum_{i=1}^{n} u_i + \sum_{j=1}^{n} v_j \\ \text{s.a.} \\ \qquad u_i + v_j \leq c_{ij} \quad i,j=1,\ldots,n \\ \quad u_i , v_j \text{ sin restricción de signo} \\ \qquad\qquad i,j=1,\ldots,n \end{array}\right.$$

El problema dual se puede interpretar así: Una persona (o empresa) ofrece sus servicios para realizar las asignaciones,- cobrando por cada individuo i una cantidad u_i y por cada trabajo j una cantidad v_j, de tal manera que, para cada pareja (i, j), la suma $u_i + v_j$ sea a lo más igual al costo de asignar i a j en el problema (P), es decir, la persona (o empresa) del problema (P) pagará a lo más lo que a ella le cuesta realizar las asignaciones.

Además, la persona (o empresa) del problema dual maximizará sus ganancias.

Según la interpretación económica, las variables duales u_i, v_j i,j=1,...,n tendrían que ser no negativas. Sin embargo, analíticamente sí pueden tomar valores menores que cero, lo cual desde el punto de vista económico representaría una pérdida para la persona del problema dual.

A pesar de su aparente simplicidad, el Problema de Asignación se torna complejo entre mayor sea el valor de n.

Esta complejidad consiste en la forma en que crecen el número de parejas (i,j) posibles y el número de soluciones factibles para el problema, cuando n aumenta de valor.

Por ejemplo: Si se tienen n individuos y n trabajos, el número de parejas (i,j) posibles es n^2 y el número de soluciones factibles del problema es n!.

Si se agregan un individuo y un trabajo, el número de parejas (i,j) posibles será $(n+1)^2$ y el número de soluciones factibles será (n+1)! , es decir, el número de parejas aumenta en 2n+1 y el número de soluciones factibles aumenta en (n+1)!-n!

$=n!((n+1)-1)=n!n$, lo cual convierte el problema en uno mucho mayor.

Por esto, se han diseñado diversos métodos para resolver el problema, con objeto de hacerlo lo más eficientemente posible.

Entre dichos métodos se encuentran los siguientes: El Algoritmo Húngaro, que es muy importante por ser uno de los primeros algoritmos especializados para el Problema de Asignación que se hicieron, y uno de los más utilizados; este algoritmo es primal-dual porque trabaja simultáneamente con los problemas primal y dual. Lo diseñó H.W. Kuhn y está basado en el trabajo de dos matemáticos húngaros, D. König y E. Egerváry, de ahí el nombre. Es de los más utilizados porque se ha probado mediante experimentos en computadora que es de los más eficientes. No existe un método simplex que sea tan eficiente como el Húngaro para resolver el Problema de Asignación (Ver[2, p.153]). Además, varios de los métodos que se han desarrollado después, son variaciones del Húngaro o están basados en él. Por ejemplo en [2] se presenta un algoritmo que resulta más eficiente que el Húngaro cuando el número de individuos es $n \geq 20$. Este algoritmo se basa en algunos aspectos en el método Húngaro y alcanza mayor eficiencia cuando se combina con él [2,p.165].

El Método Húngaro ha sido extendido para la resolución de problemas más generales de flujo en redes y sus principales ideas han sido utilizadas para el desarrollo de métodos también más generales como el "Out-of-kilter" (Ver [1,p.p.421-451]) y métodos para encontrar acoplamientos en gráficas no bipartitas.

Otro método para resolver el Problema de Asignación es uno algebraico desarrollado por Burkard, Hahn y Zimmermann en el cual caracterizan el problema en términos de un sistema axiomático [3]. Existe también un método simplex polinomial diseñado por Ming S. Hung [6]. Walter O.Rom y Ming S. Hung resolvieron el problema por relajación, es decir, relajándolo en una serie de problemas simples de flujo en redes [7]. A. Weintraub y F. Barahona presentaron una implementación de un algoritmo dual para resolver el problema [12]. D.P. Bertsekas construyó un nuevo algoritmo primal-dual y como ya se mencionó, lo combinó con el Húngaro obteniendo resultados satisfactorios [2].

Estos son algunos de los métodos que se han hecho para la resolución del Problema de Asignación.

Los objetivos del presente trabajo son:

-Establecer la relación del Problema de Asignación con los problemas de Transporte, Flujo a costo mínimo, Acoplamiento máximo a costo mínimo y Ruta más corta; mostrando cómo los métodos que resuelven los tres primeros, pueden resolver el Problema de Asignación; y los métodos que resuelven éste último, pueden resolver el Problema de Ruta más corta.

-Analizar tres diferentes presentaciones del Algoritmo Húngaro, primero por separado, y después realizando una comparación entre ellas para determinar sus principales diferencias y semejanzas.

-Analizar la eficiencia de las tres presentaciones del algoritmo, obteniendo su complejidad computacional en términos del número de operaciones elementales que requiere cada una para obtener la solución óptima del problema.

En cada uno de los capítulos se desarrolló el siguiente trabajo:

En el Capítulo I se presenta la relación entre el Problema de Asignación y los problemas de Análisis de Redes ya mencionados.

En el Capítulo II se muestran y analizan tres presentaciones distintas del Algoritmo Húngaro.

En el Capítulo III se hace un análisis comparativo de las mismas, estudiando tanto el problema como el algoritmo.

Por último, se presentan algunos comentarios y conclusiones.

CAPITULO I

RELACION ENTRE EL PROBLEMA DE ASIGNACION Y LOS PROBLEMAS DE TRANSPORTE, FLUJO A COSTO MINIMO, ACOPLAMIENTO MAXIMO A COSTO MINIMO Y RUTA MAS CORTA.

I.1 EL PROBLEMA DE ASIGNACION COMO CASO PARTICULAR DEL PROBLEMA DE TRANSPORTE.

En el Problema de Transporte se tienen m orígenes, con oferta o_i en el origen i $i=1,\ldots,m$; y n destinos con demanda d_j en el destino j $j=1,\ldots,n$. El costo unitario de transporte del origen i al destino j es c_{ij} $i=1,\ldots,m$; $j=1,\ldots,n$.

Se puede tener $m>n$, $n>m$ o $m=n$, pero la oferta total y la demanda total deben ser iguales para poder resolver el problema, es decir, se debe tener $\underline{o}=\sum_{i=1}^{m} o_i=\sum_{j=1}^{n} d_j=d$. Si $\underline{o}>d$ se crea un destino ficticio $n+1$ para el cual $d_{n+1}=\underline{o}-d$ y $c_{i,n+1}=0$ $i=1,\ldots,m$. Si $d>\underline{o}$ se crea un origen ficticio $m+1$ para el cual $o_{m+1}=d-\underline{o}$ y $c_{m+1,j}=M$ $j=1,\ldots,n$ donde M es un número muy grande.

Las variables de decisión son x_{ij} =cantidad a transportar del origen i al destino j, $i=1,\ldots,m$; $j=1,\ldots,n$.

En este problema el propósito es minimizar la función $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$ cumpliendo las restricciones de oferta y demanda. El planteamiento es el siguiente:

$$\text{Minimizar } z=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

s.a.

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij}=o_i \qquad i=1,\ldots,m$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij}=d_j \qquad j=1,\ldots,n$$

$$x_{ij}\geq 0 \qquad i=1,\ldots,m;\ j=1,\ldots,n$$

En el Problema de Asignación se puede ver a los individuos como orígenes y a los trabajos como destinos, cada origen y cada destino con oferta y demanda igual a 1 respectivamente. En este caso m=n. Los costos de asignación corresponderán a los costos de transporte.

En este caso las variables x_{ij} valdrán 0 ó 1. Si $x_{ij}=0$ no se transporta nada de i a j, es decir, el individuo i no se asigna al trabajo j. Si $x_{ij}=1$ se transporta una unidad de i a j es decir, el individuo i se asigna al trabajo j.

La función objetivo es $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$ y también se minimiza.

En resumen se tiene:

n orígenes (individuos)

n destinos (trabajos)

c_{ij}=costo unitario de transporte de i a j (que es el costo de asignación del individuo i al trabajo j)

$x_{ij} \in \{0,1\}$, 0 si i no se asigna a j, 1 si i se asigna a j.

Al hacer $o_i=1$, $d_j=1$, i,j=1,...,n se está garantizando que cada individuo sólo tenga un trabajo y cada trabajo sólo un individuo. Al satisfacer todas las demandas y agotar todas las ofertas se asegura que se realicen las n asignaciones.

El planteamiento es:

$$\text{Minimizar } z=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

s.a.

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij}=1 \quad i=1,\dots,n$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij}=1 \quad j=1,\dots,n$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad i,j=1,\dots,n$$

I.2 REDUCCION DEL PROBLEMA DE ASIGNACION AL PROBLEMA DE FLUJO A COSTO MINIMO.

En el Problema de Flujo a Costo Mínimo se requiere llevar un flujo de valor v del origen s al destino t de una red, a costo mínimo. Los arcos de la red tienen un límite de capacidad y en cada arco (i,j) existe un costo por transportar una unidad de flujo de i a j.

Este problema se plantea de la siguiente forma:

$$\text{Minimizar } z=\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} c_{ij} f_{ij}$$

s.a.

$$\sum_{j=1}^{N} f_{ij} - \sum_{k=1}^{N} f_{ki} = \begin{cases} v & \text{si } i=1=s \\ 0 & \text{si } i\neq 1,N \\ -v & \text{si } i=N=t \end{cases}$$

$$f_{ij} \leq k_{ij} \qquad i,j=1,\ldots,N$$

$$f_{ij} \geq 0 \qquad i,j=1,\ldots,N$$

donde:

c_{ij} =costo unitario de transporte de flujo en el arco (i,j).

f_{ij} =flujo a transportar en el arco (i,j).

k_{ij} =capacidad del arco (i,j).

v=flujo que se requiere transportar a costo mínimo de s a t.

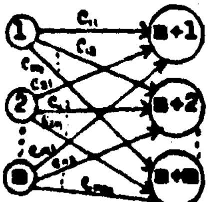
N=número de vértices de la red.

En el Problema de Asignación se tiene la matriz de costos de la forma:

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \ldots c_{1m} \\ c_{21} & c_{22} \ldots c_{2m} \\ \cdot & \\ \cdot & \\ \cdot & \\ c_{m1} & c_{m2} \ldots c_{mm} \end{bmatrix}$$

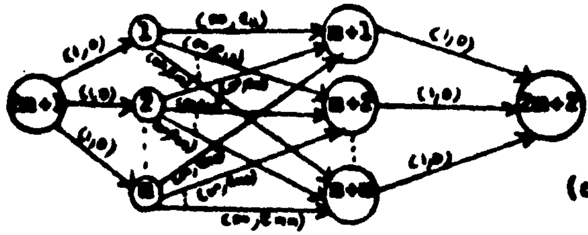
donde c_{ij} es el costo por asignar el individuo i al trabajo j.

La red correspondiente al Problema de Asignación es:



El vértice m+j representa al trabajo j, j=1,...,m.
El vértice i representa al individuo i, i=1,...,m.

Para transformar este problema en uno de flujo a costo mínimo se agrega a la red anterior un origen s=2m+1 que se conectará a cada vértice-individuo y un destino t=2m+2 al que se conectará cada vértice-trabajo por medio de arcos de capacidad 1 y costo cero. A los arcos $(i,m+j)$ se les asigna capacidad ∞. La red descrita es la siguiente:



En los arcos se tiene: (capacidad, costo)

En esta red se lleva de 2m+1 a 2m+2 un flujo de valor m,- a costo mínimo.

Al tomar el flujo de valor m se asegura que se realicen - las m asignaciones. La capacidad de los arcos $(2m+1,i)$ y $(m+j, 2m+2)$, $i,j=1,\ldots,m$ garantiza que cada individuo tenga sólo un trabajo y cada trabajo sólo un individuo. El costo de estos arcos no altera el costo total. El flujo se manda al menor costo posible lo que implica que las asignaciones se hagan a costo - mínimo.

Como la gráfica del Problema de Asignación es tal que para todo vértice i existen solamente los arcos $(i,m+j)$ $j=1,\ldots,m$ y para todo vértice m+j existen solamente los arcos $(i,m+j)$ $i=1,\ldots,m$, se puede asegurar que a 2m+2 puede entrar un flujo de valor m y cuando esto suceda, los arcos $(2m+1,i)$ y $(m+j,2m+2)$- $i,j=1,\ldots,m$ estarán saturados y habrá m arcos $(i,m+j_i)$ $i=1,\ldots,$ m que tengan flujo igual a 1 y que formarán la solución óptima es decir, si $(i,m+j_i)$ tiene flujo igual a 1, entonces el individuo i se asigna al trabajo j_i.

El costo total de enviar el flujo de 2m+1 a 2m+2 será el costo de las m asignaciones.

El Problema de Asignación planteado como un problema de - flujo de valor m a costo mínimo será entonces:

$$\text{Minimizar } z = \sum_{i=1}^{2m+2}\sum_{j=1}^{2m+2} c_{ij}\, f_{ij}$$

s.a.

$$\sum_{j=1}^{2m+2} f_{ij} - \sum_{k=1}^{2m+2} f_{ki} = \begin{cases} m & \text{si } i=2m+1 \\ 0 & \text{si } i\neq 2m+1,\ 2m+2 \\ -m & \text{si } i=2m+2 \end{cases}$$

$$f_{ij} \leq k_{ij} \quad i,j=1,\ldots,2m+2$$

$$f_{ij} \geq 0 \quad i,j=1,\ldots,2m+2$$

donde:

Los vértices origen son $1,\ldots,m$ (individuos)

Los vértices destino son $m+1,\ldots,m+m$ (trabajos)

$k_{2m+1,i}=1 \quad i=1,\ldots,m$

$k_{m+j,2m+2}=1 \quad j=1,\ldots,m$

$k_{i,m+j}=\infty \quad i,j=1,\ldots,m$

c_{ij} =costo en el arco $(i,m+j)$

$c_{2m+1,i}=c_{m+j,2m+2}=0 \quad i,j=1,\ldots,m$

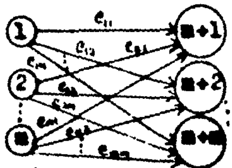
I.3 EL PROBLEMA DE ASIGNACION COMO CASO PARTICULAR DEL PROBLEMA DE ACOPLAMIENTO MAXIMO A COSTO MINIMO.

Como se mencioné anteiormente, en la gráfica del Problema de Asignación para cada vértice i existen solamente los arcos $(i,m+j)$ $j=1,\ldots,m$ y para todo vértice $m+j$ existen solamente los arcos $(i,m+j)$ $i=1,\ldots,m$. Dada la forma de esta gráfica encontrar una asignación óptima en ella equivale a encontrar un acoplamiento perfecto de costo mínimo, (en este caso el acoplamiento máximo es perfecto).

Un acoplamiento perfecto de una gráfica $G=(X,U)$ (X=conjunto de vértices, U=conjunto de arcos) es un subconjunto $\tilde{U}$ del conjunto de arcos U tal que $g_{\tilde{G}}(x)=1$ para toda $x\in X$ donde $\tilde{G}=(X,\tilde{U})$ es decir, cada vértice de la gráfica es tocado por exactamente un arco del acoplamiento; ($g_{\tilde{G}}(x)$ es el grado del vértice x en la gráfica $\tilde{G}$, es decir, es el número de vecinos de x).

Que sea de costo mínimo significa que la suma de los costos de los elementos de $\tilde{U}$ sea mínima con respecto a todos los acoplamientos perfectos posibles.

La gráfica del Problema de Asignación es:



Al encontrar un acoplamiento perfecto de costo mínimo en esta gráfica se tiene que: todos los individuos y todos los trabajos quedan asignados y a cada individuo corresponde un solo trabajo y a cada trabajo un solo individuo siendo además óptimas estas asignaciones por ser de costo mínimo.

También al encontrar las m asignaciones que forman la solución óptima se está encontrando el acoplamiento perfecto de costo mínimo que estará formado por los arcos $(i,m+j)$ para los cuales $x_{ij}=1$ en la solución óptima del problema de Asignación.

El problema de encontrar un acoplamiento perfecto de costo mínimo se plantea así:

Minimizar $z=\sum_{j=1}^{M} c_j \xi_j$

s.a.

$$\sum_{q_j \in A_i} \xi_j = 1 \qquad i=1,\dots,N$$
$$0 \le \xi_j$$

donde:

$A_i = \{ (x_i, x_k) \mid x_k \in \Gamma(x_i) \}$ $\qquad \Gamma(x_i)$=conjunto de vecinos de x_i

$$\xi_j = \begin{cases} 0 \text{ si el arco } j \text{ no pertenece al acoplamiento.} \\ 1 \text{ si el arco } j \text{ si pertenece al acoplamiento.} \end{cases}$$

c_j=costo en el arco j.

Para plantear el Problema de Asignación como el problema anterior, únicamente se tiene que cambiar la M por m^2 y la N por 2m ya que en este caso se tendrán m^2 arcos y 2m vértices.

El planteamiento es, entonces, el siguiente:

Minimizar $z=\sum_{j=1}^{m^2} c_j \xi_j$

s.a.

$$\sum_{q_j \in A_i} \xi_j = 1 \qquad i=1,\dots,2m$$
$$0 \le \xi_j$$

I.4 REDUCCION DEL PROBLEMA DE RUTA MAS CORTA AL PROBLEMA DE ASIGNACION.

En el Problema de Ruta más Corta se desea encontrar una ruta del vértice 1 (origen) al vértice N (destino) de una red dirigida, que sea la ruta más corta de todas las posibles con respecto a los costos de los arcos.

La matriz de costos de los arcos de la red es una matriz de NxN, con elementos $a_{ii}=0$, $a_{ij}=c_{ij}$=costo en el arco (i,j) para los $(i,j)\in U$ donde U es el conjunto de arcos de la red y $a_{ij}=\infty$ para los $(i,j)\notin U$.

Los elementos de la primera columna de esta matriz son de la forma $a_{11}=0$, $a_{21}=a_{31}=\ldots=a_{N1}=\infty$ porque 1 es el origen.

Los elementos del último renglón son $a_{N1}=a_{N2}=\ldots=a_{N,N-1}=\infty$, $a_{NN}=0$ porque N es el destino.

Si se borran de la matriz la primera columna y el último renglón se obtiene una matriz de (N-1)x(N-1) que se puede considerar como la matriz de costos de un problema de asignación.

Al borrar la primera columna se están quitando los costos de los arcos (i,1) i=2,...,N que son costos iguales a ∞ ya que dichos arcos en realidad no existen porque 1 es el origen. También se quita el costo $c_{11}=0$ que corresponde a la posición (1,1) que se interpretará como el estar en el vértice 1 sin moverse de él y no como un arco de 1 a 1 ya que no tiene mucho sentido considerar bucles en el Problema de Ruta más Corta. Esto último se tomará para todas las posiciones (i,i) i=2,...,N

Al borrar el último renglón de la matriz se están quitando los costos de los arcos (N,j) j=1,...,N-1 que son costos iguales a ∞ porque dichos arcos no existen en realidad por ser N el destino. Se quita también el costo $c_{NN}=0$.

Al considerar la matriz de (N-1)x(N-1), resultante de borrar el último renglón y la primera columna, como la matriz de costos de un problema de asignación se tendrá que una solución factible, no óptima, de este problema podrá constar de arcos que vayan formando una ruta del vértice 1 al vértice N, de circuitos de vértices separados y circuitos de longitud cero.

Por circuitos de longitud cero se entenderá el estar en un determinado vértice y no moverse de él, es decir, "ir de un vértice a él mismo" pero sin circular por ningún arco. Estos circuitos corresponden a las posiciones (i,i) ya antes mencionadas (recuérdese que no son bucles).

Los circuitos de vértices separados serán los circuitos de la forma $\{(i_1, i_2), (i_2, i_3), \ldots, (i_\ell, i_1)$ para los cuales en realidad no existen los arcos $(i_1, i_2), (i_2, i_3), \ldots, (i_\ell, i_1)$ en la red en cuestión, es decir, $a_{i_1 i_2} = \infty, a_{i_2 i_3} = \infty, \ldots, a_{i_\ell i_1} = \infty$

Ahora se explicará por qué una solución factible no óptima del problema de asignación construido puede tener los elementos mencionados.

Para tener una solución factible del Problema de Asignación se necesita que n variables $x_{ij_i}, \ldots, x_{nj_n}$; $j_i \neq j_{i'}$; $i, i' = 1, \ldots, n$ tengan valor 1 y las demás x_{ij} tengan valor cero. De esta forma se satisfacen las restricciones del problema.

El tener $x_{ij_i} = \ldots = x_{nj_n} = 1$ equivale a elegir n posiciones independientes (que no haya dos en el mismo renglón o en la misma columna) en la matriz de costos.

La ruta del vértice 1 al vértice N se va formando de la siguiente forma: En el primer renglón se eligirá una posición $(1, j')$ con $j' \in \{2, \ldots, N\}$. En el renglón j' ya no se podrá marcar la posición (j', j') por lo que se tendrá marcada una posición (j', j'') $j' \neq j''$.

De la misma forma se seguirá con el renglón j'' y con los renglones siguientes.

Sin embargo, para los vértices por donde no pasa la ruta se eligirán las posiciones (i,i) que corresponden a los circuitos de longitud cero. Por ejemplo, si por un vértice i' no pasa la ruta, el renglón i' y la columna i' no tendrán otras posiciones marcadas y se podrá elegir la posición (i', i') que tendrá costo $a_{i'i'} = 0$ el cual no influirá en el costo total de la ruta dado que es cero y además la ruta no pasa por el vértice i'.

Por otra parte, como la solución factible en cuestión no es necesariamente óptima se pueden elegir posiciones (i,j) con $a_{ij} = \infty$ y los circuitos de vértices separados se podrán dar en casos como el siguiente: Supóngase que se seleccionan las posiciones $(2,3)$ y $(3,2)$ con $a_{23} = a_{32} = \infty$; en la matriz de costos son posiciones independientes y en la red los vértices 2 y 3 son los mismos en $(2,3)$ y en $(3,2)$. Se tiene entonces el circuito $\{(2,3),(3,2)\}$ cuyos arcos $(2,3)$ y $(3,2)$ no existen en realidad lo que da un circuito de vértices separados. También puede suceder que exista por ejmplo el arco $(2,3)$ y el $(3,2)$ no, es decir, $a_{23} \neq \infty$ y $a_{32} = \infty$.

La ruta más corta de 1 a N se va formando de la misma manera que en las soluciones factibles con la excepción de que en este caso no habrá circuitos de vértices separados ya que por ser la ruta de costo mínimo no se eligen posiciones con costos ∞.

Por lo tanto en la solución óptima del problema de asignación construido se tendrá la ruta más corta de 1 a N y tal vez algunos circuitos de longitud cero correspondientes a los vértices por los que no pasa la ruta y cuyos costos de la forma $a_{ii} = 0$ ayudan a que el costo total de la ruta sea pequeño.

Para identificar qué arcos serán los que formen la ruta más corta de 1 a N se considerarán las variables $x_{ij} = 1$ correspondientes a la solución óptima del problema de asignación que se construyó.

Si $x_{ij} = 1$, $i \neq j$, el arco (i,j) está en la ruta.

Si $x_{ij} = 1$, $i = j$, entonces se sabe que la ruta no pasa por el vértice i.

La solución óptima se podrá encontrar siempre y cuando la red no tenga circuitos negativos, lo cual es una condición necesaria para resolver el Problema de Ruta más Corta.

El modelo que representa al Problema de Ruta más Corta es el siguiente:

$$\text{Minimizar } z=\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} a_{ij}\, y_{ij}$$

s.a.

$$\sum_{j=1}^{N} y_{ij} - \sum_{k=1}^{N} y_{ki} = \begin{cases} 1 & \text{si } i=1 \\ 0 & \text{si } i\neq 1,N \\ -1 & \text{si } i=N \end{cases}$$

$$y_{ij} \geq 0 \qquad i,j=1,\ldots,N$$

donde:

$$y_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si el arco } (i,j) \text{ no forma parte de la ruta.} \\ 1 & \text{si el arco } (i,j) \text{ forma parte de la ruta.} \end{cases}$$

a_{ij} =costo en el arco (i,j), que puede ser $a_{ij}=c_{ij}$ si $(i,j)\in U$, $a_{ij}=\infty$ si $(i,j)\notin U$ ó $a_{ij}=0$ si $i=j$.

Considerando lo explicado con anterioridad, el planeamiento del Problema de Ruta más Corta como problema de asignación será:

$$\text{Minimizar } z=\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=2}^{N} a_{ij}\, x_{ij}$$

s.a.

$$\sum_{j=2}^{N} x_{ij} = 1 \qquad i=1,\ldots,N-1$$

$$\sum_{i=1}^{N-1} x_{ij} = 1 \qquad j=2,\ldots,N-1$$

$$x_{ij} \geq 0 \qquad i=1,\ldots,N-1$$

$$j=2,\ldots,N$$

$$x_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \text{ no se asigna a } j \\ 1 & \text{si } i \text{ se asigna a } j \end{cases}$$

A continuación se explica la relación existente entre ambos planteamientos.

En los dos planteamientos las variables de decisión determinan para cada arco si éste va a estar en la ruta o no.

Las dos funciones objetivo minimizan la suma de los costos de los arcos que forman parte de la ruta.

En las restricciones del primer planteamiento se pide que del origen sólo salga un arco de la ruta, que al destino sólo llegue un arco de la misma y que para los demás vértices por los que pase dicha ruta, a cada uno de ellos entre solamente un arco y salga sólo uno de la misma. Para los vértices que no están en la ruta es obvio que ningún arco de ésta sale ni entra a ellos.

En el segundo planteamiento, en las restricciones

$$\sum_{j=2}^{N} x_{ij} = 1 \qquad i=1,\ldots,N-1$$

se pide que para cada vértice por el que pasa la ruta solamente salga de él un arco de ésta. No necesariamente la ruta pasa por todos los vértices, pero todas las restricciones se cumplen por la existencia de circuitos de longitud cero que corresponden a las variables de la forma $x_{ii}=1$.

En estas restricciones se excluyen los arcos que saldrían del destino hacia todos los vértices y de todos los vértices hacia el origen, ya que en realidad no existen.

En las restricciones $\sum_{i=1}^{N-1} x_{ij} = 1 \quad j=2,\ldots,N$

se pide que para cada vértice por el que pasa la ruta solamente entre a él un arco, excluyéndose los que entrarían al origen y los que saldrían del destino, ya que no existen. Al igual que en el caso anterior, todas las restricciones se cumplen por la existencia de los circuitos de longitud cero.

Es evidente que el grupo de restricciones del primer planteamiento se dividió en dos grupos de restricciones en el segundo planteamiento, pidiendo lo mismo.

Entonces:

-Para el origen se tiene:

En el primer planteamiento:

$$\sum_{j=1}^{N} y_{ij} - \sum_{k=1}^{N} y_{ki} = 1$$

en el segundo planteamiento:

$$\sum_{j=2}^{N} x_{1j} = 1$$

-Para el destino se tiene:

En el primer planteamiento:

$$\sum_{j=1}^{N} y_{Nj} - \sum_{k=1}^{N} y_{kN} = -1$$

En el segundo planteamiento:

$$\sum_{i=1}^{N-1} x_{iN} = 1$$

-Para un vértice R≠1,N que esté en la ruta, se tiene:

En el primer planteamiento:

$$\sum_{j=1}^{N} y_{Rj} - \sum_{k=1}^{N} y_{kR} = 1-1=0$$

En el segundo planteamiento:

$$\sum_{j=2}^{N} x_{Rj} - \sum_{i=1}^{N-1} x_{iR} = 1-1=0$$

-Para un vértice t≠1,N que no esté en la ruta, se tiene:

En el primer planteamiento:

$$\sum_{j=1}^{N} y_{tj} - \sum_{k=1}^{N} y_{kt} = 0-0=0$$

porque $y_{tj}=0$ para $j=1,\ldots,N$ y $y_{kt}=0$ para $k=1,\ldots,N$

En el segundo planteamiento:

$x_{tj}=0$ $\quad j=2,\ldots,t-1,t+1,\ldots,N$

$x_{it}=0$ $\quad i=1,2,\ldots,t-1,t+1,\ldots,N-1$

$x_{tt}=1$ porque se deben cumplir las restricciones:

$$\sum_{j=2}^{N} x_{tj} = 1 \quad y \quad \sum_{i=1}^{N-1} x_{it} = 1$$

Entonces

$$\sum_{j=2}^{N} x_{tj} - \sum_{i=1}^{N-1} x_{it} = 1-1=0$$

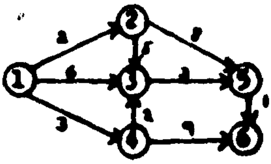
A continuación se presenta un ejemplo donde se resuelve un problema de ruta más corta como problema de asignación.

El algoritmo que se utilizará se explica en el Capítulo II y corresponde a la Presentación III del Algoritmo Húngaro. (Sección II.3 del Capítulo II).

A lo largo del algoritmo se utilizan redes donde se encuentra el flujo máximo; esto se hace utilizando el algoritmo de Ford y Fulkerson para encontrar el flujo máximo en una red (Apéndice A).

Ejemplo.

Sea la red siguiente:



Se desea encontrar la ruta más corta de 1 a 6. Los números en los arcos son costos.

La matriz de costos es:

$$
\begin{array}{c}
 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\
\left[\begin{array}{cccccc}
0 & 2 & 6 & 3 & \infty & \infty \\
\infty & 0 & 5 & \infty & 8 & \infty \\
\infty & \infty & 0 & \infty & 3 & \infty \\
\infty & \infty & 2 & 0 & \infty & 9 \\
\infty & \infty & \infty & \infty & 0 & 1 \\
\infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 0
\end{array}\right]
\end{array}
$$

A la matriz de costos se le quita la primera columna y el último renglón y se obtiene la siguiente matriz de 5x5:

$$
\begin{array}{c}
 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\
\left[\begin{array}{ccccc}
2 & 6 & 3 & \infty & \infty \\
0 & 5 & \infty & 8 & \infty \\
\infty & 0 & \infty & 3 & \infty \\
\infty & 2 & 0 & \infty & 9 \\
\infty & \infty & \infty & \infty & 1
\end{array}\right]
\end{array}
$$

Esta matriz se considera como la matriz de costos de un problema de asignación y se resuelve éste como tal.

θ_{ij}

$$
C=
\begin{array}{c}
 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\
\left[\begin{array}{ccccc}
2 & 6 & 3 & \infty & \infty \\
0 & 5 & \infty & 8 & \infty \\
\infty & 0 & \infty & 3 & \infty \\
\infty & 2 & 0 & \infty & 9 \\
\infty & \infty & \infty & 0 & 1
\end{array}\right]
\end{array}
\begin{array}{l}
 \\ u_1=2 \\ u_2=0 \\ u_3=0 \\ u_4=0 \\ u_5=0
\end{array}
$$

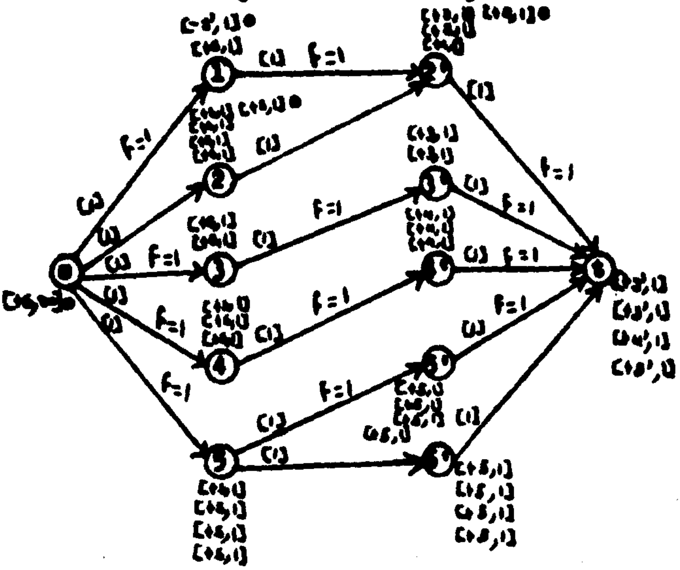
$$C' = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccc} 0 & 4 & 1 & \infty & \infty \\ 0 & 5 & \infty & 8 & \infty \\ \infty & 0 & \infty & 3 & \infty \\ \infty & 2 & 0 & \infty & 9 \\ \infty & \infty & \infty & 0 & 1 \end{array}\right] \end{array} \sim c'_{ij} - u_i$$

$$v_1=0 \quad v_2=0 \quad v_3=0 \quad v_4=0 \quad v_5=1$$

$$C'' = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccc} 0 & 4 & 1 & \infty & \infty \\ 0 & 5 & \infty & 8 & \infty \\ \infty & 0 & \infty & 3 & \infty \\ \infty & 2 & 0 & \infty & 8 \\ \infty & \infty & \infty & 0 & 0 \end{array}\right] \end{array} \sim c'_{ij} - u_i - v_j$$

= matriz de costes reducidos

Se construye la red de flujo máximo:



La tilde es para distinguir los vértices solamente.
En los arcos se tiene:
[1] capacidad
f=flujo
Las etiquetas de la última etiquetación están marcadas así: [ ]●

Se obtiene la cortadura mínima:

$A = \{s,1,2,2'\}$ $\qquad \bar{A} = \{3,4,5,3',4',5',6',t\}$

$\mathcal{C} = \{(s,3),\ (s,4),\ (s,5),\ (2',t)\}$

Se trazan líneas en los renglones 3,4,5 y en la columna 2 de la matriz C''.

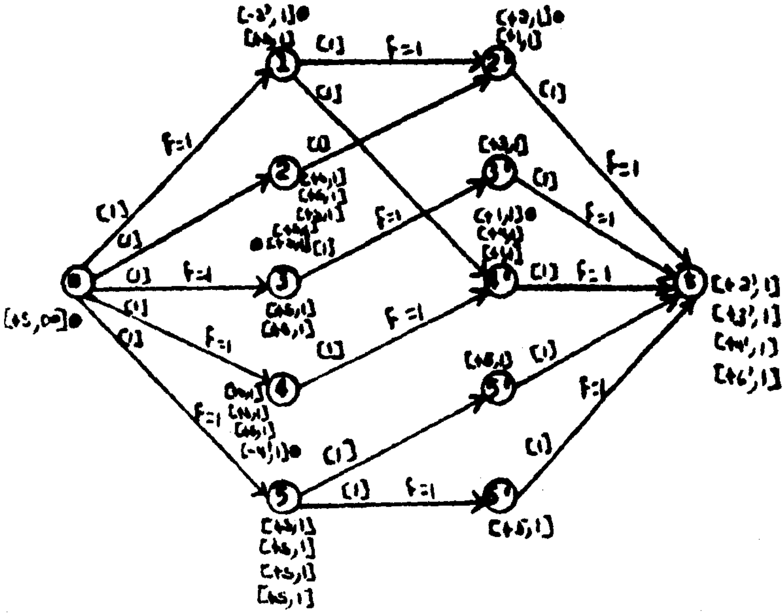
Como el número de líneas es $4<5$ se procede a cambiar la matriz C''.

$$
C'' = \begin{array}{c|ccccc} & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline 1 & 0 & 4 & 1 & \infty & \infty \\ 2 & 0 & 5 & \infty & 8 & \infty \\ 3 & \infty & 0 & \infty & 3 & \infty \\ 4 & \infty & 2 & 0 & \infty & 8 \\ 5 & \infty & \infty & \infty & 0 & 0 \end{array}
\qquad c_0 = \min\{4, 1, \infty, \infty, 5, \infty, 8, \infty\} = 1
$$

Se resta c_0 de cada elemento no cubierto y se suma a cada elemento cubierto por dos líneas. Se obtiene:

$$
C_1'' = \begin{array}{c|ccccc} & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline 1 & 0 & 3 & 0 & \infty & \infty \\ 2 & 0 & 4 & \infty & 7 & \infty \\ 3 & \infty & 0 & \infty & 3 & \infty \\ 4 & \infty & 2 & 0 & \infty & 8 \\ 5 & \infty & \infty & \infty & 0 & 0 \end{array}
$$

Se construye la red de flujo máximo:



Se obtiene la cortadura mínima:

$$A=\{s,1,2,4,2',4'\} \qquad A^c=\{3,5,3',5',6',t\}$$

$$\mathcal{C}=\{(s,3),(s,5),(2',t),(4',t)\}$$

Se trazan líneas en los renglones 3,5 y en las columnas 2 y 4 de la matriz C_1''.

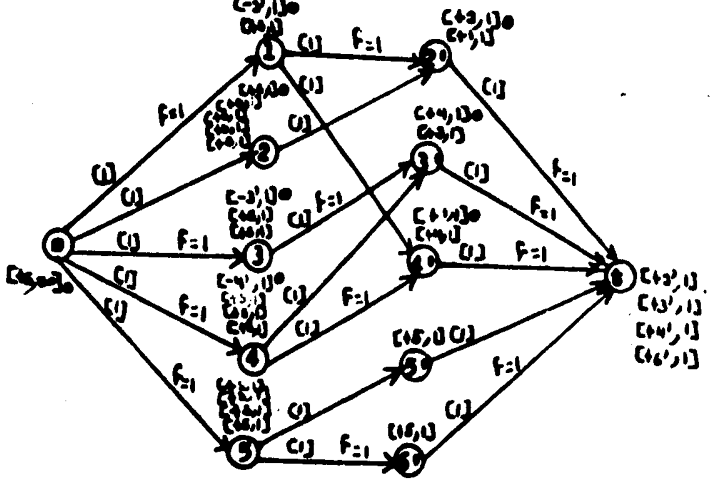
Como el número de líneas es $4<5$ se procede a cambiar la matriz C_1''.

$$C_1''=\begin{array}{c} \\ 1\\2\\3\\4\\5 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array}\\ \left[\begin{array}{ccccc} 0 & 3 & 0 & \infty & \infty\\ 0 & 4 & \infty & 7 & \infty\\ \infty & 0 & \infty & 3 & \infty\\ \infty & 2 & 0 & \infty & 8\\ \infty & \infty & \infty & 0 & 0 \end{array}\right]\end{array} \qquad e_o=\min\{3,\infty,\infty,4,7,\infty,2,\infty,8\}=2$$

Se resta e_o de cada elemento no cubierto y se suma a cada elemento cubierto por dos líneas. Se obtiene:

$$C_2''=\begin{array}{c} \\ 1\\2\\3\\4\\5 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array}\\ \left[\begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 0 & \infty & \infty\\ 0 & 2 & \infty & 5 & \infty\\ \infty & 0 & \infty & 3 & \infty\\ \infty & 0 & 0 & \infty & 6\\ \infty & \infty & \infty & 0 & 0 \end{array}\right]\end{array}$$

Se construye la red de flujo máximo:



Se obtiene la cortadura mínima:

$$A=\{s,1,2,3,4,2',3',4'\} \qquad A^c=\{5,5',6',t\}$$

$$\mathcal{C}=\{(s,5),(2',t),(3',t),(4',t)\}$$

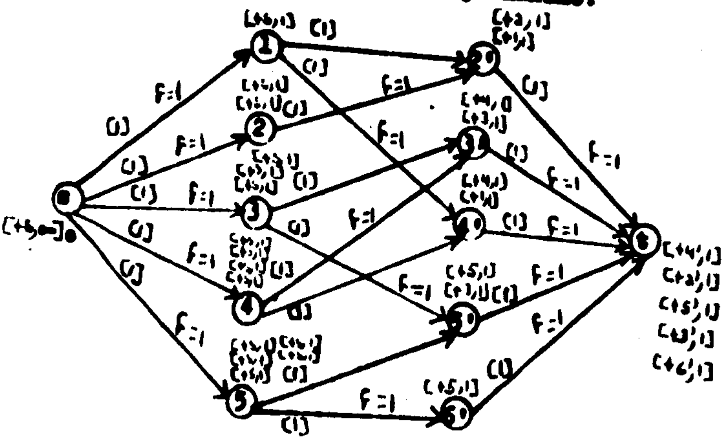
Se trazan líneas en el renglón 5 y en las columnas 2,3,4, de la matriz C_2''.

$$C_2''=\begin{array}{c} \\ 1\\2\\3\\4\\5\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{ccccc}2&3&4&5&6\end{array}\\ \left[\begin{array}{ccccc}0&1&0&\infty&\infty\\0&2&\infty&5&\infty\\\infty&0&\infty&3&\infty\\\infty&0&0&\infty&6\\\infty&\infty&\infty&0&0\end{array}\right]\end{array} \qquad c_0=\min\{\infty,\infty,5,\infty,3,\infty,\infty,6\}=3$$

Se resta c_0 de cada elemento no cubierto y se suma a cada elemento cubierto por dos líneas. Se obtiene:

$$C_3''=\begin{array}{c} \\ 1\\2\\3\\4\\5\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{ccccc}2&3&4&5&6\end{array}\\ \left[\begin{array}{ccccc}0&1&0&\infty&\infty\\0&2&\infty&2&\infty\\\infty&0&\infty&0&\infty\\\infty&0&0&\infty&3\\\infty&\infty&\infty&0&0\end{array}\right]\end{array}$$

Se construye la red de flujo máximo:



Se obtiene la cortadura mínima:

$A=\{s\}$ $\quad A^c=\{1,2,3,4,5,2',3',4',5',6',t\}$

$\mathcal{C}=\{(s,1),(s,2),(s,3),(s,4),(s,5)\}$

Se trazan líneas en los renglones 1,2,3,4,5, de C_3''.

$$C_3''= \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 0 & - & - \\ 0 & 0 & - & 0 & - \\ - & 0 & - & 0 & - \\ - & 0 & 0 & - & 3 \\ - & - & - & 0 & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

Como el número de líneas es 5 se tiene ya la solución óptima que es:

$x_{14}=1$

$x_{22}=1$

$x_{35}=1$

$x_{43}=1$

$x_{56}=1$

las demás $x_{ij}=0$

Las $x_{ij}=1$ corresponden a los arcos (i,j') con $f=1$ en la red de flujo máximo.

El costo total es: $a_{14}x_{14}+a_{22}x_{22}+a_{35}x_{35}+a_{43}x_{43}+a_{56}x_{56}=$

$= 3+0+3+2+1=9$

Regresando al problema de ruta más corta se tiene que:

Los arcos (1,4),(4,3),(3,5),(5,6) forman parte de la ruta más corta de 1 a 6.

Además se tiene el circuito de longitud cero correspondiente al vértice 2 por el cual no pasa la ruta.

Por lo tanto la ruta más corta del 1 a 6 es:

$\{(1,4),(4,3),(3,5),(5,6)\}$

cuyo costo total es igual a 9.

CAPITULO II

TRES PRESENTACIONES DIFERENTES DEL ALGORITMO HUNGARO PARA RESOLVER EL PROBLEMA DE ASIGNACION.

II.1 PRESENTACION I (PI). DEBIDA A H.W. KUHN.

II.1.1 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA.

El planteamiento del Problema de Asignación que se considerará en esta presentación del algoritmo, difiere un poco del ya expuesto, aunque sin cambiar la esencia del problema.

Ahora se tendrá:

(P) Problema Primal

$$\begin{cases} \text{Maximizar } z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} r_{ij}\, x_{ij} \\ \text{s.a.} \\ \sum_{j=1}^{m} x_{ij} = 1 \qquad i=1,\ldots,m \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 1 \qquad j=1,\ldots,m \\ x_{ij} \geq 0 \qquad i,j=1,\ldots,m \end{cases}$$

donde:

$$x_{ij} = \begin{cases} 0 \text{ si el individuo } i \text{ no se asigna al trabajo } j \\ 1 \text{ si el individuo } i \text{ se asigna al trabajo } j \end{cases}$$

r_{ij} =productividad del individuo i en el trabajo j

$r_{ij} > 0 \qquad i,j=1,\ldots,m;\ r_{ij} \in Z$

En este caso, el objetivo del problema es maximizar la suma de productividades de los individuos.

El problema dual es:

(D) Problema Dual

$$\begin{cases} \text{Minimizar } w = \sum_{i=1}^{m} u_i + \sum_{j=1}^{m} v_j \\ \text{s.a.} \\ u_i + v_j \geq r_{ij} \qquad i,j=1,\ldots,m \\ u_i, v_j \text{ sin restricción } i,j=1,\ldots,m \end{cases}$$

La interpretación económica del problema dual es ahora la siguiente:

Una persona (o empresa) compra a la persona (o empresa) del problema primal el tiempo de trabajo de los individuos, pa gándole por cada individuo i una cantidad u_i y por cada trabajo j una cantidad v_j de tal manera que la persona del primal - obtenga al menos lo que iban a producir los individuos en los trabajos.

La persona del dual tratará de minimizar sus gastos.

En esta presentación se pide que $r_{ij} > 0$ i,j=1,...,m.

Más adelante se verá que el algoritmo (<u>en esta presentación solamente</u>) mantiene las variables duales siempre no negativas, al principio, utilizando el hecho de que $r_{ij} > 0$, y después, por la manera en que se modifican dichas variables.

II.1.2 EL PROBLEMA DE ASIGNACION SIMPLE.

El Problema de Asignación Simple es aquel en el cual $r_{ij} = 1$ i,j=1,...,m y además no necesariamente todos los individuos califican para todos los trabajos, es decir, pueden quedar individuos y trabajos sin asignar al resolver el problema; teniéndose así desigualdades en las restricciones de la forma siguiente:

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} \leq 1 \qquad i=1,\ldots,m$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \leq 1 \qquad j=1,\ldots,m$$

La fase primal de cada iteración en el algoritmo consistirá en resolver un problema de asignación simple. Esto se explica ampliamente más adelante.

Obsérvese que al tener $r_{ij} = 1$ i,j=1,...,m todos los individuos tienen la misma oportunidad de ser asignados, siempre y - cuando califiquen para los trabajos (si un individuo no califica para un trabajo, no puede asignarse a él).

El Problema de Asignación Simple se puede ilustrar con el siguiente ejemplo:

Ejemplo 1. Se tienen 4 individuos y 4 trabajos que se denotan con i=1,...,4 y j=1,...,4 respectivamente.

No todos los individuos califican para todos los trabajos

Se tiene que:

El individuo 1 califica para los trabajos 1,2,3

El individuo 2 califica para los trabajos 3,4

El individuo 3 califica para el trabajo 4

El individuo 4 califica para el trabajo 4

Esta información se puede colocar en forma de matriz tomando los renglones para los individuos y las columnas para los trabajos.

Esta matriz se representará por la letra Q y será llamada "matriz de calificación"; sus elementos serán:

$q_{ij}=0$ si el individuo i no califica para el trabajo j

$q_{ij}=1$ si el individuo i califica para el trabajo j

Q es de mxm.

Entonces, con los datos del ejemplo se tendrá:

$$Q = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

El problema consiste en encontrar el número más grande de trabajos que pueden ser asignados a individuos que califiquen para ellos sin que se asignen dos trabajos a un individuo ni dos individuos a un trabajo. Esto equivale a buscar en la matriz Q el mayor número de 1's que puedan ser escogidos sin tomar dos del mismo renglón o dos de la misma columna.

Se puede hacer la primera asignación colocando individuos no asignados en trabajos no asignados para los cuales cálifiquen.

En el Ejemplo 1 se puede comensar asignando el individuo 1 al trabajo 3 y el individuo 2 al trabajo 4.

En Q se marcan estas asignaciones con asteriscos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1^* & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1^* \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

En este caso ya no es posible colocar otro individuo en otro trabajo porque si se hace , no se cumplen las restricciones del problema.

Se tiene ahora la siguiente definición:

Definición. Una asignación es completa cuando no es posible incrementarla colocando un individuo no asignado en un trabajo no asignado para el cual califique.

Si se tiene una asignación completa se puede incrementar por medio de una transferencia de los individuos que ya han sido asignados.

En el Ejemplo 1 se puede hacer la siguiente transferencia:

Cambiar al individuo 1 del trabajo 3 al trabajo 1.

Cambiar al individuo 2 del trabajo 4 al trabajo 3.

Así se tendrá la asignación incompleta siguiente:

$$\begin{bmatrix} 1^* & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1^* & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

en donde se puede asignar el individuo 3 al trabajo 4 (o el individuo 4 al trabajo 4) quedando la asignación de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} 1^* & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1^* & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1^* \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

que es una asignación completa.

Aunque es posible hacer otra transferencia moviendo al in dividuo 1 del trabajo 1 al trabajo 2 esto conducirá a otra asignación completa.

Definición. Una asignación es óptima si es completa después de cada posible transferencia.

Entonces, la asignación:

individuo 1 en el trabajo 1

individuo 2 en el trabajo 3

individuo 3 en el trabajo 4

es óptima ya que no es posible incrementarla haciendo transferencias.

Se considerará ahora el problema expuesto, pero en general, es decir, se tendrán m individuos y m trabajos.

La matriz Q sigue constando del mismo tipo de elementos:

$$q_{ij} = \begin{cases} 0 \text{ si el individuo } i \text{ no califica para el trabajo } j \\ 1 \text{ si el individuo } i \text{ califica para el trabajo } j \end{cases}$$

para $i,j=1,\ldots,m$

Si se tiene una cierta asignación, la manera más sencilla de incrementarla es colocando un individuo no asignado en un trabajo no asignado para el que califique. Si esto es posible la asignación es incompleta, si no, es completa.

Si es completa, para incrementarla se intenta una transferencia.

Una transferencia consiste en cambiar la asignación de r individuos distintos denotados por $i_1,\ldots,i_r$ asignados a trabajos distintos denotados por $j_1,\ldots,j_r$.

Se cambia al individuo i_1 a un trabajo no asignado j_0 y a los individuos i_k a los trabajos j_{k-1} $k=2,\ldots,r$; suponiendo que i_k califica para j_{k-1} $k=1,\ldots,r$. De esta forma se deja libre al trabajo j_r.

También se llamará transferencia al hecho de dejar la asignación sin cambio alguno.

Se puede ilustrar una transferencia así:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & i_1 \arrow[dl] & i_2 \arrow[dl] \cdots & i_{r-1} \arrow[dl] & i_r \arrow[dl] \\
j_0 & j_1 & j_2 \cdots & j_{r-1} & j_r
\end{tikzcd}$$

Tómese en cuenta que siempre se pueden reordenar individuos y trabajos.

__Definición.__ __Un individuo involucrado en una transferencia es un individuo esencial.__

Para mayor claridad de la anterior definición se puede ver como individuo esencial a un individuo que estando asignado a un trabajo, se puede cambiar a otro trabajo __no asignado__ para el cual califique. (Nótese que al cambiar a un individuo i_1 de un trabajo j_1 a un trabajo j_0, el trabajo j_1 queda sin asignar y puede colocarse en él al individuo i_2 que califique para j_1 y a su vez dejará sin asignar el trabajo j_2 y así sucesivamente).

__Definición.__ __Un trabajo asignado a un individuo no esencial es un trabajo esencial.__

__Lema1.__ Para una asignación dada, si un individuo es asignado a un trabajo, entonces, o el individuo o el trabajo es esencial y no ambos.

Demostración. El Lema 1 es una consecuencia inmediata de la definición de trabajo esencial.

__Corolario 1.__ Para todas las asignaciones, el número de individuos asignados a trabajos es igual al número de individuos y trabajos esenciales.

Demostración. Por el Lema 1, si un individuo es asignado a un trabajo, entonces el individuo o el trabajo es esencial y no ambos; entonces para cada pareja (i,j) tal que i está asignado a j, se tiene un elemento esencial, es decir, el número de elementos esenciales es igual al número de parejas de la asignación que a su vez es igual al número de indivi--

duos asignados a trabajos.

Por lo tanto el número de elementos esenciales es igual al número de individuos asignados a trabajos. (Por elemento esencial se entiende individuo o trabajo esencial).

<u>Lema 2.</u> Para una asignación dada, si un individuo está asignado a un trabajo y califica para otro trabajo <u>no asignado</u>, entonces el individuo es esencial.

Demostración. Se puede hacer una transferencia cambiando al individuo al otro trabajo <u>no asignado</u> para el cual califica. Entonces el individuo es esencial por la definición de individuo esencial.

<u>Lema 3.</u> Para una asignación dada, si cada transferencia deja a un trabajo asignado entonces el trabajo es esencial.

Demostración. Supóngase que el trabajo j no es esencial. Entonces algún individuo i_k está asignado a él e i_k es esencial, es decir, se ve involucrado en una transferencia que mueve $i_1, \ldots, i_k$ de los trabajos a los que están asignados, a otros trabajos de tal manera que si el individuo i_ℓ está asignado al trabajo j_ℓ cambie al trabajo $j_{\ell-1}$ $\ell=1,\ldots,k$. En símbolos:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & i_1 \arrow[dl] & i_2 \arrow[dl] & \cdots \arrow[dl] & i_{k-1} \arrow[dl] & i_k \arrow[dl] \\
j_0 & j_1 & j_2 & \cdots & j_{k-1} & j
\end{tikzcd}$$

entonces j queda sin asignar, lo cual contradice la hipótesis de que cada transferencia deja asignado a j.

Por lo tanto j es esencial.

__Teorema 1.__ Para una asignación dada, si cada transferencia conduce a una asignación completa, entonces, para cada individuo calificado para un trabajo, o el individuo o el trabajo es esencial, y posiblemente ambos.

Demostración. Sea el individuo __i que califica para el trabajo j__. Se tienen dos casos:

1) Que i está asignado a j

2) Que i no esté asignado a j

__1) i está asignado a j.__ Por el Lema 1 i es esencial o j es esencial.

a) Si i califica para otro trabajo no asignado, por el Lema2, i es esencial, y por lo tanto j no lo es. (Ver la asignación óptima del Ejemplo 1, es completa y el individuo 1 califica para el trabajo 2 __no asignado__. El individuo 1 está asignado al trabajo 1. El individuo 1 es esencial y el trabajo 1 no lo es).

b) Si i no puede cambiar de trabajo, entonces cada transferencia deja a j signado, de otro modo la asignación sería incompleta al dejar j sin asignar lo cual contradice las hipótesis. Por el Lema 3 j es esencial y entonces i no lo es.

__2) i no está asignado a j.__

a) Si i está asignado a j' y califica para j'' no asignado y j está asignado a un i' no esencial, entonces i y j son esenciales.

Ejemplo:

$$\begin{array}{c|cccc|} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 1^* & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1^* & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 1^* \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline \end{array}$$

Esta asignación es completa y la única transferencia posible (mover al individuo 1 al trabajo 2) conduce a una asignación completa. El individuo 1 califica para el trabajo 4 y no está asignado a él. El individuo 1 es esencial porque califica para el trabajo 2 que no está asignado. El trabajo 4 está asignado al individuo 3 que no es esencial ya que no puede cambiar a otro trabajo no asignado, entonces el trabajo 4 es esencial. Por lo tanto el individuo 1 y el trabajo 4 son esenciales.

b) Si i está asignado a un j' y califica para un j'' no asignado y j está asignado a un i' esencial, entonces i es esencial y j no lo es. Pero este caso no se da en asignaciones que son completas después de cada transferencia. Ejemplo:

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \left[\begin{array}{cccc} 1^{*} & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1^{*} & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1^{*} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \end{array}$$

En este caso el individuo 1 y el individuo 3 son esenciales ya que califican para el trabajo 2 no asignado. Sin embargo si se hace la transferencia que consiste en mover al individuo 3 del trabajo 4 al 2, la asignación es incompleta.

c) Si i no es esencial y j está asignado a un i' no esencial, entonces i no es esencial y j es esencial. Ejemplo:

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 1^* & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1^* & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 1^* \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

Esta asignación es completa después de cada posible transferencia. El individuo 2 califica para el trabajo 4. El individuo 2 no es esencial porque no se puede cambiar a otro trabajo no asignado. El trabajo 4 está asignado al individuo 3 que no es esencial, entonces el trabajo 4 es esencial. Así, el individuo 2 no es esencial y el trabajo 4 sí lo es.

d) Si i no es esencial y j está asignado a un i' esencial, entonces j no es esencial. Sin embargo, este caso no se da cuando se tiene una asignación que es completa después de cada transferencia. (Al cambiar i' al otro trabajo para el que califica, j quedará sin asignar y la asignación será incompleta).

e) Si i es esencial y j no está asignado entonces i es esencial y j no lo es.

Ejemplo:

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 1^* & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1^* & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 1^* \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

El individuo 1 califica para el trabajo 2. El individuo 1 es esencial y el trabajo 2 no está asignado. Este caso funciona solamente cuando i es el único que califica para j; de otra forma no se cumple la hipótesis de que la asignación sea completa después de cada transferencia.

f) Si j es esencial e i no está asignado entonces j es esencial e i no lo es. Ejemplo:

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \left[\begin{array}{cccc} 1^* & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1^* & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1^* \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \end{array}$$

El individuo 4 califica para el trabajo 4. El trabajo 4 es esencial porque está asignado al individuo 3 que no es esencial. Entonces el trabajo 4 es esencial y el individuo 4, no asignado, no es esencial. Este caso funciona solamente cuando i califica sólo para trabajos esenciales porque de otra forma la asignación no es completa después de cada transferencia. En el ejemplo, si el individuo 4 califica para el trabajo 4, funciona; si calificara para el trabajo 3 también funcionaría. En cambio, si calificara para el trabajo 2 la asignación no sería completa (recuérdese que el individuo 4 no está asignado). Si calificara para el trabajo 1 que no es esencial porque está asignado al individuo 1 que es esencial, se podría cambiar al individuo 1 al trabajo 2 y la asignación no sería completa.

Entonces, en este caso, i debe calificar sólo para trabajos esenciales.

Por lo tanto, vistos los casos anteriores, el Teorema 1 se cumple.

Teorema 2. Hay una asignación la cual es completa después de cada posible transferencia.

Demostración. Si se comienza con una asignación cualquiera, por ejemplo la que asigna un individuo a un trabajo para el cual califica, o cada transferencia conduce a una asignación completa, o al menos un individuo más puede ser asignado después de alguna transferencia. Se sabe que a lo más m individuos pueden ser asignados a trabajos para los que califiquen. Por lo tanto existe una asignación que es completa después de cada transferencia posible.

Afirmación 1. Siempre se puede construir una asignación óptima por medio de una sucesión de transferencias haciendo asignaciones adicionales después de cada transferencia, hasta que ya no sea posible continuar.

Demostración. Se comienza con cualquier asignación. Para tal asignación o cada transferencia conduce a una asignación completa o al menos un individuo más puede ser asignado después de alguna transferencia. Si sucede que se puede asignar al menos un individuo más, se asigna y se intenta nuevamente hacer transferencias. Se continúa así hasta que se obtiene una asignación que sea completa después de cada posible transferencia (existe por el Teorema 2) la cual será una asignación óptima por definición.

Ahora se verá el Problema de Asignación Simple desde el punto de vista dual.

Se considera un posible presupuesto para contabilizar el valor de un individuo asignado a un trabajo para el que califique.

Dicho presupuesto asignará una unidad o ninguna unidad a cada individuo y a cada trabajo.

<u>Definición.</u> <u>Un presupuesto es adecuado si, para cada individuo calificado para un trabajo, o el individuo o el trabajo tiene asignada una unidad, y posiblemente ambos</u>.

Esta definición corresponde al problema de asignación simple en el cual $r_{ij}=1$ para toda (i,j) donde i califica para j.
Al individuo i se le asigna la cantidad u_i $i=1,\ldots,m$.
Al trabajo j se le asigna la cantidad v_j $j=1,\ldots,m$.

La definición indica que si $u_i+v_j \geq r_{ij}$ para (i,j) tales que i califica para j, es decir, si $u_i=1$ o $v_j=1$ o $u_i=v_j=1$, entonces el presupuesto es adecuado.

Así, un presupuesto $\{u,v\}$ es adecuado si se cumplen las restricciones $u_i+v_j \geq r_{ij}=1$, para i que califica para j, del problema dual.

<u>Teorema 1</u>. La distribución total de cualquier presupuesto adecuado es mayor o igual que el número más grande de trabajos que pueden ser asignados a individuos calificados.

Demostración. Un presupuesto adecuado asigna, para cada individuo calificado para un trabajo, una unidad al individuo, al trabajo o a ambos.
En la asignación todos los trabajos asignados lo están a individuos calificados y por lo tanto para cada par (i,j) tales que i está asignado a j, al menos se tiene una unidad del presupuesto. Visto de otra forma: Se tiene el caso en el que $r_{ij}=1$. Se sabe también que $x_{ij}=1$ si i se asigna a j.

Supóngase que el número más grande de trabajos que se pueden asignar es $m' \leq m$. Supóngase que el trabajo j se asigna al individuo i_j $j=1,\ldots,m'$ (recuérdese que se pueden reordenar individuos y trabajos). Como el presupuesto es adecuado, se tiene que:

$$
\begin{array}{l}
u_{i_1} + v_1 \geq r_{i_1 1} \\
\cdot \\
\cdot \\
\cdot \\
u_{i_{m'}} + v_{m'} \geq r_{i_{m'} m'}
\end{array}
\qquad (1)
$$

Además: $r_{i_1 1} x_{i_1 1} + \ldots + r_{i_{m'} m'} x_{i_{m'} m'} = r_{i_1 1} + \ldots + r_{i_{m'} m'} = m' =$ número de trabajos que se pueden asignar.

Sumando ambos lados de las desigualdades de (1) se tiene:

$$u_{i_1} + \ldots + u_{i_{m'}} + v_1 + \ldots + v_{m'} \geq r_{i_1 1} + \ldots + r_{i_{m'} m'} = m'$$

Por lo tanto se cumple el Teorema 3.

Este teorema corresponde al resultado de Programación Lineal que indica que el valor de la función objetivo del problema dual es siempre mayor o igual que el valor de la función objetivo del problema primal.

<u>Teorema 4</u>. Existen un presupuesto adecuado y una asignación tales que la distribución total del presupuesto es igual al número de trabajos asignados a individuos calificados.

Demostración. Considérese cualquier asignación que sea completa después de cada posible transferencia (por el Teorema 2 existe).

Si se considera un presupuesto que asigne una unidad a cada individuo o trabajo esencial y cero de otra manera, el Teorema 1 asegura que este presupuesto es adecuado, porque dicho teorema afirma que si se tiene una asignación que sea completa después de cada transferencia, entonces, para cada individuo que califica para un trabajo, o el individuo o el trabajo o ambos son esenciales, y así, el presupuesto asignará, para cada individuo que califique para un trabajo, una unidad, o al individuo, o al trabajo o a ambos, por lo cual es adecuado.

Como el Corolario 1 asegura que para cualquier asignación el número de individuos asignados a trabajos es igual al número de trabajos e individuos esenciales, esto sucede en particular para la asignación en cuestión y dada la forma en que se definió el presupuesto, se tienen una asignación y un presupuesto adecuado tales que la distribución total del presupuesto es igual al número de trabajos asignados a individuos calificados. Por lo tanto se cumple el Teorema4.

El Teorema 3 implica que la asignación del Teorema 4 es óptima, ya que en el Teorema 3 se tiene que lo menos que puede valer la distribución total de cualquier presupuesto adecuado es igual al número más grande de trabajos que puedan ser asignados a individuos calificados, y en el Teorema 4 se tiene que la distribución total del presupuesto adecuado es igual al número de trabajos asignados a individuos calificados lo cual implica que dicho número es el más grande de trabajos que se pueden asignar a individuos calificados, por lo que la asignación en el Teorema 4 es óptima.

Por lo tanto se tiene el siguiente Resultado:

El número más grande de trabajos que pueden ser asignados a individuos calificados es igual a la distribución total más pequeña de cualquier presupuesto adecuado.

Demostración. El número más grande de trabajos que pueden ser asignados a individuos calificados corresponde al valor óptimo de z ya que $z=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} r_{ij}x_{ij}$ y $r_{ij}=1$ (si i califica para j), $x_{ij}=1$ si i se asigna a j y se quiere maximizar z.

La distribución total más pequeña de cualquier presupuesto adecuado corresponde al valor óptimo de w ya que $w=\sum_{i=1}^{m}u_i+\sum_{j=1}^{n}v_j$ y se quiere minimizar w.

Por lo tanto se puede utilizar el Teorema débil de holgura complementaria (ApéndiceB).

Supóngase que el número más grande de trabajos que se pueden asignar a individuos calificados es $m'\leq m$.

Supóngase también que los trabajos que se asignan son $j_1, j_2, \ldots, j_{m'}$ y que están asignados a los individuos $i_1, i_2, \ldots, i_{m'}$ respectivamente. Entonces se tiene que: $x_{i_1j_1}=x_{i_2j_2}=\ldots=x_{i_{m'}j_{m'}}=1$, las demás $x_{ij}=0$.

Por el Teorema de holgura complementaria se tiene:

$$u_{i_1}+v_{j_1}=r_{i_1j_1}=1$$
$$u_{i_2}+v_{j_2}=r_{i_2j_2}=1$$
$$\vdots$$
$$u_{i_{m'}}+v_{j_{m'}}=r_{i_{m'}j_{m'}}=1$$

En las restricciones del problema primal que corresponden a los trabajos $j_1, j_2, \ldots j_{m'}$ y en las que corresponden a los individuos $i_1, i_2, \ldots, i_{m'}$ se cumple la igualdad ya que son los que pertenecen a la asignación.

En las demás restricciones se cumple la des igualdad (recuérdese que en el Problema de Asignación Simple no necesariamente todos los individuos califican para todos los trabajos y en las restricciones del problema primal pueden existir desigualdades) ya que corresponden a los individuos y trabajos que no se asignaron, es decir,

$x_{i_1}+x_{i_2}+\ldots+x_{i_m}=0<1$ para $i\neq i_1,i_2,\ldots,i_{m'}$

$x_{1j}+x_{2j}+\ldots+x_{mj}=0<1$ para $j\neq j_1,j_2,\ldots,j_{m'}$

Por el Teorema de holgura complementaria se tiene además: $u_i=0 \quad i\neq i_1,i_2,\ldots,i_{m'}$

$v_j=0 \quad j\neq j_1,j_2,\ldots,j_{m'}$

La distribución total del presupuesto adecuado será entonces:

$$\sum_{[i\neq i_1,\ldots,i_{m'}]}u_i+\sum_{[j\neq j_1,\ldots,j_{m'}]}v_j+(u_{i_1}+v_{j_1})+(u_{i_2}+v_{j_2})+\ldots+(u_{i_{m'}}+v_{j_{m'}})$$

Como $\sum_{i\neq i_1,\ldots,i_{m'}}u_i=\sum_{j\neq j_1,\ldots,j_{m'}}v_j=0$ se tiene:

$$w^*=(u_{i_1}+v_{j_1})+(u_{i_2}+v_{j_2})+\ldots+(u_{i_{m'}}+v_{j_{m'}})=\overbrace{1+1+\ldots+1}^{m'\text{veces}}=m'=z^*$$

Por lo tanto el número más grande de trabajos que pueden ser asignados a individuos calificados es igual a la distribución total más pequeña de cualquier presupuesto adecuado.

Este resultado corresponde al resultado de Programación Lineal que indica que para un problema primal y su dual sus soluciones óptimas, si existen, son iguales.

II.1.3 EL PROBLEMA DE ASIGNACION GENERAL.

El Problema de Asignación General es el planteado en la sección II.1.1 de este capítulo.

En este problema se quieren asignar m individuos a m trabajos. Todos los individuos califican para todos los trabajos.

Se tiene también una matriz de productividad R cuyos elementos son $r_{ij} > 0$, $i,j=1,\ldots,m$ y r_{ij} es la productividad del individuo i en el trabajo j y $r_{ij} \in Z$.

Una asignación consistirá en escoger un trabajo j_i para cada individuo i de tal manera que a cada individuo corresponda un solo trabajo y a cada trabajo un solo individuo.

De este modo todos los trabajos se asignan y cada asignación es una permutación $\begin{pmatrix} 1 & 2\ldots m \\ j_1 & j_2\ldots j_m \end{pmatrix}$ de $\{1,2,\ldots,m\}$.

En el problema de asignación general primal se quiere encontrar una asignación que maximice la suma $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} r_{ij}x_{ij}$ (las variables de decisión x_{ij} son iguales a 1 si i se asigna a j y cero si no).

En el problema dual se consideran presupuestos adecuados, es decir, se distribuye a cada individuo i una cantidad u_i y a cada trabajo j una cantidad v_j con $u_i, v_j \geq 0$, $i,j=1,\ldots,m$ y de tal manera que la suma u_i+v_j sea al menos igual a la productividad del individuo i en el trabajo j, es decir, $u_i+v_j \geq r_{ij}$ $i,j=1,\ldots,m$ que son las restricciones del problema dual. La función objetivo de este problema es $w=\sum_{i=1}^{m} u_i + \sum_{j=1}^{m} v_j$ y se desea minimizar.

<u>Definición</u>. <u>Un presupuesto $\{u,v\}$ es adecuado si para todos i,j $u_i+v_j \geq r_{ij}$</u>.

<u>Teorema 5</u>. La distribución total de cualquier presupuesto adecuado es mayor o igual que la suma de las las productividades de cualquier asignación.

Demostración. Cada individuo y cada trabajo aparecen exactamente una vez en una asignación, entonces la suma de las distribuciones a individuos y trabajos en una asignación, es exactamente la distribución total. Además, por ser adecuado el presupuesto se tiene:

$$u_1 + v_{j_1} \geq r_{1j_1}$$

$u_2+v_{j_2} \geq r_{2j_2}$

.

.

.

$u_m+v_{j_m} \geq r_{mj_m}$

Sumando ambos lados de las desigualdades se tiene:

$u_1+\ldots+u_m+v_{j_1} \quad +\ldots+v_{j_m} \geq r_{1j_1} \quad +\ldots+r_{mj_m}$

Por lo tanto se cumple el Teorema.

Este Teorema corresponde al resultado de Programación Lineal que indica que el valor de la función objetivo del problema dual es siempre mayor o igual que el valor de la función objetivo del problema primal.

Se tiene la siguiente consecuencia: Si se pueden exhibir una asignación y un presupuesto adecuado de tal manera que la distribución total del presupuesto sea igual a la suma de las productividades, entonces éstos últimos son soluciones óptimas de los problemas dual y primal respectivamente.

Es decir, si se tiene $u_1+\ldots+u_m+v_{j_1'} +\ldots+v_{j_m'} =r_{1j_1'} +\ldots+r_{mj_m'}$ para alguna asignación y un presupuesto adecuado, entonces $w=u_1 +\ldots+u_m+v_{j_1'} +\ldots+v_{j_m'}$ es solución óptima del problema dual y $r=r_{1j_1'} +\ldots+r_{mj_m'}$ es solución óptima del problema primal, ya que se está tomando el valor más pequeño que puede tener w y el más grande que puede tener r.

Se mostrará que lo anterior es posible y que se puede lograr resolviendo ciertos problemas de asignación simples asociados. Esto se hace de la siguiente manera:

Se asocia con cada presupuesto adecuado para la matriz $R=(r_{ij})$ un problema de asignación simple usando la siguiente regla:

El individuo i califica para el trabajo j si $u_i+v_j=r_{ij}$, de otro modo no califica.

Eligiendo de esta forma a los individuos que califican, se están tomando las parejas (i,j) para las cuales r_{ij} es lo más grande posible ya que $u_i+v_j \geq r_{ij}$ $i,j,\ldots,m$. Así, se estarán considerando las r_{ij} que pueden hacer crecer más la función objetivo del problema primal.

<u>Teorema 6</u>. Si los m individuos pueden ser asignados a trabajos para los cuales califiquen en el problema de asignación simple asociado con un presupuesto adecuado, entonces la asignación y el presupuesto resuelven el Problema de Asignación General y la suma de las productividades es igual a la distribución total.

Demostración. Como los individuos califican en el problema simple asociado se tiene, para la asignación y el presupuesto adecuado, que:

$$
\begin{array}{l}
u_1 + v_{j_1} = r_{1j_1} \\
\vdots \\
u_1 + v_{j_m} = r_{mj_m}
\end{array}
$$

Sumando ambos lados de las igualdades se tiene: $u_1+\ldots+u_m+v_{j_1}+\ldots+v_{j_m}=r_{1j_1}+\ldots+r_{mj_m}$
De esta forma se está tomando el mínimo valor que puede tener w y el máximo que puede tener s. Además la distribución total (w) es igual a la suma productividades (s).
Por lo tanto se cumple el Teorema.

En este Teorema se tiene el resultado de Programación Lineal que indica que las soluciones óptimas de cualquier problema primal y su dual, si existen, son iguales.

Si no se pueden asignar todos los individuos a trabajos para los cuales califiquen en el problema de asignación simple asociado con un presupuesto adecuado, entonces el presupuesto puede ser mejorado con un procedimiento sencillo.

En primer lugar se debe ver que un presupuesto adecuado debe asignar una cantidad positiva a cada individuo o una cantidad positiva a cada trabajo porque de otra forma podría suceder que $u_i+v_j < r_{ij}$ para algunas i,j.

Lo importante es que se cumplan las restricciones $u_i+v_j \geq r_{ij}$. Entonces se puede asumir, sin perder generalidad, que se le asigna a cada individuo una cantidad $u_i>0$ $i=1,\ldots,m$ y nada a los trabajos, de tal manera que se cumplan las restricciones mencionadas.

Supóngase que el problema de asignación simple asociado al presupuesto, el mayor número de individuos que se pueden asignar a trabajos para los que califiquen es $m'< m$.

Se toma una asignación óptima (para el problema de asignación simple asociado con el presupuesto que se tiene); el número de individuos asignados a trabajos es m' y sean $i=1,\ldots,r$ los individuos esenciales y $j=1,\ldots,s$ los trabajos esenciales. Por el Corolario 1 se sabe que $r+s=m'$.

Entonces la regla para cambiar el presupuesto es:

$u_1'=u_1,\ldots,u_r'=u_r,\quad u_{r+1}'=u_{r+1}-1,\ldots,u_m'=u_m-1$

$v_1'=v_1+1,\ldots,v_s'=v_s+1\quad,\quad v_{s+1}'=v_{s+1},\ldots,v_m'=v_m$

Las u_i' son no negativas porque las u_i eran enteros positivos.

Se deben checar ahora dos cosas:

a) Que el nuevo presupuesto sea adecuado.

b) Que la distribución total haya sido disminuida (recuérdese que se quiere minimizar w).

a) Que el presupuesto sea adecuado se checa viendo si se cumplen las desigualdades $u_i'+v_j' \geq r_{ij}$ $i,j=1,\ldots,m$. Se sabe que $u_i+v_j \geq r_{ij}$.

Se tienen cuatro casos:

i) $u_i'+v_j'$ $\quad i=1,\ldots,r;\quad j=1,\ldots,s$

$\quad u_i'+v_j' = u_i+(v_j+1) > u_i+v_j \geq r_{ij}$

ii) $u_i'+v_j'$ $\quad i=1,\ldots,r;\quad j=s+1,\ldots,m$

$\quad u_i'+v_j' = u_i+v_j \geq r_{ij}$

iii) $u'_i + v'_j \quad i=r+1,\ldots,m; \quad j=1,\ldots,s$

$u'_i + v'_j = (u_i-1) + (v_j+1) = u_i + v_j \geq r_{ij}$

iv) $u'_i + v'_j \quad i=r+1,\ldots,m; \quad j=s+1,\ldots,n$

En este caso se podrían tener problemas con la desigualdad, pero se tiene que ambos, el individuo y el trabajo no son esenciales, entonces por el Teorema 1, que dice que para cualquier asignación que es completa después de cada transferencia posible (la asignación que se tiene es así) si un individuo califica para un trabajo, el individuo o el trabajo es esencial y posiblemente ambos, se tiene que el individuo i no califica para el trabajo j (en el problema de asignación simple asociado) y por lo tanto se tiene la desigualdad estricta (por la forma en que se construyó el problema de asignación simple asociado): $u_i + v_j > r_{ij}$.

Se sabe que u_i, v_j, u'_i y v'_j son enteros no negativos entonces:

$$u'_i + v'_j = (u_i-1) + v_j = (u_i + v_j) - 1 \geq r_{ij}.$$

Entonces la desigualdad se cumple en los cuatro casos y por lo anto el presupuesto es adecuado.

b) Disminución de la distribución total.

A cada u_i $i=r+1,\ldots,m$ se le disminuye en una unidad y a cada v_j $j=1,\ldots,s$ se le incrementa en una unidad. Entonces la distribución total ha sido disminuida en $m-r$ e incrementada en s (o disminuida en $-s$). Por lo tanto ha sido disminuida en $m-r-s=m-(r+s)=m-m'>0$ porque $m>m'$

Todo lo anterior se puede resumir en el siguiente Teorema

<u>Teorema 7</u>. Si a lo más $m'<m$ individuos pueden ser asignados a trabajos para los cuales califiquen en el problema de asignación simple asociado con un presupuesto adecuado, entonces la distribución total puede ser disminuida en una cantidad entera positiva.

Este Teorema ya ha sido probado con todo lo anterior.

Si se comienza con cualquier presupuesto adecuado, por - ejemplo el que asigna a cada individuo su productividad más al ta y nada a los trabajos, se tienen dos casos:

a) Que sea óptimo y se cumple el Teorema 6.

b) Que no sea óptimo, pudiéndose mejorar, y se cumple el Teorema 7.

Como el presupuesto se puede mejorar un número finito de veces, ya que la distribución total está acotada por abajo por cero y cada vez se disminuye en una cantidad entera positiva, se tiene el siguiente <u>resultado para el Problema de Asignación General</u>:

La suma más grande posible de productividades para cualquier asignación es igual a la distribución total más pequeña de cualquier presupuesto adecuado y se puede encontrar resolviendo una secuencia finita de problemas de asignación simples asociados.

II.1.4 ALGORITMO.

En esta sección se presentará el algoritmo para resolver el Problema de Asignación (planteado en la sección II.1.1), - con base en las secciones anteriores.

<u>Definición</u>. <u>Un conjunto de enteros no negativos $\{u_1,\dots,u_n,$ $v_1,\dots,v_n\}$ que satisfacen $u_i+v_j \geq r_{ij}$ $i,j=1,\dots,n$ es llamado una cubierta (presupuesto adecuado) para la matriz de productividades R</u>.

Las posiciones (i,j) para las cuales $u_i+v_j=r_{ij}$ son marcadas con un 1 en la matriz de calificación Q del problema de - asignación simple asociado y las posiciones para las cuales $u_i+v_j>r_{ij}$ tendrán cero, es decir, si $u_i+v_j=r_{ij}$ entonces i califi ca para j de otra forma no califica (en el problema de asignación simple asociado).

Definición. <u>Un conjunto de marcas (posiciones marcadas con 1) es independiente si no hay dos marcas del conjunto en el mismo renglón ó en la misma columna.</u>

Resultado fundamental de König: Si el número más grande de marcas independientes que puede ser escogido es m' entonces m' líneas (renglones o columnas) pueden ser escogidas de tal manera que contengan todas las posiciones marcadas (independientes).

Esto sucede por la forma en que se definieron las marcas independientes, cada marca independiente pertenece a un renglón y a una columna al mismo tiempo en los cuales no hay otra marca; entonces por cada marca independiente se puede tomar el renglón o la columna que la contiene y así se tendrán m' líneas donde estén todas las marcas independientes.

En la sección II.12, en el Corolario 1, sucede lo mismo, pero en vez de marcas independientes son trabajos asignados a
individuos y el número de líneas corresponde al número de
individuos y trabajos esenciales (recuérdese que si i está asignado a j e i es esencial, j no lo es y si j es esencial entonces i no lo es).

El algoritmo se basa en estas observaciones de la manera siguiente:

Se da una cubierta para R y se encuentra el número más grande posible de marcas independientes. Si este número es n las posiciones (i,j) marcadas independientes forman la asignación óptima (por Teorema 6).

Si son menos de n marcas, entonces hay un conjunto de menos de n líneas (renglones o columnas) que contiene las posiciones (i,j) marcadas independientes y es utilizado para mejorar la cubierta como se vio en la sección anterior; en este caso funciona el Teorema 7.

Construcción de una cubierta y un conjunto de marcas independientes iniciales.

La construcción de la cubierta y el conjunto de marcas independientes iniciales se realiza de manera que convenga a los objetivos del problema, es decir, minimizar w y maximizar m.

Sea $a_i = \max_{1 \le j \le n} \{r_{ij}\}$ para $i=1,\ldots,n$, es decir, a_i es la productividad más alta del individuo i.

Sea $b_j = \max_{1 \le i \le n} \{r_{ij}\}$ para $j=1,\ldots,n$, es decir, b_j es la productividad del individuo que produce más en el trabajo j.

Sean $a = \sum_{i=1}^{n} a_i$ y $b = \sum_{j=1}^{n} b_j$

Si $a \le b$ se definen $\begin{cases} u_i = a_i & i=1,\ldots,n \\ v_j = 0 & j=1,\ldots,n \end{cases}$

De esta manera, al asignar a cada individuo una cantidad igual a su produtividad más alta y cero a los trabajos, se está asegurando que se cumplan las desigualdades $u_i + v_j \ge r_{ij}$ y sólo se tendrá la igualdad para las j^{s} tales que $a_i = r_{ij}$, $i=1,\ldots,n$.

Por otra parte, al tomar $u_i = a_i$ y $v_j = 0$ $i,j=1,\ldots,n$ cuando $a \le b$ se está teniendo en cuenta que la suma de productividades más altas, es más pequeña tomándola por individuos que por trabajos y así se asegura que $\sum_{i=1}^{n} u_i + \sum_{j=1}^{n} v_j$ sea lo más pequeña posible en este primer paso.

Si $a > b$ se definen $\begin{cases} u_i = 0 & i=1,\ldots,n \\ v_j = b_j & j=1,\ldots,n \end{cases}$

Aquí se está asignando a cada trabajo la productividad del individuo que produce más en él y cero a los individuos. Así se asegura que se cumplan las desigualdades $u_i + v_j \ge r_{ij}$ y se tendrá la igualdad para las i^{s} tales que $b_j = r_{ij}$ $j=1,\ldots,n$.

En forma análoga al caso anterior, se trata de que $\sum_{i=1}^{n} u_i + \sum_{j=1}^{n} v_j$ sea lo más pequeña posible en este paso, ya que ahora la suma de productividades más altas es más pequeña por trabajos que por individuos.

En este estado inicial y en todos los que sigan, se asocia a la matriz R y a la cubierta $\{u_i, v_j\}$ una matriz de calificación $Q=(q_{ij})$ donde

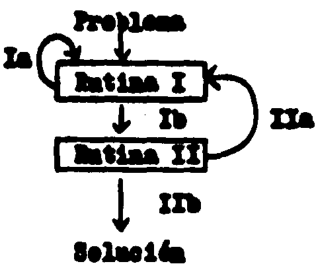
$$q_{ij}=\begin{cases}1 & \text{si } u_i+v_j=r_{ij}\\ 0 & \text{de otro modo}\end{cases}$$

es decir, se va a tener que un individuo i califica para un trabajo j en el problema de asignación simple asociado si $u_i+v_j=r_{ij}$ ya que son los individuos y trabajos que convienen para hacer pequeña a w.

También en cada estado se necesitará un conjunto de 1's independientes (marcas independientes) de la matriz Q y se distinguirán con asteriscos.

Para obtener el conjunto de 1's independientes en el primer estado, cuando $a\leq b$ los renglones de Q se examinan en orden y el primer 1 en cada renglón sin un 1^* en su columna se cambia por un 1^*. Cuando $a>b$ se hace lo mismo pero invirtiendo el papel de renglones y columnas.

El algoritmo tiene dos rutinas básicas a las que se llama Rutina I y Rutina II, El orden de repetición de estas rutinas se presenta en el siguiente diagrama[1].



La Rutina I corresponde a la fase primal del algoritmo y la Rutina II a la fase dual.

Cada vez que ocurre Ia se incrementa en uno el número de 1^*'s en Q, es decir, se incrementa el número de individuos asignados a trabajos para los que califican.

(1)[8; p.91]

Cada vez que ocurre IIa disminuye el valor de w en al menos - una unidad.

Como el número de individuos que se pueden asignar a trabajos para los que califiquen está acotado por arriba por n y el valor de w está acotado por abajo por cero, está garantizada la terminación del algoritmo(2).

<u>Rutina I</u>.

Esta rutina trabaja con una matriz de calificación fija Q asociada a una cubierta $\{u_i, v_j\}$ fija. Se incluye también un - cierto conjunto de 1's marcados con asteriscos en Q.

Una columna es <u>elegible</u> si no contiene ningún 1^*.

En esta rutina se hace lo siguiente: Dada la asignación - que constituyen los 1's marcados con asteriscos, se enumeran - todas las posibles transferencias.

Una transferencia comienza a partir de una columna elegible que debe contener al menos un 1.

Si no hay columnas elegibles que tengan un 1 no es posible hacer transferencias y la asignación es completa. En este caso se sigue la alternativa Ib y se pasa a la Rutina II.

Si se encuentra una transferencia, tal que al realizarla queda libre una columna en donde hay un 1 no marcado con asterisco, se tiene la alternativa Ia y se aumenta en uno el número de 1^*'s. Se vuelve a comenzar con la enumeración de transferencias posibles.

Una transferencia como la mencionada es de la forma:

$$\begin{array}{ccccccccc} & i_1 & & i_2 \cdots & & i_{k-2} & & i_{k-1} & i_k \\ j_0 \swarrow & & j_1 \swarrow & & j_2 \cdots \swarrow & & j_{k-2} \swarrow & j_{k-1} & \end{array}$$

j_0 es una columna elegible que contiene un 1. Antes i_ℓ estaba asignado a j_ℓ $\ell=1,\ldots,k-1$. Al hacer la transferencia se asigna i_ℓ a $j_{\ell-1}$ $\ell=1,\ldots,k-1$; de esta forma se libera la columna j_{k-1} que tiene un 1 no marcado, entonces se asigna i_k a j_{k-1} y se aumenta un 1^*.

(2)[7; p.91]

Si se tiene una transferencia que no se puede realizar completa, y da lugar a una asignación completa, el último renglón involucrado será esencial y se continúa enumerando las transferencias.

Una transferencia como la descrita es así:

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & i_1 & & i_2 & \cdots & i_\ell & & i_{\ell+1} & & \cdots i_{k-2} & & i_{k-1} & i_k \\
\swarrow & & \swarrow & & \swarrow & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
j_0 & & j_1 & & j_2 \cdots & j_\ell & & j_{\ell+1} & & \cdots j_{k-2} & & j_{k-1} &
\end{array}$$

Un cierto $i_{\ell+1}$ puede no calificar para j_ℓ y entonces se deben quedar asignados como estaban de $i_{\ell+1}$ en adelante quedando una asignación completa. El último renglón involucrado es el i_ℓ y es esencial porque está asignado a $j_{\ell-1}$ y califica para j_ℓ que no está asignado.

Ejemplo:
$$\begin{bmatrix} 1 & 1^* & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1^* & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1^* \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

En esta matriz una posible transferencia es cambiar al individuo 1 del trabajo 2 al trabajo 1, sin embargo, nadie más califica para el trabajo 2 y la transferencia no se puede continuar quedando una asignación completa.

En este caso $j_0=1$ $\quad j_1=2$ $\quad j_2=3$ $\quad j_3=4$

$i_1=1$ $\quad i_2=2$ $\quad i_3=3$ $\quad i_4=4$

Se tiene:
$$\begin{array}{ccccc}
 & 1 & 2 & 3 & 4 \\
\swarrow & & \downarrow & \downarrow & \\
1 & 2 & 3 & 4 &
\end{array}$$

La asignación completa es:
$$\begin{bmatrix} 1^* & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1^* & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1^* \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

El último renglón involucrado en la transferencia es el 1 y es esencial porque se puede cambiar al trabajo 2 no asignado.

Si se completa la enumeración de las transferencias sin que se encuentre una que permita asignar otro 1, es decir, sin que se de la alternativa Ia, entonces se tiene que la asignación es completa después de cada transferencia y se tiene la alternativa Ib.

La salida de la Rutina I en la alternativa Ib incluye una asignación óptima para Q y un conjunto de renglones esenciales.

Se tiene también, que cada 1 sin asignar está en un renglón esencial o en la columna de un 1^* que esté en un renglón no esencial (esto sucede por el Teorema 1).

<u>Rutina II</u>.

En esta rutina la entrada consiste en una cubierta $\{u_i, v_j\}$ y un conjunto de renglones y columnas esenciales.

<u>Definición</u>. <u>Una columna es esencial si contiene un 1^* en un renglón no esencial</u>.

Esta definición es la misma que se dio para trabajo esencial.

Procedimiento de la rutina:

Primero se calcula d que es el mínimo de los $u_i+v_j-r_{ij}$ sobre todos los renglones i y columnas j no esenciales, es decir $d=\min\limits_{i,j \text{ no esenciales}} \{ u_i+v_j-r_{ij}\}$

Si no existen (i,j) que cumplan lo anterior (que i y j sean no esenciales), entonces el conjunto de 1^*'s que se tienen en Q es la asignación óptima para el Problema de Asignación General, (Ver Teorema 6). Se tiene la alternativa IIb.

De otro modo, se sabe que $d>0$ porque para renglones y columnas no esenciales se tiene la desigualdad estricta $u_i+v_j>r_{ij}$ (recuérdese que en la matriz Q para las posiciones (i,j) con $u_i+v_j>r_{ij}$ no se coloca un 1, y obviamente no van a tener un 1^* por lo que no puede ser que i o j sean esenciales).

Cambio de variables duales:

Existen dos casos:

Caso 1. Para todos los renglones no esenciale $i, u_i > 0$.
Entonces se calcula n que es el mínimo entre d y u_i sobre todos los renglones no esenciales i.

Entonces:

$u_i \to u_i - n$ para todos los renglones i no esenciales
$v_j \to v_j + n$ para todas las columnas j esenciales
$u_i \to u_i$ para todos los renglones i esenciales
$v_j \to v_j$ para todas las columnas j no esenciales

Caso 2. Para algún renglón no esencial $i, u_i = 0$.
Entonces se calcula n que es el mínimo entre d y v_j sobre todas las columnas no esenciales j.

Entonces:

$u_i \to u_i + n$ para todos los renglones i esenciales
$v_j \to v_j - n$ para todas las columnas j no esenciales
$u_i \to u_i$ para todos los renglones i no esenciales
$v_j \to v_j$ para todas las columnas j esenciales

Ahora, se verificará para ambos casos lo siguiente:

i) Que u_i y v_j sigan siendo no negativas $i,j=1,\ldots,n$
ii) Que $\{u_i, v_j\}$ siga siendo cubierta (presupuesto adecuado), es decir, que se sigan cumpliendo las desigualdades $u_i + v_j \geq r_{ij}$ - $i,j=1,\ldots,n$.
iii) Que la distribución total haya disminuido en una cantidad entera positiva (que el valor de $w = \sum_{i=1} u_i + \sum_{j=1} v_j$ haya disminuido).

Para el Caso 1:

i) Se tiene que $u_i > 0$ para toda i no esencial. Se sabe también que $d > 0$. Entonces $n > 0$. Además $u_i, v_j \geq 0$ $i,j=1,\ldots,n$.

Para los renglones i no esenciales $u_i \to u_i - n$. Entonces $u_i - n \geq 0$ por la forma en que se obtuvo n.

Para las columnas j esenciales $v_j \to v_j + n$. Se sabe que todas las variables duales anteriores son no negativas y como $n > 0$, entonces $v_j+n>0$.

Para los renglones i esenciales $u_i \to u_i \geq 0$ porque las variables duales anteriores son no negativas.

Para las columnas j no esenciales $v_j \to v_j \geq 0$ porque las variables duales anteriores son no negativas.

Por lo tanto u_i y v_j $i,j=1,\dots,m$ siguen siendo no negativas.

ii) a) Para i no esencial y j no esencial

$u_i+v_j \to (u_i-n)+v_j=u_i+v_j-n$

-Supóngase que $n=d=\min\limits_{\substack{i,j \text{ no} \\ \text{esenciales}}} \{u_i+v_j-r_{ij}\}$

$u_i+v_j-d \geq u_i+v_j-(u_i+v_j-r_{ij})=u_i+v_j-u_i-v_j+r_{ij}=r_{ij}$

entonces $u_i+v_j-d=u_i+v_j-n\geq r$

-Supóngase que $n=\bar{u}_i=\min\limits_{\substack{i \text{ no esen-} \\ \text{ciales}}} \{u_i,d\} < d$

y d en particular es menor que $u_i+v_j-r_{ij}$

Entonces: $u_i+v_j-\bar{u}_i \geq u_i+v_j-(u_i+v_j-r_{ij})=r_{ij}$

entonces $u_i+v_j-\bar{u}_i=u_i+v_j-n\geq r_{ij}$

Por lo tanto $u_i+v_j-n\geq r_{ij}$.

b) Para i no esencial y j esencial

$u_i+v_j \to (u_i-n)+(v_j+n)=u_i+v_j \geq r_{ij}$

c) Para i esencial y j no esencial

$u_i+v_j \to u_i+v_j \geq r_{ij}$

d) Para i esencial y j esencial

$u_i+v_j \to u_i+(v_j+n)=u_i+v_j+n> u_i+v_j \geq r_{ij}$

Por lo tanto $u_i+v_j \geq r_{ij}$ $i,j=1,\dots,m$ y así $\{u_i,v_j\}$ sigue siendo cubierta.

iii) Supóngase que el número de individuos esenciales (renglones esenciales) es r y el número de columnas esenciales es s y $r+s=m'<m$ (Corolario 1); m'=número de individuos asignados a trabajos.

Entonces w ha sido disminuida en $n(m-r)$ y aumentada en $n(s)$. En total ha sido disminuida en $n(m-r)-n(s)=nm-nr-ns=n(m-(r+s))=n(m-m')$. Se tiene que $n(m-m')>0$ porque $n>0$ y $m>m'$. Por lo tanto w ha sido disminuida en una cantidad entera positiva.

Para el caso 2:

i) Se sabe que $d>0$ y $u_i, v_j \geq 0$ $i,j=1,\ldots,n$. Entonces $n \geq 0$.

Para los renglones i esenciales $u_i \to u_i + n \geq 0$

Para las columnas j no esenciales $v_j \to v_j - n \geq 0$ por la forma en que se obtuvo n.

Para los renglones i no esenciales $u_i \to u_i \geq 0$

Para las columnas j esenciales $v_j \to v_j \geq 0$

Por lo tanto u_i, v_j $i,j=1,\ldots,n$ siguen siendo no negativas.

ii) a) Para i no esencial y j no esencial

$u_i+v_j \to u_i+(v_j-n)=u_i+v_j-n$

-Supóngase que $n=d=\min\limits_{\substack{i,j \text{ no} \\ \text{esenciales}}} \{u_i+v_j-r_{ij}\}$

$u_i+v_j-d \geq u_i+v_j-(u_i+v_j-r_{ij})=u_i+v_j-u_i-v_j+r_{ij}=r_{ij}$

entonces $u_i+v_j-d=u_i+v_j-n \geq r_{ij}$

-Supóngase que $n=\bar{v}_j=\min\limits_{\substack{j \text{ no} \\ \text{esenciales}}} \{v_j, d\} < d$

y en particular d es menor que $u_i+v_j-r_{ij}$

$u_i+v_j-\bar{v}_j \geq u_i+v_j-(u_i+v_j)-r_{ij}=r_{ij}$

entonces $u_i+v_j-\bar{v}_j=u_i+v_j-n \geq r_{ij}$

Por lo tanto $u_i+v_j-n \geq r_{ij}$

b) Para i no esencial y j esencial

$u_i+v_j \to u_i+v_j \geq r_{ij}$

c) Para i esencial y j no esencial

$u_i+v_j \to (u_i+n)+(v_j-n)=u_i+v_j \geq r_{ij}$

d) Para i esencial y j esencial

$u_i+v_j \to (u_i+n)+v_j=u_i+v_j+n > u_i+v_j \geq r_{ij}$.

Por lo tanto $u_i+v_j \geq r_{ij}$ $i,j=1,\ldots,n$ y así $\{u_i, v_j\}$ sigue siendo cubierta.

iii) Supóngase que el número de renglones esenciales es r y el número de columnas esenciales es s. Además $r+s=m' < n$ (Corolario 1); m' es el número de individuos asignados a trabajos.

Enton ces w ha sido disminuida en $n(m-s)$ y aumentada en $n(r)$. En total ha sido disminuida en: $n(m-s)-n(r)=nm-ns-nr=n(m-(r+s))=n(m-m')$. Se tiene que $n(m-m')>0$ porque $n>0$ y $m>m'$.

Por lo tanto w ha sido disminuida en una cantidad entera positiva.

Así, tanto el Caso 1 como el Caso 2 cumplen con los requerimientos del problema.

Después de cambiar la cubierta se tiene la alternativa IIa y se regresa a la Rutina I.

II.1.5 EJEMPLO.

Se resolverá el siguiente problema de asignación:

$$
(P)\left\{\begin{array}{lll}
\text{Maximizar } z=8x_{11}+7x_{12}+9x_{13}+9x_{14}+5x_{21}+2x_{22}+7x_{23}+8x_{24} & & \\
\qquad 6x_{31}+x_{32}+4x_{33}+9x_{34}+2x_{41}+3x_{42}+2x_{43}+6x_{44} & & \\
\text{s.a.} \quad \sum_{j=1}^{4} x_{ij}=1 & & i=1,\dots,4 \\
\qquad \sum_{i=1}^{4} x_{ij}=1 & & j=1,\dots,4 \\
\qquad x_{ij}\geq 0 & & i,j=1,\dots,4
\end{array}\right.
$$

$$
x_{ij}=\left\{\begin{array}{l}
0 \text{ si } i \text{ no se asigna a } j \\
1 \text{ si } i \text{ se asigna a } j
\end{array}\right.
$$

$$
(D)\left\{\begin{array}{l}
\text{Minimizar } w=\sum_{i=1}^{4} u_i+\sum_{j=1}^{4} v_j \\
\text{s.a.} \\
\qquad u_1+v_1\geq 8 \\
\qquad u_1+v_2\geq 7 \\
\qquad u_1+v_3\geq 9 \\
\qquad u_1+v_4\geq 9 \\
\qquad u_2+v_1\geq 5 \\
\qquad u_2+v_2\geq 2
\end{array}\right.
$$

$$
\left(\begin{array}{ll}
u_2+v_3 & 7 \\
u_2+v_4 & 8 \\
u_3+v_1 & 6 \\
u_3+v_2 & 1 \\
u_3+v_3 & 4 \\
u_3+v_4 & 9 \\
u_4+v_1 & 2 \\
u_4+v_2 & 3 \\
u_4+v_3 & 2 \\
u_4+v_4 & 6 \\
u_i, v_j & \text{sin restricción } i,j=1,\dots,4
\end{array}\right.
$$

La matriz R es:

$$
R=\begin{bmatrix} 8 & 7 & 9 & 9 \\ 5 & 2 & 7 & 8 \\ 6 & 1 & 4 & 9 \\ 2 & 3 & 2 & 6 \end{bmatrix}
$$

Se hace la suma de los máximos de los renglones:

máximos:

$$a_1=\max\{r_{11}, r_{12}, r_{13}, r_{14}\} =\max\{8,7,9,9\} =9$$
$$a_2=\max\{r_{21}, r_{22}, r_{23}, r_{24}\} =\max\{5,2,7,8\} =8$$
$$a_3=\max\{r_{31}, r_{32}, r_{33}, r_{34}\} =\max\{6,1,4,9\} =9$$
$$a_4=\max\{r_{41}, r_{42}, r_{43}, r_{44}\} =\max\{2,3,2,6\} =6$$

$$a=\sum_{i=1}^{4} a_i =9+8+9+6=32$$

Se hace la suma de los máximos de las columnas:

máximos:

$$b_1=\max\{r_{11}, r_{21}, r_{31}, r_{41}\} =\max\{8,5,6,2\} =8$$
$$b_2=\max\{r_{12}, r_{22}, r_{32}, r_{42}\} =\max\{7,2,1,3\} =7$$
$$b_3=\max\{r_{13}, r_{23}, r_{33}, r_{43}\} =\max\{9,7,4,2\} =9$$
$$b_4=\max\{r_{14}, r_{24}, r_{34}, r_{44}\} =\max\{9,8,9,6\} =9$$

$$b=\sum_{j=1}^{4} b_j =8+7+9+9=33$$

Se tiene que 32=a< b=33, entonces:

$u_i=a_i \quad i=1,\dots,4$

$v_j=0 \quad j=1,\dots,4$

$u_1=9 \quad v_1=0$

$u_2=8 \quad v_2=0$

$u_3=9 \quad v_3=0$

$u_4=6 \quad v_4=0$

Estado 1.

Se revisa para cuales (i,j) $u_i+v_j=r_{ij}$ que son los que determinará que individuos califican para que trabajos en el problema de asignación simple asociado y poder así construir la matriz Q.

$u_1+v_1=9>r_{11}$	$u_2+v_1=8>r_{21}$	$u_3+v_1=9>r_{31}$	$u_4+v_1=6>r_{41}$
$u_1+v_2=9>r_{12}$	$u_2+v_2=8>r_{22}$	$u_3+v_2=9>r_{32}$	$u_4+v_2=6>r_{42}$
$u_1+v_3=9=r_{13}$	$u_2+v_3=8>r_{23}$	$u_3+v_3=9>r_{33}$	$u_4+v_3=6>r_{43}$
$u_1+v_4=9=r_{14}$	$u_2+v_4=8=r_{24}$	$u_3=v_4=9=r_{34}$	$u_4+v_4=6=r_{44}$

La matriz Q tendrá un 1 en las posiciones (i,j) para las que $u_i+v_j=r_{ij}$ y cero en las demás; entonces:

$$Q=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Se realiza la asignación marcando en cada renglón el primer 1, pero no en la columna de una asignación previa.

Se marca las asignaciones con asteriscos:

$$Q=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1^* & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1^* \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

No es posible hacer transferencias (la asignación es óptima para esta matriz).

El renglón 1 no es esencial porque no es posible mover al individuo 1 a otro trabajo no asignado.

Lo mismo sucede con el renglón 2.

La columna 3 es esencial porque tiene un 1^{*} en un renglón no esencial (el renglón 1).

La columna 4 es esencial porque tiene un 1^{*} en un renglón no esencial (el renglón 2).

Los renglones 3 y 4 y las columnas 1 y 2 no son esenciales.

Se marcan en R los renglones y columnas esenciales (en este caso las columnas 3 y 4).

$u_i \backslash v_j$	0	0		
9	8	7		
8	5	2		
9	6	1		
6	2	3		

Se tiene el Caso 1 de la Rutina II; para todos los renglones no esenciales i se tiene $u_i > 0$.
Se calcula a el mínimo entre d y u_i para las i no esenciales

$$d = \min_{i,j \text{ no esenciales}} \left\{ u_i + v_j - r_{ij} \right\}$$

$$d = \min \left\{ u_1+v_1-r_{11},\ u_1+v_2-r_{12},\ u_2+v_1-r_{21},\ u_2+v_2-r_{22},\ u_3+v_1-r_{31},\ u_3+v_2-r_{32},\ u_4+v_1-r_{41},\ u_4+v_2-r_{42} \right\} =$$

$$= \min \left\{ 1,2,3,6,3,8,4,3 \right\} = 1$$

$$a = \min \left\{ 1,9,8,9,6 \right\} = 1$$

Se hace: $u_i \rightarrow u_i - a$ para todos los renglones i no esenciales
$v_j \rightarrow v_j + a$ para todas las columnas j esenciales
Las demás variables quedan igual.

Entonces:

$u_1 = 9 \rightarrow 8$ $\quad v_1 = 0 \rightarrow 0$
$u_2 = 8 \rightarrow 7$ $\quad v_2 = 0 \rightarrow 0$
$u_3 = 9 \rightarrow 8$ $\quad v_3 = 0 \rightarrow 1$
$u_4 = 6 \rightarrow 5$ $\quad v_4 = 0 \rightarrow 1$

Estado 2.

Se vuelven a analizar las desigualdades $u_i+v_j \geq r_{ij}$ para cambiar Q.

$u_1+v_1=8=r_{11}$ $\quad$ $u_2+v_1=7>r_{21}$ $\quad$ $u_3+v_1=8>r_{31}$ $\quad$ $u_4+v_1=5>r_{41}$
$u_1+v_2=8>r_{12}$ $\quad$ $u_2+v_2=7>r_{22}$ $\quad$ $u_3+v_2=8>r_{32}$ $\quad$ $u_4+v_2=5>r_{42}$
$u_1+v_3=9=r_{13}$ $\quad$ $u_2+v_3=8>r_{23}$ $\quad$ $u_3+v_3=9>r_{33}$ $\quad$ $u_4+v_3=6>r_{43}$
$u_1+v_4=9=r_{14}$ $\quad$ $u_2+v_4=8=r_{24}$ $\quad$ $u_3+v_4=9=r_{34}$ $\quad$ $u_4+v_4=6=r_{44}$

Entonces:

$$Q=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1^* & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1^* \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Se introduce un nuevo 1 en la posición (1,1) y hay una posible transferencia que se indica con la flecha. Esta transferencia conduce a una asignación completa.

El renglón 1 es esencial ya que se puede mover al individuo 1 del trabajo 3 al trabajo 1 que no está asignado.

La columna 4 es esencial porque tiene un 1^* en un renglón no esencial.

Los demás renglones y columnas no son esenciales.

Se marcan en R las líneas esenciales (renglones y columnas).

$$\begin{array}{c|cccc} u_i \backslash v_j & 0 & 0 & 1 & \\ \hline & \cancel{[illegible]} & \cancel{[illegible]} & \cancel{[illegible]} & \cancel{[illegible]} \\ 7 & 5 & 2 & 7 & \cancel{[illegible]} \\ 8 & 6 & 1 & 4 & \cancel{[illegible]} \\ 5 & 2 & 3 & 2 & \cancel{[illegible]} \end{array}$$

Se tiene el Caso 1 de la Rutina II; para todos los renglones no esenciales i $u_i > 0$.

Se calcula n el mínimo entre d y los u_i para i no esenciales.

$$d=\min_{i,j \text{ no esenciales}} \left\{ u_i+v_j-r_{ij} \right\}$$

$d=\min\Big\{ u_2+v_1-r_{21}, u_2+v_2-r_{22}, u_2+v_3-r_{23}, u_3+v_1-r_{31}, u_3+v_2-r_{32},$
$u_3+v_3-r_{33}, u_4+v_1-r_{41}, u_4+v_2-r_{42}, u_4+v_3-r_{43}\Big\} =$

$=\min\{2,5,1,2,7,5,3,2,4\} =1$

$m=\min\{1,7,8,5\}=1$

Se hace: $u_i \longrightarrow u_i - m$ para todos los renglones i no esenciales

$v_j \longrightarrow v_j + m$ para todas las columnas j esenciales

las demás variables quedan igual

Entonces:

$u_1=8 \longrightarrow 8 \qquad v_1=0 \longrightarrow 0$

$u_2=7 \longrightarrow 6 \qquad v_2=0 \longrightarrow 0$

$u_3=8 \longrightarrow 7 \qquad v_3=1 \longrightarrow 1$

$u_4=5 \longrightarrow 4 \qquad v_4=1 \longrightarrow 2$

Estado 3.

Se analizan las desigualdades $u_i+v_j \geq r_{ij}$ para cambiar Q.

$u_1+v_1=8=r_{11} \quad u_2+v_1=6>r_{21} \quad u_3+v_1=7>r_{31} \quad u_4+v_1=4>r_{41}$

$u_1+v_2=8>r_{12} \quad u_2+v_2=6>r_{22} \quad u_3+v_2=7>r_{32} \quad u_4+v_2=4>r_{42}$

$u_1+v_3=9=r_{13} \quad u_2+v_3=7=r_{23} \quad u_3+v_3=8>r_{33} \quad u_4+v_3=5>r_{43}$

$u_1+v_4=10>r_{14} \quad u_2+v_4=8=r_{24} \quad u_3+v_4=9=r_{34} \quad u_4+v_4=6=r_{44}$

Entonces:

$$Q=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1^{*} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1^{*} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Se agregó un 1 en la posición (2,3) y se eliminó el que había en (1,4).

Hay dos posibles transferencias indicadas con las flechas.

La transferencia $_1\overset{1}{\swarrow}{}_3\overset{2}{\swarrow}{}_4$ conduce a una asignación incomple - ta ya que el trabajo 4 queda sin asignar.

Se asigna entonces el individuo 3 al trabajo 4 (o se puede asignar también el individuo 4 al trabajo 4) y se tiene:

$$Q=\begin{bmatrix} 1^{*} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1^{*} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1^{*} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

El renglón 1 no es esencial ya que no se puede cambiar al individuo 1 a otro trabajo no asignado.

Lo mismo sucede con los renglones 2 y 3.

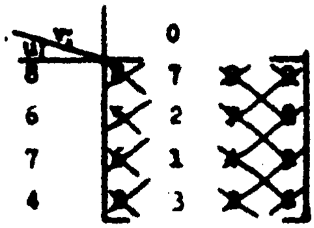
El renglón 4 no es esencial.

La columna 1 es esencial porque tiene un 1 en un renglón no esencial (el renglón 1).

Lo mismo sucede con las columnas 3 y 4.

La columna 2 no es esencial.

Se marcan en R las líneas esenciales (renglones y columnas).



Se tiene el Caso 1 de la Rutina II; para todos los renglones no esenciales i $u_i > 0$

Se calcula n el mínimo entre d y los u_i para i no esenciales.

$$d = \min_{i,j \text{ no esenciales}} \left\{ u_i + v_j - r_{ij} \right\} = \min \left\{ u_1+v_2-r_{12},\ u_2+v_2-r_{22},\ u_3+v_2-r_{32},\ u_4+v_2-r_{42} \right\}$$

$=\min\{1,4,6,1\} = 1$

$n=\min\{1,8,6,7,4\} = 1$

Se hace: $u_i \longrightarrow u_i - n$ para todos los renglones i no esenciales

$v_j \longrightarrow v_j + n$ para todas las columnas j esenciales

las demás variables quedan igual

Entonces:

$u_1 = 8 \longrightarrow 7$ $\qquad v_1 = 0 \longrightarrow 1$

$u_2=6 \longrightarrow 5$ $\qquad v_2=0 \longrightarrow 0$

$u_3=7 \longrightarrow 6$ $\qquad v_3=1 \longrightarrow 2$

$u_4=4 \longrightarrow 3$ $\qquad v_4=2 \longrightarrow 3$

Estado 4.

Se analizan las desigualdades $u_i+v_j \geq r_{ij}$ y se cambia Q.

$u_1+v_1=8=r_{11}$ $\quad u_2+v_1=6>r_{21}$ $\quad u_3+v_1=7>r_{31}$ $\quad u_4+v_1=4>r_{41}$

$u_1+v_2=7=r_{12}$ $\quad u_2+v_2=5>r_{22}$ $\quad u_3+v_2=6>r_{32}$ $\quad u_4+v_2=3=r_{42}$

$u_1+v_3=9=r_{13}$ $\quad u_2+v_3=7=r_{23}$ $\quad u_3+v_3=8>r_{33}$ $\quad u_4+v_3=5>r_{43}$

$u_1+v_4=10>r_{14}$ $\quad u_2+v_4=8=r_{24}$ $\quad u_3+v_4=9=r_{34}$ $\quad u_4+v_4=6=r_{44}$

Entonces:

$$Q=\begin{bmatrix} 1^* & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1^* & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1^* \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Se tiene un nuevo 1 en (1,2) y uno en (4,2).

La asignación que se tiene es incompleta.

Se asigna el trabajo 2 al individuo 4 y queda:

$$Q=\begin{bmatrix} 1^* & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1^* & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1^* \\ 0 & 1^* & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Todas las columnas son esenciales (a ningún individuo se le puede cambiar a otro trabajo <u>no asignado</u>).

Todos los individuos y todos los trabajos están asignados.

No hay transferencia posible.

La asignación $\{(1,1),(2,3),(3,4),(4,2)\}$ es óptima.

Se cumple que $u_i+v_j \geq r_{ij}$ $\quad i,j=1,\ldots,4$

Variables óptimas:

$x_{11}=1$

$x_{23}=1$

$x_{34}=1$

$x_{42}=1$ $\qquad$ las demás $x_{ij}=0$

Variables duales óptimas:

$u_1 = 7 \qquad v_1 = 1$

$u_2 = 5 \qquad v_2 = 0$

$u_3 = 6 \qquad v_3 = 2$

$u_4 = 3 \qquad v_4 = 3$

$$w^4 = \sum_{i=1}^{4} u_i + \sum_{j=1}^{4} v_j = 27 = r_{11} + r_{23} + r_{34} + r_{42} = z^4$$

En la siguiente tabla se muestran las cubiertas (presupuestos adecuados) que se obtuvieron en cada estado.

Estados:

	4	3	2	1	v_1	v_2	v_3	v_4
4					1	0	2	3
3					0	0	1	2
2					0	0	1	1
1					0	0	0	0
u_1	7	8	8	9	8	7	9	9
u_2	5	6	7	8	5	2	7	8
u_3	6	7	8	9	6	1	4	9
u_4	3	4	5	6	2	3	2	6

$= R$ (matriz $[v_1 \ldots v_4] \times [u_1 \ldots u_4]$ entre corchetes)

II.2 PRESENTACION II (PII). DEBIDA A LEON F. MC.GINNIS.

II.2.1 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA.

En esta presentación del algoritmo se utilizará el planteamiento del Problema de Asignación expuesto en la introducción, es decir,

(P) Problema Primal

$$\begin{cases} \text{Minimizar } z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} c_{ij}\, x_{ij} \\ \text{s.a.} \\ \sum_{j=1}^{m} x_{ij} = 1 \quad i=1,\dots,m \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 1 \quad j=1,\dots,m \\ x_{ij} \geq 0 \quad i,j=1,\dots,m \end{cases}$$

donde:

$$x_{ij} = \begin{cases} 0 \text{ si } i \text{ no se asigna a } j \\ 1 \text{ si } i \text{ se asigna a } j \end{cases}$$

c_{ij} =costo por asignar i a j

El problema dual es:

(D) Problema Dual

$$\begin{cases} \text{Maximizar } w = \sum_{i=1}^{m} u_i + \sum_{j=1}^{m} v_j \\ \text{s.a.} \\ u_i + v_j \leq c_{ij} \quad i,j=1,\dots,m \\ u_i, v_j \text{ sin restricción } i,j=1,\dots,m \end{cases}$$

La interpretación económica de este problema es exactamente la misma que se presentó en la introducción.

II.2.2 ALGORITMO.

INICIO

Se selecciona una solución dual-factible inicial de la siguiente manera:

$$u_i = \min_{1\leq j\leq m} \{c_{ij}\} \quad i=1,\dots,m$$

$$v_j = \min_{1\leq i\leq m} \{c_{ij} - u_i\} \quad j=1,\dots,m$$

Para ver que dicha solución es factible en realidad se tiene que verificar que se cumpla $u_i + v_j \leq c_{ij}$ $i,j=1,\dots,m$.

En otras palabras, los costos $\bar{c}_{ij}=c_{ij}-u_i-v_j$, llamados costos reducidos, deben ser no negativos.

A continuación se comprueba esto:

La matriz de costos del problema es :

$$C=\begin{bmatrix} c_{11}\dots c_{1m} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ c_{m1}\dots c_{mm}\end{bmatrix}$$

Cada u_i es igual al mínimo c_{ij} para $j=1,\dots,m$. Si a los elementos de cada renglón i se les resta u_i se obtiene la matriz C', la cual tendrá solamente elementos mayores o iguales que cero, ya que en cada renglón se resta el mínimo de ese renglón.

$$C'=\begin{bmatrix} c_{11}-u_1\dots c_{1m}-u_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ c_{m1}-u_m\dots c_{mm}-u_m\end{bmatrix}$$

En cada renglón i se tendrá al menos un cero, en el lugar (i,j') donde $u_i=c_{ij'}=\min\limits_{1\le j\le m}\{c_{ij}\}$ porque $c_{ij'}-u_i=0$.

En la matriz C', para cada columna j se obtiene v_j que es el mínimo de los $(c_{ij}-u_i)$ para $i=1,\dots,m$.

Si en la matriz C' se resta v_j a los elementos de cada columna j, se obtiene la matriz C'' cuyos elementos también son mayores o iguales a cero ya que en cada columna se resta el mínimo elemento de la misma.

Además se tiene que en cada columna hay al menos un cero que corresponde a la posición (i',j) donde $v_j=c_{i'j}-u_{i'}=\min\limits_{1\le i\le m}\{c_{ij}-u_i\}$ porque $c_{i'j}-u_{i'}-v_j=0$

La matriz C'' es la matriz de costos reducidos $\bar{c}_{ij}=c_{ij}-u_i-v_j$ $i,j=1,\dots,m$.

$$C''=\begin{bmatrix} c_{11}-u_1-v_1\dots c_{1m}-u_1-v_m \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ c_{m1}-u_m-v_1\dots c_{mm}-u_m-v_m\end{bmatrix}$$

Todos los elementos de C'' son mayores o iguales a cero y en cada renglón y en cada columna hay al menos un cero (más adelante se verá la importancia de ésto último).

Los elementos de C'' son los $c_{ij}-u_i-v_j \geq 0$, entonces $c_{ij} \geq u_i + v_j$ $i,j=1,\ldots,m$.

Por lo tanto la solución dual inicial es factible.

FASE PRIMAL.

Se define el conjunto $Q=\left\{(i,j) \mid \bar{c}_{ij}=0\right\}$.

En esta fase del algoritmo se resolverá el siguiente problema primal restringido:

$$
(PR) \left\{
\begin{array}{l}
\text{Min } x_0=\sum_{i=1}^{m} x_{i\alpha}+\sum_{j=1}^{m} x_{\alpha j} \\
\text{s.a.} \\
\qquad \sum_{(i,j)\in Q} x_{ij}+x_{i\alpha}=1 \quad i=1,\ldots,m \\
\qquad \sum_{(i,j)\in Q} x_{ij}+x_{\alpha j}=1 \quad j=1,\ldots,m \\
\qquad\qquad x_{ij},x_{i\alpha},x_{\alpha j} \geq 0
\end{array}
\right.
$$

Las variables $x_{i\alpha}$ y $x_{\alpha j}$ son variables artificiales.

Si la solución óptima de (PR) es $x_0^* =0$, entonces, sin las variables artificiales, se tiene una solución óptima para (P).

Si $x_0^* \neq 0$ se determina la solución dual complementaria, que es la solución para el problema dual de (PR) que se puede obtener usando el Teorema débil de holgura complementaria (Apéndice B) a partir de la solución de (PR), y se pasa a la fase dual.

En seguida se demostrará que <u>si $x_0^* =0$ entonces se tiene una solución óptima para (P)</u>.

Demostración. Para el problema (PR) se eligieron las variables x_{ij} de (P) con los costos reducidos más pequeños.

Si $x_0^* =0$ se tiene entonces que las variables artificiales $x_{i\alpha}$ y $x_{\alpha j}$ $i,j=1,\ldots,m$ son iguales a cero ya que $x_{i\alpha},x_{\alpha j} \geq 0$ y

$x_0 = x_{1\alpha} + \ldots + x_{m\alpha} + x_{\alpha 1} + \ldots + x_{\alpha m}$.

Por otro lado, en (PR) hay en cada restricción al menos una $x_{ij} \in Q$, es decir, para cada columna y para cada renglón hay al menos una x_{ij} tal que $\bar{c}_{ij}=0$ por la forma en que se construyó la solución dual factible inicial y la matriz de costes reducidos, (de ahí la importancia de que en C'' en cada renglón y en cada columna haya al menos un cero).

Entonces, si $x_0^*=0$, para cumplir con las restricciones de (PR) debe suceder que:

$x_{ij}=1$ para alguna j $i=1,\ldots,m$
$x_{ij}=1$ para alguna i $j=1,\ldots,m$ para $(i,j)\in Q$

Es decir, se tienen m parejas asignadas (todos los individuos y todos los trabajos están asignados).

Por lo tanto se tiene una solución óptima para (P) ya que se utilizaron solamente elementos de Q que tienen los costos que aportan lo menos posible a la función objetivo de (P).

En (PR), al minimizar x_0, se está tratando de que el mayor número posible de x_{ij} para $(i,j)\in Q$ tengan valor igual a 1, es decir, que se realicen el mayor número de asignaciones posibles con elementos del conjunto Q. Este problema se puede plantear como uno de flujo máximo de la siguiente forma:

Se construye una red con 2m vértices: 1,2,3,...,m,m+1,...,m+m en la cual existirán los arcos $(i,m+j)$ si $(i,j)\in Q$ $i,j=1,\ldots,m$.

Además se tendrán un vértice origen s y un vértice destino t y los arcos (s,i) $i=1,\ldots,m$ y $(m+j,t)$ $j=1,\ldots,m$.

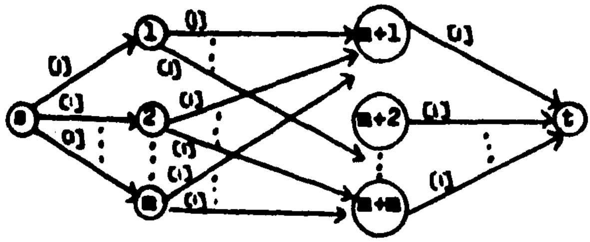
El problema consistirá ahora en encontrar el flujo máximo que se puede llevar del origen s al destino t de la red, cuyos arcos tendrán capacidad igual a 1.

De esta forma, el flujo que podrá llegar a t será igual al número de parejas que se pueden asignar cumpliendo las restricciones de (PR).

Para encontrar este flujo máximo se utilizará el Algoritmo de Ford y Fulkerson (Apéndice A) y al final, los arcos (i, m+j) que tengan flujo igual a 1 corresponderán a las variables x_{ij} que tendrán valor 1.

En la última etiquetación del Algoritmo de Ford y Fulkerson se tendrán los conjuntos: A=conjunto de vértices etiquetados y A^c=conjunto de vértices no etiquetados.

La red descrita es como sigue:



En los arcos se tiene:[1]=capacidad. Del vértice i al vértice m+j hay un arco si $(i,j)\in Q$, es decir, si $\bar{c}_{ij}=0$.

El dual del problema restringido (PR) es:

$$
(DR)\left\{\begin{array}{lll}
\text{Max } d=\sum_{i=1}^{m}\alpha_i+\sum_{j=1}^{m}\beta_j & & \\
\text{s.a.} & & \\
\quad \alpha_i+\beta_j\leq 0 & (i,j)\in Q & \\
\quad \alpha_i \quad \leq 1 & i=1,\ldots,m & \\
\quad \beta_j \quad \leq 1 & j=1,\ldots,m & \\
\quad \alpha_i\,,\,\beta_j \text{ sin restricción } i,j=1,\ldots,m & &
\end{array}\right.
$$

Usando los conjuntos A y A^c de la última etiquetación, una solución óptima para (DR) se puede construir así:

$$
\alpha_i=\begin{cases}1 & i\in A\\ -1 & i\in A^c\end{cases}\qquad\qquad \beta_j=\begin{cases}-1 & m+j\in A\\ 1 & m+j\in A^c\end{cases}
$$

Obsérvese que en la solución óptima para la red de flujo máximo si el individuo i no está asignado, $x_{i\omega}=1$ para cumplir la factibilidad en (PR), y entonces $i \in A$ ($\alpha_i=1$) y si el trabajo j no está asignado, $x_{\alpha j}=1$ para cumplir la factibilidad en (PR), y entonces $j \in A^c$ ($\beta_j=1$). Lo anterior se puede comprobar también por el Teorema de holgura complementaria (Apéndice B).

Se demostrará ahora que en realidad $\alpha_i = \begin{cases} 1 & i \in A \\ -1 & i \in A^c \end{cases}$,

$\beta_j = \begin{cases} -1 & m+j \in A \\ 1 & m+j \in A^c \end{cases}$ es una solución óptima para (DR).

Demostración. Hipótesis: Se tiene una etiquetación óptima. Primero se demostrará que la solución es factible:

$\alpha_i = 1$ cumple $\alpha_i \leq 1$

$\alpha_i = -1$ cumple $\alpha_i \leq 1$

$\beta_j = 1$ cumple $\beta_j \leq 1$

$\beta_j = -1$ cumple $\beta_j \leq 1$

Para $(i,j) \in Q$: Si $\alpha_i=1$ y $\beta_j=-1$ entonces $\alpha_i+\beta_j$ cumple $\alpha_i+\beta_j \leq 0$

Si $\alpha_i=-1$ y $\beta_j=1$ entonces $\alpha_i+\beta_j$ cumple $\alpha_i+\beta_j \leq 0$

Si $\alpha_i=-1$ y $\beta_j=-1$ entonces $\alpha_i+\beta_j$ cumple $\alpha_i+\beta_j \leq 0$

El problema podría estar cuando $\alpha_i=1$ y $\beta_j=1$, es decir, <u>el individuo i está etiquetado y el trabajo j no está etiquetado.</u> Se tienen dos casos:

a) El individuo i no está asignado al trabajo j; entonces el trabajo j puede ser etiquetado desde el individuo i lo que contradice la hipótesis de que la etiquetación es óptima.

b) El individuo i está asignado al trabajo j; entonces el individuo i fue etiquetado al final desde el trabajo j y por lo tanto j debe estar etiquetado, es decir, $\beta_j=-1$ lo cual es una contradicción porque $\beta_j=1$.

Por lo tanto el caso $\alpha_i=1, \beta_j=1$ no puede suceder para $(i,j)\in Q$; así, $\alpha_i=\begin{cases}1 & i\in A\\ -1 & i\in A^c\end{cases}$ $\quad \beta_j=\begin{cases}-1 & m+j\in A\\ 1 & m+j\in A^c\end{cases}$

es una solución factible para (DR).

Ahora se mostrará que es óptima:

La función objetivo de (DR) se puede escribir así: $d^* = \sum_{(i,j)\,t.q.\,x_{ij}=1} (\alpha_i+\beta_j) + \sum_{i\,t.q.\,x_{i\alpha}=1} \alpha_i + \sum_{j\,t.q.\,x_{\alpha j}=1} \beta_j$

Cuando $x_{ij}=1$ (i está asignado a j) significa que ambos, i y m+j están etiquetados o ninguno de los dos está etiquetado, entonces $\sum_{(i,j)\,t.q.\,x_{ij}=1} (\alpha_i+\beta_j)=0$ (esto se probará más adelante).

Las variables $x_{i\alpha}$ i=1,...,m de (PR) corresponden a las restricciones $\alpha_i\leq 1$ i=1,...,m de (DR) y las variables $x_{\alpha j}$ j=1,...,m de (PR) corresponden a las restricciones $\beta_j\leq 1$ j=1,...,m de (DR) (por la definición de problema dual (Ver [1,p.p.233-234])):

Entonces:

Si $x_{i\alpha}=1>0$ entonces $\alpha_i=1$
Si $x_{\alpha j}=1>0$ entonces $\beta_j=1$
} Por el Teorema de holgura complementaria (Apéndice B)

Se tiene entonces:

$$d^* = \sum_{i\,t.q.\,x_{i\alpha}=1} \alpha_i + \sum_{j\,t.q.\,x_{\alpha j}=1} \beta_j = \sum_{i=1}^{m} x_{i\alpha} + \sum_{j=1}^{m} x_{\alpha j} = x_0^*$$

entonces $d^*=x_0^*$ y como x_0^* era óptima para (PR), d^* es el valor óptimo de la función objetivo en (DR) (por el resultado de Programación Lineal - que indica que en caso de existir, las soluciones óptimas de un problema y su dual son iguales).

Por lo tanto

$$\alpha_i = \begin{cases} 1 & i \in A \\ -1 & i \in A^c \end{cases} \qquad \beta_j = \begin{cases} -1 & m+j \in A \\ 1 & m+j \in A^c \end{cases}$$

es una solución óptima para (DR).

Demostración <u>de que cuando $x_{ij}=1$ (i está asignado a j) significa que ambos, i y m+i están etiquetados o ninguno de los dos está etiquetado</u>.

Supóngase que una variable x_{ij} de (PR) en la solución óptima tiene valor 1, es decir, $x_{ij}=1>0$. Por el Teorema débil de holgura complementaria (Apéndice B), se sabe que $\alpha_i+\beta_j=0$ y esto solo puede suceder si $\alpha_i=1$ y $\beta_j=-1$ o $\alpha_i=-1$ y $\beta_j=1$, es decir, cuando $i \in A$ y $m+j \in A$ o cuando $i \in A^c$ y $m+j \in A^c$. (Recuérdese - que las variables x_{ij} de (PR) corresponden a las restricciones $\alpha_i+\beta_j \leq 0$ $(i,j) \in Q$ de (DR) por la forma en que se define el problema - dual).

Al terminar la fase primal se tiene una solución óptima - para (DR). Dicha solución se puede construir una vez que se conocen los conjuntos A y A^c. Se pasa a la fase dual.

FASE DUAL.

En esta fase se modifica la solución dual (u,v) para que se admita al menos una nueva variable en el problemaprimal — restringido. Después se regresa a la fase primal.

Lo anterior se realiza de la siguiente manera:

Se calcula:

$$\Theta=\bar{c}_{rn}/(\alpha_r+\beta_n)=\min_{(i,j)\notin Q}\left\{\bar{c}_{ij}/(\alpha_i+\beta_j) \mid \alpha_i+\beta_j>0\right\}$$

y se modifica la solución dual así:

$$u'_i = u_i+\Theta\alpha_i$$

$$v'_j = v_j+\Theta\beta_j$$

Los nuevos costos reducidos serán:

$$\bar{c}'_{ij} = \bar{c}_{ij} - \bar{c}_{rk} \cdot \frac{1}{2}(\alpha_i + \beta_j)$$

En seguida se demostrará que la nueva solución dual es factible, que los nuevos costos reducidos son como se indicó, que la función objetivo del problema dual (D) aumenta en una cantidad positiva y que al menos una nueva variable se introduce en el problema primal restringido (PR).

Demostración de que la nueva solución dual es factible.

Se sabe que $u_i+v_j \le c_{ij}$ $i,j=1,\ldots,n$. Se quiere demostrar que $u'_i+v'_j \le c_{ij}$ $i,j=1,\ldots,n$. Al calcular θ, todos los números entre los que se calcula, tienen denominador 2 ya que $\alpha_i+\beta_j>0$ sólo se cumple cuando $\alpha_i=1$ y $\beta_j=1$ por lo que entre los que se establece realmente el mínimo es entre los $\bar{c}_{ij}$. Por lo tanto se tiene $\bar{c}_{rk}=\min_{(i,j)\notin Q}\{\bar{c}_{ij}\}$ donde $\bar{c}_{rk}=c_{rk}-u_r-v_k$ y $\bar{c}_{ij}=c_{ij}-u_i-v_j$.

Se tienen 4 casos:

a) $\alpha_i=1, \beta_j=-1$

$u'_i+v'_j = u_i+\theta\alpha_i+v_j+\theta\beta_j = u_i+v_j+\theta(1)+\theta(-1) = u_i+v_j \le c_{ij}$; entonces $u'_i+v'_j \le c_{ij}$

b) $\alpha_i=-1, \beta_j=1$

$u'_i+v'_j = u_i+\theta\alpha_i+v_j+\theta\beta_j = u_i+v_j+\theta(-1)+\theta(1) = u_i+v_j \le c_{ij}$; entonces $u'_i+v'_j \le c_{ij}$

c) $\alpha_i=-1, \beta_j=-1$

$u'_i+v'_j = u_i+\theta\alpha_i+v_j+\theta\beta_j = u_i+v_j+\left(\frac{\bar{c}_{rk}}{\alpha_r+\beta_k}\right)\alpha_i + \left(\frac{\bar{c}_{rk}}{\alpha_r+\beta_k}\right)\beta_j = u_i+v_j+\left(\frac{\bar{c}_{rk}}{\alpha_r+\beta_k}\right)(-1)+\left(\frac{\bar{c}_{rk}}{\alpha_r+\beta_k}\right)(-1) =$
$u_i+v_j-2(\bar{c}_{rk}/(\alpha_r+\beta_k)) = u_i+v_j-2(\bar{c}_{rk}/2) =$

$= u_i+v_j-\bar{c}_{rk} < c_{ij}$ ya que $\bar{c}_{rk}>0$ porque $(r,k)\notin Q$

y por eso $u_r+v_k < c_{rk}$; entonces $u'_i+v'_j \le c_{ij}$

d) $\alpha_i=1$, $\beta_j=1$

i) $(i,j)\in Q$; ya se vio que para estas parejas no puede ocurrir que $\alpha_i=1$ y $\beta_j=1$

ii) $(i,j)\notin Q$

$u'_i+v'_j=u_i+\theta\alpha_i+v_j+\theta\beta_j=u_i+v_j+(\bar{c}_{rk}/(\alpha_r+\beta_k))\alpha_i$
$+(\bar{c}_{rk}/(\alpha_r+\beta_k))\beta_j=u_i+v_j+(\bar{c}_{rk}/(\alpha_r+\beta_k))(1)+$
$+(\bar{c}_{rk}/(\alpha_r+\beta_k))(1)=u_i+v_j+(\bar{c}_{rk}/(\alpha_r+\beta_k))(2)=$
$=u_i+v_j+(\bar{c}_{rk}/2)(2)=u_i+v_j+\bar{c}_{rk}$

Se sabe que $\bar{c}_{rk}=c_{rk}-u_r-v_k\leq\bar{c}_{ij}=c_{ij}-u_i-v_j$ para $(i,j)\notin Q$, entonces:

$u'_i+v'_j=u_i+v_j+\bar{c}_{rk}\leq u_i+v_j+\bar{c}_{ij}=u_i+v_j+c_{ij}-u_i$
$-v_j=c_{ij}$; entonces $u'_i+v'_j\leq c_{ij}$

Por lo tanto la nueva solución dual (u',v') es factible.

Demostración <u>de que los nuevos costos reducidos son $\bar{c}'_{ij}=\bar{c}_{ij}-\bar{c}_{rk}\cdot\frac{1}{2}(\alpha_i+\beta_j)$</u>

$\bar{c}'_{ij}=c_{ij}-u'_i-v'_j=c_{ij}-(u_i+\theta\alpha_i)-(v_j+\theta\beta_j)=$
$=c_{ij}-u_i-v_j-\theta(\alpha_i+\beta_j)=c_{ij}-u_i-v_j-(\bar{c}_{rk}/(\alpha_r+\beta_k))\cdot$
$\cdot(\alpha_i+\beta_j)$
$=c_{ij}-u_i-v_j-(\bar{c}_{rk}/2)(\alpha_i+\beta_j)=\bar{c}_{ij}-\bar{c}_{rk}\cdot\frac{1}{2}(\alpha_i+\beta_j)$

Por lo tanto $\bar{c}'_{ij}=\bar{c}_{ij}-\bar{c}_{rk}\cdot\frac{1}{2}(\alpha_i+\beta_j)$

Demostración <u>de que la función objetivo del problema dual (D) aumenta en una cantidad positiva</u>.

Se sabe que $w=u_1+u_2+\ldots+u_m+v_1+v_2+\ldots+v_n$
$w'=u'_1+u'_2+\ldots+u'_m+v'_1+v'_2+\ldots+v'_n$
$w'=u_1+\theta\alpha_1+u_2+\theta\alpha_2+\ldots+u_m+\theta\alpha_m+v_1+\theta\beta_1+v_2+\theta\beta_2+\ldots+v_n+\theta\beta_n$
$w'=u_1+u_2+\ldots+u_m+v_1+v_2+\ldots+v_n+\theta(\alpha_1+\ldots+\alpha_m+\beta_1+\ldots$
$+\beta_n)$

Se sabe que $\theta>0$ ya que $\theta=\bar{c}_{rk}/(\alpha_r+\beta_k)$ donde $\alpha_r+\beta_k=2$ y $\bar{c}_{rk}=c_{rk}-u_r-v_k>0$ porque $(r,k)\notin Q$ y $u_r+v_k<c_{rk}$

Además $d^0=\alpha_1+\ldots+\alpha_m+\beta_1+\ldots+\beta_n$ es el óptimo del problema dual (DR) del problema primal restringido (PR) y ya se demostró que $d^* = x_0^*$ donde $x_0^* = x_{1\alpha}^* + \dots + x_{n\alpha}^* + x_{\alpha 1}^* + \dots + x_{\alpha n}^*$ y $x_{i\alpha}^*, x_{\alpha j}^* \geq 0$ $i,j=1,\dots,n$ por lo que $x_0^* \geq 0$. Entonces $w' = u_1 + \dots + u_n + v_1 + \dots + v_n + \theta d^*$ donde $\theta d^* \geq 0$.

Si $\theta d^* = 0$ quiere decir que $x_0^* = 0$ y entonces no sería ya necesaria la fase dual porque en la fase primal ya se tendría el óptimo para (P).
Entonces $\theta d^* > 0$ y por lo tanto, el valor de w aumenta en una cantidad positiva.

Demostración <u>de que al menos una nueva variable se introduce en el problema primal restringido (PR).</u>

Se sabe que para las $(i,j) \notin Q$
$u_i^* + v_j^* = u_i + v_j + \theta\bar{\delta}_{rk} \leq u_i + v_j + \theta\delta_{ij} = u_i + v_j + c_{ij} - u_i - v_j = c_{ij}$
Para las $(i',j') \notin Q$ tales que $\delta_{i'j'} = \bar{\delta}_{rk}$ se tiene, por lo anterior, que $u_{i'}^* + v_{j'}^* = c_{i'j'}$, entonces $\bar{c}_{i'j'}^* = c_{i'j'} - u_{i'}^* - v_{j'}^* = 0$
Así, (i',j') pertenecerá a Q y por lo tanto $x_{i'j'}$ se introducirá al problema primal restringido (PR).

<u>Ahora se demostrará que el algoritmo es finito.</u>

Demostración. Si no es posible encontrar una solución para (PR) de tal manera que $x_0^* = 0$, se repite el proceso de calcular los valores de las variables α_i y β_j de (DR), de cambiar las variables duales y de calcular los nuevos costos reducidos. Es obvio que si todos los costos reducidos se hacen cero, se puede encontrar una solución óptima.

Sean $\bar{c}_{ij}$ $i,j=1,\dots,n$ los costos reducidos en una iteración y $\bar{c}_{ij}^*$ $i,j=1,\dots,n$ los costos reducidos en la siguiente iteración.

Se tiene que los costos reducidos son siempre no negativos y además:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\bar{c}_{ij}-\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\bar{c}'_{ij}=\sum_{\{(i,j)|\alpha_i=1,\beta_j=-1\}}(\bar{c}_{ij}-\bar{c}'_{ij})=\sum_{\{(i,j)|\alpha_i=1,\beta_j=1\}}(\bar{c}_{ij}-\bar{c}'_{ij})+$$

$$+\sum_{\{(i,j)|\alpha_i=-1,\beta_j=-1\}}(\bar{c}_{ij}-\bar{c}'_{ij})+\sum_{\{(i,j)|\alpha_i=-1,\beta_j=1\}}(\bar{c}_{ij}-\bar{c}'_{ij})=$$

$$=\sum_{\{(i,j)|\alpha_i=1,\beta_j=-1\}}(\bar{c}_{ij}-(\bar{c}_{ij}-\bar{c}_{rk}\cdot\tfrac{1}{2}(1-1)))+\sum_{\{(i,j)|\alpha_i=1,\beta_j=1\}}(\bar{c}_{ij}-(\bar{c}_{ij}-\bar{c}_{rk}\cdot\tfrac{1}{2}(1+$$

$$1)))+\sum_{\{(i,j)|\alpha_i=-1,\beta_j=-1\}}(\bar{c}_{ij}-(\bar{c}_{ij}-\bar{c}_{rk}\cdot\tfrac{1}{2}(-1-1)))+$$

$$+\sum_{\{(i,j)|\alpha_i=-1,\beta_j=1\}}(\bar{c}_{ij}-(\bar{c}_{ij}-\bar{c}_{rk}\cdot\tfrac{1}{2}(-1+1)))=$$

$$=\sum_{\{(i,j)|\alpha_i=1,\beta_j=-1\}}0+\sum_{\{(i,j)|\alpha_i=1,\beta_j=1\}}2\bar{c}_{rk}+\sum_{\{(i,j)|\alpha_i=-1,\beta_j=-1\}}-2\bar{c}_{rk}+\sum_{\{(i,j)|\alpha_i=-1,\beta_j=1\}}0$$

$$=\sum_{\{(i,j)|\alpha_i=1,\beta_j=1\}}2\bar{c}_{rk}+\sum_{\{(i,j)|\alpha_i=-1,\beta_j=-1\}}-2\bar{c}_{rk}$$

Ahora bien, si $\alpha_i=1$ entonces $i\in A$ y por lo tanto el arco $(s,i)\notin\mathcal{C}$ =cortadura mínima de la red de flujo máximo, ya que en $\mathcal{C}$ sólo hay elementos de la forma (s,i) o $(m+j,t)$ por la estructura de las redes que se usan en el problema. Si $\beta_j=1$ entonces $m+j\in A^c$ y el arco $(m+j,t)\notin\mathcal{C}$. Si $\alpha_i=-1$ entonces $i\in A^c$ y el arco $(s,i)\in\mathcal{C}$. Si $\beta_j=-1$ entonces $m+j\in A$ y $(m+j,t)\in\mathcal{C}$.

Recuérdese que el número de variables x_{ij} que pueden tener valor 1 es igual al flujo máximo que se obtiene, y por lo tanto, igual al valor de la cortadura mínima.

Defínanse ahora los siguientes conjuntos:

$L=\{\ i\ |\ (s,i)\notin\mathcal{C}\}$. Sea $|L|=\ell$

$F=\{\ j\ |\ (m+j,t)\notin\mathcal{C}\}$. Sea $|F|=f$

$L^c=M-L$ donde $M=\{1,\ldots,m\}$; $|L^c|=m-\ell$

$F^c=M-F$ donde $M=\{1,\ldots,m\}$; $|F^c|=m-f$

Sea $(m-l)+(m-f)=c=$número de elementos de la cortadura mínima ζ =número de variables x_{ij} con valor 1.

Entonces se tiene que:

$$\sum_{\{(i,j)|\alpha_i=1,\beta_j=1\}} 2\bar{\delta}_{rk} + \sum_{\{(i,j)|\alpha_i=-1,\beta_j=-1\}} -2\bar{\delta}_{rk} = \sum_{(L,F)} 2\bar{\delta}_{rk} + \sum_{(L^c,F^c)} -2\bar{\delta}_{rk} =$$
$$= lf2\bar{\delta}_{rk}-(m-l)\cdot(m-f)2\bar{\delta}_{rk}=m(l+f-m)2\bar{\delta}_{rk}$$

Se tiene que $l+f$ es el número de arcos que no están en ζ, así que: $l+f-m=(2m-c)-m=m-c$. ($l+f=2m-c$ porque en ζ solo pueden estar arcos de la forma (s,i) y $(m+j,t)$ y en la red existen $2m$ arcos de este tipo).

En particular $c<m$ (si $c=m$ se tiene el óptimo) y así: $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}(\bar{c}_{ij}-\bar{c}'_{ij})=m(m-c)2\bar{\delta}_{rk}$ es un entero positivo, siempre y cuando los elementos de la matriz de costos original sean enteros.

Como los elementos de la matriz de costos reducidos siempre son no negativos (por la construcción de la matriz) y dado que la suma de dichos elementos se reduce en un entero positivo en cada iteración, el algoritmo se detiene en un número finito de pasos y al terminar se obtiene una solución óptima por cumplirse las condiciones de Kuhn-Tucker (Apéndice C) las cuales indican que si dos soluciones x^* y (u^*,v^*) de (P) y (D) respectivamente, cumplen con las restricciones $\sum_{j=1}^{m} x_{ij}=1$ $i=1,\ldots,m$; $\sum_{i=1}^{m} x_{ij}=1$ $j=1,\ldots,m$; $x_{ij}\geq 0$ $i,j=1,\ldots,m$; $u_i+v_j\leq c_{ij}$ $i,j=1,\ldots,m$; y además satisfacen las condiciones de holgura complementaria dadas por $(c_{ij}-u_i-v_j)x_{ij}=0$ $i,j=1,\ldots,m$; $(\sum_{j=1}^{m} x_{ij}-1)u_i=0$ $i=1,\ldots,m$; $(\sum_{i=1}^{m} x_{ij}-1)v_j=0$ $j=1,\ldots,m$; entonces x^* y (u^*,v^*) son soluciones óptimas para (P) y (D) respectivamente.

Las condiciones de Kuhn-Tucker se cumplen de la siguiente forma:

Las restricciones $\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = 1$ $i=1,\ldots,m$ y $\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 1$ $j=1,\ldots,m$ se satisfacen porque, por lo que se ha visto en la demostración, se llegan a tener todas las variables x_{ij} $i,j=1,\ldots,m$ dentro de (PR) pudiéndose asignar todos los individuos y todos los trabajos de tal manera que a cada individuo le corresponda un solo trabajo y a cada trabajo un solo individuo.

Las restricciones $x_{ij} \geq 0$ $i,j=1,\ldots,m$ se cumplen porque las x_{ij} sólo pueden valer 0 ó 1.

Las restricciones $u_i+v_j \leq c_{ij}$ $i,j=1,\ldots,m$ se satisfacen porque el algoritmo mantiene siempre la factibilidad dual.

Las condiciones $(c_{ij}-u_i-v_j)x_{ij}=0$ $i,j=1,\ldots,m$ se cumplen porque si $x_{ij}=1>0$, i se asignó a j y para que esto suceda el costo reducido $\bar{c}_{ij}$ debe ser cero, pero este costo reducido corresponde a la holgura $c_{ij}-u_i-v_j$. Entonces, si $x_{ij}>0$ se tiene que $c_{ij}-u_i-v_j=0$.

Si $c_{ij}-u_i-v_j>0$, entonces $x_{ij}=0$ porque i no se puede asignar a j si $\bar{c}_{ij}=c_{ij}-u_i-v_j$ no es cero.

También puede suceder que $x_{ij}=0$ y $c_{ij}-u_i-v_j=0$.

Las condiciones $(\sum_{j=1}^{m} x_{ij}-1)u_i=0$ $i=1,\ldots,m$ y $(\sum_{i=1}^{m} x_{ij}-1)v_j=0$ $j=1,\ldots,m$ se satisfacen porque en (P) las holguras son siempre cero ya que en todas las restricciones se debe cumplir la igualdad para satisfacer la factibilidad primal.

II.2.3 EJEMPLO.

Se resolverá el siguiente problema de asignación.

$$
(P)\quad
\begin{cases}
\text{Minimizar } z=7x_{11}+6x_{12}+8x_{13}+8x_{14} \\
\qquad 4x_{21}+x_{22}+6x_{23}+7x_{24} \\
\qquad 5x_{31}+2x_{32}+3x_{33}+8x_{34} \\
\qquad 2x_{41}+4x_{42}+2x_{43}+5x_{44} \\
\text{s.a.} \\
\qquad \sum_{j=1}^{4} x_{ij}=1 \qquad i=1,\dots,4 \\
\qquad \sum_{i=1}^{4} x_{ij}=1 \qquad j=1,\dots,4 \\
\qquad x_{ij}\geq 0 \qquad i,j=1,\dots,4
\end{cases}
$$

Problema dual:

$$
(D)\quad
\begin{cases}
\text{Maximizar } w=\sum_{i=1}^{4} u_i+\sum_{j=1}^{4} v_j \\
\text{s.a.} \\
\qquad u_1+v_1\leq 7 \\
\qquad u_1+v_2\leq 6 \\
\qquad u_1+v_3\leq 8 \\
\qquad u_1+v_4\leq 8 \\
\qquad u_2+v_1\leq 4 \\
\qquad u_2+v_2\leq 1 \\
\qquad u_2+v_3\leq 6 \\
\qquad u_2+v_4\leq 7 \\
\qquad u_3+v_1\leq 5 \\
\qquad u_3+v_2\leq 2 \\
\qquad u_3+v_3\leq 3 \\
\qquad u_3+v_4\leq 8 \\
\qquad u_4+v_1\leq 2 \\
\qquad u_4+v_2\leq 4 \\
\qquad u_4+v_3\leq 2 \\
\qquad u_4+v_4\leq 5 \\
\qquad u_i,v_j \text{ sin restricción } i,j=1,\dots,4
\end{cases}
$$

Inicio. Se construyen la solución dual-factible inicial y la matriz de costos reducidos.

La matriz de costos es:

$$
C=\begin{bmatrix} 7 & 6 & 8 & 8 \\ 4 & 1 & 6 & 7 \\ 5 & 2 & 3 & 8 \\ 2 & 4 & 2 & 5 \end{bmatrix}
\qquad
\begin{array}{l} u_1=6 \\ u_2=1 \\ u_3=2 \\ u_4=2 \end{array}
$$

$$C' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & 5 & 6 \\ 3 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$v_1=0 \quad v_2=0 \quad v_3=0 \quad v_4=2$

Matriz de costos reducidos:

$$C'' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 5 & 4 \\ 3 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \bar{c}_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j$$

Solución dual factible inicial:

$u_1=6 \qquad v_1=0$
$u_2=1 \qquad v_2=0$
$u_3=2 \qquad v_3=0$
$u_4=2 \qquad v_4=2$

Paso primal.

$Q = \{(i,j) \mid \bar{c}_{ij}=0\} = \{(1,2),(1,4),(2,2),(3,2),(4,1),(4,3)\}$

Problema primal restringido:

$$\text{Min } x_0 = \sum_{i=1}^{4} x_{i\alpha} + \sum_{j=1}^{4} x_{\alpha j}$$
$$\text{s.a.}$$

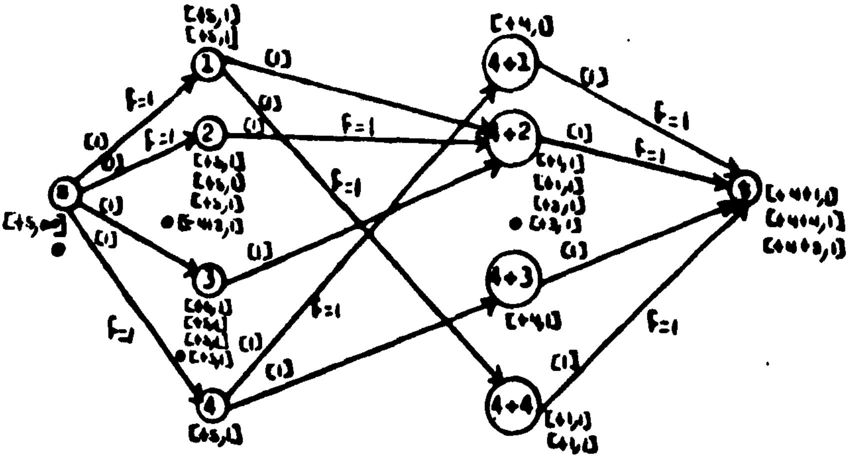
$$(\text{PR}) \quad \begin{array}{lr}
x_{12} + x_{14} + x_{1\alpha} & =1 \\
x_{22} + x_{2\alpha} & =1 \\
x_{32} + x_{3\alpha} & =1 \\
x_{41} + x_{43} + x_{4\alpha} & =1 \\
x_{41} + x_{\alpha 1} & =1 \\
x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{\alpha 2} & =1 \\
x_{43} + x_{\alpha 3} & =1 \\
x_{14} + x_{\alpha 4} & =1
\end{array}$$

$$x_{ij},\, x_{i\alpha},\, x_{\alpha j} \geq 0 \quad i,j=1,\ldots,4$$

Se resuelve (PR) con la red restringida de flujo máximo:

En los arcos se tiene: [1] =capacidad, f=flujo.

Las etiquetas de la última etiquetación se marcarán con un *



La solución es $x_{14}=1$, $x_{22}=1$, $x_{41}=1$, las demás $x_{ij}=0$. Flujo máximo=3.

$A=\{s,2,3,4+2\}$ $\qquad A^c=\{1,4,4+1,4+3,4+4,t\}$ $\qquad m=4$

Cortadura mínima:

$\mathcal{C}=\{(s,1),(s,4),(4+2,t)\}$ Valor de $\mathcal{C}=3$

Se obtienen los valores de las $x_{i\alpha}$ y $x_{\alpha j}$

$x_{14}=1$ entonces $x_{1\alpha}=0$, $x_{\alpha 4}=0$

$x_{22}=1$ entonces $x_{2\alpha}=0$, $x_{\alpha 2}=0$ Cumpliendo la factibilidad en (PR)

$x_{41}=1$ entonces $x_{4\alpha}=0$, $x_{\alpha 1}=0$

$x_{3\alpha}=1$

$x_{\alpha 3}=1$

Se tiene que $x_0^a=x_{3\alpha}+x_{\alpha 3}=2>0$, entonces no se tiene aún una solución óptima para (P), por lo tanto se obtiene la solución para (DR) y se pasa a la fase dual.

El problema dual de (PR) es:

$$\text{Max } d=\alpha_1+\dots+\alpha_4+\beta_1+\dots+\beta_4$$

s.a.

(DR)

$\alpha_1+\beta_2\le 0$	$\alpha_1\le 1$	$\beta_1\le 1$
$\alpha_1+\beta_4\le 0$	$\alpha_2\le 1$	$\beta_2\le 1$
$\alpha_2+\beta_2\le 0$	$\alpha_3\le 1$	$\beta_3\le 1$
$\alpha_3+\beta_2\le 0$	$\alpha_4\le 1$	$\beta_4\le 1$

$\alpha_4+\beta_1 \leq 0$

$\alpha_4+\beta_3 \leq 0$

α_i, β_j sin restricción $i,j=1,\ldots,4$

Se obtienen los valores de las α_i y β_j usando

$$\alpha_i = \begin{cases} 1 & i \in A \\ -1 & i \in A^c \end{cases} \qquad \beta_j = \begin{cases} -1 & m+j \in A \\ 1 & m+j \in A^c \end{cases}$$

$\alpha_1=-1 \qquad \beta_1=1$

$\alpha_2=1 \qquad \beta_2=-1 \qquad d^*=-1+1+1-1+1-1+1+1=2=x_0^4$

$\alpha_3=1 \qquad \beta_3=1$

$\alpha_4=-1 \qquad \beta_4=1$

Pase dual.

$\{(i,j) \mid (i,j)\notin Q\} = \{(1,1),(1,3),(2,1),(2,3),(2,4),(3,1),(3,3),(3,4),(4,2),(4,4)\}$

$\alpha_1+\beta_1=0 \qquad \alpha_3+\beta_1=2$

$\alpha_1+\beta_3=0 \qquad \alpha_3+\beta_3=2$

$\alpha_2+\beta_1=2 \qquad \alpha_3+\beta_4=2$

$\alpha_2+\beta_3=2 \qquad \alpha_4+\beta_2=-2$

$\alpha_2+\beta_4=2 \qquad \alpha_4+\beta_4=0$

$\theta = \min_{(i,j)\notin Q}\left\{\bar{c}_{ij}/(\alpha_i+\beta_j) \mid \alpha_i+\beta_j>0\right\} = \min\{(\bar{c}_{21}/2),(\bar{c}_{23}/2),(\bar{c}_{24}/2),$
$(\bar{c}_{31}/2),(\bar{c}_{33}/2),(\bar{c}_{34}/2)\} = \min\left\{\frac{3}{2},\frac{5}{2},\frac{4}{2},\frac{3}{2},\frac{1}{2},\frac{4}{2}\right\} = \frac{1}{2} = \frac{\bar{c}_{33}}{2}$

Se modifica la solución dual:

$u'_1=6-(1/2)=11/2 \qquad v'_1=0+(1/2)=1/2$

$u'_2=1+(1/2)=3/2 \qquad v'_2=0-(1/2)=-1/2$

$u'_3=2+(1/2)=5/2 \qquad v'_3=0+(1/2)=1/2$

$u'_4=2-(1/2)=3/2 \qquad v'_4=2+(1/2)=5/2$

Se calculan los nuevos costos reducidos. Se puede hacer utilizando $\bar{c}'_{ij}=\bar{c}_{ij}-\bar{c}_{rk}\cdot\frac{1}{2}(\alpha_i+\beta_j)$ o $\bar{c}'_{ij}=c_{ij}-u'_i-v'_j$. Se hará utilizando lo primero. Se tiene que $\bar{c}_{rk}=\bar{c}_{33}=1$

$c'_{11}=1-(1/2)0=1$

$c'_{12}=0-(1/2)(-2)=1$

$c'_{13}=2-(1/2)0=2$

$c'_{14}=0-(1/2)0=0$

$c'_{21}=3-(1/2)2=2$

$c'_{22}=0-(1/2)0=0$

$c'_{31}=3-(1/2)2=2$

$c'_{32}=0-(1/2)0=0$

$c'_{33}=1-(1/2)2=0$

$c'_{34}=4-(1/2)2=3$

$c'_{41}=0-(1/2)0=0$

$c'_{42}=2-(1/2)(-2)=3$

$c'_{23}=5-(1/2)2=4$

$c'_{24}=4-(1/2)2=3$

$c'_{43}=0-(1/2)0=0$

$c'_{44}=1-(1/2)0=1$

Se vuelve a la fase primal.

$Q=\{(1,4),(2,2),(3,2),(3,3),(4,1),(4,3)\}$

Problema primal restringido:

$$\text{Min } x_0=\sum_{i=1}^{4} x_{i\alpha}+\sum_{j=1}^{4} x_{\alpha j}$$

s.a.

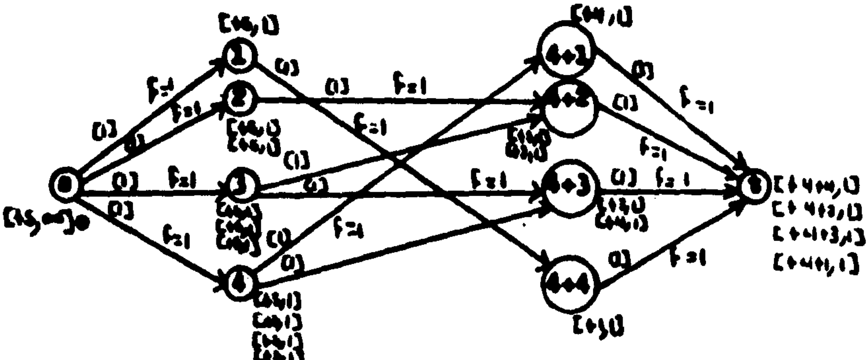
$$(\text{PR})\quad \begin{array}{l}
x_{14}+x_{1\alpha}=1\\
x_{22}+x_{2\alpha}=1\\
x_{32}+x_{33}+x_{3\alpha}=1\\
x_{41}+x_{43}+x_{4\alpha}=1\\
x_{41}+x_{\alpha 1}=1\\
x_{22}+x_{32}+x_{\alpha 2}=1\\
x_{33}+x_{43}+x_{\alpha 3}=1\\
x_{14}+x_{\alpha 4}=1
\end{array}$$

$$x_{ij},\,x_{i\alpha},\,x_{\alpha j}\geq 0 \qquad i,j=1,\ldots,4$$

Se resuelve (PR) con la red restringida de flujo máximo:

En los arcos se tiene:[1]=capacidad, f=flujo.

Las etiquetas de la última etiquetación se marcan con un o



La solución es: $x_{14}=1, x_{22}=1, x_{33}=1, x_{41}=1$, las demás $x_{ij}=0$

Flujo máximo=4

$A=\{s\}$ $\quad A^c=\{1,2,3,4,4+1,4+2,4+3,4+4,t\}$ $\quad m=4$

Cortadura mínima:

$\mathcal{C}=\{(s,1),(s,2),(s,3),(s,4)\}$ Valor de $\mathcal{C}=4$

Se obtienen los valores de las $x_{i\alpha}$ y $x_{\alpha j}$:

$x_{14}=1$ entonces $x_{1\alpha}=0,\ x_{\alpha 4}=0$
$x_{22}=1$ entonces $x_{2\alpha}=0,\ x_{\alpha 2}=0$
$x_{33}=1$ entonces $x_{3\alpha}=0,\ x_{\alpha 3}=0$
$x_{41}=1$ entonces $x_{4\alpha}=0,\ x_{\alpha 1}=0$

Cumpliendo la factibilidad en (PR).

Se tiene que $x_o^* = \sum_{i=1}^{4} x_{i\alpha} + \sum_{j=1}^{4} x_{\alpha j} = 0$, entonces se tiene una solución óptima para (P) y una para (D) que son:

Solución óptima para (P):

$x_{14} = 1$

$x_{22} = 1$

$x_{33} = 1$

$x_{41} = 1$

las demás $x_{ij} = 0$ $\quad z^* = 8+1+3+2 = 14$

Solución óptima para (D):

$u_1 = 11/2 \qquad v_1 = 1/2$

$u_2 = 3/2 \qquad v_2 = -1/2$

$u_3 = 5/2 \qquad v_3 = 1/2$

$u_4 = 3/2 \qquad v_4 = 5/2$

$w^* = (11/2)+(3/2)+(5/2)+(3/2)+(1/2)-(1/2)+(1/2)+(5/2) =$

$= (28/2) = 14$

II.3 PRESENTACION III (PIII).DEBIDA A MOKHTAR S. BAZARAA Y JOHN J. JARVIS.

II.3.1 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA.

En esta presentación del algoritmo, como en la anterior, se utilizará el planteamiento del Problema de Asignación expuesto en la Introducción, es decir,

$$
\text{(P) Problema Primal}\quad
\begin{cases}
\underline{\text{Minimizar}}\ z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} c_{ij}\, x_{ij} \\
\text{s.a.} \\
\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = 1 & i=1,\ldots,m \\
\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 1 & j=1,\ldots,m \\
x_{ij} \geq 0 & i,j=1,\ldots,m
\end{cases}
$$

donde:

$$
x_{ij} = \begin{cases} 0 \text{ si } i \text{ no se asigna a } j \\ 1 \text{ si } i \text{ se asigna a } j \end{cases}
$$

c_{ij} = costo por asignar i a j

El problema dual es

$$
\text{(D) Problema Dual}\quad
\begin{cases}
\text{Maximizar } w = \sum_{i=1}^{m} u_i + \sum_{j=1}^{m} v_j \\
\text{s.a.} \\
u_i + v_j \leq c_{ij} & i,j,\ldots,m \\
u_i, v_j \text{ sin restricción} \\
 & i,j=1,\ldots,m
\end{cases}
$$

La interpretación económica de este problema es la que se presentó en la Introducción.

II.3.2 ALGORITMO.

INICIO.

Se selecciona una solución dual-factible inicial de la siguiente manera:

$$
u_i = \min_{1\leq j\leq m} \{ c_{ij} \} \qquad i=1,\ldots,m
$$

$$
v_j = \min_{1\leq i\leq m} \{ c_{ij} - u_i \} \qquad j=1,\ldots,m
$$

Para comprobar que esta solución es factible en realidad, se tiene que verificar que se cumpla $u_i+v_j \leq c_{ij}$ $i,j=1,\dots,m$, es decir, se tiene que ver que los costos reducidos $\bar{c}_{ij}=c_{ij}-u_i-v_j$ sean no negativos.

A continuación se muestra que en efecto $\bar{c}_{ij}=c_{ij}-u_i-v_j \geq 0$ $i,j=1,\dots,m$.

La matriz de costos del problema es:

$$C=\begin{bmatrix} c_{11} \dots c_{1m} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ c_{m1} \dots c_{mm} \end{bmatrix}$$

Cada u_i es igual al mínimo c_{ij} para $j=1,\dots,m$. Si a los elementos de cada renglón i se les resta u_i se obtiene la matriz C', la cual tendrá solamente elementos no negativos, ya que en cada renglón se resta el mínimo de ese renglón.

$$C'=\begin{bmatrix} c_{11}-u_1 \dots c_{1m}-u_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ c_{m1}-u_m \dots c_{mm}-u_m \end{bmatrix}$$

En cada renglón i se tendrá al menos un cero, en el lugar (i,j') donde $u_i=c_{ij'}=\min\limits_{1\leq j\leq m}\{c_{ij}\}$ porque $c_{ij'}-u_i=0$.

En la matriz C', para cada columna j se obtiene v_j que es el mínimo de los $(c_{ij}-u_i)$ para $i=1,\dots,m$.

Si en la matriz C' se resta v_j a los elementos de cada columna j, se obtiene la matriz C'' cuyos elementos también son no negativos, ya que en cada columna se resta el mínimo elemento de la misma.

Además se tiene que en cada columna j hay al menos un cero que corresponde a la posición (i',j) donde $v_j=c_{i'j}-u_{i'}=\min\limits_{1\leq i\leq m}\{c_{ij}-u_i\}$ porque $c_{i'j}-u_{i'}-v_j=0$.

La matriz C'' es la matriz de costos reducidos $\bar{c}_{ij}=c_{ij}-u_i-v_j$ $i,j=1,\dots,m$.

$$C''=\begin{bmatrix} c_{11}-u_1-v_1 \dots c_{1m}-u_1-v_m \\ \vdots \\ c_{m1}-u_m-v_1 \dots c_{mm}-u_m-v_m \end{bmatrix}$$

Todos los elementos de C'' son mayores o iguales a cero y en cada renglón y en cada columna hay al menos un cero.

Los elementos de C'' son los $\bar{c}_{ij}=c_{ij}-u_i-v_j \geq 0$, entonces - $c_{ij} \geq u_i+v_j$ $i,j=1,\ldots,n$.

Por lo tanto la solución dual inicial es factible.

FASE PRIMAL.

En esta fase se hará lo siguiente sobre la matriz C'' la cual será llamada matriz reducida: Se trazará el menor número posible de líneas sobre renglones y columnas para cubrir los - elementos $\bar{c}_{ij}=0$. Sobre las columnas y renglones con líneas se encontrará el mayor número posible de posiciones (i,j) con - $\bar{c}_{ij}=0$ de tal manera que no haya dos en el mismo renglón o en - la misma columna; a tales posiciones se les llamará celdas cero-independientes.

Las variables x_{ij} que correspondan a las celdas cero-independientes tendrán valor 1 y las demás x_{ij} tendrán valor cero, porque dichas celdas corresponden a las posiciones (i,j) cuyos costos son los que pueden hacer más pequeña a la función objetivo de (P) y entonces conviene asignar a los individuos y trabajos correspondientes a tales posiciones, además, al no haber dos en el mismo renglón o en la misma columna, cumplen con las restricciones de que a cada individuo corresponda un solo trabajo y a cada trabajo un solo individuo. Sin embargo, la solución no es factible si el número de asignaciones que se pueden hacer es menor que n ya que aún quedan individuos y trabajos - sin asignar.

Si el número de celdas cero-independientes es igual a n, quiere decir que se pueden asignar todos los trabajos y todos los individuos, cada pareja correspondiendo a una posición - (i,j) con $\bar{c}_{ij}=0$.

En la matriz C'' habrá en cada renglón una celda cero-independiente porque son n y no puede haber dos en el mismo renglón. Igual sucede con las columnas.

Por lo tanto, si hay m celdas cero-independientes en la matriz de costos reducidos, se tiene una solución óptima para - (P), si no, se pasa a la fase dual.

Antes de describir la fase dual se demostrará que el número máximo de celdas cero-independientes es igual al número mínimo de líneas que se necesitan para cubrir las posiciones (i, j) con $\bar{c}_{ij}=0$ de la matriz reducida.

Se presentará también un método para saber cuántas líneas se necesitan y en qué renglón o columna se deben colocar, así como para identificar las celdas cero-independientes, es decir, las variables x_{ij} que tendrán valor 1.

<u>Teorema A</u>. El número máximo de celdas cero-independientes en una matriz de asignación reducida es igual al mínimo número de líneas que cubren todos - los ceros en la matriz.

Demostración. Sean el siguiente problema (P_1) y su dual (D_1)

$$(P_1)\left\{\begin{array}{ll} \text{Max} \displaystyle\sum_i \sum_j x_{ij} & \\ \text{s.a.} \quad \{x_{ij} \mid \bar{c}_{ij}=0\} & \\ \displaystyle\sum_{\{x_{ij} \mid \bar{c}_{ij}=0\}} x_{ij} \leq 1 & i=1,\ldots,m \\ \displaystyle\sum_{\{x_{ij} \mid \bar{c}_{ij}=0\}} x_{ij} \leq 1 & j=1,\ldots,m \\ x_{ij} \geq 0 & \end{array}\right.$$

$$(D_1)\left\{\begin{array}{l} \text{Min} \displaystyle\sum_{i=1}^{m} a_i + \sum_{j=1}^{m} b_j \\ \text{s.a.} \\ a_i+b_j \geq 1 \text{ para } (i,j) \text{ con } \bar{c}_{ij}=0 \\ a_i+b_j \geq 0 \text{ para } (i,j) \text{ con } \bar{c}_{ij}\neq 0 \\ a_i, b_j \geq 0 \quad i,j=1,\ldots,m \end{array}\right.$$

Las variables a_i corresponden a las líneas que se trazan en los renglones y las b_j a las que se trazan en las columnas; a_i podrá tener valor 0 ó 1, 0 si no se traza una línea en el renglón i y 1 si se traza una línea en el renglón i. En forma análoga ocurre con las b_j.

(P_1) corresponde al problema de maximizar el número de celdas cero-independientes, es decir, el máximo número de posiciones (i,j) con $\bar{c}_{ij}=0$ para las cuales se puede hacer $x_{ij}=1$, esto se tiene en la función objetivo. En las restricciones se garantiza que no haya dos celdas en la misma columna o en el mismo renglón.

En (D_1) se representa el problema de minimizar el número de líneas necesarias para cubrir los ceros de la matriz reducida. En las restricciones se establece que sobre las posiciones con $\bar{c}_{ij}=0$ pase al menos una línea y sobre las que tienen $\bar{c}_{ij}\neq 0$ pasen 0, 1 ó 2 líneas.

(P_1) tiene al menos la solución factible: $x_{ij}=0$ $i,j=1,\ldots,n$ para $\{x_{ij} \mid \bar{c}_{ij}=0\}$; y (D_1) tiene al menos la solución factible dada por: $a_i=1$ $i=1,\ldots,n$, $b_j=0$ $j=1,\ldots,n$.

Por resultados de Programación Lineal se sabe que si un problema y su dual tienen al menos una solución factible cada uno, entonces los dos problemas tienen solución óptima y ambas soluciones son iguales.

En particular esto se cumple para (P_1) y (D_1) y por lo tanto el máximo número de celdas cero-independientes es igual al mínimo número de líneas necesarias para cubrir los ceros de la matriz de costos reducidos.

<u>Método para determinar cuántas líneas se necesitan para cubrir los ceros de la matriz reducida y dónde colocarlas, así como para identificar las variables x_{ij} que tendrán valor 1 (celdas cero-independientes).</u>[3]

Teniendo ya la matriz de costos reducidos se construye una red de flujo máximo de la siguiente manera:

Se tendrán los vértices 1,2,...,m que representarán a los individuos (a los renglones de la matriz) y los vértices m+1, m+2,...,m+m que representarán a los trabajos (a las columnas de la matriz).

Si en la posición (i,j) se tiene $\bar{c}_{ij}=0$ se trazará el arco (i,m+j) que tendrá capacidad 1. Además se agregarán dos vértices, uno origen s y un destino t trazándose arcos (s,i) i=1,...,m y (m+j,t) j=1,...,m. Cada uno de estos arcos tendrá capacidad 1.

En la red así construida se encuentra el flujo máximo de s a t por medio del Algoritmo de Ford y Fulkerson (Apéndice A) y se considera la cortadura mínima $\mathcal{C}=\{(a,b) \mid a\in A \text{ y } b\in A^c\}$ donde A es el conjunto de vértices etiquetados en la última iteración del algoritmo para encontrar el flujo máximo y A^c es el conjunto de vértices no etiquetados (complemento de A).

Por la forma en que se construyó la red, se asegura que los individuos que se asignen sólo tendrán un trabajo y los trabajos sólo tendrán un individuo.

Las x_{ij} que tendrán valor igual a 1 (es decir, i se asigna a j) serán las que correspondan a los arcos (i,m+j) que tengan flujo igual a 1.

Este flujo es el que llega hasta t, por lo que el flujo máximo corresponderá al número máximo de parejas que se podrán asignar, es decir, al número máximo de celdas cero-independientes. (Las celdas cero-independientes corresponden a los arcos

3) [1, pp.487]

$(i,m+j)$ con flujo igual a 1).

Por otra parte, las líneas que se trazan sobre la matriz reducida indican qué trabajos y qué individuos se van a asignar, por ejemplo, si hay una línea sobre el renglón i, esto indica que el individuo i será asignado, y de la misma forma ocurre con las columnas.

En $\mathcal{C}$ se tiene el mínimo número de arcos que se necesitan para separar s de t, interceptando todas las rutas por donde se mandó el flujo.

En estas rutas se encuentran los vértices-individuo y los vértices-trabajo que fueron asignados (por los que atravesó flujo), por lo que en la cortadura mínima se tendrá lo siguiente: Si $(i,m+j)$ tiene flujo igual a 1, $(s,i)\in\mathcal{C}$ o $(m+j,t)\in\mathcal{C}$

Así, se tiene que $|\mathcal{C}|$ =valor de $\mathcal{C}$ (porque los arcos tienen capacidad 1) corresponde al mínimo número de líneas que se necesitan para cubrir los ceros de la matriz reducida.

Estas líneas se eligirán así:

Si $(s,i)\in\mathcal{C}$ se traza una línea sobre el renglón i.
Si $(m+j,t)\in\mathcal{C}$ se traza una línea sobre la columna j.

Así, se vuelve a verificar que el mínimo número de líneas necesarias para cubrir los ceros de la matriz reducida es igual al máximo número de celdas cero-independientes, ya que $|\mathcal{C}|$ = =Valor de $\mathcal{C}$ =Flujo máximo, y además $|\mathcal{C}|$ corresponde al valor óptimo de la función objetivo de (D_1) y el flujo máximo corresponde al valor óptimo de la función objetivo de (P_1).

FASE DUAL.

En esta fase se cambian los valores de las variables duales y se calculan los nuevos costos reducidos.

Supóngase que $k< m$ fue el número de líneas requeridas para cubrir los ceros de la matriz reducida.

Se definen los conjuntos: $S_r=\{i_1, i_2, \ldots, i_p\}$ el conjunto de renglones no cubiertos y $S_c=\{j_1, j_2, \ldots, j_q\}$ el conjun to de columnas no cubiertas.

Se definen también $\bar{S}_r = M - S_r$ y $\bar{S}_c = M - S_c$ donde $M = \{1, 2, \ldots, m\}$

Sean $p = |S_r|$ y $q = |S_c|$. Entonces $k = (m-p) + (m-q)$.

Sea c_0 el mínimo de los $\bar{c}_{ij}$ no cubiertos

$$c_0 = \min_{\substack{i \in S_r \\ j \in S_c}} \{\bar{c}_{ij}\} > 0$$

La nueva solución dual será:

$\bar{u}_i = u_i + c_0 \qquad i \in S_r$

$\bar{u}_i = u_i \qquad i \in \bar{S}_r$

$\bar{v}_j = v_j \qquad j \in S_c$

$\bar{v}_j = v_j - c_0 \qquad j \in \bar{S}_c$

Se demostrará ahora que esta solución es factible y que la función objetivo del problema dual (D) aumenta su valor en una cantidad positiva.

Demostración <u>de que la nueva solución dual es factible</u>.

Se tienen cuatro casos:

Caso 1. $i \in S_r$, $j \in S_c$

$\bar{u}_i + \bar{v}_j = u_i + c_0 + v_j = u_i + v_j + c_0 \leq u_i + v_j + \bar{c}_{ij} =$
$u_i + v_j + c_{ij} - u_i - v_j = c_{ij}$

Entonces $\bar{u}_i + \bar{v}_j \leq c_{ij}$

Caso 2. $i \in S_r$, $j \in \bar{S}_c$

$\bar{u}_i + \bar{v}_j = u_i + c_0 + v_j - c_0 = u_i + v_j \leq c_{ij}$

Entonces $\bar{u}_i + \bar{v}_j \leq c_{ij}$

Caso 3. $i \in \bar{S}_r$, $j \in S_c$

$\bar{u}_i + \bar{v}_j = u_i + v_j \leq c_{ij}$

Entonces $\bar{u}_i + \bar{v}_j \leq c_{ij}$

Caso 4. $i \in \bar{S}_r$, $j \in \bar{S}_c$

$\bar{u}_i + \bar{v}_j = u_i + v_j - c_0 < c_{ij}$ ya que $u_i + v_j \leq c_{ij}$ y $c_0 > 0$

Entonces $\bar{u}_i + \bar{v}_j \leq c_{ij}$.

Por lo tanto la nueva solución dual es factible.

Demostración de que $w=\sum_{i=1}^{m} u_i+\sum_{j=1}^{m} v_j$ aumente su valor en una cantidad positiva.

$w=u_1+u_2+\ldots+u_m+v_1+v_2+\ldots+v_m$

$w'=\bar{u}_1+\bar{u}_2+\ldots+\bar{u}_m+\bar{v}_1+\bar{v}_2+\ldots+\bar{v}_m$

$w'=(u_{i_1}+c_o)+(u_{i_2}+c_o)+\ldots+(u_{i_p}+c_o)+u_{i_{p+1}}+\ldots+$
$+u_{i_m}+v_{j_1}+v_{j_2}+\ldots+v_{j_q}+(v_{j_{q+1}}-c_o)+(v_{j_{q+2}}-c_o)+$
$+\ldots+(v_{j_m}-c_o)$

w es aumentada en pc_o y disminuida en $(m-q)c_o$

En total es aumentada en $pc_o-(m-q)c_o$. Se tiene que:

$pc_o-(m-q)c_o=(m-(m-p))c_o-(m-q)c_o=$
$((m-(m-p))-(m-q))c_o=(m-(m-p)-(m-q))c_o=$
$(m-((m-p)+(m-q)))c_o=(m-k)c_o$

$m-k>0$ porque $m>k$; y c_o 0

Entonces $(m-k)c_o>0$

Por lo tanto la función objetivo del problema dual (D) aumenta su valor en una cantidad positiva.

Con la nueva solución dual-factible se construye la matriz de costes reducidos cuyos elementos serán ahora $c_{ij}-\bar{u}_i-\bar{v}_j$ $i,j=1,\ldots,m$ y se regresa a la fase primal.

Ahora se demostrará que construir la matriz de costos reducidos utilizando las nuevas variables duales equivale a restar c_o de cada renglón no cubierto y sumar c_o a cada columna cubierta, dejando igual los demás, todo esto en la matriz reducida C'' que ya se tenía. (A esta última forma de obtener los costos reducidos se le llamará "método δ").

Demostración. Se tienen cuatro casos:

a) Para $i\in S_r$, $j\in S_c$ las nuevas variables duales son:

$\bar{u}_i=u_i+c_o$

$\bar{v}_j=v_j$

Entonces el nuevo costo reducido para (i,j) es:

$c_{ij}-\bar{u}_i-\bar{v}_j=c_{ij}-u_i-c_0-v_j=c_{ij}-u_i-v_j-c_0$

Con el método $\bar{c}$: Como $i\in S_r$ se resta c_0 del renglón i de la matriz reducida que ya se tenía y se deja igual la columna j ($j\in S_c$).

En la posición (i,j) se tendrá:

$\bar{c}_{ij}-c_0=c_{ij}-u_i-v_j-c_0$

b) Para $i\in S_r$, $j\in\bar{S}_c$ las nuevas variables duales son:

$\bar{u}_i=u_i+c_0$

$\bar{v}_j=v_j-c_0$

Entonces el nuevo costo reducido para (i,j) es:

$c_{ij}-\bar{u}_i-\bar{v}_j=c_{ij}-u_i-c_0-v_j+c_0=c_{ij}-u_i-v_j$

Con el método $\bar{c}$: Como $i\in S_r$ y $j\in\bar{S}_c$ se resta c_0 del renglón i y se suma c_0 a la columna j de la matriz reducida que ya se tenía. En la posición (i,j) se tendrá: $\bar{c}_{ij}-c_0+c_0=c_{ij}-u_i-v_j-c_0+c_0=c_{ij}-u_i-v_j$

c) Para $i\in\bar{S}_r$, $j\in S_c$ las nuevas variables duales son:

$\bar{u}_i=u_i$

$\bar{v}_j=v_j$

Entonces el nuevo costo reducido para (i,j) es:

$c_{ij}-\bar{u}_i-\bar{v}_j=c_{ij}-u_i-v_j$

Con el método $\bar{c}$: Como $i\in\bar{S}_r$ y $j\in S_c$ se deja al renglón i y a la columna j como están en la matriz reducida que ya se tiene, En la posición (i,j) se tendrá:

$\bar{c}_{ij}=c_{ij}-u_i-v_j$

d) Para $i\in\bar{S}_r$, $j\in\bar{S}_c$ las nuevas variables duales son:

$\bar{u}_i=u_i$

$\bar{v}_j=v_j-c_0$

Entonces el nuevo costo reducido para (i,j) es:

$c_{ij}-\bar{u}_i-\bar{v}_j=c_{ij}-u_i-v_j+c_o$

Con el método $\bar{c}$: Como $i\in\bar{S}_r$ y $j\in\bar{S}_c$ se deja el renglón i como está y se suma c_o a la columna j de la matriz reducida que ya se tenía.

En la posición (i,j) se tendrá:

$\bar{c}_{ij}+c_o=c_{ij}-u_i-v_j+c_o$

Por lo tanto se cumple la equivalencia entre las dos formas de obtener los nuevos costos reducidos.

Otra manera de ver las operaciones que se realizan en la matriz reducida que ya se tenía, es la siguiente:

c_o se resta de cada elemento $\bar{c}_{ij}$ no cubierto (Caso a)).

c_o se suma a cada elemento $\bar{c}_{ij}$ cubierto por dos líneas (Caso d)).

Los elementos $\bar{c}_{ij}$ cubiertos con una sola línea se dejan como están (Casos b) y c)).

Resumiendo[4], el algoritmo se puede escribir así:

INICIO:

Para cada renglón de la matriz de costos, se resta el mínimo de sus elementos a cada elemento de ese renglón. Para cada columna de la matriz que resulta se resta a cada elemento de la columna el mínimo de sus elementos. Así, se obtiene la matriz reducida.

FASE PRIMAL:

Se traza el mínimo número de líneas sobre los renglones y las columnas de la matriz reducida para cubrir todos los ceros. Si el mínimo número de líneas es n, alto, se tiene ya una solución óptima; si no, pasar a la fase dual.

FASE DUAL:

Seleccionar el mínimo elemento no cubierto de la matriz

(4) [1; p.373]

reducida. Se resta este elemento de cada elemento no cubierto y se suma a cada elemento cubierto con dos líneas. Se regresa a la fase primal.

En seguida se demostrará que el algoritmo es finito.

Demostración. Si no es posible encontrar m celdas cero-independientes en la matriz de costos reducidos, se repite el proceso de trazar líneas y de ajustar la matriz. Es obvio que si todos los costos reducidos se hacen cero, se puede encontrar una solución óptima.

Sean $\bar{c}_{ij}$ $i,j=1,\ldots,m$ los costos reducidos en una iteración y $\hat{c}_{ij}$ $i,j=1,\ldots,m$ los costos reducidos en la siguiente iteración.

Se tiene que los costos reducidos son siempre no negativos y además:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\bar{c}_{ij}-\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\hat{c}_{ij}=\sum_{(S_r,S_c)}(\bar{c}_{ij}-\hat{c}_{ij})+\sum_{(S_r,\bar{S}_c)}(\bar{c}_{ij}-\hat{c}_{ij})+$$
$$+\sum_{(\bar{S}_r,S_c)}(\bar{c}_{ij}-\hat{c}_{ij})+\sum_{(\bar{S}_r,\bar{S}_c)}(\bar{c}_{ij}-\hat{c}_{ij})=$$
$$=\sum_{(S_r,S_c)}e_0+\sum_{(S_r,\bar{S}_c)}0+\sum_{(\bar{S}_r,S_c)}0+\sum_{(\bar{S}_r,\bar{S}_c)}(-e_0)=$$
$$=pqe_0-(m-p)(m-q)e_0=m(p+q-m)e_0$$

Se sabe que $p+q$ es el número de renglones y columnas no cubiertos así que: $p+q-m=(2m-k)-m=m-k$ donde k es el número de renglones y columnas cubiertos por líneas y también es el número máximo de celdas cero-independientes (por el Teorema A).

En particular $k<m$ (si $k=m$ se tiene el óptimo) y así $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}(\bar{c}_{ij}-\hat{c}_{ij})=m(m-k)e_0$ es un entero positivo, siempre y cuando los elementos de la matriz de costos original sean enteros. Como los elementos de la matriz reducida -

siempre son no negativos (por la construcción de la matriz) y dado que la suma de dichos elementos se reduce en un entero positivo en cada iteración, el algoritmo se detiene en un número finito de pasos y al terminar se obtiene una solución óptima por cumplirse las condiciones de Kuhn-Tucker (Apéndice C) las cuales indican que si dos soluciones x^* y (u^*,v^*) de (P) y (D) respectivamente cumplen con las restricciones $\sum_{j=1} x_{ij}=1$ $i=1,\ldots,m$; $\sum_{i=1} x_{ij}=1$ $j=1,\ldots,m$; $x_{ij}\geq 0$ $i,j=1,\ldots,m$; $u_i+v_j\leq c_{ij}$ $i,j=1,\ldots,m$; y además satisfacen las condiciones de holgura complementaria dadas por: $(c_{ij}-u_i-v_j)x_{ij}=0$ $i,j=1,\ldots,m$ $(\sum_{j=1} x_{ij}-1)u_i=0$ $i=1,\ldots,m$; y $(\sum_{i=1} x_{ij}-1)v_j=0$ $j=1,\ldots,m$, entonces x^* y (u^*,v^*) son soluciones óptimas para (P) y (D) respectivamente.

Las condiciones Kuhn-Tucker se cumplen de la siguiente forma:

Las restricciones $\sum_{j=1}^{m} x_{ij}=1$ $i=1,\ldots,m$ y $\sum_{i=1}^{m} x_{ij}=1$ $j=1,\ldots,m$ se satisfacen porque, por lo que se ha visto en la demostración, se llegan a tener m celdas cero-independientes en la matriz de costos reducidos, pudiendo asignar todos los individuos y todos los trabajos de tal manera que a cada individuo le corresponda un solo trabajo y a cada trabajo un solo individuo.

Las restricciones $x_{ij}\geq 0$ $i,j=1,\ldots,m$ se cumplen ya que sólo tienen opción de valer 0 ó 1.

Las restricciones $u_i+v_j\leq c_{ij}$ $i,j=1,\ldots,m$ se satisfacen porque durante el algoritmo siempre se conserva la factibilidad dual por la forma en que se elige la solución dual inicial y por la manera en que se cambian las variables duales en cada iteración.

Las condiciones $(c_{ij}-u_i-v_j)x_{ij}=0$ $i,j=1,\dots,n$ - se cumplen porque si $x_{ij}=1>0$, i se asignó a j y para que esto suceda el costo reducido $\bar{c}_{ij}$ debe ser cero, pero este costo reducido corresponde a la holgura $c_{ij}-u_i-v_j$. Entonces, si $x_{ij}>0$, $c_{ij}-u_i-v_j=0$. Si $c_{ij}-u_i-v_j>0$, $x_{ij}=0$ porque i no se puede asignar a j si el costo reducido $\bar{c}_{ij}=c_{ij}-u_i-v_j$ no es cero. Por otro lado, también - se puede dar el caso en que $x_{ij}=0$ y $c_{ij}-u_i-v_j=0$. Las condiciones $(\sum_{j=1}^{n} x_{ij}-1)u_i=0$ $i=1,\dots,n$ y $(\sum_{i=1}^{n} x_{ij}-1)v_j=0$ $j=1,\dots,n$ se cumplen porque para tener factibilidad primal debe tenerse la igualdad en todas las restricciones de (P), por lo cual las holguras $(\sum_{j=1}^{n} x_{ij}-1)$ $i=1,\dots,n$ y $(\sum_{i=1}^{n} x_{ij}-1)$ $j=1,\dots,n$ siempre son cero.

II.3.3. EJEMPLO.

Se resolverá el siguiente problema de asignación:

$$
(P)\quad \begin{cases}
\text{Minimizar} & z=2x_{11}+5x_{12}+7x_{13}+4x_{21}+2x_{22}+x_{23}+2x_{31}+6x_{32} \\
& \quad +5x_{33} \\
\text{s.a.} & \sum_{j=1}^{3} x_{ij}=1 \qquad i=1,\dots,3 \\
& \sum_{i=1}^{3} x_{ij}=1 \qquad j=1,\dots,3 \\
& x_{ij}\geq 0 \qquad i,j=1,\dots,3
\end{cases}
$$

Problema dual:

$$
(D)\quad \begin{cases}
\text{Maximizar} & w=\sum_{i=1}^{3} u_i+\sum_{j=1}^{3} v_j \\
\text{s.a.} & \\
& u_1+v_1\leq 2 \\
& u_1+v_2\leq 5
\end{cases}
$$

$$\left.\begin{array}{l} u_1+v_3 \leq 7 \\ u_2+v_1 \leq 4 \\ u_2+v_2 \leq 2 \\ u_2+v_3 \leq 1 \\ u_3+v_1 \leq 2 \\ u_3+v_2 \leq 6 \\ u_3+v_3 \leq 5 \\ u_i, v_j \text{ sin restricción } \quad i,j=1,\ldots,3 \end{array}\right.$$

Se construye la solución dual-factible inicial y la matriz de costos reducidos.

Matriz de costos:

$$C=\begin{bmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 4 & 2 & 1 \\ 2 & 6 & 5 \end{bmatrix} \begin{array}{l} u_1=2 \\ u_2=1 \\ u_3=2 \end{array}$$

$$C'=\begin{bmatrix} 0 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

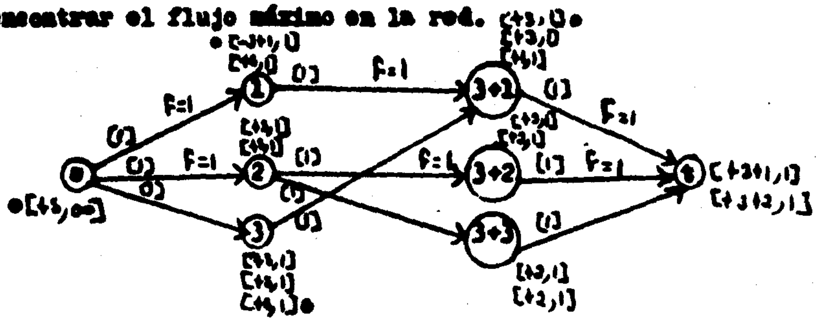
$$v_1=0 \quad v_2=1 \quad v_3=0$$

Matriz de costos reducidos:

$$C''=\begin{bmatrix} 0 & 2 & 5 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \bar{c}_{ij}=c_{ij}-u_i-v_j$$

Fase primal.

Se construye la red de flujo máximo para saber cuántas y cuáles líneas son las necesarias para cubrir los ceros de C''. Se aplica el algoritmo de Ford y Fulkerson (Apéndice A) para - encontrar el flujo máximo en la red.



En los arcos se tiene [1] = capacidad, f=flujo.

Las etiquetas de la última etiquetación se marcan con un o

Flujo máximo=2 $\quad A=\{s,1,3,3+1\} \quad A^c=\{2,3+2,3+3,t\}$

$\mathcal{C}=\{(s,2),(3+1,t)\}$

Las celdas cero-independientes son (1,1) y (2,2). Se necesitan $2=|\mathcal{C}|$ =Valor de $\mathcal{C}$ líneas para cubrir los ceros en C'' y se deben colocar una en el renglón 2 y una en la columna 1.

$$C''=\begin{bmatrix} 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix} \qquad \begin{array}{l} x_{11}=1 \\ x_{22}=1 \\ \text{las demás } x_{ij}=0 \end{array}$$

Como el número de líneas es $2<3=m$, se pasa a la fase dual

Fase dual.

Las nuevas variables duales son:

$\bar{u}_1=u_1+e_0=2+2=4$

$\bar{u}_2=u_2=1$

$\bar{u}_3=u_3+e_0=2+2=4$

$\bar{v}_1=v_1-e_0=0-2=-2$

$\bar{v}_2=v_2=1$

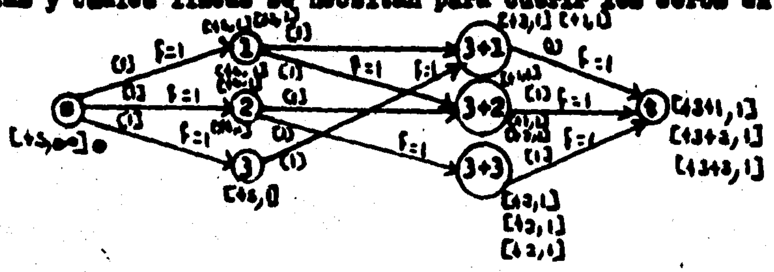
$\bar{v}_3=v_3=0$

$e_0=\min_{\substack{i\in I_v \\ j\in J_c}}\{\bar{c}_{ij}\} \qquad =\min\{2,5,3,3\}=2$

Para obtener la nueva matriz reducida se resta e_0 de cada elemento no cubierto en C'' y se suma a cada elemento cubierto con dos líneas y se tiene:

$$C_1''=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Se construye la nueva red de flujo máximo para saber cuántas y cuáles líneas se necesitan para cubrir los ceros en C_1''.



Flujo máximo=3 $A=\{s\}$ $A^c=\{1,2,3,3+1,3+2,3+3,t\}$

$\mathcal{C}=\{(s,1),(s,2),(s,3)\}$

Las celdas cero-independientes son (1,2),(2,3),(3,1).

Se necesitan $3=|\mathcal{C}|$ =Valor de $\mathcal{C}$ líneas para cubrir los ceros en C''_{ij} y se deben colocar en los renglones 1,2.y 3.

$$C''_{ij}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Como el número de líneas es 3=n se tiene ya una solución óptima que es:

Para (P):

$x_{12}=1$
$x_{23}=1$
$x_{31}=1$
las demás $x_{ij}=0$
$z^*=5+1+2=8$

Para (D):

$u_1=4$
$u_2=1$
$u_3=4$
$v_1=-2$
$v_2=1$
$v_3=0$
$w^*=4+1+4-2+1=8$

CAPITULO III.

COMPARACION ENTRE LAS TRES PRESENTACIONES DEL ALGORITMO HUNGARO.

En este capítulo se hará una comparación de las tres presentaciones del Algoritmo Húngaro vistas en el Capítulo II.

Se llamará en lo sucesivo PI a la Presentación I, PII a la Presentación II y PIII a la Presentación III.

En PII y en PIII se plantea el Problema de Asignación de la siguiente forma:

$$
(P)\quad \begin{cases} \text{Minimizar } z=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}\, x_{ij} \\ \text{S.a.} \\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij}=1 \qquad i=1,\dots,n \\ \sum_{i=1}^{n} x_{ij}=1 \qquad j=1,\dots,n \\ x_{ij}\geq 0 \qquad i,j=1,\dots,n \end{cases}
$$

$$
x_{ij}=\begin{cases} 0 \text{ si } i \text{ no se asigna a } j \\ 1 \text{ si } i \text{ se asigna a } j \end{cases}
$$

c_{ij} =costo por asignar i a j

El problema dual es en este caso:

$$
(D)\quad \begin{cases} \text{Maximizar } w=\sum_{i=1}^{n} u_i+\sum_{j=1}^{n} v_j \\ \text{S.a.} \\ u_i+v_j\leq c_{ij} \qquad i,j=1,\dots,n \\ u_i, v_j \quad \text{sin restricción } i,j=1,\dots,n \end{cases}
$$

En el problema primal el objetivo es minimizar el costo total de las n asignaciones de tal manera que cada individuo tenga un solo trabajo y cada trabajo un solo individuo.

En el problema dual se trata de maximizar las ganancias de una persona que ofrece sus servicios para realizar las asignaciones, cobrando una cantida u_i por individuo i y una cantidad v_j por trabajo j de tal forma que la persona del problema primal pague a lo más lo que a ella le hubiera costado hacer - las asignaciones.

Se puede dar el caso de que las variables duales sean negativas, lo que económicamente representa pérdidas para la persona del problema dual.

En PI el problema se plantea así:

$$
(P)\quad \begin{cases} \text{Maximizar} \quad z=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} r_{ij}\, x_{ij} \\ \text{s.a.} \\ \quad \sum_{j=1}^{m} x_{ij}=1 \qquad i=1,\dots,m \\ \quad \sum_{i=1}^{m} x_{ij}=1 \qquad j=1,\dots,m \\ \quad x_{ij}\geq 0 \qquad i,j=1,\dots,m \end{cases}
$$

$$
x_{ij}=\begin{cases} 0 \text{ si } i \text{ no se asigna a } j \\ 1 \text{ si } i \text{ se asigna a } j \end{cases}
$$

r_{ij}= productividad del individuo i en el trabajo j; $r_{ij}>0$
$i,j=1,\dots,m$

El problema dual es:

$$
(D)\quad \begin{cases} \text{Minimizar} \quad w=\sum_{i=1}^{m} u_i+\sum_{j=1}^{m} v_j \\ \text{s.a.} \\ \quad u_i+v_j\geq r_{ij} \quad i,j=1,\dots,m \\ \quad u_i, v_j \text{ sin restricción} \\ \quad i,j=1,\dots,m \end{cases}
$$

En el problema primal se quiere maximizar la suma de productividades. En este planteamiento también se pide que a cada individuo corresponda un solo trabajo y a cada trabajo un solo individuo.

En el problema dual se quiere minimizar los egresos de - una persona que compra el tiempo de trabajo de los individuos del problema primal, pagando por cada individuo i una cantidad u_i y por cada trabajo j una cantida v_j de tal manera que la - persona del problema primal reciba al menos lo que hubieran - producido los individuos en los trabajos.

En PI, a diferencia de PII y PIII, el algoritmo mantiene siempre las variables duales no negativas, lo cual, analíticamente no tiene repercusión, en el valor óptimo de w, pero puede servir en la interpretación económica ya que es factible que en la realidad se den casos donde se requiera que las variables duales representen cantidades (pagos, cobros, etc.) que no puedan ser negativas.

Si se observan las funciones objetivo de los dos planteamientos, se tiene que: En PII y PIII se minimiza la suma de costos $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$ y en PI se maximiza la suma de productividades (o ganancias) $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} r_{ij} x_{ij}$. Sin embargo, en cierta forma se hace lo mismo en los dos casos, ya que es posible transformar el problema de $\mathrm{Min}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$ en un problema de maximizar equivalente que es $-\mathrm{Max}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} -c_{ij} x_{ij}$; y el problema de $\mathrm{Max}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} r_{ij} x_{ij}$ se puede transformar en un problema de minimizar equivalente que es $-\mathrm{Min}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} -r_{ij} x_{ij}$.

De hecho, un costo negativo se puede considerar como una ganancia y una ganancia (o productividad) negativa como un costo.

Ahora se verá lo que se hace a lo largo del algoritmo en las tres presentaciones:

En las tres se tiene un inicio, una fase primal y una fase dual.

Para iniciar el algoritmo se obtiene una solución dual-factible:

En PII y PIII se obtiene así:

$$u_i = \min_{1\le j\le n}\left\{ c_{ij} \right\} \quad i=1,\dots,m$$

$$v_j = \min_{1\le i\le m}\left\{ c_{ij} - u_i \right\} \quad j=1,\dots,n$$

En PI:

$$\left.\begin{array}{l} u_i = a_i \\ v_j = 0 \end{array}\right\} \text{si } a \le b \qquad\qquad \left.\begin{array}{l} u_i = 0 \\ v_j = b_j \end{array}\right\} \text{si } a > b$$

donde :

$$a=\sum_{i=1}^{m} a_i \qquad a_i=\max_j \{ r_{ij} \} \qquad i=1,\ldots,m$$

$$b=\sum_{j=1}^{m} b_j \qquad b_j=\max_i \{ r_{ij} \} \qquad j=1,\ldots,m$$

En los tres casos se calculan los costos reducidos (o "productividades reducidas") $\bar{c}_{ij}=c_{ij}-u_i-v_j$ $(-r_{ij}+u_i+v_j)$ teniendo siempre algunos de éstos iguales a cero debido a la forma de tomar las variables duales.

Las posiciones (i,j) para las cuales $\bar{c}_{ij}=0$ $(r_{ij}=u_i+v_j)$, son las candidatas para formar parte de la asignación.

FASE PRIMAL:

En seguida se buscan las celdas cero-independientes (posiciones (i,j) para las cuales $\bar{c}_{ij}=0$ ó $r_{ij}=u_i+v_j$ tales que no haya dos en el mismo renglón o columna).

La búsqueda de estas celdas se realiza así:

En PI se hace en la matriz Q asociada al presupuesto adecuado, en la cual las posiciones (i,j) para las cuales $r_{ij}=u_i+v_j$ están marcadas con un 1 y las demás posiciones con cero. Por medio de transferencias se va marcando con asteriscos el mayor número de 1's posible de tal manera que no haya dos 1's marcados en el mismo renglón o en la misma columna.

En PII y PIII las celdas cero-independientes se determinan por medio de la red de flujo máximo en la cual se tienen arcos (i,m+j) con capacidad 1 para (i,j) tales que $\bar{c}_{ij}=c_{ij}-u_i-v_j=0$. En este caso, las celdas cero-independientes son las correspondientes a los arcos (i,m+j) que tienen flujo igual a 1 cuando ya se ha obtenido el flujo máximo. En esta red se tienen también los arcos (s,i) i=1,...,m y (m+j,t) j=1,...,m donde s y t son un origen y un destino ficticios respectivamente; los vértices i corresponden a los individuos y los m+j a los trabajos.

Teniendo en cuenta la cortadura mínima $\mathcal{C}$:

En PIII si $(s,i)\in\mathcal{C}$, se cubre con una línea el renglón i y si $(m+j,t)\in \mathcal{C}$ se cubre con una línea la columna j. Los renglones y columnas cubiertos corresponden a individuos y trabajos que podrán ser asignados ya que si un renglón i tiene una línea sobre él, entonces para alguna $j'=1,\ldots,n$ $\bar{c}_{ij'}=0$; y si una columna j tiene una línea sobre ella, entonces para alguna $i'=1,\ldots,m$ $\bar{c}_{i'j}=0$ y ya se vio que las parejas (i,j) con costo reducido igual a cero son las que más convienen para minimizar la función objetivo de (P).

Se definieron además los conjuntos: S_r, S_c, $\bar{S}_r$, $\bar{S}_c$:

S_r=conjunto de renglones no cubiertos

S_c=conjunto de columnas no cubiertas

$\bar{S}_r$=conjunto de renglones cubiertos

$\bar{S}_c$=conjunto de columnas cubiertas

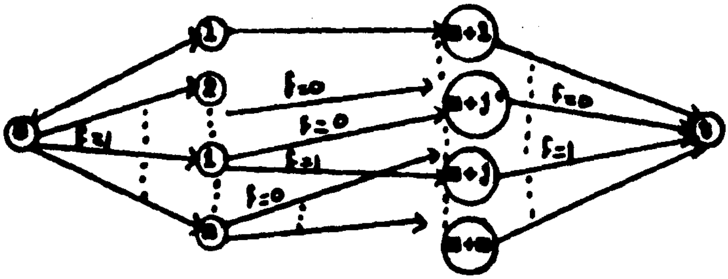
Ténganse presentes estas definiciones pues los conjuntos serán utilizados más adelante así como las siguientes variables que se definieron en PII a partir de $\mathcal{C}$:

$$\alpha_i=\begin{cases}1 & i\in A\\ -1 & i\in A^c\end{cases}\qquad\qquad \beta_j=\begin{cases}-1 & m+j\in A\\ 1 & m+j\in A^c\end{cases}$$

En PI se definen los renglones y columnas esenciales. Con respecto a los 1's marcados con asteriscos que determinan las celdas cero-independientes, una columna es esencial si tiene un 1^* en un renglón no esencial; y un renglón es esencial si contiene un 1^* de tal manera que este 1^* pueda cambiarse por otro 1 no marcado del mismo renglón. Los renglones y columnas esenciales corresponden a los individuos y trabajos que serán asignados.

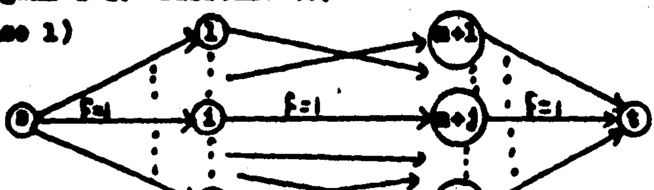
Ahora se verá a qué corresponden los individuos y trabajos esenciales (renglones y columnas esenciales) de PI en la red de flujo máximo de PII y PIII.

Un individuo esencial i es un individuo que está asignado a un trabajo j y se puede cambiar a otro trabajo no asignado j' Esto, en la red de flujo máximo, equivale a tener el arco (i,m+j) con flujo igual a 1 y además debe existir el arco (i,m+j'). Como j' no está asignado, no debe llegar flujo al vértice m+j', es decir, el arco (m+j',t) debe tener flujo cero. Gráficamente:

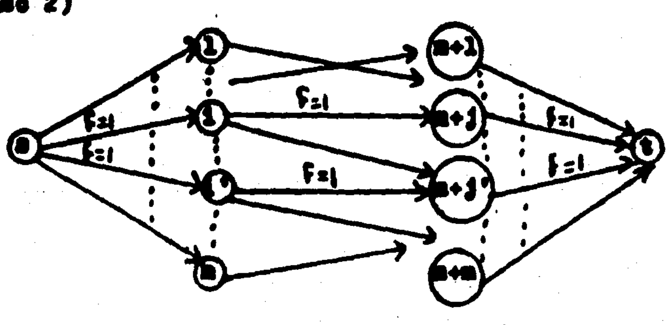


Un individuo no esencial i es un individuo asignado a un trabajo j y que no puede cambiar a otro trabajo no asignado; este puede darse de dos formas: 1) que el individuo i solamente califique para el trabajo j, 2) que los demás trabajos para los que califica i ya hayan sidi asignados. El caso 1) en la red corresponde a tener el arco (i,m+j) con flujo igual a 1 y que no existan los arcos (i,m+j') para j'≠j. El caso 2) corresponde a tener el arco (i,m+j) con flujo igual a 1 y para cada arco (i,m+j') j'≠j que exista, habrá otro arco (i',m+j') con flujo igual a 1. Gráficamente:

Caso 1)



Caso 2)



Un trabajo es esencial si está asignado a un individuo no esencial. Se puede apreciar a qué corresponde esto en la red - en los casos 1) y 2) en los cuales el trabajo j, que corresponde al vértice m+j, es un trabajo esencial.

Un ejemplo de trabajo no esencial se puede ver en la red - que sirvió para ejemplificar lo que es un individuo esencial, en donde el vértice m+j corresponde al trabajo j no esencial.

Los individuos i y los trabajos j para los cuales los arcos (s,i) y (m+j,t) tienen flujo cero, son no esenciales.

Ahora se determinará la relación que existe entre las α_i y β_j de PII y las líneas que se trazan sobre la matriz de costos reducidos en PIII.

Se sabe que en la última etiquetación del algoritmo para encontrar el flujo máximo, siempre sucederá que $s \in A$ y $t \in A^c$- ya que la cortadura mínima, por ser cortadura, debe separar al origen del destino en la red.

También se sabe que:

$$\alpha_i = \begin{cases} 1 & i \in A \\ -1 & i \in A^c \end{cases} \qquad \beta_j = \begin{cases} -1 & m+j \in A \\ 1 & m+j \in A^c \end{cases}$$

En PIII, si $(s,i) \in \mathcal{C}$ se traza una línea sobre el renglón i y si $(m+j,t) \in \mathcal{C}$ se traza una línea sobre la columna j.

Entonces se tiene que:

-Si $\alpha_i = 1$, entonces $i \in A$ y por lo tanto $(s,i) \notin \mathcal{C}$ porque $s \in A$, y entonces el renglón i no lleva ninguna línea.

-Si $\alpha_i = -1$, entonces $i \in A^c$ y $(s,i) \in \mathcal{C}$; por lo tanto el renglón i lleva una línea sobre él.

-Si $\beta_j = -1$, entonces $m+j \in A$ y $(m+j,t) \in \mathcal{C}$; por lo tanto la columna j lleva una línea sobre ella.

-Si $\beta_j = 1$, entonces $m+j \in A^c$ y $(m+j,t) \notin \mathcal{C}$ porque $t \in A^c$; por lo tanto la columna j no lleva línea sobre ella.

Se sabe que los renglones y columnas con líneas sobre ellos corresponden a los individuos y trabajos que serán asigna dos, entonces:

Si $\alpha_i=-1$ el individuo i será asignado

Si $\beta_j=-1$ el trabajo j será asignado

Teniendo en cuenta los casos vistos, se observa que:

-Para (i,j) tal que $\alpha_i+\beta_j=1+1=2$ se tiene que ninguna línea pasa por la celda (i,j).

-Para (i,j) tal que $\alpha_i+\beta_j=-1+1=0$ se tiene que una línea pasa por la celda (i,j), la correspondiente al renglón i.

-Para (i,j) tal que $\alpha_i+\beta_j=1-1=0$ se tiene que una línea pasa por la celda (i,j), la correspondiente a la columna j.

-Para (i,j) tal que $\alpha_i+\beta_j=-1-1=-2$ se tiene que dos líneas pasan por la celda (i,j), las correspondientes al renglón i y a la columna j.

Obsérvese que el que por una celda (i,j) que tenga $\bar{c}_{ij}=0$ pasen dos líneas, no implica que i se va a asignar a j, ya que si i se asigna a j se tendrá que la celda cero-independiente (i,j) estará correspondiendo a dos líneas (la del renglón i y la de la columna j) y esto estará contradiciendo el Teorema A que se demostró en FIII y que indica que el número mínimo de líneas que cubren los ceros de la matriz reducida es igual al número máximo de celdas cero-independientes.

Entonces se tendrán que elegir para la signación otras posiciones con $\bar{c}_{ij}=0$ en el renglón i y en la columna j, las cuales deben existir, ya que si solamente la posición (i,j) tenía costo reducido cero, con una sola línea habría bastado para cubrirla y al tener dos pasando sobre ella, no se estaría tomando el <u>mínimo</u> número de líneas.

También se tiene que: Para una celda (i,j) con $\bar{c}_{ij}=0$ por la que pasen dos líneas (FIII) o $\alpha_i+\beta_j=-2$ (FII), en la siguiente iteración $\bar{c}_{ij}>0$, es decir, $c_{ij}>u_i+v_j$ y la posición (i,j) ya no será candidata a pertenecer a la asignación. Esto sucede por lo siguiente:

En PII, si $\alpha_i=\beta_j=-1$ las variables duales cambian así:

$u^*_i=u_i+\alpha_i\theta=u_i-(\bar{\delta}_{rk}/2)$

$v^*_j=v_j+\beta_j\theta=v_j-(\bar{\delta}_{rk}/2)$

Entonces: $u^*_i+v^*_j=u_i+v_j-2(\bar{\delta}_{rk}/2)=u_i+v_j-\bar{\delta}_{rk}<c_{ij}$ porque $u_i+v_j\leq c_{ij}$ y $\bar{\delta}_{rk}>0$.

Por lo tanto $\bar{\delta}^*_{ij}=c_{ij}-u^*_i-v^*_j>0$

En PIII, si $i\in\bar{S}_r$ y $j\in\bar{A}_t$, las variables duales cambian así:

$\bar{u}_i=u_i$

$\bar{v}_j=v_j-c_o$

Entonces: $\bar{u}_i+\bar{v}_j=u_i+v_j-c_o<c_{ij}$ porque $u_i+v_j\leq c_{ij}$ y $c_o>0$.

Por lo tanto $\bar{\delta}^*_{ij}=c_{ij}-\bar{u}_i-\bar{v}_j>0$.

Regresando a lo que es la fase primal se puede observar que:

En PI la fase primal consiste en resolver el problema de asignación simple asociado al presupuesto que se tiene.

En PII la fase primal corresponde a resolver el problema primal restringido (PR).

En PIII la fase primal corresponde a resolver el problema restringido (P_1) visto en la demostración del Teorema A.

En los tres casos el objetivo es encontrar el mayor número posible de posiciones (i,j) con $\bar{\delta}_{ij}=0$ (o $x_{ij}=u_i+v_j$ en PI) de tal manera que no haya dos en el mismo renglón o en la misma columna, es decir, se quiere obtener el mayor número posible de x_{ij} con valor igual a 1 tales que $\bar{\delta}_{ij}=0$ (o $x_{ij}=u_i+v_j$ en PI) y cumpliendo las restricciones de que a cada individuo corresponda sólo un trabajo y a cada trabajo sólo un individuo.

FASE DUAL.

En la fase dual se realiza el cambio de variables duales:

En PI se cambian de la siguiente forma:

Caso 1. Si para todos los renglones no esenciales i se tiene $u_i>0$, se calcula n el mínimo entre d y u_i sobre todos los renglones no esenciales i. Se hace:

$u_i \rightarrow u_i - a$ para todos los renglones i no esenciales.

$v_j \rightarrow v_j + a$ para todas las columnas j esenciales.

$u_i \rightarrow u_i$ para todos los renglones i esenciales.

$v_j \rightarrow v_j$ para todas las columnas j no esenciales.

Caso 2. Si para algún renglón no esencial i, $u_i=0$, se calcula a el mínimo entre d y v_j sobre todas las columnas j no esenciales. Se hace:

$u_i \rightarrow u_i + a$ para todos los renglones i esenciales.

$v_j \rightarrow v_j - a$ para todas las columnas j no esenciales.

$u_i \rightarrow u_i$ para todos los renglones i no esenciales.

$v_j \rightarrow v_j$ para todas las columnas j esenciales.

$d = \min\limits_{\substack{i,j \text{ no} \\ \text{esenciales}}} \{ u_i + v_j - r_{ij} \}$

En PII las variables duales se cambian así:

$u'_i = u_i + \Theta \alpha_i$

$v'_j = v_j + \Theta \beta_j$

donde $\Theta = (\bar{\delta}_{rk}/(\alpha_r + \beta_k)) = \min\limits_{(i,j) \notin Q} \{ \delta_{ij}/(\alpha_i + \beta_j) \mid \alpha_i + \beta_j > 0 \}$

y entonces:

$u'_i = u_i - (\bar{\delta}_{rk}/2) \quad i \in A^c$

$u'_i = u_i + (\bar{\delta}_{rk}/2) \quad i \in A$

$v'_j = v_j - (\bar{\delta}_{rk}/2) \quad m+j \in A$

$v'_j = v_j + (\bar{\delta}_{rk}/2) \quad m+j \in A^c$

En PIII el cambio de variables duales es así:

$\bar{u}_i = u_i + e_0 \quad i \in S_r$

$\bar{u}_i = u_i \quad i \in \bar{S}_r$

$\bar{v}_j = v_j \quad j \in S_c$

$\bar{v}_j = v_j - e_0 \quad j \in \bar{S}_c$

donde $e_0 = \min\limits_{\substack{i \in S_r \\ j \in \bar{S}_c}} \{ \bar{\delta}_{ij} \} > 0$

Se tienen los cuatro casos siguientes:

1) El renglón i no ha sido asignado.

En PIII $i \in S_r$ ya que $(s,i) \notin \mathcal{C}$ y $\bar{u}_i = u_i + e_0$

En PII, como $(s,i) \notin \mathcal{C}$, entonces $i \notin A^c$ por lo que $i \in A$ y

$u^*_i = u_i + (\bar{\delta}_{rk}/2)$.

En PI i es un renglón no esencial y $u_i \longrightarrow u_i - n$ (caso1) o $u_i \longrightarrow u_i$ (caso 2).

2) Si sucede que:

En PIII: $(s,i) \in \mathcal{C}$ por lo cual $i \in \bar{S}_r$ y así $\bar{u}_i = u_i$;

en PII: $(s,i) \in \mathcal{C}$ por lo cual $i \in A^c$ y así $u^*_i = u_i - (\bar{\delta}_{rk}/2)$;

en PI: i es un renglón esencial y así $u_i \longrightarrow u_i$ (caso 1) o $u_i \longrightarrow u_i + n$ (caso 2)

entonces se sabe que el individuo i se asignó, y el trabajo j que le tocó es tal que:

en PIII: $(m+j,t) \notin \mathcal{C}$ por lo cual $j \in S_c$ y así $\bar{v}_j = v_j$;

en PII: $(m+j,t) \notin \mathcal{C}$ por lo cual $m+j \in A^c$ y así $v^*_j = v_j + (\bar{\delta}_{rk}/2)$

en PI: j no es una columna esencial y así $v_j \longrightarrow v_j$ (caso 1) o $v_j \longrightarrow v_j - n$ (caso 2)

3) La columna j no ha sido asignada.

En PIII $j \in S_c$ ya que $(m+j,t) \notin \mathcal{C}$ y $\bar{v}_j = v_j$

En PII, como $(m+j,t) \notin \mathcal{C}$, entonces $m+j \notin A$ por lo que $m+j \in A^c$ y $v^*_j = v_j + (\bar{\delta}_{rk}/2)$.

En PI j no es esencial y $v_j \rightarrow v_j$ (caso 1), $v_j \rightarrow v_j - n$ (caso2)

4) Si sucede que:

En PIII: $(m+j,t) \in \mathcal{C}$ por lo cual $j \in \bar{S}_c$ y así $\bar{v}_j = v_j - c_o$;

en PII: $(m+j,t) \in \mathcal{C}$ por lo cual $m+j \in A$ y así $v^*_j = v_j - (\bar{\delta}_{rk}/2)$;

en PI: j es una columna esencial y así $v_j \longrightarrow v_j + n$ (caso 1), $v_j \longrightarrow v_j$ (caso 2)

entonces se sabe que el trabajo j se asignó, y el individuo i que le tocó es tal que:

en PIII: $(s,i) \notin \mathcal{C}$ por lo cual $i \in S_r$ y así $\bar{u}_i = u_i + c_o$;

en PII: $(s,i) \notin \mathcal{C}$ por lo cual $i \in A$ y así $u^*_i = u_i + (\bar{\delta}_{rk}/2)$;

en PI: i no es un renglón esencial y así $u_i \longrightarrow u_i - n$ (caso 1) o $u_i \longrightarrow u_i$ (caso 2).

Recuérdese que en PII y PIII se quiere maximizar $w=\sum_{i=1}^{n} u_i+\sum_{j=1}^{n} v_j$ y las restricciones del problema dual son de la forma $u_i+v_j \leq c_{ij}$, mientras que en PI se quiere minimizar $w=\sum_{i=1}^{n} u_i+\sum_{j=1}^{n} v_j$ y las restricciones del problema dual son de la forma $u_i+v_j \geq r_{ij}$

Obsérvese que, tanto en PII como en PIII, para las parejas (i,j) con i y j no asignados, la suma u_i+v_j aumenta de una iteración a otra, dando mayor oportunidad para que $\bar{c}_{ij}$ sea cero y dichas parejas sean "competitivas" con respecto a las demás para formar parte de la asignación.

Análogamente, en PI para tales parejas, la suma u_i+v_j disminuye y se aumenta la posibilidad de que $u_i+v_j=r_{ij}$.

En las tres presentaciones interviene el mínimo de los costos reducidos ("productividades reducidas") distintos de cero para el cambio de variables duales, como se puede observar en el cálculo de c_o, θ y d.

En el cálculo de d se utilizan $u_i+v_j-r_{ij}$ en lugar de $r_{ij}-u_i-v_j$ porque la función objetivo del problema primal en PI se quiere maximizar (se podría tomar $d=\max_{\substack{i,j \text{ no} \\ \text{asignados}}} \{r_{ij}-u_i-v_j\}$).

Al elegir c_o, θ y d se pretende escoger el costo que pueda acercar más al óptimo a la función objetivo de (P) sin que se pierda la factibilidad dual. Obsérvese que en las tres presentaciones la posición (i,j) para la cual $c_o=\bar{c}_{ij}>0$, $\theta=\bar{c}_{ij}/(\alpha_i+\beta_j)$ o $d=-r_{ij}+u_i+v_j$ (si $m=\min_{\substack{i \text{ no} \\ \text{asignado}}}\{d,u_i\}=d$ o $m=\min_{\substack{j \text{ no} \\ \text{asignado}}}\{d,v_j\}=d$ en PI) será la posición que en la siguiente iteración tendrá $\bar{c}_{ij}=0$ $(r_{ij}=u_i+v_j)$ después de haber tenido $\bar{c}_{ij}>0$ $(r_{ij}<u_i+v_j)$

En las tres formas del algoritmo, al obtenerse las nuevas variables duales se regresa a la fase primal y se continúa hasta que se tienen n parejas asignadas, es decir, todos los individuos y trabajos asignados.

A continuación se presentan algunos ejemplos donde se muestra cómo se pueden resolver problemas donde se quiere maximizar z, utilizando PII y PIII; y cómo se pueden resolver problemas donde se quiere minimizar z, utilizando PI.

EJEMPLOS.

En PI se resolvió el siguiente problema:

$$\text{Max } z=8x_{11}+7x_{12}+9x_{13}+9x_{14}+5x_{21}+2x_{22}+7x_{23}+8x_{24}+6x_{31}+x_{32}+4x_{33}+9x_{34}+2x_{41}+3x_{42}+2x_{43}+6x_{44}$$

$$\text{s.a.} \qquad \sum_{j=1}^{4} x_{ij}=1 \quad i=1,\dots,4 \qquad \dots \quad (1)$$

$$\sum_{i=1}^{4} x_{ij}=1 \quad j=1,\dots,4$$

$$x_{ij}\geq 0 \quad i,j=1,\dots,4$$

El problema dual es:

$$\text{Min } w=\sum_{i=1}^{4} u_i+\sum_{j=1}^{4} v_j$$

s.a.

$$\begin{aligned}
u_1+v_1 &\geq 8\\
u_1+v_2 &\geq 7\\
u_1+v_3 &\geq 9\\
u_1+v_4 &\geq 9\\
u_2+v_1 &\geq 5\\
u_2+v_2 &\geq 2\\
u_2+v_3 &\geq 7\\
u_2+v_4 &\geq 8\\
u_3+v_1 &\geq 6\\
u_3+v_2 &\geq 1\\
u_3+v_3 &\geq 4\\
u_3+v_4 &\geq 9\\
u_4+v_1 &\geq 2\\
u_4+v_2 &\geq 3\\
u_4+v_3 &\geq 2\\
u_4+v_4 &\geq 6
\end{aligned} \qquad \dots \quad (2)$$

u_i, v_j sin restricción $i,j=1,\dots,4$

Las soluciones óptimas obtenidas en PI para el problema y su dual fueron:

$x_{11}=1$ $\quad u_1=7 \quad v_1=1$

$x_{23}=1$ $\quad u_2=5 \quad v_2=0 \qquad z^*=w^*=27$

$x_{34}=1$ $\quad u_3=6 \quad v_3=2$

$x_{42}=1 \qquad u_4=3 \quad v_4=3$

las demás $x_{ij}=0$

Estas soluciones se obtuvieron en 4 iteraciones.

Si el problema anterior se transforma en un problema a minimizar equivalente, se tiene:

$$-\text{Min } z'=-8x_{11}-7x_{12}-9x_{13}-9x_{14}-5x_{21}-2x_{22}-7x_{23}-8x_{24}$$
$$-6x_{31}-x_{32}-4x_{33}-9x_{34}-2x_{41}-3x_{42}-2x_{43}-6x_{44}$$

s.a. $\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad$ . . . (3)

$$\sum_{j=1}^{4} x_{ij}=1 \qquad i=1,\dots,4$$
$$\sum_{i=1}^{4} x_{ij}=1 \qquad j=1,\dots,4$$
$$x_{ij}\geq 0 \qquad i,j=1,\dots,4$$

El problema dual es:

$$-\text{Max } w=\sum_{i=1}^{4} u_i+\sum_{j=1}^{4} v_j$$

s.a.

$$\begin{aligned}
u_1+v_1 &\leq -8\\
u_1+v_2 &\leq -7\\
u_1+v_3 &\leq -9\\
u_1+v_4 &\leq -9\\
u_2+v_1 &\leq -5\\
u_2+v_2 &\leq -2\\
u_2+v_3 &\leq -7\\
u_2+v_4 &\leq -8\\
u_3+v_1 &\leq -6\\
u_3+v_2 &\leq -1\\
u_3+v_3 &\leq -4\\
u_3+v_4 &\leq -9\\
u_4+v_1 &\leq -2\\
u_4+v_2 &\leq -3\\
u_4+v_3 &\leq -2\\
u_4+v_4 &\leq -6
\end{aligned} \qquad \text{. . . (4)}$$

u_i, v_j sin restricción $i,j=1,\dots,4$

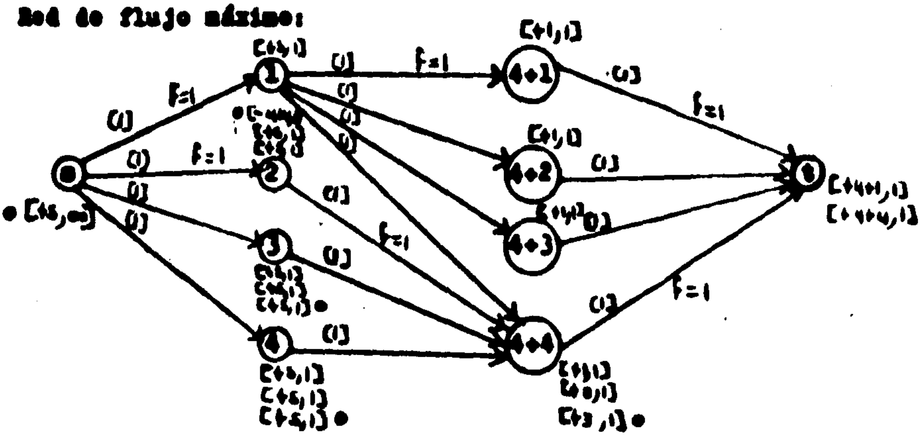
Teniendo el problema a minimizar, se resolverá utilizando PIII.

$$C=\overset{\text{Matriz de costos}}{\begin{bmatrix} -8 & -7 & -9 & -9\\ -5 & -2 & -7 & -8\\ -6 & -1 & -4 & -9\\ -2 & -3 & -2 & -6 \end{bmatrix}} \quad \begin{array}{l} u_1=-9\\ u_2=-8\\ u_3=-9\\ u_4=-6 \end{array} \qquad C'=\begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0\\ 3 & 6 & 1 & 0\\ 3 & 8 & 5 & 0\\ 4 & 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}\\ v_1=1 \;\; v_2=2 \;\; v_3=0 \;\; v_4=0 \end{array}$$

Matriz de costos reducidos:

$$C''= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 6 & 5 & 0 \\ 3 & 1 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

Red de flujo máximo:



En los arcos se tiene: [1] =capacidad, f=flujo. Las etiquetas de la última etiquetación se marcan con un •. Lo mismo se tendrá para todas las redes siguientes.

$A= \{s,2,3,4,4+4\}$ $A^c= \{1,4+1,4+2,4+3,t\}$

$\mathcal{C}= \{(s,1), (4+4,t)\}$

Se traza una línea sobre el renglón 1 y una sobre la columna 4 de C''.

Como el número de líneas es $2<4$ se pasa a la fase dual.

$x_{11}=1$

$x_{24}=1$

$$C''= \begin{bmatrix} \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ 2 & 4 & 1 & \cancel{0} \\ 2 & 6 & 5 & \cancel{0} \\ 3 & 1 & 4 & \cancel{0} \end{bmatrix}$$

$c_o=\min\limits_{\substack{i\in I_r \\ j\in I_c}} \{\bar{c}_{ij}\} = \min\{2,4,1,2,6,5,3,1,4\}=1$

Las nuevas variables duales son:

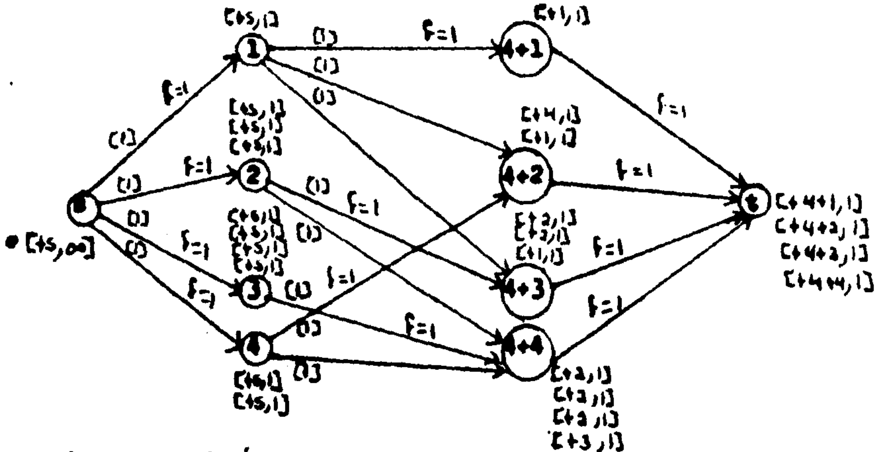
$u_1'=-9$, $u_2'=-8+1=-7$, $u_3'=-9+1=-8$, $u_4'=-6+1=-5$

$v_1'=1$, $v_2'=2$ $v_3'=0$ $v_4'=0-1=-1$

Se resta en C'', c_e de cada elemento no cubierto y se suma a cada elemento cubierto con dos líneas. Se obtiene:

$$C_1'' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

A partir de C_1'' se construye la nueva red de flujo máximo:



$A = \{s\}$ $\qquad A^c = \{1,2,3,4,4+1,4+2,4+3,4+4,t\}$

$\mathcal{C} = \{(s,1),(s,2),(s,3),(s,4)\}$

Se trazan líneas sobre los renglones 1,2,3,4 de C_1''

$$C_1'' = \begin{bmatrix} \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{1} \\ \cancel{1} & \cancel{3} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ \cancel{1} & \cancel{5} & \cancel{4} & \cancel{0} \\ \cancel{2} & \cancel{0} & \cancel{3} & \cancel{0} \end{bmatrix}$$

Como el número de líneas es $4=m$ se tiene ya la solución óptima que es:

Para el problema primal:	Para el problema dual:	
$x_{11}=1$	$u_1=-9$	$v_1=1$
$x_{23}=1$	$u_2=-7$	$v_2=2$
$x_{34}=1$	$u_3=-8$	$v_3=0$
$x_{42}=1$ las demás $x_{ij}=0$	$u_4=-5$	$v_4=-1$
$z^*=-z'^4=-(-27)=27$	$w'^4=-\max w= -(-27)=27$	

Estas soluciones se obtuvieron en dos iteraciones.

Ahora bien, en vez de transformar el problema se le pueden hacer cambios al algoritmo en PIII de tal manera que resuelva el problema con la función objetivo a maximizar.

Dichos cambios son los siguientes:

Para encontrar una solución dual-factible inicial en lugar de tomar:

$$u_i = \min_{1 \le j \le m} \{c_{ij}\} \quad i=1,\ldots,m$$
$$v_j = \min_{1 \le i \le m} \{c_{ij} - u_i\} \quad j=1,\ldots,m$$

se toma:

$$u_i = \max_{1 \le j \le m} \{c_{ij}\} \quad i=1,\ldots,m$$
$$v_j = \max_{1 \le i \le m} \{c_{ij} - u_i\} \quad j=1,\ldots,m \qquad . \quad . \quad . \quad (5)$$

y de esta forma se garantiza que la solución dual inicial sea factible porque en el problema dual se tienen restricciones de la forma $u_i + v_j \geq c_{ij}$ y los costos reducidos deben ser $0 \geq c_{ij} - u_i - v_j$. Al formar la matriz C'' tomando u_i y v_j como en (5) se cumplirá con las restricciones, ya que todos los elementos de C'' serán no positivos.

Otro cambio es el siguiente:

En vez de tomar $c_o = \min_{\substack{i \in S_r \\ j \in S_k}} \{\bar{c}_{ij}\}$

se toma $c_o = \max_{\substack{i \in S_r \\ j \in S_k}} \{\bar{c}_{ij}\}$

Cuando se está minimizando, en cada iteración se elige el mínimo de los $\bar{c}_{ij} > 0$ en las posiciones no cubiertas por líneas ya que corresponde a la variable cuyo costo aportará el menor valor posible a la función objetivo primal en caso de que dicha variable llegue a tener valor 1. Al restar c_o de todos los elementos no cubiertos, el $\min_{\substack{i \in S_r \\ j \in S_k}} \{\bar{c}_{ij}\}$ se hace cero y la posición correspondiente a él se hace candidata a pertenecer a la siguiente asignación. Por otra parte, al elegir de esa forma c_o se conserva la factibilidad dual en el cambio de variables.

Un razonamiento análogo corresponde al caso de tomar $c_o = \max\limits_{\substack{i \in S_r \\ j \in S_c}} \{\bar{c}_{ij}\}$ cuando se quiere maximizar la función objetivo primal.

Tomando el problema primal y su dual como en(1) y (2) y teniendo en cuenta los cambios mencionados, se aplicará PIII.

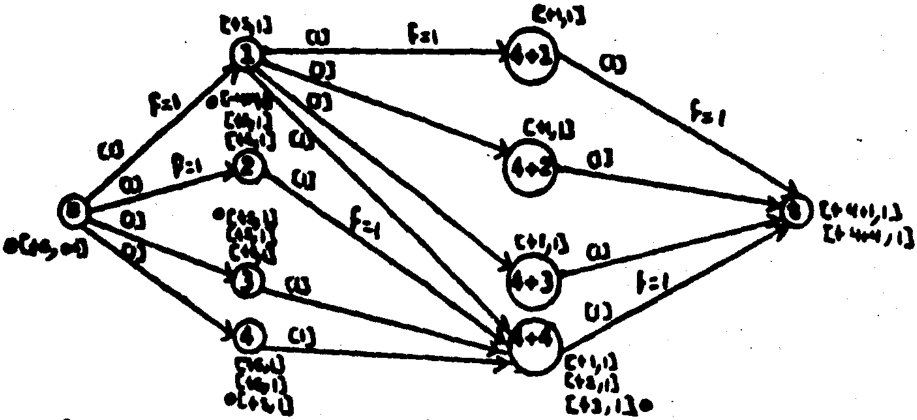
Matriz de costos:

$$C = \begin{bmatrix} 8 & 7 & 9 & 9 \\ 5 & 2 & 7 & 8 \\ 6 & 1 & 4 & 9 \\ 2 & 3 & 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{array}{l} u_1=9 \\ u_2=8 \\ u_3=9 \\ u_4=6 \end{array} \qquad C' = \begin{array}{cccc} \begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 & 0 \\ -3 & -6 & -1 & 0 \\ -3 & -8 & -5 & 0 \\ -4 & -3 & -4 & 0 \end{bmatrix} \\ v_1=-1 \quad v_2=-2 \quad v_3=0 \quad v_4=0 \end{array}$$

Matriz de costos reducidos:

$$C'' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -4 & -1 & 0 \\ -2 & -6 & -5 & 0 \\ -3 & -1 & -4 & 0 \end{bmatrix}$$

Se construye la red de flujo máximo:



$A = \{s, 2, 3, 4, 4+4\}$ $\quad A^c = \{1, 4+1, 4+2, 4+3, t\}$

$\mathcal{C} = \{(s,1), (4+4, t)\}$

Se traza una línea sobre el renglón 1 y una sobre la columna 4 de C''.

Como el número de líneas es $2 < 4$ se pasa a la fase dual.

$x_{11} = 1$
$x_{34} = 1$

$$C'' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -4 & -1 & 0 \\ -2 & -6 & -5 & 0 \\ -3 & -1 & -4 & 0 \end{bmatrix}$$

$e_o = \max\limits_{\substack{i \in S_r \\ j \in S_c}} \{\bar{c}_{ij}\} = \max\{-2,-4,-1,-2,-6,-5,-3,-1,-4\} = -1$

Las nuevas variables duales son:

$u_1' = 9$ $\qquad v_1' = -1$

$u_2' = 8+(-1) = 7$ $\qquad v_2' = -2$

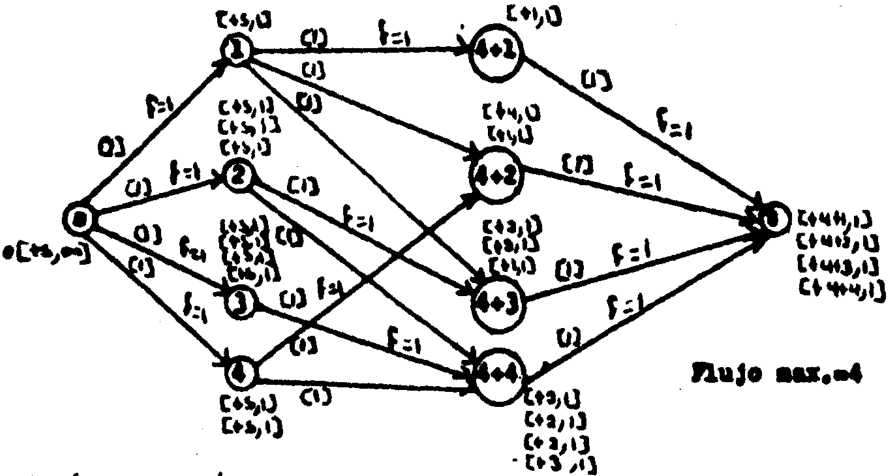
$u_3' = 9+(-1) = 8$ $\qquad v_3' = 0$

$u_4' = 6+(-1) = 5$ $\qquad v_4' = 0-(-1) = 1$

Se resta en C'' e_o de cada elemento no cubierto y se suma a cada elemento cubierto con dos líneas. Se obtiene:

$$C_1'' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & -3 & 0 & 0 \\ -1 & -5 & -4 & 0 \\ -2 & 0 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

Se construye la nueva red de flujo máximo a partir de C_1'':



Flujo max.=4

$A = \{s\}$ $\quad A^c = \{1,2,3,4,4+1,4+2,4+3,4+4,t\}$

$\mathcal{C} = \{(s,1),(s,2),(s,3),(s,4)\}$

Se trazan líneas sobre los renglones 1,2,3,4 de C_1''

$$C_1'' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & -3 & 0 & 0 \\ -1 & -5 & -4 & 0 \\ -2 & 0 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

Como el número de líneas es 4=n ya se tiene la solución óptima que es:

Para el problema primal: $\qquad$ Para el problema dual:

$x_{11} = 1$ $\qquad$ $u_1 = 9 \quad v_1 = -1$

$x_{21}=1$ $u_2=7$ $v_1=-2$

$x_{34}=1$ $u_3=8$ $v_3=0$

$x_{42}=1$ $u_4=5$ $v_4=1$

las demás $x_{ij}=0$

$z^*=27$ $w^*=27$

Estas soluciones se obtuvieron en dos iteraciones.

De la misma forma en que se hizo con PIII se hará con PII, es decir, se resolverá el problema con PII, primero cambiando la función objetivo de maximizar a minimizar y después haciéndo le cambios al algoritmo los cuales son los mismos que en PIII a saber:

En vez de tomar: $u_i=\min_{1\leq j\leq m}\{c_{ij}\}$ $i=1,\ldots,m$

$v_j=\min_{1\leq i\leq m}\{c_{ij}-u_i\}$ $j=1,\ldots,m$

se toma: $u_i=\max_{1\leq j\leq m}\{c_{ij}\}$ $i=1,\ldots,m$

$v_j=\max_{1\leq i\leq m}\{c_{ij}-u_i\}$ $j=1,\ldots,m$

para la solución dual factible inicial.

Y en lugar de tomar:

$$\Theta=(\bar{c}_{rk}/(\alpha_r+\beta_k))=\min_{(i,j)\notin Q}\left\{\bar{c}_{ij}/(\alpha_i+\beta_j)\mid \alpha_i+\beta_j>0\right\}$$

se toma:

$$\Theta=(\bar{c}_{rk}/(\alpha_r+\beta_k))=\max_{(i,j)\notin Q}\left\{\bar{c}_{ij}/(\alpha_i+\beta_j)\mid \alpha_i+\beta_j>0\right\}$$

De esta forma se elige el costo reducido correspondiente a la variable cuyo costo original puede incrementar más la función objetivo primal en caso de que la variable tome valor 1. Además se consérva la factibilidad dual.

Como ya se demostró en PII, los nuevos costos reducidos son de la forma: $\bar{c}'_{ij}=\bar{c}_{ij}-\bar{c}_{rk}\cdot(1/2)(\alpha_i+\beta_j)$

También se vio que si $\alpha_i+\beta_j>0$ entonces $\alpha_i+\beta_j=2$. Para (r,k), $\alpha_r+\beta_k=2$ por la forma en que se obtiene $\bar{c}_{rk}/(\alpha_r+\beta_k)$. Entonces - se tiene que: $\bar{c}'_{rk}=\bar{c}_{rk}-\bar{c}_{rk}\cdot(1/2)(2)=0$ lo cual hace que la po-- sición (r,k) sea candidata para que $x_{rk}=1$ en la siguiente iteración.

Primero se resolverá el problema tomándolo como en (3) y su dual como en (4), utilizando PII.

Matriz de costes

$$C=\begin{bmatrix} -8 & -7 & -9 & -9 \\ -5 & -2 & -7 & -8 \\ -6 & -1 & -4 & -9 \\ -2 & -3 & -2 & -6 \end{bmatrix}\begin{array}{l} u_1=-9 \\ u_2=-8 \\ u_3=-9 \\ u_4=-6 \end{array} \qquad C'=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 1 & 0 \\ 3 & 8 & 5 & 0 \\ 4 & 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$v_1=1 \quad v_2=2 \quad v_3=0 \quad v_4=0$$

Matriz de costes reducidos:

$$C''=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 6 & 5 & 0 \\ 3 & 1 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Q=\left\{(i,j)\mid \bar{c}_{ij}=0\right\}=\left\{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,4),(3,4),(4,4)\right\}$$

Problema primal restringido:

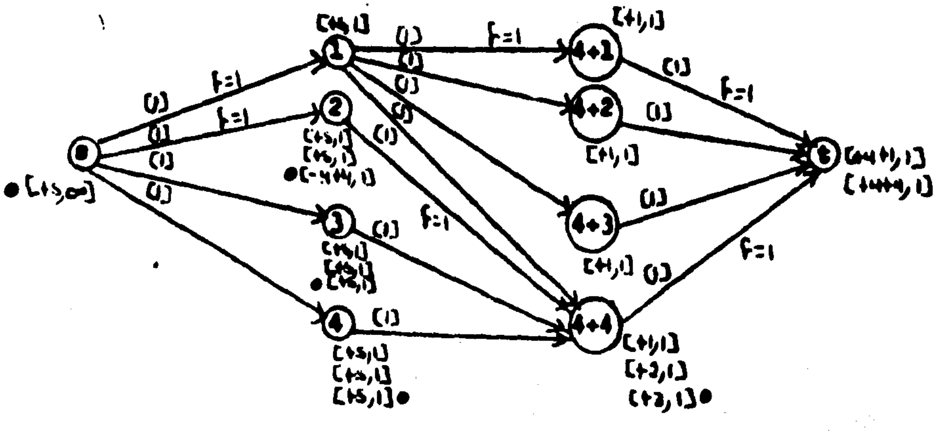
$$\text{Min } x_0=\sum_{i=1}^{4}x_{i\alpha}+\sum_{j=1}^{4}x_{\alpha j}$$

s.a.

$$(PR)\quad \begin{array}{lr} x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}+x_{1\alpha} & =1 \\ x_{24}+x_{2\alpha} & =1 \\ x_{34}+x_{3\alpha} & =1 \\ x_{44}+x_{4\alpha} & =1 \\ x_{11}+x_{\alpha 1} & =1 \\ x_{12}+x_{\alpha 2} & =1 \\ x_{13}+x_{\alpha 3} & =1 \\ x_{14}+x_{24}+x_{34}+x_{44}+x_{\alpha 4} & =1 \end{array}$$

$$x_{ij},\,x_{i\alpha},\,x_{\alpha j}\geq 0 \qquad i,j=1,\ldots,4$$

Se resuelve (PR) con la red restringida de flujo máximo:



La solución es $x_{11}=1$, $x_{24}=1$, las demás $x_{ij}=0$. Flujo máximo=2.

$A=\{s,3,4,2,4+4\}$ $\quad A^c=\{1,4+1,4+2,4+3,t\}$

$\mathcal{C}=\{(s,1),(4+4,t)\}$ $\quad$ Valor de $\mathcal{C}=2$

Se obtienen los valores de las $x_{i\alpha}$ y $x_{\alpha j}$

$$\left.\begin{array}{l} x_{11}=1 \text{ entonces } x_{1\alpha}=0,\ x_{\alpha 1}=0 \\ x_{24}=1 \text{ entonces } x_{2\alpha}=0,\ x_{\alpha 4}=0 \\ x_{3\alpha}=1,\ x_{\alpha 2}=1 \\ x_{4\alpha}=1,\ x_{\alpha 3}=1 \end{array}\right\} \text{Cumpliendo la factibilidad en (PR)}$$

Se tiene que $x_0^4=x_{3\alpha}+x_{4\alpha}+x_{\alpha 2}+x_{\alpha 3}=4>0$, entonces no se tiene aún una solución óptima para el problema, por lo tanto se obtiene la solución para (DR) y se pasa a la fase dual.

El problema dual de (PR) es:

Max $\delta=\alpha_1+\dots+\alpha_4+\beta_1+\dots+\beta_4$

s.a.

$$(\text{DR}) \quad \begin{array}{lll} \alpha_1+\beta_1\le 0 & \alpha_1\le 1 & \beta_1\le 1 \\ \alpha_1+\beta_2\le 0 & \alpha_2\le 1 & \beta_2\le 1 \\ \alpha_1+\beta_3\le 0 & \alpha_3\le 1 & \beta_3\le 1 \\ \alpha_1+\beta_4\le 0 & \alpha_4\le 1 & \beta_4\le 1 \\ \alpha_2+\beta_4\le 0 & & \\ \alpha_3+\beta_4\le 0 & & \\ \alpha_4+\beta_4\le 0 & \alpha_i,\beta_j \text{ sin restricción } i,j=1,\dots,4 & \end{array}$$

Se obtienen los valores de las α_i y β_j usando

$$\alpha_i=\begin{cases} 1 & i\in A \\ -1 & i\in A^c \end{cases} \qquad \beta_j=\begin{cases} -1 & m+j\in A \\ 1 & m+j\in A^c \end{cases}$$

$$\begin{array}{lll} \alpha_1=-1 & \beta_1=1 & \\ \alpha_2=1 & \beta_2=1 & \delta^*=x_0^4=4 \\ \alpha_3=1 & \beta_3=1 & \\ \alpha_4=1 & \beta_4=-1 & \end{array}$$

$\{(i,j)\mid(i,j)\notin Q\}=\{(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3),(4,1)$
$(4,2),(4,3)\}$

$$\begin{array}{lll} \alpha_2+\beta_1=2 & \alpha_3+\beta_1=2 & \alpha_4+\beta_1=2 \\ \alpha_2+\beta_2=2 & \alpha_3+\beta_2=2 & \alpha_4+\beta_2=2 \\ \alpha_2+\beta_3=2 & \alpha_3+\beta_3=2 & \alpha_4+\beta_3=2 \end{array}$$

$$\Theta=\min_{(i,j)\notin Q}\left\{\bar{c}_{ij}/(\alpha_i+\beta_j)\mid \alpha_i+\beta_j>0\right\}=\min\left\{\frac{\bar{c}_{21}}{2},\frac{\bar{c}_{22}}{2},\frac{\bar{c}_{23}}{2},\frac{\bar{c}_{31}}{2},\frac{\bar{c}_{32}}{2},\frac{\bar{c}_{33}}{2},\frac{\bar{c}_{41}}{2},\right.$$
$$\left.\frac{\bar{c}_{42}}{2},\frac{\bar{c}_{43}}{2}\right\}=\min\left\{\frac{2}{2},\frac{4}{2},\frac{1}{2},\frac{2}{2},\frac{6}{2},\frac{5}{2},\frac{3}{2},\frac{1}{2},\frac{4}{2}\right\}=\frac{1}{2}=\frac{\bar{c}_{23}}{2}$$

Se modifica la solución dual:

$u_1'=-9-(1/2)=-19/2$ $\qquad$ $v_1'=1+(1/2)=3/2$

$u'_2 = -8+(1/2) = -15/2 \qquad v'_2 = 2+(1/2) = 5/2$

$u'_3 = -9+(1/2) = -17/2 \qquad v'_3 = 0+(1/2) = 1/2$

$u'_4 = -6+(1/2) = -11/2 \qquad v'_4 = 0-(1/2) = -1/2$

Los nuevos costos reducidos son:

$$
\begin{array}{llll}
\bar{c}'_{11} = 0-\tfrac{1}{2}(0)=0 & \bar{c}'_{21} = 2-\tfrac{1}{2}(2)=1 & \bar{c}'_{31} = 2-\tfrac{1}{2}(2)=1 & \bar{c}'_{41} = 3-\tfrac{1}{2}(2)=2 \\
\bar{c}'_{12} = 0-\tfrac{1}{2}(0)=0 & \bar{c}'_{22} = 4-\tfrac{1}{2}(2)=3 & \bar{c}'_{32} = 6-\tfrac{1}{2}(2)=5 & \bar{c}'_{42} = 1-\tfrac{1}{2}(2)=0 \\
\bar{c}'_{13} = 0-\tfrac{1}{2}(0)=0 & \bar{c}'_{23} = 1-\tfrac{1}{2}(2)=0 & \bar{c}'_{33} = 5-\tfrac{1}{2}(2)=4 & \bar{c}'_{43} = 4-\tfrac{1}{2}(2)=3 \\
\bar{c}'_{14} = 0-\tfrac{1}{2}(-2)=1 & \bar{c}'_{24} = 0-\tfrac{1}{2}(0)=0 & \bar{c}'_{34} = 0-\tfrac{1}{2}(0)=0 & \bar{c}'_{44} = 0-\tfrac{1}{2}(0)=0
\end{array}
$$

Se vuelve a la fase primal:

$Q = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,3),(2,4),(3,4),(4,2),(4,4)\}$

Problema primal restringido:

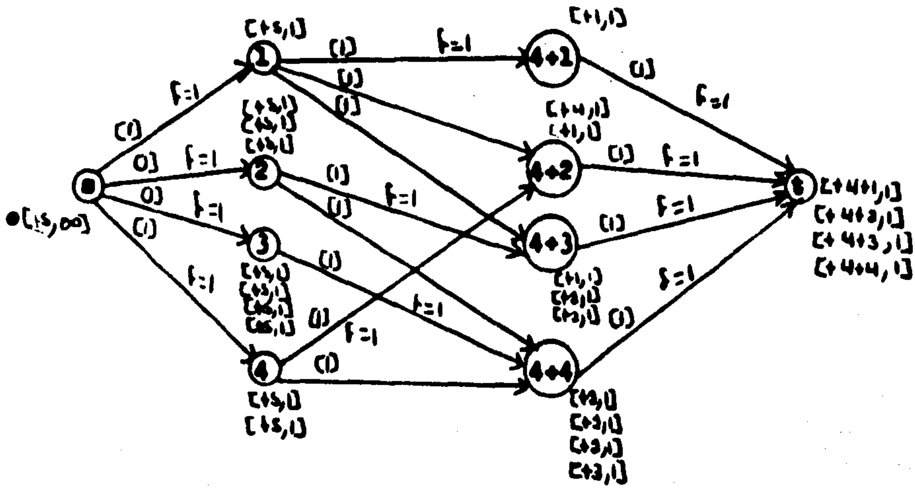
$$\text{Min } x_0 = \sum_{i=1}^{4} x_{i\alpha} + \sum_{j=1}^{4} x_{\alpha j}$$

s.a.

$$
(PR)\quad
\begin{array}{l}
x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{1\alpha}=1 \\
x_{23}+x_{24}+x_{2\alpha}=1 \\
x_{34}+x_{3\alpha}=1 \\
x_{42}+x_{44}+x_{4\alpha}=1 \\
x_{11}+x_{\alpha 1}=1 \\
x_{12}+x_{42}+x_{\alpha 2}=1 \\
x_{13}+x_{23}+x_{\alpha 3}=1 \\
x_{24}+x_{34}+x_{44}+x_{\alpha 4}=1
\end{array}
$$

$$x_{ij}, x_{i\alpha}, x_{\alpha j} \geq 0 \qquad i,j=1,\dots,4$$

Se resuelve (PR) con la red restringida de flujo máximo:



La solución es $x_{11}=1, x_{23}=1, x_{34}=1, x_{42}=1$, las demás $x_{ij}=0$. Flujo máximo=4.

$A=\{s\}$ $\quad A^c=\{1,2,3,4,4+1,4+2,4+3,4+4,t\}$

$\mathcal{C}=\{(s,1),(s,2),(s,3),(s,4)\}$ $\quad$ Valor de $\mathcal{C}=4$

Se obtienen los valores de las $x_{i\alpha}$ y $x_{\alpha j}$

$$\left.\begin{array}{l} x_{11}=1 \text{ entonces } x_{1\alpha}=0,\ x_{\alpha 1}=0 \\ x_{23}=1 \text{ entonces } x_{2\alpha}=0,\ x_{\alpha 3}=0 \\ x_{34}=1 \text{ entonces } x_{3\alpha}=0,\ x_{\alpha 4}=0 \\ x_{42}=1 \text{ entonces } x_{4\alpha}=0,\ x_{\alpha 2}=0 \end{array}\right\} \text{Cumpliendo la factibilidad en (PR).}$$

Se tiene que $x_o^{*}=\sum_{i=1}^{4} x_{i\alpha}+\sum_{j=1}^{4} x_{\alpha j}=0$, entonces se tiene ya la solución óptima que es:

Para el problema primal:	Para el problema dual:	
$x_{11}=1$	$u_1=-19/2$	$v_1=3/2$
$x_{23}=1$	$u_2=-15/2$	$v_2=5/2$
$x_{34}=1$	$u_3=-17/2$	$v_3=1/2$
$x_{42}=1$	$u_4=-11/2$	$v_4=-1/2$
las demás $x_{ij}=0$		
$z^{*}=-z'^{*}=-(-27)=27$	$w'^{*}=-\max w=-(-27)=27$	

Estas soluciones se obtuvieron en dos iteraciones.

Ahora se resolverá el problema tomándolo como en (1) y en (2) haciendo al algoritmo en PII los cambios ya descritos.

Matriz de costos:

$$C=\begin{bmatrix} 8 & 7 & 9 & 9 \\ 5 & 2 & 7 & 8 \\ 6 & 1 & 4 & 9 \\ 2 & 3 & 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{array}{l} u_1=9 \\ u_2=8 \\ u_3=9 \\ u_4=6 \end{array} \qquad C'=\begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 & 0 \\ -3 & -6 & -1 & 0 \\ -3 & -8 & -5 & 0 \\ -4 & -3 & -4 & 0 \end{bmatrix}$$

$v_1=-1 \quad v_2=-2 \quad v_3=0 \quad v_4=0$

Matriz de costos reducidos:

$$C''=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -4 & -1 & 0 \\ -2 & -6 & -5 & 0 \\ -3 & -1 & -4 & 0 \end{bmatrix}$$

$Q=\{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,4),(3,4),(4,4)\}$

Problema primal restringido:

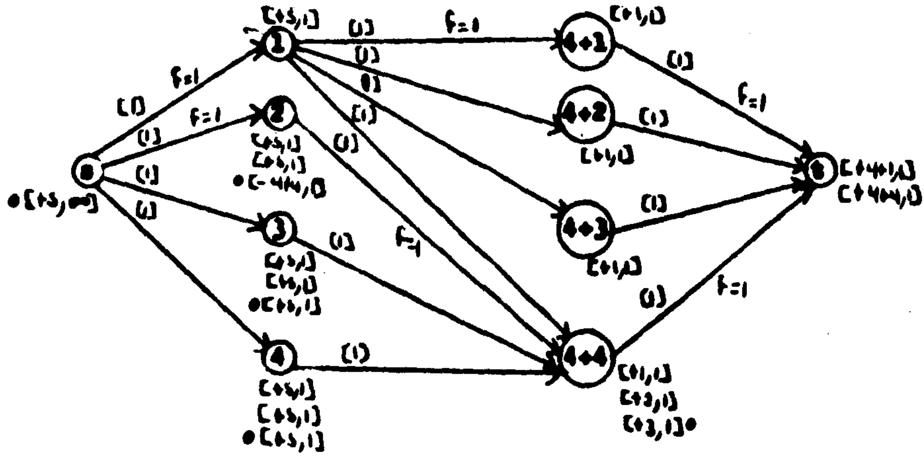
$$\text{Min } x_0 = \sum_{i=1}^{4} x_{i\alpha} + \sum_{j=1}^{4} x_{\alpha j}$$

s.a.

$$(PR)\quad \begin{array}{llllllllllllll}
x_{11} & +x_{12} & +x_{13} & +x_{14} & & & & +x_{1\alpha} & & & & & & =1 \\
 & & & x_{24} & & & & & +x_{2\alpha} & & & & & =1 \\
 & & & & x_{34} & & & & & +x_{3\alpha} & & & & =1 \\
 & & & & & x_{44} & & & & & +x_{4\alpha} & & & =1 \\
x_{11} & & & & & & & & & & & +x_{\alpha 1} & & =1 \\
 & x_{12} & & & & & & & & & & +x_{\alpha 2} & & =1 \\
 & & x_{13} & & & & & & & & & +x_{\alpha 3} & & =1 \\
 & & & x_{14} & +x_{24} & +x_{34} & +x_{44} & & & & & & +x_{\alpha 4} & =1
\end{array}$$

$$x_{ij},\, x_{i\alpha},\, x_{\alpha j} \geq 0 \qquad i,j=1,\ldots,4$$

Se resuelve (PR) con la red restringida de flujo máximo:



La solución es: $x_{11}=1, x_{24}=1$, las demás $x_{ij}=0$. Flujo máximo=2.

$A=\{s,3,4,2,4+4\}$ $\quad A^c=\{1,4+1,4+2,4+3,t\}$

$C=\{(s,1),(4+4,t)\}$ $\quad$ Valor de C =2

Se obtienen los valores de las $x_{i\alpha}$ y $x_{\alpha j}$

$x_{11}=1$ entonces $x_{1\alpha}=0$, $x_{\alpha 1}=0$
$x_{24}=1$ entonces $x_{2\alpha}=0$, $x_{\alpha 4}=0$
$x_{3\alpha}=1$ $\quad x_{\alpha 3}=1$
$x_{4\alpha}=1$ $\quad x_{\alpha 2}=1$

Cumpliendo la factibilidad en (PR).

Se tiene que $x_0^R=x_{3\alpha}+x_{4\alpha}+x_{\alpha 2}+x_{\alpha 3}=4>0$, entonces no se tiene aún una solución óptima para el problema, por lo tanto se obtiene la solución para (DR) y se pasa a la fase dual.

El problema dual de (PR) es:

$$\text{Max } \hat{w} = \alpha_1 + \ldots + \alpha_4 + \beta_1 + \ldots + \beta_4$$

s.a.

$$(\text{DR}) \quad \begin{array}{lll}
\alpha_1 + \beta_1 \leq 0 & \alpha_1 \leq 1 & \beta_1 \leq 1 \\
\alpha_1 + \beta_2 \leq 0 & \alpha_2 \leq 1 & \beta_2 \leq 1 \\
\alpha_1 + \beta_3 \leq 0 & \alpha_3 \leq 1 & \beta_3 \leq 1 \\
\alpha_1 + \beta_4 \leq 0 & \alpha_4 \leq 1 & \beta_4 \leq 1 \\
\alpha_2 + \beta_4 \leq 0 & & \\
\alpha_3 + \beta_4 \leq 0 & \alpha_i, \beta_j \text{ sin restricción} & \\
\alpha_4 + \beta_4 \leq 0 & \quad i,j=1,\ldots,4 &
\end{array}$$

Se obtienen los valores de las α_i y β_j usando

$$\alpha_i = \begin{cases} 1 & i \in A \\ -1 & i \in A^c \end{cases} \qquad \beta_j = \begin{cases} -1 & m+j \in A \\ 1 & m+j \in A^c \end{cases}$$

$$\begin{array}{lll}
\alpha_1 = -1 & \beta_1 = 1 & \hat{w}^* = x_0^* = 4 \\
\alpha_2 = 1 & \beta_2 = 1 & \\
\alpha_3 = 1 & \beta_3 = 1 & \\
\alpha_4 = 1 & \beta_4 = -1 &
\end{array}$$

$$\{(i,j) \mid (i,j) \notin Q\} = \{(2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (3,3), (4,1), (4,2), (4,3)\}$$

$$\begin{array}{lll}
\alpha_2 + \beta_1 = 2 & \alpha_3 + \beta_1 = 2 & \alpha_4 + \beta_1 = 2 \\
\alpha_2 + \beta_2 = 2 & \alpha_3 + \beta_2 = 2 & \alpha_4 + \beta_2 = 2 \\
\alpha_2 + \beta_3 = 2 & \alpha_3 + \beta_3 = 2 & \alpha_4 + \beta_3 = 2
\end{array}$$

$$\theta = \max_{(i,j) \notin Q} \{\bar{c}_{ij} / (\alpha_i + \beta_j) \mid \alpha_i + \beta_j > 0\} = \max\left\{\frac{\bar{c}_{21}}{2}, \frac{\bar{c}_{22}}{2}, \frac{\bar{c}_{23}}{2}, \frac{\bar{c}_{31}}{2}, \frac{\bar{c}_{32}}{2}, \frac{\bar{c}_{33}}{2}, \frac{\bar{c}_{41}}{2}, \frac{\bar{c}_{42}}{2}, \frac{\bar{c}_{43}}{2}\right\} = \max\left\{\frac{-2}{2}, \frac{-4}{2}, \frac{-1}{2}, \frac{-2}{2}, \frac{-6}{2}, \frac{-5}{2}, \frac{-3}{2}, \frac{-1}{2}, \frac{-4}{2}\right\} = \frac{-1}{2} = \frac{\bar{c}_{23}}{2}$$

Se modifica la solución dual:

$$\begin{array}{ll}
u_1' = 9 + (1/2) = 19/2 & v_1' = -1 - (1/2) = -3/2 \\
u_2' = 8 - (1/2) = 15/2 & v_2' = -2 - (1/2) = -5/2 \\
u_3' = 9 - (1/2) = 17/2 & v_3' = 0 - (1/2) = -1/2 \\
u_4' = 6 - (1/2) = 11/2 & v_4' = 0 + (1/2) = 1/2
\end{array}$$

Los nuevos costos reducidos son:

$$\begin{array}{ll}
\bar{c}_{11}' = 0 + (1/2)0 = 0 & \bar{c}_{31}' = -2 + (1/2)2 = -1 \\
\bar{c}_{12}' = 0 + (1/2)0 = 0 & \bar{c}_{32}' = -6 + (1/2)2 = -5 \\
\bar{c}_{13}' = 0 + (1/2)0 = 0 & \bar{c}_{33}' = -5 + (1/2)2 = -4 \\
\bar{c}_{14}' = 0 + (1/2)(-2) = -1 & \bar{c}_{34}' = 0 + (1/2)0 = 0 \\
\bar{c}_{21}' = -2 + (1/2)2 = -1 & \bar{c}_{41}' = -3 + (1/2)2 = -2 \\
\bar{c}_{22}' = -4 + (1/2)2 = -3 & \bar{c}_{42}' = -1 + (1/2)2 = 0 \\
\bar{c}_{23}' = -1 + (1/2)2 = 0 & \bar{c}_{43}' = -4 + (1/2)2 = -3 \\
\bar{c}_{24}' = 0 + (1/2)0 = 0 & \bar{c}_{44}' = 0 + (1/2)0 = 0
\end{array}$$

Se vuelve a la fase primal:

$Q=\{(1,1),(1,2),(1,3),(2,3),(2,4),(3,4),(4,2),(4,4)\}$

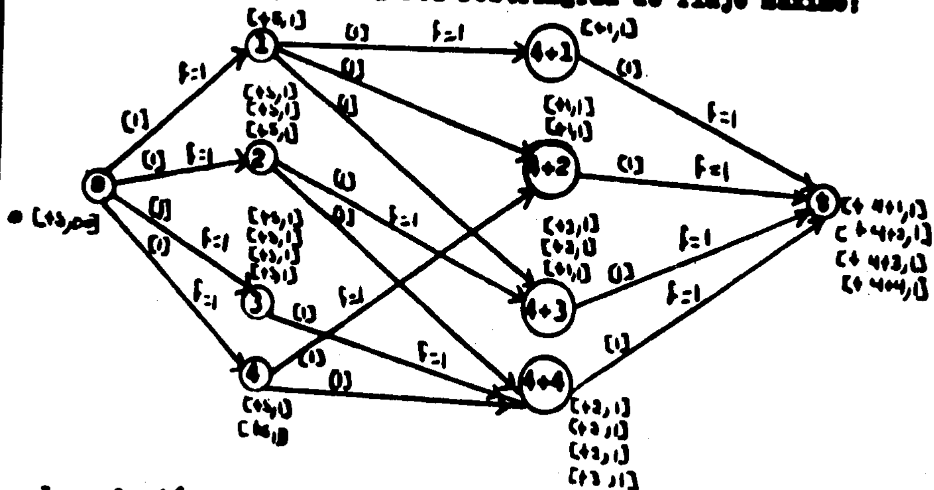
Problema primal restringido:

$$\text{Min } x_0=\sum_{i=1}^{4} x_{i\alpha}+\sum_{j=1}^{4} x_{\alpha j}$$

s.a.

$$(\text{PR})\quad \begin{array}{l}
x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{1\alpha}=1\\
x_{23}+x_{24}+x_{2\alpha}=1\\
x_{34}+x_{3\alpha}=1\\
x_{42}+x_{44}+x_{4\alpha}=1\\
x_{11}+x_{\alpha 1}=1\\
x_{12}+x_{42}+x_{\alpha 2}=1\\
x_{13}+x_{23}+x_{\alpha 3}=1\\
x_{24}+x_{34}+x_{44}+x_{\alpha 4}=1\\
x_{ij},x_{i\alpha},x_{\alpha j}\geq 0 \qquad i,j=1,\dots,4
\end{array}$$

Se resuelve (PR) con la red restringida de flujo máximo:



La solución es $x_{11}=1, x_{23}=1, x_{34}=1, x_{42}=1$, las demás $x_{ij}=0$

Flujo máximo=4

$A=\{s\}$ $\quad A^c=\{1,2,3,4,4+1,4+2,4+3,4+4,t\}$

$\mathcal{C}=\{(s,1),(s,2),(s,3),(s,4)\}$ $\quad$ Valor de $\mathcal{C}=4$

Se obtienen los valores de las variables $x_{i\alpha}$ y $x_{\alpha j}$

$x_{11}=1$ entonces $x_{1\alpha}=0,\ x_{\alpha 1}=0$
$x_{23}=1$ entonces $x_{2\alpha}=0,\ x_{\alpha 3}=0$
$x_{34}=1$ entonces $x_{3\alpha}=0,\ x_{\alpha 4}=0$
$x_{42}=1$ entonces $x_{4\alpha}=0,\ x_{\alpha 2}=0$

Cumpliendo la factibilidad en (PR)

Se tiene que $x_0^* = \sum_{i=1}^{4} x_{i\alpha} + \sum_{j=1}^{4} x_{\alpha j} = 0$, entonces se tiene ya la solución óptima que es:

Para el problema primal:

$x_{11} = 1$

$x_{23} = 1$

$x_{34} = 1$

$x_{42} = 1$

las demás $x_{ij} = 0$

$z^* = 27$

Para el problema dual:

$u_1 = 19/2 \qquad v_1 = -3/2$

$u_2 = 15/2 \qquad v_2 = -5/2$

$u_3 = 17/2 \qquad v_3 = -1/2$

$u_4 = 11/2 \qquad v_4 = 1/2$

$w^* = 27$

Estas soluciones se obtuvieron en dos iteraciones.

En PIII se resolvió el siguiente problema:

Minimizar $z = 2x_{11} + 5x_{12} + 7x_{13} + 4x_{21} + 2x_{22} + x_{23} + 2x_{31} + 6x_{32} + 5x_{33}$

s.a.

$$\sum_{j=1}^{3} x_{ij} = 1 \qquad i = 1, \dots, 3$$

$$\sum_{i=1}^{3} x_{ij} = 1 \qquad j = 1, \dots, 3$$

$$x_{ij} \geq 0 \qquad i, j = 1, \dots, 3$$

cuyo dual es:

Maximizar $w = \sum_{i=1}^{3} u_i + \sum_{j=1}^{3} v_j$

s.a.

$$\begin{aligned} u_1 + v_1 &\leq 2 \\ u_1 + v_2 &\leq 5 \\ u_1 + v_3 &\leq 7 \\ u_2 + v_1 &\leq 4 \\ u_2 + v_2 &\leq 2 \\ u_2 + v_3 &\leq 1 \\ u_3 + v_1 &\leq 2 \\ u_3 + v_2 &\leq 6 \\ u_3 + v_3 &\leq 5 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} &u_i, v_j \text{ sin restricción} \\ &i, j = 1, \dots, 3 \end{aligned}$$

Las soluciones óptimas que se obtuvieron son:

Para el problema primal:

$x_{12} = 1$

$x_{23} = 1$

$x_{31} = 1$

las demás $x_{ij} = 0 \qquad z^* = 8$

Para el problema dual:

$u_1 = 4 \qquad v_1 = -2$

$u_2 = 1 \qquad v_2 = 1$

$u_3 = 4 \qquad v_3 = 0$

$w^* = 8$

Estas soluciones se obtuvieron en dos iteraciones.

Para resolver el problema anterior con PI se necesita hacer algunos cambios ya que ahora se tiene la función objetivo a minimizar (en el problema primal). Los cambios son:

En lugar de tomar $a_i = \max_j r_{ij}$ y $b_j = \max_i r_{ij}$ se tomará $a_i = \min_j r_{ij}$ y $b_j = \min_i r_{ij}$

Además, en vez de hacer:

$$\text{Si } \tilde{a} \leq b \text{ entonces} \begin{cases} u_i = a_i & i=1,\dots,m \\ v_j = 0 & j=1,\dots,n \end{cases}$$

$$\text{Si } a > b \text{ entonces} \begin{cases} u_i = 0 & i=1,\dots,m \\ v_j = b_j & j=1,\dots,n \end{cases}$$

se hará:

$$\text{Si } a \leq b \text{ entonces} \begin{cases} u_i = 0 & i=1,\dots,m \\ v_j = b_j & j=1,\dots,n \end{cases}$$

$$\text{Si } a > b \text{ entonces} \begin{cases} u_i = a_i & i=1,\dots,m \\ v_j = 0 & j=1,\dots,n \end{cases}$$

Con lo anterior se estará cumpliendo con las restricciones que son de la forma $u_i + v_j \leq r_{ij}$ y además se toma el mayor valor inicial posible para w que en este caso se quiere maximizar.

Otro cambio es tomar $d = \max\limits_{\substack{i,j \text{ no} \\ \text{esenciales}}} \{u_i + v_j - r_{ij}\}$ en lugar de $d = \min\limits_{\substack{i,j \text{ no} \\ \text{esenciales}}} \{u_i + v_j - r_{ij}\}$ ya que esta vez se quiere minimizar z.

Obsérvese que en PI se utilizan los $u_i + v_j - r_{ij}$ en lugar de $r_{ij} - u_i - v_j$ para obtener d, por lo cual, cuando se maximiza se toma $d = \min\limits_{\substack{i,j \text{ no} \\ \text{esenciales}}} \{u_i + v_j - r_{ij}\}$ y cuando se minimiza se toma $d = \max\limits_{\substack{i,j \text{ no} \\ \text{esenciales}}} \{u_i + v_j - r_{ij}\}$ al contrario de lo que se hace en PII y PIII en las que se toma $c_{ij} - u_i - v_j$.

Al tomar d como el máximo de los $u_i + v_j - r_{ij}$ para i, j no esenciales se está considerando el costo que puede disminuir más el valor de s en caso de que su variable correspondiente tome valor 1.

El cambio de las variables duales se realiza de la misma forma que en el caso a maximizar z, es decir,

Caso 1. Para todos los renglones no esenciales i, $u_i > 0$.

Se calcula $n = \min_{\substack{i \text{ no} \\ \text{esenciales}}} \{d, u_i\}$

Entonces:

$u_i \rightarrow u_i - n$ para todos los renglones i no esenciales.

$v_j \rightarrow v_j + n$ para todas las columnas j esenciales.

$u_i \rightarrow u_i$ para todos los renglones i esenciales.

$v_j \rightarrow v_j$ para todas las columnas j no esenciales.

Caso 2 Para algún renglón no esencial i, $u_i = 0$

Se calcula $n = \min_{\substack{j \text{ no} \\ \text{esenciales}}} \{d, v_j\}$

Entonces:

$u_i \rightarrow u_i + n$ para todos los renglones i esenciales.

$v_j \rightarrow v_j - n$ para todas las columnas j no esenciales.

$u_i \rightarrow u_i$ para todos los renglones i no esenciales.

$v_j \rightarrow v_j$ para todas las columnas j esenciales.

Obsérvese que en el caso de Mins y Maxw, n es siempre negativa ya que de es siempre negativa porque $u_i + v_j - r_{ij} < 0$ para i, j no esenciales.

Entonces, al cambiar las variables duales, las que corresponden a renglones y columnas no esenciales se aumentan o se dejan igual y las que corresponden a renglones y columnas esenciales se disminuyen o se dejan igual.

De esta forma, además de conservarse la factibilidad dual se da oportunidad de que posiciones (i, j) con i, j no esenciales, sean las que tengan $u_i + v_j = r_{ij}$ y se consideren para la asignación siguiente.

Considerando todo lo anterior se resolverá el problema de PIII con PI.

Matriz de costos:

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 4 & 2 & 1 \\ 2 & 6 & 5 \end{bmatrix}$$

$a_1 = \min \{2,5,7\} = 2$ $\qquad$ $b_1 = \min \{2,4,2\} = 2$

$a_2 = \min \{4,2,1\} = 1$ $\qquad$ $b_2 = \min \{5,2,6\} = 2$

$a_3 = \min \{2,6,5\} = 2$ $\qquad$ $b_3 = \min \{7,1,5\} = 1$

$a = \sum_{i=1}^{3} a_i = 5$ $\qquad$ $b = \sum_{j=1}^{3} b_j = 5$

Como a=b entonces:

$u_1 = 0 \qquad v_1 = 2$

$u_2 = 0 \qquad v_2 = 2$

$u_3 = 0 \qquad v_3 = 1$

$u_1 + v_1 = 2 = r_{11}$ $\qquad$ $u_2 + v_1 = 2 < r$ $\qquad$ $u_3 + v_1 = 2 = r$

$u_1 + v_2 = 2 < r_{12}$ $\qquad$ $u_2 + v_2 = 2 = r$ $\qquad$ $u_3 + v_2 = 2 < r$

$u_1 + v_3 = 1 < r_{13}$ $\qquad$ $u_2 + v_3 = 1 = r$ $\qquad$ $u_3 + v_3 = 1 < r$

Se construye la matriz Q:

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Se realiza el proceso de marcar 1's con asteriscos sin que haya dos en el mismo renglón o columna. Se marca el primer 1 en cada renglón (pero no en la columna de una marca previa) porque a=b.

$$Q = \begin{bmatrix} 1^* & 0 & 0 \\ 0 & 1^* & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Es posible hacer la transferencia de (2,2) a (2,3), pero conduce a una asignación completa.

El renglón 1 no es esencial.

El renglón 2 es esencial.

El renglón 3 no es esencial.

La columna 1 es esencial.

La columna 2 no es esencial.

La columna 3 no es esencial.

Se marcan en la matriz de costos las líneas esenciales:

$$\begin{array}{c|ccc} u_i \backslash v_j & \cancel{} & 2 & 1 \\ \hline 0 & \cancel{} & 5 & 7 \\ \cancel{} & \cancel{} & \cancel{} & \cancel{2} \\ 0 & \cancel{} & 6 & 5 \end{array}$$

Se tiene el caso 2: $u_1=u_3=0$

$$d=\max_{\substack{i,j \text{ no} \\ \text{esenciales}}} \{u_i+v_j-r_{ij}\} = \max\{u_1+v_2-r_{12},\ u_1+v_3-r_{13},\ u_3+v_2-r_{32},\ u_3+v_3-r_{33}\}$$

$$=\max\{-3,-6,-4,-4\} = -3$$

$$\delta=\min_{\substack{j \text{ no} \\ \text{esenciales}}} \{d, v_j\} = \min\{-3,2,1\} = -3$$

Se cambian las variables duales:

$u_1=0$	$v_1=2$
$u_2=0+(-3)=-3$	$v_2=2-(-3)=5$
$u_3=0$	$v_3=1-(-3)=4$

$u_1+v_1=2=r_{11}$	$u_2+v_1=-1<r_{21}$	$u_3+v_1=2=r_{31}$
$u_1+v_2=5=r_{12}$	$u_2+v_2=2=r_{22}$	$u_3+v_2=5<r_{32}$
$u_1+v_3=4<r_{13}$	$u_2+v_3=1=r_{23}$	$u_3+v_3=4<r_{33}$

$$Q=\begin{bmatrix} 1^* & 1 & 0 \\ 0 & 1^* & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Se pueden hacer las transferencias marcadas con flechas: cambiar (1,1) por (1,2) y (2,2) por (2,3).

Así se puede asignar el individuo 3 al trabajo 1 obteniéndose la siguiente asignación que es completa después de cada trans ferencia, que de hecho la única posible es la que consiste en no mover ningún individuo y ningún trabajo.

$$Q=\begin{bmatrix} 1 & 1^* & 0 \\ 0 & 1 & 1^* \\ 1^* & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ningún renglón es esencial y las tres columnas sí lo son. Todos los individuos y todos los trabajos están asignados.

La solucion óptima es:

Para el problema primal: Para el problema dual:

$x_{12}=1$ $\quad u_1=0 \quad v_1=2$
$x_{23}=1$ $\quad u_2=-3 \quad v_2=5$
$x_{31}=1$ $\quad u_3=0 \quad v_3=4$
las demás $x_{ij}=0$
$z^*=8$ $\quad w^*=8$

Estas soluciones se obtuvieron en dos iteraciones.

Obsérvese que con los cambios que se hicieron en PI, el algoritmo ya no conserva las variables duales no negativas porque puede suceder, que al tenerse el caso 2, exista un renglón esencial i con $u_i=0$ y al cambiar las variables duales se le sumará a que es negativa, o en el caso 1 se podría tener una columna esencial j con $v_j=0$ y al hacer el cambio de variables se le sumará $a<0$.

En PII se resolvió el problema siguiente:

Minimizar $z=7x_{11}+6x_{12}+8x_{13}+8x_{14}+4x_{21}+x_{22}+6x_{23}+7x_{24}+$
$5x_{31}+2x_{32}+3x_{33}+8x_{34}+2x_{41}+4x_{42}+2x_{43}+5x_{44}$

s.a.
$$\sum_{j=1}^{4} x_{ij}=1 \qquad i=1,\dots,m=4$$
$$\sum_{i=1}^{4} x_{ij}=1 \qquad j=1,\dots,4$$
$$x_{ij}\geq 0 \qquad i,j=1,\dots,4$$

El problema dual es:

maximizar $w=\sum_{i=1}^{4} u_i+\sum_{j=1}^{4} v_j$
s.a.

$u_1+v_1\leq 7 \qquad u_3+v_1\leq 5$
$u_1+v_2\leq 6 \qquad u_3+v_2\leq 2$
$u_1+v_3\leq 8 \qquad u_3+v_3\leq 3$
$u_1+v_4\leq 8 \qquad u_3+v_4\leq 8$
$u_2+v_1\leq 4 \qquad u_4+v_1\leq 2$
$u_2+v_2\leq 1 \qquad u_4+v_2\leq 4$
$u_2+v_3\leq 6 \qquad u_4+v_3\leq 2$
$u_2+v_4\leq 7 \qquad u_4+v_4\leq 5$

u_i, v_j sin restricción $i,j=1,\dots,4$

Las soluciones obtenidas fueron:

Para el problema primal:

$x_{14}=1$

$x_{22}=1$

$x_{33}=1$

$x_{41}=1$

las demás $x_{ij}=0$

$z^*=14$

Para el problema dual:

$u_1=11/2$ $\quad v_1=1/2$

$u_2=3/2$ $\quad v_2=-1/2$

$u_3=5/2$ $\quad v_3=1/2$

$u_4=3/2$ $\quad v_4=5/2$

$w^*=14$

Las soluciones se obtuvieron en dos iteraciones.

Ahora se resolverá este problema utilizando PI con los cambios ya explicados de la misma forma en que se hizo con el ejemplo de PIII.

Matriz de costos:

$$\begin{bmatrix} 7 & 6 & 8 & 8 \\ 4 & 1 & 6 & 7 \\ 5 & 2 & 3 & 8 \\ 2 & 4 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

$a_1=\min\{7,6,8,8\}=6$ $\qquad$ $b_1=\min\{7,4,5,2\}=2$

$a_2=\min\{4,1,6,7\}=1$ $\qquad$ $b_2=\min\{6,1,2,4\}=1$

$a_3=\min\{5,2,3,8\}=2$ $\qquad$ $b_3=\min\{8,6,3,2\}=2$

$a_4=\min\{2,4,2,5\}=2$ $\qquad$ $b_4=\min\{8,7,8,5\}=5$

$a=\sum_{i=1}^{4} a_i=11$ $\qquad$ $b=\sum_{j=1}^{4} b_j=10$

Como $a>b$ entonces:

$u_1=6$ $\quad v_1=0$

$u_2=1$ $\quad v_2=0$

$u_3=2$ $\quad v_3=0$

$u_4=2$ $\quad v_4=0$

$u_1+v_1=6<r_{11}$ $\quad u_2+v_1=1<r_{21}$ $\quad u_3+v_1=2<r_{31}$ $\quad u_4+v_1=2=r_{41}$

$u_1+v_2=6=r_{12}$ $\quad u_2+v_2=1=r_{22}$ $\quad u_3+v_2=2=r_{32}$ $\quad u_4+v_2=2<r_{42}$

$u_1+v_3=6<r_{13}$ $\quad u_2+v_3=1<r_{23}$ $\quad u_3+v_3=2<r_{33}$ $\quad u_4+v_3=2=r_{43}$

$u_1+v_4=6<r_{14}$ $\quad u_2+v_4=1<r_{24}$ $\quad u_3+v_4=2<r_{34}$ $\quad u_4+v_4=2<r_{44}$

Se construye la matriz Q:

$$Q=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Se marca el mayor número posible de 1's sin que haya dos en el mismo renglón o en la misma columna. Como a > b se marca el primer 1 de cada columna, pero no en el renglón de un 1 ya marcado.

$$Q=\begin{bmatrix} 0 & 1^{*} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1^{*} & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Se puede hacer la transferencia del individuo 4 al trabajo 3, es decir, cambiar (4,1) por (4,3), pero esto conduce a una asignación completa.

El renglón 4 es esencial.
Los renglones 1,2,3 no son esenciales.
La columna 2 es esencial.
Las columnas 1,3,4 no son esenciales.
Se marcan en la matriz de costos las líneas esenciales:

$u_i \backslash v_j$	0	[illegible]	0	0
6	7	[illegible]	8	8
1	4	[illegible]	6	7
2	5	[illegible]	3	8
[illegible]	[illegible]	[illegible]	2	[illegible]

Se tiene el caso 1, $u_i > 0 \quad i=1,\ldots,3$

$$d=\max_{\substack{\text{líneas}\\ \text{ordinales}}}\left\{u_i+v_j-r_{ij}\right\} =\max\left\{u_1+v_1-r_{11},\ u_1+v_3-r_{13},\ u_1+v_4-r_{14},\ u_2+v_1-r_{21},\ u_2+v_3-r_{23},\ u_2+v_4-r_{24},\ u_3+v_1-r_{31},\ u_3+v_3-r_{33},\ u_3+v_4-r_{34}\right\} =$$

$$=\max\left\{-1,-2,-2,-3,-5,-6,-3,-1,-6\right\}=-1$$

$$n=\min_{\substack{\text{no}\\ \text{esenciales}}}\left\{d,u_i\right\}=\min\left\{-1,6,1,2\right\}=-1$$

Se cambian las variables duales:

$u_1=6-(-1)=7 \qquad v_1=0$
$u_2=1-(-1)=2 \qquad v_2=0+(-1)=-1$
$u_3=2-(-1)=3 \qquad v_3=0$
$u_4=2 \qquad v_4=0$

$u_1+v_1=7=r_{11} \qquad u_2+v_1=2<r_{21} \qquad u_3+v_1=3<r_{31} \qquad u_4+v_1=2=r_{41}$

$u_1+v_2=6=r_{12}$ $\quad u_2+v_2=1=r_{22}$ $\quad u_3+v_2=2=r_{32}$ $\quad u_4+v_2=1<r_{42}$

$u_1+v_3=7<r_{13}$ $\quad u_2+v_3=2<r_{23}$ $\quad u_3+v_3=3=r_{33}$ $\quad u_4+v_3=2=r_{43}$

$u_1+v_4=7<r_{14}$ $\quad u_2+v_4=2<r_{24}$ $\quad u_3+v_4=3<r_{34}$ $\quad u_4+v_4=2<r_{44}$

$$Q=\begin{bmatrix} 1 & 1^* & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1^* & 0 \\ 1^* & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Se agrega (3,3) a la asignación y se tiene una asignación completa. No es posible hacer transferencias.

Ningún renglón es esencial.

Las columnas 1,2,3 son esenciales.

La columna 4 no es esencial.

Se marcan en la matriz de costos las líneas esenciales:

$$\begin{array}{c|cccc} {}_{u_i}\backslash^{v_j} & \cancel{0} & \cancel{-1} & \cancel{0} & 0 \\ \hline 7 & \cancel{7} & \cancel{6} & \cancel{8} & 8 \\ 2 & \cancel{4} & \cancel{1} & \cancel{3} & 7 \\ 3 & \cancel{4} & \cancel{2} & \cancel{3} & 8 \\ 2 & \cancel{2} & \cancel{4} & \cancel{2} & 5 \end{array}$$

Se tiene el Caso 1, para toda u_i con i no esencial $u_i>0$

$\delta=\max\limits_{\substack{j\ \text{no} \\ \text{esenciales}}}\{u_i+v_j-r_{ij}\}=\max\{u_1+v_4-r_{14},u_2+v_4-r_{24},u_3+v_4-r_{34},u_4+v_4$
$-r_{44}\}=\max\{-1,-5,-5,-3\}=-1$ $\quad \eta=\min\limits_{\substack{i\ \text{no} \\ \text{esenciales}}}\{d,u_i\}=\min\{-1,7,2,3,2\}=-1$

Se cambian las variables duales:

$u_1=7-(-1)=8$ $\qquad v_1=0+(-1)=-1$
$u_2=2-(-1)=3$ $\qquad v_2=-1+(-1)=-2$
$u_3=3-(-1)=4$ $\qquad v_3=0+(-1)=-1$
$u_4=2-(-1)=3$ $\qquad v_4=0$

$u_1+v_1=7=r_{11}$ $\quad u_2+v_1=2<r_{21}$ $\quad u_3+v_1=3<r_{31}$ $\quad u_4+v_1=2=r_{41}$

$u_1+v_2=6=r_{12}$ $\quad u_2+v_2=1=r_{22}$ $\quad u_3+v_2=2=r_{32}$ $\quad u_4+v_2=1<r_{42}$

$u_1+v_3=7<r_{13}$ $\quad u_2+v_3=2<r_{23}$ $\quad u_3+v_3=3=r_{33}$ $\quad u_4+v_3=2=r_{43}$

$u_1+v_4=8=r_{14}$ $\quad u_2+v_4=3<r_{24}$ $\quad u_3+v_4=4<r_{34}$ $\quad u_4+v_4=3<r_{44}$

$$Q=\begin{bmatrix} 1 & 1^* & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1^* & 0 \\ 1^* & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Se realiza la transferencia de (1,2) a (1,4) y se agrega (2,2) a la asignación.

$$Q=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1^* \\ 0 & 1^* & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1^* & 0 \\ 1^* & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Ningún individuo puede cambiar de trabajo, todos están asignados. La asignación es completa. Se tiene ya la solución óptima.

Solución óptima:

Para el problema primal:

$x_{14}=1$

$x_{22}=1$

$x_{33}=1$

$x_{41}=1$

las demás $x_{ij}=0$

$z^0=14$

Para el problema dual:

$u_1=8$ $\quad v_1=-1$

$u_2=3$ $\quad v_2=-2$

$u_3=4$ $\quad v_3=-1$

$u_4=3$ $\quad v_4=0$

$w^0=14$

Estas soluciones se obtuvieron en tres iteraciones.

El PI se pide que $c_{ij} > 0$ $i,j=1,\ldots,n$, por lo cual no es posible resolver un problema con función objetivo a minimizar obteniendo uno equivalente con la función objetivo a maximizar porque se tendrían coeficientes negativos.

En la Introducción se mencionó que el Algoritmo Húngaro está basado en las ideas de D.König y E.Egerváry. Una de estas ideas es el Resultado Fundamental de König. A continuación se verá a qué corresponde este resultado en cada una de las tres presentaciones.

En PI:

El resultado de König es el siguiente:

"Si el número más grande de marcas independientes que puede ser escogido es n', entonces n' líneas (renglones o columnas) pueden ser escogidas de tal manera que contengan todas las posiciones marcadas (independientes)."

En PII:

En el problema primal restringido (PR), al minimizar x_{0}, se está maximizando el número de x_{ij} con valor 1. (PR) es equivalente al problema de encontrar el flujo máximo en la red construida a partir del conjunto $Q=\{(i,j) \mid \bar{c}_{ij}=0\}$.

En el problema dual de (PR), (DR), al maximizar $\hat{d}$ se está tratando de obtener el menor número posible de α_i y β_j con valor -1. En otras palabras, se quiere tener el menor número de $i \in A^c$ y de $m+j \in A$. De esta forma se hace mínima la cortadura que se obtiene al final, ya que en ella solamente existen arcos de la forma (s,i) con $i \in A^c$ y (m+j,t) con $m+j \in A$.

Así, el problema (PR) corresponde a encontrar el flujo máximo y (DR) la cortadura mínima que corresponden al número máximo de $x_{ij}=1$ y al mínimo número de varialbes de (DR) (α_i ó β_j) con valor -1 respectivamente.

Así, en este caso, el resultado de König corresponde al resultado de que en el óptimo $x_0^* = d^*$.

Cuando se tiene la solución óptima del problema (P), $x_0^* = 0 = d^*$ y el número máximo de $x_{ij}=1$ es m y el mínimo número de variables de (DR) (α_i ó β_j) con valor -1 es m.

En PXII:

El resultado de König corresponde a:

"El número máximo de celdas cero-independientes en una matriz de asignación reducida (de costos reducidos) es igual a l mínimo número de líneas que cubren todos los ceros en la matriz".

Todos los resultados mencionados se demostraron en el Capítulo II.

Regresando a la comparación de las tres presentaciones, ahora se hará ésta en términos de su complejidad.

Al comparar algoritmos, se obtiene su complejidad computacional; ésto se puede hacer, entre otros, en términos de su tiempo requerido en computadora, del espacio que requieren en la misma, o del número de operaciones computacionales elementales que necesiten.

Para obtener la complejidad de las tres presentaciones, se utilizará el criterio presentado en [9;p.p.5-8] donde se supone que se tiene una máquina con las siguientes características: Tiene memoria de acceso aleatorio ilimitado; los datos de entrada están ya en la memoria al comenzar los cálculos y los datos de salida se dejan en ella al final, por lo cual no se necesitan operaciones de entrada y salida. La memoria almacena constantes lógicas y enteros en palabras de cualquier tamaño. Se asume que el tiempo de acceso de estas palabras es constante y no se ve afectado por el tamaño de las palabras ni por el número de palabras almacenadas. Esta computadora hipotética puede ejecutar instrucciones de tipo común y convencional, como operaciones aritméticas enteras, comparaciones numéricas, operaciones iteradas, etc.

Se supone también que cada instrucción ejecutada requiere una unidad de tiempo, independientemente del tamaño de los operandos involucrados.

Ahora bien, para cada presentación se obtendrá el número máximo de operaciones necesarias para obtener la solución óptima de un problema de asignación.

Presentación I (PI).

Construcción de una cubierta y un conjunto de marcas independientes iniciales:

$a_i = \max_{1 \le j \le m} \{ r_{ij} \}$ para $i=1,\ldots,m$

Se realizan $m-1$ comparaciones para cada i, en total $\underline{m(m-1)}$ comparaciones.

$b_j = \max_{1 \le i \le m} \{ r_{ij} \}$ para $j=1,\ldots,m$

Se realizan m-1 comparaciones para cada j, en total <u>m(m-1)</u> comparaciones.

$$a=\sum_{i=1}^{m} a_i \quad , \quad b=\sum_{j=1}^{m} b_j$$

Se realizan m-1 sumas para a y m-1 sumas para b, en total <u>2(m-1)</u> sumas.

$$\text{si } a\leq b \begin{cases} u_i=a_i & i=1,\dots,m \\ v_j=0 & j=1,\dots,m \end{cases} \qquad \text{si } a>b \begin{cases} u_i=0 & i=1,\dots,m \\ v_j=b_j & j=1,\dots,m \end{cases}$$

Se realizan: <u>1</u> comparación, <u>2m</u> asignaciones de valores.

Se revisan las desigualdades $u_i+v_j \geq r_{ij}$ para determinar los elementos de la matriz de calificación $Q=(q_{ij})$ donde

$$q_{ij}=\begin{cases} 1 \text{ si } u_i+v_j=r_{ij} \\ 0 \text{ de otro modo} \end{cases}$$

Se hacen: <u>m^2</u> sumas, <u>m^2</u> comparaciones, <u>m^2</u> asignaciones de valores.

Rutina I.

Encontrar la asignación óptima para la matriz Q que se tiene, por medio de transferencias y marcando los 1's de la asignación con asteriscos.

Determinar los renglones y columnas esenciales.
Para realizar la primera asignación en la primera iteración (cuando no se tienen 1's marcados con asteriscos) se revisan a lo más m^2 q_{ij}'s. Se ve si $q_{ij}=0$ ó 1, es decir, se realizan <u>m^2</u> comparaciones ($q_{ij}=0$ ó $q_{ij}>0$).

En las siguientes iteraciones:

Para determinar si hay columnas elegibles se revisan a lo más $m^2 q_{ij}$'s. Se hacen <u>m^2</u> comparaciones.

Se pueden realizar a lo más m transferencias. En cada transferencia se pueden mover a lo más m-1 individuos. Se pueden agregar a lo más m-1 asteriscos (en la primera iteración al menos se coloca uno, por la forma en que se elige la solución dual inicial). En total: $m(m-1+m-1)= m(2m-2)=$<u>$2m^2-2m$</u>.

Para determinar si los renglones y las columnas son esenciales: Identificar las columnas que no tienen 1^{*}'s. Se revisan a lo más m^2 q_{ij}'s.

Para cada renglón: se revisan a lo más m lugares para ver si tiene un 1^{*}. Si lo tiene, en ese mismo renglón se busca un 1 sin asterisco, pero solamente en las columnas que no tienen - 1^{*}'s ya identificadas. A lo más se revisan m-1 lugares. Si se encuentra un 1 de tales características el renglón se marca - como esencial, si no, se marca como no esencial. Así, para cada renglón se hacen: m+m-1+1=2m operaciones. En total para todos los renglones se tienen $\underline{m(2m)}$ operaciones.

Para cada columna: Se revisan m lugares para ver si tiene un 1^{*}. Si hay un 1^{*} se verifica si el renglón en el que está es esencial o no. Si no es esencial, la columna se marca como - esencial. En cualquier otro caso la columna se marca no esencial. Para cada columna se hacen m+1+1=m+2 operaciones. En total para todas las columnas se tienen $\underline{m(m+2)}$ operaciones.

Rutina II.

Cálculo de $d = \min\limits_{\substack{i,j \text{ no} \\ \text{esenciales}}} \{u_i+v_j-r_{ij}\}$

Las sumas u_i+v_j ya se tienen. A lo más se hacen m^2 diferencias $(u_i+v_j)-r_{ij}$ (en realidad nunca llegan a m^2); y m^2-1 - comparaciones. En total $\underline{2m^2-1}$ operaciones.

Cambio de variables duales:

Caso 1. Para i's no esenciales $u_i > 0$

$n = \min\limits_{\substack{i \text{ no} \\ \text{esenciales}}} \{d, u_i\}$

Entonces:

$u_i \to u_i - n$ i no esenciales.

$v_j \to v_j + n$ j no esenciales.

$u_i \to u_i$ i esenciales.

$v_j \to v_j$ j no esenciales.

Caso 2. Para algún renglón no esencial i, $u_i = 0$

$n=\min\limits_{j\ \text{no esencial}} \{ d, v_j \}$

$u_i \longrightarrow u_i + n$ $\quad$ i esenciales.

$v_j \longrightarrow v_j - n$ $\quad$ j no esenciales.

$u_i \longrightarrow u_i$ $\quad$ i no esenciales.

$v_j \longrightarrow v_j$ $\quad$ j esenciales.

A lo más se pueden tener m renglones no esenciales; al revisar si $u_i > 0$ ó $u_i = 0$ se hacen m comparaciones. A lo más se pueden tener m columnas no esenciales. Entonces, para cualquiera de los dos casos se hacen: Al calcular n, m comparaciones. Al cambiar las variables se verifica si los renglones y columnas son esenciales o no. Se hacen 2m verificaciones. En el cambio se hacen m sumas, m diferencias (a lo más). En total se hacen m+m +2m+m+m=6m operaciones a lo más (no llega a 6m) en el cambio de variables duales.

Dado que el proceso completo se repite a lo más m veces (tómese en cuenta que el inicio se hace una vez), el número máximo de operaciones requeridas es:

$m(m-1)+m(m-1)+2(m-1)+1+2m+m^2+m(m^2+m+m^2+m+2m^2-2m+m^2+m(2m)+m(m+2)$

$+2m^2-1+6m)= m^2-m+m^2-m+2m-2+1+2m+m^2+m(12m^2+6m-1)=$

$=12m^3+11m^2-m-1$

Por lo tanto, PI requiere un número de pasos computacionales elementales que está acotado por un polinomio en términos de tamaño del problema (m). En este caso un polinomio de grado 3, por lo cual, PI tiene una complejidad de $O(m^3)$ (O=número de operaciones).

Presentación II (PIII).

Inicio. Cálculo de la solución dual-factible inicial y de los costos reducidos.

$u_i = \min\limits_{1\le j\le m} \{ c_{ij} \}$ $\quad$ i=1,...,m

$v_j = \min\limits_{1\le i\le m} \{ c_{ij} - u_i \}$ $\quad$ j=1,...,m

Para las u_i se hacen m-1 comparaciones por cada una, en total m(m-1) comparaciones.

Para las v_j se hacen m diferencias y m-1 comparaciones por cada una. En total m(m) diferencias y m(m-1) comparaciones En total se tienen: $m(m-1)+m(m)+m(m-1)=$ $\underline{3m^2-2m}$ operaciones.

Para los costos reducidos:

Ya se tienen $c_{ij}-u_i$ $\quad i,j=1,\ldots,m$

Se hacen $(c_{ij}-u_i)-v_j$ $\quad i,j=1,\ldots,m$

En total de m^2 diferencias.

Paso primal:

Se determina el conjunto $Q=\{(i,j) \mid \bar{c}_{ij}=0\}$

Para esto se revisa si $\bar{c}_{ij}=c_{ij}-u_i-v_j>0$

ó $\bar{c}_{ij}=c_{ij}-u_i-v_j=0$

Se hacen m^2 comparaciones.

Se resuelve la red de flujo máximo con el algoritmo de Ford y Fulkerson (la red se construyó a partir de Q).

En general, la complejidad del Algoritmo para encontrar el flujo máximo es $O(M^2N)$ donde M=número de arcos de la red y N=número de vértices. (Ver [9;p.p.116-119]).

En el caso del problema de asignación, la red de flujo máximo tiene 2m+2 vértices y a lo más m^2+2m arcos. Entonces en esta parte del algoritmo se requieren a lo más:
$(m^2+2m)^2(2m+2)=$ $\underline{2m^5+10m^4+16m^3+8m^2}$ operaciones

Nótese que cuando la red tiene m^2+2m arcos, esto quiere decir que todos los costos originales del problema son iguales, lo cual es difícil encontrar en la realidad.

Construcción de las: $\alpha_i=\begin{cases}1 & i\in A\\ -1 & i\in A^c\end{cases}$ $\quad \beta_j=\begin{cases}-1 & m+j\in A\\ 1 & m+j\in A^c\end{cases}$

Se revisa si $i\in A$ ó $i\in A^c$

$m+j\in A$ ó $m+j\in A^c$

Se asignan los valores a α_i y β_j $\quad i,j=1,\ldots,m$

En total: $\underline{4m}$ operaciones.

Paso dual:

$$\theta = (\bar{c}_{rk}/(\alpha_r+\beta_k)) = \min_{(i,j)\in G}\left\{ \bar{c}_{ij}/(\alpha_i+\beta_j) \mid \alpha_i+\beta_j > 0 \right\}$$

Se hacen las sumas $\alpha_i+\beta_j$. A lo más m^2 sumas (no llega a m^2).

Se determina cuales $(\alpha_i+\beta_j)$ son mayores que cero. A lo más se hacen m^2 comparaciones.

Se hacen los cocientes $\bar{c}_{ij}/(\alpha_i+\beta_j)$ para $\alpha_i+\beta_j>0$. A lo más son m^2 cocientes (no llega a m^2).

Para obtener θ se hacen a lo más $\underline{m^2-1}$ comparaciones.

Se calculan las nuevas variables duales:

$$u'_i = u_i + \theta\alpha_i$$
$$v'_j = v_j + \theta\beta_j$$

Se hacen $\underline{2m}$ productos y $\underline{2m}$ sumas.

Se obtienen los nuevos costos reducidos $c_{ij}-u'_i-v'_j$. Se hacen $\underline{2m^2}$ diferencias.

El proceso se repite a lo más m veces (recuérdese que el inicio se hace una vez).

Entonces el número máximo de operaciones requeridas es:

$$3m^2-2m+m^2+m(m^2+2m^5+10m^4+16m^3+8m^2+4m+m^2+3m^2-1+2m+2m)+$$
$$+(m-1)2m^2=3m^2-2m+m^2+m(2m^5+10m^4+16m^3+13m^2+8m-1)+2m^3-2m^2=$$
$$=2m^6+10m^5+16m^4+15m^3+10m^2-3m.$$

Por lo cual el número de pasos computacionales elementales en PII está también acotado polinomialmente. PII tiene entonces complejidad de $O(m^6)$.

Esto no es definitivo, ya que dependiendo de la implementación que se utilice y de la máquina usada, esta complejidad puede variar.

Presentación III (PIII).

Inicio: Cálculo de la solución dual-factible inicial y de los costos reducidos.

El número de operaciones es igual que en PII, es decir, $\underline{4m^2-2m}$.

Fase primal.

Se determinan los $\bar{c}_{ij}=0$ y se resuelve la red de flujo máximo correspondiente.

En esta parte también se tiene el mismo número de operaciones que en PII: $\underline{m^2+2m^5+10m^4+16m^3+8m^2}$.

Se determinan los conjuntos $S_v, \bar{S}_v, S_c, \bar{S}_c$.

Para esto se revisan los vértices-individuo y los vértices-trabajo en la red de flujo máximo cuando ya se ha encontrado éste (se revisan los elementos de la cortadura mínima).

Se hacen $\underline{2m}$ operaciones.

Fase dual:

Se calcula $\theta_0=\min\limits_{\substack{i\in S_v\\ j\in \bar{S}_c}}\{\bar{c}_{ij}\}$

Se hacen a lo más $\underline{m^2-1}$ comparaciones (no llega a m^2-1).

Se cambia la solución dual:

$\bar{u}_i=u_i+\theta_0 \qquad i\in S_v$

$\bar{u}_i=u_i \qquad i\in \bar{S}_v$

$\bar{v}_j=v_j \qquad j\in S_c$

$\bar{v}_j=v_j-\theta_0 \qquad j\in \bar{S}_c$

Para cada i y cada j se verifica a qué conjunto pertenece. Se hacen a lo más m sumas y m diferencias. En total: $\underline{4m}$ operaciones.

Se calculan los nuevos costos reducidos y se regresa a la fase primal. Para los nuevos costos reducidos se hacen $\underline{2m^2}$ diferencias.

Todo el proceso, excepto el inicio, se repite a lo más m veces. Entonces el número máximo de operaciones es:

$4m^2-2m+m(m^2+2m^5+10m^4+16m^3+8m^2+2m+m^2-1+4m)+(m-1)2m^2$

$=4m^2-2m+m(2m^5+10m^4+16m^3+10m^2+6m-1)+2m^3-2m^2=$

$=2m^6+10m^5+16m^4+12m^3+8m^2-3m.$

Para PIII, entonces, el número de operaciones requeridas también está acotado polinomialmente y la complejidad será de $O(m^6)$. Como ya se dijo, esto no es definitivo y la complejidad puede variar.

CONCLUSIONES Y COMENTARIOS.

Como se pudo observar a lo largo de los Capítulos II y III, las tres presentaciones del algoritmo en esencia realizan lo mismo, sin embargo se vio que PII y PIII requieren de más operaciones que PI. A pesar de ello, no se puede concluir en forma definitiva que PI sea mejor que las otras ya que la complejidad puede variar dependiendo de la implementación que se utilice y de la máquina en que se trabaje.

Por otra parte, las tres presentaciones resultaron tener un número requerido de pasos computacionales elementales acotado polinomialmente en términos del tamaño del problema (n). Esto es bueno porque una función polinomial crece mucho menos rápido que una exponencial o que una factorial por ejemplo. (Ver [9;D.p.5]).

Además, los algoritmos acotados polinomialmente son casi siempre buenos algoritmos aunque existen también algoritmos acotados exponencialmente que son bastante eficientes [9;p.p. 5-8].

De ahora en adelante, cuando se hable de la complejidad del Algoritmo Húngaro se estará hablando de la complejidad $O(n^3)$ obtenida de PI.

Con respecto a la relación que guarda el Problema de Asignación con otros problemas, se tiene que a pesar de que no existe gran dificultad para transformar el Problema de Asignación en un problema de transporte, de flujo a costo mínimo o de acoplamiento máximo a costo mínimo, es más conveniente resolverlo con un algoritmo, el Húngaro en este caso, que aproveche la estructura particular del problema.

Si por ejemplo, se tratara de resolver el Problema de Asignación con el algoritmo de transporte, se tendría un caso de alta degeneración, ya que en el Problema de Asignación se -

admiten m variables positivas exactamente en cada base factible y en el problema de transporte se trabaja con las 2m-1 variables básicas, lo cual provocaría que se tuvieran en cada - iteración m-1 variables básicas iguales a cero. Por otra parte, se podría pensar que al resolver el Problema de Asignación con el algoritmo de transporte alguna x_{ij} podría no ser entera, ya que para los problemas de transporte sólo se pide $x_{ij} \geq 0$ y para los de asignación $x_{ij}=0,1$. Sin embargo, esto no sucede debido a la forma en que se elige la solución básica factible inicial y a la forma en que se cambian las soluciones básicas en el algoritmo de transporte (Ver [1;p.p. 354-363] y[11;p.p.261-281]).

Si se resolviera el Problema de Asignación con el algoritmo para encontrar un flujo de valor v a costo mínimo el número de operaciones requeridas estaría acotado por $(2m+2)^2 m=4m^3+8m^2+4m$, ya que la complejidad del algoritmo para encontrar el flujo a costo mínimo es $O(n^2 v)$ donde n=número de vértices de la red y v=el flujo que se requiere llevar a costo mínimo del origen al destino de la red, (Ver [9;p.p.130-132]).

A pesar de que el número de operaciones seguiría estando acotado por un polinomio de grado 3 como en PI (en términos de m), al final no se tendrían los valores de las variables duales como en el Algoritmo Húngaro, teniéndose que usar resultados de Programación Lineal para obtenerlos.

Para el problema de acoplamiento máximo a costo mínimo en gráficas bipartitas de la forma $G=(S,T;\ S\times T)$ $|S|=m$, $|T|=n$, $S\times T$=conjunto de arcos, $m\leq n$, se utiliza el algoritmo Húngaro adaptado a este tipo de problemas con una complejidad de $O(m^2 n)$ [9;p.p.201-205] .

Así, si se resuelve el Problema de Asignación como un problema de este tipo, se tendrán los mismos resultados que con PI ya que en este caso, m=n y la complejidad será $O(m^3)$ también.

Ahora bien, con respecto al Problema de Ruta más Corta -

del origen al destino de una red, se tiene que es más conveniente resolverlo con los algoritmos especiales para él, que con el algoritmo Húngaro, por lo siguiente:

Para redes sin ciclos el problema de ruta más corta se puede resolver con el algoritmo de Bellman [9;p.p.65] con una complejidad de $O(n^2)$ [9; p.p.68] donde n es el número de vértices de la red, mientras que con el Algoritmo Húngaro se tendría $O(n^3)$.

Para redes con costos positivos en los arcos, el problema de ruta más corta se puede resolver con el algoritmo de Dijkstra teniendo $O(n^2)$ [9;p.p.70-72] .

Para redes en general el problema de ruta más corta se puede resolver con un método debido a Bellman y a Ford [9;p. 74] con complejidad de $O(n^3)$. En [9;p.p.81-82] se muestra que el problema, teniendo costos negativos (pero sin ciclos negativos), se puede resolver en menos de $O(n^3)$.

Al resolver el problema de ruta más corta con el algoritmo Húngaro se consideran a lo largo de todo el proceso vértices por los que no pasará la ruta óptima, lo cual no sucede con los algoritmos especiales para este problema.

En resumen, se tiene que: El algoritmo Húngaro se puede considerar entre los algoritmos eficientes por estar acotado polinomialmente. La complejidad de un algoritmo puede variar dependiendo de su presentación o implementación. Las tres presentaciones vistas, en esencia realizan lo mismo aunque utilizando diferente número de operaciones. Es más conveniente resolver el Problema de Asignación con algoritmos que aprovechen su estructura. Lo mismo sucede con el problema de Ruta más Corta.

APENDICE A.

ALGORITMO DE FORD Y FULKERSON PARA ENCONTRAR EL FLUJO MAXIMO Y LA CORTADURA MINIMA EN UNA RED.

A-. PROCESO DE ETIQUETADO.

1) Etiquetar al vértice s (origen) con $[+s, \delta(s)=\infty]$

2) Elegir un vértice etiquetado, sea x_i y sea su etiqueta: $[\pm x_k, \delta(x_i)]$

i) Para todos los vértices $x_j \in \Gamma^+(x_i)$ (conjunto de sucesores de x_i) que no estén etiquetados y para los cuales $\xi_{ij} < q_{ij}$, asignarles la etiqueta $[+x_i, \delta(x_j)]$ donde $\delta(x_j)=\min\{\delta(x_i), q_{ij}-\xi_{ij}\}$
(ξ_{ij}=flujo en el arco (x_i,x_j), q_{ij}=capacidad del arco (x_i, x_j))

ii) Para todos los vértices $x_j \in \Gamma^-(x_i)$ (conjunto de predesores de x_i) que no estén etiquetados y para los cuales $\xi_{ij}>0$ asignarles la etiqueta: $[-x_i, \delta(x_j)]$ donde $\delta(x_j)=\min\{\delta(x_i), \xi_{ji}\}$

-- Se dice ahora que el vértice x_i ha sido examinado --

3) Repetir la etapa 2) hasta que suceda:

i) El vértice t (destino) no ha sido etiquetado y ya todos los vértices han sido examinados (excepto t, claro). ALTO, el flujo ξ es el flujo máximo.

ii) El vértice t (destino) recibe etiqueta, ir a 4).

B-. PROCESO DE AUMENTACION DE FLUJO.

4) Sea x=t ir a 5)

5)

i) Si la etiqueta de x es de la forma $[+z, \delta(x)]$, cambiar el flujo a lo largo del arco (z,x) de $\xi(z,x)$ a $\xi(z,x)+\delta(t)$.

ii) Si la etiqueta de x es de la forma $[-z,\delta(x)]$, cambiar el flujo a lo largo del arco (x,z) de $\xi(x,z)$

a $\xi(x,z) - \delta(t)$.

6) Si z=s borrar todas las etiquetas y retornar a la etapa (1), repetir el proceso de etiquetado empezando con el nuevo flujo calculado en 5).
Si $z \neq s$ poner x=s y regresar a la etapa 5).

o

CORTADURA MINIMA:

Si t (destino) ya no pudo ser etiquetado la cortadura mínima está formada por el conjunto de arcos (A, A^c) - donde $A = \{x \mid x$ está etiquetando$\}$.

APENDICE B.

TEOREMA DEBIL DE HOLGURA COMPLEMENTARIA.

Dado el siguiente par de problemas primal y dual

$$(P)\begin{cases}\text{Primal}\\ \text{Min } cx\\ \text{s.a.}\\ \quad Ax\geq b\\ \quad x\geq 0\end{cases}\qquad\qquad (D)\begin{cases}\text{Dual}\\ \text{Max } b^t w\\ \text{s.a.}\\ \quad A^t w\leq c^t\\ \quad w\geq 0\end{cases}$$

y x^* una solución factible de (P) y w^* una solución factible de (D), una condición necesaria y suficiente para que x^* y w^* sean soluciones óptimas de (P) y de (D) respectivamente es

$$w^{*t}\,(Ax^*-b)=0$$
$$x^{*t}\,(c^t-A^t w^*)=0$$

Demostración. Como x^* es factible para (P) y w^* para (D) se tiene

$$A^t w^*\leq c^t \qquad\qquad Ax^*\geq b$$
$$w^*\geq 0 \qquad\qquad x^*\geq 0$$

o lo que es lo mismo

$$Ax^*-b\geq 0$$

y

$$c^t-A^t w^*\geq 0$$

Multiplicando la primera desigualdad por $w^{*t}\geq 0$ y la segunda por $x^{*t}\geq 0$ no se afectan las desigualdades y se obtiene

$$\alpha=w^{*t}\,(Ax^*-b)\geq 0$$
$$\beta=x^{*t}\,(c^t-A^t w^*)\geq 0$$

Sumando α y β se tiene

$$\begin{aligned}\alpha+\beta&=w^{*t}(Ax^*-b)+x^{*t}(c^t-A^t w^*)=\\&=w^{*t}Ax^*-b^t w^*+cx^*-w^{*t}Ax^*=\\&=cx^*-b^t w^*\geq 0\end{aligned}$$

es decir, $cx^*\geq b^t w^*$

pero también se sabe que para cualesquiera soluciones factibles x y w de un problema primal y su dual se tiene $cx \leq b^t w$,(5) entonces en particular $cx^* < b^t w^*$

entonces $cx^* = b^t w^*$

y por lo tanto $\alpha + \beta = cx^* - b^t w^* = 0$

Como $\alpha \geq 0$ y $\beta \geq 0$ entonces $\alpha + \beta = 0$ implica $\alpha = 0$, $\beta = 0$.

Así, el teorema queda demostrado.

Este teorema indica lo siguiente:

$x_j^* > 0 \implies w^* a_j = c_j \qquad j=1,\ldots,n$

$w^* a_j < c_j \implies x_j^* = 0 \qquad j=1,\ldots,n$

$w_i^* > 0 \implies a^i x^* = b_i \qquad i=1,\ldots,m$

$a^i x^* > b_i \implies w_i^* = 0 \qquad i=1,\ldots,m$

es decir, si una variable en uno de los problemas es positiva, entonces la restricción correspondiente en el otro problema es sin holgura, y si una restricción en uno de los problemas es - con holgura, entonces la variable correspondiente en el otro - problema debe ser cero.

(5) [1; p. 239]

APENDICE C.
CONDICIONES DE KUHN-TUCKER.

Antes de describir y demostrar las condiciones de Kuhn-Tucker, se demostrará el Teorema de Farkas que es un resultado importante y sirve para desarrollar dichas condiciones.

Teorema de Farkas(6). Uno y solo uno de los dos sistemas siguientes tiene una solución:

Sistema 1: $Ax \leq 0$ y $cx > 0$

Sistema 2: $wA = c$ y $w \geq 0$

donde A es una matriz de mxn dada y c un n-vector dado.

Demostración(6). Las variables de los sistemas son x y w. El teorema también se puede escribir así: Si existe un x con $Ax \leq 0$ y $cx > 0$, entonces no existe $w \geq 0$ tal que $wA = c$. Recíprocamente, si no existe x tal que $Ax \leq 0$ y $cx > 0$, entonces existe un $w \geq 0$ tal que $wA = c$.

Supóngase que el Sistema 2 tiene una solución w tal que $wA = c$ y $w \geq 0$. Sea x tal que $Ax \leq 0$. Entonces $cx = wAx \leq 0$, pues $w \geq 0$ y $Ax \leq 0$. Esto prueba que cx no puede ser positivo y por lo tanto el Sistema 1 no tiene solución. Supóngase ahora que el Sistema 2 no tiene solución; esto significa que $c \notin S = \{wA \mid w \geq 0\}$. S es un conjunto convexo cerrado, entonces existe un x tal que cx $>$ wAx para todo $w \geq 0$. (Esto sucede por el lema que dice que si S es un conjunto convexo y cerrado en E^n y $x \notin S$, entonces existe un vector c en E^n distinto de cero, y un $\varepsilon > 0$ tal que $cx \geq \varepsilon + cy$ para cada $y \in S$, ver [1,p.p.499-500]).

(6) [1, p.77]

Tomando w=0, se tiene que $cx > 0$. Además, como w se - puede tomar arbitrariamente grande, entonces se debe tener que $Ax \leq 0$. Esto prueba que el Sistema 1 tiene una solución y el teorema queda demostrado.

LAS CONDICIONES DE KUHN-TUCKER[7].

Considérese el siguiente problema de programación lineal:

$$\begin{array}{l} \text{Minimizar } cx \\ \text{s.a.} \\ \quad Ax \geq b \\ \quad x \geq 0 \end{array}$$

donde c es un n-vector, b es un m-vector, y A es una matriz de mxn.

Las condiciones de Kuhn-Tucker se pueden enunciar así: El vector x es una solución óptima del problema anterior si existe un n-vector v y un m-vector w tales que se satisfagan las tres condiciones siguientes. Recíprocamente, si las tres condiciones siguientes se satisfacen, entonces x es una solución óptima del problema anterior:

$$Ax \geq b \qquad x \geq 0 \qquad \ldots\ldots\ldots(1)$$
$$c-wA-v=0, \quad w \geq 0, \quad v \geq 0 \qquad \ldots\ldots\ldots(2)$$
$$w(Ax-b)=0, \quad vx=0 \qquad \ldots\ldots\ldots(3)$$

La primera condición establece que x debe ser factible, - es decir, debe cumplir las restricciones del problema primal. Esto se conoce como factibilidad primal. La segunda condición se conoce como factibilidad dual. Aquí w y v son las variables duales correspondientes a las restricciones $Ax \geq b$ y $x \geq 0$ respectivamente. La tercera condición se conoce como holgura complementaria. Puesto que $w \geq 0$ y $Ax \geq b$, entonces $w(Ax-b)=0$ si, - y solo si, o w_i es cero, ó bien, la i-ésima variable de holgura es cero y $Ax=b$. De igual manera $vx=0$ si, y solo si, x_j es - cero, ó bien, v_j es cero.

(7) [1; p.p. 211-212]

(J)

Demostración de las condiciones de Kuhn-Tucker.

Se demostrará primero que las condiciones de Kuhn-Tucker son suficientes para optimalidad. Supóngase que x es una solución factible del problema y supóngase también que existen vectores w y v tales que las condiciones (1), (2) y (3) se cumplan. Se demostrará que x es una solución óptima. Sea x' cualquier punto factible que satisfaga $Ax' \geq b$ y $x' \geq 0$. De (2), $c-wA-v=0$ y se obtiene

$0=(c-wA-v)(x-x')=(cx-cx')-wAx-vx+wAx'+vx'$

De la condición (3), $wAx=wb$ y $vx=0$. Por lo tanto, puesto que

$0=(cx-cx')+w(Ax'-b)+vx'$

$w \geq 0$, $Ax'-b \geq 0$, $v \geq 0$, y $x' \geq 0$, la ecuación anterior implica que $cx' \geq cx$. Puesto que esto se cumple para cualquier solución factible, entonces x es, en efecto, una solución óptima del problema. Esto demuestra que las condiciones de Kuhn-Tucker son suficientes para optimalidad.

Recíprocamente, supóngase que x es una solución óptima (y por lo tanto, factible) del problema. Ahora se demostrará que las condiciones (2) y (3) se cumplen. Posiblemente después de reacomodar las columnas y renglones de A, supóngase que $x_1, x_2, \ldots, x_p$ son positivos, que $x_{p+1}, \ldots, x_n=0$, $A_1 x=b_1$ y $A_2 x > b_2$ donde $A=\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix}$ y $b=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$, A_1 es de kxn, A_2 es de (m-k)xn, b_1 es un k-vector, y b_2 es un (m-k)-vector. Nótese que $A_1 d \geq 0$, $d_{p+1}, \ldots, d_n \geq 0$ y $cd<0$ no tiene solución. Esto se sigue, porque de lo contrario, se puede verificar fácilmente que para $\lambda > 0$ y suficientemente pequeño, $x+\lambda d$ es una solución factible con un mejor valor objetivo, lo cual viola la optimalidad de x. El sistema $A_1 d \geq 0$, $d_{p+1},\ldots,d_n \geq 0$, se puede reescribir como $Td \leq 0$, donde

$$T = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{-A_1} \\ \hline 0 & -I \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{l} \text{k renglones} \\ \text{n-p renglones} \end{array}$$

e I es una matriz identidad de $(n-p)x(n-p)$. Por lo tanto, el sistema $Td \leq 0$ y $cd < 0$ no tiene solución y aplicando el Teorema de Farkas, existe un k-vector no negativo w_1 y un $(n-p)$-vector no negativo v_2 tal que $c-w_1A_1-(0,v_2)=(0,0)$. Tomando $w_2=0$ y $v_1=0$, se tiene $c-w_1A_1-w_2A_2-(v_1,v_2)=$ $=(0,0)$, es decir, $c-wA-v=0$, donde $w,v \geq 0$. Además nótese que $x_j=0$ para $j=p+1,\ldots,n$ y $v_j=0$ para $j=1,\ldots,p$ y en consecuencia, $x_jv_j=0$ para todo j, y

$$w(Ax-b)=(w_1,w_2)\begin{bmatrix} A_1x-b_1 \\ A_2x-b_2 \end{bmatrix}=(w_1,0)\begin{bmatrix} 0 \\ A_2x-b_2 \end{bmatrix}=0$$

Esto demuestra que las condiciones (1),(2) y (3) se cumplen y por lo tanto, las condiciones de Kuhn-Tucker son también necesarias para optimalidad.

LAS CONDICIONES DE KUHN-TUCKER PARA RESTRICCIONES CON IGUALDAD.(9)

Considérese el siguiente problema:

Minimizar cx

s.a.

$$Ax=b$$

$$x \geq 0$$

(9) [1; p.216]

Cambiando la igualdad por dos desigualdades de la forma $Ax \geq b$ y $-Ax \geq -b$, las condiciones de Kuhn-Tucker desarrolladas antes se simplifican a

$$Ax=b, \quad x \geq 0$$

$$c-wA-v=0, \quad w \text{ no restringida, } v \geq 0$$

$$vx=0$$

La diferencia principal entre estas condiciones y las condiciones para el problema con desigualdades es que el vector w correspondiente a la restricción $Ax=b$ no tiene restricción de signo.

REFERENCIAS.

[1] Bazaraa Mokhtar S. y Jarvis John J. "Programación Lineal y Flujo en Redes". Edit. LIMUSA, 1a. ed., 1981.

[2] Bertsekas D.P. "A new algorithm for the assignment problem". Mathematical Programming, Vol. 21, No.2, 1981, p.p. 152-171.

[3] Burkard R.E., Hahn W. Zimmermann U. "An algebraic approach to assignment problems". Mathematical Programming, Vol. 12, No. 3, 1977, p.p. 318-327.

[4] Christofides Nikos. "Graph theory, an algorithmic approach". Ac. Press, 1975.

[5] Hopcroft John E. and Ullman Jeffrey D. "Introduction to Automata Theory, Languages, and Computation". Addison-Wesley, 1979, p.p. 285-365.

[6] Hung Ming S. "A Polynomial Simplex Method for the assignment problem". Operations Research, Vol. 31, No. 3, May-June 1983, p.p. 595-600.

[7] Hung Ming S., Rom Walter O. "Solving the assignment problem by relaxation ". Operations Research, Vol. 28, No. 4, 1980, p.p. 969-982.

[8] Kuhn H.W. "The Hungarian Method for the Assignment Problem". Naval Research Logistics Quarterly, Vol. 2, 1955, p.p. 83-97.

[9] Lawler E. "Combinatorial Optimization: networks and matroids" (Holt, Rinehart and Winston), 1976.

[10] Mc.Ginnis Leon F. "Implementation and Testing of a Primal-Dual Algorithm for the Assignment Problem". Operations Research, Vol. 31, No. 2, Marzo-Abril 1983, p.p. 277-291.

[11] Prawda Witenberg J. "Métodos y Modelos de Investigación de Operaciones", Vol. 1, Edit. LIMUSA, 1a. ed., 1982.

[12] Weintraub A., Barahona F. "A dual algorithm for the assignment problem". Departamento de Industrias, Report No. 2. Universidad de Chile (Sede Occidente) Abril 1979.