

29  
37



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

MODELO NUMERICO PARA EL FLUJO DE GAS  
EN YACIMIENTOS

**TESIS PROFESIONAL**

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE  
LICENCIADO EN ACTUARIA  
P R E S E N T A

**GUADALUPE SOLEDAD SIORDIA MONTERO**

MEXICO, D. F.

1984



## **UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso**

### **DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## I N D I C E

RESUMEN

INTRODUCCION

I.- DEDUCCION DEL MODELO.....	(1)
a) Ley de la Conservación de la Materia.....	(7)
b) Ecuación de Estado.....	(14)
c) Ecuación de Darcy.....	(18)
d) Ecuación de Flujo.....	(20)
II.- SOLUCION DEL MODELO.....	(28)
a) Diferencias Finitas.....	(30)
b) Esquema.....	(43)
III.- SIMULADOR NUMERICO.....	(57)
a) Algoritmo.....	(58)
b) Sistema de Cómputo.....	(63)
IV.- INTERPRETACION.....	(66)
CONCLUSIONES.....	(74)
APENDICES	
A.- Algoritmo de Thomas.....	(75)
B.- Cálculo de las propiedades físicas del gas.....	(77)
C.- Evaluación de la pseudopresión.....	(79)
D.- Datos de entrada y programa de computo.....	(81)
REFERENCIAS.....	(100)

## RESUMEN

Se presenta el desarrollo matemático para modelar el flujo en un yacimiento de gas. El resultado es una ecuación diferencial-parcial no lineal de segundo orden. Se aplican las diferencias finitas para solucionar esta ecuación. El comportamiento de las propiedades físicas del gas se evalúan mediante ecuaciones semi-empíricas.

La interpretación numerica del fenómeno del flujo de gas se presenta en forma de gráficas y tablas que indican la distribución de presión (energía) dentro del yacimiento.

Se utilizó la computadora digital UNIVAC 1100 y el sistema de graficación CALCOMP para el procesamiento de los programas y gráficas presentadas.

## I N T R O D U C C I O N

Uno de los problemas principales en la ingeniería petrolera y específicamente en la rama de yacimientos, es el de poder representar el flujo que ocurre en el seno del yacimiento por efectos de la explotación del gas mediante pozos petroleros. Dado que la producción de gas es función de la energía propia del fluido en el yacimiento, su distribución dentro de éste permitirá predecir las tendencias de explotación a cualquier tiempo.

La ocurrencia de flujo de gas en el yacimiento se debe al deprimamiento o pérdida de energía del fluido, que se presenta cuando se pone a producir algún pozo localizado en el yacimiento. Por lo tanto el poder predecir el comportamiento del flujo será cualitativamente un indicativo de la explotación que se le puede hacer al yacimiento y proporcionar el tiempo en que se le agota su energía.

Con el objeto de entender los mecanismos que se presentan en el fenómeno de flujo de gas se desglosará la terminología generalmente usada en la ingeniería de yacimientos para representar matemáticamente el fenómeno de flujo de gas.

La presentación de las características del fenómeno de flujo en el yacimiento se plantearán mediante tres ecuaciones fundamentales para modelarlo matemáticamente, éstas son; La Ley de la Conservación de la Materia, ecuación de cantidad de movimiento y la ecuación de estado del fluido. La primera de éstas se refiere al flujo de masa que ocurre de un punto  $(X, Y, Z)$  a otro  $(X+\Delta X, Y+\Delta Y, Z+\Delta Z)$  en el yacimiento. Su expresión es representada mediante la ecuación llamada de continuidad. La segunda de estas ecuaciones fundamentales explica la interrelación del sistema roca-fluido en cuanto al movimiento del fluido en el seno del yacimiento. Y la tercera, relaciona la dependencia de la densidad del gas con la presión y la temperatura prevalentes durante el flujo.

El modelo resultante de la combinación de las ecuaciones fundamentales de flujo es una ecuación diferencial parcial no lineal de segundo orden, que predice aproximadamente el flujo de gas, dado que se consideran ciertas hipótesis en su desarrollo tales como: isotermicidad, isotropía, flujo laminar, efectos gravitacionales despreciados, composición constante del gas. Con los resultados obtenidos mediante la integración de la ecuación diferencial parcial, se podrá analizar la distribución de la energía del yacimiento para

adoptar diversos esquemas de producción que permitan una óptima recuperación del gas, con lo cual también se podrá mantener la energía del yacimiento el mayor tiempo posible.

## I.- DEDUCCION DEL MODELO

Para iniciar el desarrollo del modelo que contemple las diferentes condiciones de un 'sistema', es indispensable definir tal 'sistema'. Por 'sistema' entenderemos a una colección de 'elementos' relacionados e interaccionados entre sí de una manera precisa. Los 'elementos' de un 'sistema' son las partes constitutivas del mismo y pueden ser de la naturaleza más variada.

Consideremos un 'sistema' representado por la figura 1.



FIG. 1

Este 'sistema' consiste en una porción del universo, entendiendo por universo el conjunto total de 'sistemas', el cual está propiamente separado del resto mediante límites definidos.

Tal 'sistema' existe en espacio (dimensiones  $(X,Y,Z)$ ), en tiempo y se considerará finito. Para analizarlo se harán varias observaciones:

- 1.- Todo lo que entra o sale del 'sistema' debe atravesar su frontera.
- 2.- A un tiempo inicial, el 'sistema' puede ser descrito mediante un conjunto de condiciones.
- 3.- Los procesos que ocurren obedecen leyes físicas conocidas, por lo cual, puede ser descrito por algún conjunto de condiciones.

Estas observaciones describen en una forma abstracta el comportamiento global del 'sistema'. La observación 1 proporciona las condiciones de frontera. Estas condiciones explican la relación entre el límite del sistema y el exterior. Para poder entender esto, consideremos algún parámetro independiente  $P$  del 'sistema' que cuantitativamente representa una magnitud proporcional al flujo de fluidos (proceso) dentro del 'sistema', que se representa en la figura 2.

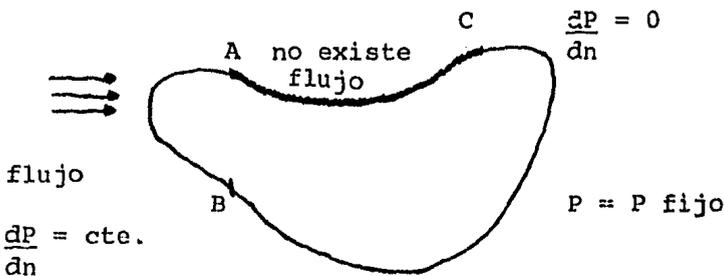


FIG. 2

De A a C se observa que no existe flujo, implicando un gradiente de presión cero o físicamente que en ésta región la superficie es impermeable. Entre B y A se tiene una entrada de flujo conocido, cuyo valor es constante. De C a B la frontera está definida con un valor constante del parámetro independiente  $P=P^*$ . Con ésto se ha descrito por completo el contacto del 'sistema' con el medio exterior a éste.

La observación 2 permite describir el estado del 'sistema' al tiempo cero, es decir, las condiciones iniciales del proceso.

$$P(X,Y,Z,0)=\gamma$$

Donde  $\gamma$  es alguna constante o función de las variables de posición que describe la distribución del parámetro P al tiempo cero.

La observación 3 se podría interpretar como el planteamiento de una hipótesis, para describir el comportamiento del proceso que ocurre dentro del 'sistema'. Para tal efecto tomaremos una muestra aleatoria del 'sistema', para observar que es lo que ocurre físicamente en esa localización y asociarlo con las leyes físicas que más se apeguen para reproducir el proceso. Definiendo las leyes físicas que se apliquen, podemos formular las ecuaciones matemáticas que describan el proceso dentro del 'sistema'.

Por lo tanto el modelo matemático completo es una combinación de:

- a) Ecuaciones que describen el proceso.
- b) Condiciones de frontera.
- c) Condiciones iniciales.

Para desarrollar el modelo definiremos el 'sistema' como un yacimiento petrolero el cual contiene como fluido gas, y consecuentemente, el proceso se traduce como el flujo de gas en ese medio-poroso.

Antes de iniciar el desarrollo matemático del modelo, se introducen ciertos conceptos involucrados en el problema.

Yacimiento : Trampa geológica que puede contener hidrocarburos.

Medio poroso : Estructura geológica (roca) caracterizada por tener huecos o poros en su seno.

Flujo de fluido: Transferencia de materia (gas) de un punto a otro.

## DESARROLLO DEL MODELO

Para entender el flujo de gas en medios porosos debemos ser capaces de postular algún sistema de ecuaciones que representen el comportamiento del gas en ese medio, con las cuales podremos simular el proceso de flujo bajo un modelo matemático.

Al definir conceptualmente el flujo de gas como una transferencia de materia, este fenómeno se describe apropiadamente mediante la Ley Universal de la Conservación de la Materia. Además debido al movimiento de esa materia (gas) habrá necesidad de recurrir a alguna expresión que relacione la velocidad del gas en un medio poroso tal como la ecuación de Darcy, la cual es una expresión de la ecuación de cantidad de movimiento. También habrá necesidad de interrelacionar las propiedades físicas del gas mediante una ecuación que las puede reproducir llamada ecuación de estado.

Iniciaremos el desarrollo matemático con la deducción de una expresión para la Ley de la Conservación de la Materia llamada generalmente ecuación de continuidad. Posteriormente involucraremos analíticamente las expresiones aplicables de ecuación de estado y de movimiento, que combinadas conjuntamente resulta una ecuación diferencial parcial no lineal para simular el fenómeno de flujo.

Esta ecuación resultante puede ser expresada en diferentes siste-

mas de coordenadas como las ortogonales, curvilineas, etc, de las --  
cuales se trabajará con las rectangulares que pertenecen a la prime--  
ra clasificación.

a) LEY DE LA CONSERVACION DE LA MATERIA.

En términos generales se define como "la masa no se crea ni se destruye solo se transforma", que aplicada al fenómeno de flujo dentro de un 'sistema' sería "masa que entra menos masa que sale es igual a la masa acumulada en el 'sistema' ". Esto es

$$Ma = Me - Ms$$

Ponderando esta masa respecto a un intervalo de tiempo sería

$$ma = me - ms$$

Donde

$$me = Me/t$$

$$ms = Ms/t$$

$$ma = Ma/t$$

Ahora bien, definiremos mediante la figura 3, la muestra del 'sistema' a reproducir, donde se indican todos los flujos de materia.

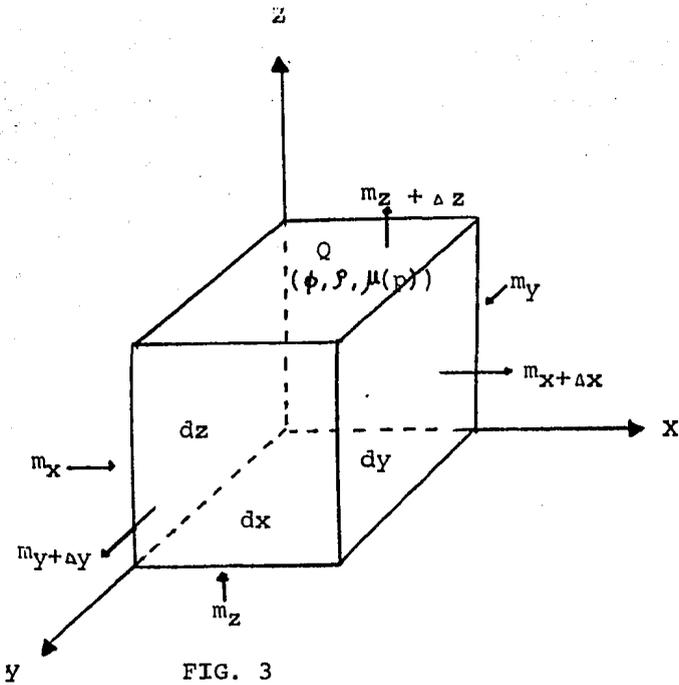


FIG. 3

Donde

$m_k, m_{k+\Delta k}$

: Representan las cantidades de masa entrante en la posición  $K$  del volumen diferencial y la cantidad de masa saliente en la posición  $(K+\Delta K)$  del volumen diferencial.

Para  $K=X, Y, Z$

$Q$

: Es el punto en el cual se determinan las propiedades promedio del medio y del fluido que pasa a través de este punto.

$\phi$

: Es la función del volumen diferencial que representa la parte proporcional del volumen ocupada por huecos.

y que por definición es la porosidad en el punto Q.

$\rho$  : Es la densidad del gas fluyendo en el punto Q.  
 $\mu$  : Es la viscosidad del gas fluyendo en el punto Q.

Por definición

$$V = \frac{mg}{\rho} \qquad q = V/t = v A$$

Donde

V = Volúmen del gas.

$\rho$  = Densidad del gas.

q = Volúmen de gas fluyendo por unidad de tiempo (gasto).

t = Tiempo

v = Velocidad del gas.

A = Sección transversal del flujo.

mg = Masa del gas.

Sustituyendo el volúmen en q tenemos :

$$q = mg/t \cdot 1/\rho = vA \qquad m = vA\rho = mg/t$$

La cantidad de masa acumulada en un intervalo de tiempo ( $\Delta t$ ), está en función de la porosidad del volúmen diferencial elemental  $(dx, dy, dz)$ ; ésto significa que para un tiempo  $(t + \Delta t)$ , el valor de la porosidad puede ser otro que para el tiempo  $t$ . Por lo tanto siguiendo este criterio, la variación de flujo acumulada en el volúmen diferencial es una función del producto  $V\phi$  con respecto al tiempo, que representa el volúmen total de póros del elemento diferencial.

$$m_e = \sum m_i \quad \text{para } i = X, Y, Z \dots \dots \dots (1)$$

$$m_s = \sum m_j \quad \text{para } j = X + \Delta X, Y + \Delta Y, Z + \Delta Z \dots \dots \dots (2)$$

$$m_a = M|_{t+\Delta t} - M|_t \dots \dots \dots (3)$$

Calculando el volúmen diferencial

$$dv = dx \, dy \, dz \quad \dots \quad V = \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1}^{y_2} dy \int_{z_1}^{z_2} dz = \Delta X \, \Delta Y \, \Delta Z$$

Y las áreas perpendiculares al flujo

$$dA_x = dy \, dz \quad \therefore \quad A_x = \int_{y_1}^{y_2} dy \int_{z_1}^{z_2} dz = \Delta Y \Delta Z$$

$$dA_y = dx \, dz \quad \therefore \quad A_y = \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{z_1}^{z_2} dz = \Delta X \Delta Z$$

$$dA_z = dx \, dy \quad \therefore \quad A_z = \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1}^{y_2} dy = \Delta X \Delta Y$$

$$dA_{x+\Delta x} = dy \, dz \quad \therefore \quad A_{x+\Delta x} = \int_{y_1}^{y_2} dy \int_{z_1}^{z_2} dz = \Delta Y \Delta Z$$

$$dA_{y+\Delta y} = dx \, dz \quad \therefore \quad A_{y+\Delta y} = \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{z_1}^{z_2} dz = \Delta X \Delta Z$$

$$dA_{z+\Delta z} = dx \, dy \quad \therefore \quad A_{z+\Delta z} = \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1}^{y_2} dy = \Delta X \Delta Y$$

Sustituyendo  $m = vA\rho$  en las ecuaciones (1) y (2)

$$M_e = \left[ (vA\rho)_x + (vA\rho)_y + (vA\rho)_z \right] \cdot \Delta t$$

$$M_s = \left[ (vA\rho)_{x+\Delta x} + (vA\rho)_{y+\Delta y} + (vA\rho)_{z+\Delta z} \right] \Delta t$$

Como  $mg = v\rho$  e introduciendo  $\phi$  de la ecuación (3) tenemos

$$m_a = (\phi v \rho)_{t+\Delta t} - (\phi v \rho)_t$$

Sustituyendo volúmen y áreas respectivas

$$(\rho \phi \Delta X \Delta Y \Delta Z)_{t+\Delta t} - (\rho \phi \Delta X \Delta Y \Delta Z)_t = \left[ (v \rho \Delta Y \Delta Z)_x + (v \rho \Delta X \Delta Z)_y + (v \rho \Delta X \Delta Y)_z \right] \Delta t - \left[ (v \rho \Delta Y \Delta Z)_{x+\Delta x} + (v \rho \Delta X \Delta Z)_{y+\Delta y} + (v \rho \Delta X \Delta Y)_{z+\Delta z} \right] \Delta t$$

Agrupando términos

$$\Delta X \Delta Y \Delta Z (\phi \rho_{t+\Delta t} - \phi \rho_t) = \Delta t \left[ \Delta Y \Delta Z ((v \rho)_x - (v \rho)_{x+\Delta x}) + \Delta X \Delta Z ((v \rho)_y - (v \rho)_{y+\Delta y}) + \Delta X \Delta Y ((v \rho)_z - (v \rho)_{z+\Delta z}) \right]$$

Dividiendo entre  $\Delta X \Delta Y \Delta Z \Delta t$  y multiplicando por -1

$$-\frac{\phi(\rho_{t+\Delta t} - \rho_t)}{\Delta t} = \frac{(v \rho)_{x+\Delta x} - (v \rho)_x}{\Delta x} + \frac{(v \rho)_{y+\Delta y} - (v \rho)_y}{\Delta y} + \frac{(v \rho)_{z+\Delta z} - (v \rho)_z}{\Delta z}$$

Tomando límites cuando  $\Delta t, \Delta x, \Delta y, \Delta z \rightarrow 0$  .....

tenemos que

$$-\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\phi_{t+\Delta t} - \phi_t}{\Delta t} = \lim_{\Delta X \rightarrow 0} \frac{(v\rho)_{x+\Delta X} - (v\rho)_x}{\Delta X} + \lim_{\Delta Y \rightarrow 0} \frac{(v\rho)_{y+\Delta Y}}{\Delta Y}$$
$$- (v\rho)_y + \lim_{\Delta Z \rightarrow 0} \frac{(v\rho)_{z+\Delta Z} - (v\rho)_z}{\Delta Z}$$

Por lo tanto

$$\frac{-\partial(\phi\rho)}{\partial t} = \frac{\partial(v\rho)_x}{\partial x} + \frac{\partial(v\rho)_y}{\partial y} + \frac{\partial(v\rho)_z}{\partial z}$$

o

$$\nabla \cdot (\vec{v}\rho) = - \frac{\partial \phi \rho}{\partial t} \dots \dots \dots (4)$$

que es la ecuación de continuidad,

b) ECUACION DE ESTADO

Con el objeto de obtener una ecuación que represente aproximada - mente el flujo de gas dentro del yacimiento, será conveniente interpretar los parámetros más importantes que intervienen en la deduc - ción de la ecuación a modelar.

Como paso inicial se definirá el concepto de densidad del gas ( $\rho$ ) mediante la expresión matemática de la ecuación de estado referente a la Ley General de los Gases, esto es

$$\rho = \frac{PMg}{RTZ(p)} \dots\dots\dots (5)$$

Donde

P = Presión.

Mg = Peso molecular.

R = Constante universal de los gases. Depende de las caracterís - ticas dimensionales de los parámetros involucrados en la ecua - ción.

T = Temperatura a la que se encuentra el gas.

Z = Factor de desviación de los gases.

Esta expresión se utilizará en la ecuación de continuidad con las siguientes restricciones:

- 1.- El peso molecular del gas no varía durante todo el proceso. Es decir, la cantidad molar es constante, debido a que caracterizaremos al 'sistema' como un yacimiento de gas seco, por lo cual las propiedades de ese gas en su forma composicional no variará respecto a los cambios de presión y temperatura.
  
- 2.- El proceso lo simularemos bajo condiciones isotérmicas tanto en espacio como en tiempo, por efecto de que los posibles cambios en temperatura en el seno del yacimiento son prácticamente despreciables, por lo tanto T es igual a una constante.

Otra ecuación que será de utilidad durante el planteamiento de la ecuación de flujo es el concepto de compresibilidad de los gases que se define como la variación en volumen de gas por efectos de la presión y temperatura. Matemáticamente es

$$C_g = - \frac{1}{V} \left. \frac{\partial V}{\partial P} \right|_T - \frac{1}{V} \left. \frac{\partial V}{\partial T} \right|_P \dots\dots\dots (6)$$

Como el proceso de flujo lo estamos considerando bajo condiciones isotérmicas

$$\frac{\partial V}{\partial T} = 0$$

Por lo tanto la compresibilidad del gas particularizada al proceso del flujo lo definiremos como:

$$C_g = - \frac{1}{V} \left. \frac{\partial V}{\partial P} \right|_T \dots \dots \dots (7)$$

Para expresar esta definición en términos de densidad y considerando  $mg$  constante

$$\rho = \frac{mg}{V} \qquad C_g = \frac{1}{\rho} \left. \frac{\partial \rho}{\partial P} \right|_T$$

Ahora introduciendo la ecuación (5)

$$C_g = \frac{1}{\frac{\rho}{Z(p)}} \frac{\partial (\rho/Z(p))}{\partial P}$$

Derivando tenemos

$$C_g = \frac{1}{P} - \frac{1}{Z(p)} \frac{\partial Z(p)}{\partial P} \dots\dots\dots(8)$$

c) ECUACION DE DARCY.

Ahora bien el término  $v$  que representa la velocidad del gas dentro del yacimiento, será definida mediante la ecuación de Darcy, la cual, fue el resultado de investigaciones experimentales de flujo de agua llevadas a cabo en muestras de medios porosos.<sup>10</sup>

Posteriormente Cornell y Katz<sup>13</sup> demostraron también experimentalmente que la expresión mencionada es válida para el flujo de gas; esta es

$$v_x = - \frac{k}{\mu(p)} \frac{dP}{dx}$$

La cual fue generalizada por Wyckoff, Botset, Muskat<sup>10</sup> a la forma:

$$\vec{v} = - \frac{\vec{k}}{\mu(p)} \nabla P \dots \dots \dots (9)$$

Donde:

$\mu(p)$  :Es la viscosidad del gas la cual se define como la resistencia que opone el fluido al moverse, cuyas unidades dimensionales se expresan en términos de ingeniería centipoisses (cp), que dimensionalmente se representa m.sa/long.

K :Es denominada permeabilidad, definida como, la propiedad que tiene el medio poroso para permitir el paso de fluidos a través de sus intersticios (poros). Este término es análogo a lo que sería en conducción de calor como la conductividad térmica. Su unidad a nivel de ingeniería petrolera se conoce como el "Darcy", cuya magnitud dimensionalmente es  $L^2$ , es decir área.

d) ECUACION DE FLUJO.

Las expresiones (5) y (9) serán sustituidas en la ecuación de continuidad (4) y tomando en consideración las siguientes suposiciones se llegará a la expresión que modela el flujo de gas.

- 1.- El medio poroso lo consideraremos como incompresible, esto es la porosidad que por definición es el porcentaje promedio del volumen poroso ( de huecos) del yacimiento en el cual está contenido el gas, se considera constante respecto a espacio y tiempo.
- 2.- Debido a la contemplación de la ecuación de Darcy, se considera solamente flujo laminar, es decir, velocidades de flujo relativamente bajas.
- 3.- Los efectos de gravedad no son considerados, por efecto de que el flujo vertical no se considerará en el simulador.
- 4.- Consideraremos para desarrollar el modelo al sistema como un medio homogéneo e isotrópico, es decir, contiene propiedades en cuanto a permeabilidad ( $K$ ) independientes tanto en posición co-

mo en dirección. Las cuales se mantendrán constantes para todo tiempo.

De la ecuación general de los gases tenemos

$$\rho = \frac{PM_g}{RTZ(p)}$$

Y de la ecuación de movimiento

$$\vec{v} = - \frac{K}{\mu(p)} \nabla P$$

Sustituyendo en la ecuación (4)

$$- \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{PM_g \phi}{RTZ(p)} \right) = \nabla \cdot \left[ \frac{PM_g}{RTZ(p)} \left( - \frac{K}{(p)} \nabla P \right) \right]$$

como  $\phi$ ,  $M_g$ ,  $R$ ,  $T$  y  $K$  son constantes la ecuación se transforma en

$$\frac{\phi}{K} \frac{\partial (P/Z(p))}{\partial t} = \nabla \cdot \left( \frac{P}{\mu(p)Z(p)} \nabla P \right) \dots \dots \dots (10)$$

El modelo matemático se deducirá a partir del desarrollo de la ecuación (10) en dos formas. En la primera de éstas se considerará la derivación completa de la ecuación (10). Mientras que en la segunda forma se deducirá a partir de un cambio de variable implícito en la ecuación (10).

PRIMERA FORMA

Efectuando las derivadas en ambos miembros de la ecuación (10)

$$\frac{\phi}{K} \left[ P \frac{\partial (1/Z(p))}{\partial t} + \frac{1}{Z(p)} \frac{\partial P}{\partial t} \right] = \frac{P}{\mu(p)Z(p)} \nabla^2 P +$$

$$\nabla P \left[ P \nabla (1/\mu(p) Z(p)) + 1/\mu(p)Z(p) \nabla P \right]$$

Aplicando la regla de la cadena

$$\frac{\phi}{K} \left[ P \frac{\partial 1/Z(p)}{\partial P} \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{1}{Z(p)} \frac{\partial P}{\partial t} \right] = \frac{P}{\mu(p)Z(p)} \nabla^2 P + \nabla P \left[ P \frac{\partial (1/\mu(p)Z(p))}{\partial P} \nabla P + \frac{1}{\mu(p)Z(p)} \nabla P \right]$$

Factorizando el lado derecho de la ecuación por  $p/\mu(p)Z(p)$  y derivando  $1/Z(p)$  en el lado izquierdo y agrupando queda

$$\frac{\phi}{K} \frac{P}{Z(p)} \frac{\partial P}{\partial t} \left( \frac{1}{P} - \frac{1}{Z(p)} \frac{dZ(p)}{dP} \right) = \frac{P}{\mu(p)Z(p)} \left[ \nabla^2 P + (\nabla P)^2 \left( \frac{1}{Z(p)\mu(p)} \frac{d(1/\mu(p)Z(p))}{dP} + \frac{1}{P} \right) \right]$$

y ya que

$$\frac{d \ln p}{dp} = \frac{1}{p} \frac{dp}{dp} = \frac{1}{p}$$

usando la ecuación (8) y multiplicando por  $\mu(p)Z(p)/p$  ambos lados de la ecuación

$$\frac{\phi \mu(p) C_g}{K} \frac{\partial P}{\partial t} = \nabla^2 P + (\nabla P)^2 \left[ \frac{\partial \ln(1/(\mu(p)Z(p)))}{\partial P} + \frac{\partial \ln(P)}{\partial P} \right]$$

Aplicando la linealidad del operador  $\frac{\partial}{\partial P}$  tendremos

$$\frac{\phi \mu(p) C_g}{K} \frac{\partial P}{\partial t} = \nabla^2 P + (\nabla P)^2 \left[ \frac{\partial}{\partial P} (\ln(1/(\mu(p)Z(p))) + \ln(P)) \right]$$

que es igual a

$$\frac{\phi \mu(p) C_g}{K} \frac{\partial P}{\partial t} = \nabla^2 P - (\nabla P)^2 \left[ \frac{\partial \ln((\mu(p)Z(p))/P)}{\partial P} \right]$$

Para efectos de simplificar esta ecuación, algunos autores han supuesto que las variaciones del logaritmo de  $(\mu(p)Z(p))/P$  y los gradientes de presión asociados a yacimientos de gas son pequeños, es decir  $(\nabla P) \approx 0$ , entonces

$$\nabla^2 P = \frac{\phi \mu(p) C_g}{K} \frac{\partial P}{\partial t} \dots \dots \dots (11)$$

Esta última ecuación es un modelo que representa el flujo de gas bajo la condición de que los gradientes ( $\nabla P$ ) son pequeños, estudios analíticos y experimentales<sup>1</sup> han demostrado que el término ( $\nabla P$ ) que generalmente ha sido despreciado para efectos de simplicidad, no siempre es válido puesto que se puede incurrir en serios errores numéricos en la interpretación física del modelo cuando se contemplan gradientes de presión moderados en el yacimiento.

SEGUNDA FORMA

Para efectos de obtener un modelo analítico más apegado al proceso de flujo, en el cual no se incurra a despreciar términos Al-Hussainy<sup>11</sup> propuso un cambio de variable en el argumento del modelo que interrelaciona las propiedades físicas del gas y simplifica la forma de la ecuación general, esta es:

$$m(p) = 2 \int_{P_0}^P \frac{P}{\mu(p)Z(p)} dp \dots\dots\dots(12)$$

la cual es llamada la pseudopresión del gas.

Para transformar el valor de  $P$  a  $m(p)$  es necesario calcular  $\mu(p)$  y  $Z(p)$ , las cuales se determinan mediante modelos matemáticos ajustados a

investigaciones experimentales. <sup>12,15</sup>

Tomando en consideración el cambio de variable propuesto y sabiendo que las funciones  $\mu(p)$  y  $Z(p)$  son independientes de  $x, y, z$ .

$$\frac{\partial m(p)}{\partial k} = \frac{2P}{\mu(p)Z(p)} \frac{\partial P}{\partial k} \quad \text{para } k = x, y, z$$

$$\frac{\partial m(p)}{\partial t} = \frac{2P}{\mu(p)Z(p)} \frac{\partial P}{\partial t}$$

o

$$\nabla m(p) = \frac{2P}{\mu(p)Z(p)} \nabla P$$

Recordando la ecuación (10) y sustituyendo  $m(p)$  tendremos

$$\nabla \cdot (\nabla m(p)) = \frac{2\phi}{K} \frac{\partial P}{\partial t} \left[ \frac{1}{Z(p)} - \frac{P}{Z^2(p)} \frac{\partial Z(p)}{\partial P} \right]$$

Multiplicando por  $\mu(p)/\mu(p)$  el lado derecho y sustituyendo la ecuación de compresibilidad (8)

$$\nabla^2 m(p) = \frac{2\phi}{K} \frac{\mu(p)}{\mu(p)} \frac{P}{Z(p)} C_g \frac{\partial P}{\partial t}$$

$$\nabla^2 m(p) = \frac{\phi \mu(p) C_g}{K} \frac{\partial m(p)}{\partial t} \dots\dots\dots(13)$$

La ecuación (13) modela el flujo de gas bajo las suposiciones impuestas. Cuando se considera heterogeneidad del medio, es decir:

$$K_x=K(x), \quad K_y=K(y), \quad K_z=K(z)$$

y tomando en cuenta aportaciones o extracciones de cantidad de gas representadas por "q". (Donde "q" significa físicamente la producción (-q) o la inyección (+q) de gas atribuible a los pozos petroleros.)

De esta forma la ecuación se transforma a

$$\frac{\partial}{\partial x} (K(x) \frac{\partial m(p)}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (K(y) \frac{\partial m(p)}{\partial y}) = \phi \mu(p) C_g \frac{\partial m(p)}{\partial t} + q \dots\dots(14)$$

Esta ecuación define el modelo matemático para predecir el flujo de gas ,representado por las variaciones de la variable m(p), tanto en espacio como en tiempo para lo cual, será necesario resolver la ecuación (14) en términos de m(p). Esto se hará en el siguiente capítulo.

## II .- SOLUCION DEL MODELO

Ya obtenida la ecuación (14), la cual es una ecuación diferencial parcial no lineal debido a que el coeficiente de la derivada con respecto al tiempo es función de la variable dependiente de la función incógnita de la ecuación, es necesario obtener una solución general en términos de sus variables independientes  $x, y$  y  $t$ . Dada la característica de la misma, se complica la solución mediante una respuesta analítica, es decir no existen técnicas sistemáticas o sofisticadas para tal efecto. Por lo tanto se debe recurrir a soluciones mediante aproximaciones numéricas tales como el elemento finito, diferencias finitas, cálculo variacional, etc.

Dentro del campo de simulación numérica de yacimientos petroleros, se ha extendido grandemente la aplicación de diferentes esquemas en diferencias finitas para resolver ecuaciones de flujo de fluidos en medios porosos.

Por tal motivo alguno de estos esquemas es el que usaremos como herramienta de cálculo para resolver la ecuación de flujo de gas, cuya técnica será explicada en detalle en las secciones subsecuentes:

A continuación daremos una breve explicación sobre el método de diferencias finitas.

a) DIFERENCIAS FINITAS.

Dada una función continua y diferenciable, tal que su valor en  $(x+h)$  puede ser expresado por medio de la serie de Taylor:

$$f(x+h) = f(x) + h f'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) + \dots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x) + \dots$$

Donde

$f'(x)$  : Indica la derivada de la función en  $x$ .

$f^{(n)}(x)$  : Indica la  $n$ -ésima derivada de la función.

$h$  : La longitud del intervalo en  $x$  donde se quiere definir la función.

O bien definiéndola en términos de intervalos discretizados mediante la siguiente notación:

$$f_{i+1} = f_i + h f'_i + \frac{h^2}{2!} f''_i + \dots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}_i + \dots \quad (15)$$

Las diferencias finitas son el resultado de evaluar la función o las derivadas de la función en puntos discretizados en el dominio de la función, por ejemplo se calculará la primera derivada --

de la función en términos de diferencias con el truncamiento de valores de la serie (15) a partir de la segunda derivada:

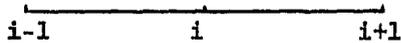
$$f'_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{h} + \frac{O(h)}{2} \dots\dots\dots(16)$$

Donde

$O(h/2)$  : Indica el orden del error a partir del primer término despreciado por el truncamiento de sumandos.

$$( O(h/2) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{O(h/2)}{\frac{h}{2}} = 0 )$$

A la expresión (15) se le conoce como diferencia progresiva dado que la derivada esta evaluada a partir de un punto de observación progresivo.



Una expresión similar para  $f'_i$  se obtiene al considerar una diferencia regresiva:

$$f'_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{h} + O(h/2) \dots\dots\dots(17)$$

También se puede evaluar  $f'_i$  en términos de una diferencia central, la cual se obtiene al restar las series de los valores extremos  $f_{i+1}$  y  $f_{i-1}$ , es decir,

$$f_{i+1} = f_i + h f'_i + \frac{h^2}{2!} f''_i + \dots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}_i \dots\dots\dots(18)$$

$$f_{i-1} = f_i - h f'_i + \frac{h^2}{2!} f''_i - \dots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}_i \dots\dots\dots(19)$$

$$f_{i+1} - f_{i-1} = 2h f'_i + \frac{2h^3}{3!} f'''_i + \dots$$

despejando  $f'_i$  queda

$$f'_i = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h} + O(h^2/6)$$

Un procedimiento similar se hace para obtener la segunda derivada de la función, pero ahora despreciando términos a partir de la cuar-

ta derivada y sumando las expresiones (18) y (19).

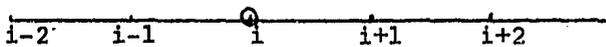
$$f_{i+1} + f_{i-1} = 2f_i + \frac{2h^2}{2!} f''_i + \frac{2h^4}{4!} f''''_i \dots\dots\dots (20)$$

Despejando la segunda derivada se obtiene:

$$f''_i = \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{h^2} + O(h/12)$$

Lo anterior como es de notarse fue obtenido mediante el pivoteo de tres puntos. Para involucrar más puntos de observación para evaluar las derivadas, se hace una sumatoria adicional para cada punto de observación que se introduzca.

Ejemplo:



Evaluaremos  $f''_i$  considerando solo los cinco puntos de observación de la figura anterior. Para esto desarrollaremos la serie pa-

ra cada punto:

$$f_{i-2} = f_i - 2h f'_i + \frac{(2h)^2}{2!} f''_i - \frac{(2h)^3}{3!} f'''_i + \frac{(2h)^4}{4!} f''''_i$$

$$f_{i-1} = f_i - h f'_i + \frac{h^2}{2!} f''_i - \frac{h^3}{3!} f'''_i + \frac{h^4}{4!} f''''_i$$

$$f_{i+1} = f_i + h f'_i + \frac{h^2}{2!} f''_i + \frac{h^3}{3!} f'''_i + \frac{h^4}{4!} f''''_i$$

$$f_{i+2} = f_i + 2h f'_i + \frac{(2h)^2}{2!} f''_i + \frac{(2h)^3}{3!} f'''_i + \frac{(2h)^4}{4!} f''''_i$$

Quedando así un sistema de ecuaciones simultáneas, con cuatro -  
ecuaciones y cuatro incógnitas  $f'$ ,  $f''$ ,  $f'''$ ,  $f''''$ . Resolvamos  
este sistema por medio de determinantes.

Para efectos de simplificación tomaremos:

$$X_1 = hf'_i \quad X_2 = \frac{h^2}{2!} f''_i \quad X_3 = \frac{h^3}{3!} f'''_i \quad X_4 = \frac{h^4}{4!} f''''_i$$

$$A = f_{i-2} - f_i \quad B = f_{i-1} - f_i \quad C = f_{i+1} - f_i \quad D = f_{i+2} - f_i$$

Quedando el sistema como:

$$-2X_1 + 4X_2 - 8X_3 + 16X_4 = A$$

$$-X_1 + X_2 - X_3 + X_4 = B$$

$$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 = C$$

$$-2X_1 + 4X_2 + 8X_3 + 16X_4 = D$$

Sabiendo que  $X_i = \frac{d_i}{d}$   $i=1,2,3,4$

El determinante del sistema es

$$d = \begin{vmatrix} -2 & 4 & -8 & 16 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 4 & -8 & 16 \end{vmatrix} = 288$$

El determinante de la incógnita  $X_2$  que es la que se desea conocer es:

$$d_2 = \begin{vmatrix} -2 & A & -8 & 16 \\ -1 & B & -1 & 1 \\ 1 & C & 1 & 1 \\ 2 & D & 8 & 16 \end{vmatrix} = -12A + 192B + 192C - 12D$$

O sea que

$$x_2 = \frac{-12A + 192B + 192C - 12D}{288}$$

Sustituyendo por los valores originales

$$\frac{h^2}{2!} f''_i = \frac{12(-f_{i-2} + 16f_{i-1} + 16f_{i+1} - f_{i+2} - 30f_i)}{288}$$

$$f''_i = \frac{-f_{i-2} + 16f_{i-1} + 16f_{i+1} - f_{i+2} - 30f_i}{12 h^2}$$

Así para cualquier número de puntos que queramos involucrar en el cálculo de derivadas, se desarrolla un proceso similar para obtener

el valor buscado. Como se puede notar al utilizar más puntos en los cálculos se vuelven más complicados. Para evitar esto, existe una tabla (1) que da las aproximaciones directamente. Esta fue compilada por W.G Bickley<sup>16</sup> ; donde la fórmula de diferenciación es dada por:

$$\frac{d^l f(x)}{dx^l} \Big|_{x=x_i} = \frac{1!}{s! h^l} \sum_{j=0}^s A_j (x_j)$$

donde

- l = Orden de la derivada.
- s = Número de puntos usado para la aproximación menos uno.
- h = Incremento de x.
- i = Número de puntos en el cual la derivada va a ser evaluada, numerando los i puntos como 0,1,2,..., de la dirección negativa a la positiva.
- A<sub>j</sub> = Coeficientes dados en la tabla.

Como un ejemplo calcularemos la aproximación de la segunda derivada utilizando cinco puntos, el mismo que anteriormente se calculó desarrollando la serie de Taylor, entonces tenemos que:

COEFFICIENTS FOR DIFFERENTIATION

Differentiation Formula:  $\frac{d^k f(x)}{dx^k} \Big|_{x=x_j} = \frac{k!}{m! h^k} \sum_{i=0}^m A_i f(x_i)$

FIRST DERIVATIVE (k=1)							THIRD DERIVATIVE (k=3)									
* j	A <sub>0</sub>	A <sub>1</sub>	A <sub>2</sub>	A <sub>3</sub>	A <sub>4</sub>	A <sub>5</sub>	$\frac{h^k}{k!}$ Error	j	A <sub>0</sub>	A <sub>1</sub>	A <sub>2</sub>	A <sub>3</sub>	A <sub>4</sub>	A <sub>5</sub>	$\frac{h^k}{k!}$ Error	*
<b>Three Point (m=2)</b>								<b>Four Point (m=3)</b>								
0	-3	4	-1				1/3	0	-1	3	-3	1			-1/4	
1	-1	0	1				-1/6 h <sup>3</sup> t <sup>(3)</sup>	1	-1	3	-3	1			-1/12 h <sup>4</sup> t <sup>(4)</sup>	
2	1	-4	3				1/3	2	-1	3	-3	1			1/12 h <sup>4</sup> t <sup>(4)</sup>	
								3	-1	3	-3	1			1/4	
<b>Four Point (m=3)</b>								<b>Five Point (m=4)</b>								
0	-11	18	-9	2			-1/4	0	-10	36	-48	28	-6		7/24	
1	-2	-3	6	-1			-1/12 h <sup>4</sup> t <sup>(4)</sup>	1	-6	20	-24	12	-2		1/24 h <sup>5</sup> t <sup>(5)</sup>	
2	1	-6	3	2			1/4	2	-2	4	0	-4	2		-1/24 h <sup>5</sup> t <sup>(5)</sup>	
3	-2	9	-18	11				3	2	-12	24	-20	6		1/24	
								4	6	-28	48	-36	10		7/24	
<b>Five Point (m=4)</b>								<b>Six Point (m=5)</b>								
0	-50	96	-72	32	-6		1/5	0	-85	355	-590	490	-205	35	-5/16	
1	-6	-20	36	-12	2		-1/20	1	-35	125	-170	110	-35	5	-1/48	
2	2	-16	0	16	-2		1/30 h <sup>5</sup> t <sup>(5)</sup>	2	-5	-5	50	-70	35	-5	1/48 h <sup>6</sup> t <sup>(6)</sup>	
3	-2	12	-36	20	6		-1/20	3	5	-35	70	-50	5	5	-1/48 h <sup>6</sup> t <sup>(6)</sup>	
4	6	-32	72	-96	50		1/5	4	-5	35	-110	170	-125	35	1/48	
								5	-35	205	-490	590	-355	85	5/16	
<b>SECOND DERIVATIVE (k=2)</b>							<b>FOURTH DERIVATIVE (k=4)</b>									
* j	A <sub>0</sub>	A <sub>1</sub>	A <sub>2</sub>	A <sub>3</sub>	A <sub>4</sub>	A <sub>5</sub>	$\frac{h^k}{k!}$ Error	j	A <sub>0</sub>	A <sub>1</sub>	A <sub>2</sub>	A <sub>3</sub>	A <sub>4</sub>	A <sub>5</sub>	$\frac{h^k}{k!}$ Error	*
<b>Three Point (m=2)</b>								<b>Five Point (m=4)</b>								
0	1	-2	1				-1/2 h <sup>3</sup> t <sup>(3)</sup>	0	1	-4	6	-4	1		-1/12 h <sup>5</sup> t <sup>(5)</sup>	
1	1	-2	1				-1/24 h <sup>4</sup> t <sup>(4)</sup>	1	1	-4	6	-4	1		-1/24 h <sup>6</sup> t <sup>(6)</sup>	
2	1	-2	1				1/2 h <sup>3</sup> t <sup>(3)</sup>	2	1	-4	6	-4	1		-1/144 h <sup>6</sup> t <sup>(6)</sup>	
								3	1	-4	6	-4	1		1/24 h <sup>5</sup> t <sup>(5)</sup>	
								4	1	-4	6	-4	1		1/12 h <sup>5</sup> t <sup>(5)</sup>	
<b>Four Point (m=3)</b>								<b>Six Point (m=5)</b>								
0	6	-15	12	-3			11/24	0	15	-70	130	-120	55	-10	17/144	
1	3	-6	3	0			-1/24 h <sup>4</sup> t <sup>(4)</sup>	1	10	-45	80	-70	30	-5	5/144	
2	0	3	-6	3			-1/24 h <sup>4</sup> t <sup>(4)</sup>	2	5	-20	30	-20	5	0	-1/144 h <sup>6</sup> t <sup>(6)</sup>	
3	-3	12	-15	6			11/24	3	0	5	-20	30	-20	5	-1/144 h <sup>6</sup> t <sup>(6)</sup>	
								4	-5	30	-70	80	-45	10	5/144	
								5	-10	55	-120	130	-70	15	17/144	
<b>Five Point (m=4)</b>								<b>FIFTH DERIVATIVE (k=5)</b>								
0	35	-104	114	-56	11		-5/12 h <sup>5</sup> t <sup>(5)</sup>	j	A <sub>0</sub>	A <sub>1</sub>	A <sub>2</sub>	A <sub>3</sub>	A <sub>4</sub>	A <sub>5</sub>	$\frac{h^k}{k!}$ Error	*
1	11	-20	6	4	-1		1/24	<b>Six Point (m=5)</b>								
2	-1	16	-30	16	-1		1/180 h <sup>6</sup> t <sup>(6)</sup>	0	-1	5	-10	10	-5	1	-1/48	
3	-1	4	6	-20	11		-1/24 h <sup>5</sup> t <sup>(5)</sup>	1	-1	5	-10	10	-5	1	-1/80	
4	11	-56	114	-104	35		5/12	2	-1	5	-10	10	-5	1	-1/240 h <sup>6</sup> t <sup>(6)</sup>	
								3	-1	5	-10	10	-5	1	1/240 h <sup>6</sup> t <sup>(6)</sup>	
								4	-1	5	-10	10	-5	1	1/80	
								5	-1	5	-10	10	-5	1	1/48	

TABLE I

$$l=2$$

s=4 los s+1 puntos usados son  $i-2, i-1, i, i+1, i+2$

$$h=h$$

$$i=2$$

$$A_j \text{ (para } j=0,4) = -1, 16, 30, 16, -1$$

por lo tanto la fórmula de diferenciación sería:

$$\left. \frac{d^2 f(x)}{dx^2} \right|_i = \frac{2!}{4! h^2} \sum_{j=0}^4 A_j (X_j)$$

$$\left. \frac{d^2 f(x)}{dx^2} \right|_i = \frac{1}{12h^2} (-f_{i-2} + 16f_{i-1} - 30f_i + 16f_{i+1} - f_{i+2})$$

que concuerda con el resultado que anteriormente habíamos obtenido.

Estas series pueden ser desarrolladas para funciones de más de -- una variable, desarrollando la función primero con respecto a una de las variables y dejando las demás fijas, por ejemplo si tenemos ---  $f = f(x, y)$  definida sobre una malla tendremos X y Y en las direc-

ciones X,Y respectivamente, entonces podemos expresar  $f_{i+1,j+1}$  en el nodo de referencia (i,j) como sigue:

$$f_{i+1,j+1} = f_{i,j+1} + \Delta X \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{i,j+1} + \frac{(\Delta X)^2}{2!} \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_{i,j+1} \dots (21)$$

y

$$f_{i,j+1} = f_{i,j} + \Delta Y \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{i,j} + \frac{(\Delta Y)^2}{2!} \left. \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right|_{i,j} \dots (22)$$

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{i,j+1} = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{i,j} + \Delta Y \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right|_{i,j} + \frac{(\Delta Y)^2}{2!} \left. \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} \right|_{i,j} \dots (23)$$

$$\left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_{i,j+1} = \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_{i,j} + \Delta Y \left. \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} \right|_{i,j} + \frac{(\Delta Y)^2}{2!} \left. \frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2} \right|_{i,j} \dots (24)$$

Sustituyendo las ecuaciones (22),(23),(24) en la (21) tenemos

$$f_{i+1,j+1} = f_{i,j} + \Delta X \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{i,j} + \Delta Y \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{i,j} + \frac{(\Delta X)^2}{2!} \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_{i,j} + \frac{2\Delta X \Delta Y}{2} \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right|_{i,j} + \frac{(\Delta Y)^2}{2!} \left. \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right|_{i,j} + \dots$$

Cuando el tiempo sea la variable independiente de alguna derivada, se manejará la notación diferencial con el índice del incremento del tiempo en la parte superior de la función, es decir,

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{f_{i,j}^{n+1} - f_{i,j}^n}{\Delta t}$$

Que se obtiene también por medio de la serie de Taylor pero ahora - fijando las direcciones i,j :

$$f_{i,j}^{n+1} = f_{i,j}^n + \Delta t \left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|_{i,j}^n + \frac{(\Delta t)^2}{2!} \left. \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \right|_{i,j}^n + \dots$$

despejando  $\frac{\partial f}{\partial t}$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{f_{i,j}^{n+1} - f_{i,j}^n}{\Delta t}$$

Se pueden presentar casos en que una derivada esté multiplicada por una función. En este caso la función será evaluada mediante un promedio aritmético al considerar la función en cada punto de la e-

cuación en diferencias de la derivada. Por ejemplo :

$$f(x) \frac{dp}{dx} \Big|_i = \frac{1}{2} \left[ ((f(x))_{i+1} + (f(x))_i) \frac{P_{i+1} - P_i}{\Delta X} \right]$$

b) ESQUEMA

El siguiente paso es transformar la ecuación (14) a un esquema - en diferencias finitas. Dentro de éstos existen diferentes métodos de solución, que en general se dividen en explícitos e implícitos.

En los métodos explícitos cada ecuación se puede resolver en forma explícita. El intervalo de tiempo,  $\Delta t$ , que puede usarse para que no exista inestabilidad, es muy pequeño, lo que los hace imprácticos.

La inestabilidad del método a usar, se refiere al crecimiento o propagación del error inducido en los esquemas para cada nivel de tiempo en la función dependiente calculada. Por lo tanto se debe recurrir a esquemas en los cuales exista estabilidad como los métodos implícitos que son incondicionalmente estables para cualquier valor de  $\Delta t$ , aunque para valores grandes existen problemas de truncamiento. Dentro de éstos existen un sin número de esquemas para el planteamiento de la solución de la ecuación de flujo. En el presente trabajo se eligió el método de dirección alternante<sup>3</sup> el cual se ha comprobado que es incondicionalmente estable y además minimiza el proceso algebraico para obtener la solución. Al aplicar este tipo de método da como resultado un sistema de

ecuaciones algebraicas para cada nivel de tiempo, el cual puede ser resuelto con cualquier técnica de métodos numéricos tales como Gauss-Jordan, Gauss-Seidel, Jacobi, Cramer, Newton-Raphson, etc.

Dadas las características del sistema de ecuaciones en diferencias finitas de la ecuación (14) bajo el esquema propuesto, se aplicará el algoritmo de Thomas para matrices tridiagonales.

METODO DE DIRECCION ALTERNANTE

Este método fue propuesto inicialmente por Peaceman<sup>3</sup> para resolver una ecuación de flujo (petróleo) en dos dimensiones, con el objeto de reducir el proceso de cómputo en el cual se incurría al establecer un método implícito que resultaba en un sistema de ecuaciones cuya matriz tiene la forma bandeada. La forma para este tipo de matriz es la siguiente:

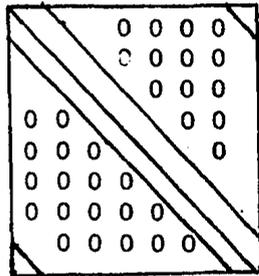


FIG. 4

Los diversos algoritmos para resolver matrices bandeadas requieren de introducir todos los coeficientes ceros, lo cual ocuparía demasiada memoria en computadoras y más tiempo de proceso en su ejecución, dependiendo del tamaño de la banda.

El método propuesto resultó en desglozar la ecuación de flujo en dos esquemas llamados 'barrido en X' y 'barrido en Y', el cual tiene como ventaja el considerar en cada dirección un sistema de ecuaciones cuya forma es similar al de una dirección, donde el ti-

po de matriz es tridiagonal y para el cual existe un algoritmo eficiente que requiere únicamente de los coeficientes diferentes de cero de la matriz (figura 5)

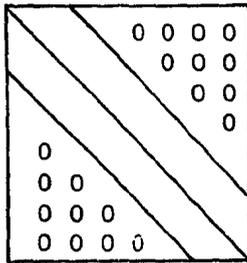


FIG. 5

Para el primer esquema llamado barrido en "X", la ecuación de flujo (14) se plantea en diferencias finitas para plantear una solución parcial definida en el tiempo " $n+1/2$ ", puesto que se divide el tiempo  $t$  en dos intervalos para cada uno de los barridos mencionados anteriormente.

El método elegido describe que para el barrido en "X", las derivadas de la ecuación en función de "X" sean las que se plantean implícitamente al nivel de tiempo " $n+1/2$ " y las derivadas en función

de "Y" al nivel de tiempo "n". De aquí que el esquema implícito resultante se resuelva para determinar la distribución de la variable dependiente al tiempo "n+1/2". En esta etapa las incógnitas están representadas por las  $m(p)^{n+1/2}$  y el término independiente queda definido mediante los términos de  $m(p)^n$ .

En el barrido en "Y" el esquema implícito se plantea a raíz de expresar en diferencias finitas las derivadas con respecto a la dirección "Y" al nivel de tiempo "n+1" y las derivadas en función de "X" al nivel de tiempo ya conocido "n+1/2". Por lo tanto al completar esta etapa se obtiene la distribución de  $m(p)$  al tiempo de interés "n+1" que representa la solución de la ecuación de flujo para un tiempo  $t$ . Este procedimiento de cálculo se puede repetir para obtener soluciones a cualquier tiempo.

Para transformar la ecuación de flujo (14) a los esquemas en diferencias finitas se harán las siguientes transformaciones con el objeto de simplificar el desarrollo. Estas son:

$$M_{i,j}^n = m(p) \text{ valuada en } (i,j) \text{ al tiempo } n.$$

$$U_{i,j} = K(x) \text{ valuada en } (i,j).$$

$$V_{i,j} = K(y) \text{ valuada en } (i,j).$$

Se omitirán los índices de nivel de tiempo para las variables dependientes en los dos esquemas implícitos que se desarrollarán de la siguiente forma:

$M_{i,j}^{n+1/2}$  será representado como  $M_{i,j}$  para el barrido en "X".

$M_{i,j}^{n+1}$  será representado como  $M_{i,j}$  para el barrido en "Y".

PRESENTACION DEL ESQUEMA

La ecuación de flujo a simular (14) en términos de las consideraciones anteriores es la siguiente:

$$\frac{\partial}{\partial x} (U \frac{\partial M}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (V \frac{\partial M}{\partial y}) = \phi \mu(p) C_g \frac{\partial M}{\partial t} + q \dots \dots \dots (25)$$

Para propósitos de iniciar el desarrollo de esta ecuación, se trabajará cada término de ésta independientemente.

$$\frac{\partial}{\partial x} (U \frac{\partial M}{\partial x}) = U \frac{\partial^2 M}{\partial x^2} + \frac{\partial M}{\partial x} \frac{\partial U}{\partial x}$$

Y aquí calculando U como un promedio regresivo y la derivada  $\frac{\partial U}{\partial x}$  mediante diferencias centrales

$$\frac{\partial}{\partial x} (U \frac{\partial M}{\partial x}) \approx \frac{(U_{i-1,j} + U_{i,j})}{2} \frac{(M_{i-1,j} - \frac{2M_{i,j}}{(\Delta X)^2} + M_{i+1,j})}{2} +$$

$$\frac{(M_{i+1,j} - M_{i,j})}{\Delta X} \frac{(U_{i+1,j} - U_{i-1,j})}{2\Delta X}$$

factorizando

$$\frac{\partial}{\partial x} (U \frac{\partial M}{\partial x}) \approx \frac{(M_{i+1,j} - M_{i,j}) \cdot 1/2 (U_{i+1,j} + U_{i,j}) - (M_{i,j} -$$

$$\underline{M_{i-1,j}) \cdot 1/2 (U_{i,j} + U_{i-1,j})}{(\Delta X)^2}$$

con una expresión análoga para  $\frac{\partial}{\partial y} (V \frac{\partial M}{\partial y})$  la ecuación (25) se transforma en

$$\frac{U_{+i,j} (M_{i+1,j} - M_{i,j}) - U_{-i,j} (M_{i,j} - M_{i-1,j}) +$$

$$\frac{V_{i,+j} (M_{i,j+1}^n - M_{i,j}^n) - V_{i,-j} (M_{i,j}^n - M_{i,j-1}^n)}{(\Delta Y)^2} =$$

$$\phi \mu(p^*) C_g \frac{(M_{i,j} - M_{i,j}^n)}{\Delta t/2} + q$$

donde

$$U_{+i,j} = \frac{(U_{i+1,j} + U_{i,j})}{2}$$

$$U_{-i,j} = \frac{(U_{i,j} + U_{i-1,j})}{2}$$

$$V_{i,+j} = \frac{(V_{i,j+1} + V_{i,j})}{2}$$

$$V_{i,-j} = \frac{(V_{i,j} + V_{i,j-1})}{2}$$

Para atacar la no linealidad en el término independiente de la ecuación dado por la variable  $\mu(p)$  y  $C_g$ , se procederá a plantearlas al mismo nivel de tiempo que las variables incógnitas  $m(p)^{n+1/2}$  lo cual dará como resultado el desarrollo de un procedimiento iterativo para determinar la convergencia de la distribución de  $p^{n+1/2}$  con las presiones a las cuales se valoraron  $\mu(p)$  y  $C_g$ .

La forma de la ecuación anterior considerando la no linealidad es:

$$\frac{U_{+i,j} (M_{i+1,j,k}^n - M_{i,j,k}^n) - U_{-i,j} (M_{i,j,k}^n - M_{i-1,j,k}^n)}{(\Delta X)^2} +$$

$$\frac{V_{i,+j} (M_{i,j+1}^n - M_{i,j}^n) - V_{i,-j} (M_{i,j}^n - M_{i,j-1}^n)}{(\Delta Y)^2} =$$

$$\frac{\phi \mu(p) C_g (M_{i,j,k}^n - M_{i,j}^n)}{\Delta t/2} + \dots \dots \dots (26)$$

Donde k es el índice que indica la evaluación de las M en forma iterativa.

Nota : Los índices (i,j,k) de P que aparece en la función ,

serán omitidos, para simplificar la expresión. Las P en esta función siempre aparecerán como al nivel de tiempo a calcular.

A esta ecuación se le llama barrido en "X" y el barrido en "Y" se obtiene de la misma forma quedando

$$\frac{U_{i,j} (M_{i+1,j}^{n+1/2} - M_{i,j}^{n+1/2}) - U_{-i,j} (M_{i,j}^{n+1/2} - M_{i-1,j}^{n+1/2})}{(\Delta X)^2} +$$

$$\frac{V_{i,+j} (M_{i,j+1,k} - M_{i,j,k}) - V_{i,-j} (M_{i,j,k} - M_{i,j-1,k})}{(\Delta Y)^2} =$$

$$\phi \mu(p) C_g \frac{(M_{i,j,k} - M_{i,j}^{n+1/2})}{\Delta t/2} + q \dots \dots \dots (27)$$

La condición para validar la convergencia de estas ecuaciones al término del cálculo del nivel de tiempo "n+1" es:

$$\left| \frac{P_{i,j,k} - P_{i,j,k-1}}{P_{i,j,k}} \right| < \epsilon \dots \dots \dots (27.1)$$

Donde:

$\epsilon$  es el error relativo permisible para que se cumpla con el hecho de que la distribución de presiones calculadas, sean aproximadamente igual a las presiones que se utilizan para determinar las funciones  $\mu(p)$  y  $C_g$ .

Y  $k-1$  indica la iteración inmediata anterior de la distribución de presiones  $P_{i,j}$  al nivel de tiempo  $n+1$ .

Las ecuaciones (26) y (27) se aplican en cada uno de los nodos de la malla. Con la ecuación (26) se pasa del nivel de tiempo  $n$  a la etapa intermedia " $n+1/2$ ", o sea que las incógnitas en esta ecuación son las pseudopresiones en la etapa " $n+1/2$ ", siendo conocidas todas las que esten al nivel de tiempo " $n$ ". Al aplicar la ecuación (27) ya se conocen las pseudopresiones en la etapa " $n+1/2$ ", por lo que las incógnitas serán ahora las pseudopresiones al nivel de tiempo " $n+1$ ". Así al resolver las ecuaciones (26) y (27), se completa un ciclo de cálculo, cubriendo un intervalo  $t$ .

Para presentar el procedimiento de cálculo de las ecuaciones (26) y (27) las vamos a reescribir suponiendo  $\Delta X = \Delta Y$  :

$$\begin{aligned}
 U_{-i,j} M_{i-1,j,k} - (U_{-i,j} + U_{+i,j} + \frac{\phi \mu(p) C_g (\Delta X)^2}{\Delta t/2}) M_{i,j,k} + \\
 U_{+i,j} M_{i+1,j,k} = -V_{i,-j} M_{i,j-1}^n + (V_{i,-j} + V_{i,+j} - \frac{\phi \mu(p) C_g (\Delta X)^2}{\Delta t/2}) M_{i,j}^n \\
 -V_{i,+j} M_{i,j+1}^n + q (\Delta X)^2 \dots\dots\dots (28)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 V_{i,-j} M_{i,j-1,k} - (V_{i,-j} + V_{i,+j} + \frac{\phi \mu(p) C_g (\Delta X)^2}{\Delta t/2}) M_{i,j,k} + \\
 V_{i,+j} M_{i,j+1,k} = -U_{-i,j} M_{i-1,j}^{n+1/2} + (U_{-i,j} + U_{+i,j} - \frac{\phi \mu(p) C_g (\Delta X)^2}{\Delta t/2}) \\
 M_{i,j}^{n+1/2} U_{+i,j} M_{i+1,j}^{n+1/2} + q (\Delta X)^2 \dots\dots\dots (29)
 \end{aligned}$$

Estas ecuaciones pueden ponerse respectivamente como

$$a_{i,j} M_{i-1,j,k} + b_{i,j} M_{i,j,k} + c_{i,j} M_{i+1,j,k} = d_{i,j} \dots\dots\dots (30)$$

$$a'_{i,j} M_{i,j-1,k} + b'_{i,j} M_{i,j,k} + c'_{i,j} M_{i,j+1,k} = d'_{i,j} \dots\dots\dots (31)$$

donde

$$a_{i,j} = U_{-i,j}$$

$$b_{i,j} = -(U_{-i,j} + U_{+i,j} + \frac{\phi \mu(p) Cg(\Delta X)^2}{\Delta t/2})$$

$$c_{i,j} = U_{+i,j}$$

$d_{i,j}$  = segundo miembro de la ecuación (28)

$$a'_{i,j} = V_{i,-j}$$

$$b'_{i,j} = -(V_{i,-j} + V_{i,+j} + \frac{\phi \mu(p) Cg(\Delta X)^2}{\Delta t/2})$$

$$c'_{i,j} = V_{i,+j}$$

$d'_{i,j}$  =segundo miembro de la ecuación (29)

Las ecuaciones (28) y (29) pueden ser representadas en forma matricial de la siguiente manera:

$$\begin{array}{l} A_x M^{n+1/2} = D_x \quad \text{barrido en "X"} \\ A_y M^{n+1} = D_y \quad \text{barrido en "Y"} \end{array}$$

Y que tiene el esquema siguiente:

$b_{1,j}c_{1,j}^0$	0	0	0	0			$M_1$	$d_1$
$a_{2,j}b_{2,j}c_{2,j}^0$	0	0	0	0			$M_2$	$d_2$
.	.	.	.	.	.	.	.	.
0	0	$a_{i,j}b_{i,j}c_{i,j}^0$	0	0			$M_{i,j}$	$d_{i,j}$
.	.	.	.	.	.	.	.	.
0	0	0	0	0	0	$c_{n-1}$	$M_{n-1}$	$d_{n-1}$
0	0	0	0	0	0	$b_n$	$M_n$	$d_n$

donde

$N_x$ =número de nodos en el barrido en "X".

La matriz para el barrido en "Y" es similar a la anterior con la diferencia de que se intercambian los índices y en lugar del índice "j" aparece el índice "i".

### III. - SIMULADOR NUMERICO

Un simulador numérico es definido como una herramienta de cálculo para reproducir numéricamente el comportamiento físico de un sistema.

Para el caso de estudio, el fenómeno de flujo de gas en el yacimiento debe de ser "simulado" para obtener las características de variación de la variable dependiente P definida como presión, que representa la magnitud de la energía del yacimiento para producir gas.

La importancia de aplicar los procesos de simulación numérica al comportamiento de yacimientos, radica en que mediante corridas de computadora es posible analizar una amplia variedad de alternativas, en la práctica sólo se tiene la opción de realizar una. La observación del comportamiento de un sistema bajo diferentes esquemas de producción, ayuda a la selección de las condiciones más favorables para el desarrollo y explotación del yacimiento.

a) ALGORITMO.

Para resolver las ecuaciones (30) y (31) es necesario representar el yacimiento mediante una malla rectangular con el objeto de determinar puntos de interés dentro de la región de ese rectángulo. Estará considerado con las equidistancias  $\Delta X$  y  $\Delta Y$  iguales para simplificar el cálculo y la geometría resultante del yacimiento.

Puesto que el yacimiento tiene un contorno areal curvilíneo, la discretización se hace tomando las fronteras del yacimiento lo más apegado posible a los bloques en los que se ha dividido la malla. En la figura (6) se presentará la configuración del contorno de un yacimiento mediante una malla rectangular.

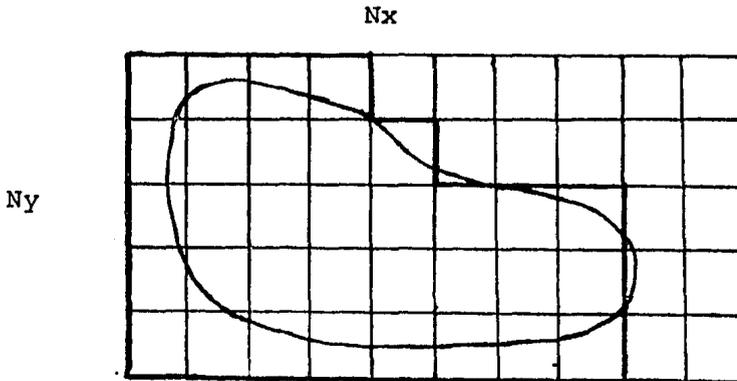


FIG. 6

Una vez hecho ésto , se deberá determinar la frontera para definir la aplicación del sistema de ecuaciones tanto en el barrido en "X", como en el barrido en "Y" y así como también para contemplar las condiciones de frontera.

En seguida, para iniciar el procedimiento iterativo y cumplir con la condición (27.1), en la primera iteración, se utiliza la presión inicial del yacimiento para resolver los coeficientes  $\mu(p)$  y  $C_g$ .

Después se procede a calcular los coeficientes  $a_{i,j}$ ,  $b_{i,j}$ ,  $c_{i,j}$  y  $d_{i,j}$  para permitir obtener el sistema de ecuaciones en el barrido en "X", prefijando el índice  $j$ . Con ésto se obtienen los valores de las presiones al nivel de tiempo  $n+1/2$ . Al considerar la variación del índice  $j$  para este mismo barrido, se obtendrán por lo tanto  $N_y$  sistemas de ecuaciones con  $N_x^*$  ecuaciones (donde  $N_x^*$  va a ser el número de nodos localizados en el barrido en "X" que están dentro de las fronteras). Esta etapa del cálculo es una etapa intermedia para un tiempo  $\Delta t/2$ , con el cual se iniciará el desarrollo para terminar el ciclo al tiempo  $\Delta t$ . Con la obtención de los valores de las presiones  $P^{n+1/2}$  en toda la malla, se obtendrán ahora los coeficientes  $a'_{i,j}$ ,  $b'_{i,j}$ ,  $c'_{i,j}$  y  $d'_{i,j}$  mediante los cua-

les se genera el sistema de ecuaciones para el barrido en "Y" para determinar las presiones al nivel de tiempo "n+1". En este caso se obtendrán Nx sistemas de ecuaciones con Ny\* ecuaciones.

Al obtener los valores de presión en esta etapa, se verifica para toda la malla la condición (27.1). En caso de no entrar en tolerancia con respecto a  $\epsilon$  (se manejan valores de  $\epsilon$  con rango de  $10^{-5}$ ), se inicia otra iteración utilizando como valores supuestos, aquellos calculados en la última iteración y en caso de entrar en convergencia se completa así el cálculo al nivel de tiempo "n+1", es decir un  $\Delta t$ .

El procedimiento se repite para otros tiempos utilizando como valores de presión supuestos la última distribución de ellos calculados en el intervalo de tiempo inmediato anterior, hasta lograr así llegar al tiempo de predicción deseado.

Cabe indicar que en cada nodo de la Malla podrá ser introducido un gasto de producción o de inyección representado por el parámetro q (positivo si es inyector o negativo si es productor). Esto en la realidad representa la localización de un pozo petrolero que entra en el yacimiento configurado mediante bloques.

En el apéndice A se presenta el algoritmo con el cual se resuel-

ve la matriz resultante de coeficientes para ambos barridos. Es una forma simplificada de eliminación Gaussiana para matrices tridiagonales.

Las funciones  $\mu(p)$ ,  $Z(p)$  y  $C_g(p)$ , las cuales son evaluadas a diferentes niveles de tiempo son calculadas mediante correlaciones ajustadas de datos experimentales de las propiedades físicas del gas. En este caso se utiliza la correlación de Standing ajustadas por Dranchuck<sup>15</sup> para el cálculo del factor de compresibilidad de los gases  $Z(p)$ . La correlación de Lee<sup>10</sup> para el cálculo de la viscosidad de los gases  $\mu(p)$  y la correlación de Aziz<sup>10</sup> para obtener la compresibilidad de los gases  $C_g(p)$ . En el apéndice B se presenta el algoritmo de cálculo para cada una de estas funciones y cuya discusión está fuera de los propósitos de este trabajo.

Ayudados con las funciones mencionadas, se obtiene el cambio de variable inducido en la ecuación (10), mediante una integración discretizada para las condiciones prevalecientes en el yacimiento. La evaluación de esta integral se presenta en el apéndice C para la densidad de un gas específico.

Dado que el simulador proporciona la distribución de la varia-

ble  $m(p)$ , será necesario elaborar una tabla para interpolar los valores de  $P$  (presión) puesto que estos son más fáciles de interpretar que  $m(p)$ . Además en caso de que la variable  $m(p)$  sea mayor que los valores tabulados se procederá a obtener una desintegración para obtener el límite de la integral con el cual se asocia el valor de  $P$ .

Acoplado cada uno de los planteamientos mencionados procederemos a elaborar un programa de cómputo para el simulador numérico propuesto.

b) SISTEMA DE COMPUTO.

El sistema de cómputo consta de un programa principal, cinco subrutinas y un paquete de graficación. El lenguaje utilizado es FORTRAN ASCII y fue corrido en una máquina UNIVAC 1100. En la figura (7) se muestra un diagrama de bloques del sistema.

Las condiciones iniciales se refieren a las características del sistema antes de iniciar el proceso como son : presión, temperatura, porosidad, densidad, permeabilidad, etc. En el Apéndice D, se encuentra en forma detallada como debe de entrar a la computadora toda esta información. Ya teniendo las condiciones iniciales se procede a transformar la presión inicial  $P$  a pseudopresión  $m(p)$ , auxiliándonos de dos subrutinas CALCU y ZCOMMU. Como siguiente paso se determinan las fronteras del sistema tomando como base si la permeabilidad es cero (subrutina BUSCA) . Con las  $m(p)$  y conociendo las fronteras del sistema se efectúa el barrido en "X", obteniendo con ello los coeficientes de la matriz tridiagonal y por medio del algoritmo de Thomas (subrutina THOMAS) se obtiene el valor de las incógnitas  $m(p)^{n+1/2}$  con los cuales interpolando linealmente (subrutina INTER) se determinan las  $p^{n+1/2}$  (presiones) respectivas para así calcular las  $\mu(p)$  (viscosidad), y los  $C_g$  (compresibilidad) para ca-

da punto de la malla que son necesarios en el barrido en "Y".  
Con estos valores se calculan las  $m(p)$  para el tiempo "n+1" y  
nuevamente se transforman a presiones (P) cerrando con ésto un  
intervalo  $\Delta t$ . Repitiendo el proceso para cualquier número de in-  
tervalos de tiempo deseados a procesar o simular.

DIAGRAMA DE BLOQUES

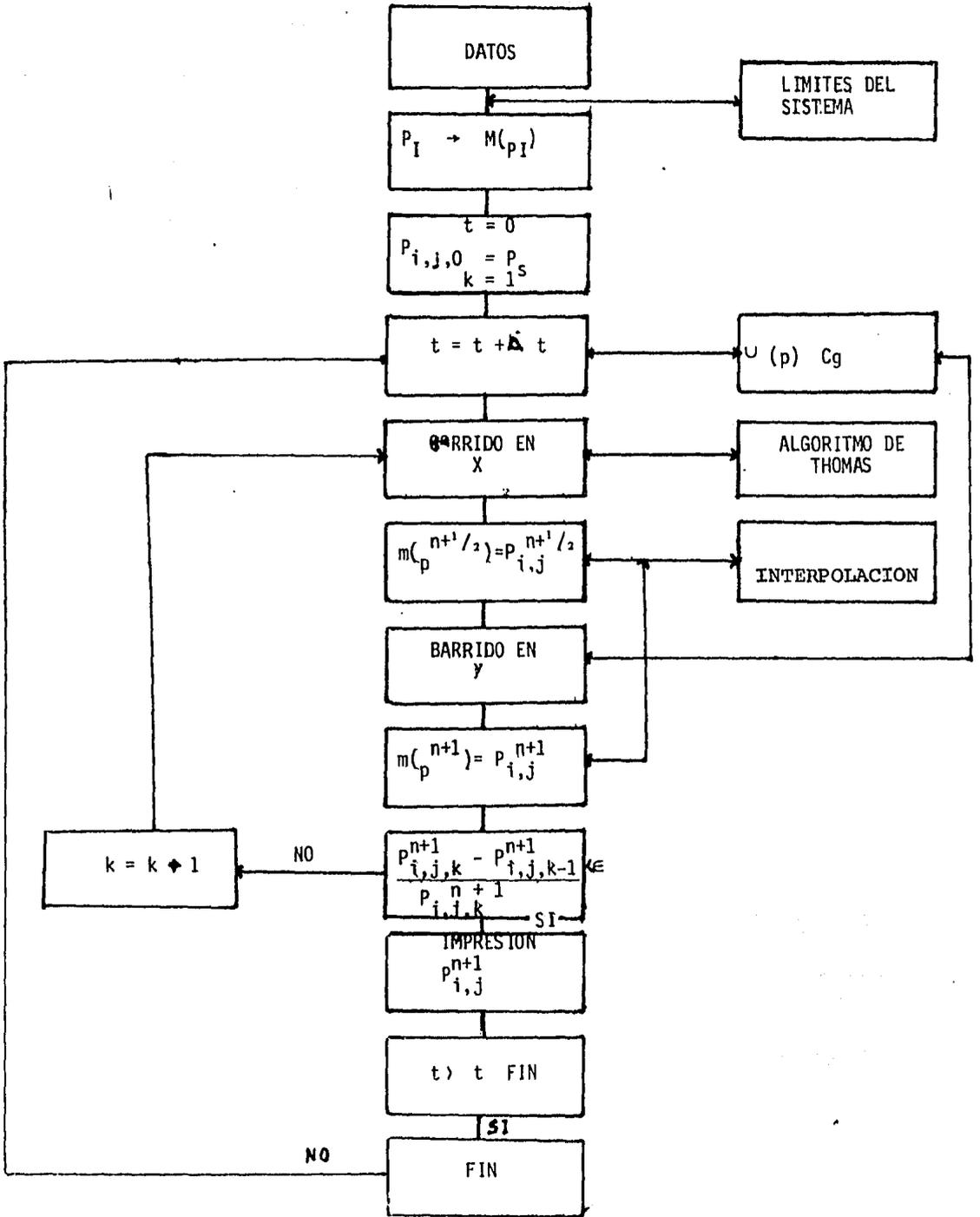


FIGURA 7

#### IV.- INTERPRETACION

Para efectos de interpretar los resultados obtenidos con el modelo estudiado, se llevó a cabo la verificación del mismo con respecto a los resultados arrojados por un modelo matemático contenido en un paquete de la Scientific Software Corporation (SSC), en el cual se pudieron obtener todos los datos necesarios para poder procesar el modelo aquí presentado. Con ésto se ha pretendido comprobar la convergencia del modelo respecto a un caso verídico que es el caso presentado en el paquete matemático mencionado.

Para un tiempo definido (120 días), se calculó la distribución del error entre los dos modelos (Tabla II), con lo cual pudimos observar que el porcentaje máximo de error es de  $.07 \text{ Kg/cm}^2$  con respecto a la presión reportada por el modelo de la SSC y que puede ser debido a las diferentes hipótesis planteadas en el desarrollo de los modelos, las cuales son:

DISTRIBUCION DE ERRORES ENTRE LOS DOS MODELOS

NODOS EN Y	NODOS EN X											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	0	0	4.54	4.67	5.17	5.25	5.40	5.45	5.71	5.83	0	0
2	0	3.91	5.68	5.53	5.41	5.43	5.48	5.49	5.65	5.75	4.79	0
3	11.4	4.4	6.06	5.81	5.6	5.59	5.54	5.5	5.69	5.65	5.25	14.
4	11.3	4.4	6.21	5.94	5.66	5.54	5.4	5.48	5.65	5.72	5.25	13.95
5	6.07	3.9	6.24	3.97	5.69	5.62	5.61	5.56	5.69	5.74	4.54	6.60
6	5.93	3.84	6.22	5.95	5.69	5.64	5.61	5.55	5.67	5.71	4.47	6.46
7	5.7	3.73	6.15	5.88	5.59	5.53	5.45	5.42	5.57	5.61	4.21	6.02
8	5.74	3.69	6.04	5.77	5.47	5.4	5.35	5.34	5.51	5.55	4.1	6.02
9	5.82	3.71	6.06	5.8	5.34	5.27	5.32	5.32	5.57	5.59	3.94	5.96
10	5.86	3.54	5.76	5.53	5.2	5.14	5.21	5.23	5.43	5.46	3.72	5.95
11	0	3.4	5.31	5.13	5.03	5.9	5.16	5.21	6.25	6.31	4.91	0
12	0	0	4.12	4.12	4.69	4.73	4.88	5.03	5.69	5.81	0	0

TABLA I

107

MODELO ESTUDIADO

MODELO SSC

- Saturación de gas en la roca igual a 1.

- Saturación de gas menor de 1.

- Espesor del yacimiento constante.

- Espesor del yacimiento variable en cada punto.

-  $\Delta X = \Delta Y$

-  $\Delta X \neq \Delta Y$

A continuación se presentan los resultados obtenidos con el modelo estudiado en forma tabular y gráfica en los cuales se observa que los cambios en las presiones en cada punto de la malla con respecto a la presión inicial (232.08) son pequeños, debido en parte a que el valor en los gastos son relativamente bajos y la magnitud de las permeabilidades en el yacimiento son altas y esto se comprueba mediante la ecuación de Darcy:

$$\Delta P_x = \frac{q_x}{k_x} \frac{\mu}{\Delta Y}$$

En las gráficas (1) y (2) se muestra que la distribución de presiones en todo el yacimiento al tiempo de 120 días queda representado por una superficie plana. Lo que demuestra que los cambios de presión en cada punto de la malla son uniformes, la gráfica (1) representa la distribución de presiones para el modelo aquí estudiado y la gráfica (2) la distribución de presiones para el modelo de la S S C. Cabe mencionar que los puntos de mayor presión en estas gráficas representan las fronteras del yacimiento, dado que se mantuvieron igual a la presión inicial.

T= 12010 DIAS

MODOS LN X

MODOS EN Y	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	.00	.00	224.23*	224.36*	224.80	224.98*	225.05	225.07	225.19	225.31
2	.00	223.25	223.23	223.08	223.05	223.03	223.02	223.04	223.06	223.16
3	225.61	223.39	223.61	223.36	223.17	223.09	223.06	223.08	224.99*	225.02*
4	225.51	223.43	223.76	223.49	223.21	223.13	223.08	223.03	224.99*	225.05*
5	225.34	223.36	223.79	223.52	223.24	223.17	223.08	223.04	223.02	223.09
6	225.20	223.32	223.77	223.50	223.22	223.15	223.09	223.03	223.01	223.11
7	225.25	223.26	223.70	223.43	223.14	223.06	223.00	222.97	224.90	225.02
8	225.429	223.22	223.59	223.32	223.02	222.95	222.90	222.87	224.92	224.96
9	225.37	223.12	223.40*	223.14*	222.85	222.78	222.73	222.68	224.84	224.88
10	225.41	222.95	223.10*	222.87*	222.75	222.69	222.69	222.77	224.70	224.73
11	.00	222.88	222.87	222.81	222.77	222.75	222.73	222.62	224.60	224.67
12	.00	.00	223.07*	223.07*	223.07*	223.07*	223.07*	223.07*	224.33	224.40

TABLA III

NOTA CL "\*" REPRESENTA LA LOCALIZACION DE UN BOZO PETROLERO

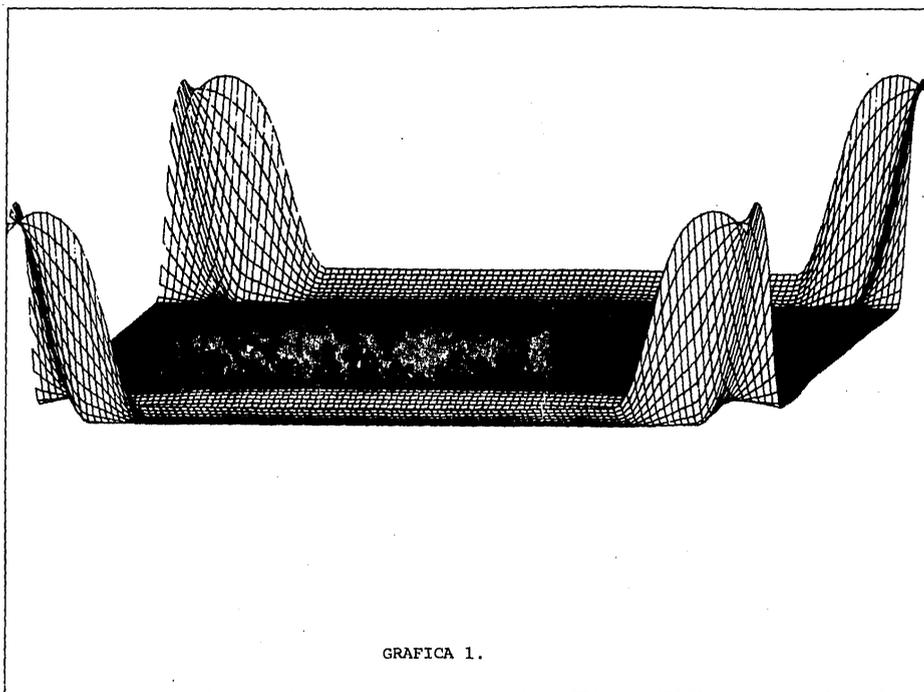
120.00 P.A.S

NO. 005

MODOS EN Y	11	12
1	.00	.00
2	223.78	.00
3	223.75	225.68
4	223.75	225.62
5	223.74	225.52
6	223.67	225.38
7	223.62	225.43
8	223.51	225.43
9	223.28*	225.37
10	223.66*	225.36
11	223.11	.00
12	.00	.00

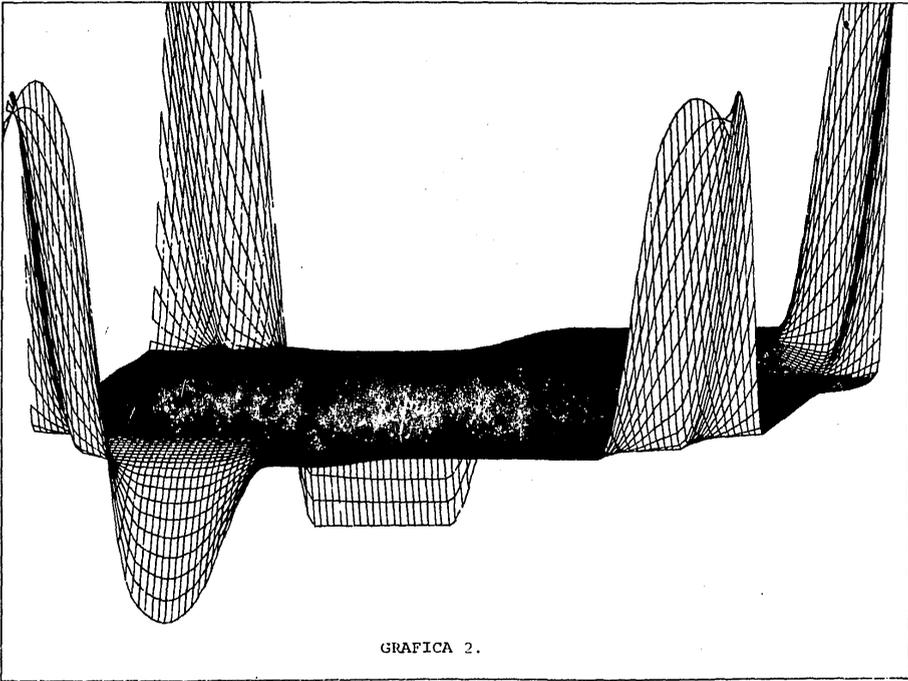
NOTA: EL "X" REPRESENTA LA LOCALIZACION DE UN POZO PETROLERO.

# DISTRIBUCION DE PRESION



-72-

# DISTRIBUCION DE PRESION



-73-

## CONCLUSIONES

Se presentó un modelo que predice aproximadamente el comportamiento del flujo de gas en un yacimiento, que permite simular bajo diferentes condiciones de explotación, la distribución de presión en todo el yacimiento. Esto ayudará a adoptar los esquemas de explotación más favorables que permitirán optimizar los beneficios económicos por efecto de la extracción del gas.

Se comprobó la validez de atacar la no linealidad del modelo resultante, al evaluar los coeficientes  $\mu_g$  y  $C_g$  dependientes de presión, a una presión de un nivel de tiempo anterior lo cual da como resultado la linealización del modelo.

También, se verificó la convergencia del modelo presentado utilizando como fuente de validéz el caso de un yacimiento de datos reales simulado mediante el paquete matemático de la Scientific Software Corporation.

APENDICE A

ALGORITMO DE THOMAS PARA UN SISTEMA DE N ECUACIONES TRIDIAGONAL.

Supóngase que se tiene un sistema de n ecuaciones con las incógnitas  $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ , representado por la ecuación matricial

$$A \vec{X} = \vec{d}$$

en donde

$$A = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & a_i & b_i & c_i & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_n \end{vmatrix} \quad \vec{X} = \begin{vmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \cdot \\ X_i \\ \cdot \\ X_{n-1} \\ X_n \end{vmatrix} \quad \vec{d} = \begin{vmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \cdot \\ d_i \\ \cdot \\ d_{n-1} \\ d_n \end{vmatrix}$$

si

$$l_1 = b_1$$

$$w_1 = c_1/b_1$$

$$l_i = b_i - a_i \quad i=2,3,\dots,n$$

$$w_i = c_i/l_i \quad i=2,3,\dots,n-1$$

$$g_1 = d_1/b_1 \quad i=2,3,\dots,n$$

$$g_i = (d_i - a_i g_{i-1})/l_i$$

la solución del sistema es

$$X_n = g_n$$

$$X_i = g_i - w_i X_{i-1} \quad i=n-1, n-2, \dots, 2, 1$$

APENDICE B

CALCULO DE LAS PROPIEDADES FISICAS DEL GAS

a) FACTOR DE COMPRESIBILIDAD.

Dranchuk ajustó la ecuación de estado de Standing para obtener un método para calcular el factor de compresibilidad.

$$Z = 1 + (A_1 + A_2/Tr + A_3/Tr^2) \rho_r + (A_4 + A_5/Tr) \rho_r^2 + A_5 A_6 \rho_r^3 + A_7 \rho_r^2 / Tr^2 + (1 + A_8 \rho_r^2) / e^{A_8 \rho_r^2}$$

donde:

Tr = Temperatura pseudoreducida.

$\rho_r = (.27) P_r / (ZTr)$  densidad reducida.

P<sub>r</sub> = Presión pseudoreducida.

$$A_1 = .31506237 \quad A_5 = -.61232032$$

$$A_2 = -1.0467099 \quad A_6 = -.10488813$$

$$A_3 = -.783273 \quad A_7 = .68157001$$

$$A_4 = .5353077 \quad A_8 = .68446549$$

Se aplica el método de Newton-Raphson para obtener la solución del cálculo de Z.

b) VISCOSIDAD.

$$\mu = K e^{x \rho^y}$$

donde :

$\mu$  = Viscosidad del gas.

$\rho$  = Densidad.

c) COMPRESIBILIDAD.

$$C_g = \frac{1}{P} \frac{1}{1 + \frac{\rho_r}{Z} \left. \frac{\partial Z}{\partial \rho_r} \right|_{Tr}}$$

siendo

$$\left. \frac{\partial Z}{\partial \rho_r} \right|_{Tr} = A_1 + A_2/Tr + A_3/Tr^3 + 2(A_4 + A_3/Tr)\rho_r + 5A_5A_6\rho_r^4/Tr +$$

$$2A_7\rho_r/Tr^3(1 + A_8\rho_r^2 - A_8^2\rho_r^4)e^{-A_8\rho_r^2}$$

P = Presión.

Z = Factor de compresibilidad.

Tr = Temperatura pseudoreducida.

$\rho_r$  = Densidad reducida.

$A_1, A_2, \dots, A_8$ , los mismos valores que en el inciso a).

APENDICE C

Cálculo de  $m(p) = 2 \int \frac{P dP}{\mu(p) Z(p)}$

La anterior integral se va a calcular mediante el método Trapezoidal de Simpson:

$$I = \sum_{i=0}^n \left( \frac{f_{i+1} + f_i}{2} h \right)$$

donde

n = Número de intervalos en los que se divide Pmax.

h = Intervalo de presión ( $P_{i+1} - P_i$ ).

En la siguiente tabla se presenta la evaluación de m(p) para una densidad del gas de .55 a diferentes temperaturas y presiones.

VALORES DE H<sub>1</sub>P<sub>1</sub> PARA UNA DENSIDAD RELATIVA = .55

H<sub>1</sub>P<sub>1</sub> = MILLONES DE (MG/CM<sup>3</sup>) \* 2ACP

T (K/°C)	TEMPERATURA (°C)							
	25	50	75	100	125	150	175	200
10	.009165	.008586	.008078	.007638	.007234	.006872	.006548	.006254
20	.036794	.034817	.032944	.030519	.028290	.027466	.026171	.024997
30	.082902	.077436	.072684	.068530	.064919	.061713	.058788	.056126
40	.147480	.137546	.128969	.121500	.115059	.109354	.104198	.099515
50	.230045	.214279	.200564	.188553	.178818	.170026	.162152	.155022
60	.320565	.301491	.287255	.270818	.256500	.243874	.232703	.222615
70	.418475	.394034	.373369	.353381	.337910	.320631	.305490	.291882
80	.52979	.498034	.474285	.448100	.427677	.409987	.392497	.376497
90	.653412	.616662	.587424	.552587	.520995	.491683	.464665	.4394261
100	.8098729	.764791	.721626	.679132	.639677	.605451	.574768	.547323
110	1.078139	1.002802	.941064	.890031	.843216	.800823	.764167	.731332
120	1.270936	1.184144	1.112200	1.051766	.996931	.947555	.905339	.866020
130	1.476363	1.378254	1.295554	1.224889	1.161717	1.105028	1.055630	1.011157
140	1.693613	1.584534	1.490629	1.408932	1.331173	1.273220	1.217164	1.164510
150	1.921507	1.802034	1.696727	1.603496	1.522967	1.451660	1.388799	1.331764
160	2.158176	2.029955	1.912747	1.808272	1.718867	1.639932	1.570042	1.506634
170	2.402646	2.264822	2.148079	2.022419	1.926492	1.837659	1.760575	1.690231
180	2.654027	2.508633	2.371156	2.246684	2.139477	2.044901	1.960008	1.882882
190	2.911466	2.759801	2.614419	2.479415	2.363419	2.260110	2.168277	2.084112
200	3.174074	3.017458	2.864047	2.720236	2.595753	2.484163	2.384907	2.293731
210	3.440990	3.280691	3.129137	2.982249	2.835821	2.716286	2.609756	2.511585
220	3.711517	3.548892	3.382162	3.222998	3.083233	2.956154	2.842540	2.737419
230	3.985016	3.821485	3.649621	3.484046	3.337600	3.203842	3.082296	2.970790
240	4.260939	4.097449	3.922038	3.750971	3.598577	3.457827	3.330816	3.212014
250	4.530670	4.377773	4.198956	4.023367	3.865787	3.718996	3.585731	3.440279
260	4.817831	4.660500	4.479954	4.300846	4.131870	3.986644	3.847472	3.715531
270	5.097972	4.945703	4.744624	4.583037	4.417520	4.260472	4.115773	3.977531
280	5.378716	5.232992	5.052588	4.869588	4.701413	4.540193	4.390375	4.246045
290	5.659775	5.522027	5.341489	5.160141	4.990193	4.825500	4.670992	4.520803
300	5.941262	5.812700	5.614954	5.454172	5.283321	5.115875	4.957041	4.801142

TABLA IV

APENDICE D

Los datos deben entrar de la siguiente forma:

1°TARJETA

Número de nodos en X.

Número de nodos en Y.

Incremento en X (metros).

Densidad relativa del gas.

Temperatura del yacimiento (metros).

Espesor del yacimiento (metros)

Incremento de tiempo (dias).

Tiempo de simulación (dias).

Porosidad.

Presión inicial ( $\text{Kg/cm}^2$ ).

Tolerancia.

2°TARJETA

Permeabilidad en la dirección X.

3°TARJETA

Permeabilidad en la dirección Y (mildarcy).

4° TARJETA

Gastos de producción.

A continuación se presenta el juego de datos para el ejemplo 1.



4567890 234567890 -84- 4567890  
1234567890 150100000001

PERMEABILIDAD EN EL YACIMIENTO YUY WILIDAREY

NGROS EN Y	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	C./ 0.	D./ 0.	30./ 30.	50./ 30.	60./ 60.	60./ 60.	60./ 60.	60./ 60.	60./ 60.	60./ 60.
2	F./ 0.	30./ 30.	60./ 60.	60./ 60.	120./ 120.	120./ 120.	120./ 120.	120./ 120.	120./ 120.	60./ 60.
7	30./ 30.	60./ 60.	120./ 120.	120./ 120.	240./ 240.	240./ 240.	240./ 240.	240./ 240.	240./ 240.	120./ 120.
4	30./ 30.	60./ 60.	120./ 120.	120./ 120.	240./ 240.	240./ 240.	240./ 240.	240./ 240.	240./ 240.	120./ 120.
5	60./ 60.	120./ 120.	240./ 240.	240./ 240.	240./ 240.	240./ 240.	240./ 240.	240./ 240.	240./ 240.	240./ 240.
6	60./ 60.	120./ 120.	240./ 240.	240./ 240.	240./ 240.	240./ 240.	240./ 240.	240./ 240.	240./ 240.	240./ 240.
7	60./ 60.	120./ 120.	240./ 240.	240./ 240.	240./ 240.	240./ 240.	240./ 240.	240./ 240.	240./ 240.	240./ 240.
8	60./ 60.	120./ 120.	240./ 240.	240./ 240.	240./ 240.	240./ 240.	240./ 240.	240./ 240.	240./ 240.	240./ 240.
9	30./ 30.	60./ 60.	120./ 120.	120./ 120.	240./ 240.	240./ 240.	240./ 240.	240./ 240.	120./ 120.	120./ 120.
10	30./ 30.	60./ 60.	120./ 120.	120./ 120.	240./ 240.	240./ 240.	240./ 240.	240./ 240.	120./ 120.	120./ 120.
11	0./ 0.	30./ 30.	60./ 60.	60./ 60.	120./ 120.	120./ 120.	120./ 120.	120./ 120.	60./ 60.	60./ 60.
12	0./ 0.	0./ 0.	30./ 30.	30./ 30.	60./ 60.	60./ 60.	60./ 60.	60./ 60.	30./ 30.	30./ 30.

PERMEABILIDAD EN EL YACIMIENTO XXXY MILDARCY

MODOS EN Y	1A	12
1	0. / 0.	0. / 0.
2	3. / 30.	0. / 0.
3	60. / 60.	30. / 30.
4	18. / 60.	30. / 30.
5	120. / 120.	60. / 60.
6	12. / 120.	60. / 60.
7	12. / 120.	60. / 60.
8	120. / 120.	60. / 60.
9	6. / 60.	30. / 30.
10	60. / 60.	30. / 30.
11	30. / 30.	0. / 0.
12	1. / 0.	0. / 0.

09:41:54 (0)

C PROPOSITO: PROGRAMA QUE PERMITE SIMULAR NUMERICAMENTE EL FLUJO  
C DE GAS (UNA FASE) EN UN MEDIO POROSO, EN DOS DIMEN-  
C SIONES PARA DIFERENTES NIVELES DE TIEMPO.  
C METODO: SE APLICA EL METODO IMPLICITO DE DIRECCION ALTRNA  
C PROPUUESTO POR PEACEMAN Y COLABORADORES PARA SOLUCIO-  
C NAR EL SISTEMA DE ECUACIONES GENERADO POR LA APLICA-  
C CION DE LAS ECUACIONES DE FLUJO EN CADA UNA DE LAS  
C CELDAS EN LAS QUE SE DISCRETIZA EL YACIMIENTO.  
C SE APLICA EL CAMBIO DE VARIABLE PROPUUESTO POR AL-  
C HUSSAINY Y COLABORADORES PARA TRABAJARLA EN SUBS-  
C TITUCION DE LAS PRESIONES.  
C LENGUAJE: FORTRAN ASCII R/10

C SUBROUTINAS CALCII, BUSCA, THOMAS, INTER

C DATOS DE ENTRADA, SALIDA Y VARIABLES:

C  
C NMX NUMERO MAXIMO DE NODOS EN X  
C NMY NUMERO MAXIMO DE NODOS EN Y  
C INX INCREMENTO DE X  
C DEN DENSIDAD  
C TEM TEMPERATURA  
C H ESPESOR DEL YACIMIENTO  
C INT INCREMENTO DE TIEMPO  
C TFIN ULTIMO TIEMPO DE PREDICCION  
C FI POROSIDAD  
C PI PRESION INICIAL  
C TOL TOLERANCIA  
C NITE NUMERO DE ITERACIONES MAXIMAS  
C KX MATRIZ DE PERMEABILIDADES DIRECCION X  
C KY MATRIZ DE PERMEABILIDADES DIRECCION Y  
C U MATRIZ DE GASTOS  
C PS MATRIZ DE PRESIONES SUPUESTAS  
C MP MATRIZ DE DISTRIBUCION DE M(P)  
C MIU MATRIZ DE VISCOSIDAD  
C CG MATRIZ DE COMPRESIBILIDAD  
C T TIEMPO ACUMULADO  
C LIMX FRONTERAS EN LA DIRECCION X  
C LIMY FRONTERAS EN LA DIRECCION Y  
C A, B, C COEFICIENTES DEL LAS INCOGNITAS  
C D TERMINO INDEPENDIENTE  
REAL KX(0:20,0:20), KY(0:20,0:20), MIU(20,20), CG(20,20), Q(20,20)  
\* LIAX(20,2), LIMY(20,2), A(20), B(20), C(20), MP(20,20),  
\* P(20,20), D(20), VEC(20), MPY(20,20), PS(20,20)  
\* MPI(20,20), TABMP(0:20,2)  
CHARACTER AST\*1(20,20), ITIT\*40, F1\*40, F2\*3, F3\*2, F4\*20, F5\*26, F6\*40  
\* F7\*32, B\*40  
COMMON TEM, DEN, LIMX, NMY, TABMP  
REAL INX  
F2=3H(/,  
F4=20, X, ' NODOS EN Y', 10(4X, I2, 4X))  
F5=26, X, 4X, I2, 4X, 10(A.2, A1, 1X))  
F7=32HX, 4X, I2, 4X, 10(F4.0, '/', F4.0, 1X))

LECTURA E IMPRESION DE DATOS DE ENTRADA

```

READ(5, '(A80)') ITIT
READ(5, '( )') NMX, NMY, INX, DEN, TEM, H, INT, TFIN, FI, PI
READ(5, '( )') TOL, NITE
READ(5, '( )') ((KX(I, J), I=1, NMX), J=1, NMY)
READ(5, '( )') ((KY(I, J), I=1, NMX), J=1, NMY)
READ(5, '( )') ((Q(I, J), I=1, NMX), J=1, NMY)
WRITE(6, '(1H1, 50X, A80)') ITIT
WRITE(6, 8) NMX, NMY, INX, DEN, TEM, H, INT, FI, PI, TFIN, NITE, TOL
WRITE(6, '(///, 56X, ''POZO'', 10X, ''GASTO MPCD'', /, 56X, ''I J'', )')
T=0

```

C  
C  
C  
C  
C  
C  
C  
C  
C  
C

OBTENCION DE LA TRANSFORMACION DE PRESION A PSEUDOPRESION  
INICIAL PARA GENERAR LA TABLA DE INTERPOLACION DE M(P) A P.

```
CALL CALCU(PI, DEN, TEM, CMIU, CCG, CMP, TABMP)
```

INICIALIZACION DE VARIABLES

9

```

DO 9 J=1, NMY
DO 9 I=1, NMX
MP(I, J)=CMP
PS(I, J)=PI
MIU(I, J)=CMIU
CG(I, J)=CCG
IF(Q(I, J).EQ.0)AST(I, J)=' '
IF(Q(I, J).NE.0)THEN
AST(I, J)='*'
WRITE(6, '(/, 51X, 215, 4X, E15.8)') J, I, Q(I, J)
Q(I, J)=(13451*TEM*Q(I, J))/H
END IF
CONTINUE
IF(NMX.GT.10)THEN
F3='10'
ELSE
IVA=(130-(NMX*10+10))/2
F3=CHAR(IVA)
END IF
F1=F2//F3//F4
F6=F2//F3//F5
F8=F2//F3//F7
DO 215 T=1, NMX, 10
WRITE(6, 19)
IF(NMX-T+1.LE.T.10)THEN
ITO=NMX
ELSE
ITO=T+9
END IF
WRITE(6, F1)(K, K=I, ITO)
DO 217 J=1, NMY
IF(J.GT.40)THEN
WRITE(6, 19)T
WRITE(6, F1)(K, K=I, ITO)
END IF
WRITE(6, F3), ((KX(K, J), KY(K, J), K=T, ITO)

```

217

215 CONTINUE -89-

BUSQUEDA DE LAS FRONTERAS EN LA DIRFCCION X Y Y

CALL BUSCA(KX,KY,NMX,NMY,LIMX,LIMY)

INCREMENTO DEL TIEMPO

T=T+INT

ITER=0

CTE=(119.56\*FI\*INX\*INX\*2)/INT

INICIA LA FORMULACION PARA GENERAR EL SISTEMA DE ECUACIONES  
EN EL BARRIO EN X.

110 DO 10 J=1,NMY

ICON=0

DO 30 I=LIMX(J,1),LIMX(J,2)

ICON=ICON+1

CTE1=CTE\*MIU(I,J)\*CG(I,J)

A(ICON)=(KX(I,J)+KX(I-1,J))/2

C(ICON)=(KX(I+1,J)+KX(I,J))/2

IF(I.NE.LIMX(J,1).AND.I.NE.LIMX(J,2))B(ICON)=-A(ICON)-C(ICON)-CTE1

IF(I.EQ.LIMX(J,1))B(ICON)=-C(ICON)-CTE1

IF(I.EQ.LIMX(J,2))B(ICON)=-A(ICON)-CTE1

IF(LIMY(I,1).NE.J.AND.LIMY(I,2).NE.J)D(ICON)=-((KY(I,J-1)+KY(I,J))

\*/2)\*MP(I,J-1)+((KY(I,J+1)+2\*KY(I,J)+KY(I,J-1))/2-CTE1)\*MP(I,J)-

\*((KY(I,J+1)+KY(I,J))/2)\*MP(I,J+1)-Q(I,J)

IF(LIMY(I,1).EQ.J)D(ICON)=-((KY(I,J+1)+KY(I,J))/2-CTE1)\*MP(I,J)-

\*((KY(I,J+1)+KY(I,J))/2)\*MP(I,J+1)-Q(I,J)

IF(LIMY(I,2).EQ.J)D(ICON)=-((KY(I,J-1)+KY(I,J))/2)\*MP(I,J-1)+

\*((KY(I,J)+KY(I,J-1))/2-CTE1)\*MP(I,J-1)-Q(I,J)

CONTINUE

RESUELVE SISTEMA DE ECUACIONES PARA NIVEL DE TIEMPO N+1/2

CALL THOMAS(A,B,C,D,VEC,ICON)

ICON=0

DO 70 I=LIMX(J,1),LIMX(J,2)

ICON=ICON+1

MPI(I,J)=VEC(ICON)

CONTINUE

INTERPOLACION DE LA TABLA DE M(P) PARA ENCONTRAR LOS VALORES  
RESPECTIVOS DE P.

CALL INTER(MPI,MIU,CG,P)

09:42:05 (0)

C PROGRAMA QUE GENERA LOS RESULTADOS GRAFICOS DE LA  
C DISTRIBUCION DE PRESIONES PARA UN NIVEL DE TIEM-  
C PO DADO.

C  
C  
C  
C  
C

C @RUN CCOPLT,K0050,KCR,4,20

C @ASG,A KDA\*GS.DA.

C @USE 8,KDA\*GS.DA.

C @FTN:IS TPF\$,PP

PARAMETER NNX=12,NNY=12,NWUV=(NNX-1)/0.1 + 1

DIMENSION A(NNX,NNY),X(NNX),Y(NNY),A(NWUV,1,WUV),U(NWUV),V(NWUV)

EXTERNAL PLTQ1,PLTQ2,PLTQ3

CALL PLQTS(1,1FN,2,30,0,34,0)

CALL PLTBO

CALL PEI,SEL(1)

DO 10 I=1,NNX

DO 10 J=1,NNY

READ (8,11)NX,NY,A(I,J)

X(I)=NX

Y(J)=NY

10 CONTINUE

NU = NWUV

PRINT \*, 'NU = ',NU

NV = NWUV

SUM=0.9

DO 88 I=1,NU

SUM=SUM+0.1

88 U(I) = SUM

SUM = 0.9

DO 89 I = 1 , NV

SUM = SUM + 0.1

69 V( I ) = SUM

NROWW = NWUV

CALL SF,FIT(6,NNX,NNY,X,Y,A,NNX,10,10,NU,NV,U,V,W,NROWW,IER)

IF(IEP,SE,1)STOP

PRINT \*, 'NU=',NU, 'NV=',NV,U, 'NR=',NROWW

CALL PLTLAR(23HDISTRIBUCION DE PRESTON,-23,.FALSE.,.TRUE.)

11 FORMAT(2I4,F8.3)

CALL PVIIV(190.0,W,240.0,NU,NV,20.,10,0,+1.0,PLTQ1)

CALL PVI,SE(190.0,W,240.0,NU,NV,+1.0,PLTQ2)

CALL PLTKP(190.0,W,240.0,20,40,NU,40,NV,PLTQ3)

CALL PLTEJ

CALL PLTBO

CALL PLTLAR(23HDISTRIBUCION DE PRESTON,-23,.FALSE.,.TRUE.)

CALL PLTEJ

CALL PLTBO

CALL PLTLAR(20HCONTORNOS DE PRESTON,-20,.FALSE.,.TRUE.)

CALL FT,AL

END

@MAP,IF TPF\$,A

IN TPF\$,PP

LIE KE,F,NGP,FE.

END

@AGT TPF\$,A

@P,IF

INICIA LA FORMULACION PARA GENERAR EL SISTEMA DE ECUACIONES EN EL BARRIO EN Y.

```

DO 40 I=1,NMX
ICON=0
DO 50 J=LIMY(I,1),LIMY(I,2)
ICON=ICON+1
CTE1=CTF*MIU(I,J)*CG(I,J)
A(ICON)=(KY(I,J)+KY(I,J-1))/2
C(ICON)=(KY(I,J+1)+KY(I,J))/2
IF(J.NE.LIMY(I,1).AND.J.NE.LIMY(I,2))B(ICON)=-A(ICON)-C(ICON)-CTE1
IF(J.EQ.LIMY(I,1))B(ICON)=-C(ICON)-CTE1
IF(J.EQ.LIMY(I,2))B(ICON)=-A(ICON)-CTE1
IF(I.NE.LIMX(J,1).AND.I.NE.LIMX(J,2))D(ICON)=-((KX(I-1,J)+KX(I,J))
*/2)*MPI(I-1,J)+((KX(I+1,J)+2*KX(I,J)+KX(I-1,J))/2-CTE1)*MPI(I,J)-
*((KX(I+1,J)+KX(I,J))/2)*MPI(I+1,J)-Q(I,J)
IF(LIMX(J,1).EQ.I)D(ICON)=((KX(I+1,J)+KX(I,J))/2-CTE1)*MPI(I,J)-
*((KX(I+1,J)+KX(I,J))/2)*MPI(I+1,J)-Q(I,J)
IF(LIMX(J,2).EQ.I)D(ICON)=-((KX(I-1,J)+KX(I,J))/2)*MPI(I-1,J)+
*((KX(I-1,J)+KX(I,J))/2-CTE1)*MPI(I,J)-Q(I,J)
CONTINUE

```

RESUELVE SISTEMA DE ECUACIONES PARA NIVEL DE TIEMPO N+1

```

CALL THOMAS(A,B,C,D,VEC,ICON)
ICON=0
DO 60 J=LIMY(I,1),LIMY(I,2)
ICON=ICON+1
MPY(I,J)=VEC(ICON)
CONTINUE

```

INTERPOLACION DE LA TABLA DE M(P) PARA ENCONTRAR LOS VALORES RESPECTIVOS DE P.

```
CALL INTER(MPY,MIU,CG,P)
```

VERIFICACION DE LA CONVERGENCIA DE LAS PRESIONES DEL PROCESO ITERATIVO.

```

KCON=0
DO 115 I=1,NMX
DO 115 J=1,NMY
AP=ABS((PS(I,J)-P(I,J))/P(I,J))
IF(AB.GT.TOL)KCON=1
CONTINUE
IF(KCON.EQ.0)GO TO 120

```

VACIA LAS PRESIONES CALCULADAS PARA INICIAR OTRA ITERACION.

```

DO 130 I=1,NMX
DO 130 J=1,NMY

```

VERIFICA QUE NO SE SOBREPASE EL NUMERO MAXIMO DE ITERACIONES.

```

ITER=ITER+1
IF(ITER.LT.NITE)GO TO 110
WRITE(6,('( NUMERO DE ITERACIONES',I5))ITER
GO TO 99

```

IMPRIME LA DISTRIBUCION DE PRESIONES PARA EL TIEMPO D INTERES.

```

120 DO 205 I=1,NMX,10
WRITE(6,1)T
IF(NMX-I+1.E.T.10)THEN
  ITO=NMX
ELSE
  ITO=I+0
END IF
WRITE(6,F1)(K,K=I,ITO)
DO 100 J=1,NMY
IF(J.GT.40)THEN
WRITE(6,1)T
WRITE(6,F1)(K,K=I,ITO)
END IF
100 WRITE(6,F6)J,(P(K,J),AST(K,J),K=I,ITO)
205 WRITE(6,4)
WRITE(6,('(////' NUMERO DE ITERACIONES',I5))ITER
DO 145 J=1,NMY
145 DO 145 I=1,NMX
MP(I,J)=MPY(I,J)
1 FORMAT(1H1,////,58X,'T=',F7.1,' DIAS',////,61X,'NODOS EN X')
2 FORMAT(//,10X,'NODOS EN Y',10(4X,I2,4X))
3 FORMAT(//,10X,4X,I2,4X,10(F8.2,A1,1X))
4 FORMAT(10(//,10X,'NOTA: EL >> REPRESENTA LA LOCALIZACION DE UN PO
*ZO PETROLERO.')
8 FORMAT(58X,'DATOS DE ENTRADA',//,50X,'NUMERO MAXIMO DE NODOS'
*' EN X =' ,I5,//,50X,'NUMERO MAXIMO DE NODOS EN Y =' ,I5,//,50X,
*' LONGITUD DEL BLOQUE =' ,F10.3,' METROS',//,50X,' DENSIDAD =' ,
*' F8.4, //,50X,' TEMPERATURA =' ,F8.4,' GRADOS R.',//,50X,
*' ESPESOR DEL YACIMIENTO (H) =' ,F10.3,' METROS',//,50X,
*' INCREMENTO DEL TIEMPO =' ,I5,' DIAS',//,50X,' POROSIDAD DEL ',
*' GAS',F8.4, //,50X,' PRESION INICIAL =' ,F8.4,' KG/CM2',//,50X,
*' TIEMPO DE SIMULACION =' ,F8.0,' DIAS',//,50X,
*' NUMERO MAXIMO DE ITERACIONES =' ,I5, //,50X,' TOLERANCIA =' ,
*' F8.6)
19 FORMAT(1H1,////,49X,'PERMEABILIDAD EN EL YACIMIENTO X/Y'
*' MILIDARCY')

```

VERIFICA QUE EL TIEMPO DE SIMULACION T ALCANCE EL TIEMPO MAXIMO DE PREDICCIÓN EN CASO DE NO SUCEDER ESTO SE REPITE EL PROCESO.

```

IF(T.LE.TFI)GO TO 5
DO 101 J=1,NMY
DO 101 I=1,NMX
MP(I,J)=MPY(I,J)

```

101 WRITE(16,'(2I4,F8.3)')J,I,P(I,J) -93-  
99 STOP  
END

TIME: 1.056 SEC. IMAGE COUNT: 301

\*\*\*\*\*

09:41:54 (0)

C ESTA SUBROUTINA TRANSFORMA LA PRESION INICIAL A PSEUDOPRESION  
C M(P), GENERANDO LA TABLA QUE NOS VA A SERVIR PARA INTERPOLAR  
C LOS VALORES DE P DADO M(P)  
C  
C

ARGUMENTOS:

C PI PRESION INICIAL DEL ARGUMENTO  
C DEN DENSIDAD DEL YACIMIENTO  
C TEM TEMPERATURA DEL YACIMIENTO  
C CMIU VISCOSIDAD INICIAL  
C CCG COMPRESIBILIDAD INICIAL  
C TABMP MATRIZ DE PRESIONES Y PSEUDOPRESIONES  
C  
C  
C  
C

SUBROUTINE CALCU(PI,DEN,TEM,CMIU,CCG,MP,TABMP)

REAL MP,MPA

DIMENSION TABMP(0:20,2)

DP=PI/20

CONT=0

MPA=0

SUM=0

TABMP(0,1)=0

TABMP(0,2)=0

DO 10 P=DP,PI,DP

CALL ZCOMMU(TEM,P,DEN,Z,CCG,CMIU)

MP=2\*(P/CMIU/Z)

SUM=SUM+(MPA+MP)/2\*DP

CONT=CONT+1

TABMP(CONT,1)=P

TABMP(CONT,2)=SUM

MPA=MP

10 CONTINUE

MP=SUM

RETURN

END

. TIME: 0.319 SEC. IMAGE COUNT: 37

\*\*\*\*



09:42:20 (0)

SUBROUTINE QUE RESUELVE UN SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES  
CUYA REPRESENTACION MATRICIAL TIENE LA FORMA TRIDIAGONAL.  
ES UNA FORMA SIMPLIFICADA DE LA ELIMINACION GAUSSIANA.

ARGUMENTOS:

- A,B,C            COEFICIENTES DE LAS INCOGNITAS
- D                TERMINO INDEPENDIENTE
- X                VECTOR DE SALIDA CON LOS VALORES DE LAS INCOGNITAS
- N                NUMERO DE ECUACIONES

```

SUBROUTINE THOMAS(A,B,C,D,X,N)
DIMENSION A(N),B(N),C(N)
DIMENSION D(N),X(50),BETA(50),GAMA(50)
BETA(1)=B(1)
GAMA(1)=D(1)/BETA(1)
DO 1 I=2,N
  BETA(I)=B(I)-A(I)*C(I-1)/BETA(I-1)
  1 GAMA(I)=(D(I)-A(I)*GAMA(I-1))/BETA(I)
  X(N)=GAMA(N)
  NM1=N-1
  DO 2 J=1,NM1
    I=N-J
    2 X(I)=GAMA(I)-C(I)*X(I+1)/BETA(I)
RETURN
END

```

TIME: 0.235 SEC. IMAGE COUNT: 26

\*\*\*\*\*



09:42:23 (0)

ESTA SUBROUTINA CALCULA LAS PROPIEDADES FISICAS DEL GAS:  
FACTOR DE COMPRESIBILIDAD (Z), VISCOSIDAD (MU) Y COMPRESIBILIDAD (CG).

ARGUMENTOS:

T	TEMPERATURA
PCO	PRESION
SG	DENSIDAD
Z	FACTOR DE COMPRESIBILIDAD
COMP	COMPRESIBILIDAD
U	VISCOSIDAD

SUBROUTINE >COMMU(T,PCO,SG,Z,COMP,U)

DIMENSION A(8)

DATA A/

\*0.31506237,-1.0467099,-0.57832729,0.53530771,-0.61232032,

\*-0.10488813,0.68157001,0.63446549/

IE=0

TEMP=T

PRE=PCO\*14.22

TR=TEMP/(170.0+307.0\*SG)

PCRI=2628.0-217.0\*SG

PR=PRE/PCRI

IF (TR.LT.1.05.OR.TR.GT.3.0)GO TO 140

IF (PR.LT.0.00.OR.PR.GT.15.0)GO TO 140

ITER=0

T1=A(1)\*TR+A(2)+A(3)/(TR\*TR)

T2=A(4)\*TR+A(5)

T3=A(5)\*A(6)

T4=A(7)/(TR\*TR)

T5=A(8)

DR=1.0

DO 1 ITER=1,10

DR2=DR\*DR

DR3=DR2\*DR

DR4=DR2\*DR2

DR5=DR3\*DR2

P=(TR+T1\*DR+T2\*DR2+T3\*DR5)\*DR+T4\*DR3\*(1.0+T5\*DR2)\*EXP(-T5\*DR2)

DP=TR+2.0\*T1\*DR+3.0\*T2\*DR2+6.0\*T3\*DR5+T4\*DR2\*EXP(-T5\*DR2)\*(3.0+3.0

\*\*T5\*DR2-2.0\*T5\*T5\*DR4)

DR1=DR-(P-0.27\*PR)/DP

IF (DR1.GT.0.0)GO TO 100

DR1=0.5\*DR

100 IF (DR1.LT.2.2)GO TO 110

DR1=DR+0.9\*(2.2-DR)

110 IF (ABS(DR-DR1).LT.0.00001)GO TO 130

1 DR=DR1

130 Z=0.27\*PR/(DR1\*TR)

DZ=T1/TR+2.0\*T2/TR\*DR1+5.0\*T3\*DR4/TR+

\*(1.0+T5\*DR2-T5\*T5\*DR4)\*2.0\*T4/TR\*PR1\*EXP(-T5\*DR2)

CR=1.0/PR-0.27\*DZ/(Z\*TR\*(1.0+DR1/7\*DZ))

COMP=CR/PCRI\*14.22

GO TO 5

-99-

140 IE=1

Z=0.0

5 CONTINUE

H=3.5+9.6./TEMP+0.29\*SG

Y=2.4-0.2\*H

RJ=(9.4+0.5H\*SG)\*TEMP\*\*1.5/(209.0+550.0\*SG+TEMP)

R=SG\*PRF/(2.0\*Z\*TEMP)

U=0.0001\*RJ\*EXP(H\*R\*\*Y)

RETURN

END

TIME: 0.378 SEC. IMAGE COUNT: 69

REFERENCIAS

- 1.- Crichlow,H.B., Modern Reservoir Engineering. A Simulation Approach. (Englewood Cliffs, New Jersey:Prentice-Hall,Inc., 1977).
- 2.- Smith,G.D., Numerical Solution of Partial Differential Equations. (London:Oxford University Press.,1971).
- 3.- Peaceman, D.W., Fundamentals of Numerical Reservoir Simulation. (Amsterdam:Elsevier Scientific Publishing Company.,1977).
- 4.- Farouq Ali,S.M, Numerical Reservoir Simulation. (Pennsylvania: University Park, Pennsylvanía.,1971).
- 5.- Simulación Numérica de Yacimientos . Apuntes de la Facultad de Ingeniería de la U.N.A.M.
- 6.- Simulador Composicional de Yacimientos de Gas-Condensado y Aceite Volatil. Publicación de la Subdirección de Explotación I.M.P.
- 7.- Montiel,D.,Herrera,N., "Simulación Numérica de Yacimientos con Fracturas Naturales Cuenca Golfo de Sabinas",Ingeniería Petrolera (Diciembre. 1981),XXI-12,24-44.
- 8.- Numerical Simulation. SPE Reprint Series No. 11 (Dallas,Texas:Society of Petroleum Engineers of AIME,1973).

- 9.- Hassser, N.B., LaSalle, J.P., Sullivan, J.A., Análisis Matemático I. (México:Trillas, 1975).
- 10.- Theory and Practice of the Testing of Gas Wells, 3a Ed., Energy Resources Conservation Board, Alberta Canada (1975).
- 11.- Al-Hussainy, R., Ramey, H.J., Jr. and Crawford, P.B., "The Flow of Real Gases Through Porous Media", JPT (Mayo. 1966) 624-636.
- 12.- Carr, N.L., Kobayashi, R. and Burrows, D.B., "Viscosity of Hydrocarbon Gases Under Pressure", Trans., AIME (1954) 201, 47-55.
- 13.- Kats, D.L., Cornell, D., Kobayashi, R., Poettmann, F.H., Vary, J.A., Elen Bass, J.R., and Weinary, C.F., Handbook of Natural Gas Engineering. (New York: Mc Graw Hill Book Co., Inc, 1959).
- 14.- Al-Hussainy, R., Transient Flow of Ideal and Real Gases Through Porous Media, Ph.D Thesis, Texas A. and M. University (1967).
- 15.- Dranchuk, P.M., and J.H. Abou - Kassemann., "Calculations of Journal Canadian Petroleum (1975).
- 16.- Abramowitz, M. and Stegun, J.A., Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables, National Bureau of Standards, Wash.D.C (1964).

17.- INSTALLATION OF BOSS, FIRST, SSCPLOT, GASSIM, GANET AND  
TUBINGFOW FOR PEMEX; AUGUST 1979, SCIENTIFIC SOFTWARE  
CORPORATION.