



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO**

**FACULTAD DE CIENCIAS**

**METODOS COMBINADOS PARA LA SOLUCION  
DE PROBLEMAS DE REDES DE FLUJO**

**T E S I S**  
**QUE PARA OBTENER EL TITULO DE**  
**A C T U A R I O**  
**P R E S E N T A**  
**FELIPE CASTAÑEDA TOBIN**

**DIRIGIDA POR:**  
**DR. SERGIO FUENTES MAYA**

**FEBRERO, 1985**



Universidad Nacional  
Autónoma de México



## **UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso**

### **DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## CONTENIDO

	Pág.
Introducción	
1. CONCEPTOS BASICOS	1
1.1 Introducción	1
1.2 Algunos tipos de gráficas	2
1.3 Matrices de adyacencia e incidencia	5
1.4 Algunos conceptos que se pueden definir en una gráfica	7
1.5 Algunos tipos de redes	10
1.6 Arboles y cortaduras	12
2. RUTA MAS CORTA	17
2.1 Introducción	17
2.2 Arbol de expansión mínima	18
2.3 Camino de un nodo s a un nodo t	23
2.4 Ruta más corta	27
3. FLUJO MAXIMO	36
3.1 Descripción del problema	36
3.2 Cortadura mínima	37
3.3 Red marginal	43
3.4 Ejemplo de aplicación	47
4. METODO COMBINADO	51
4.1 Descripción del problema	51
4.2 Ejemplo de motivación	52

## CONTENIDO (Cont.)

	Pág.
4.2.1 Red marginal con costos asociados a sus arcos	55
4.2.2 Prueba de efectividad del uso de la red marginal	57
4.3 Método de solución	60
4.4 Ejemplo de aplicación	63
<b>CONCLUSIONES</b>	<b>75</b>

## INTRODUCCION

La teoría de gráficas se ha dedicado al estudio de problemas teóricos, intrínsecamente relacionados con situaciones reales, creándose así una amplia gama de modelos matemáticos que han proporcionado elementos eficaces para dar solución a tales situaciones. Entre las áreas de estudio a las que se avoca esta teoría, se encuentra una que denominaremos "teoría de redes", la cual tiene por objeto el estudio de modelos para dar solución a cierto tipo de problemas, tales como: el problema de asignación, el de árbol de peso mínimo, el de envío de unidades de flujo de un nodo de depósito o "fuente" a un nodo de demanda o "sumidero", etc.

La teoría de redes ha sido y es de interés en distintos campos por su conexión directa con diversos tipos de problemas, ya que existe una gran variedad de situaciones reales, que pueden ser interpretadas en el marco de problemas que se analizan y resuelven dentro de esta teoría. Entre tales situaciones se encuentran por ejemplo: problemas de transporte, problemas relacionados con flujo de dinero, problemas de distribución de flujos hidráulicos o eléctricos, problemas de flujo de vehículos y, en general, cualquier tipo de situación que pueda ser interpretada mediante un flujo en una gráfica.

Existen dos teorías para dar solución a los problemas típicos de redes de flujo a costo mínimo: la programación lineal, mediante el uso del método simplex y la teoría de redes, por medio del método combinado de ruta más corta y flujo máximo.

Una de las características básicas del método simplex es encontrar solución a problemas lineales, esto es, problemas en donde se desea optimizar una función lineal en varias variables sujetas a restricciones lineales en las mismas variables. Este método puede ser empleado satisfactoriamente para resolver problemas de redes de flujo, pero consideramos que con el empleo del mismo se pierde la intuición sobre la solución del problema.

Los métodos propuestos en teoría de redes son procedimientos comparativamente sencillos, y eficaces para resolver problemas de redes de flujo. Estos algoritmos nos proporcionan una herramienta adecuada para dar solución a los problemas de flujo, además de conservar la intuición sobre la solución del problema. El método de flujo máximo atribuido a Ford y Fulkerson nos proporciona un camino para determinar la máxima cantidad de flujo que puede enviarse de un nodo a otro en una red, con restricciones de capacidad en sus arcos; el método de ruta más corta nos brinda una herramienta para determinar la ruta de costo mínimo entre dos nodos de una red. Mediante la combinación de estos dos métodos, nos encontramos ante un nuevo método que puede ser aplicado en problemas de redes de flujo, en los que se

requiere optimizar alguna medida de efectividad sujeta a restricciones, como es el caso de redes de flujo en las que existen tanto costos asociados a sus arcos como restricciones de capacidad en los mismos.

Otra característica importante de los algoritmos utilizados en teoría de redes, es su fácil traducción a lenguaje de máquina.

El propósito de este trabajo es describir algunos de los procedimientos utilizados en teoría de redes y mostrar su flexibilidad para resolver problemas de diversa índole. Se presenta el uso y manejo de algoritmos básicos, así como su justificación.

La forma en que se desarrolla este trabajo es la siguiente:

El capítulo 1 es dedicado a la presentación de algunos de los conceptos básicos utilizados en teoría de redes y sus definiciones correspondientes.

En el capítulo 2 se trata el tema de ruta más corta y se exhibe un algoritmo para dar solución a situaciones que puedan ser identificadas como problemas de esta índole. También se presenta; tanto el problema de árbol de expansión mínima como el de determinación de un camino de un nodo fuente a un nodo sumidero con sus respectivos algoritmos, por estar directamente relacionados con el problema de ruta más corta.

El capítulo 3 se enfoca a la presentación del algoritmo atribuido a Ford y Fulkerson, cuya función es determinar el flujo máximo que puede ser enviado de un nodo fuente a un nodo sumidero, en una red simple. Además se presenta el concepto de cortadura mínima, por su estrecha vinculación con el problema de flujo máximo. También se exhibe el concepto de "red marginal", pues es necesario en el algoritmo mencionado.

En el capítulo 4, se proporciona un método de solución para problemas de flujo máximo con parámetros de capacidad y costo asociados a sus arcos. Este algoritmo resulta de la combinación de los métodos para determinar la ruta más corta y el flujo máximo, expuestos en los capítulos anteriores; aquí se amplía el concepto de red marginal, por las necesidades que presenta el problema. Es importante hacer hincapié en la sencillez y efectividad resultante del uso de este método para dar solución a problemas en los cuales se requiere obtener un flujo determinado a costo mínimo, teniendo como restricciones: capacidad en los arcos y asociando un costo en los mismos. Por último se presentan las conclusiones que se obtuvieron como resultado de la elaboración de esta tesis.



## 1. CONCEPTOS BASICOS

### 1.1 Introducción

El propósito del presente capítulo es introducir las definiciones de gráficas y redes que son usadas en los capítulos subsecuentes. La razón de proporcionar tales definiciones es que no existe una terminología aceptada sobre los distintos conceptos manejados en una red y es común encontrar un mismo nombre para distintos conceptos.

El capítulo empieza por describir una gráfica y algunos de los tipos de gráfica más usuales, como es el caso de la red, la gráfica bipartita, la red simple, la red circulatoria, etc. Asociados con los nodos de una red se definen los conceptos de grado, disponibilidad y demanda. Relacionados con los arcos se describen ciertos parámetros como capacidad mínima, máxima y costo unitario. Se enuncian los conceptos de cadena y ciclo en una gráfica. También se definen algunos conceptos que son usuales para manipular una red como son matriz de adyacencia y matriz de incidencia. Se espera que el presente capítulo permita al lector, no familiarizado con gráficas, entender el desarrollo del trabajo.

## 1.2 Algunos tipos de gráficas

Una gráfica es una colección finita de arcos y nodos que puede representarse esquemáticamente de la siguiente forma:

- Los nodos se representan mediante pequeños círculos que no se intersectan entre sí. Estos círculos tienen dentro un número para poder distinguirlos.
- Los arcos se plasman como segmentos de recta, en cuyos extremos se encuentra un nodo que puede o no ser el mismo para ambos.
- En las gráficas pueden existir arcos dirigidos y arcos sin dirección (aristas).

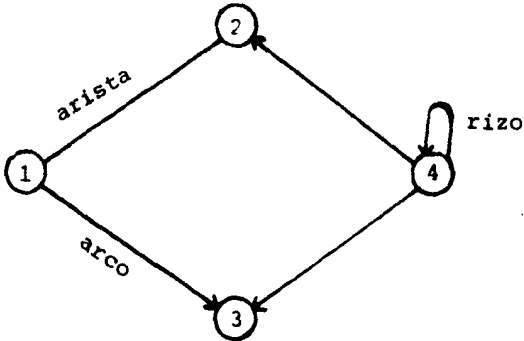


Figura 1

Las gráficas, en este contexto, tienen como fin representar situaciones físicas o conceptuales tales como:

Distribución de energía eléctrica, sistemas de flujo de dinero, sistemas de comunicación, sistemas de transporte, sistemas de inventario, etc. Las gráficas que representan este tipo de problemas reciben el nombre de "Sistemas de redes de flujo".

El objetivo de plantear problemas mediante sistemas de redes de flujo, es optimizar alguna medida de efectividad, haciendo uso de los métodos usados en teoría de redes.

Una gráfica denotada por  $G = [N, A]$ , está compuesta por un conjunto finito  $N$ , cuyos elementos se denominan nodos y un conjunto  $A$ , formado por pares de nodos, denominados arcos.

#### GRAFICA DIRIGIDA

Se dice que una gráfica es dirigida cuando sus arcos están formados por pares ordenados de nodos, es decir, todos sus arcos son dirigidos. Cabe destacar que en una gráfica dirigida, el arco  $(i, j)$  es distinto al arco  $(j, i)$ .

#### GRAFICA CONEXA

Si dados cualquier par de nodos en una gráfica  $G = [N, A]$ , existe forma de ir de uno de ellos al otro, sin importar el haber respetado o no el sentido de los arcos, se dice que la gráfica es conexa.

## GRAFICA BIPARTITA

Dada una gráfica dirigida  $G = [\underline{N}, \underline{A}]$ , ésta se denominará bipartida, si podemos dividir el conjunto de nodos  $N$  en 2 subconjuntos  $N_1 \subset N$  y  $N_2 \subset N$ , con la característica de que para todo arco  $(i, j) \in A$ ,  $i \in N_1$  y  $j \in N_2$  ó  $i \in N_2$  y  $j \in N_1$ . (Figura 2.)

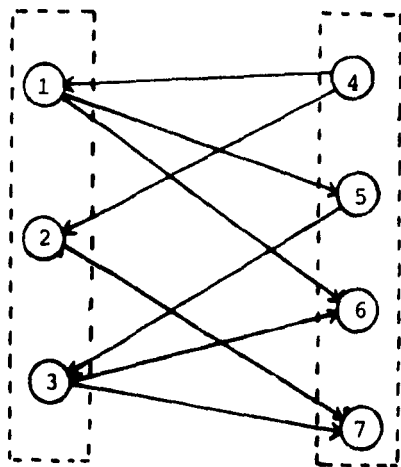


Figura 2.

## GRAFICA PARCIAL

Dada una gráfica  $G = [\underline{N}, \underline{A}]$ , se dice que  $G_p[\underline{N}', \underline{A}']$  es una gráfica parcial de  $G = [\underline{N}, \underline{A}]$  si  $G_p[\underline{N}', \underline{A}']$  es una gráfica y  $G_p[\underline{N}', \underline{A}'] \subset G[\underline{N}, \underline{A}]$ .

## MULTIGRAFICAS

Son gráficas en las que al menos dos nodos cualesquiera están unidos directamente, por dos o más arcos.

## RED

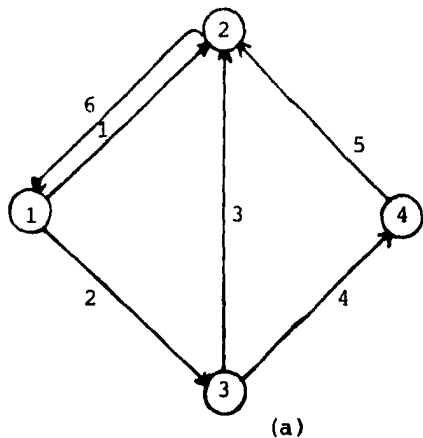
La red es la gráfica dirigida más importante. Una red es una gráfica dirigida sin rizados, la cual tiene asignados parámetros en sus arcos y/o en sus nodos.

### 1.3 Matrices de adyacencia e incidencia.

#### MATRIZ DE ADYACENCIA

Es una matriz que tiene como fin, representar una gráfica dirigida. Esta se construye de la siguiente manera:

Sea  $G = [N, A]$  una gráfica dirigida. Denotemos por  $Q = (q_{ij})$  a la matriz de adyacencia de orden  $n \times n$ , donde  $n$  representa el número de nodos contenidos en la gráfica. En esta matriz  $q_{ij} = 1$  si existe un arco con nodo inicial  $i$  y con nodo terminal  $j$ , en caso contrario  $q_{ij} = 0$  (Figura 3). Esta matriz puede ser usada, por ejemplo, cuando se desea dar la representación de una gráfica dirigida, en un programa de computación.



$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(b)

Figura 3.

a) Gráfica dirigida

b) Matriz de adyacencia asociada a la gráfica a).

#### MATRIZ DE INCIDENCIA NODOS - ARCOS

Esta matriz representa redes. La denominaremos  $P$ , es de orden  $n \times m$ , donde  $n$  representa el número de nodos y  $m$  el de arcos en la gráfica que se quiere representar. Su construcción se describe a continuación.

Empecemos por numerar los nodos y los arcos de la gráfica.

Si del nodo  $i$  parte el arco  $j$ , entonces  $P_{ij} = 1$ ; si al nodo  $i$  llega el arco  $j$ , entonces  $P_{ij} = -1$ ; en otro caso  $P_{ij} = 0$ .

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Matriz de incidencia nodos-arcos asociada a la gráfica de la figura 3.

#### 1.4 Algunos conceptos que se pueden definir en una gráfica

##### NODO INICIAL Y NODO TERMINAL

Dado un arco  $(i, j)$ , con sentido de  $i$  a  $j$ , diremos que  $i$  es su nodo inicial y  $j$  su nodo terminal.

##### NODO RAIZ

Dada una gráfica dirigida conexa, recibe este nombre todo nodo que no sea nodo terminal de ningún arco de la gráfica.

##### CADENA O CAMINO

Una cadena del nodo  $i_1$  al nodo  $i_k$  se define como una sucesión alternada de nodos y arcos distintos, denotados como:

$i_1, a_1, i_2, a_2, \dots, i_{k-1}, a_{k-1}, i_k$ , donde  $a_s = (i_s, i_{s+1})$ ,  $s = 1, \dots, k-1$ , es el arco que parte del nodo  $i_s$  y llega al nodo  $i_{s+1}$ .

## TRAYECTORIA

En caso de permitir que los arcos que forman parte de una cadena tengan indistintamente la forma  $(i_s, i_{s+1})$  ó  $(i_{s+1}, i_s)$  con  $s=1, \dots, k-1$ , ésta se denominará trayectoria del nodo  $i_1$  al nodo  $i_k$ .

## CIRCUITO

Un circuito se define como una sucesión alternada de nodos y arcos  $i_1, a_1, \dots, a_{k-1}, i_k$  (cadena del nodo  $i_1$  al nodo  $i_k$ ) en la que el nodo  $i_1$  y el nodo  $i_k$  son el mismo.

## CICLO

Es una trayectoria en la cual cualquier nodo que forme parte de ella es nodo inicial y nodo terminal.

Ejemplo 1.

Basándonos en la figura 3, tenemos:

- a) Cadena de 1 a 2; nodos 1,3,4,2;  
arcos (1,3), (3,4) y (4,2)
- b) Trayectoria de 3 a 2; nodos 3,1,2,  
arcos (1,3) y (1,2)
- c) Circuito de 1 a 1; nodos 1,2; arcos  
(1,2) y (2,1)
- d) Ciclo de 4 a 4; nodos 4,3,2; arcos  
(3,4), (3,2) y (4,2)



## CONJUNTOS $M_{O_i}$ Y $M_{T_i}$

En una gráfica dirigida  $G = [N, A]$  se define el conjunto  $M_{O_i}$ , como aquel conjunto que tiene por elementos a todos los arcos que se originan en el nodo  $i$ . De manera similar, se define el conjunto  $M_{T_i}$ , como aquel conjunto que tiene por elementos a todos los arcos cuyo nodo terminal es  $i$ .

## GRADO DEL NODO $i$

Se conoce con este nombre, en una red, al número de arcos que entran o salen del nodo  $i$ . Es claro que en una gráfica la suma de los grados de todos sus nodos es igual a 2 veces el número de arcos en ella.

## RIZO

Un rizo es un arco de la forma  $(i, i)$ , es decir, un arco en el cual su nodo inicial coincide con su nodo terminal (figura 1).

## FLUJO

Es el número de unidades que circula en una red, desde un nodo de depósito o fuente hasta un nodo de demanda o sumidero.

## ARCO SATURADO

Un arco a través del cual pasa la máxima cantidad de flujo permitido en él, recibe el nombre de arco saturado.

## DISPONIBILIDAD

Es frecuente asociar a cada nodo de una red, un parámetro denotado por  $d_i$ , que representa el número de unidades de algún material del que se dispone o demanda en ese nodo. Si el parámetro es positivo, se dice que el nodo es de depósito, si es negativo se le denomina nodo de demanda y si es cero, es llamado de traspaso.

### 1.5 Algunos tipos de redes.

#### RED SIMPLE

Una red  $G = [N,A]$ , se llamará simple si cuenta con un solo nodo de demanda o destino ( $t$ ) y un solo nodo de depósito o fuente ( $s$ ). En este tipo de redes no se permiten arcos de la forma  $(i,s)$  o de la forma  $(t,j)$ , con  $i, j \in N$  (Figura 4).

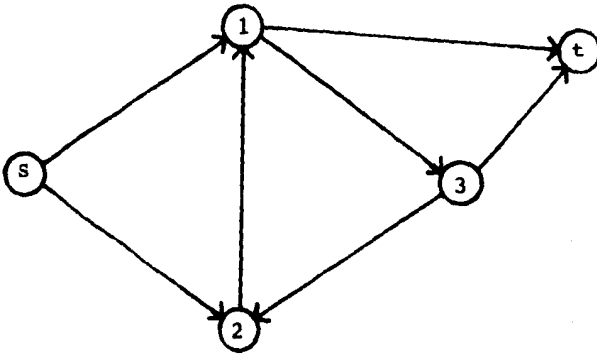


Figura 4

RED CIRCULATORIA

Es una red  $G = [N, A]$ , en la que todos sus nodos son de traspaso. (Figura 5).

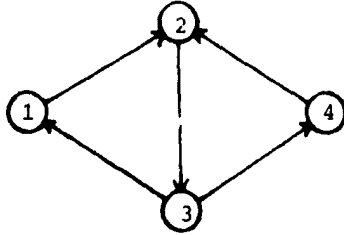


Figura 5

Si una red  $G = [\bar{N}, A]$  tiene varios nodos de destino y/o de depósito, ésta se puede transformar en una red simple, creando un nodo artificial de depósito y/o destino. Cada uno de los nodos de depósito, será nodo terminal de un arco que se origine en el nodo artificial de depósito y cada nodo de destino, será el origen de un arco que termine en el nodo artificial de destino (Figuras 6a y 6b).

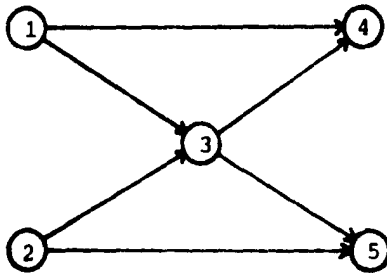


Figura 6(a)

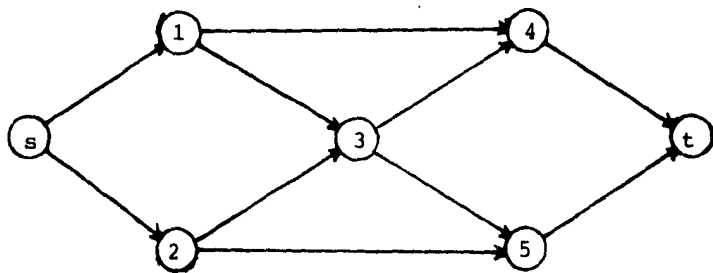


Figura 6(b).

6a) red con 2 nodos de depósito y 2 nodos de destino.

6b) red transformada a una red simple.

## 1.6 Árboles y cortaduras

### ARBOL

Dada una gráfica parcial  $G_p = [N', A'] \subseteq G[N, A]$ , con  $N' \geq 2$  y  $A' \geq 1$ , se dice que  $G_p [N', A']$  es un árbol si se puede caracterizar mediante cualquiera de los siguientes postulados:

- Es conexa sin ciclos.
- Existe una trayectoria única entre cada par de nodos.
- No tiene ciclos pero exactamente uno se forma al añadir una arista.
- Es conexa pero deja de serlo si alguna arista se quita.

Demostraremos ahora que  $A \Rightarrow B$  y que  $C \Rightarrow A$ .

A  $\Rightarrow$  B

Hipótesis:  $G_p = [N', A']$  es conexa y sin ciclos.

Demostración: Debido a que la gráfica es conexa, concluimos que dado cualquier par de nodos en  $G_p$  existe en ella al menos una trayectoria que los une.

Supongamos que para algún par de nodos  $x_i, x_j \in G_p = [N', A']$ , existe más de una trayectoria que los une. Sean  $T_1 \neq T_2$  dos de tales trayectorias ( $T_1 = x_i, (x_i, x_m), x_m, \dots, (x_s, x_j), x_j$ ;  $T_2 = x_i, (x_i, x_r), x_r, \dots, (x_n, x_j), x_j$ ); esto implica que existe un ciclo en  $G_p$ , lo cual contradice nuestra hipótesis, por tanto concluimos que hay una trayectoria única entre cada par de no dos, es decir, A  $\Rightarrow$  B.

C  $\Rightarrow$  A

Hipótesis:  $G_p = [N', A']$  es conexa pero deja de serlo si alguna arista se quita.

Demostración: Que deje de ser conexa si alguna de sus aristas es removida, implica que la gráfica no tiene ciclos, ya que si esto no se cumple, existe en ella al menos un ciclo; de aquí concluimos que  $G_p = [N', A']$  es conexa y sin ciclos, es decir, C  $\Rightarrow$  A.

La forma en que representaremos un árbol, gráficamente, es la siguiente:

El nodo raíz aparece en la parte inferior de la figura y diremos que su nivel es cero. Los arcos cuyo nodo inicial sea este nodo salen hacia arriba, sus nodos terminales se colocan a la misma altura en línea horizontal y tienen nivel 1. Los arcos que tienen por origen a cualquier nodo de nivel uno, también salen hacia arriba y su nodo terminal tiene nivel 2, así sucesivamente hasta alcanzar una altura en que no se origina ningún arco. Es importante destacar que la dirección de los arcos se escoge de tal manera que siempre existe un camino del nodo raíz a cualquier otro nodo.

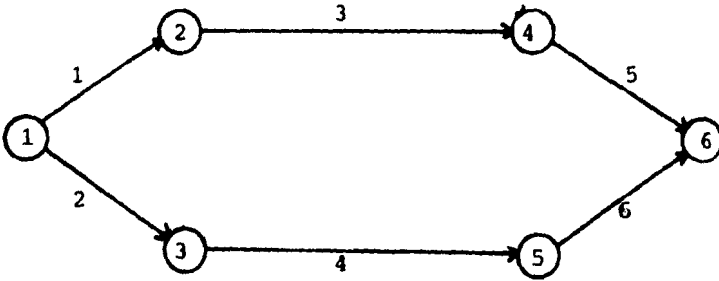
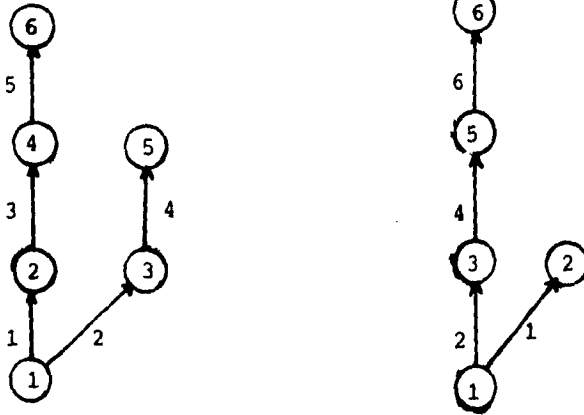


Figura 7.

EJEMPLO 2.



Arboles obtenidos de la red de la figura 7.

Como se observó en el ejemplo anterior, el arco (6,4) tiene asignado un número negativo, lo cual nos sirve para indicar que este arco tiene como nodo inicial al nodo 4 y como nodo final al nodo 6, en la red original. En otras palabras, un número negativo asignado a un arco en una gráfica, implica que dicho arco tiene el sentido contrario en la red original.

## CORTADURA

Un conjunto  $S$  de arcos que removidos de una gráfica conexa  $G = [\bar{N}, A]$  originan una gráfica parcial  $G_p = [\bar{N}, A-S]$  no conexa, recibe el nombre de cortadura.

## CORTADURA PROPIA

Si dada una cortadura  $C$ , formada por un conjunto  $S$  de arcos en una gráfica  $G = [\bar{N}, A]$ , dicha cortadura es tal que da como resultado una gráfica parcial  $G_p = [\bar{N}, A-S]$  no conexa, y no existe un conjunto  $S' \subset S$  que origine una gráfica parcial  $G'_p = [\bar{N}, A-S']$  no conexa, se dice que  $C$  es una cortadura propia.

El conjunto  $S$  puede también ser representado por  $(X, \bar{X})$ . La gráfica parcial creada al remover una cortadura propia de  $G = [\bar{N}, A]$ , desconectará a  $G$  en exactamente dos componentes, uno basado en el conjunto de vértices contenidos en  $X$  y el otro en el conjunto de vértices contenidos en  $\bar{X}$ .

En este trabajo, al referirnos a una cortadura, se entenderá que estamos hablando de una cortadura propia.



## 2. RUTA MAS CORTA

### 2.1 Introducción

En este capítulo se describen y analizan algunos problemas básicos de redes. En particular se estudia el problema de ruta más corta entre 2 nodos de una red, el nodo fuente y el nodo sumidero. El material aquí expuesto sirve de base para los siguientes capítulos. Los problemas tratados son:

- a. Arbol de expansión mínima
- b. Camino de un nodo s a un nodo t.
- c. Ruta más corta

Cada uno de estos temas se presenta de acuerdo a la siguiente estructura:

- i. Descripción del problema
- ii. Motivación mediante ejemplo
- iii. Algoritmo de solución con su prueba de convergencia
- iv. Aplicación del algoritmo

## 2.2 Arbol de Expansión Mínima.

Para poder desarrollar esta sección, presentamos la siguiente definición de árbol de expansión:

Dada una gráfica  $G = [\bar{N}, \bar{A}]$ , se dice que  $T$  es un árbol de expansión de ella, si  $T$  es un árbol (gráfica conexa sin ciclos) con la característica de contener a todos los nodos que forman parte de  $N$ , sin importar que todos los arcos que forman parte de  $A$  estén o no contenidos en  $T$ .

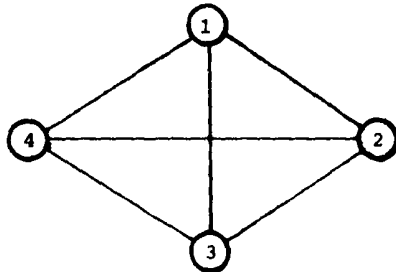
Consideremos una gráfica  $G = [\bar{N}, \bar{A}]$  en la que se tiene asignado un valor o peso para cada una de sus aristas. Estamos interesados en obtener un árbol de expansión mínima, es decir, un árbol de expansión en el que el peso de las aristas que lo forman es menor o igual a la suma del valor de las aristas de cualquier otro árbol de expansión de la misma gráfica. También podríamos estar interesados en obtener el árbol de expansión máxima de una gráfica  $G = [\bar{N}, \bar{A}]$ , el cual se define en forma análoga.

Este tipo de problemas se pueden presentar, por ejemplo, cuando se desea unir  $n$  terminales en una red eléctrica, empleando la menor cantidad de cable posible; también puede presentarse si se desea visitar un determinado número de lugares recorriendo la menor distancia y, en general, en problemas del tipo de establecer comunicación entre varios nodos, por un costo global mínimo.

EJEMPLO 1.

El gobierno federal desea beneficiar a los habitantes de cuatro pueblos de la sierra Tarahumara, creando un conjunto de carreteras de tal forma que las villas queden comunicadas, sin importar que para ir de una aldea a otra sea necesario pasar por uno o más de los pueblos. Por otro lado, es de su interés que el costo total de dicho proyecto sea el mínimo posible, por razones de presupuesto. El costo de establecer comunicación entre cada par de localidades es conocido.

Este problema puede plantearse por medio de una gráfica, en la cual cada nodo representa una población y cada arista la posible construcción de una carretera entre dos entidades (fig. 1). Si a cada arista le asignamos el costo que significaría la construcción de la carretera que representa, el problema de determinar que carreteras deben construirse, es equivalente a la determinación del árbol de expansión mínima en la red creada, es decir, aquel árbol de expansión que tenga el menor peso posible.



( Figura 1 )

A continuación presentamos un algoritmo atribuido a Primm.

ALGORITMO 1. Arbol de expansión mínima.

Propósito: Sea  $G = [N, A]$  una gráfica con "peso"  $v(a)$  asociado a cada una de sus aristas  $a \in A$ . Se desea determinar el árbol de expansión de peso mínimo.

Descripción. Sea  $x_0$  un nodo cualquiera de  $N$ .

0. Haga  $N^* = \{x_0\}$  ;  $A^* = \phi$  y  $k=1$

1. Si  $N^* = N$  pare; el árbol de expansión mínima ha sido encontrado y está formado por el conjunto de aristas contenido en  $A^*$ .

2. Seleccione la arista  $a_k \sim (x, x_k)$ ,  $x \in N^*$ ,  $x_k \notin N^*$  tal que

$$v(a_k) = \min \{v(a) \mid a \sim (x, y); x \in N^*, y \notin N^*\}$$

esto es, la arista de menor peso que tiene un nodo terminal en  $N^*$  y otro fuera de  $N^*$ . Hacer  $N^* = N^* \cup \{x_k\}$ ,  $A^* = A^* \cup \{a_k\}$  y  $k:=k+1$ . Regrese al paso 1. Si no existe tal arista  $a_k$  pare, la gráfica no es conexa.

Convergencia. Suponga que la gráfica  $G = [N, A]$  tiene  $S$  nodos y que  $T$  es el correspondiente árbol de expansión mínima cuyo peso denotaremos por  $v(T)$ . Sea  $\bar{T}$  el árbol de expansión generado por el algoritmo 1 y denote por  $a_1, a_2, \dots, a_{S-1}$  las aristas que iterativamente han sido seleccionadas para formar dicho árbol.

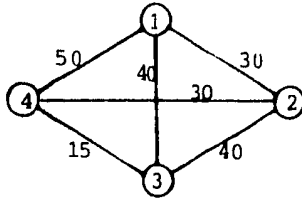
Demostraremos que  $v(T) = v(\bar{T})$  construyendo una sucesión de árboles de expansión  $T = T_0, T_1, \dots, \bar{T} = T_k$  donde  $k \leq S-1$  tales que  $v(T) = v(T_i)$  para toda  $i=1, \dots, k$ . El proceso de construcción de los árboles  $T_1, T_2, \dots, T_k$  es como sigue:

Si la arista  $a_1 \sim (x_0, x_1)$  forma parte de  $T_0$  hagamos  $T_1 = T_0$ . En caso contrario, añada la arista  $a_1$  al árbol  $T_0$  para formar un único ciclo. Eliminaremos una arista del ciclo para obtener otro árbol de expansión que denotaremos por  $T_1$ . Específicamente, elimine la arista  $a_{j_1} \sim (x_0, x)$  para algún  $x \in N$ . Es inmediato que  $v(T_1) \geq v(T)$ . Por otra parte se tiene que  $v(T_1) = v(T) - v(a_{j_1}) + v(a_1)$ . Sin embargo,  $v(a_1) \leq v(a_{j_1})$  implica que  $v(T_1) \leq v(T)$ . De donde  $v(T_1) = v(T)$ .

Sea  $a_r \sim (x, x_r)$  donde  $x \in \{x_0, x_1, \dots, x_{r-1}\}$  y  $x_r \in N$  la  $r$ -ésima arista seleccionada por el algoritmo. Si  $a_r$  forma parte de  $T_{r-1}$  hagamos  $T_r = T_{r-1}$ . En caso contrario añada la arista  $a_r$  al árbol  $T_{r-1}$  y forme un único ciclo. Eliminaremos un arco para formar otro árbol de expansión que denotaremos  $T_r$ . Elimine la arista  $a_{j_r} \sim (x, z)$  tal que  $x \in N^*$  y  $z \notin N^*$  donde  $N^* = \{x_0, x_1, \dots, x_{r-1}\}$ . Entonces  $v(T_r) \geq v(T) = v(T_{r-1})$ . Sin embargo, por la forma de selección de  $a_r$  se tiene que  $v(T_r) \leq v(T_{r-1})$ . En resumen  $v(T_r) = v(T_{r-1})$  para todo  $r \geq 1$  y la prueba de convergencia del algoritmo termina.

## EJEMPLO 2.

Suponga que en el ejemplo anterior se tienen los costos para las distintas carreteras y deseamos encontrar la solución más económica.



Aplicando el algoritmo 1 se tiene que:

$$0. N^* = \{3\}, A^* = \emptyset \text{ y } k = 1.$$

### Iteración 1.

$$1. N^* \neq N$$

$$2. a_1 = (3, 4); x_1 = 4; N^* = \{3, 4\}; A^* = \{a_1\}; k = 2$$

### Iteración 2.

$$1. N^* \neq N$$

$$2. a_2 = (4, 2); x_2 = 2; N^* = \{3, 4, 2\}; A^* = \{a_1, a_2\}; k = 3$$

### Iteración 3.

$$1. N^* \neq N$$

$$2. a_3 = (1, 2); x_3 = 1; N^* = \{3, 4, 2, 1\}; A^* = \{a_1, a_2, a_3\} \text{ y } k = 4$$

### Iteración 4.

1.  $N^* = N$ . El árbol de expansión mínima es:

$$A^* = \{(3, 4), (4, 2), (2, 1)\}$$

y el peso asociado mínimo es 75.

### 2.3 Camino de un nodo s a un nodo t.

En ocasiones se tiene la necesidad de determinar si existe una conexión entre dos nodos de una red, para enviar por ésta un flujo determinado. Muchas veces salta a la vista la respuesta a este tipo de cuestionamientos. Cuando no existe una gran cantidad de nodos intermedios la respuesta se puede dar inmediatamente después de una simple inspección visual. El problema se complica cuando se tiene un gran número de nodos intermedios entre los dos nodos de interés, trayendo ésto como consecuencia la difícil determinación, a simple vista, de la existencia o no de al menos una ruta entre los nodos en cuestión. En esta sección se propone un procedimiento que tiene como fin dar solución a este tipo de planteamientos.

#### EJEMPLO 3.

En época de vacaciones, un grupo escolar desea viajar de Tecate, B. C. a Chetumal. Supongamos que en Tecate no hay ninguna línea de camiones que viaje a Chetumal, entonces es necesario investigar si es posible llegar a alguna de las ciudades en las cuales hay camiones que vayan a Chetumal, y si en al menos una de estas poblaciones, existe forma de que el grupo sea transportado a su destino. Dicho problema puede ser planteado mediante una red, en la cual el nodo fuente es el lugar de partida, el nodo sumidero es el destino y los demás nodos representan lugares donde hay que transbordar. Los arcos representan la existencia de conexión entre las distintas ciudades.

ALGORITMO 2. Camino entre 2 nodos.

Propósito. Determinar en una gráfica dirigida  $G = [N, A]$ , la existencia de un camino de un nodo  $s$  a un nodo  $t$ .

Descripción.

0. Haga  $N^* = \{s\}$  y  $A^* = \phi$

1. Si  $t \in N^*$  pare; un camino de  $s$  a  $t$  ha sido determinado y puede ser obtenido de  $A^*$ .

2. Seleccione un arco dirigido  $a_k = (x_i, x_j)$  tal que  $x_i \in N^*$  y  $x_j \notin N^*$ . Haga  $N^* = N^* \cup \{x_j\}$  y  $A^* = A^* \cup \{a_k\}$ . Regrese al paso 1; si no existe tal arco, entonces pare: no existe un camino de  $s$  a  $t$ .

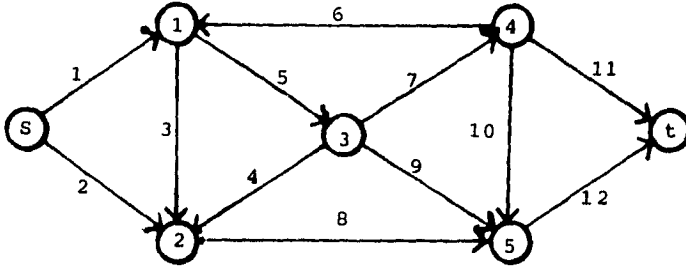
Convergencia:

El algoritmo encuentra en cada iteración un camino de  $s$  a algún otro nodo de la gráfica, para el que aún no se ha determinado una ruta a partir de  $s$ . El procedimiento termina en un número finito de iteraciones, ya que cuando mucho efectuará  $N-1$  iteraciones antes de encontrar un camino de  $s$  a  $t$ , si éste existe.



EJEMPLO 4.

Supongamos que tenemos la siguiente gráfica (figura 4) y queremos determinar si existe un camino de s a t.



( Figura 4 )

Iteración 1.

Paso 1:  $S = \{s\}$  y  $A = \phi$

Paso 2: Dado que  $t \notin S$  continuamos

Paso 3: Los arcos que cumplen con las restricciones son 1 y 2, elegimos al arco 1.

Paso 4: Hacemos  $S = \{s, 1\}$  y  $A = \{(s, 1)\}$

Iteración 2.

Paso 2: Dado que  $t \notin S$  continuamos

Paso 3: Los arcos que cumplen con las restricciones son 2, 3 y 5, escogemos el arco 2.

Paso 4: Hacemos  $S = \{s, 1, 2\}$  y  $A = \{(s, 1), (s, 2)\}$

### Iteración 3.

Paso 2: Dado que  $t \notin S$  continuamos.

Paso 3: Ahora los arcos que tienen posibilidad de entrar a A son los arcos 5 y 8. Nótese que el 3 ya no tiene posibilidad de entrar, pues su nodo terminal ya está en S. El arco elegido es ahora el arco 5.

Paso 4: Hacemos  $S = \{s, 1, 2, 3\}$  y  $A = \{(s, 1), (s, 2), (1, 3)\}$

### Iteración 4.

Paso 2:  $t \notin S$  continuamos

Paso 3: Los arcos que tienen posibilidad de entrar a formar parte de A son los arcos 7, 9 y 8. Seleccionamos el arco 8.

Paso 4: Hacemos  $S = \{s, 1, 2, 3, 5\}$  y  
 $A = \{(s, 1), (s, 2), (1, 3), (2, 5)\}$

### Iteración 5.

Paso 2:  $t \notin S$  continuamos

Paso 3: El arco que entra ahora es el arco 12.

Paso 4:  $S = \{1, 2, 3, 5, t\}$  y  
 $A = \{(s, 1), (s, 2), (1, 3), (2, 5), (5, t)\}$

### Iteración 6.

Paso 2:  $t \in S$  paramos, la ruta ha sido determinada  
 $\{s, (s, 2), 2, (2, 5), 5, (5, t), t\}$

## 2.4 Ruta más corta

En las secciones anteriores de este capítulo, presentamos un procedimiento para encontrar el árbol de expansión mínima y otro para determinar la existencia de un camino entre dos nodos predeterminados, en una red. Esta parte del capítulo hace uso de las ideas expuestas en las dos primeras secciones del mismo, considerando que tomamos como peso, el costo que significa hacer circular una unidad de flujo a través del arco  $(i, j) \forall i, j \in N$ . Mostraremos aquí un algoritmo cuyo objeto es encontrar las posibles rutas que unen a dos nodos de una red dirigida  $G = [N, A]$  y seleccionar entre éstas, aquélla que tenga peso mínimo. Este tipo de problemas se presentan cuando se requiere enviar flujo de un nodo a otro, recorriendo la "menor distancia" posible a lo largo de los arcos de la red. El algoritmo que en esta sección se incluye, es atribuido a Dijkstra. Tiene por objeto determinar la ruta más corta del nodo fuente al nodo sumidero, en una red dirigida  $G = [N, A]$ , cuando los valores asociados a sus arcos son mayores o iguales a cero; en caso contrario, el método propuesto no garantiza que la respuesta obtenida sea óptima. Es importante destacar que este algoritmo puede también ser usado para encontrar la ruta más corta del nodo fuente a todos los nodos restantes de una gráfica dirigida  $G = [N, A]$ .

### EJEMPLO 5.

Un escritor desea que a la brevedad posible salga al mercado su última obra, que se encuentra en forma manuscrita. Para tal labor piensa en la probable contratación de 3 compañías (A,B, C) que ayuden a su propósito.

Después de hablar con los gerentes de producción de las compañías, llega a la conclusión que tales empresas cuentan con un tiempo estimado de mecanografía, uno de revisión, un tercero de corrección y un último de impresión. Los tres gerentes de producción le ofrecen la oportunidad de elaborar una o más etapas del trabajo, con la condición de que se le proporcione la etapa ó etapas a realizar en forma completa.

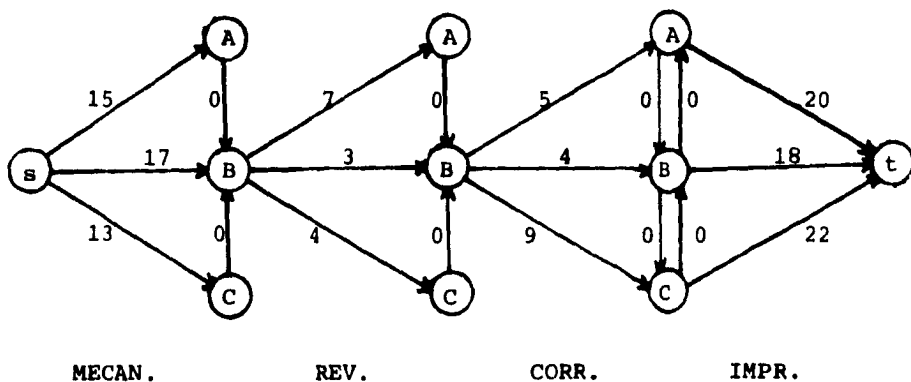
La tabla con los tiempos estimados para la realización de cada una de las etapas del trabajo (en días) es:

	MEC.	REV.	CORR.	IMPR.
A	15	7	5	20
B	17	3	4	18
C	13	4	9	22

Después de analizar el problema, encontramos que lo podemos representar mediante una red simple. En esta red, el nodo fuente representará el momento en que

el escritor entrega sus manuscritos, el sumidero, el momento en que le entregan la obra impresa, los demás nodos, el inicio o fin de alguna actividad, y los arcos, el tiempo estimado en concluir alguna etapa del proceso (figura 5).

Así planteado el problema, podemos encontrar la solución óptima, encontrando la ruta más corta de s a t, en nuestra red.



( Figura 5 )

### ALGORITMO 3. Ruta más corta.

Propósito: Determinar en una gráfica dirigida  $G = [N, A]$ , con costos mayores o iguales a cero asociados a sus arcos, la ruta más corta del nodo fuente al sumidero.

#### Descripción:

$\forall$  vértice  $x_j \in G = [N, A]$ , sea  $p(x_j)$  su etiqueta.

1. Asumamos  $p(s)=0$  y marquemos la etiqueta como permanente.

Consideremos  $p(x_j) = \infty \forall x_j \neq s$  y marquemos estas etiquetas en forma temporal. Sea  $S = \{s\}$ .

2.  $\forall x_j$  con etiqueta temporal, tal que incida en él un arco que forme parte de  $M_{0S}$ , se actualiza la etiqueta de acuerdo con:

$$p(x_j) = \min\{p(x_j), p(i)+c(i,x_j)\}$$

donde  $p(i)$  representa el costo de llegar a algún vértice  $i$  etiquetado permanentemente, que por medio de un arco que se origina en él conecta directamente a  $x_j$ . Si no existe un vértice  $x_j$ , con las características descritas, pare. No existe un camino de  $s$  a  $t$ .

3. De todos los vértices  $x_j$ , temporalmente etiquetados, encontrar  $x_j^*$  para el cual  $p(x_j^*) = \min\{p(x_j)\}$ .

4. Marque la etiqueta de  $x_j^*$  como permanente y actualice  $S$  como:  $S = S \cup \{x_j^*\}$ .

5. Si  $t \in S$ ,  $p(t)$  es la longitud de la ruta más corta requerida, alto. Si  $t \notin S$  regresar al paso 2.

En caso de estar interesados en encontrar la ruta más corta a todos los vértices de la red  $G = [N, A]$ , a partir de  $s$ , se pedirá en el algoritmo (paso 5) que éste pare cuando todos los vértices tengan etiqueta permanente.

### Convergencia:

Las etiquetas permanentes, en alguna etapa, muestran una ruta mínima. Sea  $S_1$  el conjunto de vértices con estas etiquetas y  $S_2$  el conjunto de vértices con etiquetas temporales.

Al final del paso 3 de cada iteración, se determina la ruta más corta de  $s$  a algún vértice  $x_j^*$ , que pasa por completo a través de vértices en  $S_1$ . Debido a que sólo un vértice entra a  $S_1$  en cada iteración, la actualización de  $p(x_j)$  requiere sólo la comparación dada por el paso 2.

Suponga que existe una trayectoria de menor costo de  $s$  a  $x_j^*$  que no pasa enteramente a través de  $S_1$ , es decir, contiene al menos un vértice de  $S_2$ ; sea  $x_i \in S_2$  el primero de tales vértices en la ruta.

Por hipótesis todos los costos son no negativos, lo que implica que la parte de la ruta de  $x_i$  a  $x_j^*$  debe tener un costo no negativo  $\Delta$ , por tanto:

$$p(x_i) + \Delta < p(x_j^*) \Rightarrow p(x_i) < p(x_j^*) - \Delta \Rightarrow p(x_i) < p(x_j^*)$$

Esto es una contradicción, pues el algoritmo en cada iteración escoge la etiqueta más pequeña y, por tanto, la ruta más corta a  $x_j^*$  pasa por completo a través de vértices en  $S_1$  y  $p(x_j^*)$  es su longitud.

Debido a que  $S_1$  es inicialmente  $s$  y en cada iteración  $x_j^*$  es aunada a  $S_1$ , el asumir que las  $p(x_i)$  son rutas más cortas para toda  $x_j$  en  $S_1$  es válido en cada iteración. Por tanto la respuesta producida por el algoritmo es óptima.

Por otro lado, dado que el algoritmo sólo permite costos mayores o iguales a cero e incluye un nodo a  $S$  en cada iteración, éste termina en un número finito de pasos, ya que como máximo se efectuarán  $n-1$  iteraciones, para lograr etiquetar el nodo sumidero.

#### EJEMPLO 6.

Supongamos que queremos encontrar la ruta más corta del nodo fuente a todos los demás nodos, en la siguiente red (fig. 6).

(# de arco, costo)

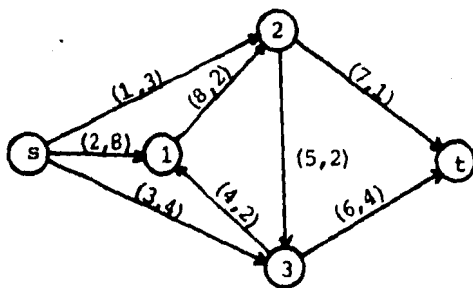


Figura 6.



Aplicando el método Dijkstra se tiene:

Iteración i

$$p(s)=0, S=\{s\} \text{ y } p(x_j)=\infty \quad \forall x_j \neq s$$

$$k(S, j) \text{ y } j \notin S \text{ es igual a } \{1, 2, 3\}$$

$$p(1) = \min \{\infty, 0+8\} = 8$$

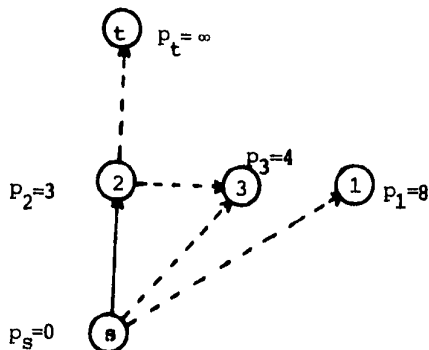
$$p(2) = \min \{\infty, 0+3\} = 3$$

$$p(3) = \min \{\infty, 0+4\} = 4$$

$$x_j^* = \min \{p(x_1), p(x_2), p(x_3), p(t)\} = p(x_2)$$

$$= \min \{8, 3, 4, \infty\} = 3 \text{ que corresponde a } x_2.$$

$$S = S \cup x_2 = \{s, 2\}$$



Las rayas punteadas representan los arcos que tienen posibilidad de entrar en la siguiente iteración; la raya continua representa el arco que entra en esta iteración, para etiquetar como permanente al vértice en el que incide.

### Iteración 2.

$k(s, j) \vdash j \notin S$  es igual a  $\{2, 3, 7, 5\}$

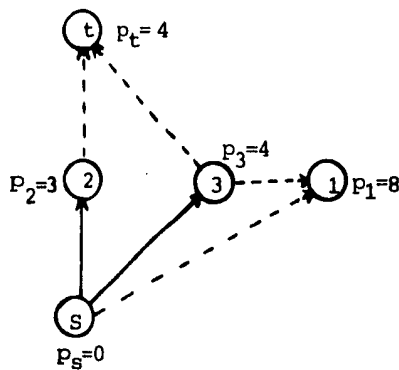
$$p(1) = 8$$

$$p(3) = \min \{4, 3+2\} = 4$$

$$p(t) = \min \{\infty, 3+1\} = 4$$

$$x_j^* = \min \{p(x_1), p(x_3), p(x_t)\} = p(x_3) \quad (\text{arbitrariamente})$$

$$S = S \cup x_3 = \{s, 2, 3\}$$



### Iteración 3.

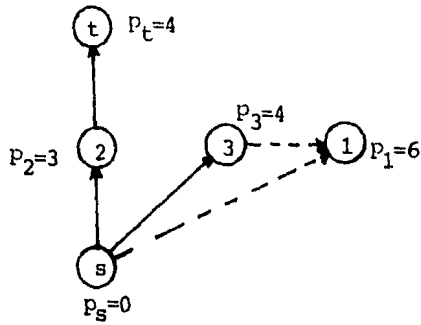
$k(S, j) \vdash j \notin S$  es igual a  $\{2, 7, 6, 4\}$

$$p(1) = \min \{8, 4+2\} = 6$$

$$p(t) = \min \{4, 4+4\} = 4$$

$$x_j^* = \min \{p(x_1), p(x_t)\} = p(x_t)$$

$$S = S \cup x_t = \{s, 2, 3, t\}$$



Iteración 4.

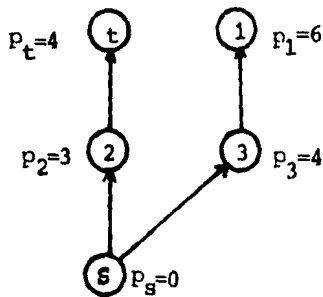
$k(S, j) \rightarrow j \notin S$  es igual a  $\{2, 4\}$

$$p(1) = \min \{8, 4+2\} = 6$$

$$x_j^* = p(x_1)$$

$$S = S \cup x_1 = \{s, 1, 2, 3, t\}$$

Alto. Las rutas más cortas del nodo fuente a todos los demás nodos han sido encontradas, los costos y rutas se muestran en el siguiente árbol de expansión mínima.



### 3. FLUJO MAXIMO

#### 3.1 Descripción del problema.

Un caso importante de problemas de redes de flujo lo constituye el denominado problema de flujo máximo. Específicamente, sea  $G = [N, A]$  una red simple con nodo fuente  $s$  y nodo sumidero  $t$ . Suponga que a cada arco  $k$  se asocia una cota superior  $\bar{c}_k$  que representa la cantidad máxima de flujo que puede circular por dicho arco. Se desea determinar la máxima cantidad de flujo que puede hacerse llegar del nodo fuente al sumidero.

Existen dos enfoques para resolver el problema de flujo máximo. El primero es plantearlo como problema de programación lineal y aplicar los métodos tipo simplex para resolverlo. El segundo enfoque, mucho más sencillo, es emplear métodos especiales que explotan la estructura de la red. En este capítulo se describe un método basado en el segundo enfoque y se ilustra su aplicación. La relación de este método con el concepto de cortadura de una red también se ilustra.

### 3.2 Cortadura mínima

Antes de continuar con el desarrollo del problema de flujo máximo describiremos ampliamente el concepto de cortadura mínima.

Sea  $X$  cualquier conjunto de nodos de la red  $G = [N, A]$ , tal que  $X$  contiene al nodo fuente ( $s$ ), pero no al nodo sumidero ( $t$ ). Sea  $\bar{X} = N - X$ , entonces el conjunto  $(X, \bar{X}) = \{(i, j) \in A: i \in X, j \in \bar{X}\}$  recibe el nombre de cortadura que separa al nodo fuente del sumidero. Dada una cortadura  $(X, \bar{X})$  de la red  $G = [N, A]$ , se define la capacidad de la cortadura como la suma de las capacidades de los arcos en la cortadura. La capacidad de la cortadura  $(X, \bar{X})$ , denotada  $C(X, \bar{X})$ , está dada por

$$C(X, \bar{X}) = \sum_{(i, j) \in (X, \bar{X})} c(i, j)$$

donde  $c(i, j)$  es la capacidad del arco  $(i, j)$ . Dicha capacidad es un número entero no negativo. La cortadura de menor capacidad se denomina cortadura mínima.

El siguiente teorema demuestra que el valor de cualquier flujo factible en una red dada, es menor o igual que la capacidad  $C(X, \bar{X})$  de cualquier cortadura que separe al nodo fuente del sumidero y que el flujo máximo está asociado a una cortadura mínima.

TEOREMA 1. (Flujo máximo-corte mínimo). En toda red simple el valor del flujo máximo es igual al valor de la cortadura mínima.

Prueba. Observe que el flujo permitido es siempre menor o igual a la capacidad de cualquier corte. De donde sólo es necesario establecer un flujo cuyo valor sea igual a la capacidad de un corte. De esta manera quedará demostrado que dicho flujo es máximo y que tal corte es mínimo.

Suponga que denotamos por  $f$  el valor del flujo máximo que puede hacerse llegar del nodo fuente  $s$  al nodo sumidero  $t$ . Defina un conjunto  $X$ , de nodos contenidos en  $N$ , de la siguiente forma:

- a.  $s \in X$
- b. Si  $x \in X$  y  $f(x,y) < c(x,y)$  entonces  $y \in X$
- c. Si  $x \in X$  y  $f(y,x) > 0$  entonces  $y \in X$

Existen dos casos a considerar:

Caso 1.  $t \in \bar{X}$ . Entonces el corte  $(X, \bar{X})$  separa al nodo fuente  $s$  del nodo sumidero  $t$  y se tiene, por definición del conjunto  $X$ , que: Dado que  $t$  no está en  $X$  no puede darse el caso en que  $c(x, \bar{x}) > f(x, \bar{x})$  (inciso b de la definición del conjunto  $X$ ), esto nos hace concluir que  $c(x, \bar{x}) = f(x, \bar{x})$ . Por otro lado, dado el inciso c de nuestra definición del conjunto  $X$ , sabemos que si  $t \notin X$  no es factible que  $f(\bar{x}, x)$  sea mayor que cero, por lo cual concluimos que  $f(\bar{x}, x) = 0$ .

Las conclusiones anteriores implican que el corte propuesto es mínimo y que el flujo es máximo.

Caso 2.  $t \in X$ . Entonces existe al menos una trayectoria  $T$  en  $X$  que conecta al nodo fuente  $s$  con el nodo sumidero  $t$ . Específicamente, existen nodos en la red simple  $G = [N, A]$ , denotados  $s = x_1, x_2, \dots, x_n = t$  tales que:

$$\epsilon_i = \begin{cases} c(x_i, x_{i+1}) - f(x_i, x_{i+1}) > 0 \quad \forall (x_i, x_{i+1}) \in T \\ f(x_{i+1}, x_i) > 0 \quad \forall (x_{i+1}, x_i) \in T \end{cases}$$

$i=1, \dots, n-1$  en ambos casos.

$\epsilon_i$  entero  $\geq 1$ .

Denote por  $\epsilon$  el mínimo de estos escalares positivos e incremente el flujo de  $s$  a  $t$  como sigue:

Si  $(x_i, x_{i+1}) \in T$ , el nuevo flujo en este arco será  $f(x_i, x_{i+1}) + \epsilon$  y si  $(x_{i+1}, x_i) \in T$ , el nuevo flujo en este arco será  $f(x_{i+1}, x_i) - \epsilon$ . Es sencillo verificar que las ecuaciones de continuidad en cada nodo  $x \neq s, t$  se satisfacen y que el flujo de  $s$  a  $t$  se ha incrementado en un valor  $\epsilon$  (entero mayor o igual a 1). Esto contradice la suposición que  $f$  es el flujo máximo y se tiene necesariamente que  $t \notin X$  o equivalentemente  $t \in \bar{X}$ , por lo que podemos asegurar que estamos en el caso 1. Esto termina la prueba.

Conviene hacer mención que el procedimiento de prueba empleado en este teorema es constructivo y que dado cualquier flujo  $f_{ac}$

tible, en una red simple  $G = [N, A]$ , se tiene como resultado de tal procedimiento:

Caso 1. Se tiene el máximo flujo.

Caso 2. No se tiene el máximo flujo y se indica una forma de mejorar el flujo actual.

Puesto que con el uso de este procedimiento, en cada iteración se incrementa en al menos una unidad de flujo el número de unidades del mismo que se hace llegar al nodo sumidero partiendo del nodo fuente, la repetición de este método produce, después de un número finito de iteraciones (número menor o igual que el valor de la cortadura mínima) el máximo flujo y asociado con él la cortadura mínima.

Presentamos ahora un ejemplo en el cual se puede apreciar la relación que existe entre el valor del flujo máximo y el valor de la cortadura mínima.



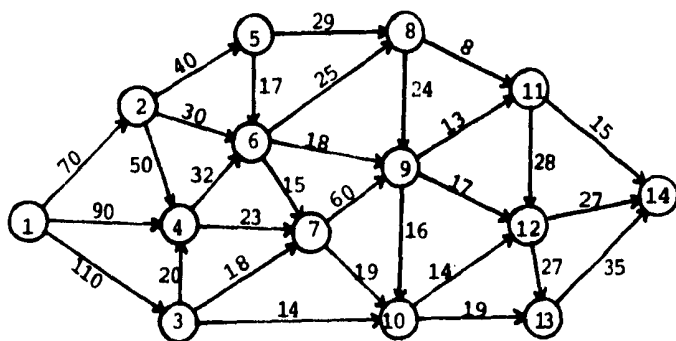
EJEMPLO 1.

Durante los últimos 5 años, la ciudad de Magozal ha sufrido serias inundaciones, a raíz de un considerable incremento en los escurrimientos de agua que alimentan la presa de Mincuinf, ubicada en el municipio de Tantoyuca. Tal situación ha traído como consecuencia cuantiosas pérdidas para los habitantes de la ciudad.

Las autoridades competentes de la zona, con la experiencia adquirida, han logrado identificar las diversas rutas que sigue el caudal hasta llegar a la ciudad y tienen una estimación de la cantidad máxima de flujo que por éstas circula.

Se ha pensado en la construcción de diques, de tal forma que la inversión hecha sea mínima y se garantice que la ciudad no volverá a sufrir las consecuencias del desborde de la presa.

El costo de la construcción de los diques, de acuerdo a las condiciones topográficas por donde se sabe que circula el agua, así como la representación esquemática de las trayectorias que ésta sigue hasta llegar a la ciudad, se muestran en la siguiente red.



En la figura, los nodos fuente y sumidero representan la presa y la ciudad, respectivamente; los nodos restantes son puntos de intersección de las rutas que seguirá el agua. Los arcos representan tales rutas y los números adyacentes a éstos, indican el costo de la construcción de los diques, en millones de pesos.

Las personas encargadas de dar solución al problema, concluyeron que el costo de construcción de los diques estaba ligado en forma directamente proporcional a las cantidades máximas de flujo que pueden circular por las rutas en cuestión. El problema fue planteado mediante la red anterior como un problema de flujo máximo, que al resolverse redituó una mínima cortadura, o sea, un conjunto de rutas de mínima capacidad total, que bloqueadas impedirán otra inundación en Magozal, siendo mínimo el costo de la erogación hecha.

En la siguiente sección se describe el concepto de red marginal y se da un ejemplo de su aplicación, inmediatamente después se proporciona un algoritmo de flujo máximo que hace uso de tal concepto.

### 3.3 Red Marginal

Supongamos que  $G = [N, A]$  denota una red simple y que  $f_k$  es el flujo factible en cada arco  $k$  de la red, encontrado después de la  $k$ -ésima iteración en la aplicación del algoritmo de flujo máximo. El propósito de la red marginal es establecer la posibilidad de incrementar o decrementar el flujo en la red original, dado que ya se tiene en ésta un flujo factible  $F$ .

La red marginal denotada  $G = [N^*, A^*]$ , es tal que  $N^* = N$  y  $A^* = A_1^* \cup A_2^*$ , donde:

a. El conjunto  $A_1^*$  integrado por arcos que llamaremos "arcos hacia adelante" consta de todos los arcos de la red original, en los cuales el flujo que circula después de la  $k$ -ésima iteración, en la aplicación del algoritmo de flujo máximo, es menor que la capacidad del arco, esto es,  $(i, j) \in A_1^*$  si  $(i, j) \in A$  y  $f_k(i, j) < c_k$ .

Los parámetros asociados a estos arcos son:  $c_k^* = c_k - f_k$ .

b. El conjunto  $A_2^*$  integrado por arcos que denominaremos "arcos reflejados", consiste de arcos  $(j, i)$  tales que  $(i, j) \in A$  y  $f_k(i, j) > 0$ . Los parámetros asociados con estos arcos son:

$c_{-k}^* = -f_k$ . Observe que los arcos hacia adelante son los mis

mos que en la red original y que únicamente sus capacidades han sido modificadas. En particular, los arcos que están satu

rados en la red original, no son considerados en la red marginal, pues ya no hay forma de incrementar el flujo que circula

a través de ellos. Por razones análogas, los únicos arcos

reflejados que son considerados, son aquéllos que corresponden a arcos originales por los cuales pasa flujo.

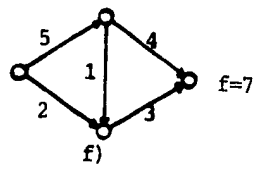
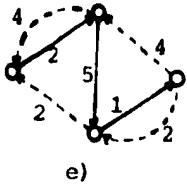
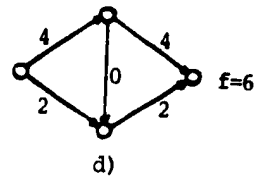
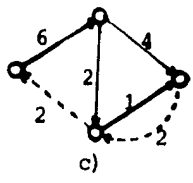
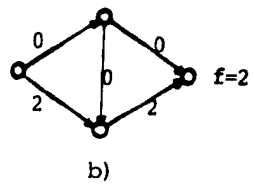
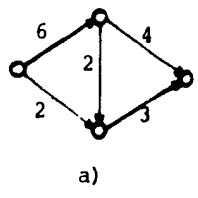
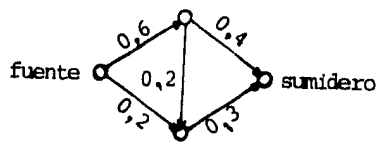
El funcionamiento de la red marginal, utilizada en el algoritmo de flujo máximo, se observa en el ejemplo 2 dado a continuación. En la red de ese ejemplo, la figura a muestra la red marginal asociada a la red original con flujo factible igual a cero en todos los arcos. Dicha red es idéntica a la red original. Una ruta de *s* a *t* en la red marginal se identifica por simple inspección. El flujo máximo que puede pasar por tal ruta se ilustra en la figura b.

La figura c muestra la red marginal asociada con la red de la figura b. En dicha figura se muestran los correspondientes arcos reflejados. Observe que estos arcos tienen una capacidad igual al flujo que se envía por ellos en la red original. Equivalentemente, la capacidad máxima está asociada al flujo que podemos regresar por tales arcos. Una ruta para ir del nodo fuente al sumidero se tiene por simple inspección. La figura d muestra las rutas para enviar seis unidades del nodo fuente al sumidero.

Por último, las gráficas e y f tienen una explicación similar a las 2 anteriores. Si observamos con detalle la figura f encontraremos que los 2 arcos que inciden en el nodo sumidero están saturados, por lo que si se dibuja la red marginal asociada con esta gráfica, se encontrará que no existe en ella un camino que una al nodo fuente con el nodo sumidero. Por lo anterior concluimos que el flujo máximo ha sido encontrado; éste es igual a 7 unidades.

EJEMPLO 2.

(cap. mín, cap. máx.)



## ALGORITMO 1. Flujo máximo.

### Descripción.

- (0) Buscar un camino de  $s$  a  $t$  en la red marginal.
- (1) Si tal camino no existe, paramos. El flujo es máximo.
- (2) Si sí existe, enviar por éste la máxima cantidad de flujo permitida.
- (3) Crear la nueva red marginal e ir a (0).

### Convergencia.

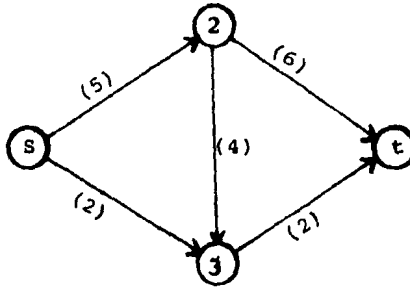
El no encontrar una cadena de  $s$  a  $t$  en la red marginal, implica que dado cualquier camino de  $s$  a  $t$  en la red original, existe en éste al menos un arco saturado, razón por la cual no podemos incrementar el número de unidades de flujo que llegan al nodo  $t$  partiendo de  $s$ , es decir, el flujo que llega a  $t$  con origen en  $s$ , es máximo.

Si encontramos una cadena de  $s$  a  $t$  en la red marginal, implica que tenemos forma de incrementar en al menos una unidad de flujo, el flujo que llega a  $t$  partiendo de  $s$ ; por lo que después de un número finito de iteraciones (numero menor o igual que el valor de la cortadura mínima) encontraremos que ya no tenemos forma de incrementar el flujo de  $s$  a  $t$ , por tanto éste es máximo.

### 3.4 Ejemplo de aplicación.

#### EJEMPLO 3.

En la siguiente red se desea determinar cual es el máximo número de unidades de flujo que puede hacerse llegar del nodo fuente (s) al nodo sumidero (t). En esta red el flujo inicial es cero, por lo que coincide con su red marginal.



#### Iteración 1.

Paso 1: Dado lo simple de la gráfica, por inspección encontramos que un camino de s a t es:

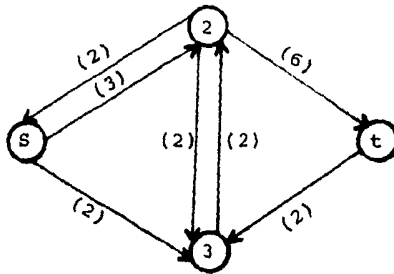
$\{s, (s,2), 2, (2,3), 3, (3,t), t\}$

Paso 2: El máximo incremento de flujo vfa este camino debe ser igual al mínimo de las capacidades de los arcos que lo forman, ya que de otra forma violaríamos la restricción de capacidad máxima

en al menos uno de los arcos:

$$\Delta_1 = \min \{c(s,2), c(2,3), c(3,t)\} = \min \{5,4,2\} = 2$$

La correspondiente red marginal queda dada como:



### Iteración 2.

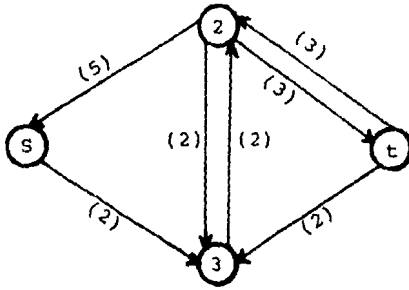
Paso 1: Una cadena de s a t en la red marginal es:

$$\{s, (s,2), 2, (2,t)\}$$

Paso 2:  $\Delta_2 = \min \{c(s,2), c(2,t)\} = \min \{3,6\} = 3$

La red marginal es ahora:





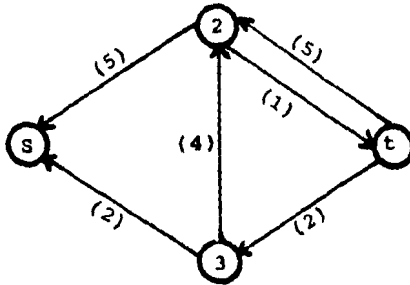
Iteración 3.

Paso 1: Un camino de s a t en esta red es:

$$\{s, (s,3), 3, (3,2), 2, (2,t)\}$$

Paso 2:  $\Delta_3 = \min \{c(s,3), c(3,2), c(2,t)\} = \min\{2,2,3\} = 2$

La correspondiente red marginal queda dada como:



#### Iteración 4.

Paso 1: Por inspección encontramos que ya no podemos enviar más flujo, pues no existe un camino de s a t. Por tanto el flujo máximo ha sido encontrado.

Este flujo es igual al flujo inicial más los incrementos del mismo, logrados con la ejecución del algoritmo:

$$\text{flujo máximo} = 0 + 2 + 3 + 2 = 7$$

## 4. METODO COMBINADO

### 4.1 Descripción del problema

Una clase importante de modelos de programación lineal la constituyen los modelos de redes, pues se presenta una estructura especial que permite proponer métodos de solución sencillos y eficientes. La primera estructura de redes que se analizó fué el problema de transporte, cuya solución original es comparativamente, a nuestro juicio, más sencilla que la asociada a los procedimientos tipo simplex de la programación lineal.

Los problemas de transporte y asignación son casos especiales de los modelos de redes de flujo y posiblemente son las estructuras especiales más importantes de la programación lineal.

En este capítulo se describe un modelo de redes consistente en determinar el flujo máximo que puede ir de un nodo fuente a un sumidero, en una red simple, a costo mínimo. Para lograr esto es necesario manipular y determinar los flujos en la red de distribución con el fin de obtener beneficios máximos, es decir, conocida la demanda de flujo en un nodo de la red, se desear asignar flujos en ésta cuyo costo global sea mínimo.

#### 4.2 Ejemplo de motivación.

Una compañía produce sillas y dispone de cuatro centros de producción. El costo de producción y los niveles máximos y mínimos de producción en cada planta son:

Planta	Costo/silla	Prod. máxima	Prod. mínima
1	50	500	0
2	70	750	400
3	30	1000	500
4	40	250	250

Cada silla requiere de 10kgs. de madera y existen 2 vendedores (A y B) que pueden surtir cualquier cantidad de madera, a cambio de que la compañía garantice comprar al menos 8000 kgs. de madera por mes, a cada vendedor.

El vendedor A ofrece la madera a un precio de \$2.00 por kg y el vendedor B a \$1.50 por kg. Los costos de envío de madera de cada vendedor a las a las plantas, en pesos/kilo, son:

Vendedor	Planta			
	1	2	3	4
A	.2	.4	.6	.8
B	.8	.6	.4	.4

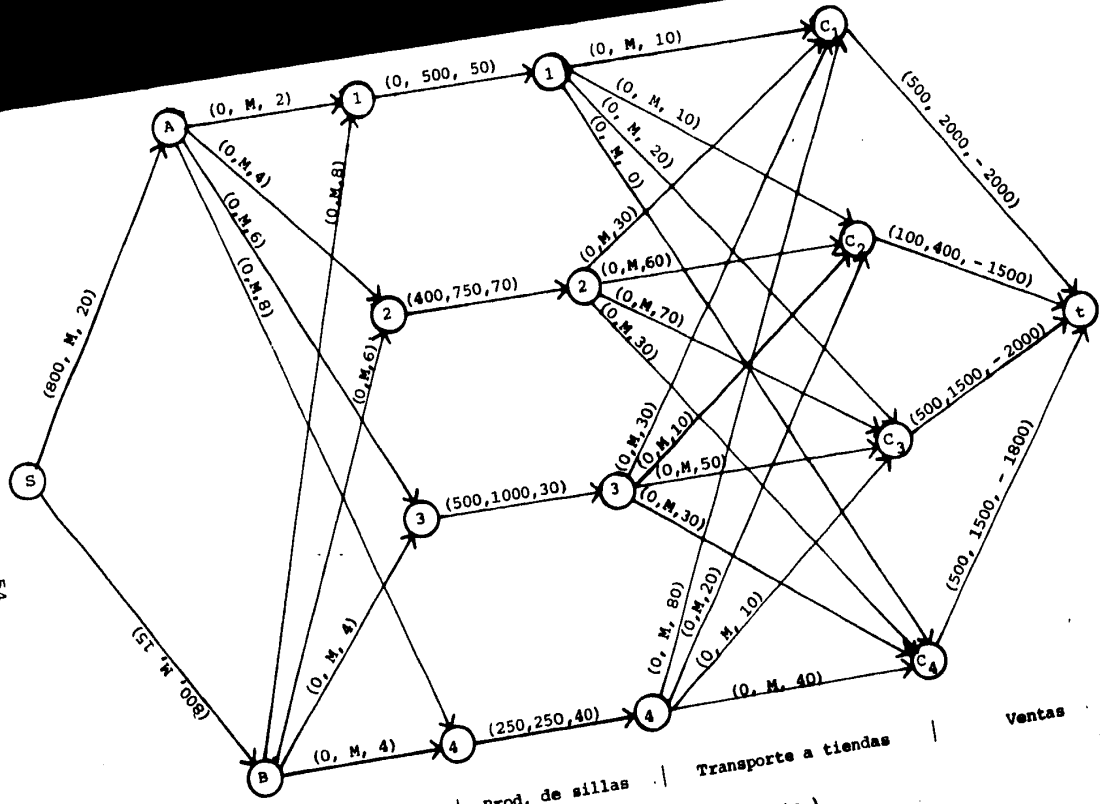
Las sillas pueden ser vendidas en cuatro ciudades diferentes ( $c_1, c_2, c_3, c_4$ ) y los costos de transporte (en pesos por silla) de las plantas a las ciudades son:

Planta	$c_1$	$c_2$	$c_3$	$c_4$
1	10	10	20	0
2	30	60	70	30
3	30	10	50	30
4	80	20	10	40

La demanda mínima y máxima mensual de sillas y el precio de venta en cada ciudad es:

Ciudad	Precio de venta (pesos)	Demanda máxima y mínima	
1	2000	2000	500
2	1500	400	100
3	2000	1500	500
4	1800	1500	500

Se desea establecer el plan de compra de madera, así como la producción y distribución de sillas, de manera de maximizar ganancias. La representación gráfica del problema se presenta en la red de la figura 1.



Compra de madera | Transporte | Prod. de sillas | Transporte a tiendas | Ventas  
 ( Capacidad mínima, capacidad máxima, costo )

( Figura 1 )

#### 4.2.1 Red marginal con costos asociados a sus arcos

Esta red es una red asociada con una red original  $G = [\bar{N}, \bar{A}]$ . Su propósito es reflejar el incremento en los costos totales, al aumentar el flujo que circula del nodo fuente al nodo sumidero, en la red  $G = [\bar{N}, \bar{A}]$ . Además, se utiliza para determinar la existencia o no de caminos en la red original que nos proporcionen un incremento de flujo a costo mínimo en el nodo sumidero o, simplemente, para determinar si existe una forma de disminuir el costo del flujo actual que circula en la red  $G = [\bar{N}, \bar{A}]$  y en su caso, darla a conocer.

Sea  $F = \{f_k\}$  el flujo factible actual en la red original,  $\forall$  arco  $k$ ; entonces la red marginal asociada a la red original, denotada  $G^* = [\bar{N}^*, \bar{A}^*]$ , es tal que  $N^* = N$  y  $A^* = A_1^* \cup A_2^*$ . Los conjuntos  $A_1^*$  y  $A_2^*$  se definen de la siguiente forma:

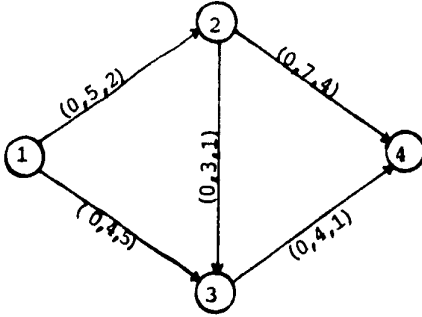
- a.  $A_1^*$  consta de todos los arcos de la red original  $G = [\bar{N}, \bar{A}]$  que no han sido saturados, es decir,  $(i, j) \in A_1^*$  si  $(i, j) \in A$  no saturado. Los parámetros asociados a estos arcos son  $c_k^* = c_k - f_k$  y  $h_k^* = h_k$ , donde  $h_k$  representa el costo por hacer circular una unidad de flujo a través del arco  $k$ .
- b.  $A_2^*$  está integrado por "arcos reflejados" de la red original, correspondientes a arcos originales por los cuales pasa un flujo entero mayor que cero, esto es,  $(j, i) \in A_2^*$  si  $(i, j) \in A$  y  $f(i, j) > 0$ . Los parámetros asociados a estos arcos son  $c_{-k}^* = -f_k$  y  $h_{-k}^* = -h_k$ .

Presentaremos ahora un ejemplo para ilustrar el funcionamiento de la red marginal, asociada a una red con costos en sus arcos.

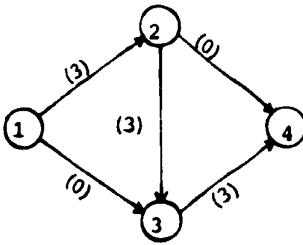
EJEMPLO

(cap. min., cap. max., costo)

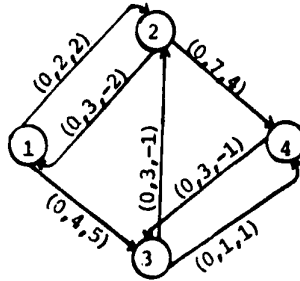
Considere la red



Un flujo factible se muestra a continuación con la correspondiente red marginal.



flujo factible



red marginal



#### 4.2.2. Prueba de efectividad del uso de la red marginal.

Sea  $G=[N,A]$  red simple con flujo factible denotado  $F=\{f_k\}$ .

Sea  $G^*=[N^*,A^*]$  la correspondiente red marginal. Suponga que  $F^*=\{(f_k^*, f_{-k}^*)\}$  (donde  $f_k^*$  es el flujo en el arco  $k$  y  $f_{-k}^*$  el correspondiente flujo en el arco reflejado) es un flujo factible en la red marginal.

El primer aspecto que conviene mencionar es que el flujo factible  $F$  en la red original más el correspondiente flujo factible  $F^*$  en la red marginal, proporcionan un flujo factible  $F'$  en la red original. Para ello defina el flujo  $F'=\{f_k'\}$  donde

$$f_k' = f_k + f_k^* - f_{-k}^*$$

que puede interpretarse diciendo que  $f_k'$  es la suma del flujo factible original  $f_k$  más la suma neta de los flujos en la red marginal; pues  $f_k^*$  es el incremento de flujo en el arco  $k$  de la red original y  $f_{-k}^*$  es el incremento de flujo en el correspondiente arco reflejado (decremento de flujo en el arco  $k$ ). Note que

$$f_k' \leq f_k + f_k^* \leq f_k + (c_k - f_k) = c_k$$

Por otra parte, se observa que  $f_k' \geq f_k - f_{-k}^*$ . De donde se implica  $f_k - f_{-k}^* \geq 0$  y  $f_k' \geq f_k - f_{-k}^*$ . Esto demuestra que  $F'=\{f_k'\}$  es un flujo factible en la red original.

Un segundo aspecto que conviene señalar es que si  $K(F)$  y  $K(F')$  denotan los costos asociados con los respectivos flujos  $F$  y  $F'$  en  $G = [\bar{N}, A]$  y  $K^*(F^*)$  denota el costo asociado al flujo  $F^*$  en  $G^* = [\bar{N}^*, A^*]$ , entonces se cumple que

$$K(F') = K(F) + K^*(F^*)$$

Para ello observemos que

$$K(F) = \sum_{k=1}^n h_k f_k$$

(suponiendo que  $A$  tiene  $n$  arcos) donde  $h_k$  representa el costo por hacer circular una unidad de flujo a través del arco  $k$ , y  $K^*(F^*)$  es el costo asociado con el flujo factible  $F^* = \{(f_k^*, f_{-k}^*)\}$  en la red marginal, entonces

$$K^*(F^*) = \sum_{k=1}^n h_k^* f_k^* + \sum_{k=1}^n h_{-k}^* f_{-k}^*$$

donde  $h_k^* = h_k$  y  $h_{-k}^* = -h_k$ . Por otra parte, dado que  $F'$  es la suma de los flujos  $F$  y  $F^*$  se tiene que

$$\begin{aligned} K(F') &= \sum_{k=1}^n h_k f_k' \\ &= \sum_{k=1}^n h_k (f_k + f_k^* - f_{-k}^*) \\ &= \sum_{k=1}^n h_k f_k + \sum_{k=1}^n h_k f_k^* + \sum_{k=1}^n -h_k f_{-k}^* \\ &= K(F) + K^*(F^*) \end{aligned}$$

El siguiente resultado demuestra que si  $F$  y  $F^*$  son óptimos, lo mismo es cierto del flujo suma  $F'$ .

TEOREMA 1. Sea  $F=\{f_k\}$  el flujo a costo mínimo en la red  $G = [N, A]$  que proporciona una cantidad  $X$  de flujo en el nodo sumidero. Sea  $G^*=[N^*,A^*]$  la correspondiente red marginal y  $f^*=\{f_k^*\}$  el flujo a costo mínimo que proporciona  $Y$  unidades de flujo en el nodo sumidero. Entonces el flujo  $F'=\{f'_k\}$  definido como

$$f'_k = f_k + f_k^* - f_{-k}^*$$

es el flujo a costo mínimo que proporciona una cantidad de flujo  $X + Y$  en el nodo sumidero.

Prueba. Sea  $K(F)$  el costo del flujo  $F$  obtenido en la red y  $K^*(F^*)$  el costo del flujo  $F^*$  obtenido en la red marginal correspondiente, respectivamente. El costo del flujo  $F'$  en la red original es  $K(F') = K(F) + K^*(F^*)$ . Sea  $F''$  un flujo (arbitrario) en la red original que proporciona  $X + Y$  unidades de flujo en el nodo sumidero. Defina el flujo  $F^{**} = \{(f_k^{**}, f_{-k}^{**})\}$  como sigue:

- i. Si  $f_k'' > f_k$  entonces  $f_k^{**} = f_k'' - f_k$  y  $f_{-k}^{**} = 0$
- ii. Si  $f_k'' < f_k$  entonces  $f_k^{**} = 0$  y  $f_{-k}^{**} = (f_k - f_k'')$
- iii. Si  $f_k'' = f_k$  entonces  $f_k^{**} = f_{-k}^{**} = 0$

Es sencillo verificar que  $F^{**}$  es factible en la red marginal. Asimismo se tiene que  $F''$  es la suma del flujo en la red original más el flujo  $F^{**}$  en la red marginal. Por lo tanto  $K(F'') = K(F) + K^*(F^{**})$ . Sin embargo  $K^*(F^*) \leq K^*(F^{**})$  debido a la optimalidad de  $F^*$  en la red marginal. Sumando  $K(F)$  a ambos miembros se tiene que  $F'$  es óptimo.

### 4.3 Método de Solución

#### RUTA MAS CORTA - FLUJO MAXIMO

En esta sección se describe y justifica un método para resolver el problema de redes de flujo a costo mínimo. El método se describe para el caso de redes simples, esto es, redes que consisten de un solo nodo fuente y un solo nodo sumidero.

Asociados a cada arco de la red se tienen los parámetros usuales: capacidad mínima, capacidad máxima y costo unitario de transporte. Lo que se pretende es determinar la distribución de flujos en la red, que proporcione una cantidad preestablecida de flujo en el nodo sumidero, a costo mínimo.

El método propuesto resulta de combinar el algoritmo de ruta más corta con un procedimiento de determinación de flujo máximo, todo lo anterior en forma iterativa. Específicamente, da da la red original, con flujo factible cero, se determina la ruta más corta del nodo fuente al sumidero y por tal ruta se envía la máxima cantidad de flujo permitida. Si la demanda de flujo en el sumidero es satisfecha terminamos. De otra manera se determina la red marginal, asociada a la red original, considerando explícitamente el flujo factible que se dispone. Dicha red refleja la posibilidad de incrementar y/o cambiar la ruta del flujo factible determinado con anterioridad en la red original; además proporciona los costos asociados con tales variaciones. En esta red se determina la ruta más corta y se envía la máxima cantidad de flujo posible para obtener un nuevo flujo factible en la red original, que satisface a costo mínimo, una mayor demanda de flujo en el nodo sumidero.

## METODO COMBINADO

Considere una red simple con parámetros de capacidad y costo asociados a cada arco y demanda conocida en el nodo sumidero.

0. (Empezar). Asigne un flujo cero a nuestra red original.
1. (Ruta más corta). Defina la red marginal asociada al flujo factible (tal red marginal, en la primera iteración, coincide con la red original). Determine la cadena óptima que proporciona un incremento de flujo en el nodo sumidero e ir al paso 2; si no existe tal camino el algoritmo termina. El flujo máximo con costo mínimo ha sido determinado.
2. (Flujo máximo). Use la cadena encontrada para enviar la máxima cantidad de flujo permisible.
3. (Actualizar flujo). Incremente el flujo en la red original usando el flujo óptimo encontrado en la red marginal. Si el flujo demandado en el nodo sumidero ha sido satisfecho, terminamos, (en caso de que el flujo sobrepase al demandado en el nodo sumidero, enviar por la cadena encontrada el número necesario de unidades de flujo para satisfacer la demanda): el flujo requerido a costo mínimo ha sido determinado. En caso contrario, regrese al paso 1.

## Justificación.

Paso 0. Aquí asignamos un flujo cero a la red original, con lo que garantizamos que tenemos en ésta un flujo factible con costo mínimo, éste es, un flujo que nos proporciona cero unidades de flujo en el nodo sumidero a un costo nulo.

Paso 1. El determinar en la red marginal una cadena óptima que proporcione un incremento  $Y$  de unidades de flujo en el nodo sumidero, es dar a conocer, en la misma, una forma de incrementar con un costo mínimo, el número de unidades de flujo que llegan al nodo sumidero, es decir, estamos determinando en la red un incremento  $Y$  de flujo a costo mínimo.

Paso 2. Usando la cadena encontrada, que conecta al nodo fuente con el nodo sumidero, aseguramos que al incrementar el flujo, el incremento del mismo será el de mínimo costo posible en la red original.

Paso 3. Al incrementar el flujo en la red original estamos sumando en ésta, dos cantidades de flujo a costo mínimo, con lo que obtenemos, de acuerdo al teorema 1, una nueva cantidad de flujo a costo mínimo.

#### 4.4 Ejemplo de aplicación

Un ganadero pretende convertir en potreros dos montes de su propiedad. Para ello ha identificado las actividades:

- a. Contratar maquinaria para desmontar y arar la tierra
- b. Comprar semilla
- c. Contratar peones y sembrar la tierra

El ganadero ha realizado estudios de factibilidad y sabe que en un mes puede terminar las actividades a y b. Una vez realizadas estas actividades dispone de otro mes para terminar la actividad c.

Los montes, denotados  $M_1$  y  $M_2$ , tienen 130 y 80 hectáreas, respectivamente. Existen tres compañías ( $C_1$ ,  $C_2$  y  $C_3$ ) que ofrecen sus servicios para desmontar y arar la tierra. El costo por hectárea de tales actividades, así como el número máximo de hectáreas que pueden terminar en un mes, está dado en la tabla 1.

Monte	Tipo de compañía					
	$C_1$		$C_2$		$C_3$	
	Costo (\$/ha)	No. máx ha	costo (\$/ha)	No. máx. ha	costo (\$/ha)	No. máx. ha
$M_1$	2500	80	2800	80	2400	50
$M_2$	2700	25	2600	40	2400	25

Tabla 1. Costos de desmontes y arado.

Por la experiencia adquirida en el campo, el inversionista sabe que necesita un camión de pasto (semilla) por cada hectárea que desea sembrar. Se tienen tres posibles abastecedores ( $A_1$ ,  $A_2$  y  $A_3$ ), que ofrecen poner la semilla en los lugares que se requiere. En la tabla 2 se muestra el costo por camión y el número máximo de camiones que pueden ofrecer.

Monte	Tipo de camión					
	$A_1$		$A_2$		$A_3$	
	costo cam.	No. max cam.	costo cam.	No. max cam.	costo cam.	No. max cam.
$M_1$	1300	80	1500	60	1200	73.5
$M_2$	800	40	1600	60	1200	60

Tabla 2. Costos de las semillas

En relación a la actividad de contratar peones y sembrar, se conoce que existen cuatro poblaciones ( $B_1$ ,  $B_2$ ,  $B_3$  y  $B_4$ ) cercanas a los montes, donde se podría contratar peones. Para ello conviene señalar que cada jornada de trabajo de un peón sirve para sembrar 0.07 hectáreas y que aproximadamente 14.2857 jornadas (días de trabajo) son necesarias para sembrar una hectárea. Equivalentemente se requieren 3000 jornadas de trabajo para sembrar las 210 hectáreas de ambos montes.

En cada una de las comunidades, se tiene una cotización de la mano de obra por día y existe un determinado número de gentes



que pueden ofrecer este servicio. El costo de la mano de obra y el número de gentes que pueden laborar, de cada comunidad, se muestra en la tabla 3.

Monte	Tipo de comunidad			
	B <sub>1</sub>	B <sub>2</sub>	B <sub>3</sub>	B <sub>4</sub>
costo	250	270	260	300
No. de personas	35	30	25	40

Tabla 3. Costo de mano de obra

El costo diario de transporte por persona, de su comunidad a los lugares donde se requiere, se muestra en la tabla 4.

Monte	Tipo de comunidad			
	B <sub>1</sub>	B <sub>2</sub>	B <sub>3</sub>	B <sub>4</sub>
M <sub>1</sub>	0	30	50	20
M <sub>2</sub>	40	30	0	25

Tabla 4. Costo de transporte

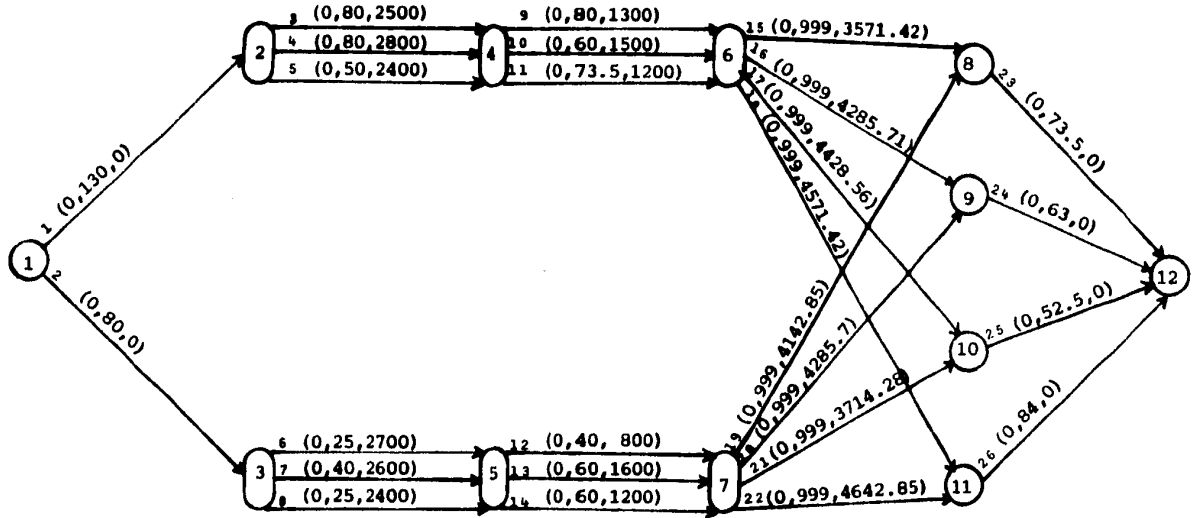
Observe que al contratar un peón, el ganadero deberá pagar el costo de transporte diario a los lugares donde se requiera.

El ganadero desea determinar un plan de ejecución de actividades a costo mínimo.

En la siguiente red se representa la problemática.

(flujo min, flujo max, costo unitario)

99



Desmontar y  
arar

Compra de  
semilla

Contratación y  
traslado de  
peones

Siembra

Red: Asociada al problema del ganadero

Solución al problema del gadero, mediante el método combinado:

Empezaremos con un flujo cero. Con esto, la red marginal coincide con la red original.

Ruta más corta.

Iteración 1.

Paso 1.

$$r(x_1) = 0; r(x_i) = \infty \forall x_i \notin S; S = \{x_1\}$$

Paso 2.

$$r(x_2) = \min(\infty, r(x_1) + c(1,2)) = \min(\infty, 0+0) = 0$$

$$r(x_3) = \min(\infty, r(x_1) + c(1,3)) = \min(\infty, 0+0) = 0$$

Paso 3.

$$x_i^* = \min r(x_i) \text{ tal que } x_i \text{ tenga etiqueta temporal} = x_2$$

Paso 4.

$$S = S \cup x_i^* = \{x_1, x_2\}; \text{ (arco 1)}$$

Iteración 2.

Paso 2.

$$r(x_3) = 0$$

$$r(x_4) = \min(\infty, 0 + 2500) = 2500$$

$$r(x_5) = \min(2500, 2800) = 2500$$

$$r(x_6) = \min(2500, 2400) = 2400$$

Paso 3.

$$x_i^* = x_3$$

Paso 4.

$$S = S \cup x_i^* = \{x_1, x_2, x_3\}; \text{ (arco 2)}.$$

Iteración 3.

$$r(x_4) = 2400$$

$$r(x_5) = \min(\infty, 0 + 2700) = 2700$$

$$r(x_5) = \min(2700, 0 + 2600) = 2600$$

$$r(x_5) = \min(2600, 0 + 2400) = 2400$$

$$x_i^* = x_4$$

$$S = \{x_1, \dots, x_4\}; \quad (\text{arco } 5)$$

Iteración 4.

$$r(x_5) = 2400$$

$$r(x_6) = \min(\infty, 3700) = 3700$$

$$r(x_6) = \min(3700, 3900) = 3700$$

$$r(x_6) = \min(3700, 3600) = 3600$$

$$x_i^* = x_5$$

$$S = \{x_1, \dots, x_5\}; \quad (\text{arco } 8)$$

Iteración 5.

$$r(x_6) = 3600$$

$$r(x_7) = \min(\infty, 2400 + 800) = 3200$$

$$r(x_7) = \min(3200, 2400, 1600) = 3200$$

$$r(x_9) = \min(3200, 2400, 1200) = 3200$$

$$x_i^* = x_7$$

$$S = \{x_1, \dots, x_5, x_7\}; \quad (\text{arco } 12)$$

Iteración 6.

$$r(x_6) = 3600$$

$$r(x_8) = \min(\infty, 7342.85) = 7342.85$$

$$r(x_9) = \min(\infty, 7485.71) = 7485.71$$

$$r(x_{10}) = \min (\infty, 6914.28) = 6914.28$$

$$r(x_{11}) = \min (\infty, 7842.85) = 7842.85$$

$$x_i^* = x_6$$

$$S = \{x_1, \dots, x_7\}; \quad (\text{arco 11})$$

Iteración 7.

$$r(x_8) = \min (7342.85, 7171.42) = 7171.42$$

$$r(x_9) = \min (7485.71, 7885.71) = 7485.71$$

$$r(x_{10}) = \min (6914.28, 8028.56) = 6914.28$$

$$r(x_{11}) = \min (7842.85, 8171.42) = 7842.85$$

$$x_i^* = x_{10}$$

$$S = \{x_1, \dots, x_7, x_{10}\}; \quad (\text{arco 21})$$

Iteración 8.

$$r(x_8) = 7171.42$$

$$r(x_6) = 7485.71$$

$$r(x_{11}) = 7842.85$$

$$r(x_{12}) = \min \{\infty, 6914.28\} = 6914.28$$

$$x_i^* = x_{12} = x_t = 6914.28 \text{ por unidad de flujo, (arco 25)}$$

Alto

La cadena aumentada esta dada por los arcos:

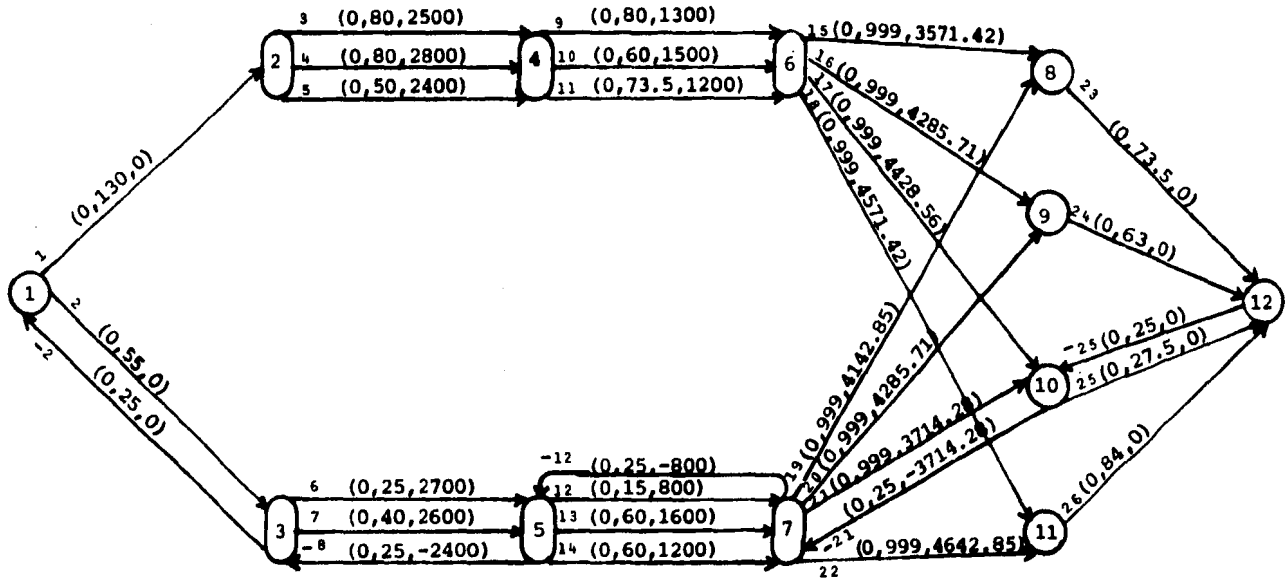
2, 8, 12, 21, 25.

Flujo máximo

$$\Delta = \min \{80, 25, 40, 999, 52.5\} = 25 = f^*$$

$$f' = f + f^* = 0 + 25 = 25$$

$$\text{costo} = 0 + 25(6914.28) = 172857.$$



Red marginal, asociada al problema, después de la primera iteración.

Después de efectuar las iteraciones subsecuentes se obtienen los siguientes resultados:

Iteración 2.

El costo por unidad de flujo es: \$7171.42

La cadena aumentada está dada por los arcos 2,7,12,21,25.

$$f^* = 15$$

$$f' = f + f^* = 25 + 15 = 40$$

$$\text{costo de } f' = 279571.2$$

Iteración 3.

Costo por unidad de flujo = 7171.42

La cadena aumentada esta dada por los arcos 1,5,11,15,23.

$$f^* = 50$$

$$f' = 90$$

$$\text{costo de } f' = 638142.2$$

Iteración 4.

Costo por unidad de flujo = 7271.42

La cadena aumentada esta dada por los arcos 1,3,11,15,23.

$$f^* = 23.5$$

$$f' = 113.5$$

$$\text{costo de } f' = 809020.57$$

Iteración 5.

Costo por unidad de flujo = 7514.28

La cadena aumentada está dada por los arcos 2,7,14,21,25.

$$f^* = 12.5$$

$$f' = 126$$

$$\text{costo de } f' = 902949.11$$

Iteración 6.

$$\text{Costo por unidad de flujo} = 8085.71$$

La cadena aumentada está dada por los arcos 1,3,9,16,24.

$$f^* = 56.5$$

$$f' = 182.5$$

$$\text{costo de } f' = 1'359,791.73$$

Iteración 7.

$$\text{Costo por unidad de flujo} = 8085.71$$

La cadena aumentada está dada por los arcos 2,7,14,20,24.

$$f^* = 6.5$$

$$f' = 189$$

$$\text{costo de } f' = 1'412,348.85$$

Iteración 8.

$$\text{Costo por unidad de flujo} = 8371.42$$

La cadena aumentada está dada por los arcos 2,7,14,20,

-16,18,26.

$$f^* = 6$$

$$f' = 195$$

$$\text{costo de } f' = 1'462,577.37$$



Iteración 9.

Costo por unidad de flujo = 8471.42

La cadena aumentada está dada por los arcos 2,6,14,20,  
-16,18,26.

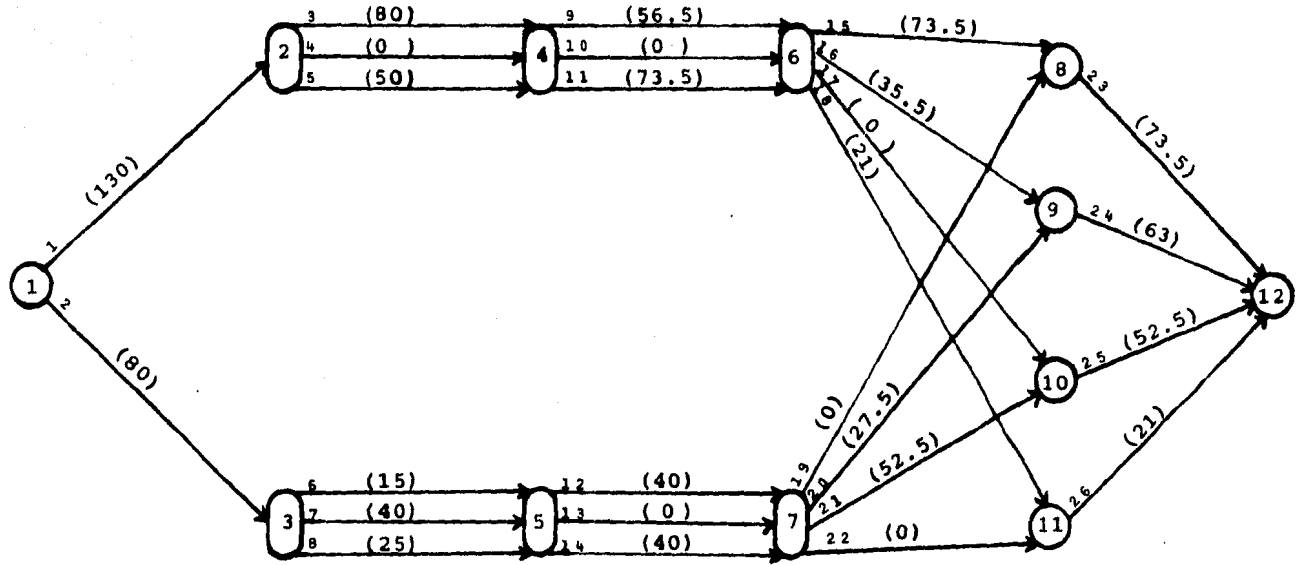
$f^* = 15$

$f' = 210$

costo de  $f' = 1'589,648.62$

De aquí concluimos que para satisfacer sus necesidades, el ganadero necesita hacer una inversión mínima de \$1'589,648.62.

La siguiente red muestra todos los caminos usados para alcanzar el objetivo.



## CONCLUSIONES

El principal objetivo de este trabajo fue analizar la importancia, flexibilidad y sencillez de los modelos de redes de flujo, asociados a problemas de optimización.

Para alcanzar este objetivo se optó por presentar algunos de los problemas básicos de teoría de redes, haciendo palpable la sencillez de tales modelos en cuanto a estructura, manejo y respectivo método de solución. En particular se consideraron métodos tales como: árbol de expansión mínima, determinación de un camino entre dos nodos, ruta más corta y flujo máximo.

Se presentó y motivó un método combinado, denominado "ruta más corta - flujo máximo", del que se exhibió su aplicación para dar solución a problemas de redes de flujo con parámetros de capacidad y costo asociados a los arcos de la red.

En este trabajo quedó asentado que la aplicación de modelos estudiados en teoría de redes, es de gran utilidad para dar solución a problemas de diversa índole. Se mostró que no se pierde la intuición sobre la forma en que son obtenidos los resultados, mediante la aplicación de éstos métodos y la flexibilidad de los mismos para ser utilizados en distintos problemas.

## BIBLIOGRAFIA

- Bazaraa, M.S. and Jarvis, J., "Linear Programming and Network Flows", John Wiley, 1977.
- Ford, L.R. and D.R. Fulkerson, "Flows in Networks", Princeton University Press, Princeton, N.J., 1962.
- Hadley, G., "Linear Programming", Addison-Wesley, Publishing Co., Reading, Mass., 1962.
- Hu T.C. "Integer Programming and Network Flows", Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass., 1969.
- Jensen P.A. and Barnes, J.W., "Network Flow Programming", John Wiley, 1980.
- Minieka E., "Optimization Algorithms for Networks and Graphs, Marcel Dekker, 1978.
- Taha H.A., "Operations Research" Collier Macmillan Publishers, London, 1976.